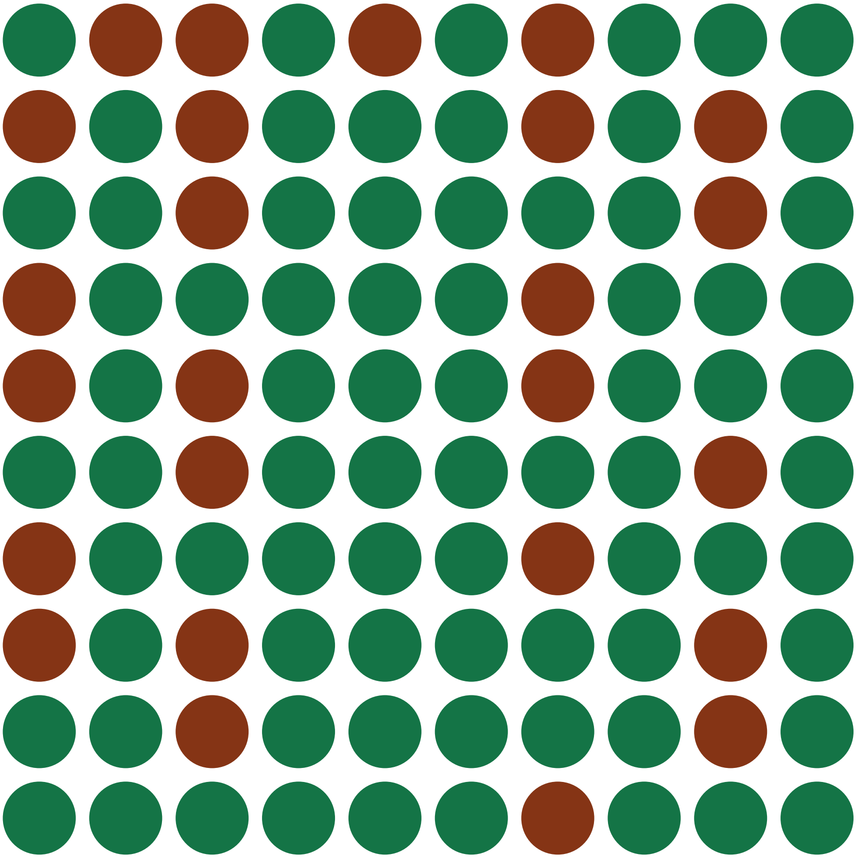
SieB
Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 6 • 2016**
Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik



Martin Rathgeb

George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Gehalt – Genese – Geltung

George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie. Gehalt – Genese – Geltung

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Herausgegeben von

Ralf Krömer und Gregor Nickel

Band 6 (2016)

Martin Rathgeb

George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Gehalt – Genese – Geltung

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Martin Rathgeb
Universität Siegen
Departement Mathematik
Walter-Flex-Str. 3
57068 Siegen

rathgeb@mathematik.uni-siegen.de

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation zur Erlangung eines Doktors der Naturwissenschaften von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Universität Siegen angenommen.
Gutachter: Prof. Dr. Gregor Nickel und PD Dr. Matthias Wille
Tag der mündlichen Prüfung: 23. März 2015

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 6 (2016)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2016

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die Siegener Beiträge bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von Philosophie und Geschichte der Mathematik. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

- Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren.
- Die Rolle der Mathematik in der Wissenschaftsgeschichte, aber auch die gesellschaftliche Rolle der Mathematik und deren historische Bedingtheit sollen untersucht werden.
- Ein spezieller Aspekt betrifft dabei das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf.

Unser herzlicher Dank gilt Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik sowie Kordula Lindner-Jarchow und Martin Schubert für die verlagseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer
Gregor Nickel

Geleitwort zu Band 6

Unter den Ansätzen zu einer Begründung der Mathematik im 20. Jahrhundert spielen die *Laws of Form* von George Spencer Brown (*1923) sicherlich eine ganz besondere Rolle. Zum einen lassen sie sich kaum einer der schulbildenden Doktrinen (Formalismus, Intuitionismus, Logizismus) unterordnen, zum anderen ist ihr nichtformaler Einsatz bei einem basalen, lebensweltlichen Vollzug (Unterscheiden und Bezeichnen) ebenso originell wie für die mathematische Leserschaft unerwartet und schließlich sind Notation und sprachlicher Stil — vorsichtig ausgedrückt — gewöhnungsbedürftig.

Hinzu kommt, dass die inzwischen relativ rege Rezeption der *Laws of Form* in ausgesprochen verschiedene, voneinander nahezu vollständig abgeschottete Bereiche führt und dass jeweils äußerst unterschiedliche Facetten bzw. Kapitel des Buches zur Kenntnis genommen werden: Niklas Luhmann etwa verweist im wesentlichen auf einen Satz in *Chapter 2*, während sich die Bemühungen auf Seiten der Logiker bzw. Mathematiker eher auf eine Rekonstruktion des Kalküls in vertrauterer (formaler) Sprache konzentrieren. So ist es nicht weiter verwunderlich, dass eine zugleich mathematisch wie philosophisch kompetente Interpretation der *Laws of Form* bislang nicht vorliegt. Diese empfindliche Lücke wird durch die vorliegende Schrift nun endlich bearbeitet; sie ist somit inhaltlich in einem Überlappungsbereich bzw. Spannungsfeld von Mathematik, mathematischer Logik und Philosophie der Mathematik angesiedelt.

Entsprechend der Vielschichtigkeit des Werkes ist die vorliegende Arbeit im wesentlichen dreiteilig angelegt: Dabei kommt zunächst der unbefangene Blick des Mathematikers zum Zuge, ein zweiter Teil vermittelt zwischen Mathematik und Philosophie durch einen genauen Blick auf die allmähliche Genese der formalen Sprache der *Laws of Form* und schließlich wird in einem dritten Anlauf Browns Begründungsanliegen untersucht, wobei wiederum drei durchaus unterschiedliche philosophische Perspektiven als Gegenhalt fungieren. Die grundlegende Optik der gesamten Arbeit ist angeregt durch Josef Simons (1930–2016) Zeichenphilosophie, die in Kapitel 3 kurz vorgestellt wird und in Kapitel 7 und 12 nochmals prominent zu Worte kommt. Das in seiner Basalität und Universalität nahezu unbeobachtbare Werk Browns wird auf diese Weise in mehreren Anläufen erschlossen, und es gewinnt schließlich u. a. im Gegenlicht der ähnlich universalen philosophischen Zeichenphilosophie Kontur, so dass eine Diskussion möglich wird, die es vermeiden kann, in ein schlichtes Repitieren des Kalküls zu münden.

Es ist vor allem die Kombination des mathematisch-versierten, (nach)rechenfreudigen Zugangs mit einem extrem genauen Blick auf feinste Details des Brownschen Kalküls *und* der Brownschen Sprache mit einer philosophisch geschulten — und ihrerseits mehrperspektivischen — Reflexion, die die vorliegende Arbeit auszeichnet und ohne die ein Werk wie die *Laws of Form* gar nicht angemessen zu erschließen ist. Erstmals liegt hier ein integrativer Zugang vor, der die mathematische Analyse zugleich von der philosophischen Kritik unterscheidet und beide produktiv miteinander verbindet.

Über die Analyse des speziellen Werkes *Laws of Form* hinaus gelingt es dem Autor am Exemplar aufzuzeigen, auf welch prekäre Weise mathematisches Kalkulieren bzw. Konstruieren zustande kommt, durch welch virtuose Leistung menschlichen Denkens Mathematik überhaupt erst ermöglicht wird.

Siegen, im April 2016 Gregor Nickel

„Welche Probleme wären zu lösen und wie wäre der Grund dafür zu legen, dass wir aufhören, das Denken nicht zu mögen?“

(Stekeler-Weithofer, 2012, 55)

„Ein Zeichen, das wir als Zeichen, aber nicht ganz in seiner Bedeutung verstehen, ist interpretationsbedürftig. Es ist ein unvollkommenes Zeichen bzw. eine unvollkommene Bedeutung. Wir fragen, indem wir nach der Bedeutung fragen, nach der Vollkommenheit des Verstehens.“

(Simon, 1989, 39)

„The only credit I feel entitled to accept in respect of it [to express the Laws of Form; M.R.] is for the instrumental labour of making a record which may, if God so disposes, be articulate and coherent enough to be understood in its temporal context.“

(Brown, 1969, xx)

Meinen Eltern, Geschwistern und Andrea

Vorrede

> „Ich könnte dieses Buch von neuem zu schreiben beginnen. Der Kreislauf zwischen der Arbeit am [...] Material und an den Grundlagen der Interpretation könnte immer weitergehen. Jedoch muss man einen Schnitt machen im Kontinuum der wissenschaftlichen Arbeit, [...] aus der Arbeit einen Text entlassen und ihn seinem Schicksal als Text überlassen, um die Lektüre und die Gespräche wieder aufzunehmen." (Mehrtens, 1990, 9)

Der Status quo ad dato meiner Dissertation soll als der finale gelten. Demnach *ist* sie fertig, sie wird gedruckt und öffentlich.

Damit ist hier und jetzt Raum und Zeit zu danken. Allen Anderen voran danke ich Gregor Nickel, meinem Doktorvater! „Zukunft menschlich gestalten", so lautet das Motto der Universität Siegen; er realisiert es auf ganz besondere, auf nachhaltige Weise: Er gestaltet menschlich schon die Gegenwart. Denn er leitet seine Arbeitsgruppe gütig und weise, indem er Vertrauen in seine Mitarbeiter setzt, in deren Engagement, Interesse und Vermögen. Ihm danke ich für sein Engagement um meine Arbeit – sein offenes Ohr, seine aufrichtige Rede und sein Wissenschaftspathos, das mit Wissenschaftsethos kombiniert ist –, für sein Interesse an dem Ganzen und den Details meiner Arbeit sowie dafür, dass er sein Vermögen erwies, mich im Hinblick auf mathematische Theorie, philosophische Position und Fragen des rechten Ausdrucks sowie guten Stils kompetent zu beraten. Eine Kompetenz in Fragen der Beweistheorie und Philosophie und ebenfalls ein Stilist mit virtuosem Ausdrucksvermögen ist Matthias Wille, der dankenswerterweise das Zweitgutachten zu meiner Arbeit verfasste.

Mit großer Freude gedenke ich des konstruktiven Einflusses, den Uta Freiberg und Markus Haase auf meinen Weg nach Siegen und meine Wege in Siegen hatten. Mein Dank gilt auch den noch nicht genannten Mitorganisatoren der Romseminare in Dresden, Kiel, Siegen und Tübingen, nämlich Gregor Giesen, Michael Korey, Rainer Nagel und Markus Wacker.

Gottlieb Theodor Pilz ist eine wichtige Orientierungsmarke für mich. Er hat so manchen Satz, so manche Seite und ganze Kapitel verhindert. Hoffentlich wird er mir und Anderen weiter zur Stelle sein, um Falsches, Unnötiges, Belangloses in Rede und Schrift zu reduzieren.

Den Mitgliedern der Promotionskommission möchte ich dafür danken, dass sie sich die Zeit nahmen und mir damit die Gelegenheit gaben, Rede und Antwort zu stehen: Uta Freiberg, Ralf Krömer, Gregor Nickel, Hans-Peter Scheffler.

Während meines Dissertationsprojektes gehörte ich dem Fachbereich/Departement Mathematik der Universität Siegen, der Fachgruppe Didaktik der Mathematik und insbesondere der Arbeitsgruppe Philosophie und Geschichte der Mathematik an. Dort waren dankenswerterweise *Wegbegleiter* zugegen: Henrike Allmendinger, Silvia Becher, Ronny Becker, Stephan Berendonk, Steven Bernshausen, Alessa Binder, Thorsten Camps, Rainer Danckwerts, Uta Freiberg, Sabine Grüber, Katharina Hees, Wolfgang Hein, Markus Helmerich, Achim Klein, Daniel König, Ralf Krömer, Katja Lengnink, Gregor Nickel, Theo Overhagen, Shafie Shokrani, Susanne Spies, Gitta Steinleitner, Gabriele Wickel und Matthias Wille.

Als *Wegbereiter* gilt mir so mancher Schul- und Hochschullehrer: Markus Kirschmer, Erika Lüters, Georg Mengele, Klaus Rehkämper, Hubertus Stelzer, Kurt Taglinger und Jörg Wernecke. Infolge intensiver Lektüre begleiten meinen Weg auch Gedanken von George Spencer Brown, Ladislav Kvasz, Josef Simon und Pirmin Stekeler-Weithofer.

Last, not least möchte ich einigen Personen danken, die mir Wegbereiter und Wegbegleiter waren und sind, nämlich meinen treuen (Schul-)Freunden sowie meiner Familie: Barbara Bartmann, Ruth Berkmüller, Florian Biel, Eva Maria Grottschreiber, Agnes Lienert, Christoph Pfeiffer und meinen Eltern, meinen Geschwistern mit ihren Partnern und Kindern sowie dir, Andrea. – Gott sei Dank! Ich habe fertig.

Siegen, im April 2016 Martin Rathgeb

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Präliminarium

> „A principial intention of this essay is to separate what are known as algebras of logic from the subject of logic, and to re-align them with mathematics.
> [...]
> One of the merits of this form of presentation is the gradual building up of mathematical notions and common forms of procedure without any apparent break from common sense.“ (Brown, 1969, xii)

George Spencer-Brown hat in *Laws of Form* (1969) einen Indikationenkalkül in drei Teilen vorgelegt, der in seinem *mittleren* Teil – bei geeigneter Lesart – eine Axiomatisierung der Struktur von Booleschen Algebren bzw. Algebren der Logik ist. Die behandelte Mathematik ist im *ersten* Teil die zu einer Booleschen Algebra gehörige Arithmetik, in der nur mit Konstanten gerechnet wird, und im *dritten* Teil der Ansatz zu einer Theorie sog. paradoxer Gleichungen. Diese Mathematik expliziert, so lautet die Botschaft, die Gesetzmäßigkeiten zweiwertiger Unterscheidungen und einwertiger Bezeichnungen. In der Instanz wahr/falsch ist das ein für Wissenschaft und Alltag fundamentales Konzept.

> „The calculus of indications consists of a set of ways of indicating one or the other of the two states distinguished by the first distinction, so we shall be able to find an application of it to indicative forms of any clear distinction of this kind. It must, for example, apply to cases where doors can be open or shut, or where switches can be on or off, or where lines can be clear or blocked. It will also apply to a language structure on which sentences can be true or false.“ (Brown, 1969, 112)

Zu den Laws of Form sind seit ihrer ersten Veröffentlichung verschiedene Rezensionen und Interpretationen erschienen: Einige behandeln eher nicht-mathematische Voraussetzungen, andere eher die Mathematik selbst. Das ist insbesondere die Algebra mal mit mal ohne Arithmetik und mal mit mal ohne ihre Erweiterung.

Neben den Rezensionen und Interpretationen des Buches gibt es auch eine Vielzahl an mehr oder minder werktreuen, inner- und außermathematischen Anwendungen seiner Grundgedanken und Ergebnisse.

Brown selbst verweist – wie zitiert – auf seine ungewöhnliche Art der Darstellung und darauf, dass sie dem gesunden Menschenverstand adäquat sei. Er erhebt sogar den Anspruch: „mein Text ist so einfach, daß ein intelligentes sechsjähriges Kind folgen kann" (Brown, 1999, xv). Auf die Leser macht das Buch größtenteils einen ganz anderen Eindruck: „[D]ie LoF wirken hermetisch, belanglos, oder allein wie ein neuer, spezifischer mathematisch-logischer Kalkül." (Egidy, 2007, 6).[1] Dieses Phänomen, nach Klarheit und Transparenz zu streben und – quasi nach getaner Arbeit – nur noch Unverständnis zu ernten, zeigt sich speziell in der Mathematik[2] und auch an manchem philosophischen Text. Pirmin Stekeler-Weithofer benennt und skizziert dieses Problem an folgendem Beispiel:

> „Bekanntlich ist die Suche nach Klarheit das Programm von Wittgensteins Philosophie. Dennoch sind die Aphorismen seines mit Recht berühmten *Tractatus logico-philosophicus* orakelartige Merksprüche. [. . .] Es ergibt sich das Paradox, dass Wittgensteins Streben nach Klarheit ihn zu einer Ausdrucksform führt, die man als dunkle oder obskure gerade dem klaren Reden gegenüberstellt. Wie ist das zu verstehen? [. . .] Wir begreifen die Inhalte des Gesagten nur vor dem Hintergrund eines ganz enormen materialen Wissen[s. . . .] Es gibt keine universale Sprache als reine Technik der klaren und deutlichen Artikulation dessen, was ist, oder auch nur dessen, was man sagen will. Es gibt keine Sprache ohne Appell an vorher schon erworbene Kenntnisse, ohne ein mehr oder minder tiefes und mehr oder minder gemeinsames Kennen, Können und Wissen." (Stekeler-Weithofer, 2012, 29)

Wie Wittgenstein ist auch Brown um ein transparentes Vorgehen bemüht. So spricht er im Hinblick auf Verwendungszweck und Gebrauch von Zeichen (intent of signals) zunächst ein generelles Verbot aus und erteilt dann vor diesem Hintergrund durch Injunktionen spezielle Erlaubnisse. Dieses Vorgehen ist für den Zweck der Ver- und Übermittlung von Mathematik das seines Erachtens adäquate Mittel.

> „It may be helpful at this stage to realize that the primary form of mathematical communication is not description, but injunction." (Brown, 1969, 77).

Brown nutzt also eine differenzierte *Befehlssprache*, genauer: verschiedene Injunk-

1 Vgl. (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, Klappentext): „Dieser Text [. . . wird] als schwer verständlich und höchst kryptisch eingestuft."

2 Vgl. (Nickel, 2011) über das „merkwürdige Paradox", dass Mathematik „durch Transparenz verschleiernd ist".

tionsformen, darunter insbesondere Befehle (commands). [3] Seine Anweisungen erachtet er als „clear and unambiguous“. Doch gesteht er ein, dass die „elegance in the calculus“ auf Kosten der Eleganz „in the descriptive context“ (Brown, 1969, 82) geht, und gesteht dem Leser zu, dass er eigene Illustrationen nutzt, solange sie befehlskonform bleiben.

> „He may wander at will, inventing his own illustrations, either consistent or inconsistent with the textual commands.“ (Brown, 1969, 79).

Dieses Ringen Browns um Transparenz findet seinen Widerpart in einer anderen Eigenart des Schriftstücks.

> „[Z]um Beispiel ist jedes Element in diesen *Laws* so wie jedes Wort in einem Gedicht oder jede Note in einer Symphonie abgestimmt auf jedes andere Element der Komposition verfaßt und kann nur dann korrekt formuliert werden, wenn jedes andere Element in der Komposition gleichzeitig im Gemüt bewahrt wird. (Brown, 1999, xiv)

Diese Hürde einer in sich stimmigen und auf sich im Detail und Ganzen abgestimmten Konzeption muss allerdings nicht nur der Autor beim Verfassen genommen haben, sondern diese Hürde muss zudem jeder Leser beim Erfassen nehmen. Dies macht es aber schwierig, in den Text einzusteigen. Die Laws of Form sind tatsächlich ein komplexes Buch und damit nicht minder ein faszinierendes Buch. Als (weitere) Parallele zwischen *Tractatus logico-philosophicus* und *Laws of Form* mag gelten, dass beide in gewissen Sinne zu Recht ‚Kultbücher‘ sind, ersteres ein *philosophisches*, zweiteres ein *mathematisches* (vgl. Fuchs und Hoegl, 2011, 192). Das soll nicht und kann nicht heißen, dass Browns Werk unter Mathematikern geschätzt oder überhaupt nur bekannt wäre, doch soll es – darauf insistiert der Autor – als Mathematikbuch gelten.

> „Ich hoffe, die Leser vergeben mir, wenn ich neuerlich hervorhebe, daß es ein Textbuch der Mathematik ist, keines der Logik oder Philosophie, obgleich sowohl Logik als auch Philosophie natürlich von seiner Anwendung Nutzen ziehen können.“ (Brown, 1999, xix)

Die in diesem Textbuch behandelte Mathematik ist nicht besonders anspruchsvoll, der durchgeführte Vollzug ihrer Grundlegung dagegen ist charmant. Er gefällt mir sehr gut und stimmt nachdenklich. Denn der Leser bekommt tatsächlich eine Einführung in Mathematik, eine Lehrstunde über das Anfangen, und so setzt der Text auch mehrfach an: Bei alltäglichen Prinzipien, die mittels Worten kommuniziert werden, bei arithmetischen und algebraischen Zeichen, die gezeigt werden, und bei geometrischen Zeichen, die der Leser evaluieren soll. Die Laws of Form treiben

3 Vgl. S. 260. Auf diesen injunktiven Ton alias Befehlscharakter der Sprache moderner Mathematik weist insbesondere Herbert Mehrtens mit seiner Monographie (Mehrtens, 1990) hin.

einen Kern des Denkens und der Mathematik im Kleinen, im Modell, aus. Sie arbeiten an Regeln und erarbeiten sich die benötigten Regeln. Brown will den Leser nicht auf x-beliebige Weise Mathematik lehren, sondern er will, dass der Leser Mathematik als Lehre, als Tun, als lehrreiches Tun erlernt, erfährt, erlebt. So ist es im Hinblick auf die Laws of Form ein Wagnis, der Polymorphie der Sache zu begegnen. Nichtsdestotrotz halte ich die Laws of Form für ein Werk, das Aufmerksamkeit bzw. eine Leserschaft verdient. Denn die Laws of Form sind kein gewöhnliches Mathematikbuch. Sie sind in einem mathematischen, philosophischen und logischen Spannungsfeld zu verorten.

> „Die Laws of Form reihen sich ein in die Tradition begründungstheoretischer mathematischer Texte, sie reproduzieren sozusagen das Begründungsinteresse, indem sie zugleich an sich selbst vorführen, dass jeder Versuch eines sicheren (Begründungs-)Anfangs sich laufend selbst sabotiert, weil er Alternativen und Gegenbeobachtungen möglich macht, wo eben dieses verhindert werden soll." (Fuchs und Hoegl, 2011, 190)

Dass „Alternativen und Gegenbeobachtungen" – scheinbar – „verhindert werden soll[en]", sollte im Hinblick auf Browns Ansatz m. E. nicht mit Nachdruck akzentuiert werden. Stattdessen gilt es zu bedenken, dass andere Ansätze eben andere Ansätze sind und dass in diesem Auftreten von Unterschieden und darin, dass sowohl die Ansätze als auch die jeweiligen Unterschiede bezeichnet und beobachtet werden (können), Browns Ansatz selbst wiederum bestätigt wird. Denn bestätigt wird sein *thematischer* Anfang, nämlich das Unterscheiden und Bezeichnen, und weiter sein *methodischer* Anfang, nämlich das Beobachten. Dabei wird die bereits anfängliche Methode des Beobachtens erst im Fortgang (vgl. Chapter 8) und besonders am Ende der Lektüre (vgl. Chapter 12 und bereits Coda in Chapter 11) beobachtet bzw. bezeichnenderweise unterschieden. Somit wird das Beobachten zunächst unbewusst, dann bewusst vollzogen, das heißt: zunächst nur einsinnig, dann doppelsinnig ‚realisiert'.
Die Laws of Form sind demnach anders, als man es heutzutage von einem Lehrbuch der Mathematik erwartet, und sie gelten insbesondere als ein Schlüsselwerk der Systemtheorie (vgl. Baecker, 2005) und des Konstruktivismus (vgl. Pörksen, 2011). Der Herausgeber konstatiert, dass sich die Systemtheorie als einheitlicher Ansatz aller Wissenschaften bislang nicht gegen die herkömmlich genuinen hat durchsetzen können und dass es dazu möglicherweise auch nicht kommen wird. Ebenso kann es sein, dass mit den Laws of Form – entgegen der Einschätzung Browns – kein prominentes mathematisches Problem gelöst werden kann.[4]

4 Vgl. (Kauffman, 2005b) für eine wertschätzende Diskussion der Beiträge Browns hinsichtlich des Vier-Farben-Theorems. Diesbezüglich sind die Würfel noch nicht gefallen, doch entzieht es sich meiner Kenntnis, wie sie fallen werden und wie sie fallen sollten.

1.2 Forschungsfrage

> „Unlike more superfical forms of expertise, mathematics is a way of saying less and less about more and more. A mathematical text is thus not an end in itself, but a key to a world beyond the compass of ordinary description.“ (Brown, 1997, v)

Meine Forschungsfrage nach dem rechten Ort von „George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie“ umfasst drei Aspekte.

(1) GEHALT – Was ist der Indikationenkalkül?
Die Laws of Form im mathematischen, das Produkt spezifizierenden Diskurs: *Mathematik als Struktur*

(2) GENESE – Wie entsteht der Indikationenkalkül?
Die Laws of Form im linguistischen, den Prozess fokussierenden Diskurs: *Mathematik als Tätigkeit*

(3) GELTUNG – Inwiefern ist Browns Mathematik reflektiert?
Die Laws of Form im philosophischen, auf ihren Sinn bezogenen Diskurs: *Spiegelungen der Mathematik*

1.3 Untersuchungsmethodik

> „Ein Zeichen ist das, was wir verstehen. Insofern wir ein Zeichen verstehen, fragen wir nicht, *was* es bedeutet. [. . .] Die Bedeutung eines Zeichens ist das Zeichen, das wir als Antwort auf die Frage nach der Bedeutung verstehen. Es ist die Interpretation des Zeichens. [. . .] Im vollkommenen Verstehen [. . .] tritt kein Zeichen und keine Frage nach „seiner“ Bedeutung ins Bewußtsein. Das Zeichen und seine Interpretation sind dann *eins*. [. . .] Das Nichtverstehen hält im Lesen inne. Es fragt nach der Bedeutung und damit nach einem anderen Zeichen, das *für* das unverstandene stehen, es erklären soll.“ (Simon, 1989, 39)

Die Unterscheidung zwischen *Zeichen* und *Bedeutung* hat Josef Simon in ganz eigenwilliger Weise getroffen, insofern er Zeichen genau die Antwort als Bedeutung habe, durch welche die Frage nach der Bedeutung des Zeichens beantwortet wird, also weitere Nachfragen erübrigt werden (vgl. Kapitel 3.1).
Nehmen wir also für die Lektüre an, dass wir nur *durch* den Text, insofern wir ihn insgesamt als ein Zeichen nehmen, zu seiner Bedeutung gelangen. Diese liegt *hinter* bzw. *in* in ihm als ein Zeichen und *hinter* bzw. *in* den Zeichen in ihm. Wir können also nicht anders, als zu versuchen, die Bedeutung des Textes aus den Zeichen zu erschließen, denen wir bei der Lektüre des Textes begegnen. Da Brown sich mit

seinem Text vornehmlich an den Nicht-Spezialisten wendet, setzt er lediglich eine gewisse Kompetenz im Umgang mit der (englischen) Sprache, dem Zählen und der (üblichen) Zahldarstellung voraus (vgl. Brown, 1969, xi). Die Zeichen, auf die der Leser stößt, entstammen demnach der englischen Alltagssprache.

Eine beweistheoretische bzw. gleichungslogische Lesart des Textes ist zwar möglich, doch scheint sie mir von Brown nicht intendiert. Trotzdem sind beide Lesarten hilfreich bei der Beantwortung der Frage, was der Gehalt der `LoF`-Mathematik ist. Intendiert und für das ausgewiesene Zielpublikum in kanonischer Weise zugänglich ist m. E. die Lesart der Primären Algebra als eine *symbolische Algebra*, nämlich als verallgemeinerte Arithmetik, die neben den Symbolen mit *konstanter* Bedeutung auch noch Symbole mit *variabler* (Zahl-)Bedeutung enthält. Dies ist die Auffassung von Algebra, die der nicht-Spezialist aus seinem Schulunterricht kennt.

Ich rücke Browns Text in meiner Arbeit in verschiedene Kontexte, um dadurch den zentralen Gedanken der Simonschen Zeichenphilosophie ins Spiel zu bringen: Zeichen und insbesondere fremde Zeichen können nicht anders als durch eigene Zeichen erschlossen werden. Brown selbst gibt dem Leser den Hinweis, auf ein solchermaßen geartetes, die eigene Beschränkung bzw. Beschränktheit mitdenkendes Denken, insofern er einerseits seine eigene Person (personal ego) und andererseits seinen zeitlichen Kontext (temporal context) als einen engeren und einen weiteren Grund für die Bedingtheit des Textes und dadurch der Ausformung des dort unternommenen Unterfangens ausweist (vgl. Brown, 1969, xixf.). Demnach wird dem Leser vorliegender Arbeit die mehrfache Zuwendung zum Primärtext nicht zugemutet, sondern *zugestanden*. Der Leser darf und soll das mehrfache Ansetzen also als Entgegenkommen verstehen.

Fragen stellen sich dem Leser, wenn ihm die Zeichen vor Augen stehen bleiben, statt seinen Blick unvermittelt auf ihre Bedeutungen zu lenken; das sind die Fragen nach der Bedeutung der sichtbaren Zeichen. Wenn dem (Nach-)Fragen-Stellenden kein Gesprächspartner die Antworten gibt, so muss er diese Rolle selbst übernehmen und die Antworten sich selbst in solchen Gepflogenheiten, Diskursen und Zeichenprozessen suchen, in denen er sich auch sonst befindet und in die er den Text deswegen stellt. So kann versucht werden, spielerisch Antworten auf die eigenen (Nach-)Fragen über die Bedeutungen der (fremden) Zeichen zu gewinnen, indem Browns Text verschieden gerahmt wird. Der jeweilige Kontext, in den der Leser den Text – im Hinblick auf die Beantwortung seiner jeweiligen Nachfrage – dann stellt, wirft sein eigenes, spezielles Licht auf den Gegenstand und erhellt dadurch von Mal zu Mal nicht jeweils dieselben Details und nicht jeweils auf dieselbe Weise und jede Antwort ist letztlich von nur vorläufigem, unabgeschlossenem und prinzipiell unabschließbarem Charakter.

1.4 Inhalt und Aufbau

Der Hauptteil meiner Arbeit umfasst drei Teile, die je einem Aspekt meiner Forschungsfrage gelten; das sind im Einzelnen: Gehalt, Genese und Geltung. Mit „Gehalt“ und „Genese“ spreche ich zwei der großen Paradigmen der Mathematikphilosophie an, deren historische Wurzeln zumindest bis in die griechische Antike zurückverfolgt werden können, nämlich die beiden Sichtweisen: Mathematik als Struktur und Mathematik als Tätigkeit. In (Hoffmann, 2005, Kapitel 4) firmiert dieser Gegensatz zu „Mathematik als Tätigkeit“ unter der Bezeichnung „Mathematik als Sprache“. Mit meiner Rede von „Struktur“ an Stelle von „Sprache“ akzentuiere ich, dass es in Laws of Form die Sprache selbst ist, an deren Entwicklung sich die „Tätigkeit“ zeigt. In kanonischer, doch nicht ausschließlicher Weise liegt das Augenmerk bei der erstgenannten Sichtweise auf *Mathematik als Produkt*, bei der zweitgenannten auf *Mathematik als Prozess*.

Erster Teil: Gehalt Der erste Teil im Hauptteil meiner Arbeit gilt der Frage: „Was ist der Indikationenkalkül?“ Er steht im Paradigma *Mathematik als Struktur*; demgemäß wird in ihm der *Gehalt* des Kalküls behandelt.
Der Kalkül wird dafür im Kontext eines mathematischen und das *Produkt* spezifizierenden Diskurses auf sein Satzsystem hin betrachtet. Diesen Zugang finde ich durch die beweistheoretische Untersuchung von Daniel Schwartz (Kapitel 4), deren Ergebnisse ich mit meinem gleichungslogischen Zugang ebenfalls erhalte und dabei zudem den Gehalt des Textes besser erfasse (Kapitel 5). Darauf folgen zwei eher technisch gehaltene Hinweise zu diesem Aspekt von *Mathematik als Struktur* (Kapitel 6).

Im Weiteren geht es mir nicht darum, den Gehalt des Indikationenkalküls – eine Variante der Booleschen Arithmetik zuzüglich einer Variante der Booleschen Algebra – noch weiter auszuformen und/oder auf die verschiedenen inner- und außermathematischen Anwendungen des Kalküls und seiner Erweiterung noch weiter einzugehen. Meine Studie, die als bloßer Kommentar und als bloße Exegese missverständen wäre, zentriert stattdessen die Verwurzelung und Einwurzelung, nicht aber die vielfältigen Verästelungen des Indikationenkalküls. Für eine solche Studie ist das in der Sekundärliteratur vielgerühmte und zudem vielgescholtene Chapter 11, das dem Indikationenkalkül ein neues Kapitel aufschlägt, am wenigsten wichtig. Und dafür darf die Lektüre ebenfalls nicht bei Chapter 1 und 2 verbleiben, sondern es sind die Chapter in ihrem systematischen Zusammenhang, der über ihre bloße Abfolge weit hinausgeht, miteinander mehrfach und in vielfältiger Weise in Beziehung zu setzen.

Zweiter Teil: Genese Der zweite Teil im Hauptteil meiner Arbeit gilt der Frage: „Wie entsteht der Indikationenkalkül?“ Er steht im Paradigma *Mathematik als Tätigkeit*; demgemäß wird in ihm die *Genese* (des Gehalts) des Kalküls behandelt. Der Kalkül wird dafür im Kontext eines linguistischen und den *Prozess* fokussierenden Diskurses auf die Ertüchtigung seiner Sprache hin betrachtet. Veranlasst durch die Zeichenphilosophie Joseph Simons, bespreche ich das Buch zunächst in unüblicher Weise von seinem mittleren Teil ausgehend ‚im Rückwärtsgang‘ (Kapitel 7) und konkretisiere dann aus der linguistischen Perspektive von Ladislav Kvasz die Genese der Sprache vorwärts gerichtet (Kapitel 8).

Der mathematische Essay *Laws of Form* kann insbesondere als Mathematik in nuce und als Vorschlag mathematischer Grundlegung gelesen werden. Die im Titel genannten Gesetze der Form zeigen sich dann als *Gesetze des Zeichengebrauchs*, insbesondere des Bezeichnens und des Unterscheidens. Selbige erfahren im Text in Form von unbewusst und bewusst vollzogener *Beobachtung* eine methodische Selbstthematisierung.

Dritter Teil: Geltung Der dritte Teil im Hauptteil meiner Arbeit gilt der Frage: „Inwiefern ist Browns Mathematik reflektiert?“ Er steht im Lichte der Metapher *Spiegelungen der Mathematik*; dabei wird nun die *Geltung* (des Gehalts) der Mathematik Browns behandelt.
Für diese kritische Reflexion wird Browns Projekt einer Grundlegung von Mathematik im Kontext eines philosophischen und auf ihren Sinn bezogenen Diskurses betrachtet. So gehe ich mit Peter Reisingers Rationalitätstypologie auf die Konzeption der Laws of Form ein (Kapitel 10), untersuche mittels der Mathematikphilosophie von Pirmin Stekeler-Weithofer ihren Anfang (Kapitel 11) und beobachte abschließend im Lichte der Zeichenphilosophie Josef Simons die Mathematik von George Spencer Brown (Kapitel 12).

1.5 Darstellungstechnik

> „I have aimed to write so that every special term shall be either defined or made clear by its content.“ (Brown, 1969, xi)

Ich gebrauche die Orthosprache ziemlich sparsam, bilde aber häufig Wortkombinationen – wie bspw. form-Gesetze oder iteration-Gleichung –, deren erstes Wort jeweils ein Fachterminus Browns ist; im Beispiel war dies das Wort „form“, das bereits im Titel von Laws of Form auftritt, und „iteration“, die in der Konsequenz 5 behandelt wird. Mit einigen wenigen Hinweisen zu meiner Darstellungstechnik möchte ich den Leser orientieren.

Das vielfache einfache Anführungszeichen Von Josef Simon ist *Zeichen* und *Bedeutung* ein eigenwilliges Verhältnis zugedacht, insofern die Bedeutung eines Zeichens nämlich genau die *Antwort* sei, welche die Frage nach der Bedeutung des Zeichens beantwortet, also weitere Nachfragen erübrigt (vgl. Kapitel 3.1). Dagegen kann dem ‚common sense' gemäß zwischen einem sprachlichen Zeichen und seiner Bedeutung schlicht und auf Dauer unterscheiden werden. Dieser Unterschied kann zudem einfach zum Ausdruck gebracht werden: Ein Zeichen hat seine ihm angestammte Bedeutung; geschrieben wird das Zeichen, gemeint ist seine Bedeutung und das auch dann, wenn das Zeichen nicht verstanden bzw. seine Bedeutung nicht gewusst wird.
Die (Um-)Rahmung eines sprachlichen Zeichens mittels einfacher Anführungszeichen ist gängiger Usus, um die Referenz auf die Bedeutung eines Zeichens zu unterbrechen, das Zeichen also zu de-referenzieren. Dies soll das Zeichen selbst visibilisieren, wogegen verstandene Zeichen für gewöhnlich invisibel sind, weil sie eben ihre Bedeutung und nicht sich selbst zum Ausdruck bringen: Beispielsweise ist ‚Paris' ein Zeichen für die französische Stadt Paris, nämlich ihr Eigenname. Es ist ‚Paris' ein Wort aus fünf Buchstaben und zudem der Eigenname des trojanischen Helden Paris.
Diese (Um-)Rahmung mittels einfacher Anführungszeichen ist allerdings selbst ein Zeichen und seine Bedeutung ist nicht in jedem Kontext die De-Referenzierung des umrahmten Zeichens: Die Bedeutung der einfachen Anführungszeichen kann auch eine andere Form der Ironisierung des umrahmten Zeichens sein. So werden mittels einfacher Anführungszeichen oft Zitate in Zitaten angezeigt –, eine Gepflogenheit, der ich im Folgenden nicht folge. Mittels einfacher Anführungszeichen wird bspw. auch angezeigt, wenn ein Zeichen bzw. seine Bedeutung nicht ganz erst gemeint ist. Oder es werden die einfachen Anführungszeichen zwar zum Ausweis des Zeichens, nicht aber zu seiner Dereferenzierung verwendet.
Als Alternative zur Explikation der Unterscheidung zwischen Zeichen und Bedeutung mittels einfacher Anführungszeichen verwende ich oftmals die explizite Ausweisung des Zeichens als Zeichen sowie gleichermaßen und unnötigerweise der Bedeutung als Bedeutung. Dieserart bedeutet ‚Das Zeichen Paris hat die Bedeutung Paris' dasselbe wie ‚‚Paris' hat die Bedeutung Paris'. Meines Erachtens ist die Explikation des Unterschiedes zwischen Zeichen und Bedeutung in exegetischen Erläuterungen und philosophischen Untersuchungen zumeist angebracht, in mathematisch gehaltenen Kontexten dagegen selten; dieserart werde ich verfahren und zudem in mathematisch gehaltenen Kontexten eher von *Symbolen* und deren *Interpretationen* als von Zeichen und deren Bedeutungen sprechen.

Im Rückblick auf Simons eigenwillige Unterscheidung zwischen *Zeichen* und *Bedeutung* ist zu sagen: Insofern das einfache Anführungszeichen verschiedenerlei Anwendung findet und es dabei verschiedene Bedeutungen hat, ist es nicht eigentlich *ein* Zeichen mit unterschiedlichen Bedeutungen, sondern es sind *unterschiedliche*

Zeichen mit ihrer je eigenen Bedeutung – bei untereinander gleicher Schreibweise.

Unterschiedliche Sprachgebräuche Es widerspricht nicht dem Sprachgebrauch von Josef Simon und auch nicht dem gängigen Sprachgebrauch, dass für ein-und-denselben Begriff in verschiedenen Kontexten gelegentlich verschiedene Wörter verwendet werden. Hierfür liefern heutzutage m. E. ‚Abbildungen', ‚Funktionen' und ‚Operationen' das gängigste Beispiel in der Mathematik, insofern diese drei Zeichen bezüglich ihrer Bedeutung nicht unterschieden werden müssen.
In einschlägig mathematischen Kontexten und damit in stark reglementierten Fällen werde ich meist von Symbolen statt von Zeichen sprechen. Für ‚unterschiedliche Sprachgebräuche' ist im Folgenden allerdings bedeutsam, dass Brown eigene Wörter für durchaus übliche Begriffe verwendet, nämlich „arrangement" für Term (ein sprachliches Gebilde) und „expression" für Termfunktion (eine durch den Term und die Interpretation seiner Symbole induzierte Abbildung). Im Hinblick auf Kalküle wird im Allgemeinen wiederum eher von Figuren als von Termen gesprochen (vgl. Lorenzen, 1970, 58). Wird der formale Kontext allerdings geweitet, so wird im Allgemeinen nur noch von *Wörtern in einem bestimmten Alphabet* gesprochen, nämlich von endlichen Zeichenketten über einem bestimmten Alphabet (vgl. Schreiber, 1977, Kapitel 1: Zeichenreihen).

Browns spezifische Labels Ich verwende im Folgenden „LoF" oftmals als Kurzform für „Laws of Form" und beziehe mich damit dann nicht speziell auf die beiden im Buch behandelten form-Gesetze, sondern auf das Buch (Brown, 1969) selbst. Die englische Erstausgabe ist also meine Hauptreferenz. Als englische Alternative mit einigen zusätzlichen Fussnoten, einigen Änderungen im Haupttext und mehreren zusätzlichen Anhängen – leider auch vielen Druckfehlern – nutze ich die ad dato aktuellste Auflage des Buches (Brown, 2008). Meine deutsche Alternative ist die Edition (Brown, 1999), die mit der früheren Auflage (Brown, 1997) ebenfalls nicht zur Gänze übereinstimmt.
Ich verwende folgende Bezeichnungen für die kanonisch korrespondierenden Texteinheiten in den `LoF`: „Chapter" (Gen.: n.; Pl.: Chapter), „Section" (Gen.: wbl.; Pl.: Sections) und „Notes"; bspw. ist „in den Notes zu Chapter 4" der Verweis auf (Brown, 1969, 85–87). Mit dem Zeichen Kapitel verweise ich vornehmlich auf meine Arbeit, selten ist damit von korrespondierenden Textteilen in anderen Büchern die Rede. Mehr oder minder gewohnte Zeichen sind dem Leser wohl die folgenden (zuzüglich meiner Eindeutschung):[5] canon (Kanon), consequence (Konsequenz), demonstration (Demonstration), example (Beispiel), illustration (Illustration), proof (Beweis), theorem (Theorem). Auch die termini technici Browns übersetze ich,

5 Ich orientiere mich mit meiner jeweiligen Übersetzung an (Brown, 1999).

um sie besser in die deutschen Sätze eingliedern zu können: arrangement (Arrangement), calculus of indication (Indikationenkalkül), cross (Kreuz), distinction (Distinktion, Unterscheidung), expression (Expression, Ausdruck), form (Form), indication (Indikation, Bezeichnung, Hinweis), Browns Sonderzeichen   trägt den Namen Ock, sein Sonderzeichen ⏋ dagegen heißt cross (Kreuz).[6] Weiters verwende ich die Bezeichnungen Theorem 1, Theorem 2 etc. als Hinweise auf Browns „first theorem“, „second theorem“ etc.

6 Ich danke Achim Klein dafür, dass er mir dieses und weitere Sonderzeichen ‚gebastelt‘ hat.

Kapitel 2

Vororientierung über George Spencer Brown und Laws of Form

Leider ist über George Spencer Brown meines Wissens bislang nicht historisch gearbeitet worden. So gibt es zwar gewisse Selbstauskünfte von Brown und Anekdotisches von Anderen, aber kaum Verlässliches. Manches findet sich im Internet, beinahe unverbürgt. Nachfolgende *Biographische Notiz* erhebt keinen besonderen Anspruch auf Stichhaltigkeit.[7]

2.1 Anmerkungen zum Autor

> „G SPENCER BROWN is by training a man of science. He studied medicine at the London Hospital Medical College and psychology at Cambridge University, and later worked with Wittgenstein and Russell in philosophy and mathematics. He held academic positions at both Oxford and London Universities, and also writes non-mathematical books under the name James Keys." (Brown, 1972, 142)

George Spencer Brown alias George Spencer-Brown (Pseudonyme: James Keys und Richard Leroy) ist am 2. April 1923 in Grimsby, Lincolnshire, England geboren. Er studierte von 1940 bis 1943 an der Universität von London und am London Hospital Medical College. Nach seinem Aufenthalt in der Royal Navy – er wurde Funker, Nachrichtentechniker und arbeitete auch als Hypno-Schmerztherapeut – begann er 1947 ein Studium am Trinity College Cambridge; dort arbeitete er 1950/51 mit Ludwig Wittgenstein zusammen. Er wechselte 1952 von Cambridge nach Christ

7 Vgl. (Grant, 1971), (Brown, 1969), (Brown, 1970), (Brown, 1971), (Brown, 1972), (Brown, 1993), (Brown, 1994), (Brown, 1995), (Brown, 2007), (Baecker, 1997), (Baecker, 2008), (Baecker, 2013), (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, Teil 2), (Shoup und James, 2008) und (Whitaker, 2001). Anekdotisches enthält insbesondere der Blog „Begegnungen mit Spencer-Brown", den Fritz B. Simon 2013 angekündigt und begonnen hat (vgl. Simon, 2013).

Church Oxford. Im Jahre 1957 veröffentlichte er seine von William Calvert Kneale betreute Doktorarbeit „Probability and Scientific Inference“ (Brown, 1957) und arbeitete ab 1960 mit Bertrand Russell zusammen.

In den 1960er Jahren war er ‚Senior Lecturer in Formal Mathematics‘ an der Universität von London im ‚Department of Extramural Studies‘ und war als Ingenieur für Simon-MEL Distribution Engineering, Mullard Equipment, Ltd., die britische Bahn und als Berater des britischen Militärs tätig. Ein weiteres Betätigungsfeld waren die Psychotherapie und Kindererziehung; dafür hat er einerseits zeitweise mit dem Psychiater Ronald D. Laing zusammengearbeitet, andererseits den „Sentinel Trust for Creative Education“ gegründet und stand selbigem als Präsident vor. Im Jahre 1969 wurde er ein Mitglied des ‚Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics‘ der Universität von Cambrigde. Er hatte mehrere Gastprofessuren inne: 1976 in der Mathematik an der University of Western Australia, 1977 in der Informatik an der Stanford-Universität, 1980–81 für reine Mathematik an der Universität von Maryland. Danaben arbeitete er auch als Berater des amerikanischen Militärs bezüglich Codes, Code-Entschlüsselung und Optik.

Ich möchte anmerken, dass George Spencer Brown bzw. George Spencer-Brown sich des Weiteren gerne als Schriftsteller, Liedermacher, Schachspieler, Spieleerfinder, Segelflieger (mit zwei Weltrekorden) u.ä. beschreibt. Doch wie lautet denn nun die korrekte Schreibweise seines Namens? Zunächst ist festzustellen, dass bspw. in (Brown, 1957), (Brown, 1969) und (Brown, 1971) jeweils die Schreibweise „George Spencer Brown“ verwendet wurde; in bspw. (Brown, 1997), (Brown, 1999), (Brown, 2007) und (Brown, 2008) dagegen die Schreibweise „George Spencer-Brown“. Grund für die Änderung mag gewesen sein, dass ohne Bindestrich die Zuteilung der drei Wörter auf Vor- und Nachnamen nicht immer korrekt erfolgte:

> „Irgendwann in den 1990er Jahren ergänzt Spencer-Brown zur Verwirrung der Bibliothekare, die ihn bisher unter Brown geführt hatten, seinen Nachnamen um einen Bindestrich.“ (Baecker, 2013)

Die Zeitangabe selbst ist deutlich zu spät angesetzt, da der Bindestrich schon in (Grant, 1971) verwendet worden ist.

2.2 Inhalt und Aufbau des Werks

> „This book defies any simple description, but it may not be doing it too much violence to say that it is an analysis (through practice) of the concept of making a distinction.“ (Kauffman, 1977, 701)

Der doppelte Kerngedanke Auf die „idea of distinction“ und „idea of indication“ hat Brown die Primäre Arithmetik und damit auch die Primäre Algebra zurückgeführt, die er selbst aus den üblichen Booleschen Algebren kondensierte, indem er die Algebra arithmetisierte. Brown setzt bei seiner Axiomatisierung der Algebra also bewusst auf eine Erfahrungssättigung durch die Arithmetik: Er entwickelt in seinem Text das algebraische Denken *in* der Arithmetik anhand von wertäquivalenten Transformationen und von Ausdrücken, die bezüglich ihres Werts irrelevant sind. Dadurch rechtfertigt er die Algebra Schritt für Schritt als Darstellungsmittel für die Arithmetik.

> We take as given the idea of distinction and the idea of indication, and that we cannot make an indication without drawing a distinction. We take, therefore, the form of distinction for the form. (Brown, 1969, 1)

George Spencer Brown fängt also mit „distinction“ (Distinktion, Unterscheidung, Unterscheiden) und „indication"(Indikation, Bezeichnung, Bezeichnen) an. Er formuliert mittels zweier unterschiedlicher *Bezeichnungen*, das sind genauer betrachtet: „idea of distinction“ und „idea of indication“, eine den Ansatz bezeichnende *Unterscheidung*. Das sind unterschiedliche Bezeichnungen von mutmaßlich voneinander zu unterscheidender Bedeutung; sie fungieren in bezeichnender Weise unterscheidend. Das vorausgesetzte Begriffspaar Unterscheidung/Bezeichnung bzw. das Paar von Vorformen solcher Begriffe, Konzepte oder Prinzipien, ist also ein Ansatz, der selbst als zweifacher erkannt werden kann, nämlich als Anwendungsfall zweier ihm in gewissem Sinne inhärenter Begriffe, Konzepte oder Prinzipien. Das ist einerseits die explizite *Bezeichnung* „Unterscheidung/Bezeichnung“ selbst und andererseits die dieser bezeichneten Unterscheidung impliziten, zu unterscheidenden Bezeichnungen „Unterscheidung“ und „Bezeichnung“.

Zwei Varianten des doppelten Kerngedankens Die im Titel „Laws of Form“ genannten *Gesetze der Form* sind – genauer betrachtet – zwei *Gesetze der Indikation*. Wir wollen das noch genauer betrachten: Da sind zunächst, nämlich schon in Chapter 1,

(1) einerseits *zwei* Möglichkeiten der *Indikation*, nämlich das sog. Nennen (calling) und das sog. Kreuzen (crossing), und

(2) andererseits *zwei* Möglichkeiten der *Iteration*, nämlich die Iteration des Nennens und die Iteration des Kreuzens.

Doch steht den Vorbereitungen in Chapter 2 gemäß und insbesondere in Folge seiner Definition in Chapter 3 für das simple Nennen und für das simple Kreuzen im Indikationenkalkül insgesamt nur ein (und dasselbe) Zeichen zur Verfügung; unterscheidbar voneinander sind lediglich zwei Möglichkeiten der Iteration des einen Zeichens. Die beiden *Gesetze der Indikation* sind demnach zwei *Gesetze*

der Iteration (der beiden Möglichkeiten der Indikation). Vergleicht man nun das Auftreten eines einzelnen Zeichens mit dem Auftreten zweier Zeichen, einmal gemäß der einen, einmal gemäß der anderen Iteration, so ist die eine Iteration *affirmierend*, die andere *negierend*. Eine Pointe der von Brown konzipierten Mathematik ist, dass die in Chapter 1 für eine Iteration formulierte Negation eine *unbestimmte* Negation sein darf, dass selbige in Chapter 2 auf spezifische Weise ‚bestimmt' wird und im Indikationenkalkül mitunter diese *bestimmte* Negation das Rechnen regelt.
Brown setzt diese beiden Gesetze in Gleichungen um, mittels derer er zunächst einen arithmetischen Kalkül definiert, für den er dann einen algebraischen Kalkül definiert.[8] Brown zeigt eine *Genese* von Mathematik durch Erweiterung der Sprache und Mehrung der Beweismethoden. Dafür setzt er das (Meta-)Begriffspaar Distinktion/Indikation (in nuce) voraus, das dem Leser aus der Lebenswelt schon bekannt und vertraut ist, das dann durch die Ausführungen spezifiziert und damit nochmals neu und anders bekannt und vertraut wird.

Der Inhalt des Werks Es umfasst (Brown, 1969) zwölf Chapter. In Chapter 1 und 2 erfolgt die *Formung* der für den Indikationenkalkül benötigten Zeichen auf kleinschrittige Weise und zwar „systematisch an den Schnittstellen zwischen Semiotik, Pragmatik, Syntax und Semantik" (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 87). Der Text enthält also zunächst eine Einführung in *seine* Mathematik und betont weiter deren zwanglose Genese: Insgesamt betrachtet werden Zeichen alltäglicher Orientierung bei expliziter Schließung der Interpretationsspielräume formal (re-)konzeptualisiert. Mit *Unterscheidung* (distinction) und *Bezeichnung* (indication) werden in Chapter 1 zwei gewöhnliche Zeichen aufgegriffen, die wir im Alltag durchaus häufig gebrauchen: Das erste wird *definiert*, für das zweite werden zwei Gesetze *formuliert*. Im Chapter 2 werden diese Formulierungen *formalisiert*: Dafür wird zunächst eine *Sache* generiert und in deren Vordergrund dann mit unkonventionellen Zeichen eine Zeichen- bzw. Symbolsprache etabliert. Dadurch werden zwei Gleichungen zur Geltung gebracht. Der Text bietet dem Leser insbesondere in den Notes einige Illustrationen an. Die Formalisierung wird unter Verwendung eines weiteren Zeichens in Chapter 3 *kalkülisiert*: Dafür werden die Formeln direkt zu Initialen und indirekt zu Transformationsregeln eines Kalküls für eine binäre Arithmetik endlicher *Arrangements*. Der Kalkül wird in Chapter 4 von *außen* betrachtet und in Chapter 5 zu einem Kalkül seiner Algebra erweitert. Dieser Kalkül wird in Chapter 6 von *innen*, in Chapter 7 von *außen* und in Chapter 8 bis 10 im Hinblick auf seine Arithmetik untersucht. Das Chapter 11 ist Überlegungen zu algebraischen Gleichungen vorbehalten, die durch kein endliches arithmetisches Arrangement

8 In (Rathgeb, 2013) habe ich gezeigt, dass Brown hierin wesentlich von George Boole abweicht, insofern dieser einen etablierten Kalkül ad hoc an die Bedürfnisse der Logik anpasst, jener aber dafür einen möglichst einfachen Kalkül schuf. Das Vorgehen Booles ist pointiert skizziert in (vgl. Nickel und Rathgeb, 2014).

gelöst werden; die Erwägungen stehen außerhalb des Kalküls und gelten der Beseitigung einer Beschränkung in der Definition aus Chapter 1. Dagegen werden die beiden Gesetze von Chapter 1 in Chapter 12 mehrmals *neu* gerechtfertigt.

Der Aufbau des Werks Zusammengefasst können also sechs Themen ausgezeichnet und den Chaptern (Ch) der `LoF` wie folgt zugeordnet werden:

(1) *Proto-Mathematik aus der Lebenswelt gewonnen*
The form (Ch1), Forms taken out of the form (Ch2)

(2) *Arithmetik von innen und von außen*
The conception of calculation (Ch3), The primary arithmetic (Ch4)

(3) *Algebraisierung der Arithmetik*
A calculus taken out of the calculus (Ch5)

(4) *Algebra von innen und von außen*
The primary algebra (Ch6), Theorems of the second order (Ch7)

(5) *Algebra bezüglich Arithmetik und bezüglich sich selbst*
Re-uniting the two orders (Ch8), Completeness (Ch9), Independence (Ch10)

(6) *Neuanfang der Algebra und der Arithmetik*
Equations of the second degree (Ch11), Re-entry into the form (Ch12)

Diese Chapter sind jeweils mit Endnoten versehen und es gehen ihnen insgesamt drei Texte voran: „Preface“, „Introduction“ und „A note on the mathematical approach“; weitere Texte folgen nach. Das sind zunächst zwei Anhänge: „Appendix 1. *Proofs of Sheffer's postulates*“ und „Appendix 2. *The calculus interpreted for logic*“ sowie weiters zwei Register: „Index of references“ und „Index of forms“.[9]

2.3 Skizze einer Rezeptionsgeschichte

> „Whether this text can still find an audience 23 years after its creation may be questionable. Still, a considerable literature has grown up around Spencer-Brown and the Laws of Form; the Internet bibliography ranges over mathematical, metaphysical, practical and even fictive aspects of the Laws of Form. There is apparently an audience for this material, although it is formed of many distinct parts.“ (Cliff Barney: „Prolog. Gurus in the mud“; zitiert nach: (Shoup und James, 2008))

9 Vgl. (Orchard, 1975) für eine etwas ausführlichere, doch ebenfalls knappe Zusammenfassung und Kontextbestimmung für die `LoF`.

Vorphase Für seine Laws of Form fand Brown jahrelang keinen Verleger, dann aber in Lord Bertrand Russell einen geeigneten Schirmherren und folglich in Sir Stanley Unwin einen bereitwilligen Verleger. In seiner Autobiographie schreibt Bertrand Russell:

> „In 1965, a young mathematician, G. Spencer Brown, pressed me to go over his work [...]. As I thought well of what little of his work I had previously seen, [...] I agreed to discuss it with him. [...] I greatly enoyed those few days, especially as his work was both original and, it seemed to me, excellent." (Russell, 1998, 664)[10]

Frühphase Die erste Auflage ist auf den 17. April 1969 datiert (vgl. Brown, 2008, vii). Der angesehene Kybernetiker Heinz von Foerster war nach Russell ein weiterer Multiplikator der `LoF`. Seine rühmende Rezension[11] „schuf augenblicklich eine umfassende Resonanz", so dass umgehend weitere Auflagen in den Druck gingen. Alan Watts widmete die erste Session der ‚American University of the Masters' Brown und seinem Werk (vgl. Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 18).
Weitere Rezensionen: Entschieden positiv fiel die knappe Rezension von Stafford Beer (Beer, 1969) sowie die mathematisch orientierte von Louis Kauffman (Kauffman, 1977) und die logisch-philosophisch interessierte Rezension von Robert Orchard (Orchard, 1975) aus. Verhalten, aber nicht abfällig war die mathematisch gehaltene von Bernhard Banascheswki (Banaschewski, 1977). Darauf folgten dann bspw. die ausführlicheren Arbeiten (Cull und Frank, 1979) (eher abfällig), (Kohout und Pinkava, 1980) (interessiert) und (Schwartz, 1981) (wertschätzend).
Von 1975 bis 1978 hat der Mathematiker Louis Hirsch Kauffman in Chicago einen interdisziplinären Spencer-Brown-Zirkel um sich versammelt (vgl. Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 20).

Deutschsprachiger Raum Das Erscheinen der Laws of Form ist also in ihrer ersten Dekade nicht unbemerkt geblieben und auch in der jüngst vergangenen Dekade sind sie vielbeachtet, insbesondere im deutschsprachigen Raum, in dem auch vorliegende Arbeit erscheinen wird. Als Multiplikatoren haben dort gewirkt: Fritz B. Simon für ihre Anwendung in der klinischen Epistemologie (vgl. Simon, 1988), Niklas Luhmann sowie Dirk Baecker durch ihre vornehmlich soziologische Rezeption und zudem die Veröffentlichung der beiden Aufsatzsammlungen (Baecker, 1993a) und (Baecker, 1993b).
Die Rezeption der Laws of Form durch Niklas Luhmann ist wiederum bedeutend,

10 Vgl. (Brown, 1999, xxi, 122–125).

11 Vgl. Whole Earth Catalog, Spring 1970, 14. Diese Rezension ist in (Baecker, 1993a, 9–11) in deutscher Übersetzung abgedruckt, allerdings mit dem falschen Verweis auf „Whole Earth Catalog, Frühling 1969, S. 14.". Die Rezension erschien erst in der Ausgabe „Spring 1970".

interessant und kompliziert – insbesondere: fragwürdig und diskutabel – genug, um selbst untersucht zu werden; vgl. dazu (Hennig, 2000), (Egidy, 2007), (Urban, 2009) und (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 257–72).

Mittlerweilse zählen die Laws of Form zu den Schlüsselwerken der Systemtheorie und den Schlüsselwerken des Konstruktivismus, insofern sie in den beiden gleichnamigen Bänden (Baecker, 2005) und (Pörksen, 2011) besprochen werden.
Matthias Varga von Kibéd hat aus den `LoF` eine systemische Therapieform entwickelt, die sog. Unterscheidungsformaufstellung (vgl. Varga von Kibéd und Ferrari, 2008). Er wirkte aber noch auf eine ganz andere Weise multiplizierend, indem er nämlich in München um das Jahr 2000 herum ein sechsjähriges und interdisziplinär besetztes Forschungskolloquium geleitet hat, aus welchem Teilnehmer hervorgingen, die selbst wiederum Studierenden ein fünfsemestriges Textexegese-Seminar angeboten haben (vgl. Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 6).
Tatjana Schönwälder-Kuntze, Thomas Hölscher und Katrin Wille haben ihre Einsichten als äußerst kompetenten Textkommentar (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, Erstauflage 2004) in schriftlicher Form veröffentlicht, der zudem auf etwa 80 Seiten fünf Anwendungsfelder der Arbeit Browns ausweist.

> „Unser Hauptinteresse liegt darin, die *Laws of Form* als begriffliche Arbeit am Unterscheidungsbegriff und dem daraus resultierenden Formbegriff zu analysieren, um so ein angemessenes Verständnis für den *Kalkül des Hinweisens* zu entwickeln. [...] Unsere Aufmerksamkeit liegt dabei auf der begrifflichen Entwicklung und darauf, den Spencer Brownschen Ansatz in möglichst immanenter Gedankenentwicklung aufzuzeigen.“ (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 11)

Wie ich in Kapitel 1.2 und 1.3 bereits ausgeführt habe, geht es mir *gleichermaßen* um die zentralen Begriffe Distinktion und Form und auch um Indikation mit dem von Brown für sie entwickelten Kalkül. Doch gilt meine Aufmerksamkeit eben *nicht* von Anfang an seiner Gedankenentwicklung und ich versuche *keine* möglichst immanente Lesart, vielmehr versuche ich möglichst keiner immanenten Lesart zu verfallen und versuche mich dessen methodisch zu versichern. Die Autoren von (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009) nennen ihr Vorgehen ein *philosophisches* Befragen. Dann spezifiziere ich, zum Zwecke der Abgrenzung, mein Vorgehen als ein *mathematisch-philosophisches* Befragen, insofern es *mathematisch-orientiert* und zudem ein *mathematisches* ist: Denn ich folge dem philosophischen Fingerzeig von Josef Simon und setze demnach bei bekannten mathematischen Zeichen und bei bekanntem mathematischen Umgang mit Zeichen an. Weiter untersuche ich die bekannten (Voraus-)Setzungen, das ist die Definition der Primären Algebra in Chapter 5, nach ihren Konsequenzen und suche nach ihren Anfängen und deren voraussetzungslosem Anfang; Platon grenzt diesbezüglich mathematisches und philosophisches Erkenntnisstreben voneinander ab (vgl. Politeia, 511b–c). Eine weitere, ebenfalls weniger stark am Vorgehen im Original orientierte Einführung bietet das Buch (Lau, 2006, Erstauflage 2005; liegt seit 2008 in dritter Auflage vor). Die Laws of Form von George Spencer Brown sind darüber hinaus in verschiedenen Dissertationsarbeiten ein Teilthema, nämlich in „Beobachtung der Wirklichkeit. Differenztheorie und die zwei Wahrheiten in der buddhistischen Madhymika-Philosophie“ (Egidy, 2007), in „Form und In-Formation. Zur Logik selbstreferentieller Strukturgenese“ (Weiss, 2006), in „Anatomie des Comics. Psychosemiotische Medienanalyse“ (Packard, 2006) und in „Die Lügner-Paradoxie. Kleine Philosophie-Geschichte des Widerspruchs“ (Brunnsteiner, 2009).

Kapitel 3

Josef Simons Zeichenphilosophie als philosophische Optik

Um den fundamentalen Ausgangspunkt und das universale Anliegen von George Spencer Brown überhaupt dezidiert in den Blick zu bekommen, nutze ich die nicht weniger fundamentale und nicht weniger universale Zeichenphilosophie von Josef Simon als Optik. Diese philosophische Optik liefert einen nützlichen Ausgangspunkt und eine hilfreiche Außenperspektive, um das (mathematik-)philosophische, doch nicht zuletzt mathematische Vorgehen in den Laws of Form als ein mehr oder minder *Fremdes* in den Blick zu bekommen.
So beginne ich die Texterschließung an einem mathematisch bekannten Punkt (Chapter 5 bis 10) und in Anlehnung an eine vorliegende mathematische Untersuchung. Im Rückgriff auf sowie unter Verwendung von diesen zusätzlichen, herkömmlichen Zeichen (vgl. Kapitel 4 und 5) wird nachfolgend der Text in großen Teilen aus sich selbst heraus erschlossen (vgl. Kapitel 7).[12]

3.1 Eine philosophische Optik

In der Monographie „Philosophie des Zeichens“ (Simon, 1989) hat Josef Simon seine Zeichenphilosophie dargelegt. Sie war im November 1990 der Gegenstand eines zweitägigen Symposions, zu dem es eine Aufsatzsammlung der zum Teil weiter ausgearbeiteten Vorträge gibt (Borsche und Stegmaier, 1992). In seinen dort abgedruckten „Bemerkungen zu den Beiträgen zur Philosophie des Zeichens“ (Simon, 1992) und seither noch in anderen Aufsätzen hat Simon seine Zeichenphilosophie

12 Kapitel 10 kann mit Gewinn als eine Fortsetzung von Kapitel 3 gelesen werden, insofern dort Simons Konzept einer Philosophie, die eine *Philosophie des Zeichens* ist, im Kontext einer Kritik der Rationalitätstypologie von Peter Reisinger in Inhalt und in Methode weiter verdeutlicht wird.

immer wieder neu und weiter expliziert, indem er mittels ihrer verschiedene Kontexte und dadurch sie selbst beleuchtete. Solche Aufsätze sind insbesondere in den sechs Bänden der Schriftenreihe erschienen, die zu den in den Jahren 1993 bis 1998 jeweils im März veranstalteten Kolloquien der Reihe „Zeichen und Interpretation" von Josef Simon und Werner Stegmaier herausgegeben wurde.

Die Zeichenphilosophie von Josef Simon geht von einem Zeichenbegriff aus, der von dem gewöhnlichen, sogenannten metaphysischen Zeichen- und Interpretationsbegriff originell abweicht. Der *richtige* Zeichenbegriff sei nämlich der, der auftretende Fragen *besser*, insbesondere dann stimmiger, zu erklären vermag als konkurrierende, mitunter traditionelle Ansätze. So vermeidet sie sowohl eine ontologische als auch eine epistemologische Verdoppelung, indem sie

> „weder von der Welt noch vom Ich/Wir ausgeht, die sie interpretieren, sondern von den Zeichen, durch die auch Welt und Ich/Wir und ihre Differenz allein sich zeigen können. Das Zeichen ist das Absolute". (Simon, 1994, 123f.)

Dass Simons pragmatisch orientierte Zeichenphilosophie aus zeichentheoretischer Perspektive ablehnend kritisiert wird und auch aus anderen disziplinären Richtungen heftig diskutiert wird,[13] muss nicht wundern. Denn die „Absolutsetzung des Zeichens" ist etwas zuvor Unerhörtes, eben Neuartiges.

> „Die Absolutsetzung des Zeichens hat, auch noch ein Jahrhundert nach Charles Sanders Peirce, irritierend und provozierend gewirkt." (Simon, 1994, 124)

Die Zeichenphilosophie geht also nicht mehr von einem althergebrachten Weltverständnis, der primären Stellung des Seins bzw. dem metaphysischen Zeichenbegriff aus, wonach da zunächst etwas *ist* und zudem etwas (anderes) *ist* und dass das zweite etwas für das erste etwas steht und damit *als Zeichen für* es verstanden wird. Ebenso geht sie nicht mehr von einem althergebrachten Ich/Wir-Verständnis aus, wonach der Zeichengebrauch vom Ich/Wir her gedacht und erklärt wird, sondern versteht auch „Individuen und ihre Kommunikation [...] als Zeichen" (Simon, 1994, 123). Mit der Absolutsetzung der Zeichen ist eine gewisse Ohnmacht des Subjekts den Zeichen gegenüber in Kauf genommen, oder anders herum: Die Ohnmacht wird anders als in herkömmlichen Ansätzen endlich auch im philosophischen Ansatz berücksichtigt.

Ausgangspunkt der Simonschen Zeichenphilosophie ist also nicht, dass Zeichen mit einem festen ‚Stehen-für' dem Gebrauch durch ein ‚Ich/Wir' zur freien Verfügung stehen, denn die Zeichen sind die absolute Größe. Weder Ontologie, noch Epistemologie, noch philosophische Anthropologie gelten der Zeichenphilosophie als Erste Philosophie, sondern sie gilt sich selbst als solche und sie versteht ‚Sein', ‚Ich' und ‚Wir' nur noch als Zeichen (vgl. Simon, 1989, 122-150, 195-206, 212-217), die

13 Vgl. (Schönrich, 1991), (Corseriu, 1992), (Rosen, 1992) und (Luhmann, 1993).

wie alle weiteren Zeichen auch stets nur individuell, nur vorläufig, also von jedem möglicherweise anders und auf Zeit, verstehbar sind:

> „Zeitlichkeit und Individualität des Denkens sind [...] die zentralen Bestimmungen einer Philosophie des Zeichens". (Borsche und Stegmaier, 1992, VIII)

Zwar sind Zeichen immer nur so lange, wie in einer Situation keine neue Orientierung über das jeweilige Zeichenverstehen verlangt ist, verständlich, doch dürfen – und müssen – sie immerhin so lange als verständlich gelten.

> „Damit sich die Begriffserklärungen nicht im Unendlichen verlieren, muß das Subjekt an irgendeiner Stelle der Kette der Begriffsbestimmungen mit der „gegebenen" Deutlichkeit *zufrieden* sein. Es wäre unvernünftig, wenn es die Kette der Erklärungen nicht an irgendeinem Punkt abbrechen, aber auch, wenn es für dieses „Abbrechen" wieder überindividuelle Richtlinien verlangen wollte." (Stegmaier, 2000, 76)

Über die seiner Zeichenphilosophie adäquate Methode schreibt Simon unter der Kapitelüberschrift „Vorbemerkung zur Methode" in *Philosophie des Zeichens*:

> „Zeichen sind nicht Sachen, sie stehen *für* Sachen, zu denen man „über" nicht kommt. Man kommt nur immer wieder zu anderen Zeichen, die man an Stelle der Zeichen, die man nicht unmittelbar versteht als Bedeutung der ersten nennt. [...] Philosophie findet die methodische Angemessenheit an ihren „Gegenstand", die Zeichen, indem sie sich in deren Bewegung, d. i. in den Prozeß der Zeichen einläßt, der nicht als ein notwendiger Weg vorgezeichnet sein kann und in diesem Sinn *synthetisch* ist." (Simon, 1989, 33f.)

Die Grundposition der Zeichenphilosophie Simons, der ihr Anspruch als Erste Philosophie entstammt, ist im vorangegangenen Zitat bereits in nuce skizziert: Zeichen sind Gegenstand der Philosophie, insofern letztere ihre anderen Themen auch nur mittels Zeichen zu verstehen geben kann und das rechte, das intendierte Verstehen der Zeichen nie gesichert ist. Der Zeichenprozess ist weder zwangsläufig noch vorhersehbar, man muss ihn jedoch mitgehen. Werden Zeichen zwar *als* Zeichen verstanden, aber nicht *unmittelbar* verstanden, das heißt: werden sie zwar pragmatisch, doch nicht theoretisch, also nur *defizient* verstanden,[14] so kann nach ihrer Bedeutung gefragt werden, das heißt: Es kann mittels Zeichen die Frage gestellt werden, als was wir *das* Zeichen zu verstehen hätten, was *seine* Bedeutung sei:[15] Simon gibt diesbezüglich die generelle Antwort:

14 Vgl. (Rathgeb, 2011) und (Stegmaier, 2000, 24).

15 Vgl. (Simon, 1989, 41): Beim *vollkommenen Nichtverstehen* wird kein Zeichen augenfällig und damit ist auch kein Zeichen und also keine Bedeutungsfrage vorhanden. Vgl. auch (Simon, 1998): Dieser Aufsatz firmiert in bezeichnender Weise unter der Überschrift „Von Zeichen zu Zeichen. Vermittlung von Unmittelbarkeit und Vermittlung des Verstehens".

> „Die Bedeutung eines Zeichens ist das Zeichen, das wir als Antwort auf die Frage nach der Bedeutung verstehen. Es ist die Interpretation des Zeichens." (Simon, 1989, 39)

Dabei gilt es zu beachten, dass es gleichermaßen eine Frage des Einanderverstehens ist, nach der Bedeutung welchen Zeichens gefragt wird: „Ein von der Art des Verstehens abgetrenntes Zeichen existiert nicht." (Simon, 1989, 61). Denn Zeichen werden für Simon eben nur im Falle des gelingenden Verstehens zu Entitäten, auf die man sich dann im Gespräch als feste und gemeinsame Bezugspunkte bezieht – bis die Annahme, sich gegenseitig zu verstehen, nicht mehr haltbar scheint. Dann kann der Zeichenprozess einfach aufgegeben oder mittels anscheinend noch gemeinsam verstandener Zeichen weitergeführt werden. Das Zeichen, das eine solche Frage nach der Bedeutung eines Zeichens beantwortet, versteht Simon als die Bedeutung des anderen. Im Anschluss an Kant gilt ihm weiter:

> „Begriffe sind abgebrochene *Zeichenversionen*. Sie werden dann abgebrochen, wenn sie, je nach dem, was „dabei im Spiele ist"[16], für das Handeln als deutlich genug erscheinen. Man versteht *dann* die erklärenden Zeichen „unmittelbar", d. h. ohne weitere Frage nach ihrer „Bedeutung". Sie *stellen* dann „ohne Frage" die Bedeutung der Zeichen *dar*, nach deren Bedeutung gefragt wurde. Es sind Zeichen, die jetzt ohne Frage nach einer Bedeutung und in diesem Sinne „ohne Interpretation" verstanden werden." (Simon, 1994, 77f.)

Werden also Zeichen unmittelbar verstanden, so kommt keine Frage mehr nach ihrer Bedeutung auf, weil die Zeichen selbst nicht mehr in den Blick des Ich/Wir kommen. Unmittelbar bzw. vollkommen verstandene Zeichen gelten als ihre eigene Bedeutung, als Begriffe. Doch es gibt a priori kein absolutes Kriterium dafür, ob Zeichen verstanden werden:

> „Es läßt sich nicht *allgemein* sagen, was es heißt, daß ein Zeichen verstanden oder nicht verstanden wird. Daß es nicht verstanden wird, zeigt sich nur in der Frage nach der Bedeutung, d. h. nach einem anderen Zeichen an seiner Stelle. Nur dann liegt ein Zeichen *vor*." (Simon, 1989, 41)

Nach Simon ist die Bedeutung des Zeichens ‚Bedeutung eines Zeichens' selbst ein Zeichen, ein verstandenes Zeichen, nämlich das Zeichen, mittels dessen dem nach der Bedeutung Fragenden die Frage beantwortet scheint. Solche zumindest vorübergehend ohne weitere Nachfrage hingenommene Zeichen, mittels derer, aber nicht über die ein Gespräch geführt wird, das sind die Begriffe. Ob ein Zeichen eine solche „abgebrochene Zeichenversion" oder nur ein defizient verstandenes Zeichen

16 Im Zitat erfolgt dort die Fußnote: „Kant, Kritik der reinen Vernunft (KrV), B 853."

ist, das liegt gemäß der „Grundbestimmungen der Philosophie des Zeichens“ am Individuum und der Situation, in der es sich gerade befindet.

> „Das Zeichen ist kein Ding im metaphysischen Verstand. Es ist *vor* den Dingen, indem es für eine wesentlich nicht zum Ende kommende Bestimmung der Dinge steht.“ (Simon, 1989, 43)

Bislang wurde über Simons Zeichen ‚Zeichen‘ allerdings nur gesagt, dass er es nicht im traditionellen Sinne verwendet. Auf diese lediglich negative Bestimmung soll nun eine positive Bestimmung folgen, eine mehrfache Erläuterung. Denn es gilt zu beachten, dass in (Simon, 1989) die Frage nach den Zeichen selbst, das heißt: die Frage nach der Bedeutung des Zeichens ‚Zeichen‘, mehrfach beantwortet wird. Ich stelle einige, wenn auch lange nicht alle diesbetreffenden Passagen zusammen: (1) „Ein Zeichen ist das, was wir verstehen“, (2) „Alles, was wir verstehen, ist insofern Zeichen, als wir es im Geschehen zusammen mit anderem verstehen oder zu verstehen suchen“, (3) „alles, *was wir verstehen*, [ist] Zeichen“, (4) „Alles, was wir verstehen, ist Zeichen, weil wir von „etwas“ (Seiendem) nur insofern *reden* oder uns nur insofern überhaupt auf „etwas“ *beziehen* können, als wir verstehen oder auch – nur in *diesem* Zusammenhang – „etwas“ nicht verstehen“, (5) „alles, was uns angehe, [ist] Zeichen“, (6) „Zeichen sind das, was zu denken *Anlaß* gibt“, (7) „alles, was überhaupt von Bewandtnis ist, [ist] Zeichen“, (8) „*Alles*, was wir verstehen, ist Zeichen und Zeicheninterpretation“, (9) „alles, was wir verstehen und wodurch uns „etwas“ in den Blick kommt, [ist] Zeichen“ (Simon, 1989, 39, 43, 44, 61, 196, 202, 295, 309).

Tilman Borsche spricht bezüglich der zitierten Zeichenvariationen, die allesamt als die eine, mehr oder minder gelingende, in der jeweiligen Situation versuchte Antwort auf die Frage nach der Bedeutung des Zeichens ‚Zeichen‘ zu verstehen sind, von dem „Grund-Satz der Philosophie des Zeichens“ (Simon, 1994, 99). Stegmaier und Borsche formulieren und kommentieren diesen Grundsatz folgendermaßen:

> „Zu dem Grundsatz, daß alles, was wir verstehen, Zeichen sei, gehört daher als erstes corollarium ein neuer Begriff der Bedeutung: Danach ‚gibt es‘ Bedeutung nicht unabhängig von oder vor einem konkreten Zeichenverstehen. Bedeutung ist vielmehr entweder das fraglos verstandene Zeichen selbst oder das, was an einem Zeichen, das als Zeichen verstanden wird, im Moment nicht verstanden wird. Bedeutung läßt sich also vom Zeichen nur dann unterscheiden, wenn sich eine Differenz am Zeichen auftut, die die Frage nach seiner Bedeutung zu stellen nötigt.“ (Borsche und Stegmaier, 1992, VIII)

Den genannten Grundsatz der Zeichenphilosophie verschärft Stegmaier dann noch folgendermaßen:

> „Ein Zeichen, könnten wir den Satz der Zeichenphilosophie darum abwandeln, ist das, was zu verstehen wir uns nicht entziehen können.“ (Simon, 1994, 124f.)

Für Stegmaier liegt die letzte Schwäche dieser Formulierung darin, dass in dem zweiten „wir“ noch eine unnötige, eine nicht gewollte Doppelung angelegt ist, die dem radikalen Ansatz zuwider läuft, dem Ansatz beim stets nur vorläufigen und individuellen Verstehen des Einzelnen; letzterer kann das Andersverstehen der Zeichen durch einen Anderen weder ausschließen noch – so zeigen Überlegungen zu einer Ethik der Zeichenphilosophie – es ausschließen wollen, weil die Freiheit des Anderen gerade in dem Andersverstehenkönnen liegen muss (vgl. Simon, 1997, Vorwort).

> „Das Andersverstehen der Zeichen muß jedoch, wenn über Kommunikation hinaus Interaktion möglich werden soll, auch seinerseits begrenzt sein.“ (Stegmaier, 2000, 7)

Im „wir“ liegt zwar einerseits ein Plural als der-eine-wie-der-andere, andererseits aber ein der-eine-für-den-anderen, weil Individuen ja selbst als Zeichen verstanden werden; damit könnte – soll und muss allerdings nicht – das „wir“ im Grundsatz der Zeichenphilosophie als Zeichen einer Doppelung gelesen werden. Werner Stegmaier hat mit (Stegmaier, 2008) mittlerweile eine eigene Zeichenphilosophie vorgelegt, die ihren Ausgang bei der Simons nimmt, doch eine besondere Akzentuierung als „Philosophie der Orientierung“ systematisch entwickelt:

> „Ein Zeichen, dem man sich als Zeichen nicht entziehen kann, ist eine *Orientierung*. Eine Orientierung zieht in eine Richtung, richtet in eine Richtung aus. Sie tut das jedoch wie ein Zeichen im Sinne der Philosophie des Zeichens. [...] ‚Zeichen‘ scheint darum der (oder zumindest ein) Sinn von ‚Orientierung‘ und ‚Orientierung‘ der (oder zumindest ein) Sinn von ‚Zeichen‘ zu sein. ‚Zeichen‘ als ‚Orientierung‘ und ‚Orientierung‘ als ‚Zeichen‘ verstanden schließt alle Verdoppelungen aus: Man nimmt, wenn man sich an etwas orientiert, es immer schon als Zeichen, das lediglich auf andere Zeichen verweist.“ (Simon, 1994, 126)

Stegmaier stellt also die Orientierungsfunktion des Zeichens im Sinne Simons ins Zentrum seiner Philosophie und meint damit „alle Verdoppelungen“ vermeiden zu können. Ob dies gelingt und ähnlich angelegte philosophische Implikationen, möchte ich in dieser Arbeit nicht kritisch diskutieren, weil bereits die Fragerichtung von der Mathematik wegführt. Stattdessen möchte ich auf solche Konsequenzen und Kompetenzen der Zeichenphilosophie eingehen, die dazu geführt haben, dass ich sie als Optik für die Auseinandersetzung mit den Laws of Form von George Spencer Brown gewählt habe.

3.2 Eine Sicht auf Mathematik

Inwiefern ist Simons Ansatz bei einer Absolutsetzung der Zeichen als Optik für eine Studie der Laws of Form interessant? Wie in Kapitel 3.1 ausgeführt, ist die Philosophie Simons eine Fundamentalphilosophie, die beim Zeichen und dem gelingenden Gebrauch von Zeichen pragmatisch ansetzt. Ihr gilt als nicht festgelegt, *wofür* ein Zeichen Zeichen ist, doch gilt ihr in der Frage, ob dieses-oder-jenes Etwas ein Zeichen sei, das *Etwas* stets schon als ein festgelegtes Zeichen. Alles, wovon als Etwas die Rede sein kann, ist also ein hinreichend verständlich ausgelegtes Zeichen:

> „Alle Interpretation, die zum Schluß kommt als zu der Feststellung, was *sei*, ist in diesem Sinne pragmatisch begründet. Wenn „keine Zeit“ mehr ist für das Erwägen der Meinungen innerhalb eigener Überlegungen oder auch zwischen den Meinungen verschiedener Personen, dann und nur dann – und nicht etwa an einem endgültigen Ende aller Überlegungen, verstanden als definitiver *Begriff von Sachen selbst* – schlägt die Freiheit der Meinung und damit der subjektive Vorbehalt gegenüber der Festlegung in *einer* Interpretation in das subjektiv gewisse Urteil um, „was“ etwas *sei*. Das Urteil optiert für den Augenblick ontologisch.“ (Simon, 1989, 284)

Auch Individuen und Handlungen gelten Simon als Zeichen. Jeder Versuch sprachlicher Fixierung – insbesondere alle sprachlichen Zeichenerklärungen und darunter insbesondere die Erklärung des Zeichens ‚Zeichen‘ – bleibt einerseits auf Zeichen, andererseits darauf angewiesen, dass diese verstanden werden: „Ein von der Art des Verstehens abgetrenntes Zeichen existiert nicht“ (Simon, 1989, 61).

> „„Erkennen“ – kritisch gefaßt als das *temporäre* Zuendekommen von Interpretationsprozessen durch ein subjektives Ansehen von etwas *als* (hinreichend) bestimmt – ist in dieser Kritik selbst als *freie* Handlung begriffen.“ (Simon, 1994, 84)

Dabei gelten die Verweise „in dieser Kritik“ und „kritisch gefaßt“ der kritischen Philosophie Kants bzw. seiner transzendentalphilosophischen Perspektive insgesamt und nicht konkret einer seiner drei *Kritiken*.

> „Die Philosophie des Zeichens führt zu einem Begriff von Philosophie, nach dem es nicht *das Ende* der Philosophie ist, wenn sie begreift, daß es *nicht* vom Zeichen zum Begriff als seiner Bedeutung kommen und sie somit nicht *zu Ende* kommen kann.“ (Simon, 1989, 34f.)

Der Bogen von den `LoF` zu Simons Zeichenphilosophie ist bereits in (Luhmann, 1993) unter dem Titel „Zeichen als Form“ geschlagen. Vollkommen verstandene Zeichen sind bei Simon von ihrer Bedeutung nicht verschieden und gleichermaßen sind indication und distinction bei Brown nicht vollkommen verschieden. Diesem

Hinweis pflichte ich bei. Luhmann lobt die Konzeption Browns, tadelt aber die Konzeption Simons, insofern sie als Auffassung von Zeichen nicht tauge. Das ist Luhmanns Einschätzung, der ich mich selbstredend nicht anschließe, da ich sonst Simons Zeichenphilosophie nicht als Optik gewählt hätte. Meine Wahl der Zeichenphilosophie Simons als Optik für die LoF liegt nicht in der formalen Parallele und auch nicht in Luhmanns Tadel begründet.

Wie bereits besprochen haben unverstandene Zeichen in verstandenen ihre Bedeutung, insofern ein Zeichen Y die Erklärung für ein Zeichen X sein kann; ich möchte diesbezüglich von einem *Interpretationsbogen* sprechen. Der Umgang mit „Dasselbe und Verschiedenes" ist Titel und Thema des 14. Abschnittes von *Philosophie des Zeichens* und dort heißt es, dass gerade in der Mathematik mit Y als Erklärung für X auch X Erklärung für Y ist: Dahingehend ist X nichts anderes als Y. Das „nichts-anderes-als" besorgt in der Mathematik die Schließung von Interpretationsbögen zu Interpretationskreisen (vgl. Kapitel 12.3). Der Fokus auf die Zeichenersetzungen ist insofern eine geeignete Optik für den Umgang mit den Zeichen Äquivalenz, Gleichheit und Identität in den LoF.

> „Der außerhalb der Mathematik vorhandene *asymmetrische* Unterschied zwischen ‚unmittelbar' und ‚mittelbar' verstandenen Zeichen, der den gewöhnlichen Satz ausmacht, soll durch Reduktion getilgt werden." (Simon, 1989, 57)

Die Interpretationskreise in der Mathematik sind nicht nur geschlossen, sondern auch fixiert, soll heißen: Die Zuordnungen sind für alle gleichermaßen und immer gültig. Diese Position vertritt Simon zumindest prima facie in seinem Aufsatz „Zeichenphilosophie und Transzendentalphilosophie" (Simon, 1994), insofern er Kants Position zur Abgrenzung der Mathematik von den gewöhnlichen Zeichenprozessen, insbesondere denen in der Philosophie, diskutiert:

> „Außerhalb der Mathematik bleibt der Übergang vom (intensional) klärenden Zeichenprozeß zu einer (extensionalen) „Referenz auf Objekte" im transzendentalphilosophischen Sinn „zufällig".[17] Er vollzieht sich im „Abbruch" der Zeichenversionen, ist damit aber keineswegs „beliebig"." (Simon, 1994, 84)

Simon betont, dass für Kant „die Mathematik das einzige Gebiet „definitiver" Urteile" (Simon, 1994, 93) sei und fährt dann fort: „Selbst wenn sich diese Kantische Bestimmung der Mathematik nicht halten läßt, bezeichnet sie doch einen Bereich, über den hinaus feste Relationen zwischen Zeichen und Bedeutungen, d. h. die Gleichsetzung von Zeichen in ihrer Bedeutung nicht möglich und auch

17 Im Zitat erfolgt dort die Fußnote: „Innerhalb der Mathematik vollzieht er sich in jedem Schritt der Konstruktion des Begriffes selbst. Begriff und Anwendung decken sich ohne Differenz."

nicht anzustreben ist.“ Die Antwort auf die Frage, weshalb solche „Gleichsetzung“ gar nicht unbedingt anzustreben sei, ist wie in Kapitel 3.1 bereits angemerkt eine ethische und hier nicht weiter von Belang. Die Infragestellung der Kantischen Bestimmung von Mathematik verlangt allerdings nach einer Betrachtung. Inwiefern lässt sich das „einzige“ in „die Mathematik das einzige Gebiet „definitiver“ Urteile“ möglicherweise nicht halten? Die Mathematik wäre nicht das einzige solche Gebiet, wenn es auch andere solche Gebiete gäbe, sie wäre aber auch dann nicht das einzige solche Gebiet, wenn nicht einmal die Mathematik ein solches Gebiet wäre, wenn also auch sie keine definitiven Urteile erlaubt. Insofern definitive Urteile „feste Relationen“ voraussetzen und solche „über den“ mathematischen Bereich „hinaus“ „nicht möglich“ seien, ist die Frage dahingehend zu entscheiden, dass Simon an zitierter Stelle einräumt, dass auch die Mathematik kein Gebiet definitiver Urteile sei. Dann ist aber auch in der Mathematik der „Übergang vom (intensional) klärenden Zeichenprozeß zu einer (extensionalen) „Referenz auf Objekte“ im transzendentalphilosophischen Sinn „zufällig““ (Simon, 1994, 84). In dem zitierten Aufsatz gilt es diesbezüglich weitere Stellen zu beachten.

> „„Außerhalb“ der Mathematik kann es, wenn sie denn ihr „Inneres“ abgrenzen kann, deshalb nie zu Begriffen kommen, die notwendigerweise bei allen „diesselben“ sind.“ (Simon, 1994, 83)

Woher stammen die von Simon im Konditionalsatz „wenn … kann“ formulierten Bedenken? Warum ist die klassische Abgrenzung von Mathematik und Philosophie – die bei Kant wie bei Platon besteht, wobei zunächst die philosophischen Sätze als die verlässlicheren galten und später umgekehrt die mathematischen – in Gefahr? Simon gibt folgenden Hinweis:

> „In dieses Gebiet „außerhalb“ der Mathematik gehören auch die Begriffe, die mathematische Begriffe einführend definieren. Man muß sie „hinreichend“ verstehen, um den Konstruktionsanweisungen die mathematische Definitionen darstellen, angemessen folgen zu können.“ (Simon, 1994, 77)

Die Letztbegründung der Mathematik ist für Simon also nicht mehr ohne Rückgriff auf die im Einzelnen immer potentiell problematisch bleibenden Zeichen möglich. Gerade solches *Hineinkommen* in die Mathematik ist das Thema der `LoF`, insofern Brown in ihnen eine Grundlegung der Booleschen Algebren und dafür den benötigten Austausch von Zeichen für Zeichen zu rechtfertigen versucht. Ich möchte also mit Simon fragen, wie Brown in den Laws of Form seine Mathematik zu Wege bringt und auf was für (sprichwörtliche) Beine er sie stellt. Um darauf nochmals mit Simon bzw. Kant zu antworten: Es geht nicht ohne das vorauszusetzende *Bezeichnungsvermögen* (vgl. Simon, 1994, 80–85).

Die Zeichen der `LoF` sind erfahrungsgemäß schwer verständlich. Insbesondere ist die Frage zu beantworten, was als Zeichen, was besser als mehrere Zeichen und welches Zeichen besser nicht als Zeichen gelesen werden soll. Ich möchte daher die Lektüre dort beginnen, wo die Zeichen prima facie bereits bekannt und verständlich sind – und das ist innerhalb der in den `LoF` zu etablierenden Mathematik eine Mathematik Boolescher Algebren. Von diesem abgesteckten Bereich aus soll zunächst der eigene Innenbereich und weiter die Grenze zum Außenbereich und dieser selbst betrachtet werden. Ich erlaube mir vorab den Hinweis, dass es sich bei *Innen*, *Grenze* und *Außen* bereits um das Thema der `LoF` bzw. eine kanonische Interpretation der `LoF` handelt.
Dass es bezüglich der Zeichen in den `LoF` kaum gelingt bei den Zeichen zu bleiben, dass man stets in eine Zeicheninterpretation hineingerät, ist mit Simon betrachtet nicht weiter verwunderlich. Dies liegt in der sog. Natur der Sache. Denn die Zeichen in den `LoF` sind insbesondere mathematische Zeichen. Die Bedeutung mathematischer Zeichen, ihre richtige Interpretation, gilt als eindeutig bestimmt. Die mathematischen Zeichen haben keine andere Bedeutung, als sie selbst sind, und können damit als ihre Sache selbst genommen werden.

> „Wir machen diesen Unterschied [zwischen Zeichen und Sachen; M.R.], indem wir etwas als Zeichen, etwas anderes als davon unterschiedene Sache *bezeichnen*, sofern wir etwas nicht ‚unmittelbar' verstehen. Wenn wir ‚unmittelbar' verstehen, stellt sich nicht die Frage, als *was* wir etwas verstehen. Insofern ist der *Unterschied* zwischen Sache und Zeichen immer eine Sache der mehr oder weniger gelingenden Interpretation." (Simon, 1989, 76)

An zitierter Stelle geht es Simon zunächst ganz allgemein um Zeichen und die Überschätzung, dass mittels ihrer die Möglichkeit eines direkten Zugangs zu ihren Sachen bestehe. Er formuliert dazu an anderer Stelle:

> „Kritik bedeutet die Aussetzung des ontologischen Anspruchs im Denken außerhalb der Mathematik als des einzigen Bereichs, in dem die Zeichen in ihrer Isomorphie mit den Sachen schon die Sachen selbst sein sollen." (Simon, 1989, 144)

Auch hier ist wieder von der Mathematik als eines ausgezeichneten Bereiches die Rede, doch kann nicht so einfach vom normativen ‚Sein-sollen' auf das deskriptive ‚Sein/Ist' geschlossen werden; mit anderen Worten: Im „Hintergrund" eines mathematischen Zeichens steht seine Sache, dagegen wird in der Mathematik der Vordergrund der Sache aus der Aufmerksamkeit getilgt – und nur noch beim defizienten Verstehen bemerkt (vgl. Simon, 1989, 57). Insofern können gerade mathematische Zeichen mit ihren geschlossenen Interpretationskreisen vollkommen und unmittelbar verstanden werden, als ihre Sachen verstanden werden, doch sind

die Fähigkeiten der Individuen dazu jeweils begrenzt. Dem Individuum gelingt der „Übergang vom (intensional) klärenden Zeichenprozeß zu einer (extensionalen) „Referenz auf Objekte"" (Simon, 1994, 84) nicht notwendigerweise.
Zu den Interpretationskreisen gibt es bei Simon ein Pendant im Großen, womit er den Sonderfall ‚Mathematik' aus einer anderen Perspektive charakterisiert.

> „Das Mathematische bildet einen Kreis von Interpretationen. Dadurch bildet es ein geschlossenes Ganzes, und es kann sich die Frage nach dessen Bedeutung stellen; sie liegt außerhalb der Mathematik, als Antwort auf die Frage, was Mathematik sei. Diese Antwort kann, wenn sich die Frage stellt, nicht mehr mathematisch sein. Die Mathematik wird so zum Spezialfall." (Simon, 1989, 60)

Die Frage „was Mathematik sei" *kann* sich also stellen, doch ist die Antwort auf diese Frage – und damit wohl die Frage selbst – nicht der Mathematik zugehörig, sie gehört mit in den Bereich außerhalb der Mathematik. In der Mathematik hat man es mit den Zeichen der Mathematik zu tun, es geht dabei – so Simon – nicht um die Bedeutung der Mathematik selbst. Browns `LoF` sind insofern dann nicht nur ein Mathematikbuch zu nennen, weil es ihm durchaus um eine Bestimmung der Bedeutung der Mathematik geht.

Für Simon wie für Brown ist das *Handeln* ein ganz entscheidendes Zeichen. Im Handeln zeigt sich nach Simon die vorherrschende Zeicheninterpretation und zum Handeln hält Brown den Leser seiner `LoF` an. Denn nur im Selbstvollzug der Mathematik, soll heißen im eigenen Umgang mit mathematischen Zeichen, kann der Leser zur rechten Interpretation der Zeichen gelangen und die Zeichen als ihre Sachen erfahren. Das Ende der deskriptiven Möglichkeiten ist also für beide Autoren ein zentrales Thema. Für Simon ist es die *Metapher*, die den geläufigen Bereich intensionaler Bezugnahmen zu erweitern vermag, und auf Metaphern bleibt auch Brown angewiesen, wenn die althergebrachten Zeichen nicht mehr verlässlich sind und er auf die gelingende Interpretation seiner Instruktionen setzt bzw. erhofft.

Teil I

GEHALT – Was ist der Indikationenkalkül?

Die Laws of Form im mathematischen, das Produkt spezifizierenden Diskurs: *Mathematik als Struktur*

Kapitel 4

Ein beweistheoretischer Zugriff auf die Primäre Algebra

4.1 Ziel dieses Kapitels

In diesem Kapitel stelle ich vor, wie Daniel G. Schwartz Browns Primäre Algebra aus Chapter 5 bis 10 reformuliert und für sein beweistheoretisches Anliegen formal rekonstruiert. Sein formales System tPA für die Primäre Arithmetik induziert dann auf einer 2-elementigen Menge eine mathematische Struktur. Diese Struktur ist relationslos und demnach eine *Algebra*. Sie ist insbesondere der Primären Algebra Browns (in) Schwartz' Lesart adäquat.

Schwartz zeigt für PA die beiden folgenden Theoreme, wobei PC^* ein unwesentlich erweitertes formales System für die klassische Aussagenlogik ist:

(1) Es gibt einen Isomorphismus τ von PA nach PC^* (vgl. Schwartz, 1981, 243);
(2) Die Äquivalenz in PC^* ist das τ-Bild der Äquivalenz in PA (vgl. Schwartz, 1981, 244).

Die Beweise der beiden Theoreme interessieren hier weniger im Detail als im Ganzen und es interessieren weniger die Beweise als die zugrundeliegende Lesart. Seine Lesart der Primären Algebra expliziert Schwartz als eine formale *Sprache* (Symbole, Terme und Gleichungen), eine formale *Semantik* (Werte und Bewertungen) und ein formales *System* (Axiome und Ableitungsregeln).

Auf Schwartz' Reformulierung und Rekonstruktion der Primären Algebra sowie auf seine Theoreme und Beweise werde ich im Folgenden eingehen – allerdings mit einer eigenen Schwerpunktsetzung. Denn letztlich verfolge ich andere Interessen als Schwartz, wie die späteren Kapitel dieser Arbeit zeigen werden. Kurz gesagt: Schwartz behandelt die Frage nach der Genese der LoF-Mathematik nicht und er behandelt die Geltungsfrage anders als ich. Seine Reformulierung und Rekonstruktion wird von ihm weder begründet noch gerechtfertigt, sondern lediglich in

Anspruch genommen. Dabei ist seine Lesart wohlgemerkt nicht die einzig mögliche (vgl. Kapitel 9.1).

Daniel Schwartz geht also auf Probleme mit der *Textexegese* nicht näher ein, sondern wendet sich – ich wiederhole mich – der Beantwortung anderer Fragen zu. So beweist er für seine Lesart die Isomorphie zwischen den formalen Semantiken $\Sigma(\mathrm{PA})$ und $\Sigma(\mathrm{PC}^*)$ zu den formalen Systemen PA und PC^*. Den Beweis führt er mittels einer Induktion über den Termaufbau bzw. über die Termlänge aus; das ist eine wohlbekannte und etablierte mathematische Argumentationsmethode. Wie folgt nun aus der Isomorphie der formalen Semantiken $\Sigma(\mathrm{PA})$ und $\Sigma(\mathrm{PC}^*)$ die in den Theoremen behauptete Isomorphie der formalen Systeme PA und PC^*?
Schwartz verwendet dafür zwei Hinweise auf andere Literatur: Das ist einerseits der Hinweis, dass $\Sigma(\mathrm{PC}^*)$ durch PC^* *vollständig* und *korrekt* formalisiert sei, was tatsächlich gängiges Lehrbuchwissen zur Logik ist. Das ist andererseits der Hinweis, dass $\Sigma(\mathrm{PA})$ durch PA *vollständig* und *korrekt* formalisiert sei, was Brown in `LoF` tatsächlich behauptet. Die Vollständigkeit beweist er in Chapter 9 als Theorem 17, die Korrektheit dagegen wird im Fließtext von Chapter 8 zwar formuliert, doch nur im Ansatz bewiesen. Kann man Browns Ergebnissen trauen, sind sie verlässlich, immerhin ist `LoF` kein wohlbekanntes oder etabliertes Lehrbuch, sondern erscheint manchem Leser als eher obskurer, skurriler und umstrittener mathematischer Essay? Schwartz versichert kurz und knapp: „Every derivation carried out in the original calculus can be made rigorously formal as a derivation in PA.“ (Schwartz, 1981, 243).

In Kapitel 5 werde ich zeigen, dass die beiden Theoreme im Hinblick auf eine andere Theorie geradezu offensichtlich sind. Diese andere Theorie ist die *Gleichungslogik*, in der für ganze Klassen von Algebren, die sich durch Gleichungen definieren lassen, geklärt ist, dass deren jeweilige formale Semantik durch ein formales System, also rein syntaktisch, korrekt und vollständig erfasst werden kann; insbesondere bilden die *Booleschen Algebren* eine solche Klasse. Von Birkhoffs fünf Ableitungsregeln für die Gleichungslogik fehlt bei den PA-Ableitungsregeln nur eine, die aber von Brown in `LoF` erkennbar zur Verfügung gestellt ist; weiter sind die PA-Axiome als gleichungslogisches Axiomensystem erkennbar. Geht man nun im Hinblick auf die *Primäre Arithmetik* davon aus, dass auch die Primäre Algebra zwei-wertig bzw. zwei-elementig ist, so ist sie zu PC^* isomorph, weil es bekanntermaßen bis auf Isomorphie nur eine solche Boolesche Algebra alias Boolesche Arithmetik gibt; insbesondere ist die logische Äquivalenz eine *Interpretation* der (formalen) Äquivalenz. Schwartz' Theoreme über die formalen Systeme PA und PC^* erhalte ich ohne den Umweg über ihre formalen Semantiken. Mein alternativer Beweis berücksichtigt zudem Browns Hinweise auf Boolesche Algebren.

4.2 Beweistheoretische Formalisierung

Das erste Kapitel von (Schwartz, 1981) trägt die Überschrift „Classical Propositional Calculus and The Laws of Form“ und umfasst vier Unterkapitel, deren Titel den Argumentationsgang gut widerspiegeln: Das ist (1) „The System PC of Propositional Calculus“, (2) „The Inessential Extension PC*“, (3) „The System PA of Primary Algebra“ und (4) „The Systems PA and PC* are Isomorphic“. Offensichtlich werden hierbei synkopierte Bezeichner verwendet, nämlich ‚PC‘ als Kurzform für *P*ropositional *C*alculus alias (klassische) Aussagenlogik und ‚PA‘ für *P*rimary *A*lgebra. Schwartz definiert in seinem Aufsatz also zunächst ein formales System PC für die klassische Aussagenlogik, das er dann um ein Symbol für den Wahrheitswert *falsch* zu dem formalen System PC* ergänzt. Danach definiert er im Hinblick auf seine Lesart der Primären Algebra das korrespondierende formale System PA und beweist zuletzt für PC* und PA zwei Isomorphie-Sätze. Zu Beginn des ersten Unterkapitels, also dem zur klassischen Aussagenlogik, skizziert Schwartz sein Vorgehen mit folgenden Worten:

> „The classical propositional calculus is presented as a formal language $\mathsf{L}(\mathrm{PC})$ together with a formal semantics $\Sigma(\mathrm{PC})$ which encodes the usual truth-table presentation and is axiomatized as a formal system PC using the axioms and inference rules of Hilbert and Ackerman.“ (Schwartz, 1981, 241)

Im dritten Unterkapitel wird die Primäre Algebra gleichermaßen behandelt; auch für sie werden also folgende Fragen beantwortet:

(1) Wie ist die *formale Sprache* $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$ konzipiert?
   a. Welche ‚Buchstaben‘ sind als $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-*Symbole* definiert?
   b. Welche ‚Wörter‘ sind als $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-*Terme* $\mathsf{T}(\mathrm{PA})$ definiert?
   c. Welche ‚Wörter‘ sind als $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-*Gleichungen* $\mathsf{G}(\mathrm{PA})$ definiert?

(2) Wie ist die $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-*Semantik* $\Sigma(\mathrm{PA})$ konzipiert?

(3) Wie ist die $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-*Syntax* alias das (formale) *System* PA konzipiert?

Die Fragen zur formalen Sprache und deren Semantik werde ich für $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$, $\mathsf{L}(\mathrm{PC}^*)$ und $\mathsf{L}(\mathrm{PC})$ parallel beantworten. Dadurch ist sofort erkennbar, dass ein Übersetzungsisomorphismus zwischen $\mathsf{T}(\mathrm{PA})$ und $\mathsf{T}(\mathrm{PC}^*)$ existiert.

4.2.1 Die formalen Sprachen

Im Folgenden tabelliere ich Schwartz’ Definitionen der drei zu betrachtenden formalen Sprachen, nämlich $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$, $\mathsf{L}(\mathrm{PC}^*)$ und $\mathsf{L}(\mathrm{PC})$. Das sind zunächst drei Systeme von *Symbolen* und weiters Systeme von gewissen *Symbolketten*, nämlich

Terme und Gleichungen. Zuletzt notiere ich die bijektive *Übersetzungsabbildung* zwischen zwei der drei Termmengen.

Drei Systeme von Symbolen Vgl. (Schwartz, 1981, 241f.) hinsichtlich der in folgender Tabelle definierten Systeme von Symbolen der formalen Sprachen.

Nr.	L(PA)-*Symbole*	L(PC*)-*Symbole*	L(PC)-*Symbole*
(1)	$\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots$	$\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots$	$\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots$
(2)	ε	F	`[kein Eintrag]`
(3)		$\vee$	$\vee$
(4)	[,]	¬	¬
(5)	=	`[kein Eintrag]`	`[kein Eintrag]`
(6)	(,)	(,)	(,)

In (1) sind die Variablen genannt, nämlich abzählbar viele „expression variables", „propositional variables" und nochmals „propositional variables"; weil allerdings in jeder Sprache nur über eine Sorte von *Gegenständen* gesprochen wird, darf die Kennzeichnung der jeweils einsortigen Variablen unterbleiben. Zudem könnte man im Deutschen in allen drei Fällen von *Ausdrucksvariablen* sprechen: Das liegt für „expression variables" bereits dem Wortsinne nach nahe; die „propositional variables" werden in (Schreiber, 1977, 24) zunächst als „Variable für Wahrheitswerte" umschrieben, doch dürfen diese Variablen dann auch durch Ausdrücke ersetzt werden (vgl. Schreiber, 1977, 29: Satz 1); sie als Ausdrucksvariablen zu bezeichnen, ist also nicht gar zu abwegig.

In (2) wird ersichtlich, dass es in L(PC) kein Pendant zu Schwartz' Symbol ε für Browns void gibt; die Erweiterung von L(PC) zu L(PC*) durch ‚F' und ein sog. Erweiterungsaxiom ist unwesentlich und zudem erster Art. Dabei ist eine Spracherweiterung *unwesentlich*, falls sie definitorisch ist, und *erster Art*, falls die zusätzlichen Symbole Relations-, Operations- oder Konstantenzeichen, nicht aber neue Variablensorte sind (vgl. Schreiber, 1977, 79–92: Kapitel 4.6).

In (3) ist notiert, dass in L(PA) die Konkatenation zweier L(PA)-Teilterme nicht durch ein Symbol angezeigt wird, sodass ‚$\vee$' ohne symbolisches Pendant bleibt; das ist bspw. dem Verzicht auf das Multiplikationszeichen zwischen Variablen analog.

In (4) und (6) stehen Symbole, die paarweise auftreten: die *eckigen Klammern* (brackets) und die *runden Klammern* (parenthesis). Weiter werden in (1), (4) und (6) das Komma ‚,' und Punkte ‚…' lediglich für die Aufzählung gebraucht; sie gehören den Sprachen selbst nicht an.

In (5) könnte Schwartz zu ‚=' ein Pendant definieren; im Hinblick auf sein zweites Theorem wäre dafür das Symbol ‚≡' geeignet, mit dem er die logische Äquivalenz, die der Äquivalenz in der Primären Algebra korrespondiert, auch tatsächlich anzeigt. Doch verwendet er ‚≡' lediglich zur Abkürzung von L(PC*)- und L(PC)-Termen

(vgl. Schreiber, 1977, 46–48: Kapitel 3.4).
In (6) werden Termklammern eingeführt; sie sollen den Term als Ganzes sowie Teilterme von ihm explizit ausweisen; sonst wären zusammengesetzte Terme nicht im Allgemeinen wohldefiniert. Solche Termklammern sind der inorder-Notation geschuldet, in der präorder- und der postorder-Notation sind sie entbehrlich. In Zusammenhang mit den Symbolen in (4) und als äußere Klammern wird Schwartz auf Termklammern verzichten.

Systeme von Symbolketten – Terme Vgl. (Schwartz, 1981, 241f.) hinsichtlich der in folgender Tabelle definierten Systeme von Symbolketten der formalen Sprachen, nämlich der Termmengen T(PA), T(PC*) und T(PC).

Nr.	L(PA)-*Terme*	L(PC*)-*Terme*	L(PC)-*Terme*
(1)	$\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots$	$\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots$	$\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \ldots$
(2)	ε	F	`[kein Eintrag]`
(3)	$[\mathsf{E}]$, falls E	$\neg\mathsf{P}$, falls P	$\neg\mathsf{P}$, falls P
(4)	$(\mathsf{E}_\mathfrak{a}\mathsf{E}_\mathfrak{b})$, falls $\mathsf{E}_\mathfrak{a}, \mathsf{E}_\mathfrak{b}$	$(\mathsf{P}_\mathfrak{a}\vee\mathsf{P}_\mathfrak{b})$, falls $\mathsf{P}_\mathfrak{a}, \mathsf{P}_\mathfrak{b}$	$(\mathsf{P}_\mathfrak{a}\vee\mathsf{P}_\mathfrak{b})$, falls $\mathsf{P}_\mathfrak{a}, \mathsf{P}_\mathfrak{b}$

Offensichtlich sind die Terme und demgemäß auch die zugehörigen Termmengen T(PA), T(PC*) und T(PC) induktiv definiert: Die *Grundfälle* (ground cases) in (1) und (2) bestimmen die *atomaren* Terme, die *induktiven Schritte* (inductive steps) in (3) und (4) die *zusammengesetzten* Terme (vgl. Burris, 1998, 397).
Schwartz verwendet die Symbole $\supset$, $\wedge$ und $\equiv$ für die kanonischen Abkürzungen, nämlich ‚$\mathsf{P}_\mathfrak{a} \supset \mathsf{P}_\mathfrak{b}$' für $\neg\mathsf{P}_\mathfrak{a} \vee \mathsf{P}_\mathfrak{b}$, weiter ‚$\mathsf{P}_\mathfrak{a} \wedge \mathsf{P}_\mathfrak{b}$' für $\neg(\neg\mathsf{P}_\mathfrak{a} \vee \neg\mathsf{P}_\mathfrak{b})$ und ‚$\mathsf{P}_\mathfrak{a} \equiv \mathsf{P}_\mathfrak{b}$' für $(\mathsf{P}_\mathfrak{a} \supset \mathsf{P}_\mathfrak{b}) \wedge (\mathsf{P}_\mathfrak{b} \supset \mathsf{P}_\mathfrak{a})$ (vgl. Schwartz, 1981, 241f.). Weiter bezeichnet der Autor die L(PA)-*Terme* als „expressions", die L(PC*)- und L(PC)-*Terme* dagegen als „propositions". Diese Bezeichnungen korrespondieren den Charakterisierungen der Variablen, nämlich einerseits als „expression variables" und andererseits als „propositional variables".

Systeme von Symbolketten – Gleichungen Vgl. (Schwartz, 1981, 241f.) im Hinblick auf weitere Symbolketten, nämlich der Gleichungen bzw. logischen Äquivalenzen. Es ist $\mathsf{E}_\mathfrak{a} = \mathsf{E}_\mathfrak{b}$ eine *Gleichung* der formalen Sprache L(PA), falls $\mathsf{E}_\mathfrak{a}$ und $\mathsf{E}_\mathfrak{b}$ ihrer Termmenge angehören. Es bezeichne G(PA) die Menge solcher Gleichungen. Wohlgemerkt ist ‚$\equiv$' *kein* Symbol der formalen Sprache L(PC*), wohl aber abkürzendes Mitteilungszeichen für *logische Äquivalenz*. Kurz: Jede L(PA)-Gleichung gehört zu Σ(PA) und PA, doch gehören Symbolketten der Form $\mathsf{P}_\mathfrak{a} \equiv \mathsf{P}_\mathfrak{b}$ weder zu Σ(PC*) noch zu PC*.

Die bijektive Übersetzungsabbildung Die im Folgenden tabellierte Definition einer *Übersetzungsabbildung* zwischen T(PA) und T(PC*) ist offensichtlich bijektiv (vgl. Schwartz, 1981, 243).

Nr.	*Die bijektive Übersetzungsabbildung* $\tau\colon \mathsf{T}(\text{PA}) \to \mathsf{T}(\text{PC}^*)$
(1)	$\tau(e_i) := p_i$, für alle $i = 1, 2, \ldots,$
(2)	$\tau(\varepsilon) := F;$
(3)	$\tau([E]) := \neg\tau(E),$
(4)	$\tau(E_a E_b) := \tau(E_a) \vee \tau(E_b).$

Die Definition von τ als Übersetzungsabbildung zwischen den Termmengen T(PA) und T(PC*) erfolgt also induktiv und in Rückgriff auf den Termaufbau: Die Grundfälle in (1) und (2) bestimmen die τ-Bilder der atomaren Terme, die induktiven Schritte in (3) und (4) die der zusammengesetzten Terme. Offensichtlich ist die Übersetzungsabbildung τ bijektiv und sie ist zudem mit den formalen Semantiken Σ(PA) und Σ(PC*) verträglich (vgl. S. 43).

4.2.2 Die formalen Semantiken

Bewertungen auf den Termmengen Vgl. (Schwartz, 1981, 243, 241) im Hinblick auf die Definition von *Bewertungen* auf den Termmengen T(PA) und T(PC*).

	Bewertungen (valuations) $\nu\colon \mathsf{T}(\text{PA}) \to \{u, m\}$	*Bewertungen* (truth valuations) $V^*\colon \mathsf{T}(\text{PC}^*) \to \{0, 1\}$
(1)	$\nu(e_i) \in \{u, m\}$, für $i = 1, 2, \ldots$	$V^*(p_i) \in \{0, 1\}$, für $i = 1, 2, \ldots$
(2)	$\nu(\varepsilon) := u$	$V^*(F) := 0$
(3)	$\nu([E]) := \begin{cases} u, & \nu(E) = m \\ m, & \text{sonst} \end{cases}$	$V^*(\neg P) := \begin{cases} 0, & V^*(P) = 1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$
(4)	$\nu(E_a E_b) := \begin{cases} u, & \nu(E_a) = \nu(E_b) = u \\ m, & \text{sonst} \end{cases}$	$V^*(P_a \vee P_b) := \begin{cases} 0, & V^*(P_a) = V^*(P_b) = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

Die Bewertungen V^* bzw. ihre Restriktionen $V := V^*|_{\mathsf{T}(\text{PC})}$ und damit die Mengen Σ(PC*) und Σ(PC) sind bekannt; dagegen sind die Bewertungen ν nicht einmal in `LoF` explizit gegeben. Das kommt nicht von ungefähr, insofern Brown das Konzept von Abbildungen nicht voraussetzt, sondern im Text entwickelt. Erst in Chapter 8 und 11 ist zumindest implizit von (nicht-konstanten) Funktionen die Rede.

Die formale Semantik zur Primären Algebra Die *formale Semantik* $\Sigma(\text{PA})$ ist die Menge aller Bewertungen ν auf der Termmenge $\mathsf{T}(\text{PA})$ und korrespondiert offensichtlich mit dem Beweisverfahren von Theorem 3 in Chapter 4. In der formalen Semantik $\Sigma(\text{PA})$ bekommen die Konkatenation, die brackets-Klammerung und ‚ε' eine Bedeutung: Sie werden zu *fundamentalen Operationen* einer Struktur $(\{\mathfrak{u}, \mathfrak{m}\}, \,, [], \varepsilon)$ vom Typ $(2, 1, 0)$; damit induziert jeder $\mathsf{L}(\text{PA})$-Term E *Termfunktionen* auf $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{m}\}$, da er aus den fundamentalen Operationen zusammengesetzt ist: Denn es weist jede Bewertung ν den atomaren Termen e_i, also insbesondere den in E auftretenden, jeweils einen Wert zu; damit kann in kanonischer Weise für jede endliche Auswahl von k-vielen atomaren Termen e_i eine Termfunktion $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{m}\}^k \to \{\mathfrak{u}, \mathfrak{m}\}$ zu E betrachtet werden.
Der Wert eines Terms E der Primären Algebra, genauer: der Wert einer Termfunktion zu E für eine Bewertung ν von $\Sigma(\text{PA})$, ist – zumindest bezogen auf Chapter 5 bis 10 – entweder der *markierte Zustand* (marked state) oder der *unmarkierte Zustand* (unmarked state); diese Bezeichnungen werden den Zuständen in Chapter 2 gegeben, wogegen in Chapter 4 der markierte bzw. der unmarkierte Zustand durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ symbolisiert werden; statt ‚$\mathfrak{n}$' verwendet Schwartz ‚$\mathfrak{u}$'.
Eine $\mathsf{L}(\text{PA})$-Gleichung $\mathsf{E}_a = \mathsf{E}_b$ heißt *gültig* (valid) bezüglich $\Sigma(\text{PA})$, falls $\nu(\mathsf{E}_a) = \nu(\mathsf{E}_b)$ für alle Bewertungen ν von $\Sigma(\text{PA})$ ‚wahr' ist, jede Bewertung ν also entweder ‚$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$' oder ‚$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$' liefert; symbolisch:

$$\Sigma(\text{PA}) \models (\mathsf{E}_a = \mathsf{E}_b)\,.$$

Die formale Semantik zur Aussagenlogik Die *formale Semantik* $\Sigma(\text{PC}^*)$ ist die Menge aller Bewertungen V^* auf der Termmenge $\mathsf{T}(\text{PC}^*)$, wobei die Wahrheitswerte *falsch* (false) und *wahr* (true) durch ‚0' und ‚1' symbolisiert sind, die logischen Junktoren der *Disjunktion* und *Negation* durch ‚$\vee$' und ‚$\neg$'.
Ein $\mathsf{L}(\text{PC}^*)$-Term alias *Ausdruck* (proposition) P heißt *Tautologie* (tautology) der formalen Semantik $\Sigma(\text{PC}^*)$, falls $\mathsf{V}^*(\mathsf{P}) = 1$ für alle Bewertungen V^* von $\Sigma(\text{PC}^*)$; symbolisch:

$$\Sigma(\text{PC}^*) \models (\mathsf{P})\,.$$

Tautologien und gültige Gleichungen Da die bijektive Übersetzungsabbildung τ ein Isomorphismus zwischen den formalen Semantiken ist (vgl. Kapitel 4.3.1), gilt zunächst, dass das τ-Urbild einer $\Sigma(\text{PC}^*)$-Tautologie ein Term ist, dem jede Bewertung auf $\Sigma(\text{PA})$ den Wert $\mathfrak{m}$ zuweist. Das heißt weiter: Die Gleichung $\mathsf{E} = [\varepsilon]$ gilt genau dann, wenn $\tau(\mathsf{E})$ eine Tautologie ist; symbolisch:

$$(\Sigma(\text{PA}) \models (\mathsf{E} = [\varepsilon])) \quad \Leftrightarrow \quad (\Sigma(\text{PC}^*) \models (\tau(\mathsf{E})))\,.$$

4.2.3 Die formalen Systeme

Das formale System zur Aussagenlogik Das *formale System* PC* von Daniel Schwartz hat folgende Form (vgl. Schwartz, 1981, 241f.):

Nr.	*PC**-Axiome* (Kurznotation)	*PC**-Ableitungsregeln*
(1)	$(p_1 \vee p_1) \supset p_1$	P_b, falls P_a und $P_a \supset P_b$
(2)	$p_1 \supset (p_1 \vee p_2)$	$(P_a)(P_b \leftharpoonup p_i)$, falls P_a
(3)	$(p_1 \vee p_2) \supset (p_2 \vee p_1)$	
(4)	$(p_1 \supset p_2) \supset ((p_3 \vee p_1) \supset (p_3 \vee p_2))$	
(5)	$F \equiv (p_1 \wedge \neg p_1)$	

Dabei heißt Ableitungsregel (1) *Modus ponens* und Ableitungsregel (2) *gleichförmige Substitution.* Denn es bezeichnet $(P_a)(P_b \leftharpoonup p_i)$ den Term, der aus P_a hervorgeht, falls jeweils P_b statt p_i geschrieben wird. In der Tabelle stehen wohlgemerkt Kurznotationen der fünf *Axiome* und nicht von fünf Axiomenschemata. Denn zur Formulierung der (Kurznotationen der) Axiome werden Variablen der Sprache und nicht Variablen einer Meta-Sprache verwendet. Die entsprechenden Terme für andere Teilterme liefert dann Ableitungsregel (2).
Wohlgemerkt wird das formale System PC, die Formalisierung der klassischen Aussagenlogik durch Hilbert und Ackermann (vgl. Burris, 1998, 126f.), durch das Symbol F und das Axiom (5) zum formalen System PC* unwesentlich erweitert.

Das formale System zur Primären Algebra Das *formale System* PA von Daniel Schwartz hat folgende Form (vgl. Schwartz, 1981, 241f.):

Nr.	*PA-Axiome*	*PA-Ableitungsregeln*
(1)	$[[e_1]e_1] = \varepsilon$	$E(\cdots E_a \cdots) = E(\cdots E_b \cdots)$, f. $E_a = E_b$
(2)	$[[e_1 e_3][e_2 e_3]] = [[e_1][e_2]]e_3$	$(E_a = E_b)(e_i \leftharpoonup E)$, falls $E_a = E_b$
(3)	$e_1 \varepsilon = e_1$	$E_b = E_a$, falls $E_a = E_b$
(4)	$e_1 e_2 = e_2 e_1$	$E_a = E_c$, falls $E_a = E_b$ und $E_b = E_c$
(5)	$e_1(e_2 e_3) = (e_1 e_2)e_3$	

Dabei heißt Ableitungsregel (3) *Symmetrie* (symmetry) und Ableitungsregel (4) *Transitivität* (transitivity). Allerdings heißt Ableitungsregel (1) bei Brown und Schwartz „substitution“, dagegen *Ersetzung* (replacement) in (Burris, 1998) und (Schreiber, 1977); und dementsprechend heißt Ableitungsregel (2) bei Brown und Schwartz „replacement“, dagegen *Substitution* (substitution) in (Burris, 1998) und (Schreiber, 1977). Dieser Bezeichnungswirrwar ist zwar amüsant, aber kaum ärgerlich. Denn, und hierbei ist an Simons philosophischen Ansatz zu denken, beim *Gebrauch* der Zeichen ist deren Bedeutung durch den Kontext implizit (meist)

hinreichend spezifiziert; bei der *Rede über ihren Gebrauch* kann im Zweifelsfall der Kontext explizit durch Bezeichner wie ‚nach Brown' bzw. ‚nach Burris' angereichert werden. Es ist ‚$(\mathsf{E}_a = \mathsf{E}_b)(e_i \leftharpoondown \mathsf{E})$' die Bezeichnung der Gleichung, welche aus $\mathsf{E}_a = \mathsf{E}_b$ hervorgeht, falls jeweils E statt e_i geschrieben wird; dagegen weichen die beiden Terme der Gleichung $\mathsf{E}(\cdots \mathsf{E}_a \cdots) = \mathsf{E}(\cdots \mathsf{E}_b \cdots)$ nur in einem einzelnen Auftreten von E_b statt E_a (bzw. umgekehrt) voneinander ab.
Eine gewisse Verwandtschaft ist zwischen PA-Axiom (1) und PC*-Axiom (5) sowie zwischen PA-Axiom (4) und PC*-Axiom (3) offensichtlich, doch sind zudem die beiden Systeme PA und PC* zueinander isomorph (vgl. Kapitel 4.3).

4.3 Zwei Isomorphiesätze

Schwartz behauptet nicht, als Erster die Primäre Algebra in einer Standardnotation reformuliert oder auf ihre algebraischen Eigenschaften hin untersucht zu haben; er behauptet jedoch – m. E. zu Recht – die erste beweistheoretische Untersuchung vorgelegt zu haben (vgl. Schwartz, 1981, 241f.).[18]

4.3.1 Die Isomorphie der Beweissysteme

Mit seiner beweistheoretischen Reformulierung der Primären Algebra bezweckt Schwartz folgendes Theorem.

Schwartz' erstes Theorem
„PA is isomorphic with PC*." (Schwartz, 1981, 243)

Beweisanalyse Schwartz argumentiert folgendermaßen für die Isomorphie zwischen den formalen Systemen PA und PC*:

(1) Durch PA ist Σ(PA) vollständig und korrekt formalisiert.

(2) Σ(PA) wird durch τ isomorph abgebildet auf Σ(PC*), das heißt: Die bijektive Übersetzungsabbildung τ ist mit den formalen Semantiken verträglich.

(3) Es ist Σ(PC*) durch PC* vollständig und korrekt formalisiert.

18 Vgl. (Shimogawa und Takahara, 1994) für die an (Schwartz, 1981) orientierte, spätere beweistheoretische Untersuchung „Reconstruction of G. Spencer Brown's theme".

Seine Argumentation kann im Wesentlichen durch folgende *gdw.*-Kette symbolisiert werden, wobei ich ‚gdw.' wie üblich als Abkürzung für ein ‚genau dann, wenn' auf Metaebene verwende:

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{PA} \vdash \mathsf{E} = [\varepsilon] & & & \\ \quad\text{gdw.} & \Sigma(\mathrm{PA}) & \models & \mathsf{E} = [\varepsilon] \\ \quad\text{gdw.} & \Sigma(\mathrm{PC}^*) & \models & \tau(\mathsf{E}) \\ \quad\text{gdw.} & \mathrm{PC}^* & \vdash & \tau(\mathsf{E})\,. \end{array}$$

Die *erste Teilbehauptung* in seinem Beweis entnimmt Schwartz mehr oder minder den Laws of Form, insofern er schreibt:

> „Every derivation carried out in the original calculus can be made rigorously formal as a derivation in PA. This yields the result that PA is *complete* with respect to $\Sigma(\mathrm{PA})$ in the sense that an equation of $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$ is a theorem of PA if and only if it is valid in $\Sigma(\mathrm{PA})$." (Schwartz, 1981, 243)

Dieser Begriff von Vollständigkeit, die „if and only if"-Klausel, kann in zwei if-Klauseln aufgelöst werden, die jeweils eine eigene Eigenschaft charakterisieren:

(1) Es heißt PA *vollständig* bezüglich $\Sigma(\mathrm{PA})$, falls jede gültige $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-Gleichung ableitbar ist;

(2) es heißt PA *korrekt* bezüglich $\Sigma(\mathrm{PA})$, falls jede ableitbare $\mathsf{L}(\mathrm{PA})$-Gleichung gültig ist.

Wohlgemerkt interpretiere ich in diesem Zusammenhang das *Demonstrieren* einer Konsequenz als das Ableiten einer Gleichung, nicht ihr Folgern; ich nutze also eine syntaktische und nicht semantische Lesart des Demonstrierens. Ich möchte allerdings betonen, dass Demonstrationen als Folgerungen und als Ableitungen gelesen werden können.

In Chapter 9 formuliert und beweist Brown, dass die Primäre Algebra bezüglich der Primären Arithmetik vollständig ist.

> „**Theorem 17. Completeness**
> *The primary algebra is complete.*
> That is to say, if $\alpha = \beta$ can be proved as a theorem about the primary arithmetic, then it can be demonstrated as a consequence for all α, β in the primary algebra." (Brown, 1969, 50)

Im Fließtext von Chapter 8 formuliert und begründet Brown, dass PA korrekt bezüglich $\Sigma(\mathrm{PA})$ ist; diese Einsicht weist er nicht als Theorem aus.

> „Since the initial steps in the algebra were taken to represent theorems about the arithmetic, it depends on our point of view whether we regard an equation with variables as expressing a consequence in the algebra or a theorem about

> the arithmetic. Any demonstrable consequence is alternatively provable as a theorem[. . . .]
> By their origin, the consequences in the algebra are arithmetically valid[.]“ (Brown, 1969, 44, 46)

Offensichtlich bringen die beiden algebraischen Initiale, welche arithmetische Theoreme darstellen bzw. arithmetisch gültige Gleichungen sind, Konsequenzen im Allgemeinen erst unter Hinzunahme der algebraischen Ableitungsregeln zustande. Demnach sind Demonstrationen nur dann als Ableitungen/Folgerungen lesbar, wenn durch die beiden algebraischen Regeln des Ableitens/Folgerns Schritte dargestellt werden, durch welche (auf einer Meta-Ebene) Schritte bzw. Schrittfolgen beschrieben werden, die in arithmetischen Beweisen getätigt werden dürfen. Eine dahingehende *Rechtfertigung* (justification) leistet Brown in (Brown, 1969, 26f.).

Kommen wir zurück auf die zuletzt zitierte Stelle: „Every derivation carried out in the original calculus can be made rigorously formal as a derivation in PA.“ (Schwartz, 1981, 243). In `LoF` ist mehr oder minder deutlich *bewiesen*, dass die Primäre Algebra im Hinblick auf die Primäre Arithmetik vollständig und korrekt ist. Dieser Beweis ist selbstverständlich keine Ableitung *in* der Primären Algebra, sondern weist eine Einsicht in den Zusammenhang zwischen *Ableitungen* im algebraischen Kalkül und *Beweisen* über den arithmetischen Kalkül aus. Zwischen Ableitungen in PA und Beweisen über Σ(PA) besteht ein analoger Zusammenhang, der streng bewiesen werden kann. Diese Vollständigkeit (vollständig und korrekt) von PA bezogen auf Σ(PA) wird in (Schwartz, 1981) nicht explizit ausgewiesen, sie gilt als offensichtlich.

Die *zweite Teilbehauptung* in seinem Beweis beweist Schwartz explizit, nämlich durch mathematische Induktion über die Formellänge (vgl. Schwartz, 1981, 243f.). Dieser Beweisschritt erfolgt „straight forward“ und ist eine wohlbekannte und etablierte mathematische Argumentationsmethode.

Die *dritte Teilbehauptung* in seinem Beweis folgert Schwartz daraus, dass die Aussage für PC statt PC* bekanntermaßen gilt (vgl. Schwartz, 1981, 242).

Rückblickende Bemerkung Schwartz’ Argumentation ist allgemeiner als nötig und zudem unnötig indirekt. Denn er beweist einerseits *allgemein*: Zwei *beliebige* formale Systeme in den Sprachen L(PA) und L(PC*), durch welche die formalen Semantiken Σ(PA) und Σ(PC*) *vollständig* und *korrekt* dargestellt werden, sind zueinander isomorph. Und er beweist andererseits *unnötig indirekt*, dass sein formales System PA für die Primäre Algebra die formale Semantik Σ(PC*) der klassischen Aussagenlogik darstellt. Denn für die klassische Aussagenlogik in der Sprache L(PC*) gibt es wohlbekannte formale Systeme, deren Axiome und Ableitungsregeln offensichtlich besser zu PA passen als die von PC* (vgl. Kapitel 5).

4.3.2 Die Korrespondenz zwischen Gleichungen

Die Übersetzung τ von L(PA)-Termen in L(PC*)-Terme kann insbesondere zu einem Isomorphismus τ^* erweitert werden, der L(PA)-Gleichungen in die logischen Äquivalenzen der τ-Bilder der jeweiligen Terme übersetzt. Das Symbol ‚$\equiv$' dient im Folgenden lediglich der Kurznotation von $\tau^*(\mathsf{E_a} = \mathsf{E_b})$ und ist demnach keine Erweiterung von L(PC*).

Schwartz' zweites Theorem
„For all equations $\mathsf{E} = \mathsf{F}$ of L(PA), PA $\vdash \mathsf{E} = \mathsf{F}$ if and only if PC$^* \vdash \tau(\mathsf{E}) \equiv \tau(\mathsf{F})$." (Schwartz, 1981, 244)

Beweisanalyse Schwartz argumentiert im Wesentlichen anhand folgender *gdw.*-Kette:

$$\begin{array}{llcl}
\text{PA} \vdash \mathsf{E_a} = \mathsf{E_b} & & & \\
\text{gdw.} & \Sigma(\text{PA}) & \models & \mathsf{E_a} = \mathsf{E_b} \\
\text{gdw.} & \Sigma(\text{PA}) & \models & \tau^{-1}(\tau(\mathsf{E_a}) \equiv \tau(\mathsf{E_b})) = [\varepsilon] \\
\text{gdw.} & \Sigma(\text{PC}^*) & \models & \tau(\tau^{-1}(\tau(\mathsf{E_a}) \equiv \tau(\mathsf{E_b}))) \\
\text{gdw.} & \Sigma(\text{PC}^*) & \models & \tau(\mathsf{E_a}) \equiv \tau(\mathsf{E_b}) \\
\text{gdw.} & \text{PC}^* & \vdash & \tau(\mathsf{E_a}) \equiv \tau(\mathsf{E_b})\,.
\end{array}$$

Darin verlangt nur die *zweite* Teilbehauptung einer näheren Betrachtung, die per Fallunterscheidung vollzogen wird. Die *erste* und die *fünfte* Teilbehauptung gelten wegen der Korrektheit und Vollständigkeit von PA bezüglich Σ(PA) bzw. von PC* bezüglich Σ(PC*). Für die *vierte* Teilbehauptung braucht man nur die Inversion von τ^{-1} durch τ zu beachten. Die *dritte* Teilbehauptung wurde bereits im Paragraphen *Tautologien und gültige Gleichungen* (vgl. S. 41) eigens behandelt.

Kapitel 5

Ein gleichungslogischer Zugriff auf die Primäre Algebra

5.1 Ziel dieses Kapitels

In diesem Kapitel wird die Isomorphie zwischen der Primären Algebra und der klassischen Aussagenlogik (vgl. Kapitel 4) nochmals neu ersichtlich. Ich zeige dafür, dass die Primäre Algebra in Schwartz' Lesart eine Boolesche Algebra ist. Für Boolesche Algebren wiederum steht in der Gleichungslogik ein formaler Beweiskalkül zur Verfügung, so dass Schwartz' Ergebnisse alternativ und nicht weniger stichhaltig bewiesen werden können; der Unsicherheitsfaktor ist hierbei also nicht die mathematische Strenge, sondern – wie für Schwartz – die geeignete `LoF`-Exegese.

In seinen Laws of Form gibt Brown mehrfach den Hinweis auf *Boolesche Algebren*, bspw. in „Introduction", „Notes Chapter 6" und „Appendix 1", und er behauptet insbesondere:

> „I am thus able to present (Appendix 1), apperently for the first time, proofs of each of Sheffer's postulates, and hence of all Boolean postulates, as theorems about an axiomatic system which is seen to rest on the fundamental ground of mathematics." (Brown, 1969, xii)

Das axiomatische System, das auf diesem Fundament der Mathematik aufruht, ist m. E. Browns *Indikationenkalkül* (calculus of indications), dem die Primäre Algebra inklusive der Primären Arithmetik angehört. Die Primäre Algebra selbst ist jedoch unter Berücksichtigung der von Brown intendierten Lesart keine Boolesche Algebra: „Nein, die Algebra ist nicht Boole'sch: sie ist Brown'sch" (Brown, 1999, xv). Denn die Operationen dieser Algebra sind bestimmten Beschränkungen nicht unterworfen (vgl. Kapitel 9).

In diesem Kapitel werden im Hinblick auf die Primäre Algebra Boolesche Algebren als mathematische Strukturen und als formale Systeme behandelt. So wird Schwartz' formales System PA nochmals betrachtet; PA wird allerdings nicht mittels seiner formalen Semantik $\Sigma(\mathrm{PA})$ mit $\Sigma(\mathrm{PC}^*)$ und damit weiter mit dem prima facie deutlich andersgearteten formalen System PC* der (erweiterten) klassischen Aussagenlogik in Verbindung gebracht; sondern PA wird mit offensichtlich gleichgearteten formalen Systemen zu Booleschen Algebren verglichen und unter Vernachlässigung der von Brown intendierten Lesart als eine solche erkannt.

Letztlich sollte allerdings nicht vergessen werden, dass Brown nicht Boolesche Algebren im Allgemeinen betrachtet, insbesondere nicht als formale Systeme, sondern dass ihm nur an einer ganz konkreten, zwei-elementigen mathematischen Struktur gelegen ist, genauer: an der ausgefeilten Darstellung einer in Chapter 2 verursachten Sachlage; diese Sachlage ist allerdings *prototypisch* für alle endlichen Booleschen Algebren.
Last, not least ist zu beachten, dass die Primäre Algebra sowie die Primäre Arithmetik nicht in üblichem Sinne mathematische Strukturen sind, sondern lediglich als solche gelesen werden (können). Sind demnach die für eine im üblichen Sinne erfolgende formale Lesart zu explizierenden ‚impliziten Axiome‘ und ‚impliziten Ableitungsregeln‘ von Brown etwa doch nicht schlicht vergessen worden? Die Beantwortung dieser Frage erfolgt in Kapitel 6.1.

5.2 Gleichungslogische Formalisierung

5.2.1 Ableitungsregeln für die Gleichungslogik

Gleichungslogik Die *Gleichungslogik* (equational logic) ist ein Fragment der Prädikatenlogik erster Stufe (first-order logic), in dem weder die Quantoren noch die aussagenlogischen Junktoren explizit auftreten (vgl. Burris, 1998, Kapitel 3). In der Gleichungslogik sind gewisse Klassen mathematischer Strukturen, genauer: *Algebren* (Strukturen ohne Relationen), als *Modelle* von Axiomen-Systemen definiert, wobei letztere nur Gleichungen enthalten. Da dann jede Belegung der Variablen durch Konstanten die *definierenden Gleichungen* modelliert, sind Allquantoren implizit; Existenzquantoren sind implizit, insofern die modellierende Interpretation der null-stelligen Funktionssymbole die Existenz *ausgezeichneter Elemente* liefert.

Korrektheit und Vollständigkeit Für die Gleichungslogik gibt es wie für die klassische Aussagenlogik (Post, 1921) und für die Prädikatenlogik erster Stufe (Gödel, 1929) und damit anders als für die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation (Gödel, 1931) ein *Vollständigkeitstheorem* (Birkhoff, 1935). Im Hintergrund dieser Vollständigkeit steht erneut (vgl. S. 44) eine Korrektheit; am Beispiel der Prädikatenlogik erster Stufe beschreibt Burris dieses Verhältnis folgendermaßen:

> „A set of axioms, with rules of inference, just for first-order logic was first proposed by Hilbert and Ackermann in 1928. Such a first-order proof system has two main requirements:
>
> – (*Soundness*) Only valid sentences can be derived.
>
> – (*Completeness*) All valid sentences can be derived.
>
> The first is essential—we don't want to derive sentences that are not valid. The second is icing on the cake." (Burris, 1998, 367)[19]

Dementsprechend gilt für Birkhoffs Ableitungsregeln im Hinblick auf die Gleichungslogik (vgl. Burris, 1998, 183f.: Theoremen 3.9.1 und Theorem 3.10.1):

(1) Birkhoff's Regeln sind *korrekt* (sound), das heißt

$$\mathcal{S} \vdash \mathsf{s} \approx \mathsf{t} \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{S} \models \mathsf{s} \approx \mathsf{t}\,.$$

(2) Birkhoff's Regeln sind *vollständig* (complete), das heißt

$$\mathcal{S} \models \mathsf{s} \approx \mathsf{t} \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{S} \vdash \mathsf{s} \approx \mathsf{t}\,.$$

Birkhoffs Ableitungsregeln Wenden wir uns nun den sog. fünf *Birkhoffschen Ableitungsregeln* selbst zu:

> „In 1935 Garrett Birkhoff proved that the usual rules for manipulating equations that one learns in high school are complete for equational logic." (Burris, 1998, 388)

Mit anderen Worten ‚rechnet' man in der Gleichungslogik wie in der schulischen Gleichungslehre. Mit diesen Manipulationsregeln, die in der Schule auf Termfunktionen und in der Gleichungslogik auf Terme angewandt werden,[20] ist gemeint, dass die Gleichheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller L-Terme ist, wobei L eine bestimmte mathematische Sprache ist, die mit Substitution und Ersetzung verträglich ist. Das ist für die *semantische* Sichtweise von Gleichungen, nämlich ihre Gültigkeit im Hinblick auf eine oder alle L-Algebren (vgl. S. 50), beweisbar und daraus werden für die *syntaktische* Sichtweise Birkhoffs Ableitungsregeln für die Gleichungslogik gewonnen; das heißt genauer:
Seien $\mathsf{r}, \mathsf{s}, \mathsf{t}, \mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n$ L-Terme mit $\vec{\mathsf{t}} := (\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)$ und $x_1, \ldots, x_n$ L-Variablen mit

---

19 Dem genannten Kalkül für die Prädikatenlogik erster Stufe, also dem von Hilbert und Ackermann, ist der in Kapitel 4 betrachtete Kalkül PC für die klassische Aussagenlogik entnommen.

20 Burris verwendet zwei Symbole für ‚Gleichheit' (vgl. Burris, 1998, 149): „The usual symbol = is to be understood simply as „identical to," whereas ≈ is used in the formulas of our logics to express equality."

$\vec{x} := (x_1, \dots, x_n)$; weiter sei $\mathcal{S}$ eine Menge von L-Gleichungen. Dann können folgende fünf *Gültigkeiten* bewiesen werden, zu denen ich jeweils das Pendant mitangebe, nämlich die zu fordernde *Ableitbarkeit.*

(1) *Reflexivität* (vgl. Burris, 1998, 159: Theorem 3.4.16, und 175f.):

  a. $\mathcal{S} \models t \approx t$

  b. $\mathcal{S} \vdash t \approx t$

(2) *Symmetrie* (vgl. Burris, 1998, 159: Theorem 3.4.16, und 175f.):

  a. $\mathcal{S} \models r \approx s$ impliziert $\mathcal{S} \models s \approx r$

  b. $\mathcal{S} \vdash r \approx s$ impliziert $\mathcal{S} \vdash s \approx r$

(3) *Transitivität* (vgl. Burris, 1998, 159: Theorem 3.4.16, und 175f.):

  a. $(\mathcal{S} \models r \approx s$ und $\mathcal{S} \models s \approx t)$ impliziert $\mathcal{S} \models r \approx t$

  b. $(\mathcal{S} \vdash r \approx s$ und $\mathcal{S} \vdash s \approx t)$ impliziert $\mathcal{S} \vdash r \approx t$

(4) *Substitution* (vgl. Burris, 1998, 169: Theorem 3.6.7, und 175f.):

  a. $\mathcal{S} \models r(\vec{x}) \approx s(\vec{x})$ impliziert $\mathcal{S} \models r(\vec{t}) \approx s(\vec{t})$

  b. $\mathcal{S} \vdash r(\vec{x}) \approx s(\vec{x})$ impliziert $\mathcal{S} \vdash r(\vec{t}) \approx s(\vec{t})$

(5) *Ersetzung* (vgl. Burris, 1998, 174: Theorem 3.7.9, und 175f.):

  a. $\mathcal{S} \models r \approx s$ impliziert $\mathcal{S} \models t(\cdots r \cdots) \approx t(\cdots s \cdots)$

  b. $\mathcal{S} \vdash r \approx s$ impliziert $\mathcal{S} \vdash t(\cdots r \cdots) \approx t(\cdots s \cdots)$

Die Ableitbarkeits-Forderungen in den b-Punkten formalisieren die Gleichungslogik offensichtlich *korrekt*, weil sie semantisch gültig sind, und zudem *vollständig*, was Birhoff gezeigt hat (vgl. Burris, 1998, 184f.).
In 4. wird *jedes* Auftreten von x_i durch t_i (für $1 \leqslant i \leqslant n$) *substituiert*, in 5. dagegen *ein* Auftreten von r durch s (bzw. umgekehrt) *ersetzt.* Die in 1. bis 5. verwendete Symbolisierung $\mathcal{S} \models G$, wobei G eine L-Gleichung ist, ist folgendermaßen definiert: Sei $\mathbf{A} := (A, I)$ eine L-*Algebra* alias algebraische Struktur, dann enthält L keine Relationszeichen und es ist I eine *Interpretation* von L im Hinblick auf die Menge A, weswegen jedem n-stelligen Funktionszeichen $f \in L$ eine *volle* und sog. *fundamentale Operation* $f^{\mathbf{A}} := I(f) \colon A^n \to A$ zugewiesen ist (vgl. Burris, 1998, 135). Wir schreiben dann (vgl. Burris, 1998, 149):

(1) $\mathbf{A} \models r \approx s$, falls r und s auf $\mathbf{A}$ diesselbe Termfunktion induzieren;

(2) $\mathbf{A} \models \mathcal{S}$, falls $\mathbf{A} \models G$ für alle $G \in \mathcal{S}$ gilt;

(3) $\mathcal{S} \models G$ für alle $G \in \mathcal{S}$, falls $\mathbf{A} \models G$ für alle $\mathbf{A} \models \mathcal{S}$ gilt.

Wir lesen dabei ‚$\mathbf{A} \models \mathsf{G}$‘ als: **A** ist Modell von G alias **A** modelliert G alias **A** erfüllt G; dagegen lesen wir ‚$\mathcal{S} \models \mathsf{G}$‘ als: G folgt aus $\mathcal{S}$.

Die Primäre Algebra als Modell einer Struktur Die Primäre Algebra ist m. E. *kein* formales System, dessen Symbolen und Variablen also kein bestimmter Interpretationsbereich zugewiesen ist. Sie ist m. E. *ein Modell* einer mathematischen Struktur ohne Relationen. Insofern man in nicht unüblicher Weise eine Struktur ohne Relationen als Algebra bezeichnet, gilt: Die Primäre Algebra ist eine Algebra.[21] Liest man die Primäre Algebra als Modell, so sind die Konstanten- und Funktionssymbole bereits fest interpretiert und ist den Variablen ein bestimmter Interpretationsbereich zugewiesen. Man spricht diesbezüglich insbesondere von einer *symbolischen* Algebra und ich werde diese Lesart in Kapitel 7 weiter ausführen. Im Folgenden aber untersuche ich die *Struktur*, die von der Primären Algebra modelliert wird.

Die beiden von Brown in Chapter 5 formulierten Regeln und deren Pendants, die PA-Ableitungsregeln, sind von den PC*-Ableitungsregeln recht verschieden (vgl. Kapitel 4.2.3), doch entsprechen sie deutlich zwei Birkhoffschen Regeln. Genauer: Zu jeder der fünf Regeln Birkhoffs ist in den Laws of Form ein Pendant zu finden, nämlich die Regeln R1 und R2 in Chapter 5, die Theoreme 5 und 7 in Chapter 4 und die Definition von Äquivalenz in Chapter 2 (vgl. S. 53 und 57). Wohlgemerkt korrespondieren den fünf *Ableitungsregeln* Birkhoffs fünf *Folgerungsregeln*; andersherum: Birkhoff hat für fünf Folgerungsregeln der Gleichungslogik gezeigt, dass sie als Ableitungsregeln korrekt und vollständig sind. Man kann dahingehend von ein-und-denselben fünf Regeln sprechen, die einerseits semantisch verwendet werden, andererseits syntaktisch.

Im Hinblick auf die Primäre Arithmetik definiert, beweist und rechtfertigt Brown ebenfalls insgesamt fünf Regeln der Primären Algebra, drei implizite und zwei explizite: Er definiert die Symmetrie, beweist die Reflexivität sowie Transitivität und rechtfertigt die *substitution*- sowie *replacement*-Regel. In Chapter 8 thematisiert Brown, dass seine Regeln des algebraischen Kalkulierens demnach *korrekt* sind. Doch verwendet Brown die Regeln *über* die Arithmetik nun *in* der Algebra als syntaktische oder semantische Regeln? Die Antwort ist heikel. Immerhin *könnte* er sie in der Primären Algebra, als einer symbolischen Algebra für die Primäre Arithmetik, rein syntaktisch verwenden. Eine Bezeichnungsweise spricht – aber nur sehr leise – für ihren semantischen Gebrauch, also als Folgerungsregeln. Denn Brown nutzt in Chapter 6 mehrfach die beiden Überschriften „Consequence“

21 Wohlgemerkt ist die *continence*-Relation (vgl. Brown, 1969, 6f.) eine zwischen Kreuzen mögliche Relation. Sie liefert allerdings nur das Ordnungsmuster für Terme *als Teilterme* eines Terms, sie ist nicht Relation zwischen zwei Termen, die jeweils als ein Ganzes betrachtet werden. M.a.W.: Die continence-Relation ist die Degeneration von Konkatenation und brackets-Umklammerung.

und „Demonstration“ zur Gliederung des Textes. Man beachte dahingehend bspw. folgende (implizite) Definition bei Burris:

> „Let $\mathsf{Conseq}(\mathcal{S})$ be the set of all equational consequences of a set of equations $\mathcal{S}$, i.e., $\mathsf{Conseq}(\mathcal{S}) = \{s \approx t \colon \mathcal{S} \models s \approx t\}$. This is a natural notion, for if $\mathcal{S}$ is $\mathcal{R}$, the axioms for rings, then $\mathsf{Conseq}(\mathcal{R})$ is the set of equations true in all rings. Likewise, $\mathsf{Conseq}(\mathcal{BA})$ is the set of equations true in all Boolean algebras, and so on.“ (Burris, 1998, 182)

Konsequenzen sind demnach (eher) Folgerungen (als Ableitungen) aus einer Menge von Gleichungen. In (Stekeler-Weithofer, 2008) werden Argumentationen, die in der Anschauung – Anschauung als geteilter und geregelter sowie kontrollierbarer Praxis – erfolgen als Demonstrationen bezeichnen. All dieser (alternativen) Möglichkeiten ungeachtet, kann die Primäre Algebra zumindest zeitweise als formales System betrachtet werden, wie auch Birkhoff fünf gleichungslogische Argumente, die nachweislich gültig für alle Algebren sind, als Ableitungsregeln betrachtet und damit eine (korrekte und sogar) vollständige Formalisierung des gültigen Argumentierens in der Gleichungslogik erhält;[22] vgl. dazu Brown über seine Primäre Algebra:

> „It is deliberate to inform the reader that, in the system of calculation we are building, we are not departing from the basic methods of other systems.“ (Brown, 1969, 87)

In Chapter 9 beweist Brown, dass jede arithmetisch gültige Gleichung algebraisch demonstriert werden kann; das ist gewissermaßen die *Vollständigkeit* der Darstellung der Primären Arithmetik durch die Primäre Algebra.
Fassen wir zusammen: Wir lesen in diesem Kapitel die Primäre Algebra als Modell einer mathematischen Struktur, genauer: als Modell einer Algebra. In Chapter 5 wird für diese Algebra zudem das algebraische Kalkulieren definiert, das heißt gewissermaßen: Für die Algebra wird ein *korrektes* formales System bestimmt, nämlich gültige Gleichungen als Axiome und gültige Folgerungsregeln als Ableitungsregeln. Und es werden die beiden algebraischen *Initiale* sowie zwei der fünf Regeln (substitution, replacement) im Hinblick auf die repräsentierte Arithmetik explizit semantisch gerechtfertigt; die *Reflexivität* gilt gemäß Theorem 5 in Chapter 4, die *Symmetrie* gewissermaßen nach Definition von Äquivalenz; die *Transitivität* gilt nach Chapter 4, doch wird sie erst in Chapter 6 explizit erwähnt und verwendet. Und es ist diese gemäß Chapter 8 korrekte Formalisierung vollständig gemäß Chapter 9. Das von Brown für die Primäre Algebra bezüglich der Primären Arithmetik

22 In (Huntington, 1904, 289) gelten für das Symbol = Reflexivität, Symmetrie und Transitivität als „obvious theorems“; in (Huntington, 1933b, 280) werden dahingehend vier Postulate formuliert: zunächst diese drei Eigenschaften, denenzufolge die Gleichheit eine Äquivalenzrelation auf der jeweiligen Termmenge ist, und zudem eine schwache Form der Ersetzung (gemäß Burris), insofern in einem Term bzw. in einer Termfunktion $\mathtt{t}$ *jeweils* $\mathfrak{y}$ für $\mathfrak{x}$ geschrieben wird, obwohl $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ gilt. Die Substitutionsregel wird – ohne sie eigens ausgewiesen zu haben – angewandt.

gerechtfertigte algebraische Kalkulieren ist ein Einzelfall des von Birkhoff für die ganze Gleichungslogik als korrekt und vollständig erwiesenen Systems von fünf Ableitungsregeln. Was ich hier summarisch erwähnte, wird im Folgenden noch genauer betrachtet werden.

Browns Ableitungsregeln Untersuchen wir nun wie Schwartz die Primäre Algebra auf ihr formales System, so sind Pendants zu zwei von Birkhoffs Regeln augenfällig, doch bleiben auch die verbliebenen drei Birkhoffschen Regeln nicht ohne Gegenstücke: Zwar expliziert Brown in Chapter 5 nur zwei Regeln mit jeweiliger *Rechtfertigung* (justification), doch greift er in Chapter 6 zur *Demonstration* (demonstration) der ersten *Konsequenz* (consequence) zudem auf eine Definition aus Chapter 2 und ein Theorem aus Chapter 4 zurück; im Wesentlichen sind genau diese vier ‚Regeln' in Schwartz' formalem System PA erfasst (vgl. S. 42), doch ist auch die letzt-verbliebene Regel Birkhoffs in `LoF` im Ansatz zur Verfügung gestellt und kann des Weiteren abgeleitet werden.
Meines Erachtens ist aussagekräftig, dass Brown zwei der fünf Argumentations-Theoreme bzw. Birkhoffschen Regeln expliziert und die verbleibenden drei Regeln implizit lässt. Die Primäre Algebra ist nämlich kein (absolut) isolierter Teil des seit Chapter 3 mit Rückgriff auf Chapter 2 aufgebauten Indikationenkalküls: Die beiden expliziten Regeln rechtfertigt er, da sie bereits gepflegte arithmetische Verfahren *verallgemeinern*; auf die beiden Theoreme und die Definition dagegen greift er ohne Umschweife zurück. Das ist eine ungewöhnliche Verfahrensweise, die den strengen Formalisten möglicherweise verstört. Brown formuliert also die beiden Theoreme und die Definition nicht als Regeln nochmals neu, sondern wendet sie mit Verweis auf die Formulierungen in Chapter 2 und 4 an; die dortigen Formulierungen bedürfen s. E. also keiner weiteren Verallgemeinerung und sind insbesondere in ihrer *unveränderten* Form noch immer gültig; die Abtrennung der Primären Algebra von der Primären Arithmetik ist dahingehend *semi-permeabel*.
Im Folgenden bezeichnet ‚$\mathcal{S}$' die Menge der PA-Axiome (vgl. S. 42); weiter bezeichnet das Symbol = im Hinblick auf die Primäre Algebra die Äquivalenz bzw. Gleichheit und nicht wie bei Burris die Identität; vgl. dazu Brown:

> „**Equivalence**
> Call expressions of the same value equivalent.
> Let a sign = of equivalence be written between equivalent expressions."
> (Brown, 1969, 5)
> „**Equation**
> Call an indication of equivalent expressions an equation." (Brown, 1969, 6)

Ersetzung: Die PA-Regel (1) (vgl. S. 42) lautet in meiner an (Burris, 1998) orientierten Notation: $\mathtt{E}_a = \mathtt{E}_b$ impliziert $\mathtt{E}(\cdots \mathtt{E}_a \cdots) = \mathtt{E}(\cdots \mathtt{E}_b \cdots)$; in `LoF` heißt es diesbezüglich:

> „*Rule 1. Substitution* If $e = f$, and if h is an expression constructed by substituting f for any appearence of e in g, then $g = h$.“ (Brown, 1969, 26)

Offensichtlich ist Browns Substitutions-Regel als Birkhoffs Ersetzungsregel lesbar: $\mathcal{S} \vdash r \approx s$ impliziert $\mathcal{S} \vdash t(\cdots r \cdots) \approx t(\cdots s \cdots)$.

Substitution: Die PA-Regel (2) (vgl. S. 42) lautet in meiner an (Burris, 1998) orientierten Notation: $E_a = E_b$ impliziert $(E_a = E_b)(e_i \leftharpoondown E)$; in LoF heißt es diesbezüglich:

> „*Rule 2. Replacement* If $e = f$, and if every token of a given independent variable expression v in $e = f$ is replaced by an expression w, it not being necessary for v, w to be equivalent or for w to be indepentent or variable, and if as a result of this procedure e becomes j and f becomes k, then $j = k$.“ (Brown, 1969, 26)

Offensichtlich ist Browns Ersetzungs-Regel als Spezialfall von Birkhoffs Substitutionsregel lesbar: $\mathcal{S} \vdash r(\vec{x}) \approx s(\vec{x})$ impliziert $\mathcal{S} \vdash r\left(\vec{t}\right) \approx s\left(\vec{t}\right)$. Der prima facie allgemeinere Fall, die *simultane* Substitution von n-vielen Variablen bzw. genauer: dessen Endzustand, ist mit etwas Vorsicht auch *sequenziell* zu erreichen; dabei muss und kann Variablenkonfusion (x_j tritt in t_i auf) durch geeignete zwischenzeitliche Umbenennungen vermieden werden, wobei die Umbenennungen von Browns Ersetzungsregel selbst geleistet werden.

Symmetrie: Die PA-Regel (3) lautet: $E_a = E_b$ impliziert $E_b = E_a$; in Chapter 5 ist sie nicht als Regel vereinbart, in Chapter 6 dagegen wird sie als solche benützt; genauer gesagt: In der Demonstration der ersten Konsequenz formuliert Brown: „We make use of the licence allowed in the definition (p 5) of = to convert $\overline{\overline{pr}\rceil\ \overline{qr}\rceil}\rceil = \overline{\overline{p}\rceil\ \overline{q}\rceil}\rceil r$ to $\overline{\overline{p}\rceil\ \overline{q}\rceil}\rceil r = \overline{\overline{pr}\rceil\ \overline{qr}\rceil}\rceil$.“ (Brown, 1969, 29); vgl. dazu:

> „**Value**
> Call a state indicated by an expression the value of the expression.
> **Equivalence**
> Call expressions of the same value equivalent.
> Let a sign = of equivalence be written between equivalent expressions.“ (Brown, 1969, 5)
> „**Equation**
> Call an indication of equivalent expressions an equation.“ (Brown, 1969, 6)

Dies ist für Brown der Kern der Verwendungsweise von =, das zwischen zwei Ausdrücke geschrieben werden darf, die denselben Wert anzeigen. Brown beweist als Theorem 5, dass die Äquivalenz reflexiv ist, und beweist als Theorem 7, dass die Äquivalenz transitiv bzw. komparativ ist. Symmetrisch ist sie definitionsgemäß, so sie überhaupt wohldefiniert ist. In der Gleichung $r = s$ kommen r und s verschiedene Positionen zu und man liest sie gleichermaßen meist als ‚r ist äquivalent zu s‘, als ob die Äquivalenz der beiden Ausdrücken eine Eigenschaft wäre, die s im Hinblick auf r oder r im Hinblick auf s zukommt, wie bspw. im Falle der kleiner-Relation zwischen zwei rationalen Zahlen. Die Äquivalenz dagegen besteht zwischen beiden Ausdrücken gleichermaßen und sie machen das letztlich nicht unter sich aus, sondern mittels eines Dritten, eines *Vergleichspunktes* (tertium comparationis): Zunächst beziehen sich Ausdrücke auf jeweils einen Wert; erfolgt bei zwei Ausdrücken diese Bezugnahme auf denselben Wert, so kommt ihnen die Äquivalenz zu, sie wird ihnen durch ihren gemeinsamen Wert vermittelt. Dabei vermittelt jeder Wert zwischen allen Indikatoren simultan. Gleichungen dagegen zeigen jeweils nur die Äquivalenz zweier Ausdrücke an, Gleichungen sind dahingehend sequenziell. Weiter werden Gleichungen zunächst sequenziell und erst nachträglich als Ganzes erfasst. In dem durch das Dritte vermittelten Verhältnis, ihrer zwei-stelligen Relation, sind die (beiden) Terme vollends gleichberechtigt, so dass auf einer Meta-Ebene betrachtet auch $r = s$ und $s = r$ zwei Indikationen *einer* Äquivalenz sind, die demnach und dieserart auf der Meta-Ebene äquivalent sind. Meines Erachtens gibt Brown durch „the licence allowed in the definition (p 5) of =“ also insbesondere den Hinweis darauf, dass die Darstellung der Sachlage nicht adäquat ist bzw. die Gleichung von beiden Seiten her gelesen werden darf; mit anderen Worten: Die Äquivalenz zweier Ausdrücke ist als Interpretation eines zwei-stelligen, symmetrischen Relationszeichens (eigentlich nur unzureichend) konzeptualisiert; die Darstellung ist erst auf den zweiten Blick, nämlich durch die Symmetrie-Forderung, der Sachlage bzw. ihrem Gegenstand adäquat.

Transitivität: Die PA-Regel (4) lautet: ($E_a = E_b$ und $E_b = E_c$) impliziert $E_a = E_c$; in Chapter 5 ist sie nicht als Regel vereinbart, in Chapter 6 dagegen wird sie als solche benützt; genauer gesagt: In der Demonstration der ersten Konsequenz leitet Brown zunächst sechs Gleichungen der Form $t_1 = t_2$, $t_2 = t_3$, …, $t_6 = t_7$ ab und formuliert dann: „We may now use T7 five times to find“ $t_1 = t_7$. Genanntes T7 sollte also – so könnte man erwarten – das Transitivitäts-Theorem für das Äquivalenzzeichen sein; die Paraphrase des Theorems steht dieser Interpretation offen, die Symbolisierung erfolgt leicht anders:

> „**Theorem 7. Consequence** Expressions equivalent to an identical expression are equivalent to another.
> In any case, if $x = v$ and $y = v$, then $x = y$.“ (Brown, 1969, 21)

Notiert ist genau genommen keine Transitivitäts-, sondern die *Komparativitäts*-Regel mit v als *tertium comparationis*.[23] Weil in der Primären Algebra auch die Symmetrie-Regel zur Verfügung steht und demnach auf die zweite Prämisse angewendet werden kann, ist die Transitivität zumindest als Regel ableitbar.

23 Vgl. (Lorenzen, 1970, 137). Dort ist das *tertium comparationis* wohlgemerkt jeweils links notiert, bei Brown jeweils rechts. Mit Blick auf die Symmetrie des Äquivalenzzeichens ist dies natürlich keine Abweichung von Relevanz.

Reflexivität: Zu der Birkhoffschen Regel, dass $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{a}$ bereits aus der leeren Menge folgt, also insbesondere $\mathcal{S} \vdash \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ gilt, findet Schwartz kein Pendant als PA-Regel. Dafür könnte zwar ein Grund sein, dass Brown in der Primären Algebra keine solche Regel hat, doch ist dem m. E. nicht so, insofern Chapter 5 mit folgenden Worten beginnt:

> „Let tokens of variable form $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ indicate expressions in the primary arithmetic.
> Let their values be unknown except in as far as, by theorem 5, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}, \ldots$“. (Brown, 1969, 25)

Browns Reflexivitäts-Regel für Variable ist unschwer als Spezialfall von Birkhoffs Reflexivitätsregel $\mathcal{S} \vdash \mathfrak{t} \approx \mathfrak{t}$ erkennbar und liefert den prima facie allgemeineren Fall unter Hinzunahme der Ersetzungsregeln von Brown; m. E. hat Schwartz $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i$ den üblichen Standards gemäß (implizit) vorausgesetzt.

Kommentar: Bedauerlicherweise ist Browns Ausdruck „tokens of variable form $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$“ mit „values be unknown“ ziemlich unpräzise. So muss man in naheliegender Weise annehmen, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ Variable, Unbestimmte, Unbekannte bzw. Platzhalter im üblichen Sinne sind; das ist nicht selbstverständlich, denn sie sind zunächst (nur) in ihrer Form variabel und demnach von verschiedener Gestalt, und unbekannt in ihrem Wert wären sie auch als Eigennamen für spezielle, später noch zu spezifizierende arithmetische Ausdrücke. Achtet man nun auf den Gebrauch einzelner, variabler Buchstaben in den Initialen, Regeln, Konsequenzen und Demonstrationen, so zeigt sich: In Chapter 6 wird C1 mit $\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$ in der Demonstration von C2 verwendet und C4 mit ε statt $\mathfrak{b}$ in der Demonstration von C5; damit fungieren also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ tatsächlich nicht nur als variable Formen unbekannten Wertes, sondern als Variable im üblichen Sinne: Sie sind einsortig und der Objektsprache zugehörig. Neben der Frage, ob durch „$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$“ tatsächlich Variablen präsentiert werden, besteht zudem die Frage, welche Symbole neben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ dafür zugelassen sind. Schauen wir also auch dahingehend auf den Gebrauch: Die Buchstabenfolge $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ aus dem gewöhnlichen lateinischen Alphabet kommt in Chapter 5 in den Initialen zum Einsatz, die Buchstabenfolge $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ und die drei Buchstabenpaare $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}; \mathfrak{j}, \mathfrak{k}; \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ werden in Regel 1 und 2 verwendet; diese Buchstaben werden allesamt in Chapter 6, genauer: bereits in der Demonstration von C1, als Variable verwendet, insofern für sie Terme substitutiert bzw. sie durch Terme ersetzt werden. In Chapter 6 werden dann auch noch die Buchstaben $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ gebraucht; kurz gesagt: Brown kommt in den expliziten Fällen mit den Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets aus. Ich nehme allerdings an, dass er im Bedarfsfalle auf weitere Symbole bzw. Symbolisierungen wie bspw. mit natürlichen Zahlen indizierte Buchstaben zurückgreifen würde, wie sie von Brown in Chapter 2 und 4 bereits in anderem Kontext gebraucht werden. In Chapter 9 werden dann griechische Buchstaben und indizierte lateinische Großbuchstaben als einsortige Meta-Variablen verwendet. Dabei ist zu beachten: Wird als (Erlaubnis-)Regel zugelassen, Variablen durch beliebige Terme zu substituieren, so setzt dies voraus, die Symbole als Elemente und Verknüpfungen *im* Grundbereich zu interpretieren (volle Operationen); andernfalls müsste man bspw. die Substitution von Variablen auf Konstanten und volle null-stellige Verknüpfungen einschränken (vgl. Schreiber, 1977, 118, 116). Dass Schwartz in die Sprache L(PA) abzählbar viele „expression variables“ $e_1, e_2, \ldots$ aufnimmt, die allesamt im Grundbereich interpretiert werden, ist m. E. gerechtfertigt bzw. meiner LoF-Lesart adäquat.

Gültige Argumente und Ableitungen In den Theoremen zur Korrektheit und Vollständigkeit der Birkhoffschen Regeln für die Gleichungslogik ist schlicht die Äquivalenz zwischen Gültigkeit und Ableitbarkeit einer Gleichung formuliert; eine genauere Formulierung für die Argumente und Ableitungen selbst kann folgendermaßen lauten (vgl. Burris, 1998, 185f.):

(1) Ein Gleichungs-*Argument* $s_1 \approx t_1, \cdots, s_n \approx t_n \therefore s \approx t$, ist *gültig* genau dann, wenn es eine *Ableitung* der Konklusion aus den Prämissen gibt; symbolisch: $s_1 \approx t_1, \cdots, s_n \approx t_n \vdash s \approx t$.

(2) Ein Gleichungs-Argument ist *ungültig* genau dann, wenn es ein *Gegenbeispiel* gibt, das heißt eine Algebra **A**, in der die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.

Im Hintergrund der Äquivalenzen stehen die Definitionen, dass ein *Gleichungs-Argument* (equational argument) *gültig* alias *korrekt* ist, falls es in *jeder* Algebra **A** ein *in* **A** *gültiges* Gleichungs-Argument ist. Dabei gilt ein Gleichungs-Argument in einer Algebra **A**, falls die Konklussion erfüllt ist und / oder mindestens eine Prämisse nicht erfüllt ist. Mit anderen Worten: Falls alle Prämissen erfüllt sind, so gilt dies auch für die Konklusion (vgl. Burris, 1998, 163: Definition 3.5.5, und 161: Definition 3.5.1).[24]
In Rückgriff auf diese Definitionen gilt die Äquivalenz folgender Aussagen (vgl. Burris, 1998, 188):

(1) $r \approx s$ folgt aus $\mathcal{S}$;

(2) $r \approx s$ ist ableitbar aus $\mathcal{S}$;

(3) es gibt eine Ketten-Gleichung von $r \approx s$ aus $\mathcal{S}$.

24 Interessanterweise formuliert der Mathematiker und Logiker Burris hierbei unlogisch, insofern sein *exklussives Oder* (either . . . or) als *inklusives Oder* gemeint sein muss.

Elementare und Ketten-Ableitungen / -Folgerungen In der Demonstration von C1 führt Brown eine Kurznotation ein, die in der mathematischen Praxis für Ableitungen und Folgerungen gleichermaßen gängiger Standard ist: In Termen dürfen einzelne Vorkommnisse von Termen durcheinander *ersetzt* (nach Burris) werden, so sie durch eine durch *Substitution* (nach Burris) zu erhaltenden Instanz einer angenommenen / gültigen Gleichung als äquivalent ausgewiesen werden (können); weiter kann man der Transitivität von Gleichungen eine Kurzschreibweise entnehmen. Ihre expliziten Definitionen können folgendermaßen erfolgen (vgl. Burris, 1998, 187):

(1) Eine *elementare Ableitung / Folgerung* aus einer Menge $\mathcal{S}$ von (angenommenen / gültigen) L-Gleichungen ist eine Gleichung der Form $t(\cdots r' \cdots) \approx t(\cdots s' \cdots)$, wobei $r' \approx s'$ eine Substitutions-Instanz von $r \approx s$ ist und weiter $r = s$ oder $r \approx s \in \mathcal{S}$ oder $s \approx r \in \mathcal{S}$ gilt.

(2) Eine *Ketten-Ableitung / -Folgerung* von $s \approx t$ aus einer Menge $\mathcal{S}$ von (angenommenen / gültigen) L-Gleichungen ist eine Sequenz von elementaren Ableitungen / Folgerungen aus $\mathcal{S}$ der Form $t_1 \approx t_2$, $t_2 \approx t_3$, $\ldots$, $t_{n-1} \approx t_n$ mit $s = t_1$ und $t_n = t$. Eine solche Sequenz wird oft in der Form $s = t_1 \approx t_2 \approx \cdots \approx t_{n-1} \approx t_n = t$ geschrieben.

Zusammenfassung und Ausblick Von exegetischen Schwierigkeiten abgesehen ist offensichtlich, dass Brown die Primäre Algebra im Stile der Gleichungslogik präsentiert: Variable, Symbole, Initiale alias definierende Gleichungen (Postulate, Axiome) und Argumentations- bzw. Ableitungs-Regeln für Gleichungen. Schwartz hat dies – bis auf wenige Kleinigkeiten – in seinem formalen System PA genau so zum Ausdruck gebracht.

Statt wie Schwartz eine Parallele zur modifizierten klassischen Aussagenlogik PC^* zu ziehen, bleiben wir im Gebiet der Gleichungslogik und betrachten dort – dem mehrfachen Hinweis Browns folgend – Axiomatisierungen Boolescher Algebren. Dabei zeigt sich schnell, dass die Primäre Algebra eine Boolesche Algebra ist (vgl. Appendix 1). Setzt man dann wie Schwartz an, dass der Grundbereich der Primären Algebra zwei-elementig ist, so *ist* die Primäre Algebra bekanntermaßen *die* bis auf Isomorphie eindeutige zwei-elementige Boolesche Algebra; das gilt gleichermaßen für die klassische Aussagenlogik mit und auch ohne unwesentliche Erweiterung.

Die (Struktur-)Isomorphie zwischen der Primären Algebra und der (modifizierten) klassischen Aussagenlogik ergibt sich dann direkt daraus, dass sie als Modelle desselben (Struktur-)Typs betrachtet werden.

Vergleicht man meine Argumentation mit der von Schwartz, so ist sie *textnäher* als diese und bedarf keiner weiteren Rechnung, sondern lediglich einer geeigneten Inblicknahme bekannter Ergebnisse.

5.2.2 Axiomensysteme für Boolesche Algebren

Boolesche Algebren Die *Booleschen Algebren* sind durch definierende Gleichungen axiomatisierbar; vgl. folgendes, für ein dezidiert gleichungslogisches, also als solches explizit ausgewiesenes, Axiomensystem für Boolesche Algebren als Strukturen vom Typ $(2, 2, 1, 0, 0)$:

> *Burris' System definierender Gleichungen*[25]
> „$\mathcal{BA}$ is a set of equations ([in den $\mathtt{L}(\mathcal{BA})$-Symbolen $\vee, \wedge, ', 0, 1$]) that defines *Boolean algebras*, namely, we choose $\mathcal{BA}$ to be
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | (1a) | $x \wedge y \approx y \wedge x$ | (1b) | $x \vee y \approx y \vee x$ |
> | (2a) | $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$ | (2b) | $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$ |
> | (3a) | $x \wedge (x \vee y) \approx x$ | (3b) | $x \vee (x \wedge y) \approx x$ |
> | (4a) | $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge y)$ | | |
> | (5a) | $x \wedge x' \approx 0$ | (5b) | $x \vee x' \approx 1$ |
> | (6a) | $x \wedge 0 \approx 0$ | (6b) | $x \vee 1 \approx 1$ |
>
> [...] All algebras $\mathbf{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ that satisfy $\mathcal{BA}$ are called *Boolean algebras*. $\mathcal{BA}$ is called a *set of axioms* or a *set of defining equations* for Boolean algebras.“ (Burris, 1998, 154f.)[26]

Die Axiome (1) bis (3) bestimmen $(B, \vee, \wedge)$ als *Verband*, der *distributiv* ist wegen (4).[27] Gemäß (1) bis (3) sowie (6) ist $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ ein (nach oben und nach unten) *beschränkter* Verband, der zuzüglich (5) *komplementiert* ist. Eine Paraphrasierung dieser verbandstheoretischen Axiomatisierung kann also lauten: Die Boolesche Algebra $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ vom Typ $(2, 2, 1, 0, 0)$ ist ein komplementierter beschränkter und distributiver Verband (vgl. Lipschutz und Lipson, 1997, 479).
Boolesche Algebren können auch als spezielle partiell geordnete Mengen konzeptualisiert werden; ein solcher Zugang ist allerdings kein gleichungslogischer, insbesondere sind die Booleschen Algebren dann nicht mehr *Algebren* im Sinne *relationsloser Strukturen*. Für den gleichungslogischen Zugang werden im Allgemeinen Symbole für (zwei-, ein- und null-stellige) Operationen, für (formale) Gleichheit sowie (runde) Termklammern im Falle der in-order-Notation und abzählbar viele einsortige Variablen benötigt.

Trivialisierung des Problems Die Aufgabe, die Primäre Algebra in der Lesart von Schwartz als Boolesche Algebra zu erkennen, genauer: die PA-Axiome als ein Axiomensystem für Boolesche Algebren zu erweisen, kann durch folgenden Vergleich mit einem in (Kauffman, 2001b) angegebenen Axiomensystem *vermeintlich* trivialisiert werden.

25 Das folgende Zitat ist im Layout leicht modifiziert und verkürzt.

26 Diese Definition schließt den Trivialfall ein-elementiger Boolescher Algebren nicht aus.

27 Das zu (4) bzw. dann (4a) duale Axiom (4b) folgt aus den Axiomen (1) bis (4).

Kauffmans Axiomensystem[28]
„Below are the standard axioms for a Boolean algebra:

(0) The Boolean algebra $\mathtt{B}$ is a set that is endowed with a binary operation denoted „$*$“ and a unary operation denoted „$\sim$“. The set is closed under these operations. That is, given $\mathtt{a}$ and $\mathtt{b}$ in $\mathtt{B}$, then $\mathtt{a} * \mathtt{b}$ is in $\mathtt{B}$ and $\sim \mathtt{a}$ is in $\mathtt{B}$.

(1) The operation $*$ is commutative and associative. That is, $\mathtt{a} * \mathtt{b} = \mathtt{b} * \mathtt{a}$ for all $\mathtt{a}$ and $\mathtt{b}$ in $\mathtt{B}$, and $(\mathtt{a} * \mathtt{b}) * \mathtt{c} = \mathtt{a} * (\mathtt{b} * \mathtt{c})$ for all $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ in $\mathtt{B}$.

(2) There is a special element called „one“ and denoted by the symbol „1“ such that $1 * \mathtt{a} = \mathtt{a}$ for all $\mathtt{a}$ in $\mathtt{B}$. ~ 1 is denoted by the symbol „0“.

(3) $\sim (\sim \mathtt{a}) = \mathtt{a}$ for all $\mathtt{a}$ in $\mathtt{B}$.

(4) $\sim (\mathtt{a} * \sim \mathtt{a}) = 1$ for all $\mathtt{a}$ in $\mathtt{B}$.

(5) $\mathtt{a} * \sim (\sim \mathtt{b} * \sim \mathtt{c}) = \sim (\sim (\mathtt{a} * \mathtt{b}) * \sim (\mathtt{a} * \mathtt{c}))$ for all $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}$ in $\mathtt{B}$.“

(Kauffman, 2001b, 730)

Die Axiome (0) bis (2) bestimmen $(\mathtt{B}, *, 1)$ als *Monoid*, also als Halbgruppe mit einer (links- und rechts-) Eins, die zudem kommutativ ist. Axiom (3) expliziert die durch $\sim$ symbolisierte Selbstabbildung als selbstinvers, also insbesondere als bijektiv; dabei handelt es sich im Hinblick auf die restlichen Axiome tatsächlich nur um eine Explikation, denn der Autor zeigt im Nachgang zu seiner Axiomatik mittels einer gleichungslogisch korrekten, also auch als Argumentation gültigen, Ableitungs-Kette, dass Axiom (3) aus den anderen ableitbar ist.[29] Im Hinblick auf (0) allein sind Boolesche Algebren Strukturen $(\mathtt{B}, *, \sim)$ vom Typ $(2, 1)$; im Hinblick auf (0) und die Existenz-Forderung in (2) sind sie Strukturen $(\mathtt{B}, *, \sim, 1)$ vom Typ $(2, 1, 0)$; unter zusätzlicher Berücksichtigung der Bezeichnungskonvention in (2) sind sie Strukturen $(\mathtt{B}, *, \sim, 1, 0)$ vom Typ $(2, 1, 0, 0)$. Meines Erachtens ist die kanonische Lesart von Kauffmans Axiomatik, Boolesche Algebren als Strukturen $(\mathtt{B}, *, \sim, 1)$ vom Typ $(2, 1, 0)$ zu betrachten, wobei dann in (2) bereits die unwesentliche Spracherweiterung durch das Symbol 0 und das Erweiterungsaxiom $0 = \sim 1$ angezeigt ist. Davon abgesehen enthält Kauffmans Axiomatik offensichtlich Schwartz’ PA-Axiome sowie das abhängige Axiom (3) und das zusätzliche Axiom (0). Die Rolle, die Axiom (0) zukommt, spielt im Hinblick auf PA die (entsprechende) formale Semantik: So *ist* $\Sigma(\mathrm{PA})$ die Instanz von Axiom (0) für die Menge $\mathtt{B} := \{\mathtt{u}, \mathtt{m}\}$. Mit anderen Worten: Kauffman spricht in seiner Axiomatik bereits über *Mengen*, die als Boolesche Algebren ausgewiesen werden, also als ein *Modell*

28 In der Zitation sind abweichend vom Original die mathematischen Symbole für die Menge, Operationen und Elemente im üblichen Stil hervorgehoben und weiter in (1) das fälschliche $+$ durch $*$ und in (2) das ungewöhnliche „zero“ durch „one“ ersetzt.

29 Axiom (3) kann in kanonischer Weise als die Gleichung gelesen werden, die in `LoF` als erste Konsequenz demonstriert wird.

für eine gewisse *Struktur*. Über Mengen als Boolesche Algebren spricht Schwartz mit seiner Axiomatik erst unter Hinzunahme seiner formalen Semantik.

Ist demnach Schwartz' erstes Problem eigentlich trivial, nämlich seine Lesart der Primären Algebra als isomorph zur klassischen Aussagenlogik (einem Modell der Struktur zwei-elementiger Boolescher Algebren) zu erweisen? Oder anders gefragt, wurde die nach (Kauffman, 2001b) zitierte Axiomatik erst durch Schwartz' Theorem als Axiomatik Boolescher Algebren erwiesen? Beide Fragen lassen sich verneinen:

> „At best, Brown has produced a new axiomatization for Boolean algebra.“ (Cull und Frank, 1979, 207)

Der zitierte Text ist älter als Schwartz' Untersuchung und die Autoren räumen Brown eine *neue* Axiomatisierung auch nur „At best“ ein.

5.3 Zwei Isomorphiesätze in Revision

Im Folgenden werde ich die in Schwartz' Lesart bestehende Isomorphie explizieren, ohne das Problem zu trivialisieren.

5.3.1 Isomorphie auf Umwegen

In (Cull und Frank, 1979) wird tatsächlich gezeigt, dass aus Browns Axiomen für die Primäre Algebra, genauer: aus ihrer Reformulierung, deren benötigte Teile den PA-Axiomen genau entsprechen, Gleichungen folgen, welche Boolesche Algebren definieren. Und es können diese Beweise auch als Ableitungen gemäß Birkhoffs vollständigem System gleichungslogischer Ableitungsregeln gelesen werden. Des Weiteren wird von den Autoren daran erinnert, dass umgekehrt die (Reformulierungen der) Axiome Browns bekanntermaßen Gleichungen sind, die in allen Booleschen Algebren gelten; daher liefern, so die Autoren, die beiden Axiomatiken dieselben Algebren: „The two algebras, then, are synonymous [...]. They determine exactly the same class of structures.“ (Cull und Frank, 1979, 207). Das entsprechende Verfahren hat Huntington zwischen seinem ersten und vierten Postulate-System für Boolesche Algebren beschrieben und durchgeführt:

> „To establish the *equivalence* of this fourth set (which is expressed in terms of $\mathsf{K}, +, '$) and the first set of 1904 (which is expressed in terms of $\mathsf{K}, +, \times$), we must show (1) that all the postulates of the fourth set are deducible from the postulates of the first set, when a' is properly defined in terms of $+$ and $\times$; and (2) that all the postulates of the first set are deducible from the postulates of the fourth set, when $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$ is properly defined in terms of $+$ and $'$.“ (Huntington, 1933b, 281)

Das stimmt natürlich nur, wenn man voraussetzt, dass zu beiden Axiomensystemen im Wesentlichen die gleichen Beweisprinzipien bzw. die gleichen Ableitungsregeln hinzugenommen werden, denn durch ein und dasselbe Axiomensystem werden je nach Stärke des jeweiligen Beweis- bzw. Ableitungssystems verschiedene Klassen von Strukturen bestimmt. Im Weiteren darf davon ausgegangen werden, dass die angesprochene Voraussetzung von den Autoren implizit getroffen ist.
Das Axiomensystem, mit dem die Primäre Algebra in (Cull und Frank, 1979) verglichen wird, ist im Wesentlichen die klassische Definition dessen, was heutzutage eine Boolesche Algebrea heißt, damals aber eine Algebra der Logik hieß. Die klassische Definition ist das *erste Postulate-System* von Edward V. Huntington, das – so der Autor in (Huntington, 1904, 291) – auf Alfred N. Whiteheads Untersuchungen zurückgeht. Ich zitiere zunächst Huntingtons Formulierung und dann deren Reformulierung, die ich der zweiten Auflage des von Cull und Frank verwendeten Buches entnehme.

> *Huntingtons sog. erstes Postulate-System – im Original*
> „[W]e take as the fundamental concepts a class, K, with two rules of combination, $\oplus$ and $\odot$; and as the fundamental propositions, the following ten postulates:
>
> (1a) $\mathsf{a} \oplus \mathsf{b}$ *is in the class whenever* a *and* b *are in the class.*
>
> (1b) $\mathsf{a} \odot \mathsf{b}$ *is in the class whenever* a *and* b *are in the class.*
>
> (2a) *There is an element* $\bigwedge$ *such that* $\mathsf{a} \oplus \bigwedge = \mathsf{a}$ *for every [el.]* a.
>
> (2b) *There is an element* $\bigvee$ *such that* $\mathsf{a} \odot \bigvee = \mathsf{a}$ *for every [el.]* a.
>
> (3a) $\mathsf{a} \oplus \mathsf{b} = \mathsf{b} \oplus \mathsf{a}$ *whenever* a, b, $\mathsf{a} \oplus \mathsf{b}$, *and* $\mathsf{b} \oplus \mathsf{a}$ *are in the class.*
>
> (3b) $\mathsf{a} \odot \mathsf{b} = \mathsf{b} \odot \mathsf{a}$ *whenever* a, b, $\mathsf{a} \odot \mathsf{b}$, *and* $\mathsf{b} \odot \mathsf{a}$ *are in the class.*
>
> (4a) $\mathsf{a} \oplus (\mathsf{b} \odot \mathsf{c}) = (\mathsf{a} \oplus \mathsf{b}) \odot (\mathsf{a} \oplus \mathsf{c})$ *whenever* a, b, c, $\mathsf{a} \oplus \mathsf{b}$, $\mathsf{a} \oplus \mathsf{c}$, $\mathsf{b} \odot \mathsf{c}$, $\mathsf{a} \oplus (\mathsf{b} \odot \mathsf{c})$, *and* $(\mathsf{a} \oplus \mathsf{b}) \odot (\mathsf{a} \oplus \mathsf{c})$ *are in the class.*
>
> (4b) $\mathsf{a} \odot (\mathsf{b} \oplus \mathsf{c}) = (\mathsf{a} \odot \mathsf{b}) \oplus (\mathsf{a} \odot \mathsf{c})$ *whenever* a, b, c, $\mathsf{a} \odot \mathsf{b}$, $\mathsf{a} \odot \mathsf{c}$, $\mathsf{b} \oplus \mathsf{c}$, $\mathsf{a} \odot (\mathsf{b} \oplus \mathsf{c})$, *and* $(\mathsf{a} \odot \mathsf{b}) \oplus (\mathsf{a} \odot \mathsf{c})$ *are in the class.*
>
> (5) *If the elements* $\bigwedge$ *and* $\bigvee$ *in postulates (2a) and (2b) exist and are unique, then for every element* a *there is an element* $\overline{\mathsf{a}}$ *such that* $\mathsf{a} \oplus \overline{\mathsf{a}} = \bigvee$ *and* $\mathsf{a} \odot \overline{\mathsf{a}} = \bigwedge$.
>
> (6) *There are at least two elements,* x *and* y, *in the class such that* $\mathsf{x} \neq \mathsf{y}$.“ (Huntington, 1904, 292f.)

Huntington hat also $\oplus$ und $\odot$ nicht generell als innere Verknüpfungen bzw. als Symbole für innere Verknüpfungen vorausgesetzt und gleichermaßen keine Operation der Komplementbildung und keine zwei Konstanten; wie er dezidiert durch geeignete Modelle nachweist, ist jedes seiner zehn Postulate von den jeweils restlichen neun Postulaten unabhängig. Folgende Reformulierung dieser Axiomatik nach Lipschutz und Lipson, die ich im Layout leicht modifiziert und verkürzt zitiere, kommt dem heutigen Leser entgegen.

> *Huntingtons sog. erstes Postulate-System – reformuliert*
> „Let B be a nonempty set with two binary operations $+$ and $*$, a unary operation $'$, and two distinct elements 0 and 1. Then B is called a *Boolean algebra* if the following axioms hold where $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ are any elements in B:
>
> (1a) $\mathsf{a} + \mathsf{b} = \mathsf{b} + \mathsf{a}$ (1b) $\mathsf{a} * \mathsf{b} = \mathsf{b} * \mathsf{a}$
> (2a) $\mathsf{a} + (\mathsf{b} * \mathsf{c}) = (\mathsf{a} + \mathsf{b}) * (\mathsf{a} + \mathsf{c})$ (2b) $\mathsf{a} * (\mathsf{b} + \mathsf{c}) = (\mathsf{a} * \mathsf{b}) + (\mathsf{a} * \mathsf{c})$
> (3a) $\mathsf{a} + 0 = \mathsf{a}$ (3b) $\mathsf{a} * 1 = \mathsf{a}$
> (4a) $\mathsf{a} + \mathsf{a}' = 1$ (4b) $\mathsf{a} * \mathsf{a}' = 0$
>
> We will sometimes designate a Boolean algebra by $(\mathsf{B}, +, *, ', 0, 1)$ when we want to emphazise its six parts." (Lipschutz und Lipson, 1997, 477)

Die Reformulierung stellt generell drei volle Operationen und zwei ausgezeichnete Elemente zur Verfügung, das sind im Vergleich zu Kauffmans Axiomatik zwei zusätzliche Operationen: eine zwei- und eine null-stellige. Die (nur noch) acht Postulate liefern Algebren vom Typ $(2, 2, 1, 0, 0)$, doch lassen sich auch die gemäß Kauffman axiomatisierten Booleschen Algebren durch unwesentliche Spracherweiterungen auf diesen Typ bringen.
Diese Axiomatisierung Boolescher Algebren geht in der originären und in der reformulierten Version von zwei zwei-stelligen Operationen aus, die prima facie nicht beide in Schwartz' Lesart der Primären Algebra zur Verfügung stehen, weswegen m. E. ein anderer, gleichermaßen berühmt gewordener Zugriff Huntingtons auf Boolesche Algebren für einen Vergleich mit dem von Brown gewählten Zugang geeigneter ist.

5.3.2 Isomorphie als Übersetzung

Huntington hat in den Arbeiten (Huntington, 1904), (Huntington, 1933b), (Huntington, 1933a) insgesamt sechs unabhängige Postulate-Systeme vorgestellt, die allesamt die *Booleschen Algebren* definieren. In den beiden jüngeren Schriften wird das sog. vierte Postulate-System formuliert, von dem Huntington zeigt, dass es zum sog. ersten äquivalent ist:

> *Huntingtons sog. viertes Postulate-System*
> „[T]he „fourth set" of postulates for Boolean algebra, on the base $(\mathsf{K}, +, ')$, should read as follows (the class K being understood to contain at least two distinct elements):
>
> (1) *If* a *and* b *are in* K*, then* $\mathsf{a} + \mathsf{b}$ *is in* K*.*
>
> (2) *If* a *is in* K*, then* a' *is in* K*.*
>
> (3) $\mathsf{a} + \mathsf{b} = \mathsf{b} + \mathsf{a}$.
>
> (4) $(\mathsf{a} + \mathsf{b}) + \mathsf{c} = \mathsf{a} + (\mathsf{b} + \mathsf{c})$.

(5) $(\mathtt{a}' + \mathtt{b}')' + (\mathtt{a}' + \mathtt{b})' = \mathtt{a}$ [or, $\mathtt{ab} + \mathtt{ab}' = \mathtt{a}$, where, by definition, $\mathtt{ab} = (\mathtt{a}' + \mathtt{b}')'$].“ (Huntington, 1933a, 557)[30]

Durch das vorangestellte implizite *Existenz*-Postulat (at least two distinct elements), die beiden K-*Geschlossenheits*-Postulate (1) und (2) sowie die drei *Äquivalenz*-Postulate (3), (4) und (5) werden Boolesche Algebren zunächst als mindestens zwei-elementige Strukturen $(\mathsf{K}, +, ')$ vom Typ $(2, 1)$ vorgestellt.[31] Wird zudem die weitere zweistellige Operation in (5) berücksichtigt, so sind sie als mindestens zwei-elementige Strukturen $(\mathsf{K}, , +, ')$ vom Typ $(2, 2, 1)$ formuliert.
Dem existence-Postulat gemäß gibt es zwar mindestens zwei Elemente, doch ist von ihnen keines ausgezeichnet, insofern die Sprache für keines der Elemente ein Symbol bereitstellt. Huntington folgert aus den Postulaten zunächst $\mathtt{a}'' = \mathtt{a}$ und damit $\mathtt{a} + \mathtt{a}' = \mathtt{b} + \mathtt{b}'$ für alle $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \mathsf{K}$. Letztere Gleichung, das heißt die Invarianz von $\mathtt{a} + \mathtt{a}'$ gegenüber Substitutionen, wird in (Huntington, 1933b, 287) genutzt, um das sog. vierte Postulate-System inklusive seiner Sprache zu erweitern, nämlich um die beiden Symbole $\mathtt{u}$ und $\mathtt{z}$ sowie die beiden Axiome $\mathtt{u} = \mathtt{a} + \mathtt{a}'$ und $\mathtt{z} = (\mathtt{a} + \mathtt{a}')'$. Da die $'$-Operation selbstinvers ist, gelten für das *All*-Element (universe) $\mathtt{u}$ und das *Null*-Element (zero) $\mathtt{z}$ des Systems insbesondere folgende Gleichungen: $\mathtt{z} = \mathtt{u}'$, $\mathtt{u} = \mathtt{z}'$, $\mathtt{a} + \mathtt{z} = \mathtt{a}$ und $\mathtt{au} = \mathtt{a}$. Wohlgemerkt kann/könnte $\mathtt{z} = \mathtt{u}$ nur für einelementige K gelten. Denn aus $\mathtt{z} = \mathtt{u}$ folgt für jedes $\mathtt{a} \in \mathsf{K}$ die Gleichung $\mathtt{a} = \mathtt{u}$. Sei nun nämlich $\mathtt{a} \in \mathsf{K}$ beliebig. Dann gilt: $\mathtt{a} = \mathtt{z} + \mathtt{a} = \mathtt{u} + \mathtt{a} = (\mathtt{a} + \mathtt{a}') + \mathtt{a} = \mathtt{a} + (\mathtt{a}' + \mathtt{a}) = \mathtt{a} + (\mathtt{a} + \mathtt{a}') = (\mathtt{a} + \mathtt{a}) + \mathtt{a}' = \mathtt{a} + \mathtt{a}' = \mathtt{u}$. Auch Huntingtons viertes Postulate-System kann also durch unwesentliche Spracherweiterungen als vom Typ $(2, 2, 1, 0, 0)$ aufgefasst werden.

Die im Titel von Kapitel 5.3.2 angekündigte und offensichtliche Isomorphie besteht zwischen der Primären Algebra von Brown, genauer: Schwartz’ formalem System PA, und einem formalen System BA für Boolesche Algebren, nämlich dem um $\mathtt{z}$ unwesentlich erweiterten vierten Postulate-System von Huntington zuzüglich der Ableitungsregeln von Birkhoff. Man könnte selbstverständlich gleichermaßen die Sprache und Axiomatik Kauffmans zuzüglich der Ableitungsregeln von Schwartz verwenden; letztere stimmen, daran sei erinnert, mit den Birkhoffschen Ableitungsregeln überein – abgesehen davon, dass Schwartz die Reflexivität der Äquivalenz weder für alle Terme noch speziell für die Variablen explizit gefordert hat, worin er aber von Brown abweicht.

Die Übersetzung jedes L(PA)-Terms ist durch die Übersetzungen der Symbole der L(PA)-Sprache induktiv bestimmt; vgl. folgende Tabelle:

30 Im Zitat ist das Layout und die Nummerierung gegenüber dem Original leicht modifiziert. Die eckigen Klammern im fünften Punkt der Aufzählung stehen so im Original.

31 Vgl. (Sheffer, 1913, 482f.) für diese kanonische Begriffsbildung.

Nr.	L(PA)-*Symbole*	L(BA)-*Symbole*
(1)	e_1, e_2, ...	a, b, ...
(2)	ε	z
(3)		$+$
(4)	[,]	$'$ [inkl. (,)]
(5)	$=$	$=$
(6)	(,)	(,)

Dabei steht im Hintergrund meiner Übersetzung eine bestimmte Lesart von „K is a class of elements $a, b, c, \cdots$“ (Huntington, 1933b, 280). Dem Wortsinne nach muss man das m. E. folgendermaßen lesen: Es sind a, b, ... die Eigennamen von K-Elementen a, b, ...; letzteres sind dann also Konstanten bzw. null-stellige Operationen und die Axiome legen nur zwischen diesen Termen in diesen beiden Elementen zuzüglich c Äquivalenzen fest. So kann das m. E. von Huntington nicht gemeint sein, sondern es gilt: Es sind $a, b, \cdots$ ein-sortige Variablen für K-Elemente.

Die nächste Tabelle enthält einerseits Schwartz’ Axiome und andererseits Gleichungen (Axiome oder Ableitungen), die aus Huntingtons viertem Postulate-System folgen (vgl. für letztere Huntington, 1933b, 280–283):[32]

Nr.	Schwartz’ Axiome	Huntingtons Gleichungen
(1)	$[[e_1]e_1] = \varepsilon$	$z = (a + a')'$
(2)	$[[e_1 e_3][e_2 e_3]] = [[e_1][e_2]]e_3$	$a + bc = (a + b)(a + c)$
(3)	$e_1 \varepsilon = e_1$	$z + a = a$
(4)	$e_1 e_2 = e_2 e_1$	$a + b = b + a$
(5)	$e_1(e_2 e_3) = (e_1 e_2)e_3$	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Die Korrespondenz in (4) ist direkt; mit (4) und der Symmetrie als Ableitungsregel ergeben sich sofort (1), (3) und (5). Falls in (2) die von Huntington im fünften Axiom des vierten Postulate-Systems definierte Konkatenation wieder in Termen von $+$ und $'$ geschrieben wird, ergibt sich $a + (b' + c')' = ((a + b)' + (a + c)')'$ und damit mittels (4) und Symmetrie die Korrespondenz.

In (Huntington, 1933b) ist demnach gezeigt, dass die Übersetzungen der PA-Axiome Gleichungen sind, die aus dem vierten Postulate-System *folgen* bzw. aus den Axiomen mittels der Birkhoffschen Regeln *ableitbar* sind.[33]

32 Die Wahl von u statt z wäre gleichermaßen möglich. Konsequenterweise sind dann die zu den angegebenen Ableitungen dualen aus (Huntington, 1933b, 280–283) zu zitieren.

33 Wohlgemerkt wendet Huntington Birkhoffs Regeln an, insofern Huntingtons Regeln Birkhoffsche Regeln sind und eine Birkhoffsche Regeln von Huntington zwar angewandt, aber nicht genannt wird.

Umgekehrt demonstriert Brown in Chapter 6 als Konsequenz 6 die Gleichung $\overline{\overline{\mathfrak{a}|}\,\overline{\mathfrak{b}|}\,|}\,\overline{\overline{\mathfrak{a}|}\,\mathfrak{b}\,|} = \mathfrak{a}$, das ist in Schwartz' Lesart $[[\mathfrak{e}_1][\mathfrak{e}_2]][[\mathfrak{e}_1]\mathfrak{e}_2] = \mathfrak{e}_1$ mit Übersetzung $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' + (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b})' = \mathfrak{a}$; letzteres ist obiges Axiom (5) bzw. das sog. *Huntington-Postulat.*[34] Demnach sind in PA zwei der drei Äquivalenz-Postulate von Huntingtons viertem Postulate-System selbst Postulate und ist das verbliebene ableitbar; die beiden K-Geschlossenheits-Postulate und das Existenz-Postulat sind im Allgemeinen Angelegenheit einer geeigneten formalen Semantik bzw. der geeigneten Interpretation des formalen Systems im Hinblick auf eine (mindestens zwei-elementige) Menge mit (induzierten) Operationen; das Erweiterungsaxiom $\mathfrak{z} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$ wird von allen Modellen der anderen Axiome erfüllt.
Im Konkreten liefert die formale Semantik $\Sigma(\mathrm{PA})$ (vgl. S. 40f.) die Primäre Algebra als zwei-elementige mathematische Struktur, insofern die Variablen über der Menge $\mathsf{B} = \{\mathfrak{u}, \mathfrak{m}\}$ betrachtet und die $\mathfrak{n}$-stelligen Funktionszeichen als $\mathfrak{n}$-stellige Funktionen auf B interpretiert werden.

34 Vgl. (Brown, 1969, 33f.): Die Demonstration benutzt $[[\mathfrak{t}]] = \mathfrak{t}$ sowie die Axiome und Ableitungsregeln: $[[e_1][e_2]][[e_1]e_2] = [[[e_1][e_2]][[e_1]e_2]]] = [[[e_2]][e_2]][e_1]] = [[e_1]] = e_1$.

Kapitel 6

Zwei Zwischenbemerkungen

Im Folgenden werde ich zwei Hinweisen folgen, die Brown in (Brown, 1999), doch (noch) nicht in (Brown, 1969) gibt. Er nennt zwei Gleichungen, die jeweils alternativ zu den beiden Initialen J1 und J2 die *Primäre Algebra* initialisieren. Als Initiale *Boolescher Algebren* sind sie allerdings zu schwach, da sie auf die nicht-lokale LoF-Sprache angewiesen sind.[35] Um im Hinblick auf die beiden Überschriften der Unterkapitel ein Missverständnis zu vermeiden bzw. zu beseitigen, möchte ich ihrer Explikation vorab bereits pointiert verdeutlichen: In (Brown, 1999) erfolgt tatsächlich ein Hinweis auf Huntington, nicht aber auf Robbins; letzterer ist – wie ich zeigen werde – nur ein *vermeintlicher*.

6.1 Ein Hinweis auf Huntington

In den Notes zu Chapter 6 vergleicht Brown seine Axiomatisierung der Primären Algebra mit der Axiomatisierung Boolescher Algebren durch Huntingtons viertes Postulate-System, genauer: Er vergleicht seine beiden *Initiale* alias Äquivalenz-Postulate J1 und J2, das sind die Originale zu Schwartz' PA-Axiomen (1) und (2), mit den Konsequenzen C5 und C6:

	LoF-Initiale		LoF-Konsequenzen
J1	$\overline{\overline{p}\rceil\, p}\rceil =$	C5	$aa = a$
J2	$\overline{\overline{pr}\rceil\, \overline{qr}\rceil}\rceil = \overline{\overline{p}\rceil\, \overline{q}\rceil}\rceil r$	C6	$\overline{\overline{a}\rceil\, \overline{b}\rceil}\rceil\, \overline{\overline{a}\rceil\, b}\rceil = a$

Brown demonstriert in Chapter 6 die Gleichungen C5 und C6 mittels der algebraischen Initiale J1 und J2 und ergänzt in den Notes zu Chapter 6, dass *durch* (from)

35 Bemerkenswerterweise können auch Boolesche Algebren durch zwei Gleichungen, sogar durch eine einzelne Gleichung postuliert werden (vgl. Veroff, 2016).

Huntingtons viertes Postulate-System zu sehen sei, dass auch J1 und J2 ausgehend von C5 und C6 demonstriert werden können.
Zu beachten ist hierbei, dass diese Demonstrationen in Huntingtons Aufsatz nicht präsentiert, sondern repräsentiert werden, insofern Huntington den Operationen eine bestimmte Stelligkeit und zudem bei zwei-Stelligkeit den Argumenten eine feste Reihenfolge zuweist. Huntington postuliert daher die K-*Geschlossenheit* (K-close) für die beiden Operationen + und $'$ und zudem die *Kommutativität* (K) und *Assoziativität* (A) der +-Operation. Diese Äquivalenz-Postulate hat auch Schwartz als Axiome (4) und (5) ergänzt.

Die Unabhängigkeit der Postulate Huntington und Brown beweisen jeweils die Unabhängigkeit ihrer Postulate. In (Brown, 1999) ist gegenüber (Brown, 1969) die folgende Fußnote ergänzt:

> „Huntingtons Gleichungen sind nicht unabhängig, also genügt C6 alleine – der Autor". (Brown, 1999, 77)

Eben dieser *Korrektur* (correction) gilt (Huntington, 1933a); vgl. deren Titel: „Boolean Algebra. A Correction".

In (Huntington, 1933b, 286) sollte „Example 4.5" zeigen, dass das Postulat der Idempotenz $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (C5) vom System der restlichen Postulate, das sind im Einzelnen: (A), (K), (K-close-+), (K-close-$'$) und (C6), unabhängig ist und daher eigens gefordert werden muss. Eine Algebra $(\{0, 1, 2\}, +, ')$ mit drei-elementigem Grundbereich sollte die Idempotenz verletzen, die restlichen Postulate dagegen respektieren, also modellieren. Die Verletzung von $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ leistet die Setzung $2 + 2 := 1$. Doch dann gilt für $\mathfrak{a} := 2$ bei $\mathfrak{b} := 0$ den anderen Setzungen gemäß, darunter insbesondere $0 + 0 := 0 =: 1'$ und $2' := 2$, folgende Gleichungskette:

$$0 = 0 + 0 = 1' + 1' = (2 + 2)' + (2 + 2)' = (2' + 2')' + (2' + 2)' \,.$$

Wegen $0 \neq 2$ gilt $(2'+2')'+(2'+2)' \neq 2$. Also ist auch das sog. ‚Huntington'-Postulat (C6) verletzt und nicht nur das Idempotenz-Postulat (C5). Kurz: Durch das Beispiel ist die Unabhängigkeit der Idempotenz nicht erwiesen und sie ist weiters durch kein Beispiel erweisbar, denn die Idempotenz folgt bzw. ist ableitbar aus den restlichen, tatsächlich voneinander unabhängigen Postulaten. Das Idempotenz-Postulat ist demnach redundant (vgl. Huntington, 1933a).

Auch Brown hat die Unabhängigkeit seiner beiden Postulate thematisiert und in Chapter 10 bewiesen. Anders als in (Huntington, 1904) und (Huntington, 1933b) erfolgt Browns Unabhängigkeits-Beweis nicht mittels zweier Modelle, die jeweils nur genau ein Initial erfüllen, sondern als Unvollständigkeits-Beweis; letzterer ergibt sich aus Überlegungen zu den durch das jeweilige Postulat erlaubten Termumformungen, die das jeweils andere Postulat nicht liefert.

6.2 Ein Hinweis auf Robbins

Eine oberflächliche Lektüre von (Brown, 1999, xiv) lässt vermuten, dass das sog. *Robbins Problem*, das in der Fachwelt bis 1996 als offen galt, im Kontext des Indikationenkalküls – eventuell begünstigt durch die unübliche Notation – bereits 1980 gelöst wurde. Ich denke plausibilisieren zu können, dass dem nicht so ist. Die *vermeintliche* Lösung resultiert m. E. aus einer zusätzlichen Voraussetzung.

Im Nachgang zu (Huntington, 1933a), also dem Nachweis, dass $(K, +, ')$ als Modell des vierten Postulate-Systems von Huntington eine Boolesche Algebra ist, hat Herbert Robbins, ein Schüler Huntingtons, im Jahre 1933 vermutet, dass durch eine leichte Variation des Huntington-Postulates (H) zu einem Postulat (R) noch immer die gleiche Klasse von Algebren bestimmt wird (vgl. Burris, 1998, 259):

	Huntingtons viertes P.-S.		Robbins' P.-S.
(K)	$x + y = y + x$	(K)	$x + y = y + x$
(A)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	(A)	$(x + y) + z = x + (y + z)$
(H)	$(x' + y')' + (x' + y)' = x$	(R)	$((x+y')' + (x+y)')' = x$

Sei nun $(K, +, ')$ eine $(2, 1)$-Algebra, die Huntingtons viertes Postulate-System modelliert. Dann ist also $(K, +, ')$ eine Boolesche Algebra und es ist (beinahe) offensichtlich, dass $(K, +, ')$ auch Robbins' Postulate-System erfüllt. Solche $(2, 1)$-Algebren $(K, +, ')$, die Robbins' Postulate-System modellieren, werden als *Robbins' Algebren* bezeichnet.

Folgende Behauptung ist (beinahe) offensichtlich:

Jede Boolesche Algebra ist eine Robbins Algebra.

Die Modellierung der Postulate (K) und (A) ist explizit vorausgesetzt, die Modellierung von (R) wird ersichtlich, indem man x in (H) durch x' substituiert: $(x''+y')'+(x''+y)' = x'$; gemäß Substitutions-Regel gilt dann: $((x''+y')'+(x''+y)')' = x''$; also liefert die Ersetzungs-Regel mit der folger- bzw. ableitbaren Gleichung $x'' = x$ die Gleichung (R).

Auf die gleiche Weise ergibt sich die Behauptung:

Jede Robbins Algebra, die $x'' = x$ modelliert, ist eine Boolesche Algebra.

Man substituiert x in (R) durch x': $((x'+y')'+(x'+y)')' = x'$; der Substitutions-Regel gemäß gilt dann: $((x'+y')'+(x'+y)')'' = x''$; also liefert die Ersetzungs-Regel mit der vorausgesetzten Gleichung $x'' = x$, die gemäß Substitutions-Regel auch für Terme gilt, die Gleichung (H).

Viel schwieriger ist der Beweis folgender Aussage:

Jede Robbins Algebra ist eine Boolesche Algebra.

In (Winker, 1992) ist als Lemma 2.2 gezeigt, dass jede Robbins Algebra, die ein Element 0 enthält mit $a + 0 = a$ für *alle* Elemente a, also $x + 0 = x$ modelliert, eine Boolesche Algebra ist; dementsprechend ist jede Robbins Algebra mit void-Substitution eine Boolesche Algebra (vgl. Kauffman, 1990, 58). Das ist nur ein Kriterium neben anderen, die Robbins Algebren als Boolesche Algebren ausweisen. Im Hinblick auf Kapitel 6.1 mag interessieren, dass jede Robbins Algebra, die $x + x = x$ für *ein* Element a erfüllt, eine Boolesche Algebra ist.
Gerade das in (Winker, 1992) als Lemma 2.2 formulierte Kriterium, wonach jede Robbins Algebra mit void-Substitution eine Boolesche Algebra ist, ist im Hinblick auf die Laws of Form bemerkenswert. Denn Brown schreibt in der „Einleitung“, dass Dr. Rodney Johnson am 5. November 1980 gezeigt habe, dass für die Primäre Algebra alternativ zu den beiden Initialen J1 und J2 auch ein einzelnes Initial genügt hätte, nämlich das folgende:

$$\text{(J)} \qquad \overline{\overline{\overline{p}\rceil\; q}\rceil\;\; \overline{pq}\rceil}\rceil = q$$

Dieses Initial (J) ist, von der Notation und den für die Notation geltenden Konventionen (vgl. Initiale (K) und (A)) abgesehen, offensichtlich das Postulat (R). Was soll das heißen? Man beachte zur Beantwortung dieser Frage zunächst:

> „In the fall of 1996 EQP, an automated equational theorem prover written by William McCune[.] of Argonne National Laboratory found a proof for this conjecture.“ (Burris, 1998, 259)

Die *Vermutung*, von der in dem Zitat die Rede ist, ist Robbins’ Vermutung, dass genau die Robbins Algebren Boolesche Algebren sind. In (Kauffman, 2001b) ist der ‚Beweis‘, der aus der von EQP gelieferten Ableitung gewonnen wurde, und der Kontext der Vermutung Robbins’ gut lesbar aufbereitet (vgl. Corfield, 2003, 48–55). Sei nun $(B, +, ')$ eine Robbins Algebra. Dann zeigt die in (Kauffman, 2001b, 742–751) präsentierte Ableitung, die mit (R) als erster Konsequenz startet, als 15. Konsequenz, dass es zwei Elemente $a, b \in B$ gibt mit $(a + b)' = b'$; das ist gemäß Theorem 1.2 „Absorption within Negation“ (Winker, 1992, 416) hinreichend, um die Robbins Algebra als Boolesche Algebra auszuweisen.
Brown macht in (Brown, 1999) über den Beweis von Johnson aus dem Jahre 1980

keine weiteren Angaben; m. E. hat dieser Beweis allerdings nicht die Aussagekraft desjenigen von 1996, er hat also nicht Robbins Algebren als Boolesche Algebren ausgewiesen. Denn Johnson hat vermutlich für seinen Nachweis, dass (J) (neben (K) und (A)) als Initial für die Primäre Algebra genügt, void-Substitution in Anspruch genommen; *in* der Primären Algebra ist das schließlich ein erlaubtes Verfahren (vgl. Kauffman, 1990, 58). Mit anderen Worten: Johnson hat die Existenz eines ausgezeichneten Null-Elements (mit)postuliert; für Winklers Absorptions-Gleichung $(a+b)' = b'$ steht damit sofort eine mögliche Instanz für a zur Verfügung, die Wahl von b ist dann beliebig.
Das Problem, die Primäre Algebra aus (J) mittels void-Substitution (vS) abzuleiten, ist *wesentlich* einfacher als der Beweis, dass jede Robbins Algebra eine Boolesche Algebrea ist; man kann folgendermaßen vorgehen, wobei wir wegen (A) auf Klammersetzung verzichten können und weiters demzufolge die Anwendung von (A) nicht jeweils eigens ausweisen werden:[36]

(1) Sei (J) das Initial $\overline{\overline{\overline{P\rvert}\,Q\rvert}\;\overline{PQ\rvert}\rvert} = Q$.

(2) Man sieht (J) an, dass jedes p der Form $\overline{\tilde{p}\rvert}$ ist (vgl. $\tilde{p} := \tilde{p}_q = \overline{\overline{q\rvert}\,p\rvert}\;\overline{qp\rvert}$ für bel. q).

(3) Man substituiert Q in (J) durch void: $\overline{\overline{\overline{P\rvert}\rvert}\;\overline{P\rvert}\rvert} =$ (für jedes P).

(4) Man gewinnt aus 3. mittels 2.: $\overline{\overline{p\rvert}\,p\rvert} =$ (für jedes p).

(5) Man zeigt nun anhand einer Ketten-Gleichung, dass $\overline{\overline{x\rvert}\rvert} = x$ gilt:

$$
\begin{array}{rll}
\overline{\overline{x\rvert}\rvert} & = \overline{\overline{\overline{x\rvert}\;\overline{\overline{x\rvert}\rvert}\rvert}\;\overline{x\;\overline{\overline{x\rvert}\rvert}\rvert}\rvert} & \text{(J)} \\
 & = \overline{\overline{\overline{\overline{x\rvert}\rvert}\;\overline{x\rvert}\rvert}\;\overline{\overline{\overline{x\rvert}\rvert}\;x\rvert}\rvert} & \text{(K)} \\
 & = \overline{\overline{\overline{\overline{x\rvert}\rvert}\;x\rvert}\rvert} & \text{(vS)} \\
 & = \overline{\overline{\overline{\overline{x\rvert}\rvert}\;x\rvert}\;\overline{\overline{x\rvert}\;x\rvert}\rvert} & \text{(vS)} \\
 & = x & \text{(J)}\,.
\end{array}
$$

Fassen wir zunächst die beiden Teilergebnisse zusammen: Erstens ist jede Robbins Algebra, die $x'' = x$ modelliert, eine Boolesche Algebra und zweites modelliert jede Robbins Algebra, in der void-Substitution erlaubt ist, die Gleichung $x'' = x$. Nun ziehen wir den Schluss: Jede Robbins Algebra mit void-Substitution ist eine Boolesche Algebra. In Kapitel 9.4 diskutiere ich void-Substitution, die von Kauffman unter die Ableitungsregeln gezählt wird, als spezielles Existenzpostulat.

36 Vgl. (Kauffman, 1990, 58) und (Winker, 1992, 417).

Teil II

GENESE – Wie entsteht der Indikationenkalkül? Die Laws of Form im linguistischen, den Prozess fokussierenden Diskurs: *Mathematik als Tätigkeit*

Kapitel 7

Die Primäre Algebra als symbolische Algebra

7.1 Ziel dieses Kapitels

In diesem Kapitel wird die Primäre Algebra nun nochmals anders betrachtet, nämlich nicht im Lichte der Beweistheorie oder der Gleichungslogik, sondern als *symbolische Algebra*; will sagen: als *arithmetische Algebra*, *verallgemeinerte Arithmetik* oder auch *algebraisierte Arithmetik*. Dabei möchte ich durch die Bezeichnung arithmetische Algebra zum Ausdruck bringen, dass an der Algebra diesmal nicht die formellen und strukturellen Aspekte interessieren, sondern die *arithmetischen*. Und ich verweise mit der Bezeichnung verallgemeinerte bzw. algebraisierte Arithmetik darauf, dass die Algebra von der Arithmetik her gedacht wird, also als Arithmetik, die verallgemeinert bzw. algebaisiert ist.[37] Verallgemeinert wird die Arithmetik, insofern nicht nur die Symbole der Arithmetik auftreten, sondern auch nicht-arithmetische Symbole, nämlich Variablen. Die Variablen der Primären Algebra sollen nach Definition Ausdrücke der Primären Arithmetik bezeichnen. Die Primäre Algebra ist demnach eine *symbolische Algebra*. Die symbolische Algebra ist einerseits eine *historische* Erscheinungsform von Algebra und andererseits eine auch gegenwärtig noch mögliche Form ihrer *systematischen* Gestaltung. Beispielsweise ist die Algebra der Mittelstufe an allgemeinbildenden Schulen eine symbolische Algebra, die unter der den Schülern meist verschwiegenen Überschrift *Von der Arithmetik zur Algebra* etabliert wird.[38] Wir folgen nun der – gewissermaßen kanonischen – Lesart der Primären Algebra als symbolische Algebra und interessieren

37 Dagegen gilt in (Huntington, 1904) und (Huntington, 1933b) das Augenmerk allein den Booleschen Algebren, deren kanonische Arithmetik interessiert nur als *konkretisierte* Algebra.

38 Vgl. (Siebel, 2005, Kapitel A.2.35, A.3.1.2, A.3.1.3) für die *Symbolische Algebra* und *Strukturelle Algebra* als historische Formen bzw. systematische Aspekte von Algebra. Vgl. (Malle, 1993, Kapitel 6) für den Schritt *Von der Arithmetik zur Algebra*.

uns demnach für die durch die Algebra repräsentierte Arithmetik, also die Primäre Arithmetik.

Analogien im Aufbau des Indikationenkalküls Die Primäre Arithmetik gelesen als symbolische Algebra hat demnach in Gehalt und Geltung die Primäre Arithmetik als Grundlage. Zudem behandelt Brown beide Teile des Indikationenkalküls im Hinblick auf die drei gleichen Aspekte:[39] Das ist erstens eine *Grenzziehung*, nämlich ihre jeweilige Definition durch Konstitution gewisser Grundzeichen und Grundregeln; das ist zweitens die *Innenseite* der Grenze, insofern *in* dem Kalkül Konsequenzen demonstriert werden; und das ist drittens die *Außenseite* der Grenze, insofern *über* den Kalkül Theoreme bewiesen werden. So wird in Chapter 6 die Innenseite des *algebraischen* Kalküls behandelt, in Chapter 7 dagegen seine Außenseite. Das Bindeglied zwischen der Primären Algebra und der Primären Arithmetik ist die in Chapter 5 geleistete Definition des algebraischen Kalküls, durch welche die in Chapter 4 behandelte Außenseite des arithmetischen Kalküls formalisiert wird. Dagegen wird in Chapter 3 der *arithmetische* Kalkül definiert und zudem – allerdings lediglich im Ansatz – seine Innenseite thematisiert.

Nehmen wir die drei Aspekte von Kalkülen, nämlich Definition, Innenseite und Außenseite, so könnte man darauf schließen, dass in `LoF` ein Chapter fehlt: Die Algebra wird in einem je eigenen Chapter definiert und von innen sowie von außen gesichtet, dagegen wird die Arithmetik nur definiert und von außen gesichtet. Die Innensicht des arithmetischen Kalküls ist auf ein einziges nicht-triviales Beispiel beschränkt und diese einzelne arithmetische Rechnung wird noch vor der Definition des Kalküls behandelt. Man beachte also die Korrespondenz zwischen Chapter 4 und Chapter 7 sowie die Korrespondenz zwischen Chapter 3 und Chapter 5. In Chapter 6 werden algebraische *Gleichungen* modifiziert, in Chapter 3 dagegen nur arithmetische *Terme*, genauer: nur ein einziger, gewissermaßen prototypischer Term.[40] Wohlgemerkt ist das Äquivalenzzeichen (sign = of equivalence) kein Symbol des arithmetischen Kalküls, sondern lediglich ein ihm (externes) Mitteilungszeichen. Brown hält sich also mit arithmetischen Einzelfällen nicht lange auf. Das ist zwar *verständlich*, insofern sich die arithmetischen Konsequenzen mit den in Chapter 4 behandelten Strategien leicht behandeln lassen; das ist jedoch *bedauerlich*, insofern der intendierte Zeichengebrauch selbst – trotz des Versuchs seiner expliziten und verständlichen Definition – nicht unbedingt unmittelbar verständlich ist. Denn das Kreuz (cross) ist ein Zeichen mit ungewohnter Grammatik. Demnach erschließt Brown dem Leser zwar die Algebra durch die Arithmetik, doch er eröffnet ihm kaum den Gebrauch der arithmetischen Zeichen durch verschiedene Beispiele. Von diesem

39 Ich skizziere die drei Aspekte im Rückgriff auf Browns Rede von *Grenze* mit zwei *Seiten* aus Chapter 1. Vgl. Kapitel 7.2.2 für eine Beschreibung dieser Aspekte im Rückgriff auf Browns Rede von *Inhalt* und *Bild* aus Chapter 8.

40 In Chapter 4 und 8 wird jedoch je ein weiterer arithmetischer Term modifiziert.

fehlenden Chapter, in dem arithmetische Konsequenzen demonstriert würden und das gewissermaßen in Chapter 3 rudimentär integriert ist, geht eine Irritation aus, die ich in Kapitel 7.2.2 genauer behandle.

Cui bono? Die *methodische Ordnung* der LoF-Mathematik von Chapter 1 bis hin zu Chapter 11 ist die *Entwicklung* der LoF-Mathematik aus zwei miteinander verschränkten Prinzipien bzw. aus einem komplexen Prinzip, nämlich *distinction* und *indication* als zwei Aspekte von *form*. Diese *Grundlage* wird in Chapter 12 durch vier *Experimente*, die sich als diagrammatische Spiele lesen lassen, nochmals neu *gerechtfertigt*. Der durch Erfahrung gesättigte *Neu-Anfang* in Chapter 12 exemplifiziert inhaltlich eine formale Figur aus Chapter 11, nämlich den *re-entry*, und expliziert zudem Browns Spiel mit der Zeit als methodisches Kompositionsprinzip, das der Autor selbst beschreibt:

> „[Z]um Beispiel ist jedes Element in diesen *Laws* so wie jedes Wort in einem Gedicht oder jede Note in einer Symphonie abgestimmt auf jedes andere Element der Komposition verfaßt und kann nur dann korrekt formuliert werden, wenn jedes andere Element in der Komposition gleichzeitig im Gemüt bewahrt wird." (Brown, 1999, xiv)

In Chapter 12, „Re-entry into the form", wird der in Chapter 1, „The form", und Chapter 2, „Forms taken out of the form", genommene *entry* in die Form nochmals zum – nun kritisch hinterfragten und neu zu plausibilisierenden – Thema. Eine solche Komposition kann zweifelsohne als Absage an formalistische und logizistische Begründungsversuche von Mathematik gelesen werden. Für Brown liegt die Überzeugungskraft der LoF in der beim Leser geweckten Aufmerksamkeit gegenüber dem eigenen Handeln.

Unter dem Gesichtspunkt der von Brown angelegten Verschränkung zwischen Primärer Arithmetik mit Primärer Algebra, kurz: der Primären Algebra als einer arithmetischen Primären Algebra, wird LoF als Beitrag zur Beantwortung der Frage nach adäquater *Grundlegung der Mathematik* erkennbar: Insofern die Algebra *nur* repräsentiert, ist sie in Fragen zum Gehalt und insbesondere zur Geltung nicht primär. Brown *entfaltet* das *form*-Prinzip bzw. die gekoppelten Prinzipien Unterscheidung (distinction) und Bezeichnung (indication) in Chapter 2 bis 4 *arithmetisch* und plausibilisiert diese Arithmetik in Chapter 12 nochmals anders, nämlich mittels gewisser *geometrischer* Zeichen, genauer: mittels gewisser topologischer Zeichen.

Wie Brown in Appendix 12 zeigt (vgl. Kauffman, 2005a), kann er mit seinen LoF die Syllogistik und auch die klassische Aussagenlogik insgesamt (neu-)*ordnen* und *rechtfertigen*. Er behandelt die Syllogistik nicht als ein Konglomerat von Gesetzen des richtigen *Denkens*, sondern als eine mögliche Anwendung bzw. Interpretation seiner LoF-Mathematik, die diesbezüglich als System von Gesetzen des üblichen

Zeichengebrauchs zu sehen ist, genauer: Die Rechtfertigung der klassischen Aussagenlogik erfolgt mittels des gewohnten Umgangs mit Bezeichnungen inklusive Unterscheidungen.

7.2 Präliminarium

7.2.1 Motivation dieses Kapitels

In der Lesart der Primären Algebra im Lichte der Beweistheorie (vgl. Kapitel 4) oder der Gleichungslogik (vgl. Kapitel 5) kommt die Primäre Arithmetik nicht eigens in den Blick. Brown dagegen erkundet zunächst die Arithmetik selbst und passt deren kanonische Notation an die tatsächlichen Erfordernisse an. Wohlgemerkt greift Brown dabei nicht auf die Mengenlehre in axiomatisierter oder naiver Form zurück. Stattdessen etabliert er die Primäre Algebra als eine *symbolische Algebra*, nämlich als Arithmetik, in der mit nicht-arithmetischen Symbolen gerechnet wird, als ob sie arithmetisch seien. Durch die Bezeichnungen *arithmetische Algebra* und *algebraisierte Arithmetik* möchte ich zum Ausdruck bringen, dass der Zugang zur Algebra aus der Arithmetik heraus erfolgt (vgl. Kapitel 7.1).

> „Later authors have, in this respect, copied Boole, with the result that nobody hitherto appears to have made any sustained attempt to elucidate and to study the primary, non-numerical arithmetic of the algebra in everyday use which now bears Boole's name. When I first began, some seven years ago, to see that such a study was needed, I thus found myself upon what was, mathematically speaking, untrodden ground. I had to explore it inwards to discover the missing principles." (Brown, 1969, xi)

Die Primäre Algebra als symbolische Algebra zu respektieren, bedeutet insbesondere, ihre Arithmetik zu betrachten, die in Chapter 4 und 3 behandelt und durch Chapter 2 und 1 vorbereitet ist. Die algebraischen Initiale stammen demnach aus der Arithmetik, wodurch der *Anfang* der Algebra keine schlichte *Setzung*, sondern eine reflektierte *Voraussetzung* ist. Dem algebraischen Teil des Indikationenkalküls geht also ein arithmetischer Teil voraus und erst vor dem Hintergrund dieser Erfahrung *in* und *mit* dem arithmetischen Kalkül entsteht bei kanonischer Verallgemeinerung der arithmetischen *substitution*-Regel eine Algebra, die zunächst nur eine geregelte Repräsentation der Arithmetik ist.

> „At the half-way point the algebra, in all its representative completeness, is found to have grown imperceptibly out of the arithmetic, so that by the time we have started to work in it we are already fully acquainted with its formalities and possibilities without anywhere having set out with the intention of describing them as such." (Brown, 1969, xii)

Der Sinn der Algebra ist zunächst also die Arithmetik. Doch wird der Übergang von der Arithmetik zur Algebra als Abstraktionsprozess fortgeführt, insofern in Chapter 11 der Algebra neben ihrer Funktion als *Repräsentation* der Arithmetik zudem noch eine Kompetenz der *Präsentation* zugestanden wird. Denn durch algebraische Bestimmungsgleichungen können Aufgaben formuliert werden, die hinsichtlich der etablierten Arithmetik nicht lösbar sind und daher Anlass zu ihrer Erweiterung geben, zumindest zu ihrer erneuten Inblicknahme.

Auf diesen bottom-up-Prozess in der LoF-Mathematik, nämlich die Ertüchtigung ihrer Fach- und speziell ihrer Formelsprache, gehe ich in Kapitel 8 genauer ein. Doch will ich mich – im Stile der Zeichenphilosophie Simons – zunächst top-down in die Primäre Arithmetik einarbeiten, indem ich auf die aus der Primäre Algebra mittlerweile gewohnte Lesart der Zeichen vertraue und zudem eine gewissermaßen mathematische Erwartungshaltung hege.

Die naive Lesart Auf die von Brown in LoF verwendeten Zeichen stößt jeder Leser neu und muss sich ihren Zusammenhang, ihre Bedeutung erarbeiten, sie sich verständlich machen, so sich bei ihm das Verstehen auf Grund der Vorerfahrungen und entgegen der Erwartungshaltung nicht einfachhin einstellt, sondern ihn die Zeichen irritieren und er die Zeichen überhaupt als Zeichen feststellen kann; sie ihm also vor seinen Augen stehen bleiben und den Blick nicht freigeben auf die Bedeutungen, die ihnen ansonsten unbemerkt unterstellt werden.
In den Kapiteln 7.3 und 7.4 werden Chapter 4 und 3 ganz naiv gesichtet, gewissermaßen aus dem Blickwinkel des schlichten Mathematikers, welcher der Zeichenphilosophie Josef Simons gemäß davon ausgeht, dass er den ihm bekannten Zeichengebrauch, die üblichen Probleme und Konventionen vor sich hat; bspw. das Problem der Wohldefiniertheit eines Begriffs oder eines Verfahrens und eine mathematische Sprache, die dem Operanden-Operatoren-Paradigma folgt und keinen gesteigerten Wert auf Ideographie (vgl. S. 179) legt. Mit dieser Erwartungshaltung treten wir also an die Primärquelle heran und versuchen sie zu verstehen –, insbesondere dann, wenn das nicht auf Anhieb klappt. So beginne ich diese Auslegung mit dem kritischen Hinweis auf eine Verstehenshürde, die das – von mir begründet unterstellte – Fehlen eines Chapters evoziert.

7.2.2 Schwierigkeiten durch ein fehlendes Chapter

Zunächst möchte ich zu verstehen geben, inwiefern es ein *fehlendes Chapter* gibt bzw. vom Fehlen eines Chapters gesprochen werden kann; das blieb in der Sekundärliteratur bislang weitgehend unbemerkt bzw. unbesprochen. Dieses Fehlen ist allerdings ein Fehler, insofern daraus *zwei Schwierigkeiten* erwachsen: Zunächst trägt ein

Chapter ein *falsches Label* und dies liefert weiter eine *irritierte Interpretation* (der Symbole) des algebraischen Kalküls.

Zwei Sichtweisen auf Expressionen und Kalküle In Chapter 8 werden *Inhalt* (content), *Bild* (image) und *Reflexion* (reflexion) als drei Ausdrücke der Fachsprache vereinbart. Diese fachsprachlichen Ausdrücke werden zunächst nur auf formelsprachliche Ausdrücke bezogen, nämlich zur spezifischen Bezugnahme auf e als Inhalt (von e), $\overline{e|}$ als Bild (von e) und $\overline{\overline{e|}|}$ als Reflexion (von e).[41] Inhalt und Bild – und gewissermaßen auch Reflexion – werden dann aber auch in Bezug auf Kalküle zu fachsprachlichen Ausdrücken.[42] Demnach verweist Inhalt (content) auf die *Innenseite* (inside) des jeweiligen Kalküls, also auf *Konsequenzen* und *Demonstrationen*; ich spreche dahingehend auch von seiner *Innensicht.* Und demnach verweist Bild (image) auf die *Außenseite* (not on its inside alias outside) des jeweiligen Kalküls, also auf *Theoreme* und *Beweise*; ich spreche dahingehend auch von seiner *Außensicht.*[43] Die jeweilige Sicht spezifiziere ich im Zweifelsfalle bspw. folgendermaßen: die content-Form der Primären Arithmetik bzw. die Primäre Arithmetik (content).

Das fehlende Chapter Um das Ergebnis der Argumentation per Analogie zu (be-)nennen: Es fehlt im Hinblick auf die Konzeption von `LoF` ein Chapter, nämlich das inhaltliche Pendant zu Chapter 6, in welchem die content-Form der Primären Arithmetik zu behandeln wäre. Ich behaupte nicht, dass dieses Chapter erst im Hinblick auf die Drucklegung verschwand, sondern gehe durchaus davon aus, dass es aus gewissermaßen verständlichen Gründen nicht geschrieben wurde. In Anspielung auf eine Begrifflichkeit aus Chapter 2, nämlich (das) *unwritten cross*, kann das Pendant zu Chapter 6 als (das) *unwritten Chapter* begriffen werden.[44]
Folgende Übersicht über Nummer, Titel und Gehalt der relevanten (geschriebenen) Chapter soll dem Analogieschluss als Ausgangspunkt dienen.

(1) In Chapter 6 (The primary algebra) ist der algebraische Kalkül behandelt, so wie ihn die *Innensicht* zeigt; mit anderen Worten: Es werden *Konsequenzen demonstriert.*

41 Vgl. (Brown, 1969, 42): „Of any expression e, call e the content, call $\overline{e|}$ the image, and call $\overline{\overline{e|}|}$ the reflexion.

42 Vgl. (Brown, 1969, 43): „In the form of any calculus, we find the consequences in its content and the theorems in its image."

43 In üblicher Terminologie gesprochen, ist die Außensicht die Theorie von einer ein-elementigen Menge, deren Element ist die (als Struktur und nicht als formales System gelesene) Primäre Algebra.

44 Im Sinne einer thematischen Ausweitung von `LoF` hätten auch noch andere (unwritten) Chapter geschrieben werden können. Doch provoziert nicht jedes *fehlende* Chapter in gleichem Maße Interpretations-*Fehler*.

(2) In Chapter 7 (Theorems of the second order) ist der algebraische Kalkül behandelt, so wie ihn die *Außensicht* zeigt; mit anderen Worten: Es werden *Theoreme bewiesen* und zwar Theoreme über den algebraischen Kalkül und damit Theoreme *zweiter Ordnung*, insofern sie nur mittelbar die Arithmetik betreffen.

(3) In Chapter 4 (The pimary arithmetic) ist der arithmetische Kalkül behandelt, so wie ihn die *Außensicht* zeigt; mit anderen Worten: Es werden *Theoreme bewiesen* und zwar Theoreme über den arithmetischen Kalkül und damit Theoreme *erster Ordnung*, insofern sie unmittelbar die Arithmetik betreffen.

(4) In Chapter 3 (The conception of calculation) ist die Konzeption bzw. das Konzipieren der (arithmetischen) Kalkulation behandelt, nämlich das Rechnen alias Kalkulieren mit Konstanten; mit anderen Worten: Es wird ein arithmetischer Kalkül definiert.

(5) In Chapter 5 (A calculus taken out of the calculus) ist die Herausnahme (taken out) eines Kalküls (a calculus) aus dem Kalkül (the calculus) behandelt; mit anderen Worten: Es wird ein algebraischer Kalkül für den arithmetischen Kalkül bzw. für die Theorie über den arithmetischen Kalkül definiert.

(6) In Chapter 2 (Forms taken out of the form) ist die Herausnahme (taken out) der beiden arithmetischen Initiale (form of condensation, form of cancellation) aus der Form (the form); diese (Form von) *Form*, nämlich eine gewisse Unterscheidungs- sowie Bezeichnungs-Form, und gewisse Vor-formen der beiden Formen (The law of calling, The law of crossing) werden behandelt in Chapter 1 (The form).

Demnach korrespondiert Chapter 5 in der Überschrift mit Chapter 2, im Inhalt dagegen mit Chapter 3. Gleichermaßen verschoben korrespondiert Chapter 4 in der Überschrift mit Chapter Chapter 6, im Inhalt dagegen mit Chapter 7. Mit anderen Worten: Von der Primären Algebra wird in Chapter 5 die content-Form definiert, in Chapter 6 eigens behandelt und in Chapter 7 die image-Form behandelt. Dagegen wird von der Primären Arithmetik in Chapter 3 die content-Form definiert und in Chapter 4 die image-Form behandelt. Doch wird die content-Form der Primären Arithmetik, also die Demonstration von arithmetischen Konsequenzen, in `LoF` nicht in einem eigenen Chapter behandelt.

Das falsche Label Die Innensicht des algebraischen Kalküls wird expliziert in Chapter 6, also unter der Überschrift „The primary algebra“. Das Gegenstück zu dieser Überschrift ist die Formulierung „The primary arithmetic“. Das ist allerdings ein – vielleicht unbeabsichtigter – *Etikettenschwindel*, insofern in Chapter 4 die Außensicht des arithmetischen Kalküls expliziert wird. Im Hinblick auf *Thema* und *Überschrift* von Chapter 7, nämlich „Theorems of the second order“, und das *Thema* von Chapter 4 sollte die *Überschrift* von Chapter 4 folgendermaßen lauten: „Theorems of the first order"; das nämlich wäre für Chapter 4 das richtige Label. Die Formulierung „The primary arithmetic" ist das richtige Label für das ungeschriebene Chapter, dem inhaltlichen Pendant zu Chapter 6; für Chapter 4 dagegen ist diese Formulierung das falsche Label.

Damit ist folgende Frage schon entschärft, die ich in ihrer Berechtigung nachfolgend allerdings noch kurz behandeln möchte: Ist ‚Primäre Arithmetik' das Label des arithmetischen Kalküls? Oder ist es das Label der Theorie über den arithmetischen Kalkül? Die Definition der Primären Arithmetik lautet:

> „Call the calculus limited to the forms generated from direct consequences of these initials the primary arithmetic." (Brown, 1969, 11)

Wenn „direct consequences" ein wohlbekannter Begriff wäre, wäre die Beantwortung der beiden Fragen unter Hinzuziehung der Definition wohl eine klare Sache. Doch das ist nicht der Fall, insofern nämlich dem `LoF`-Leser der Begriff *direct consequences* nicht bekannt gemacht worden ist. Achtet der `LoF`-Leser dann insbesondere auf das unter der Überschrift „The primary arithmetic" Behandelte, so kann er leicht auf die Lesart verfallen, dass die Primäre Arithmetik schon Variablen enthält, wie sie in der Außensicht des arithmetischen Kalküls verwendet werden, nämlich in der in Chapter 4 behandelten Theorie über ihn.
Der falschen Interpretation ist wiederum nur schwer auf die Schliche zu kommen: Denn Browns replacement-Regel, R2, ermöglicht nicht nur den Austausch eines algebraischen Indikators durch eine arithmetische Instanz, sondern auch durch einen anderen algebraischen Indikator.

Die irritierte Interpretation Diese Asymmetrie in den Chapter-Überschriften ist tatsächlich von unglücklicher Relevanz, insofern sie zwei Irritationen bezüglich der von Brown für die algebraischen Buchstaben-Symbole formulierten Interpretation evoziert. Das ist einerseits die Frage, welche algebraischen Buchstaben-Symbole verwendet werden und wofür genau, und andererseits die Frage, ob die algebraischen Initiale bereits Axiome des algebraischen Kalküls oder lediglich Schemata von Axiomen des Kalküls sind.
Folgende Übersicht soll der Orientierung der zweifach irritierten Interpretation als Ausgangspunkt dienen.

(1) Der erste Satz von Chapter 5 lautet: „Let Tokens of variable form

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$$

indicate expressions in the primary arithmetic." (Brown, 1969, 25).

(2) Die Regel R2 aus Chapter 5 beginnt folgendermaßen: „If $e = f$, and if every Token of a given independent variable expression v in $e = f$ is replaced by an expression w, it not being necessary for v, w to be equivalent or for w to be independent or variable [...]“ (Brown, 1969, 26).
Dabei ist ‚e‘ wohl als sprechende/abkürzende/synkopierte Bezeichnung für ‚expression‘ gewählt worden, gleichermaßen ‚v‘ für ‚variable expression‘ und ‚f‘ bzw. ‚w‘ als Nachfolger von ‚e‘ bzw. ‚v‘ im Alphabet.
Weiter ist insbesondere gesagt, dass w konstant, aber auch (abhängig oder unabhängig) variabel sein kann.

(3) Die erste Anwendung von R2 erfolgt in Chapter 6 und lautet: „We use R2 to convert $\overline{\overline{p}\rceil\; p}\rceil =$ to $\overline{\overline{\overline{a}\rceil}\rceil\; \overline{a}\rceil}\rceil =$ by changing every appearance of p to an appearance of $\overline{a}\rceil$.“ (Brown, 1969, 28f.).
Dabei ist ‚p‘ vermutlich als sprechende/abkürzende/synkopierte Bezeichnung für ‚parameter‘ gewählt worden soll, wobei Brown nicht explizit von Parametern spricht. An der Stelle der ersten Verwendung von ‚p‘ als Symbol in der Behandlung des arithmetischen Kalkül schreibt Brown: „Consider an expression of a part p in a space with an empty cross c_e.“ (Brown, 1969, 14). Also könnte ‚p‘ auch für ‚part‘ stehen, doch mimt dieser part p dann immerhin noch die Rolle eines Parameters (als Teilterm).

Kommen wir nun wieder auf die Irritationen zu sprechen. Die erste Irritation ist die fragwürdige Rolle der Buchstaben-Symbole, die zur Formulierung der algebraischen Initiale und algebraischen Regeln R1 und R2 verwendet werden, wie bspw. die Symbole e, f, v, w, p, q und r. Sind sie im ersten Satz von Chapter 5 aufgezähl? Sind sie also in „...“ enthalten? Sollen sie wie zumindest die Symbole a und b als Indikatoren für *arithmetische* Expressionen gelten? Oder fungieren sie nicht etwa als Indikatoren für *algebraische* Expressionen? Wird zwischen direkten und indirekten Indikatoren arithmetischer Expressionen unterschieden wie zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen? Ist ein solcher semantischer Unterschied zwischen indirekten und direkten, also zwischen mittelbaren und unmittelbaren Indikatoren pragmatisch zu beachten?[45] Ist er syntaktisch repräsentiert? Und gegebenenfalls: Wie?
Für die Beantwortung dieser Fragen betrachten wir, wie Brown seine Regeln anwendet und dabei die Buchstaben-Symbole zu gebrauchen scheint. Starten wir diesbezüglich mit der zitierten Anwendung von R2 in der Demonstration von C1. Dieser Anwendung gemäß ist $\overline{\overline{p}\rceil\; p}\rceil$ eine mögliche Instanz von e. Dann ist also ‚e‘ als Indikator für $\overline{\overline{p}\rceil\; p}\rceil$ zu gebrauchen und damit nur ein *mittelbarer* Indikator für arithmetische Expressionen, nämlich zumindest *vermittels* ‚$\overline{\overline{p}\rceil\; p}\rceil$‘ und das heißt

45 Die Unterscheidung zwischen mittelbaren und unmittelbaren Indikatoren für arithmetische Expressionen ist natürlich nicht so getroffen, dass nur arithmetische Expressionen selbst unmittelbare Indikatoren arithmetischer Expressionen sind.

insbesondere *mittels* ‚p', wobei ‚p' selbst keine arithmetische Expression ist. Dieser ersten Anwendung von R2 gemäß ist weiter p eine mögliche Instanz von v und $\overline{a}\rceil$ eine mögliche Instanz von w. Es ist also ‚w' als Indikator für $\overline{a}\rceil$ zu gebrauchen und damit wie ‚e' nur ein *mittelbarer* Indikator arithmetischer Expressionen; nach expliziter Konvention ist immerhin bekannt, dass ‚a' als (unmittelbarer) Indikator arithmetischer Expressionen verwendet werden darf.
Die Symbole e, f, g, h, j, k, v und w sind in Chapter 5 bei Formulierung der Regeln und in Chapter 6 bei Demonstration von C1 – nach gängigen Standards – als Mitteilungszeichen für Terme des algebraischen Kalküls zu lesen; im Hinblick auf v sind es nur spezielle algebraische Terme. Die genannten Symbole sind dahingehend Meta-Variablen und stehen außerhalb des algebraischen Kalküls; diese Sonderrolle kommt (zumindest einigen von) ihnen in Chapter 7 allerdings nicht mehr zu und es wird diese Sonderrolle in Chapter 9 von anderen Buchstaben-Symbolen übernommen. Es mag sein, dass Brown ihnen die Rolle von Meta-Variablen nicht zugedacht hat, denn die Symbole p, q und r aus bzw. in den algebraischen Initialen spielen diese Rolle nicht und es ist m. E. nicht besonders sinnfällig, die Symbole e, f, g, h, j, k in der Aufzählung $a, b, \ldots$ (im Hinblick auf die alphabetische Ordnung) als *ausgespart* zu denken, obwohl die Symbole p, q und r der Aufzählung wieder angehören.
Dabei sollen m. E. die Symbole p, q und r durchaus als Symbole des Kalküls und Indikatoren arithmetischer Expressionen gelesen werden und insofern als der Aufzählung $a, b, \ldots$ zugehörig, denn sie werden wie die Symbole a und b verwendet. Das ist zum einen ersichtlich an der Verwendung von ‚r' gleichermaßen wie ‚a' und ‚b' in der Formulierung von C8 und C9 und zum anderen bzw. umgekehrt ersichtlich an der Verwendung von ‚a' und ‚b' gleichermaßen wie ‚p', ‚q' und ‚r' als mögliche Instanzen von v bei Anwendung von R2. Beispielsweise ist der Demonstration von C2 gemäß im Hinblick auf C1 a eine mögliche Instanz von v und $\overline{a}\rceil b$ eine mögliche Instanz von w; weiter ist der Demonstration von C5 gemäß im Hinblick auf C4 b eine mögliche Instanz von v und eine mögliche Instanz von w.
Auch Schwartz unterscheidet in seiner LoF-Interpretation explizit zwischen Meta-Variablen in den Regeln und Variablen in den Initialen.[46] Er (re-)formuliert und (re-)konstruiert die Axiome der Primären Algebra mittels ‚e_1', ‚e_2' und ‚e_3', das sind Symbole der formalen Sprache, die Ableitungsregeln dagegen insbesondere mittels ‚E', ‚F' und ‚G', das sind keine Symbole der formalen Sprache. Weiter (re-)formuliert und (re-)konstruiert er in (Schwartz, 1981, 245–247) den „Calculus for self-reference", der in (Varela, 1975) in Anlehnung an Browns Indikationenkalkül konstruiert ist, und benützt dabei für die Regeln und Axiome(n-Schemata) gleichermaßen Meta-Variable E, F und G, da dieser Kalkül keine replacement-, sondern nur eine substitution-Regel hat (vgl. Varela, 1979, 143).

Kommen wir nun zusammenfassend auf die (bzw. eine) Auflösung der Irritationen

46 Vgl. S. 42 und (Schwartz, 1981, 243f.).

bezüglich der geforderten Interpretation (der Symbole) des algebraischen Kalküls zu sprechen. Zunächst ist also die semantische Unterscheidung zwischen direkten und indirekten Indikatoren arithmetischer Expressionen nicht zu treffen; sie ist demnach pragmatisch nicht zu berücksichtigen und syntaktisch nicht repräsentiert. Brown verwendet erst in Chapter 8 explizit Buchstaben-Symbole als Meta-Variable im Hinblick auf den algebraischen Kalkül.
Weiters sind also die algebraischen Initiale nicht nur *Repräsentanten* ihrer durch R1 und R2 zu erhaltenden Instanzen, die allesamt der Primären Algebra zugehören, sondern sie sind zudem *Präsentanten* zweier Gleichungen des algebraischen Kalküls, da ‚p', ‚q' und ‚r' Symbole des Kalküls sind. Dagegen gehören die arithmetischen Initiale dem arithmetischen Kalkül nicht an, wie ihm keine andere arithmetische Gleichung angehört, da er das Äquivalenzzeichen nicht enthält, und ist kein Term des Kalküls Repräsentant eines anderen Terms.

Kritische Bemerkung Ich möchte in diesem Zusammenhang aber doch anmerken, dass die Aufzählung $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots$ nicht besonders explizit ist. In (Brown, 1999, 154) wird die gewünschte Lesart etwas expliziter angezeigt, insofern Brown dort für eine Notation, die nicht dem Indikationenkalkül gilt, folgendermaßen drei verschiedene Symbolklassen (grob) andeutet: „$\mathsf{p}, \mathsf{q}, \ldots$“, „$\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$“ und „$\mathsf{d}, \mathsf{e}, \ldots$“; demnach gehören dort bspw. die Symbole p und q der durch „$\mathsf{d}, \mathsf{e}, \ldots$“ angedeuteten Symbolklasse nicht an.
Zurück zur Verwendung der Buchstaben-Symbole in Chaptern von `LoF`. Mit Blick auf die Buchstaben-Symbole in Chapter 7 sollte noch angemerkt sein, dass dort die Symbole d, i, j, n, s nicht als Indikatoren arithmetischer Expressionen verwendet werden, sondern das letzte als (synkopierte) Bezeichnung für Räume (space) und die anderen zur Angabe der Anzahl an und der Tiefe von Räumen, also als Bezeichnungen natürlicher Zahlen (inklusive der Null); wohlgemerkt ist von diesen fünf Symbolen nur j in Chapter 5 als Indikator arithmetischer Expressionen verwendet worden. Vor dem Hintergrund der alphabetischen Ordnung ist wohl auch folgende Aufzählung „$\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots, \mathsf{p}, \mathsf{q}, \ldots, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \ldots$ and f“ (Brown, 1969, 41) zu verstehen; trotzdem soll der Symbolvorrat (wohl) nicht auf die im Alphabet auftretenden Buchstaben beschränkt sein.

In den Chaptern 8, 9, und 11 ist die Verwendung der Buchstaben-Symbole nochmals eine andere. In Chapter 11 werden mehrere Gleichungen in f betrachtet, die von keinem arithmetischen Wert – im üblichen Sinne – gelöst werden. Fordert man trotzdem (mindestens) eine Lösung der Gleichung, so ist f nicht mehr – im üblichen Sinne – ein Indikator arithmetischer Expressionen.
In Chapter 9 werden Indikatoren für algebraische Expressionen benötigt; verwendet werden dahingehend die Symbole α, β, α', β', A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 und B_3.
In Chapter 8, genauer: im Nachgang zur Formulierung von Theorem 16, wird dann ‚q' als (Symbol für eine) allgemeine natürliche Zahl verwendet, ‚m' und ‚n' als

Indikatoren der beiden Werte, die durch arithmetische Expressionen ausgedrückt werden, und ‚ν' als *veränderliche* Variable, die Buchstaben-Symbole waren zuvor – prima facie – nur (Symbole für) allgemeine Werte. Im Beweis von Theorem 16 dient dann auch ‚$\mathtt{t}$' wie zuvor nur ‚$\mathtt{s}$' (mit oder ohne Index) als Indikator eines Raumes. In diesem Zusammenhang wird die Oszillation von ν beschrieben als „between the limits of its value $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$" (Brown, 1969, 47, 48) und wird weiter die Gültigkeit der Aussage des Theorems auch für andere Algebren behauptet: „in all algebras" (Brown, 1969, 47). Nehmen wir zunächst bereitwillig an, dass mittels „all" nur im Hinblick auf Algebren mit oberen und unteren Schranken – den Pendants zu $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ – generalisiert werden sollte; mit „between the limits" könnte dann, so wir weiter bereitwillig auf der Algebra eine *between*-Relation in kanonischem Sinne betrachten, gemeint bzw. erlaubt sein, dass ν auch *Zwischenwerte* annimmt.

7.2.3 Algebraisierte Arithmetik

Die Algebra zur Repräsentation der Arithmetik Die Lesart der Primären Algebra als Verallgemeinerung der Arithmetik und dieserart als *algebraisierte* Arithmetik leistet einer expliziten Vereinbarung zwischen Autor und Leser Folge:

> „Let the calculus be seen as a calculus for the primary arithmetic. Call it the primary algebra." (Brown, 1969, 26).

Die Algebra darf also als Kalkül für die Arithmetik gelesen werden und sie vermag den Überlegungen in Chapter 8 und dem Theorem 17 in Chapter 9 gemäß die Arithmetik *vollständig* und *adäquat* darzustellen. Die Algebra ist demnach als Deskriptionskalkül für die Arithmetik geeignet und kann dieserart auch als arithmetische Algebra gelesen werden. Da die Arithmetik selbst bereits als Deskriptionskalkül gelesen werden kann, ist die Algebra ein Kalkül für Deskriptoren von Deskriptoren.
Das Verhältnis zwischen Algebra und Arithmetik ist aber nicht nur das der Darstellung, sondern es ist – wie auch Brown in den Notes zu Chapter 6 bemerkt – die Arithmetik der *Ursprung* (origin) der Algebra, wobei sich die Algebra diesen Ursprung in Chapter 8 einverleibt (vgl. Brown, 1969, 87). Auf diese Herkunft im Sinne einer direkten Anbindung der Algebra an die Arithmetik weist bereits der Titel von Chapter 5 explizit hin: „A calculus taken out of the calculus". Diese Phrase „taken out" wird in Chapter 5 noch zwei weitere Male verwendet: Sie macht nämlich die Patenschaft zweier Theoreme aus Chapter 4 für die beiden algebraischen Initiale deutlich.

Wenden wir uns nun relativ unkritisch dem Inhalt, den der Autor dem Leser anscheinend zu verstehen geben möchte, in seiner Hauptlinie zu. Ich folge dabei der Klassifikation, die der Autor selbst für seine Theoreme vorschlägt. Dabei wird in Kapitel 7 Browns Erzählprozess in umgekehrter Richtung (nach-)erzählt bzw.

(nach-)erforscht.
Das Ziel wird dabei sein, eine von Brown selbst bezweckte Einsicht zu erhalten – insbesondere in die Kern-Prinzipien, speziell die der „rules for algebraic manipulation" (Brown, 1969, 87):

> „It is deliberate to inform the reader that, in the system of calculation we are building, we are not departing from the basic methods of other systems. Thus what we arrive at, in the end, will serve to elucidate them, as well as to fit them with their true orign." (Brown, 1969, 87)

Die beiden „them" und das „their" sind m. E., obwohl syntaktisch naheliegend, nicht auf die „other systems", sondern semantisch naheliegend auf die „basic methods" zu beziehen. Es geht also darum, eine Grundlegung der algebraischen Manipulationsregeln zu erreichen; dabei geht es neben Substitution und Ersetzung insbesondere um die Gültigkeit der algebraischen Initiale, von welchen im Wesentlichen alle für die Regeln relevanten Äquivalenzen (initial) geliefert werden.

Die algebraischen Initiale Zu Anfang von Chapter 6, „The primary algebra", werden die beiden algebraischen Initiale aus Chapter 5 wiederholt und mit einer Kurzbezeichnung versehen, nämlich J1 bzw. J2; des Weiteren ist jedes Initial als Ganzes und sind jeweils beide Leserichtungen benannt (vgl. Brown, 1969, 28):

Initial 1. Position

J1	$\overline{\overline{p}\rceil\ p}\rceil =$	take out $\rightleftharpoons$ put in

Initial 2. Transposition

J2	$\overline{\overline{pr}\rceil\ \overline{qr}\rceil}\rceil = \overline{\overline{p}\rceil\ \overline{q}\rceil}\rceil\, r$	collect $\rightleftharpoons$ distribute

Dem ist vorausgegangen, dass in Chapter 5, „A calculus taken out of the calculus", die Symbolisierungen (mittels Gleichungen) zweier Theoreme von Chapter 4 aus dem Kontext genommen (be[en] taken out of context) und dem Kalkül, der sog. Primären Algebra, zu Initialen gemacht werden.

> „Let indications used in the description of theorem 8 be taken out of context so that $\overline{\overline{p}\rceil\ p}\rceil =$. Call this the form of position.
> Let indications used in the description of theorem 9 be taken out of context so that $\overline{\overline{pr}\rceil\ \overline{qr}\rceil}\rceil = \overline{\overline{p}\rceil\ \overline{q}\rceil}\rceil\, r$. Call this the form of transposition.
> Let the forms of position and transposition be taken as the initials of a calculus." (Brown, 1969, 25f.)

In Chapter 4 werden die beiden *Theoreme der Verbindung* (theorems of connexion), nämlich Theorem 8 und 9, zunächst jeweils in der `LoF`-*Fachsprache* formuliert und

nachfolgend in der LoF-*Formelsprache* als zwei Gleichungen symbolisiert. In Chapter 5 vereinbart der Autor mit dem Leser für diese symbolisierenden Gleichungen, dass sie *aus ihrem Kontext genommen seien* und dann der Primären Algebra zu ihren beiden Initialen gemacht werden.
Diese beiden Gleichungen, nämlich die *Form der Position* (form of position) und die *Form der Transposition* (form of transposition), sind dem Leser also in gewissem Sinne bereits vertraut, wie ihm auch in Chapter 2 zwei Gleichungen vorgestellt werden, die in Chapter 3 der Primären Arithmetik zu ihren beiden Initialen gemacht werden.

Das *taken-out* als Problem Die Krux besteht nun gerade darin, dass der Leser die beiden Gleichungen auf die intendierte Weise aus ihrem Kontext nimmt (been taken out). Denn es ist fraglich bzw. von Brown nicht näher bestimmt, wieviel Kontext zur Gleichung dabei mit der Gleichung aus dem Kontext mitherausgenommen wird; gleichermaßen ist der Begriff *Kontext* in LoF nicht bestimmt worden. Der Leser ist diesbezüglich also auf seine Intuition zurückverwiesen.
Ein Blick auf Theorem 9 in Chapter 4, also die Stelle in LoF, von der her ein Initial genommen ist, zeigt, dass auch in der fachsprachlichen Formulierung des Theorems von „taken out" die Rede ist, insofern dort die Expression r aus den beiden Teilen von Raum s_2 herausgenommen wird (been taken out).
Blickt man auf die Verwendung der Initiale in Chapter 6, so ist klar, dass der Leser diese Herausnahmen noch als Gleichungen von jeweils zwei Termen lesen kann und er zudem ihren Aufbau lesen kann, insofern er sie nämlich analysieren, aufgliedern und zerlegen kann: So kann er die Buchstaben noch als Parameter/Variablen erkennen und für die Substitutions- sowie Ersetzungs-Regel verwenden und darf bzw. soll Kreuz noch in beinahe herkömmlicher Weise verstehen. Auf diese herkömmliche Verwendungsweise möchte ich nun unter dem Stichwort „Vom Token zum Kreuz" im folgenden Paragraphen näher eingehen.

Vom Token zum Kreuz In der Primären Arithmetik wird das Symbol ⏋ zuerst beschrieben als „the token of the mark" (Brown, 1969, 4) und als der Name für den markierten Zustand verwendet. Demnach ist das Token ein 0-stelliges Symbol. Doch wird für das Symbol ein weiterer Zweck vereinbart und ihm wird diesbezüglich auch ein Name verliehen. Über das nicht-0-stellige Funktionssymbol ⏋, genauer: über seine konkreten Realisierungen („Token"), heißt es in Chapter 2:

> „Any token may be taken, therefore, to be an instruction for the operation of an intention, and may itself be given a name ‚cross' to indicate what the intention is." (Brown, 1969, 6)

Offensichtlich, bspw. durch „therefore", ist die zitierte Stelle verkontextet. Dieser Kontext wird nun nicht zur Gänze expliziert, doch zumindest in den Konsequenzen

skizziert, die das Zitat zu erhellen vermögen.
Das Symbol ⌝ darf genommen werden (may be taken) als *eine Anweisung für die Operation einer Intention* (an instruction for the operation of an intention). Entscheidend ist der *Wortspiel*-Charakter, der hier bemüht wird, und seinen Niederschlag im *Symbolspiel* findet, dass man nämlich ⌝ als 0-stellige Operation lesen kann und gleichermaßen als 1-stellige mit ‚ ‘ als Argument. Das ist zwar etwas verspielt doch m. E. nicht in unzulässigem Maße. Zurück zum Zitat: Die *Intention* (intention) ist, die Grenze der ersten Unterscheidung zu kreuzen alias queren (to cross). Die *Operation* dieser Intention ist die Durchführung der Intention. Die *Anweisung* (instruction) zur Durchführung der Intention ist „cross“, im Sinne von „Cross!“. Also darf ⌝ dazu genommen werden (may be taken), die Anweisung zur Operation der Intention *zu sein* (to be). Kurz: Man kann und darf (zum Teil auch: man soll und wird) ⌝ als Anweisung zur Operation der Intention verwenden. Brown realisiert nun das lateinische Sprichwort ‚[cog]nomen omen est‘, wonach der (Bei-)Name ein Zeichen sei, insofern er das Symbol ⌝, das die Anweisung *Cross!* vereinbarungsgemäß sein kann bzw. *ist*, mit der Intention selbst benennt und demnach mit „cross“. Bemerkenswerterweise treibt Brown das Wortspiel so weit, dass er den Eigennamen des Symbols klein schreibt, nämlich *cross*, statt: *Cross*. Es bleibt „cross“ im Indikationenkalkül insgesamt der Name des Zeichens ⌝, wobei ich stattdessen oftmals „Kreuz“ verwende, um den Namen leichter deklinieren zu können.

Die operative Konstante In der Primären Algebra *bezeichnet* das Symbol – und zwar übereinstimmend mit den früheren Vereinbarungen – eine Anweisung für die Operation einer Intention, nämlich *to cross*; genauer: Man soll es solches bezeichnen lassen:

> „Let tokens of constant form
>
> ⌝
>
> indicate instructions to cross the boundary of the first distinction according to the conventions already called.“ (Brown, 1969, 25).

Demnach *bezeichnet* das Kreuz der Primären Algebra die Operation, die das der Primären Arithmetik *ist*. Gleichermaßen repräsentieren die Buchstaben-Symbole der Primären Algebra arithmetische Terme; mit anderen Worten: Die Primäre Arithmetik *ist* die Interpretation der Primären Algebra und es müssen die Symbole der Primären Algebra *als* Objekte der Primären Arithmetik interpretiert werden. Die Bedeutung der Symbole der Primären Arithmetik dagegen liegen in der in Chapter 2 konstituierten Situation, der Form der ersten Unterscheidung, die einen gespaltenen Raum, seine beiden Teile und die Marke in einem der beiden Teile enthält. Diese Situation wird durch die Primäre Arithmetik unmittelbar, durch die Primäre Algebra mittelbar dargestellt.

Bemerkenswert ist noch, dass Brown in Chapter 5 und nochmals in den Notes zu Chapter 7 von zwei *Konstanten* im Kalkül schreibt. Damit sind aber nicht Symbole für Konstanten, also nicht 0-stellige Operationen gemeint, sondern die beiden Symbole $\overline{}|$ und   , die von *konstanter Bedeutung* sind. Im Gegensatz dazu nutzt Brown eine *variable* Anzahl an Symbolen $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, ..., die von *variabler Bedeutung* sind. Die simple Sprechweise von *der* Konstanten beziehe sich, so Brown, nach Vereinbarung auf die *operative* Konstante, also das Kreuz.

> „There are two constants in the calculus, a mark or operator, and a blank or void. Reference to 'the constant' without qualification will usually be taken to denote the operator rather than the void." (Brown, 1969, 92)

Der Passus „a blank or void" wird von Thomas Wolf, dem Übersetzer der vom Autor autorisierten deutschen Ausgabe (Brown, 1999), im Deutschen formuliert mit „ein Leerzeichen oder die Leere" (Brown, 1999, 80). Wie verhalten sich nun „blank" und „void" bzw. „die Leere" und „das Leerzeichen" zueinander? In der LoF-Fachsprache wird von Leere/Void (void) gesprochen, indem ein Leerzeichen (blank), das ist ‚ ', gesetzt wird, indem eben Zeichen wie „Leere", „Void" oder „void" verwendet werden oder indem die Leere bei ihrem Namen genannt wird, nämlich Ock (vgl. Abschnitt „Die Grundfiguren" in Kapitel 7.4.2). Dabei spielt die Leere für die Browns Mathematik die Rolle des Einselements 1 in (multiplikativen) Monoiden: Das Einselement ändert als Faktor den Wert nicht ($1 * \mathtt{a} = \mathtt{a}$) und gleichermaßen darf mit einem zu 1 wertäquivalenten Faktor multipliziert werden ($(\mathtt{a} * \mathtt{a}^{-1}) * \mathtt{a} = \mathtt{a}$). Dementsprechend gilt in der LoF-Fachsprache $\overline{\overline{}|}|\ \mathtt{a} = \mathtt{a}$. Das neutrale Element bzw. Void dürfen bei Bedarf selbst oder wertäquivalent explizit geschreiben bzw. (mit-)gelesen werden. Für die Leere in einem (leeren) Kreuz wird ein explizites Leerzeichen (blank) geschrieben, da das Kreuz sonst nur als senkrechter Strich erkannt würde.

Das algebraische Rechnen In Chapter 5 Section „Algebraic calculation" weist Brown auf zwei Regeln der algebraischen Kalkulation hin, nämlich *Substitution* (substitution) und *Ersetzung* (replacement), die zum üblichen Gebrauch des Äquivalenzzeichens gehören.

> „For algebras, two rules are commonly accepted as implicit in the use of the sign =." (Brown, 1969, 26)

Die Möglichkeit der Modifikation von Gleichungen mittels der beiden Regeln – zuzüglich der Symmetrie bzw. Kommutativität der Konkatenation sowie der Symmetrie und Transitivität der Äquivalenz – ist in Kapitel 5.2.1 behandelt und wird hier nicht nochmals wiederholt.

7.3 Die Primäre Arithmetik in image-Form

Eine nach Josef Simon *naiv* zu nennende und zunächst nur am Aufbau orientierte Bestandsaufnahme von Chapter 4 zeigt auf den ersten Blick 15 Sections: zwei Initiale, neun Theoreme mit jeweiligem Beweis zuzüglich einer einzelnen Illustration eines Beweisverfahrens, ein Kanon, eine Section über die Konsistenz der Primären Arithmetik sowie zwei Sections über Klassifikationen, nämlich einerseits von Expressionen, andererseits von Theoremen.

7.3.1 Verschiedene Klassifikationen

Klassifikation aller Theoreme des Indikationenkalküls In Section „A classification of theorems" (Eine Klassifikation von Theoremen) von Chapter 4, klassifiziert Brown die Theoreme des Indikationenkalküls auf folgende Weise:[47]

(1) *Theoreme der Darstellung* (theorems of representation)
Chapter 4: form- (T1), content- (T2), agreement- (T3) und distinction-Theorem (T4);

(2) *Theoreme der Vorgangsweise* (theorems of procedure)
Chapter 4: identity- (T5), value- (T6) und consequence-Theorem (T7);

(3) *Theoreme der Verbindung* (theorems of connexion)
Chapter 4: invariance- (T8) und variance-Theorem (T9);

(4) *Theoreme der zweiten Ordnung* (theorems of the second order) alias *rein algebraische Theoreme* (pure algebraic theorems)
Chapter 7: transposition- (T10), modified-transposition- (T11), crosstransposition- (T12), generation- (T13), canon-with-respect-to-the-constant- (T14) und canon-with-respect-to-a-variable-Theorem (T15);
Chapter 10: independence-Theorem (T18);

(5) *gemischte Theoreme* (mixed theorems):
Chapter 8: bridge-Theorem (T16);
Chapter 9: completeness-Theorem (T17).

Die Theoreme der vierten Klasse hat Brown nicht explizit genannt, doch scheint mir ihre Zugehörigkeit kaum fragwürdig. Denn Theorem 18 und sein Beweis behandeln die Algebra ohne Bezug auf die Arithmetik zu nehmen. Für die Klassifikation der Theoreme 10 bis 15 (Chapter 7) als rein algebraisch spricht die Überschrift von Chapter 7 „Theorems of the second order" und weiter das inhaltliche Kriterium, dass

47 Bemerkenswerterweise gibt es zur die Theoreme klassifizierenden Section „A classification of theorems" von Chapter 4 in Chapter 6 das Pendant einer die Konsequenzen klassifizierenden Section, nämlich „The classification of consequences".

diese sechs Theoreme algebraische Konsequenzen (consequences) verallgemeinern. In LoF bekommen lediglich T14 und T15 einen Namen. Die Namensgebung für die Theoreme T10 bis T13 ist von Brown genau genommen etwas anders geregelt als von mir oben angezeigt:

> „It is convenient to consider J2, C2, C8, and C9 as extended by their respective theorems, and to let the name of the initial or consequence denote also the theorem extending it." (Brown, 1969, 40)

Neun arithmetische Theoreme In Chapter 4 beweist Brown einige Aussagen über den Umgang mit Arrangements bzw. Expressionen. Er weist diesbezüglich und hinsichtlich der Argumentation für die „form of cancellation" (Brown, 1969, 5) bereits in der Einführung (Introduction) insbesondere darauf hin, dass das manchen Leser eventuell verstört:

> „A person with mathematical traning, who may automatically use a whole range of techniques without questioning their origin, can find himself in difficulties over an early part of the presentation, in which it has been necessary to develop an idea using only such mathematical tools as have already been identified." (Brown, 1969, xiii)

Man muss hierbei beachten, dass bspw. auch die Birkhoffschen Regeln für gleichungslogische Ableitungen nicht unmotiviert vorausgesetzt werden, sondern motiviert angenommen werden, weil sie für Folgerungen gelten. Das syntaktische Verfahren ist also aus dem semantischen gewonnen. Vor diesem Hintergrund nimmt Brown in Anspruch, *dass er für seinen Gegenstandsbereich das semantische Verfahren gerechtfertigt bzw. begründet und somit seine Methoden kritisch reflektiert hat.* Philosophisch interessant, ist daher, wie Brown seinen *Gegenstandsbereich etabliert* (vgl. Kapitel 11.3) und die ersten Beweise zu Wege bringt (vgl. Kapitel 8 und 11.3), *wie* er also *wo* ansetzt (vgl. S. 301).

Ein naiver Blick auf die neun arithmetischen Theoreme und auf ihre Beweise zeigt: Die neun Theoreme sind in der LoF-Fachsprache formuliert, die selbst erst im Fortgange des Textes stückweise (ausdrucks-) stärker wird (gradual building up); auch dies wird erst in Kapitel 8 untersucht. Auf diese fachsprachlichen Formulierungen folgen bei den Theoremen 5, 7, 8 und 9 noch vor Beweisbeginn formelsprachliche Re-Formulierungen und es ist der Gehalt von Theorem 2 innerhalb des Beweises formelsprachlich reformuliert; dagegen ist der Gehalt der Theoreme 1, 3, 4 und 6 in der Formelsprache nicht geschlossen – bspw. als eine Gleichung – zum Ausdruck gebracht. Die Formelsprache selbst wird wie die Fachsprache erst im Fortgange des Textes entwickelt.
Im Falle von Theorem 2 ist die Symbolisierung der erste Schritt im Beweis; anhand der Symbolisierung wird dann die *Vorgangsweise* (procedure) der Argumentation

erläutert. Solche Hinweise auf die Vorgangsweise sind auch in den Beweisen der Theoreme 1, 2, 3 und 7 explizit formuliert; vgl. dazu und zum Aufbau der Sprache:

> „One of the merits of this form of presentation is the gradual building up of mathematical notions and common forms of procedure without any apparent break from common sense." (Brown, 1969, xii)

Im Folgenden werden die sog. *Verbindungstheoreme* behandelt, nämlich Theorem 8 und 9 des Indikationenkalküls. Denn es gilt eben zu beachten, dass Brown die Primäre Algebra als arithmetische Algebra abfasst, dass die Algebra nicht willkürlich ins Paradies der mathematischen Freiheit hinein entworfen ist, sondern auf einer Arithmetik aufruht und die algebraischen Initiale Abbilder von Theoremen sind, die für die Arithmetik bewiesenermaßen gelten. Anhand von Theorem 8 wird insbesondere ein Vergleich zwischen Fach- und Formelsprache des Indikationenkalküls gezogen, bei Theorem 9 steht neben der Präzision der metasprachlichen Formulierung noch der Beweis im Fokus des Interesses, der sowohl das arithmetische Substitutionsverfahren als auch die Anwendung von (mindestens) fünf der ersten sieben Theoreme zeigt. Diese (konkrete) *Verwendung* der Theoreme 1, 2, 5, 6 und 7 – zuzüglich des Theorems 3 und der Kanons 3, 4 und 6 – ihre schlichten *Formulierungen* wesentlich; in Kapitel 8 wird dieser doppelte Zugriff auf die Theoreme noch um einen dritten ergänzt, nämlich die *Beweise* der Theoreme, die ebenfalls ihre Bedeutung zu erschließen helfen.

Klassifikation von Expressionen und Werten Die in Chapter 4 und 6 vereinbarten Bezeichnungen zur *Klassifikation von Expressionen* können zur Bestimmung der aus den Symbolisierungen der Theoreme 8 und 9 genommenen Expressionen verwendet werden: Im Kontext konkreter arithmetischer Expressionen genügt – im Gültigkeitsbereich von Theorem 1 – die Unterscheidung zwischen *dominanten* und *rezessiven* Expressionen, vgl. Chapter 4 Section „A classification of expressions" (Brown, 1969, 19): Das heißt die (zweiwertige) Unterscheidung zwischen Expressionen, die den dominanten Wert, also den markierten Zustand, bezeichnen und Expressionen, die den rezessiven Wert, also den unmarkierten Zustand bezeichnen; vgl. zu dieser *Klassifikation der beiden arithmetischen Werte*:

> „Call the value of $\mathfrak{m}$ a dominant value, and call the value of $\mathfrak{n}$ a recessive value." (Brown, 1969, 15)

Dabei ist $\mathfrak{m}$ ein Indikator für Indikatoren des markierten Zustands und $\mathfrak{n}$ ein Indikator für Indikatoren des nicht markierten Zustands. Ein weiter gefasster Kontext, der insbesondere meta-arithmetische und algebraische Expressionen umfasst, vgl. Chapter 6 Section „A further classification of expressions" (Brown, 1969, 37), verlangt die Unterscheidung zwischen *integralen*, *disintegralen* und *konsequentiellen* Expressionen: Das heißt die (letztlich dreiwertige) Unterscheidung zwischen

Expressionen, die den markierten Zustand bezeichnen, den unmarkierten Zustand oder einen Zustand, der in nicht zu vernachlässigender Weise von den variablen Indikatoren abhängt.

Beispiele Gemäß Theorem 8 sind die algebraische und die meta-arithmetische Expression $\overline{\overline{p}|\ p}|$ bzw. jede arithmetische Expression dieser Form disintegral alias rezessiv. Demnach sind die algebraische und die meta-arithmetische Expressionen $\overline{\overline{\overline{p}|\ p}|}|$ und $\overline{p}|\,p$ bzw. jede arithmetische Expression von einer dieser Formen integral alias dominant. Dagegen sind von $\overline{\overline{pr}|\ \overline{qr}|}|$ und $\overline{\overline{p}|\ \overline{q}|}|\,r$ im Allgemeinen und insbesondere die Instanzen mit p und q als Ock in nicht zu vernachlässigender Weise von r abhängig; die letztgenannten Instanzen sind just zu r äquivalent; diese Expressionen sind also konsequentiell.

Theoreme der Verbindung: Theoreme 8 und 9 In der dritt- und zweit-letzten Section von Chapter 4 werden die beiden Verbindungstheoreme fachsprachlich und formelsprachlich formuliert und bewiesen, nämlich das *invariance*- und das *variance*-Theorem; die beiden formelsprachlichen Fassungen werden in Chapter 5 der Primären Algebra zu ihren Initialen gemacht.[48]
In beiden Theoremen wird die Äquivalenz zweier Expressionen formuliert mit folgendem den Namen gebenden Unterschied: In Theorem 8 wird für eine ganze Klasse arithmetischer Expressionen, die allesamt von einer bestimmten Form bzw. eines gewissen Musters sind, gezeigt, dass sie jeweils äquivalent zu Ock sind; in Theorem 9 dagegen wird zu Expressionen einer bestimmten Form bzw. eines gewissen Musters eine jeweils äquivalente, anders ge-form-te Expression angegeben. Der Wert der ge-muster-ten arithmetischen Expressionen ist also im achten Theorem eine Invariante bezüglich der konkreten Ausformung, im neunten Theorem dagegen ist er variant.
Die beiden Theoreme 8 und 9 sind unabhängig voneinander, insofern ihre Beweise nicht aufeinander rekurrieren. Dabei ist Theorem 8 im Wesentlichen wie Theorem 9 zu beweisen, nämlich mittels Fallunterscheidung.

7.3.2 Theorem 8. Invarianz

> „**Theorem 8. Invariance**
> *If successive spaces* s_n, s_{n+1}, s_{n+2} *are distinguished by two crosses, and* s_{n+1} *pervades an expression identical with the whole expression in* s_{n+2}*, then the value of the resultant expression in* s_n *is the unmarked state.*
> In any case, $\overline{\overline{p}|\ p}| = \quad$.“ (Brown, 1969, 22)

48 Vgl. (Brown, 1969, 24): „The last two theorems [das sind die Theoreme 8 und 9] will serve as a gate of entry into a new calculus. We call them theorems of connexion.“

Fach- versus Formelsprache Im Folgenden wird es um die Spezialisierungen gehen, die Brown durch „In any case“ schlicht angezeigt hat. Theorem 8 ist also die Beschreibung einer Äquivalenz mittels der LoF-Fachsprache. Dieser fachsprachlichen Beschreibung folgt eine formelsprachliche, wobei die formelsprachliche der fachsprachlichen nicht adäquat ist. Denn ist zunächst von drei Räumen s_n, s_{n+1}, s_{n+2} bei nicht näher bestimmtem n die Rede, so erfolgt die Symbolisierung speziell für $n = 0$. Dafür ist zu beachten, dass man in kanonischer Weise das Gleichheitszeichen als im Raum s_0 stehend erachtet. Die Expression $\overline{\overline{p}\rceil p}\rceil$ steht also (eigentlich erst) dann im Raum s_n, falls er von genau n (weiteren geschriebenen) Kreuzen umgeben ist (vgl. Brown, 1969, 7). Die Unbestimmtheit von n in der fachsprachlichen Formulierung ist in der formelsprachlichen dadurch erfasst, dass die für s_0 symbolisierte Äquivalenz dem arithmetischen Substitutionsprinzip zufolge auch im Raum s_n mit unbestimmtem n angewandt werden darf. Die Äquivalenz in der Symbolisierung ist also – zumindest in diesem Punkt – prototypisch für die zu symbolisierende Äquivalenz der fachsprachlichen Beschreibung.
Auf einen anderen, die formelsprachliche von der fachsprachlichen Formulierung unterscheidenden und nun zu besprechenden Punkt hat Brown selbst in den Notes zu Chapter 4 immerhin bereits zum Teil hingewiesen. Betrachten wir also den Spezialfall $n = 0$, so ist durch „*If successive spaces* s_n, s_{n+1}, s_{n+2} *are distinguished by two crosses*“ zunächst einmal folgende Grundsituation beschrieben, $\overline{\overline{s_{n+2}}\rceil s_{n+1}}\rceil s_n$, in der die Benennungen und nicht die Inhalte der Räume expliziert sind. In dem nächsten Teil der fachsprachlichen Beschreibung „s_{n+1} *pervades an expression identical with the whole expression in* s_{n+2}“ wird über den Inhalt von s_{n+2}, den ich wie Brown mittels p bezeichne, gesagt, dass er in s_{n+1} ebenfalls auftritt; es ist dabei nicht gesagt, dass p abgesehen vom ebenfalls bereits beschriebenen Inhalt $\overline{p}\rceil$ der *ganze* Inhalt in s_{n+1} ist, dass also s_{n+1} von $\overline{p}\rceil p$ abgesehen keinen weiteren Term q *durchdringen* (pervades) würde (vgl. Brown, 1969, 7). Man beachte dazu folgende Stelle in den Notes zu Chapter 4:

> „It will be observed that the symbolic representation of theorem 8 is less strong than the theorem itself. The theorem ist consistent with $\overline{\overline{p}\rceil pq}\rceil =$,
> whereas we prove the weaker version $\overline{\overline{p}\rceil p}\rceil =$.
> The stronger version is plainly true, but we shall find that we are able to demonstrate it as a consequence in the algebra. We therefore prove, and use as the first algebraic initial, the weaker version.“ (Brown, 1969, 86)

Die fachsprachliche Formulierung und Kanon 1 erlauben also eine weitere Expression q in s_{n+1}. Was für den Raum s_{n+1} gilt, könnte aber gleichermaßen für s_n gelten, demnach wäre $\overline{\overline{p}\rceil pq}\rceil$ nicht notwendigerweise die ganze Expression in s_n und würde von $\overline{\overline{p}\rceil pq}\rceil$ abgesehen eventuell noch ein weiterer Term r von s_n durchdrungen werden; die dementsprechende Äquivalenz in s_n könnte folgendermaßen symbolisiert werden: $\overline{\overline{p}\rceil pq}\rceil r = r$. Offensichtlich ist die von Brown angegebene

Symbolisierung eine Instanz meiner Symbolisierung und ist meine Symbolisierung mittels Browns Symbolisierung sofort demonstriert.
Ich möchte mit meinem Hinweis lediglich deutlich machen, dass Browns formelsprachliche Formulierung die fachsprachliche nicht unmittelbar abbildet bzw. die fachsprachliche Formulierung nicht besonders präzise ist. Diesbezüglich ist weiters zu betrachten, dass in „*the value of the resultant expression in* s_n" das Genitiv-Objekt, nämlich „*the resultant expression in* s_n", nicht geeignet bzw. nicht präzise (genug) beschrieben ist. Browns Formulierung muss restriktiv interpretiert werden. Als resultierende Expression in s_n soll nämlich nur $\overline{\overline{p}|\,pq}|$ bzw. $\overline{\overline{p}|\,p}|$ gelten, auch wenn das Vorhandensein anderer Expressionen in s_n nicht ausgeschlossen ist. Die Expressionen der Form $\overline{\overline{p}|\,pq}|\,r$ sind aber nur für den Fall $r =$ (wie durch das Theorem behauptet) äquivalent zu Ock.

Eine Bemerkung zum Beweis Bereits in den ersten nicht am Formalen besonders orientierten Mathematikvorlesungen an Universitäten – eventuell bereits im Mathematikunterricht an Gymnasien – würde man bspw. ‚Der Beweis ist eine leichte Übung.' sagen und eventuell noch den Hinweis ‚Beweisen Sie mittels Fallunterscheidung nach r.' geben. In LoF dagegen ist der Beweis explizit gegeben; er ist im Detail allerdings einfacher als der nach dem gleichen Muster abgearbeitete Beweis von Theorem 9, der nachfolgend behandelt wird. In zwei Punkten ist die Behandlung der einzelnen Fälle der Fallunterscheidung simpler: Zum einen wird die jeweilige Instanz des linken Terms der betrachteten symbolisierenden Gleichung direkt in den rechten Term, nämlich Ock, übergeführt und zum anderen kann dies allein mittels der *order*-Modifikation, wonach $\overline{\overline{\;\,}|}|$ (restlos) getilgt werden darf, erfolgen.

7.3.3 Theorem 9. Varianz

> „**Theorem 9. Varianz**
> *If successive spaces* s_n, s_{n+1}, s_{n+2} *are arranged so that* s_n, s_{n+1} *are distinguished by one cross, and* s_{n+1}, s_{n+2} *are distinguished by two crosses* (s_{n+2} being so in two divisions)*, then the hole expression* e *in* s_n *is equivalent to an expression, similar in other respects to* e*, in which an identical expression has been taken out of each division of* s_{n+2} *and put into* s_n*.*
> In any case, $\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}| = \overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\,r$." (Brown, 1969, 22f.)

Fach- versus Formelsprache Das Verhältnis zwischen Fach- und Formel-Sprache ist ähnlich wie in der Formulierung von Theorem 8 und das „In any case" ist erneut eine starke Spezialisierung. Durch „*If successive spaces* s_n, s_{n+1}, s_{n+2} *[...]* (s_{n+2} being so in two divisions)" ist zunächst einmal folgende Grundsituation beschrieben, $\overline{\overline{s_{n+2}}|\,\overline{s_{n+2}}|\,s_{n+1}}|\,s_n$, in der erneut die Benennungen und nicht die

Inhalte der Räume expliziert sind.
Diesmal bekommt die ganze Expression in s_n eine eigene Bezeichnung, nämlich e, und e vermutlich wegen *expression*. Aber ist die Formulierung „the hole expression e in s_n" wirklich verständlich? Ist sie nicht etwa fragwürdig?
Meines Erachtens ist dieser Beschreibung eine *Taufsituation* implizit: Die *ganze Expression in* s_n (hole expression in s_n) bekommt die Bezeichnung e. Es könnte aber auch davon die Rede sein, dass eine zusammengesetzte Expression e in s_n steht und er eben als Ganzes interessieren soll und nicht nur einer seiner Teile. Es könnte e aber auch eine zusammengesetzte Expression sein, von der nur der Teil interessiert, der in s_n steht. Man könnte sich auch schlicht darüber wundern, dass von einer Expression e die Rede ist, obwohl diese Bezeichnung nicht vergeben worden ist. Mit anderen Worten: Meines Erachtens läuft Brown immer wieder Gefahr, es in der Anwendung von Chapter 3 Kanon 2 „Contraction of reference" zu übertreiben. Der Austausch zwischen Autor und Leser soll nicht nur präzise sein, sondern er darf dem Kanon zufolge so pragmatisch wie möglich sein. Demnach darf eine Anweisung kurz und knapp erfolgen, sie muss allerdings verständlich bleiben (vgl. Brown, 1969, 8): „*[L]et injunctions be contracted to any degree in which they can still be followed.*". Um es nochmals zu sagen: Den Anweisungen Browns lässt sich nicht immer einfach folgen, da sie oft mehrfach auslegbar sind.
Kommen wir nun zurück auf die m. E. intendierte Lesart, wonach e die Bezeichnung für die ganze Expression in s_n ist. Dann ist die Expression e, so die Behauptung von Theorem 9, äquivalent zu einer in beschriebener Weise modifizierten Expression; „*an expression, similar in other respects to* e*, in which an identical expression has been taken out of each division of* s_{n+2} *and put into* s_n"; Browns Symbolisierung lautet: $\overline{\overline{p\,r}\ \overline{q\,r}} = \overline{\overline{p}\ \overline{q}}\,r$.
Die gesamte Expression e steht im Raum s_n, dem äußersten der drei Räume s_n, s_{n+1}, s_{n+2}. Dabei ist e gewissermaßen von innen nach außen geklammert, insofern man nämlich den Term von innen nach außen hin auswertet, also zunächst den Wert bezogen auf s_{n+2} bestimmt, dann bezüglich s_{n+1}, dann bezüglich s_n.[49]
Es wird also die Äquivalenz der Terme $\overline{\overline{p\,r}\ \overline{q\,r}}$ und $\overline{\overline{p}\ \overline{q}}\,r$ betrachtet, so sie im Raum s_n auftreten, bei nicht näher spezifiziertem n. Die formelsprachliche Variante dagegen erfasst nur den Fall für $n = 0$, da der Raum s_n als Index die Anzahl n an Kreuzen trägt, die von s_0 ausgehend nach innen gekreuzt werden müssen, um ihn zu erreichen (vgl. Chapter 2 Section „Depth"). Obwohl für s_0 formuliert, dürfen die algebraischen Initiale in allen positiv und endlich indizierten Räumen verwendet werden. Der Raum s_0 ist selbst ein solcher Kontext, aus dem die Gleichungen herausgenommen werden (been taken out) dürfen, um sie dann in einen Raum s_n zu setzen, wobei $n = 0$ nicht gelten muss.

49 Vgl. (Brown, 1969, 15–18) dazu das im Beweis von Theorem 3 verwendete Verfahren zur Wertbestimmung arithmetischer Expressionen, das Brown im Anschluss an den Beweis zudem konkret illustriert. Vgl. dazu Chapter 8 Section „Indicative space".

Nehmen wir Browns Bezeichnungen auf und ergänzen noch t, u als Symbole für weitere Expressionen, so könnte in s_n bzw. für $n = 0$ oder genauer: für „the hole expression e in s_n“ gelten:[50] $e := \overline{\overline{pr}\rceil\;\overline{qr}\rceil\,t}\rceil\,u$.
Zugegeben, die Teilexpression u von e ist unerheblich, da die Modifikation an e in geeigneter Weise beschrieben ist; mit anderen Worten: Für den Fall von $t =$ ist offensichtlich die von Brown angegebene Symbolisierung eine Instanz meiner Symbolisierung und ist meine Symbolisierung mittels Browns Symbolisierung sofort demonstriert. Dieserart stört die Teilexpression u in s_n die Aussage von Theorem 9 nicht wirklich.
Last, not least ist die formelsprachliche Formulierung eine Gleichung und dadurch der in beide Richtungen lesbare Hinweis auf die Äquivalenz zweier Expressionen; dagegen ist die fachsprachliche Formulierung von Theorem 9 und auch 8 prima facie nur eine *wenn-dann*-Verknüpfung und damit nur in eine Richtung lesbar. Secunda facie verliert die Einseitigkeit (viel) an Relevanz, denn im wenn-Teil ist lediglich die Situation grob beschrieben, für die im dann-Teil ebenfalls die symmetrische Äquivalenz zwischen zwei Expressionen behauptet ist. Während in der (algebraisch gearteten) Formelsprache beide Expressionen schlicht angegeben sind, wird in der (meta-arithmetischen) Fachsprache lediglich die Herkunft einer Expression im Hinblick auf einen anderen beschrieben. Genauer: Die in der Gleichung rechts symbolisierte Expression wird als aus der linken Expression gewonnen beschrieben, zumindest insofern durch die Phrase „has been taken out“ eben eine *Herausnahme* und keine *Hineinnahme* formuliert ist. Bei vorgegebener rechter Expression ist durch die Gleichung die Äquivalenz mit der linken Expression bereits mitformuliert; dagegen muss die Herausnahme zunächst zur Hineinnahme umgedacht werden, der dann wieder eine Herausnahme folgt, wonach insgesamt die beiden Expressionen als zueinander äquivalent gelten dürfen. Browns fachsprachlicher Formulierung sind gewissermaßen noch Reste der sog. arithmetischen Lesart von Gleichungen implizit bzw. inhärent, wonach Gleichungen nur von links nach rechts gelesen und als *to-do*-Aufgaben verstanden werden. Links des Gleichheitszeichens steht demgemäß dann eine Rechen-Anweisung und rechts ist deren Ergebnis zu notieren. In diesem Sinne ist die Herausnahme die Form des im Theorem verlangten und durch das Theorem gerechtfertigten *Berechnens*. Dem algebraischen Blick dagegen zeigt sich die Gleichung als bezüglich des Werts *ausbalanciert*.

Heikler Mangel an Präzision Die gemäß fachsprachlicher Formulierung mögliche Teilexpression t in s_{n+1} stört dagegen für $t = \urcorner$ und $r = \urcorner$ die Aussage von Theorem 9 durchaus: Dann gilt nämlich einerseits $\overline{\overline{p\urcorner}\rceil\;\overline{q\urcorner}\rceil\,\urcorner}\rceil =$ und andererseits $\overline{\overline{p}\rceil\;\overline{q}\rceil\,\urcorner}\rceil\urcorner = \urcorner$.

50 Ich lasse s bezüglich der alphabetischen Ordnung als Nachfolger von p, q, r aus, weil s schon als Bezeichnung für *space* verwendet wird.

Gegen meine vorausgegangene Kritik an der fachsprachlichen Präzision könnte ich einwenden, dass Theorem 9 immerhin *ein arithmetisches Theorem* sei: Meine algebraisch gehaltene Widerlegung, bei der zusätzliche Teil-Terme durch Buchstaben symbolisiert seien, sei arithmetisch betrachtet unerheblich, insofern der Fall $\mathtt{t} = \overline{\ \ }\rceil$ voraussetzt, dass durch $\mathtt{t}$ mindestens ein weiteres Kreuz in s_{n+1} repräsentiert ist und s_{n+2} demnach in mindestens drei Unterteilungen sei. Meine Widerlegung beachtet also Browns Formulierung nicht genau, nämlich „s_{n+1}, s_{n+2} *are distinguished by two crosses* (s_{n+2} being so in two divisions)". Die Anzahl-Angaben seien nämlich nicht im möglicherweise durchaus kanonischen Sinne als *mindestens*-Angaben, sondern als *genau*-Angaben zu verstehen: Es ist also (implizit) von genau zwei unterscheidenden Kreuzen und von s_{n+2} in genau zwei Unterteilungen die Rede. Das Theorem 9 sei, so mein Einwand gegen meine Widerlegung von Theorem 9, also arithmetisch betrachtet in Ordnung, denn für $\mathtt{t}$ und $\mathtt{u}$ ist nur Ock selbst als arithmetische Instanz möglich, weil sonst s_n, s_{n+1} und s_{n+1}, s_{n+2} ein weiteres und dahingehend unerlaubtes Mal unterschieden würden.
So ganz kann mir mein Einwand gegen meine Widerlegung allerdings nicht gefallen, sprich er kann meine Bedenken gegenüber einer aus- oder zureichenden Präzision nicht ganz zerstreuen. Denn in Theorem 8 und 9 wären, wenn man die Anzahl an Unterscheidungen – zuzüglich der durch die arithmetischen Instanzen der (Form-)Parameter hinzukommenden – jeweils genau und nicht nur als mindestens-Angaben nehmen müsste, nur Ock-Instanzen der Parameter möglich. Natürlich ist dem nicht so, denn dann wären sie als algebraische Initiale nicht besonders nützlich.
Kurz: Für die fachsprachliche Formulierung ist nicht nur die von Brown wohl intendierte Lesart möglich, sondern auch Lesarten von falschem Gehalt. Darauf wird erstens in der LoF-Sekundärliteratur an keiner mir bekannten Stelle hingewiesen und das ist zweitens ein Grund für die Emanzipation der Formelsprache gegenüber der Fachsprache. Denn obwohl die Formulierungen letzterer bereits ziemlich ausladend sind, sind die Formulierungen ersterer präziser.
Eine für die Primäre Arithmetik und zudem für die Primäre Algebra gültige Gleichung zur tatsächlich fachsprachlich formulierten Voraussetzung lautet bspw. folgendermaßen: $\overline{\overline{\mathtt{pr}}\rceil\overline{\mathtt{qr}}\rceil\mathtt{t}}\rceil\mathtt{u} = \overline{\overline{\mathtt{p}}\rceil\overline{\mathtt{q}}\rceil\mathtt{t}}\rceil\overline{\overline{\mathtt{r}}\rceil\mathtt{t}}\rceil\mathtt{u}$. Denn dies ist für die Instanz mit $\mathtt{t} =$ wegen $\overline{\overline{\mathtt{r}}\rceil}\rceil = \mathtt{r}$ unter Vernachlässigung von $\mathtt{u}$ die Symbolisierung Browns. Die Instanz mit $\mathtt{t} = \overline{\ \ }\rceil$ lässt sich auf $\mathtt{u} = \mathtt{u}$ vereinfachen, da durch $\mathtt{t}$ in den drei Unterteilungen von s_{n+1} (für $n = 0$) jeweils der dominante Wert angezeigt ist, dessen Bild dann eine – insbesondere gegenüber $\mathtt{u}$ – rezessive Expression ist.

Eine Analyse zum Beweis Der Beweis von Theorem 9 wie auch der von Theorem 8 ist eine simple Fallunterscheidung, wie sie bereits Gegenstand der Schulmathematik ist. Das ist sie bspw. in Aufgaben der Form: Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a die Gleichung $(a - |a|) \cdot (a + |a|) = 0$ gilt. Diese Aufgabe kann von den Schülern durch eine Fallunterscheidung nach a erfolgreich bearbeitet werden: Es ist

a entweder nicht-negativ oder negativ bzw. entweder gilt $a = |a|$ oder $a = -|a|$ und in beiden Fällen des Entweder-oder gilt für a die zu zeigende Gleichung; letzteres wird insbesondere durch den Hinweis geliefert, dass das Produkt jeder beliebigen reellen Zahl mit Null (unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren) gleich Null ist. Andere Probleme wird der Schüler mit der Aufgabe kaum haben. Er macht einfach eine Fallunterscheidung und weist darauf hin, dass ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist. Damit ist der Beweis erbracht.
Doch was ist für eine Fallunterscheidung eigentlich zu beachten, zu können, zu beherrschen? Wie ist die Fallunterscheidung bewiesen oder plausibilisiert worden? Ich möchte diesen beiden Fragen, die sich auf die Schulpraxis beziehen, nicht nachgehen, sondern mich Browns Vorgehen zuwenden. Beachten wir nun also, dass Boolesche Algebren spätestens seit (Huntington, 1904) bekannt waren und dass Brown ihnen lediglich eine nicht notwendigerweise adäquate, sondern eine möglichst einfache Arithmetik zukommen lassen wollte, woraufhin sie eventuell in einem neuen Licht erscheinen mögen. Von der solchermaßen entworfenen Arithmetik ausgehend, lässt sich die Primäre Algebra dann *konzeptionell* bzw. *konzeptuell* als arithmetische Algebra und *inhaltlich* als Sonderform Boolescher Algebren entwickeln.
Zunächst ist die Primäre Algebra wohl als *konkrete* Sonderform Boolescher Algebren gedacht, da sie zwei-wertig ist. Der in Chapter 11 behandelte Teil des Indikationenkalküls spielt eine Sonderrolle, er ist alledings nicht Teil der Primären Algebra. Sie ist zudem *Sonderform*, da sie das Operanden-Operatoren-Paradigma in puncto festgelegter Stellenzahl unterläuft.

Brown setzt die *Fallunterscheidung* und gleichermaßen die *Substitution* in `LoF` nicht einfach voraus (vgl. Brown, 1969, 82f.), sondern versichert sich dieses Verfahrens mittels der Theoreme 1 bis 7, in deren Hintergrund die in den Kanons 1 bis 6 verabschiedeten Vereinbarungen wirken. Zu zeigen ist in Theorem 9 – gemäß Browns Lesart seiner fachsprachlichen Formulierung und im Spezialfall $n = 0$, der prototypisch für jedes andere nicht-negative und ganzzahlige n ist – die zitierte Gültigkeit der Gleichung $\overline{\overline{pr}\rceil \; \overline{qr}\rceil}\rceil = \overline{\overline{p}\rceil \; \overline{q}\rceil}\rceil r$ für die Primäre Arithmetik.
Für den Beweis genügt die Fallunterscheidung nach r, es genügt also die beiden für r einzig möglichen Fälle $r = \urcorner$ und $r = \quad$ nacheinander zu betrachten und jeweils die Gültigkeit der Instanz zu erweisen. Brown expliziert im Beweis verschiedene Prinzipien, die er zuvor bereits als Theoreme bewiesen hat und auf die wir uns bei Beweisen der Fallunterscheidung zumeist stillschweigend berufen.

7.3.4 Der Beweis von Theorem 9

Betrachten wir also Browns Beweis von Theorem 9 stückweise und beachten dabei insbesondere Browns Hinweise auf zuvor bewiesene Theoreme, das sind nämlich namentlich die Theoreme 1, 2, 5, 6 und 7 zuzüglich Initial I2 und Kanon 3.

Des Beweises erster von drei Teilen

„Let $r = \overline{\;}|$.

Thus	$\overline{\overline{pr}\|\ \overline{qr}\|}\|$	$=$	$\overline{\overline{p\,\overline{\;}\|}\|\ \overline{q\,\overline{\;}\|}\|}\|$	substitution
		$=$	$\overline{\overline{\overline{\;}\|}\|\ \overline{\overline{\;}\|}\|}\|$	theorem 2 (twice)
		$=$	$\overline{\;}\|$	order (twice)
and	$\overline{\overline{p}\|\ \overline{q}\|}\|\,r$	$=$	$\overline{\overline{p}\|\ \overline{q}\|}\|\,\overline{\;}\|$	substitution
		$=$	$\overline{\;}\|$	theorem 2.
Therefore, in this case,	$\overline{\overline{pr}\|\ \overline{qr}\|}\|$	$=$	$\overline{\overline{p}\|\ \overline{q}\|}\|\,r$	theorem 7.“

(Brown, 1969, 23)

Offensichtlich besteht dieser Teil des Beweises aus den beiden Vereinfachungen der zunächst für den Fall $r = \overline{\;}|$ jeweils explizit hergestellten Instanzen der beiden Terme der zu erweisenden Gleichung. Dabei zeigt sich, dass die beiden Instanzen auf dieselbe Expression vereinfacht werden können und daher einander äquivalent sind. Brown gibt im Einzelnen folgende Hinweise, um auf die dem Prinzip der Fallunterscheidung inhärenten Schritte explizit hinzuweisen.
Auf die Vereinbarung über den zu betrachtenden Fall folgt die Herstellung der zugehörigen Instanz der linken Expression der zu erweisenden Gleichung; das dafür benötigte Tool gehört nicht Chapter 4, sondern Chapter 3 an.

Dritter Kanon. Vereinbarung über Substitution Der Hinweis „substitution“ gilt m. E. Kanon 3 „Convention of substitution“ in Chapter 3.

> „**Third canon. Convention of substitution**
> *In any expression, let any arrangement be changed for an equivalent arrangement.*“ (Brown, 1969, 8)

Dem substitution-Prinzip gemäß wird in der Expression $\overline{\overline{pr}|\ \overline{qr}|}|$ das Arrangement r in das – laut Annahme – äquivalente Arrangement $\overline{\;}|$ geändert. Das führt auf die Expression $\overline{\overline{p\,\overline{\;}|}|\ \overline{q\,\overline{\;}|}|}|$. Dabei ist *any arrangement* hier als *any subarrangement* zu lesen, insofern die Möglichkeit der Änderung nicht nur das Arrangement, das die Expression insgesamt liefert, betrifft, sondern für jeden Teilterm gilt.
Meines Erachtens ist Browns schlichte Begründung „substitution“ etwas unglücklich formuliert, wenn auch nicht falsch oder unpräzise. Die Formulierung ‚substitution (twice)‘ wäre m. E. besser gewesen. Denn es ist in der deutschen Übersetzung (Brown, 1999) die algebraische substitution-Regel falsch übersetzt, wonach bei ihrer Anwendung nämlich *jedes* Auftreten einer Variablen in einem Term substituiert werden müsse. Ein kritischer Blick auf die Demonstration von Konsequenz 5 (alternativ auch Konsequenz 2) zeigt, dass Brown selbst dort in aa nur *ein* Auftreten

von $\mathfrak{a}$ durch das äquivalente $\overline{\overline{\mathfrak{a}}|}|$ substituiert: $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \overline{\overline{\mathfrak{a}}|}|\,\mathfrak{a}$. Diese von Brown gepflegte und in der englischen Formulierung auch derart lesbare substitution-Regel ist die gängige replacement-Regel der Gleichungslogik.

Die arithmetische Substitution steht der algebraischen Substitution Pate; vgl. (Brown, 1969, 26) für die dahingehende *Rechtfertigung* (justification). Bei der arithmetischen Substitution hängt es nun von der Lesart ab, ob sie für die betrachtete Umformung im Beweis von Theorem 9 einmal oder zweimal angewandt werden muss, denn „any arrangement" kann sich – um es mit einer in der Semiotik durchaus üblichen Unterscheidung zwischen *Token* und *Typ* zu sagen – auf ein Token, also auf ein einzelnes Auftreten, oder auf den Typ, also jedes Auftreten, eines Arrangements in dem konkret betrachteten „any expression" beziehen. Browns Formulierung lässt offen, ob die einmalige Anwendung der substitution-Regeln nur ein einzelnes oder jedes oder – als Möglichkeit zwischen diesen Extremen – einige Auftreten zu ändern erlaubt.
Ein kritischer Blick in den Beweis von Theorem 1 zeigt, dass Brown dort – wie im algebraischen Fall – einmalige Auftreten ändert, wonach im Beweis von Theorem 9 an zu betrachtender Stelle ein *(twice)* sinnfällig ergänzt werden dürfte. Aus der strengen Auslegung der substitution-Regel, nämlich stets nur ein Auftreten zu ändern, ergeben sich allerdings abgeleitete substitution-Regeln, bei Belieben für jede bestimmte zu ändernde endliche Anzahl eine eigene Regel oder etwas laxer formuliert: Es kann eine Regel abgeleitet werden, deren Anwendung *einige Auftreten* ändert; diese eine Regel könnte der von Brown formulierte Kanon 3 sein.

Theorem 2. Inhalt Der Hinweis „theorem 2 (twice)" gilt m. E. dem content-Theorem (T2):

> „**Theorem 2. Content**
> *If any space pervades an empty cross, the value indicated in the space is the marked state.*" (Brown, 1969, 13)

Browns formelsprachliche Variante dieser fachsprachlichen Formulierung lautet: $\mathfrak{p}\mathfrak{c}_{\mathfrak{e}} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{e}}$, wobei die Expression $\mathfrak{p}\mathfrak{c}_{\mathfrak{e}}$ zunächst folgendermaßen beschrieben ist:

> „an expression consisting of a part $\mathfrak{p}$ in a space with an empty cross $\mathfrak{c}_{\mathfrak{e}}$". (Brown, 1969, 14)

In der Expression $\overline{\overline{\mathfrak{p}\urcorner}|\;\overline{\mathfrak{q}\urcorner}|}|$ substituiert Brown, worauf nicht mehr durch ‚substituiert' eigens hingewiesen wird, die nach Theorem 2 jeweils zu $\urcorner$ alias $\mathfrak{c}_{\mathfrak{e}}$ äquivalenten arrangements $\mathfrak{p}\urcorner$ und $\mathfrak{q}\urcorner$ durch $\urcorner$. Den Notationskonventionen gemäß führen diese Substitutionen auf die Expression $\overline{\overline{\urcorner}|\;\overline{\urcorner}|}|$. Dabei wird dem Leser zugemutet, dass er sich (mittlerweile durch die Erfahrungen mit der LoF-Mathematik) von verbalen Beschreibungen wie „empty cross" gelöst hat und mit Symbol(isierung)en wie $\urcorner$ zurechtkommt. Dabei ist die Formulierung pc_e durchweg meta-arithmetisch bzw. einheitlich synkopiert. Die Formulierung $p\urcorner$ dagegen ist eine Mischform, insofern sie aus einem synkopiertem Zeichen, nämlich p für *part* und gleichermaßen für *parameter*, und einem arithmetischen Zeichen, nämlich $\urcorner$, zusammengesetzt ist.

Initial 2. Order Der Hinweis „order (twice)“ gilt m. E. Initial 2 „Order“ (I2), nämlich $\overline{\urcorner}| =\quad$, dem zweiten der beiden arithmetischen Initiale, wonach also $\overline{\urcorner}|$ zu dem äquivalenten void aufgehoben (cancellation) bzw. umgekehrt void zu dem äquivalenten $\overline{\urcorner}|$ kompensiert (compensation) werden kann; vgl. den Anfang von Chapter 4 (Brown, 1969, 12) sowie das Ende von Chapter 3 (Brown, 1969, 11). Brown substituiert, worauf nicht mehr explizit hingewiesen wird, in der Expression $\overline{\overline{\urcorner}|\;\overline{\urcorner}|}|$ beide $\overline{\urcorner}|$ durch das (jeweils) äquivalente void; den Notationskonventionen gemäß führt dies auf die von Brown behauptete Expression $\urcorner$.

Betrachten wir nun die Herstellung und nachfolgende Vereinfachung der ersten Instanz der rechten Expression der zu erweisenden Gleichung. Die Herstellung erfolgt erneut explizit mittels „substitution“ des diesmal einzigen Auftretens von r in $\overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\,r$ durch $\urcorner$; das führt auf die Expression $\overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\urcorner$. Diese Expression wird als Instanz der Symbolisierung $pc_e = c_e$ von Theorem 2 erkannt und vereinfacht sich demnach sofort auf c_e alias $\urcorner$.

Theorem 7. Konsequenz Der Hinweis „theorem 7“ gilt m. E. dem consequence-Theorem (T7), das ich zuzüglich seiner formelsprachlichen Variante zitiere:

> „**Theorem 7. Consequence**
> *Expressions equivalent to an identical expression are equivalent to one another.*
> In any case, if $x = v$ and $y = v$, then $x = y$.“ (Brown, 1969, 21)

Eine modifizierte Notation dieses Theorems, die für die LoF-Mathematik – genauer: das Äquivalenzzeichen – erlaubt ist, nämlich ‚$x = v$ und $v = y$, also $x = y$‘, besagt die Transitivität des Äquivalenzzeichens; die von Brown formulierte Version dagegen ist die *Komparativitätsregel*, wobei v das sog. *tertium comparationis* ist.

Im Beweis von Theorem 9 ist vor dem Hinweis auf Theorem 7 bereits gezeigt, dass sich für den Fall $r = \urcorner$ die (Instanzen der) beiden Expressionen $\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}|$ und $\overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\,r$ auf dieselbe Expression $\urcorner$ vereinfachen lassen. Daraus folgt dann für $r = \urcorner$ die Äquivalenz $\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}| = \overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\,r$ tatsächlich per Komparativität gemäß Theorem 7. Die beiden Instanzen (alias x und y) und können jeweils durch Äquivalenzumformungen auf denselben Term (alias v) vereinfacht werden.

Des Beweises mittlerer von drei Teilen

„Now let $\mathrm{r} = \quad$.

Thus	$\overline{\overline{\mathrm{pr}}\vert\;\overline{\mathrm{qr}}\vert}\vert$	$=$	$\overline{\overline{\mathrm{p}}\vert\;\overline{\mathrm{q}}\vert}\vert$	substitution
and	$\overline{\overline{\mathrm{p}}\vert\;\overline{\mathrm{q}}\vert}\vert\,\mathrm{r}$	$=$	$\overline{\overline{\mathrm{p}}\vert\;\overline{\mathrm{q}}\vert}\vert$	substitution
Therefore, in this case,	$\overline{\overline{\mathrm{pr}}\vert\;\overline{\mathrm{qr}}\vert}\vert$	$=$	$\overline{\overline{\mathrm{p}}\vert\;\overline{\mathrm{q}}\vert}\vert\,\mathrm{r}$	theorem 7.“

(Brown, 1969, 23f.)

Im zweiten Teil des Beweises zeigt Brown, dass auch die Instanz für $\mathrm{r} = \quad$ von der Gleichung gilt; das geschieht auf die gleiche Weise wie bei der Instanz für $\mathrm{r} = \overline{\;\;}\vert$, wenn auch deutlich schneller, und verlangt daher keiner weiteren intensiven Betrachtung.

Interessant ist dann wieder der dritte Teil des Beweises, nämlich die Zusammenfügung und Zusammenfassung der Argumentation.

Des Beweises letzter von drei Teilen

„There is no other case of r,	theorem 1.
There is no other way of substituting any case of r,	theorems 5, 6.
Therefore, $\overline{\overline{\mathrm{pr}}\vert\;\overline{\mathrm{qr}}\vert}\vert = \overline{\overline{\mathrm{p}}\vert\;\overline{\mathrm{q}}\vert}\vert\,\mathrm{r}$ in any case.“	

(Brown, 1969, 23)

Der Tenor dieser drei Sätze ist: Es ist alles getan, insofern alle möglichen bzw. erlaubten Einzelfälle erschöpfend betrachtet sind; es ist jeweils die Äquivalenz der Instanzen erwiesen. Anderes ist allerdings durch die allgemeine bzw. generelle Formulierung nicht behauptet und also gilt die zu betrachtende Äquivalenz. Dieser letzte Schritt ist von Brown weder explizit begründet noch überhaupt explizit formuliert. Browns Hinweise explizieren lediglich, dass er alle möglichen bzw. erlaubten Einzelfälle betrachtet hat.

Theoreme der Vorgangsweise Der letzte Hinweis des dritten Beweisteils und damit des Beweises insgesamt, nämlich „theorem 5, 6“, gilt m. E. den Theoremen 5 und 6, die zusammen mit Theorem 7 die drei *Theoreme der Vorgangsweise* (theorems of procedure) bilden.

> „[T]hey justify the use of certain procedural contractions without which subsequent justifications might become intolerably cumbersome.“ (Brown, 1969, 24)

Diese Vorgehens- bzw. Verfahrensregeln garantieren die Richtigkeit einer Gleichung bestehend aus zwei identischen Indikatoren (Theorem 5), garantieren die Möglichkeit, zwei zueinander äquivalente Indikatoren durch einen dritten Indikator zu ersetzen (Theorem 6), und garantieren weiter, aus zwei Gleichungen einer bestimmten Form eine dritte Gleichung zu gewinnen (Theorem 7), genauer: Theorem 7 ist die Komparativitätsregel (vgl. S. 103).

Theorem 5. Identität Der Hinweis „theorem 5" gilt m. E. dem identity-Theorem (T5), der mittleren der drei Verfahrens-Regeln in Theoremform:

> „**Theorem 5. Identity**
> *Identical expressions express the same value.*" (Brown, 1969, 20)

Browns formelsprachliche Variante dieser fachsprachlichen Formulierung lautet inklusive ihres normalsprachlichen Zusatzes:

> „In any case, $x = x$." (Brown, 1969, 20)

Schauen wir also auf die ersten beiden Beweisteile zurück: Brown legt jeweils einen Wert für r fest, nämlich $r = \overline{}|$ bzw. $r = $, und substituiert dann in den beiden Termen der zu betrachtenden Gleichung, nämlich in $\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}|$ und $\overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|\,r$, jedes Auftreten von r durch den jeweiligen für r festgelegten Wert. Theorem 5 bringt m. E. zum Ausdruck, dass die anhand eines einzelnen Vorkommnisses von r getroffene Festlegung des Werts tatsächlich für alle im Kontext auftretenden r gilt:[51] Jedes in den beiden Termen in dem jeweiligen Kontext auftretende r ist vom selben Wert und damit nicht vom anderen; letzteres ist die Konsistenz der Repräsentation. Die *Konsistenz der Repräsentation* in der Primären Arithmetik und durch die Primäre Arithmetik werde ich im Anschluss an Theorem 6 behandeln.
Dass in *einem* Kontext *je zwei* Vorkommnisse eines identischen Symbols, also zwei Token eines Typs, zueinander äquivalent sind, also vom gleichen Wert, ist eine derart grundlegende Annahme für den Symbolgebrauch in der Mathematik, dass er nicht einmal in Schwartz' formalem System für eine beweistheoretische Untersuchung der Primären Algebra expliziert ist; vgl. (Schwartz, 1981) und Kapitel 4.
Bemerkenswerterweise möchte Brown m. E. durch Theorem 5 nicht nur die *Äquivalenz* als reflexive (2-stellige) Relation zwischen Termen zu verstehen geben, sondern diesbezüglich eher zu verstehen geben, dass sich die Referenz eines Symbols bzw. die Bedeutung eines Zeichens (im Sinne Simons) innerhalb eines Kontextes nicht ändert, sondern dieselbe bleibt.

---

51 Der Kontext ist allerdings nicht explizit ausgewiesen; der Autor ist darauf angewiesen, dass der Leser ihn erkennt.

Theorem 6. Wert Der Hinweis „theorem 6“ gilt m. E. dem value-Theorem (T6), der mittleren der drei Verfahrens-Regeln in Theoremform:

> „**Theorem 6. Value**
> *Expressions of the same value can be identified.*“ (Brown, 1969, 20)

Brown gibt keine geschlossene formelsprachliche Variante dieser fachsprachlichen Formulierung an; im Beweis betrachtet er allerdings zwischenzeitlich die Voraussetzung der Symbolisierung von Theorem 7: „Thus $x = v$ and $y = v$.“ (Brown, 1969, 20). In Theorem 7 schließt Brown auf $x = y$, in Theorem 6 auf eine (implizite) Erweiterungsform seines substitutions-Prinzips, nämlich die Möglichkeit x und y, die nach Voraussetzung im Wert übereinstimmen, gleichermaßen durch einen möglicherweise dritten Term zu substituieren. Im Hinblick auf seine Vorgaben ist das dann der Term v.
Damit ist Theorem 6 m. E. eine Umkehrung von Theorem 5. Gemäß Theorem 5 wurden nämlich die Vorkommnisse von r allesamt durch $\urcorner$ bzw. durch ersetzt. Liest man die entstehenden Gleichungen andersherum, so sind die $\urcorner$ bzw. durch r ersetzt worden. Das ist natürlich eine recht schwache Anwendung von Theorem 6, weil die als r identifizierten Terme nicht nur paarweise zueinander äquivalent waren, sondern zudem bereits identisch. Weiters werden in Folge von Theorem 6 bspw. durch den Term $\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}|$ auch solche arithmetischen Terme beschrieben, die an den beiden Vorkommnissen von r verschiedene, doch zueinander äquivalente Teilterme haben. Eine solche Instanz ist wegen $\overline{\urcorner}| =\quad$ der Term: $\overline{\overline{p\,\overline{\urcorner}|}|\;\overline{q\quad}|}|$, wobei void ausnahmsweise als Teilterm expliziert ist.
Gemäß Theorem 5 sind identische Expressionen zueinander äquivalent, gemäß Theorem 6 können äquivalente Expressionen miteinander identifiziert werden. Man beachte dabei: Weil nach Theorem 5 identische Expressionen äquivalent sind, kann Theorem 6 nicht die Erlaubnis formulieren, Expressionen miteinander zu identifizieren, die nicht äquivalent sind; das folgt aus der Konsistenz der Repräsentation *in der* Primären Arithmetik und *durch die* Primäre Arithmetik. Im Hinblick auf die für r betrachteten Werte gibt es gemäß der Theoreme 5 und 6 keine weiteren Instanzen der Terme $\overline{\overline{pr}|\;\overline{qr}|}|$ und $\overline{\overline{p}|\;\overline{q}|}|r$, die durch erlaubte Substitutionen erhalten werden könnten.
Der Indikationenkalkül zielt auf die Werte *hinter* den Symbolen bzw. auf die Bedeutungen der Zeichen ab. Sind nun Symbole zwar von verschiedener Gestalt, gelten jedoch dem gleichen Wert, so ist ihr Gestaltunterschied für die Primäre Arithmetik nicht von Relevanz.
Wirklich bemerkenswert ist, dass Brown durch Theorem 6 m. E. den doppelten Gebrauch, nämlich die beiden Lesarten, des Symbols $\urcorner$ rechtfertigt: Es ist das Symbol $\urcorner$ einerseits als ein *atomares* Zeichen, nämlich als (Eigen-)Name für den markierten Zustand lesbar, andererseits auch als ein *zusammengesetztes* Zeichen, nämlich als operatives Zeichen, dessen Argumentenbereich leer ist. Insofern der

Argumentenbereich leer ist, ist dort der unmarkierte Zustand implizit bezeichnet. Das Fehlen eines Symbols bzw. eines „signal“ (Brown, 1969, 3) wird von Brown als Zeichen (im Sinne J. Simons) bzw. als Signal (im Sinne Browns) verwendet: Der unmarkierte Zustand ist als *der nicht*-ausgezeichnete Zustand letztlich doch ausgezeichnet.[52] Wenden wir uns nun den Theoremen 1 bis 4 und damit den Darstellungstheoremen zu.

Theoreme der Darstellung Der letztverbliebene Hinweis des dritten Beweisteils und damit des Beweises insgesamt, nämlich „theorem 1“, gilt m. E. Theorem 1, das zusammen mit den Theoremen 2, 3 und 4 die vier *Theoreme der Repräsentation* (theorems of representation) bildet.

> „The first four theorems contain a statement of completeness and consistency of representation. Their proofs comprise a justification of the use of the primary arithmetic as a system of indicators of the states distinguished by the first distinction. We call them theorems of representation.“ (Brown, 1969, 24)

Wenn man so möchte, dann wird durch die *erste Unterscheidung* (first distinction) der 2-elementige Grundbereich der späteren Untersuchung konstituiert – und nur wenn man so möchte, da Brown diesen mengentheoretischen Zugang nicht eigentlich und eigentlich nicht bemüht. Durch den geeigneten Gebrauch des Symbols $\urcorner$ können beide *Werte* dargestellt werden, nämlich durch $\urcorner$ und $\overline{\urcorner}|$; eine Alternative zu letzterem ist   .
Auf die beiden ersten Repräsentationstheoreme weist Brown im Beweis von Theorem 9 explizit hin. Gemäß Theorem 1 ist jedes Arrangement aus endlich vielen Kreuzen eine *Expression* und durch Theorem 2 (vgl. S. 102), werden bestimmte Expressionen als Expressionen des *markierten Zustandes* erwiesen. Es ist dem agreement-Theorem (T3) gemäß die *Vereinfachung* einer Expression eindeutig und andersherum dem distinction-Theorem (T4) gemäß jede *Vermehrfachung* der einen einfachen Expression von jeder Vermehrfachung der anderen einfachen Expression verschieden, kurz: Die Primäre Arithmetik ist *vollständig* (complete) und *konsistent* (consistent).

Theorem 1. Form Der Hinweis „theorem 1“ gilt dem form-Theorem (T1) und damit dem grundlegenden Theorem der Primären Arithmetik:

52 In „Index of forms“ gibt Brown noch den Hinweis, dass die Theoreme 7, 6 und 1 jeweils „has a true converse“ (Brown, 1969, 138); m. E. gilt dies für die Theoreme 7 und 6, weil es für Theorem 1 gilt. Man beachte diesbezüglich, dass die Beweise für die Theoreme 7 und 6 von der *Behauptung* von Theorem 1 ausgehen, die allerdings von der *Voraussetzung* von Theorem 1 nicht zur Gänze verbürgt ist.

> „**Theorem 1. Form**
> *The form of any finite cardinal number of crosses can be taken as the form of an expression.*“ (Brown, 1969, 12)

Der Anwendung von T1 im Beweis von T9 liefert, dass bezüglich $\mathtt{r}$ nur die beiden Fälle $\mathtt{r} = \urcorner$ und $\mathtt{r} = \quad$ zu betrachten sind. Spätestens an dieser Stelle der Argumentation stellt sich allerdings (erneut) die Frage: Wofür steht das Symbol $\mathtt{r}$? Im Rückblick auf die fachsprachliche Formulierung von Theorem 9 kann als Antwort gegeben werden, dass $\mathtt{r}$ einen „identical expression [...] of each division of $\mathtt{s}_{n+2}$“ (Brown, 1969, 23) symbolisiert, kurz: Es symbolisiert $\mathtt{r}$ eine Expression. Brown verweist auf Theorem 1 und das besagt wie zitiert: Jede endliche Anzahl an Kreuzen kann als Expression betrachtet werden.
Im Hinblick auf die Formulierung in Theorem 9, wonach $\mathtt{r}$ eine Expression ist, ist dann aber der Hinweis auf Theorem 1 unnötig, da in Theorem 1 das als-Expression-betrachtet-werden(-können) die Behauptung ist und nicht die Voraussetzung, nämlich aus endlich vielen Kreuzen zu bestehen. Wie also geht insbesondere die Anwendung von Theorem 1 in Theorem 9 ein? Für die Beantwortung dieser Frage möchte ich aus den `LoF` folgenden Passus heranziehen:

> „We shall proceed to distinguish general patterns, called theorems, which can be seen through formal considerations of [the arithmetical] initials.“ (Brown, 1969, 12)

Die arithmetischen Initiale, die in Kapitel 7.3 im Zusammenhang mit dem arithmetischen Kalkül näher betrachtet werden, erlauben nur das Erzeugen und Vernichten von Kreuzen. Ausgehend von bestimmten Grundfiguren sind durch endlich viele Anwendungen der Grundregeln nur endliche Zeichenreihen ableitbar. Andersherum kann gemäß Theorem 1 jedes endliche cross-*Arrangement* als *Expression* betrachtet werden und ist dahingehend äquivalent zu $\urcorner$ und/oder $\quad$. Aus Theorem 3 und aus Theorem 4 folgt gleichermaßen, dass dies *und/oder* sogar eine *entweder-oder*-Verknüpfung ist, was insbesondere die Wohldefiniertheit von Chapter 3 Kanon 4 „Hypothesis of simplification“ liefert.

Im dritten und letzten Teil des Beweises von Theorem 9 kann tatsächlich konstatiert werden: „There ist no other case of $\mathtt{r}$“, da $\mathtt{r}$ dafür nicht einmal bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sein muss. Dass $\mathtt{r}$ zu (mindestens) einer der beiden einfachen Expressionen äquivalent ist, gerade das besagt Theorem 1 vor dem Hintergrund von Chapter 3 Kanon 3 und 4; dass es genau eine der beiden Expressionen ist, das besagen Chapter 4 Theorem 3 und 4 gleichermaßen.

7.3.5 Der Gehalt von Chapter 4

Das ungeschriebene Chapter Die beiden in LoF explizit definierten Teilkalküle des Indikationenkalküls werden offensichtlich unterschiedlich abgehandelt: Bevor der in Chapter 5 definierte Kalkül, die *Primäre Algebra* (primary algebra), in Chapter 7 von Außen betrachtet wird und dieserart *Theoreme* (theorems) formuliert und *bewiesen* werden, wird er in Chapter 6 von Innen betrachtet und dieserart *Konsequenzen* (consequences) formuliert und *demonstriert*.
Auf die Definition der Primären Arithmetik zum Abschluss von Chapter 3 erfolgt dagegen in Chapter 4 unmittelbar ihre Betrachtung von Außen. Zu Chapter 6, der Innensicht der Primären Algebra, gibt es also für die Primäre Arithmetik *kein Pendant*, damit bleibt der im System zu bestimmende Ort einer Innensicht des Kalküls weitgehend unbesetzt: In Chapter 3, doch vor Definition der Primären Arithmetik, gibt es neben den bereits erwähnten vier ersten Beispielen für Schritte, mittels derer Brown auf den Unterschied zwischen Art und Richtung von Schritten hinweist, und neben den bereits erwähnten vier Schrittformen nur noch ein einziges und einzelnes Beispiel für eine Wertbestimmung. Obwohl diese Wertbestimmung also noch vor der Definition der Primären Arithmetik geführt wird und insofern nicht im Kalkül erfolgt, erfolgt sie doch diesem konform und kann insofern als Ableitung in dem Kalkül betrachtet werden.
Ein solches Pendant zu Chapter 6, in dem für einige Paare arithmetischer Expressionen die Äquivalenz demonstriert wäre, ist zwar *ungeschrieben*, doch deswegen nicht unbedingt *fehlend*: Einerseits ist das (systematische) Interesse an konkreten arithmetischen Äquivalenzen nicht besonders groß, da sie sich – zumindest rückblickend – auch als Instanzen algebraischer Expressionen ergeben (vgl. Chapter 10). Andererseits wäre die Demonstration arithmetischer Äquivalenzen im Hinblick auf die von Brown intendierte Verwendung der vier Schrittformen hilfreich und dahingehend von großem das Verständnis befördernde Interesse. Dieses Interesse können wir gut und gerne ein *didaktisches* Interesse nennen. Denn erst durch die penible Inblicknahme von Beweisen – insbesondere des Beweises von Theorem 1 – kann das Fehlen des ungeschriebenen Chapters mühsam kompensiert werden, genauer: Der Leser muss es zu kompensieren versuchen.

Die Arithmetisierung der Algebra Ein der Erzählperspektive entgegengerichteter Blick in Chapter 4 zeigt, dass Brown Boolesche Algebren, aber auch Boolesche Arithmetiken in einem neuen Licht hat erscheinen lassen, insofern er die Algebren auf eine Arithmetik *reduziert* hat. Diese Arithmetik ist prima facie *ein Fragment* bzw. *eine unzureichend ausgewiesene Version* der kanonischen, also lediglich 2-wertigen Booleschen Arithmetik. Brown hat sie als *formalen* Kalkül, als reines (Teil-)Termersetzungs-Spiel entworfen.
Die Terme seiner eigenwillig notierten Arithmetik können auf ihnen inhärente

Muster (pattern) hin betrachtet werden und es können Terme mit verschiedenen Mustern als ineinander überführbar nachgewiesen werden. Solche Terme gelten dann als *äquivalent*, genauer: als zueinander paarweise äquivalent bezüglich ihres Werts.
Die einschlägig ge-muster-ten und damit zueinander paarweise äquivalenten Terme der Theoreme 8 und 9 können als zwei gültige Gleichungen und insbesondere als die beiden wesentlichen Äquivalenzpostulate für Boolesche Algebren gelesen werden.[53]
Weiter gelten die für die Terme der Primären Arithmetik *bewiesenen* und damit auch den Termen der Primären Algebra *vorgeschriebenen* Verfahrensregeln der Theoreme 5, 6, und 7 gleichermaßen als Folgerungs- bzw. Ableitungs-Regeln für (eine semantische bzw. eine syntaktische Perspektive auf) Boolesche Algebren, kurz: *Brown hat die Primäre Arithmetik als ein* Termersetzungsspiel *entworfen, dem – bei geeigneter Präparation ihres Kontextes durch die Kanons – die Postulate sowie Verfahrens-Regeln Boolescher Algebren implizit sind, doch durch die Theoreme von Chapter 4 expliziert werden.*

Die Algebraisierung der Arithmetik Ein der Erzählperspektive gleichgerichteter Blick in Chapter 4 zeigt Browns Zugang zur Primären Algebra als *arithmetische Algebra* bzw. *algebraisierte Arithmetik*, nämlich als der Arithmetik in kanonischer Weise aufgepfropft, und damit insbesondere als deren Deskriptions-Kalkül, wobei die Arithmetik selbst ebenfalls ein Deskriptions-Kalkül ist, der den Theoremen 1, 2, 3 und 4 gemäß die beiden in Chapter 2 *konstruierten* Zustände vollständig und konsistent darstellt.
Browns Primäre Algebra ist also eine symbolische Algebra, gewissermaßen eine *Emergenz* der Primären Arithmetik, die selbst wiederum die mathematische Kodifizierung des prä-formalen Zeichengebrauchs ist; vgl. Kapitel 8. Die Primäre Algebra *expliziert* ein *Wissen-dass* über ein *Wissen-wie*, nämlich das regelkonforme arithmetische Tun, das ist im Wesentlichen das richtige Rechnen / Kalkulieren, und damit insbesondere das diesem Tun *Implizite*.

Das Verhältnis zwischen Formel- und Fachsprache Je nach Blickrichtung in den Text, nämlich auf seinen Anfang bzw. sein Ende hin, zeigt sich in ihm eine Integration bzw. eine Emanzipation der Formelsprache gegenüber der Fachsprache. Der Leser kann sich durch den Text in den kompetenten Gebrauch der Formelsprache einlesen, insofern er bei seiner Lektüre Erfahrungen mit dem rechten Gebrauch macht. Insbesondere wird die Formelsprache im Fortgange des Textes generiert, indem bspw. das Namenszeichen $\urcorner$ in Arrangements mit anderen Kreuzen auftritt, indem es (zudem) zu einem Instruktionszeichen wird und indem mit dem Gleichheitszeichen und Variablen weitere Zeichen in die Formelsprache aufgenommen

53 In der $(2,1,0)$-Algebra $(\mathrm{B}, \ , \urcorner, \ )$ ist die Konkatenation zudem kommutativ und assoziativ.

werden.
Zu Anfang von Chapter 4 wird also dem Leser die Formelsprache-Lesekompetenz nicht einfach unterstellt. Bei der Formulierung der Theoreme 8 und 9 ist die Formelsprache dann der Fachsprache im Hinblick auf Präzision und Kürze überlegen; dagegen ist sie für die Formulierung der Theoreme 4, 3 und 1 keine echte Hilfe.

Die variable Rolle der variablen Indikatoren in Chapter 4 und 5

Zunächst zu Chapter 4. Die formelsprachlichen Formulierungen der arithmetischen Theoreme vermitteln prima facie möglicherweise den Eindruck, arithmetische Terme könnten Variablen enthalten; dem ist allerdings nicht so. Die Theoreme 3 und 4 und weiter die kritische Durchsicht der Beweise der arithmetischen Theoreme, insbesondere des Beweises von Theorem 1, zeigen unmissverständlich, dass Brown als Bestandteile arithmetischer Terme keine variablen Indikatoren, sondern lediglich Kreuz (und Ock) betrachtet.
Vermutlich meint Brown diesen prima-facie-Eindruck bereits durch seinen letzten Satz von Chapter 2 unterbunden zu haben, insofern er darin die Primäre Arithmetik als einen Teil des Indikationenkalküls bestimmt, der weder in den Grundfiguren noch in den Grundregeln andere Symbole als Kreuz (und Ock) enthält, also mit Kreuz (und Ock) als atomaren Figuren auskommt und weiter auf die *direkten Konsequenzen* aus den arithmetischen Initialen beschränkt ist.

> „Call the calculus limited to the forms generated from direct consequences of these initials the primary arithmetic.“ (Brown, 1969, 11)

Dabei ist mit „these initials“ unstrittig Bezug genommen auf die beiden Initiale, denen zu Beginn von Chapter 4 die Labels *Zahl* (number) und *Ordnung* (order) angehängt werden (vgl. Kapitel 7.3). Das Problem an dieser Definition bzw. Grenzbestimmung der Primären Arithmetik ist, dass nicht näher bzw. überhaupt nicht bestimmt ist, was „direct consequences“ im Gegensatz zu ‚consequences‘ im Allgemeinen sind.
Die Termen, die in den arithmetischen Theoremen auftreten, sind m. E. meta-arithmetische Terme bzw. arithmetische Meta-Terme, die Variablen *nur* als Parameter – genauer: als Muster- oder Form-Parameter – aufweisen; mittels solcher meta-arithmetischer Terme kann auf einen Streich über eine ganze Klasse arithmetischer Terme gesprochen werden. In den Theoremen und Beweisen in Chapter 4 erfolgt also die Rede *über* Terme des arithmetischen Kalküls anhand von meta-arithmetischen Termen, von denen erst variablenlose Instanzen arithmetische Terme sind.

Nun zu Chapter 5. Die meta-arithmetischen Terme finden als algebraische Initiale Eingang in die Primäre Algebra, in deren Alphabet einsortige Variablen auftreten. Über die „Tokens of variable form“ schreibt Brown im ersten Satz von Chapter 5, dass sie „indicate expressions in the primary arithmetic“ (Brown, 1969, 25). Diese

Aussage scheint leicht verständlich und ist bestimmt manchem Leser Anlass genug zu denken, dass man die durch die Variablen angezeigten Stellen der algebraischen Initiale *nur* mit arithmetischen Termen besetzen kann, also Termen aus einem Kalkül ohne Variablen. Doch bereits im ersten Teil der Demonstration der ersten Konsequenz (vgl. Brown, 1969, 28f.) ist bei Anwendung der Regeln R1 und R2 zu bemerken, dass die Terme, die anstelle der Variablen geschrieben werden, Variablen enthalten, also Variablen wohl (sollen) enthalten dürfen. Das gilt aber nicht für die arithmetischen Terme selbst.
Die für die Variablen gemäß Regel R1 oder R2 geschriebenen Terme, die selbst Variablen enthalten, sind also selbst wiederum keine arithmetischen Terme, nämlich keine Terme des als Primäre Arithmetik bezeichneten arithmetischen Kalküls. Solche Terme mit Variablen gehören (am ehesten noch) der Theorie über den Kalkül an, nämlich (s)einer Meta-Arithmetik. Brown schreibt in Chapter 5 über die Primäre Algebra:

> „Let the calculus be seen as a calculus for the primary arithmetic. Call it the primary algebra." (Brown, 1969, 26)

Die variablen Indikatoren spielen m. E. auch in den `LoF` je nach Kontext die Rolle von allgemeinen Werten bzw. Parametern, Unbekannten und Variablen.
Langer Rede kurzer Sinn: Man hat das „for" in „for the primary arithmetic" oder das „in" in „expressions in the primary arithmetic" oder das „primary arithmetic" (als Kalkül oder Theorie über den Kalkül) *richtig* zu interpretieren bzw. die Demonstrationen *passenderweise* als Demonstrations-Schemata zu verstehen. Allerdings und leider kann man – zumindest in `LoF` aber auch schwerlich anderswo – dieses „richtig" bzw. „passend" weniger den definierenden Worten als dem praktizierten Verfahren entnehmen. Wie in den meisten – außer wohl den banalsten – Fällen erwächst in `LoF` das *Wissen-dass* erst dem hinreichend illustrierten und zureichend praktizierten *Wissen-wie*.

Den Abschluss meiner Lesart der Primäre Algebra als arithmetische Algebra bzw. als Algebraisierung einer Arithmetik bildet die nun folgende Beschäftigung mit dem von Brown in Chapter 3 vorgeschlagenen Termersetzungs-Spiel, das sein arithmetischer Kalkül ist.

7.4 Die Primäre Arithmetik in content-Form

Eine nach Josef Simon *naiv* zu nennende und zunächst nur am Aufbau orientierte Bestandsaufnahme von Chapter 3 zeigt auf den ersten Blick neun Sections: Das sind einerseits fünf Begriffsbestimmungen, nämlich kurze Ausführungen über die Begriffe *Schritt* (step), *Richtung* (direction), *Kalkulation* (calculation), *Initial* (initial) und *Indikationenkalkül* (calculus of indications), und andererseits vier Kanons, nämlich

Kanon 2 *Kontraktion der Referenz* (contraction of reference), Kanon 3 *Vereinbarung über die Substitution* (convention of substitution), Kanon 4 *Hypothese über die Vereinfachung* (hypothesis of simplification) und Kanon 5 *Ausweitung der Referenz* (expansion of reference). Dem zweiten Blick wird auch noch ein einzelnes *Beispiel* (example) zur Vereinfachung eines Terms augenfällig, das innerhalb des Fließtextes zum Vereinfachungs-Kanon steht und weniger deutlich bzw. überhaupt nicht als eigenständig hervorgehoben ist.

Neben dieser Bestimmung des Aufbaus lässt sich über den Inhalt sagen, dass von einem Kalkül die Rede ist, ohne dass Brown die Labels *Atomfiguren*, *Grundfiguren* und *Grundregeln* explizit nennen und mit Inhalt füllen würde.

7.4.1 Der Gehalt von Chapter 3

Anhand der beiden noch nicht besprochenen arithmetischen Theoreme von Chapter 4, nämlich Theorem 4 und 3, zuzüglich dreier zum Teil angesprochener Kanons von Chapter 3, nämlich Kanon 4, 3 und 5, lässt sich der Gehalt von Chapter 3 in seinem Ergebnis bereits durch eine naive Lesart deutlich bestimmen.
Die Theoreme 3 und 4 beschreiben den gleichen Sachverhalt aus zwei einander entgegengesetzten Perspektiven. Denn Brown spricht einerseits von (der Richtung) der *Vereinfachung* (simplification) und andererseits von (der Richtung) *away from simplicity*, von der ich als der (Richtung der) *Vervielfachung* bzw. Verkomplizierung spreche:

> „We have shown that the indicators of the two values in the calculus remain distinct when we take steps towards simplicity, thereby justifying the hypothesis of simplification. For completeness we must show that they remain similarly distinct when we take steps away from simplicity." (Brown, 1969, 18)

Die Figuren alias *Arrangements* (arrangements) des arithmetischen Kalküls sind also nicht bedeutungslos. Sie sind intendiert als Mittel, nämlich als Bezeichnung für einen von zwei *Werten* (values). Wird ein Arrangement nicht als Arrangement, sondern als Mittel zur Bezeichnung betrachtet, so weist Brown darauf mittels der Bezeichnung *Expression* (expression) hin.
Kanon 4 gemäß darf jedes (zusammengesetzte) Arrangement als Expression des Wertes angenommen werden, den *die* einfache Expression bezeichnet, zu dem das (zusammengesetzte) Arrangement durch gewisse *Schritte* (steps)[54] vereinfacht werden kann.

54 Es ist „step" hinsichtlich des Indikationenkalküls ein fachsprachlicher Ausdruck, doch halte ich seine schlichte Übersetzung „Schritt" für etwas unscheinbar bzw. unauffällig hinsichtlich der Gemeinsprache. Ich verwende daher statt *Schritt* zumeist *step-Modifikation* als Pendant zu „step".

Fourth canon. Hypothesis of simplification
„*Suppose the value of an arrangement to be the value of a simple expression to which, by taking steps, it can be changed.*“ (Brown, 1969, 9)[55]

Kanon 3 und 5 gemäß induzieren Äquivalenzen bzw. gültige Gleichungen Paare von solchen (erlaubten) Schritten, genauer: eine *Art* (kind) von *Schritt* (step) mit zwei *Richtungen* (directions).[56] Denn das Äquivalenzsymbol = bzw. die korrespondierende Gleichung muss nicht unbedingt als Ganzes erfasst werden, sondern darf in beide Richtungen einzeln gelesen werden (vgl. Brown, 1969, 9). Auf Symbolebene wird dies repräsentiert durch ein Paar von Pfeilen $\rightleftharpoons$ bzw. die einzelnen Pfeile $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ und diese Pfeile werden zwischen zwei Arrangements notiert, falls das eine aus dem anderen durch einen Schritt (step) hervorgeht.

Third canon. Convention of substitution
„*In any expression, let any arrangement be changed for an equivalent arrangement.*“ (Brown, 1969, 8)

Fifth canon. Expansion of reference
„The names hitherto used for the primitive equations suggest steps in the direction of simplicity, and so are not wholly suitable for steps that may in fact be taken in either direction.“ (Brown, 1969, 10)

Meines Erachtens sollte hinsichtlich der in Chapter 2 vereinbarten fachsprachlichen Ausdrücke Kanon 3 besser – in Übersetzung – folgendermaßen lauten: In jedem Arrangement lass jede Expression in eine äquivalente Expression geändert werden. Denn einerseits ist Äquivalenz eine Eigenschaft von Expressionen und nicht von Arrangements und andererseits wird erst durch Theorem 1 und mittels vereinfachender Schritte an einem beliebigen Arrangement bewiesen, dass (genauer: welche) Arrangements tatsächlich als Expressionen funktionieren.[57] Theorem 3 besagt die Wohldefiniertheit dieser Form der Wertzuweisung durch die Kanons 4, 3 und 5, insofern für jede arithmetische Expression jede regelkonforme Vereinfachung denselben einfachen Expression liefert.

Theorem 3. Agreement
„*The simplification of an expression is unique.*“ (Brown, 1969, 14)

Dabei ist *Vereinfachung* (simplification) einerseits der die Anzahl an Kreuzen reduzierende *Prozess* iterierter Regelanwendung und andererseits dessen *Resultat*,

55 In den Notes zu Chapter 3 gibt Brown dem Leser den Hinweis, dass erst die Darstellungstheoreme (T1 bis T4) die Rede von *dem* Wert (the value) eines Arrangements bzw. Expression rechtfertigen.

56 Je nach Lesart liefert eine Gleichung der Form $\mathsf{p} = \mathsf{p}$ nur Schritte einer Art und einer Richtung. Was für die beiden Schritte zu einer Gleichung gilt, gilt gewissermaßen auch für Theorem 3 und 4, insofern sie der gleichen Art, doch verschiedener Richtung sind.

57 Vgl. insbesondere S. 116 und 122 hinsichtlich der postulierten Äquivalenzen der Primären Arithmetik, die arithmetischen Initiale (I1) und (I2), und damit weiter der vier Schritte (step).

nämlich für jede arithmetische Expression entweder ein Zeichen für den markierten Zustand oder für den unmarkierten Zustand.
Insofern die beiden einfachen Expressionen die kanonischen Expressionen für die beiden Werte des arithmetischen Kalküls sind, sind die Symbole $\urcorner$ und $\quad$ die beiden *Normalformen* aller arithmetischen Expressionen und können weiter als die beiden kanonischen *Grundfiguren* des arithmetischen Kalküls betrachtet werden:

> **Theorem 4. Distinction**
> „*The value of any expression constructed by taking steps from a given simple expression is distinct from the value of any expression constructed by taking steps from a different simple expression.*" (Brown, 1969, 18)

Bereits die Überschrift von Chapter 3 „The conception of calculation" verweist auf das Konzept des Rechnens, genauer: auf die im Chapter erfolgende Konzeption des Rechnens, die zur Definition eines Kalküls führt. Wenden wir uns nun zunächst relativ unkritisch dem Inhalt von Chapter 3 in seiner Hauptlinie zu.

7.4.2 Der arithmetische Kalkül

In Chapter 3 Section „The calculus of indications" (Das Kalkül der Bezeichnungen) wird die *Primäre Arithmetik* (primary arithmetic) als Kalkül definiert, und zwar als der Teil des *Indikationenkalküls* (calculus of indications), der genau die *direkten Konsequenzen* (direct consequences) aus den beiden initialen Gleichungen des Indikationenkalküls umfasst.

> **The calculus of indications**
> „Call the calculus determined by taking the two primitive equations
>
> $$\urcorner\,\urcorner \;=\; \urcorner \qquad\qquad \text{number}$$
> $$\overline{\urcorner\,}\!| \;=\; \qquad\qquad \text{order}$$
>
> as initials the calculus of indications.
> Call the calculus limited to the forms generated from direct consequences of these initials the primary arithmetic. " (Brown, 1969, 11)

Die Grundregeln, Grundfiguren und Atomfiguren des arithmetischen Kalküls werden allesamt den beiden arithmetischen Initialen *number* (Zahl) und *order* (Ordnung) entnommen:

(1) Die zweimal zwei einseitigen Lesarten der beiden Initiale (initials) sind dem fünften zuzüglich dritten Kanon gemäß die vier *Grundregeln* (vgl. Brown, 1969, 8, 10).

(2) Die rechten Seiten der Initiale, also das leere Kreuz und Ock, sind dem vierten Theorem gemäß zwei *Grundfiguren*, die im Hinblick auf das erste und dritte Theorem als die beiden einzigen gelten dürften (vgl. Brown, 1969, 18, 12, 14).

(3) Das in den Initialen fünffach auftretende Symbol Kreuz ist die einzige *Atomfigur* des Kalküls.

Wohlgemerkt verwendet George Spencer Brown nicht die gängigen Bezeichnungen Atomfigur, Grundfigur, Grundregel, Normalform, Term und Termfunktion und er unterläuft zudem diesbezüglich gängige Unterscheidungen. Die letztgültig angedachte Übertragung seiner Terminologie in die übliche ist daher einerseits schwierig, brisant und heikel, sie ist andererseits in vielen Fällen letztlich auch irrelevant. Meines Erachtens ist genau diese *Irrelevanz* ein für Brown essenzieller Punkt, auf den er durch eine gewisse *Indifferenz* seiner Sprache – zwar implizit, doch subversiv – hinweist. Das leere Kreuz (empty Token) und Ock (empty space) werden unmissverständlich als die beiden einzigen *simple expressions* bezeichnet. Im Hinblick auf Theorem 3 und 4 fungieren sie als Grundfiguren und Normalformen der Primären Arithmetik. Die pedantischen Nachfragen, ob sie als die *beiden einzigen* Grundfiguren und als die *beiden einzigen* Normalformen fungieren sollen, bleiben letztlich unbeantwortet und unbeantwortbar. Und eigenwillig ist die Antwort auf die Frage, ob das leere Kreuz und Ock als Atomfiguren gedacht sind.

Bevor im Folgenden diese Charakteristika des – gewissermaßen minimal gefassten – Kalküls im einzelnen besprochen werden, seien sie im Überblick und in symbolischer Notation nochmals genannt.

Die Atomfigur	**Die Grundfiguren**	**Die Grundregeln**
$\overline{\;\;}\vert$	(1) $\overline{\;\;}\vert$	(1) $\overline{\;\;}\vert\,\overline{\;\;}\vert \rightharpoonup \overline{\;\;}\vert$
	(2)	(2) $\overline{\;\;}\vert\,\overline{\;\;}\vert \leftharpoondown \overline{\;\;}\vert$
		(3) $\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert \rightharpoonup$
		(4) $\overline{\overline{\;\;}\vert}\vert \leftharpoondown$

Die Atomfigur Die einzige *Atomfigur* des Kalküls ist das einzige explizite Zeichen im Kalkül, nämlich $\overline{\;\;}|$. Dieses Symbol trägt in der `LoF`-Fachsprache den Namen *Kreuz* (cross). Wohlgemerkt entscheidet nach Simon die Lesart über das Zeichen, daher möchte ich den näheren Bemerkungen vorab betonen, dass das Symbol $\overline{\;\;}|$ als Kreuz und als *leeres* Kreuz gelesen werden kann. Das *leere Kreuz* ist – zumindest in D. Schwartz' Lesart – keine Atomfigur, das *Kreuz* – unstrittig – dagegen schon. Das Aussehen des Symbols $\overline{\;\;}|$ kann mittels der `LoF`-Fachsprache thematisiert werden. Zunächst ist das Symbol in seiner *Größe* nicht strikt festgelegt, sondern passt sich dem jeweiligen Inhalt seiner Innenseite an, wobei als *Innenseite* (inside) das Flächenstück bezeichnet wird, das sich im Hinblick auf eine kanonische Orientierung der Zeichenebene links des senkrechten Strichs und unter dem waagrechten Strich befindet.[58] Unter Verwendung dieser Bezeichnungen kann nun die Verschiedenheit von Kreuz und leerem Kreuz beschrieben werden: Ein leeres Kreuz ist ein Kreuz zuzüglich seiner Innenseite, die dem Namen entsprechend leer sein muss bzw. als leer betrachtet wird. Beim Kreuz selbst dagegen wird auf Innen- und Außenseite nicht weiter geachtet.

Es ist also Kreuz in kanonischer Weise ein *atomares* Symbol, wohingegen das sog. leere Kreuz als *zusammengesetztes* Zeichen gelten könnte –, bestehend aus Kreuz und Ock. In Schwartz' $\mathsf{L}(\mathsf{PA})$ wird dieserart das leere Kreuz durch $[\varepsilon]$ symbolisiert –, bestehend aus dem einstelligen Operatorsymbol $[\cdot]$ alias Kreuz und dem nullstelligen Elementsymbol ε alias void; vgl. Kapitel 4.2.1. In Anlehnung an alternative Axiomatisierungen Boolescher Algebren (insbesondere als Strukturen verschiedenen Typs) könnten void und leeres Kreuz jeweils atomar symbolisiert werden – bspw. durch die Symbole 0 und 1.

Für Brown dagegen ist void kein Symbol des LoF-Kalküls und demnach auch keine Atomfigur, sondern lediglich dem Leser von Arrangements ein implizites Zeichen für die (augenfällige) Abwesenheit von weiteren Kreuz-Symbolen 9.4. Es tritt void in Arrangements bzw. Expressionen auf wie die leere Menge (als Teilmenge) in beliebigen Mengen bzw. wie das leere Wort (als Teilwort) in Wörtern. Trotzdem *ist* void der angesprochene Unterschied zwischen einem Kreuz im Allgemeinen und einem leeren Kreuz im Besonderen. In Browns Lesart ist m. E. auch das *leere* Kreuz nicht zusammengesetzt: Das leere Kreuz ist nicht aus einem Symbol void und einem Symbol Kreuz zusammengesetzt, stattdessen gilt: *Das Symbol ⏋ wird kontextsensitiv als Zeichen gelesen.* In der Primären Arithmetik ist ein Kreuz leer bzw. ist das Kreuz ein leeres Kreuz, *falls* es *kein* Kreuz enthält, und *nicht* deswegen, *weil* es (ein als Symbol zu betrachtendes) void enthält; letztere Charakterisierung ist gewissermaßen schwächer als erstere, da ein Kreuz, das ein void-Symbol und ein cross-Symbol enthält, nicht leer ist bzw. kein leeres Kreuz ist.

Dieserart macht der Kontext aus ein-und-demselben Symbol mal das eine, mal das andere Zeichen, doch ist die Kontextsensitivität dabei jeweils auf die Innenseite am Symbol beschränkt und damit hinreichend lokal.

Die Grundfiguren Die beiden *Grundfiguren* des gewissermaßen minimal gefassten Kalküls sind das *leere Kreuz* (⏋) und das *Ock* ( ). Wie bereits im Paragraphen

58 Vgl. (Brown, 1969, 5): Die *Innenseite* ist die konkave (concave) Seite des Zeichens, das heißt: Das durch das Zeichen und seine kanonische Ergänzung zum Rechteck begrenzte konvexe Flächenstück. Liest man ⏋ als rechten Winkel, so ist die Innenseite von ⏋ das (innere) Winkelfeld des rechten Winkels. Die andere Seite des Zeichens wird *Außenseite* genannt und ist das (innere) Winkelfeld des Ergänzungswinkels des rechten Winkels (vgl. Brown, 1969, 16).

„Die Atomfigur“ besprochenen, ist die Größe, in der sich das Kreuz und dahingehend auch das leere Kreuz ereignet, nicht von Relevanz. Gleichermaßen ist auch die zweite Grundfigur in ihrer Größe (und Gestalt) nicht explizit ausgewiesen. Brown beschreibt sie in Chapter 2 als einen *leeren Raum* (an empty space); dort ist (dahingehend) auch die Rede von „a space with no Token“ und von „absence of form, “ (Brown, 1969, 5f.); weiter werden in notes Chapter 7 (ebenfalls dahingehend) die beschreibenden Worte „a blank“ und „[a] void“ (Brown, 1969, 93) gebraucht. Dieses Phänomen der Abwesenheit von *form* und/oder von *Kreuz*, nämlich eines *leeren Raumes*, beschreibt Brown auch als die „universelle rezessive Konstante“ (Brown, 1969, xvi) und schlägt in einer schwer verständlichen Passage eine Erweiterung der `LoF`-Sprache vor.

> „Kurz nachdem es [(Brown, 1969); M.R.] das erstemal veröffentlicht wurde, erhielt ich einen Telephonanruf von einem Mächen namens Juliet, die, während sie ihre Begeisterung über das, was ich getan hatte, ausdrückte, ebenso ihrer Frustration Ausdruck verlieh, nicht den leeren Raum über das Telephon sprechen zu können. [...] Sie hatte völlig recht, und ich erfand in der Folge das Wort *Ock* (vom Indoeuropäischen *okw* = das Auge), symbolisiert durch einen umgekehrten Kleinbuchstaben ɔ, um in einer sprechbaren Form die universelle rezessive Konstante zu kennzeichnen, die alle Systeme gemeinsam haben. Gewöhnliche Zahlensysteme haben natürlich zwei Ocks, null für die Addition und die Einheit für die Multiplikation[. ...] In diesem Buch, in dem seine wahre Natur erstmals klargemacht wurde, war es aber wichtig, das Ock namenlos und leer zu lassen, weil es das nächste war, an das ich gelangen konnte, um hervorzuheben, daß es überhaupt nichts ist, nicht einmal leer. Seine Erfindung war mächtiger als die Erfindung der Null, und sandte Schockwellen durch die gesamte mathematische Gemeinde, die selbst jetzt noch nicht abgeklungen sind.“ (Brown, 1999, xvf.)[59]

Zunächst ist im Hinblick auf das Ende des Zitates zu sagen, dass Brown kein ausgewiesener Kenner der Mathematikgeschichte und auch nicht unbedingt besonders bescheiden ist. Ich möchte also seine metaphorische Redeweise von „Schockwellen“ und vom Rang seiner „Erfindung“ im Vergleich zu der „Erfindung der Null“ nicht auf die Goldwaage legen. Ich habe den letzten Satz überhaupt nur deswegen mitzitiert, weil er m. E. ein Problem für die Interpretation der zitierten Stelle deutlich anzeigt. Brown schreibt darin „Null“, zuvor allerdings „null“ und es bleibt der Mutmaßung anheim gegeben, ob er damit eine Zahl, ein Zahlzeichen oder eine Ziffer der Stellenwertschreibweise für Zahlen meint. Brown formuliert also weder präzise noch transparent und dies insbesondere (nicht) im Hinblick auf die Unterscheidung zwischen Bedeutungs- und Bezeichnungs-Ebene.[60]

59 Das „seine“ in „in dem seine wahre Natur“ bezieht sich m. E. auf das erst nachfolgende „das Ock“; diese Konstruktion ist grammatikalisch etwas eigenwillig.

60 Vgl. (Rotman, 2000a) bzw. (Rotman, 1996) für eine semiotische und (Kaplan, 2001) für eine historische Untersuchung der Null als Zahlzeichen und Zeichen für Nichts.

Ich sollte die Interpretations-Vorbereitungen abschließend wohl noch einmal an Sinn und Zweck des arithmetischen Kalküls erinnern, nämlich an „the use of the primary arithmetic as a system of indicators of the states distinguished by the first distinction“ (Brown, 1969, 24). Die ersten vier arithmetischen Theoreme besagen genau diese Adäquatheit des arithmetischen Kalküls, nämlich *Vollständigkeit* und *Konsistenz*, im Hinblick auf die Repräsentation der beiden Zustände, die in der LoF-Fachsprache die Labels markierter Zustand und unmarkierter Zustand als Namen tragen.
In der LoF-Formelsprache und im Kalkül gibt es für den markierten Zustand ein *explizites* und dahingehend *dominantes* Symbol, nämlich das Symbol $\overline{\;\;|}$, und dieses Symbol hat sogar einen eigenen Namen, nämlich den Namen *leeres Kreuz*; dagegen gibt es in der LoF-Formelsprache und im Kalkül kein explizites und eigenes Symbol für den unmarkierten Zustand; ein zusammengesetztes Zeichen für den unmarkierten Zustand ist bspw. $\overline{\overline{\;\;|}\,|}$. Die Frage lautet demnach: Welches Zeichen steht auf der rechten Seite des zweiten arithmetischen Initials?
In formelsprachlichen Passagen, die Brown dem fachsprachlich gehalteten Fließtext einwebt, wie bspw. in „In any case, $\overline{\overline{p|}\,p|} = \quad$.“ im Nachgang zur Formulierung von Theorem 8 und/oder in „Now let $r = \quad$.“ im Beweis von Theorem 9, verwendet Brown als quasi-Realisierung der Umschreibung leerer Raum oft tatsächlich leere Räume, wie bspw. ‚ ‘. Das ist allerdings nur eine Behelfs-Repräsentationsform eines selbst lediglich *implizit* und *rezessiv* auftretenden Zeichens; denn insbesondere die freistehenden formelsprachlichen Passagen bzw. Kalkül-Figuren weisen keine solchen leeren Räume auf, aber auch die Instanz von $\overline{\overline{pr|}\,\overline{qr|}\,|}$ für $r = \quad$ lautet $\overline{\overline{p|}\,\overline{q|}\,|}$ und nicht etwa $\overline{\overline{p\;\;|}\,\overline{q\;\;|}\,|}$; vgl. dazu S. 104.
Greifen wir nun die relevanten Phrasen aus ihrem jeweiligen Kontext heraus: „den leeren Raum“, „das Wort *Ock*“, „symbolisiert durch [...] ɔ“, „universelle rezessive Konstante“[61], „das Ock namenlos und leer zu lassen“ und last, not least: Das Ock ist „nichts [.], nicht einmal leer“.
Die Frage lautet nun, inwiefern George Spencer Brown die LoF-Sprache und ob ihren fach- und/oder formel- und/oder kalkül-sprachlichen Anteil erweitert hat. Bemerkenswerterweise ist prima facie nicht einmal klar, ob Brown im Zitat mittels des Zeichens leerer Raum einen Zustand oder ein Zeichen für einen Zustand bezeichnen möchten, ob er also über einen Gegenstand der Sachebene (bzw. Bedeutungsebene) oder der Zeichenebene schreibt, oder ein Zeichen dafür setzt, dass nichts zu *tun* ist. Denn im Gegensatz zum markierten Zustand mit seiner Marke ist der unmarkierte Zustand *leer* und er ist zudem ein *Raum* in der Bedeutungsebene; die Formulierung ‚leerer Raum‘ im Zitat könnte sich also auf den unmarkierten Zustand beziehen, tut das m. E. allerdings nicht; die Formulierung ‚leerer Raum‘ im

61 Wohlgemerkt schreibt Brown nicht ‚universell rezessive Konstante‘. Es wird also nicht durch ‚universell‘ der Grad der Rezessivität unterstrichen, sondern durch ‚universelle‘ der Gültigkeitsbereich der Rezessivität der Konstante.

Zitat gilt m. E. einem leeren Raum in der Zeichenebene. Der leere Raum im Kalkül und in der Formelsprache ist meiner Lesart zu Folge nicht einmal leer, insofern er nicht ausgedehnt ist. Als nicht-ausgedehntem Objekt der Zeichenebene können Browns leerem Raum wohl nicht viele der lebensweltlich relevanten Prädikate bzw. Prädikatoren zugesprochen werden. Bezüglich einer geeigneten sparsamen Ontologie kann er dann wohl zu Recht als ‚nichts‘ oder ‚nichts‘-seiend klassifiziert oder bezeichnet werden, das aber ist hier und bleibt im Folgenden schlicht uninteressant. Brown ist im Übrigen kein ausgewiesener Metaphysiker.

In der *Fachsprache* haben beide Zustände (Eigen-)Namen: Das ist einerseits der Name der *markierte* Zustand und andererseits der *unmarkierte* Zustand.
In der *Formel*- und der *Kalkül*-Sprache macht Brown die erste Grundfigur, nämlich ein (auf der Innen- und Außenseite) ‚empty token‘, $\urcorner$, zur kanonischen Bezeichnung für den markierten Zustand; zur kanonischen Bezeichnung ist dem unmarkierten Zustand die zweite Grundfigur gemacht, nämlich ein (nicht einmal leerer) ‚empty space‘: repräsentiert wird er bspw. durch ‚ ‘ (von einigermaßen variabler Breite), dagegen ist er gewissermaßen schon durch ‚‘ (also ohne Breite und eigentlich auch ohne Höhe) präsentiert (vgl. Theorem 4). Im Hinblick auf Theorem 3 können die beiden Grundfiguren auch als *Normalformen* bezeichnet werden.
In der *Fachsprache* von (Brown, 1969) hat die erste Grundfigur, nämlich das Symbol $\urcorner$ selbst, einen (Eigen-)Namen, nämlich ‚Kreuz‘; die zweite Grundfigur dagegen nicht. Die zweite Grundfigur wird in der Fachsprache lediglich mittels der Bezeichnungen „an empty space“, „a void“, „a blank“, „absence of form“, „a space with no Token“ und „universelle rezessive Konstante“[62] *um*- bzw. *be-schrieben.*

Zwei Lesarten des Zitates, genauer: der angedeuteten Spracherweiterung, sind gleichermaßen kanonisch: Der einen Lesart gemäß erlaubt die Spracherweiterung in (Brown, 1999) *nicht*, die beiden Zustände und die beiden Grundfiguren des Kalküls in den verschiedenen `LoF`-Sprachen analog zum Ausdruck zu bringen. Es bekommt lediglich auch die zweite Grundfigur, nämlich das universelle rezessive Konstanten-Zeichen selbst, einen fachsprachlichen (Eigen-)Namen, nämlich das Schrift-Zeichen ɔ, das selbst wiederum *Ock* gesprochen wird. Dieser Eingriff in die Sprachkonzeption von (Brown, 1969) ist ein ziemlich kleiner und erweitert lediglich die Fachsprache, in der nun die leeren Räume bei ihrem neuen (Eigen-)Namen genannt werden können.
Der anderen Lesart gemäß *erlaubt* die Spracherweiterung in (Brown, 1969), die beiden Zustände und die beiden Grundfiguren des Kalküls in den verschiedenen `LoF`-Sprachen analog zum Ausdruck zu bringen; diese Interpretation ist weit aufwendiger. Es werde also ɔ wie schon $\urcorner$ in die Formel- und Kalkül-Sprache aufgenommen und Ock wie schon Kreuz in der Fachsprache. Man könnte dann *Ock* (Void, void) als

62 Man sollte wohl eher von „universelles rezessives Konstanten-*Zeichen*“ sprechen, da es sich dabei um ein Objekt der Zeichenebene und nicht der Bedeutungsebene handeln soll.

(Eigen-)Name von ‚ɔ' betrachten, wie *Kreuz* (Cross, cross) der (Eigen-)Name von ‚⏋' ist, und ɔ in der Formelsprache und als Atomfigur und zudem als Grundfigur in der Kalkül-Sprache verwenden.
Diese Lesart würde dann weitere Grundregeln für den Kalkül verlangen, um ɔ aus LoF-Figuren zu eliminieren, wie Null (alias „null") in Additionen und Eins (alias „die Einheit") in Multiplikationen prinzipiell *weggelassen* werden können, da sie die neutralen Elemente dieser Verknüpfungen sind bzw. bezeichnen – je nach Auffassung von ihnen als Zahlen oder als Zahlzeichen. Diese Lesart würde weitere Fragen beantworten: Ist Ock (bzw. ist ɔ) ein Pendant zu den Zahlen Null alias 0 und Eins alias 1? Oder ist ɔ (bzw. ist Ock) ein Pendant zu den Zahlzeichen Null alias 0 und Eins alias 1? Wohlgemerkt seien auch „null" und „die Einheit" selbst Ocks. Ist weiter die universelle rezessive Konstante nicht ganz so universelle, wie man bei ihrem Namen denken könnte, spielt sie also beim Rechnen mit natürlichen Zahlen keine Rolle oder ist sie tatsächlich erwartungsgemäß universell und sind Null und Eins zwei Erscheinungsformen von ihr, von ɔ und/oder von Ock?
Allein im Hinblick auf die zitierte Stelle lassen sich die Fragen, die sich bei zweiter Lesart dem Leser aufdrängen, m. E. nicht unstrittig beantworten und es lässt sich auch nicht zwischen den beiden Lesarten selbst unstrittig entscheiden. Prinzipiell lassen sich die Ansichten, die den beiden Lesarten inhärent sind, gleichermaßen durch- bzw. umsetzen. Konstatieren wir also zunächst, dass Brown zumal unpräzise und intransparent formuliert. Das gilt für (Brown, 1969) selbst wie auch für spätere Erweiterungen daran.

Exkurs: Drei Kontexte des arithmetischen Kalküls Ich halte es für angeraten, an dieser Stelle den Hinweis auf drei Kontexte der Primären Arithmetik zu geben. Das ist zunächst, dass das Label primary arithmetic keine Erfindung Browns ist bzw. von Brown nicht als erstem verwendet wird; bspw. wird in (Radu, 2003, 148) ein Schulbuch von Wentworth und Reed aus dem Jahre 1890 erwähnt; es trägt den Titel „Primary Arithmetic" und behandelt die Arithmetik an Grundschulen (primary schools).
Weiter spezifiziert Brown in „Introduction" seine primary arithmetic als „the primary, non-numerical arithmetic" (Brown, 1969, xi) und zielt damit ab auf die (von ihm spezifisch variierte) Arithmetik Boolescher Algebren.
Zuletzt zeigt Brown in „Introduction to Appendices 4 and 5" (Brown, 1999, 130f.) von 1996 und „Appendix 4. An algebra for the natural numbers" (Brown, 1999, 132–138) von 1961, dass Varianten seiner Primären Arithmetik und Primären Algebra natürliche Zahlen und das Rechnen mit natürlichen Zahlen abbilden können, und zeigt dabei insbesondere einen spezifischeren Gebrauch von Ock, nämlich als „the multiplicative ock" und als „the additive ock" (Brown, 1999, 130). Dieser Gedanke, einen variierten Indikationenkalkül zur Darstellung der natürlichen Zahlen zuzüglich der beiden kanonischen Operationen zu nutzen, ist in (Kauffman, 1995) – von

Browns Vorschlag leicht abweichend – in Detail und Umfang genauer ausgeführt; vgl. verschiedene Aufsätze unter (Bricken, 2013a).

Die Grundregeln Zunächst sei gesagt, dass für gewöhnlich die Grundfiguren eines Kalküls als Grundregeln mit leerem Vorderglied konzipiert werden können. Das ist bei der Primären Arithmetik offensichtlich nicht der Fall, da das universelle rezessive Konstanten-Zeichen selbst ein Zeichen im Kalkül ist. Die Einführung der Grundfigur durch die Grundregel $\quad\rightharpoonup$ ⏋ wäre also zugleich lesbar und einsetzbar als Transformation der einen Grundfigur des Kalkül in die andere und das wiederum würde die *Konsistenz* des Kalküls beschädigen (vgl. Brown, 1969, 19).
Wenden wir uns nun explizit den Grundregeln zu, die ich dafür mit ihren Bezeichnungen vor dem Hintergrund der arithmetischen Initiale und deren Bezeichnungen nochmals skizziere (vgl. Brown, 1969, 12).

Initial 1. Number

I1	⏋⏋ = ⏋	condense $\rightleftharpoons$ confirm

Initial 2. Order

I2	⏋⏋ (nested) =	cancel $\rightleftharpoons$ compensate

Alle arithmetischen Expressionen können einerseits *aus* genau einer der beiden Grundfiguren (⏋) und ( ) durch die verkomplizierenden Grundregeln produziert werden (vgl. Theorem 4) und andererseits *zu* genau einer der beiden Grundfiguren durch die vereinfachenden Grundregeln *reduziert* werden (vgl. Theorem 3). Im Hinblick auf letzteres stellen die *Grundfiguren* also auch die *Normalformen* der Arrangements bzw. Expressionen dar. Der angegebene arithmetische Kalkül mit vier Grundregeln besteht also insbesondere aus einem Figuren *generierenden* Teil und einem Figuren *normalisierenden* Teil.[63] Kanon 4 gemäß ist jedes Arrangement zu seiner Vereinfachung *äquivalent* und kann nach Kanon 3 und 5 durch seine Vereinfachung substituiert werden sowie sie substituieren. Durch Theorem 7 ist ein solcher Austausch auch mit jeder anderen Expression möglich, der zu derselben einfachen Expression äquivalent ist. Gleichermaßen formulieren Theorem 2 und 5 gewissermaßen *abgeleitete Regeln.* Doch dürfen in der Primären Arithmetik (content) m. E. nur die vier Grundregeln angewendet werden.
Die Krux bei den Grundregeln ist wohlgemerkt, die von Brown intendierte Lesart zu erkennen. Wie bzw. in welchen Kontexten sind die Grundregeln anzuwenden? Mit Josef Simon gesprochen ist nicht das Verstehen von Zeichen erklärungsbedürftig,

63 Vgl. (Burris, 1998, 211) bezüglich der Konzeption normalisierender Kalküle als *normal form term rewrite system.*

sondern das Nicht-Verstehen. Ich möchte also betonen, dass man die arithmetischen Grundregeln durchaus und verständlicherweise nicht-verstehen könnte bzw. – vielleicht schlimmer – miss-verstehen könnte: Wer nämlich an eine anderweitig standardisierte Formulierung von Grundregeln eines Kalküls gewöhnt ist und auch von Brown erwartet, der könnte meinen, Browns Grundregeln zu verstehen, und weiter meinen, dass sie bspw. auf ⌉⌉⌉⌉ nicht anwendbar sind; für einen solchen Leser umfasst der arithmetische Kalkül dann überhaupt nur vier Figuren, nämlich einerseits die beiden Grundfiguren ⌉ und   sowie andererseits nur noch ⌉⌉ und ⌉⌉; vgl. dazu folgendes Beispiel.

> *Ein simpler (Termersetzungs-)Kalkül von Paul Lorenzen*
> „Ein Beispiel eines willkürlichen Kalküls ist etwa der folgende:
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | I. | Grundfiguren seien | (K1) | + | |
> | II. | Grundregeln seien | (K2) | wenn x, dann xo | [x ⇀ xo; M.R.] |
> | | | (K3) | wenn x, dann +x+ | [x ⇀ +x+; M.R.] |
>
> Hierbei ist x eine Variable für die aus den Atomen + und o zusammengesetzten Figuren.“ (Lorenzen, 1970, 58–60, 62; hier: 58f.)

Eine *Ableitung* nach diesem Kalkül ist z. B.

1.	+	K1
2.	+ o	K2; 1
3.	+ o o	K2; 2
4.	+ + o o+	K3; 3
5.	+ + o o + o	K2; 4

Diese Ableitung beweist, daß die Figur + + o o + o nach dem Kalkül *ableitbar* ist. – In der Ableitung ist am Zeilenende genannt, welche Regel (auf welche Zeile) angewandt wurde.
Kurz: + ⇀ +o ⇀ +oo ⇀ + + oo+ ⇀ + + oo + o. Der unbedarfte Leser könnte also auch bei Browns arithmetischem Kalkül erwarten, dass – gegebenenfalls unter Verwendung metasprachlicher Ausdrücke – im Vorderglied der Grundregeln der ganze Term genannt ist, an dem eine Modifikation vorgenommen werden soll. Browns Grundregeln erlauben dann also nur Modifikationen der bzw. an den vier Figuren ⌉, ⌉⌉, ⌉⌉ und , wodurch nur wieder jeweils eine andere der vier Figuren entsteht.
Offensichtlich enthält Lorenzens Kalkül nur vermehrfachende Regeln; die zugehörigen vereinfachenden Schritte könnten bspw. einfach als Umkehrungen formuliert werden, nämlich x ↽ xo und x ↽ +x+.

Die drei Schritte, die in Chapter 3 von Brown demonstriert werden, beruhen also auf einem anderen Standard der Formulierung von Grundregeln eines Kalküls, wonach nämlich die als Grundregeln erlaubten Transformationen an Teiltermen vollzogen werden (dürfen); vgl. dazu den dritten Kanon: „*In any expression, let any arrangement be changed for an equivalent arrangement.*“ (Brown, 1969, 8). Offensichtlich dürfen die Grundregeln also auch in Expressionen, die aus mehr als zwei Kreuzen bestehen, angewendet werden, nämlich auf Teilterme bestehend aus null, einem oder zwei Kreuzen. Die adäquate Anwendung bedarf also eines Verständnisses des Aufbaus des Terms aus Teiltermen. Ist bspw. in $\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|}|$ nur $\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|$ ein Teilterm, nämlich auf der Innenseite von $\overline{\qquad\quad}|$, oder auch $\overline{\overline{\;\;}|}|$ in der leicht verzerrten Gestalt $\overline{\qquad\overline{\;\;}|}|$ oder $\overline{\overline{\;\;}|\qquad}|$, nämlich unter Einschluss eines einzelnen $\overline{\;\;}|$? Die Klärung dieser Frage ist etwas aufwendig; ihr gilt die folgende Untersuchung.

Die m. E. intendierte Lesart verlangt einerseits den großzügigen Umgang mit einer m. E. missglückten Definition bzw. Wohldefiniertheit in Chapter 2 und andererseits ein Gespür für das Relevante und Irrelevante in der (Re-)Präsentation der Grundfiguren in Chapter 3 und 4; letzteres ist – wenn auch von Brown nicht so formuliert – die geeignete *Herausnahme* der Grundregeln aus ihrem Kontext in Chapter 2 und von Teilarrangements aus sie enthaltenden Arrangements. Vgl. (Brown, 1969, 26) über die Herausnahme einer Bezeichnung aus ihrem Kontext: „Let indications used in the description of theorem 8 be taken out of context so that $\overline{\overline{p}|\,p}| = \;\;$.“ Obwohl sich also der Kontext ändert, muss das Zeichen bzw. seine intendierte Bedeutung noch richtig erkannt werden; in obigem Beispiel und damit im Kontext $\overline{\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|}|$ dürfen nicht bzw. müssen die Vorderglieder der vereinfachenden Grundregeln, nämlich $\overline{\;\;}|\,\overline{\;\;}|$ bzw. $\overline{\overline{\;\;}|}|$, *erkannt* werden.

Beachten wir zunächst folgende Paraphrasierung der von Brown intendierten Verwendung der vier Grundregeln zuzüglich der zweiten Grundfigur.

> „These rules are to be applied literally whenever the given situation appears in some (possibly larger) expression. Thus I1 requires one or two adjacent marks with empty insides, and I2 requires a mark containing a single mark so that the interior mark is empty inside. It is important to understand that I2 does *not* replace $\overline{\overline{\;\;}|}|$ by a “blank symbol.” There are *no* blank symbols; there is only the empty space of the plane. I2 simply states that $\overline{\overline{\;\;}|}|$ may be *erased* or that $\overline{\overline{\;\;}|}|$ may be drawn on a blank space in the plane. But a blank space is not a symbol, it is just a place where no symbol has been drawn. There is only one blank and it does not have a size.“ (Kauffman und Solzman, 1981, 254)

Ich habe, ohne das im Zitat genauer anzuzeigen, Kauffmans Labels A1 und A2 jeweils durch die Labels I1 und I2 ersetzt, nämlich Browns Labels für die arithmetischen Initiale (vgl. S. 122); I1 und I2 werden dabei jeweils als Kodierung zweier Transformationsschritte verstanden. Weiter referiert Kauffman mit „mark“ eigentlich auf eine ‚copy of the mark‘ bzw. ein ‚token of the mark‘, kurz: auf Kreuz ($\overline{\;\;}|$).

Im Hinblick auf diese Lesart der Grundregeln muss $\overline{\;\;}|\ \overline{\;\;}|$ in $\overline{\overline{\;\;}|\ \overline{\;\;}|}|$ erkannt werden, insofern $\overline{\overline{\;\;}|\ \overline{\;\;}|}|$ tatsächlich mittels der condensations-Regel zu $\overline{\overline{\;\;}|}|$ vereinfacht werden kann und $\overline{\overline{\;\;}|}|$ dann weiter mittels der cancellations-Regel zu void. Wäre dagegen auch $\overline{\overline{\;\;}|}|$ in $\overline{\overline{\;\;}|\ \overline{\;\;}|}|$ (verzerrt) erkennbar, was nicht sein soll, so würde die cancellations-Regeln als Ergebnis $\overline{\;\;}|$ liefern. Zusammengenommen wäre das Arrangement $\overline{\overline{\;\;}|\ \overline{\;\;}|}|$ dann auf beide einfache Expressionen vereinfachbar und demnach von zweifachem Wert; im Widerspruch zum drittem sowie zum vierten Theorem.

In (Cull und Frank, 1979) wird der Vorwurf erhoben, dass die `LoF`-Notation im Hinblick auf systematische Aspekte prinzipiell unpräzise konzipiert sei; bspw. dürfe $\overline{\;\;}|$ nicht sowohl als Operator als auch als Operand interpretierbar sein und müsste einerseits eine spezifische Größe haben und das würde dann andererseits weitere Reduktionsregeln verlangen; man müsste also zunächst prinzipiell und explizit zwischen zwei void und einem void unterscheiden und diesen Unterschied dann explizit durch ein Äquivalenzpostulat aufheben, die verschiedenen Zeichen also (lediglich) bezüglich ihrer Bedeutung identifizieren, obwohl sie als Zeichen verschieden bzw. unterschieden bleiben. Genau gegen diese Vorwürfe, nämlich gegen (Cull und Frank, 1979) richtet sich die Quelle des letzten Zitats, nämlich (Kauffman und Solzman, 1981): Die `LoF`-Notation sei, so man sie richtig versteht, nicht mehrdeutiger als die gewöhnliche mathematische Notation, insbesondere sei Browns void eben größenlos und daher seien zwei Void von einem Void auch als Zeichen weder verschieden noch unterscheidbar; weiter gehe es im arithmetischen Kalkül $\overline{\;\;}|$ nicht notwendigerweise um Operatoren und Operanden, sondern einfach um Symbole, für die Substitutionsregeln definiert seien und die dann Muster liefern, die dem Operatoren-Operanden-Paradigma gemäß gelesen werden können, nicht aber müssen. Die Muster repräsentieren Terme und weiter repräsentieren äquivalente Muster gültige Gleichungen in gewöhnlichen Sprachen für Boolesche Algebren (vgl. Kapitel 9.3, insbesondere S. 179).

Ich möchte nicht für eine fehlende systematische Präzision der `LoF`-Notation argumentieren, sondern lediglich auf eine in der Literatur zu `LoF` bislang verschwiegene systematische Verständnishürde hinweisen. Dafür sei der Blick nochmals auf ein konkretes Arrangement gerichtet, nämlich $\overline{\overline{\;\;}|}|\ \overline{\overline{\;\;}|}|$. Wer hier zwei $\overline{\overline{\;\;}|}|$ nebeneinander erkennt, der führt das Arrangement mittels zweier cancellations-Schritte auf void zurück, wobei der erste Schritt an einem echten Teilarrangement im Arrangement durchgeführt wird, der zweite am noch verbleibenden Arrangement; diese Vereinfachung von $\overline{\overline{\;\;}|}|\ \overline{\overline{\;\;}|}|$ erfolgt der Paraphrasierung im Zitat gemäß. Die Regeln seien aber *buchstäblich* (literally) anwendbar, so steht dort, wenn eine der in den Gleichungen bzw. in den Grundregeln formulierte Situation vorliegt / erscheint (appear) und das ist im Hinblick auf I1 „one or two adjacent marks with empty insides“. Nehmen wir diese in (Kauffman und Solzman, 1981) formulierte Bedingung an, so ist die Anwendung von I1 auf $\overline{\overline{\;\;}|}|\ \overline{\overline{\;\;}|}|$ nicht erlaubt. Denn keines der beiden äußeren Kreuze hat eine leere Innenseite und beide inneren Kreuze, nämlich die Kreuze mit leerer

Innenseite, sind nicht in geeigneter Weise miteinander *benachbart* (adjacent). Dass die Anwendung von I1 *daher* dem ersten Kanon gemäß verboten ist, beruht auf der Adäquatheit der in (Kauffman und Solzman, 1981) formulierten Interpretation der Grundregeln im Hinblick auf die in ihnen (re-)präsentierte (ir-)relevante Information und insbesondere auf der rechten Interpretation der Labels „inside", das Brown in Chapter 2 zu bestimmen versucht, und „adjacent", das Brown selbst überhaupt nicht bestimmt.

Wohlgemerkt spielt in Chapter 2 die Innenseite eines Kreuzes eine bedeutungsvollere Rolle als die Außenseite und das geht in gewissem Sinne in die Rechtfertigung der Gültigkeit der Initialen ein. Die angekündigte systematische Verständnishürde ist m. E., dass man sich in Chapter 3 und 4 bei Formulierung der aus den Initialen abgeleiteten Grundregeln an diese hintergründigen Zeichen-Lese-Regeln weiterhin erinnern muss, nämlich insbesondere daran, dass in gewissem Sinne gilt, dass man die Kreuze von ihrer Innenseite her zur Außenseite hin lesen muss: Diese im Allgemeinen unbekannte Leseanweisung muss man in den Kalkül mithineinnehmen. Meines Erachtens sind also nicht die von Cull und Frank angemahnten Mehrdeutigkeiten der Symbole und die vermeintlich fehlenden Grundregeln problematisch; problematisch ist m. E., dass mehrdeutig ist, ob eine Grundregel anwendbar ist oder nicht, das heißt: Meines Erachtens formuliert Brown die Anwendungsbedingungen der Grundregeln nicht hinreichend transparent bzw. nicht hinreichend kontextunabhängig und sind die Relationsverhältnisse zwischen Arrangements, Teilarrangements und Räumen nicht wohldefiniert. Ersteres analysiere ich in diesem Kapitel, letzteres in Kapitel 8.

7.4.3 Der linearisierte Kalkül

In (Cull und Frank, 1979) wird die `LoF`-Notation(-sschrift) kritisiert, insofern die Symbole nicht eindeutig lesbar seien und die Schrift nicht linear sei. Ich gehe im Folgenden auf die Möglichkeit der Linearisierung ein und in Kapitel 9.1 auf ihre Lesart der Zeichen.

Browns Linearisierung der `LoF`-Sprache In den Notes zu Chapter 6 reflektiert Brown selbst auf die Unterschiede zwischen `LoF`-Schrift und `LoF`-Sprache.

> „We may observe that, in expressions, the mathematical language has become entirely visual, there is no proper spoken form, so that in reverbalizing it we must *encode* it in a form suitable for ordinary speech. Thus, although the mathematical form of an expression is clear, the reverbalized form is obscure. The main difficulty in translating from the written to the verbal form comes from the fact that in mathematical writing we are free to mark the two dimensions of the plane, whereas in speech we can mark only the one dimension of time." (Brown, 1969, 92)

Demnach wird der Unterschied zwischen der zwei-dimensionalen *Schriftform* und der ein-dimensionalen *Sprechform* von Brown selbst thematisiert und zudem wird die Verbalisierung der symbolischen Notation anhand der Gleichung C9 illustriert. Diese Gleichung aus Consequence 9 lautet:

$$\overline{\overline{\overline{b}|\,\overline{r}|}|\;\overline{\overline{a}|\,\overline{r}|}|\;\overline{\overline{x}|\,r}|\;\overline{\overline{y}|\,r}|}| = \overline{\overline{r}|\,ab}|\,\overline{rxy}|\,.$$

> „The ninth consequence, called transposition, or C9 for short, may be stated as follows.
>
> > b cross r cross cross all a cross r cross cross 2
> > x cross r cross 2 y cross r cross 2 cross all
>
> expresses the same value as
>
> > r cross ab cross all rxy cross 3.
>
> When the step allowed by this equation is taken from the former to the latter expression, it is called to crosstranspose or collect, and when taken in reverse it is called to crosstranspose or distribute. The equation can be demonstrated thus. [...]“[64] (Brown, 1969, 91)

Offensichtlich wird der Wirkungsbereich der operativen Konstante verbalisiert, indem in fachsprachlichen Ausdrücken der Form *cross* n die Anzahl an konkatenierten (Teil-)Arrangements durch n angegeben ist. Allem Anschein nach wird dabei „cross 1“ zu „cross“ vereinfacht, macht „cross all“ dem Kreuz das Arrangement aller vorausgegangener (Teil-)Arrangements zum Inhalt und könnte „cross 0“ neben „empty Token“ eine weitere Sprechform für $\overline{}|$ sein.
Wohlgemerkt ist C9 das einzige von Brown behandelte Beispiel einer Versprachlichung der Notation und tritt in C9 kein ‚empty Token‘ auf.

Eine Linearisierung der Primären Algebra und damit insbesondere der Primären Arithmetik ist demnach möglich und bereits in (Brown, 1969) gezeigt. Bei der folgenden, alternativen Linearisierung der `LoF`-Sprache mittels bekannter Zeichen und Zeichenkonventionen kommt es mir daher vornehmlich darauf an, die vom `LoF`-Leser *implizit* geforderte Lesart der Grundgleichungen und Grundschritte des Indikationenkalküls besser *explizieren* zu können. Ist bspw. $\overline{}|\;\overline{}| \rightharpoonup \overline{}|$ anwendbar im Falle von $\overline{}|\;\overline{}|\;\overline{}|$ oder im Falle von $\overline{\overline{}|}|\;\overline{}|$? Immerhin tritt beide Male *in* einem der beiden Kreuze bzw. *außerhalb* der beiden Kreuze ein weiteres Kreuz auf. Stört das die Anwendbarkeit der Regel? Nein? Oder doch? In beiden Fällen oder nur in einem Fall? Auf welche beiden der jeweils drei Kreuze ist die Regel gegebenenfalls anwendbar? Hinsichtlich des Arrangements $\overline{\overline{a}|\,b}|\,c$ lautet die entsprechende Fragestellung: Welche der Platzhalter a, b und c müssen für void Platz halten, auf

64 Die Zeilenwechsel im Zitat weichen von denen im Original ab.

dass ein vereinfachender I2-Schritt möglich ist. Allgemeiner gefragt: In welchen *Kontexten* sind die vier Grundschritte möglich bzw. erlaubt?
Mir ist nun nicht nur an einer paraphrasierten *Erklärung* der Anwendungsbedingungen der LoF-Kalkülregeln gelegen, sondern an ihrer symbolischen *Formulierung*, wofür ich auf bekannte Zeichen und Zeichenkonventionen zurückgreife. Diesbezüglich genügt die Rekonstruktion der Primären Arithmetik, obwohl auch die Primäre Algebra gleichermaßen dargestellt werden könnte.

Saluskis Linearisierung der LoF-Sprache Die Sprache meines A-Kalküls, durch welche die gewünschte *formale Explikation* möglich ist, geht zurück auf Sharon Saluskis Lösung folgender Aufgabe von Louis H. Kauffman:

> „Design a linear, parenthesis free language that describes elements of the $\urcorner$-language. Your linear language should be suitable for use in a graphics program that draws $\urcorner$-expressions.“ (Kauffman, 1979, 9)

In (Kauffman, 1979) ist lediglich Saluskis Lösung der Aufgabe skizziert, Arrangements linear zu (re-)formulieren: „She actually did write a *Plato* graphics program and this is available and working somewhere in SEO.“ (Kauffman, 1979, 9) Das *Problem* einer geeigneten Transformation der Grundschritte wird weder gelöst noch überhaupt angesprochen. Im Folgenden weise ich zunächst auf die *problematische Transformation* hin und zeige danach meine Lösung, *den* A*-Kalkül*.

Saluski benutzt in ihrer Lösung die Symbole $-$, $+$ und „(space)“, letzteres wird repräsentatiert durch ein Blank (␣). Zur Rekonstruktion der LoF-Sprache alias $\urcorner$-Sprache benutzen wir also das *Monoid* A^* mit dem Alphabet $\mathsf{A} := \{-, +, ␣\}$ und lesen die Wörter wie gewohnt von links nach rechts. Dabei ist das Monoid A^* die Halbgruppe aller A-*Wörter*, also der endlichen Folgen (zuzüglich der leeren) aus Symbolen von A, der Konkatenation als *Halbgruppenverknüpfung* und dem leeren A-Wort (symbolisiert durch Λ) als *neutralem Element*.
Muss in Browns Linearisierung der LoF-Sprache 1 als Länge des Wirkungsbereichs der operativen Konstante nicht eigens genannt werden, wohl aber eine davon abweichende Länge n oder ein „all“, so muss dagegen in der A-Sprache der Wirkungsbereich eigens begrenzt werden. Dieserart fungiert der Buchstabe $-$ von A als Pendant zu einem abgeschwächten *cross all*, ␣ als *Trenner* bzw. Begrenzer und $+$ als *Verbinder*.

> „+ joins expressions separated by a blank. Iterated +’s cause a search for corres # of ␣’s for joining up.“ (Kauffman, 1979, 9)

Etwas ausführlicher gesprochen, gilt demnach: Jedes nicht-leere A-Wort *beginnt* mit $-$; jedes ␣ trennt *zwischen* zwei A-Wörtern; jedes $+$ verbindet zwei *links* stehende, durch ein ␣ getrennte A-(Teil-)Wörter und es heben demzufolge mehrere aufeinander folgende Verbinder $+$ die gleiche Anzahl an Trennern ␣ auf; jedes

‚–' cross-t *alle* links gelegenen Expressionen *bis* zum ersten $\sqcup$, das nicht durch ein zwischen ihm und ‚–' gelegenes + aufgehoben ist. Kauffman illustriert seine knappen Erläuterungen durch folgende Beispiele.

$$- \longleftrightarrow \overline{\ \ }|$$
$$-- \longleftrightarrow \overline{\overline{\ \ }|}|$$
$$- - \sqcup - \longleftrightarrow \overline{\overline{\ \ }|}|\ \overline{\ \ }|$$
$$- - \sqcup - - \longleftrightarrow \overline{\overline{\ \ }|}|\ \overline{\overline{\ \ }|}|$$
$$- - \sqcup - - + - \longleftrightarrow \overline{\overline{\overline{\ \ }|}|\ \overline{\overline{\ \ }|}|}|$$

Problematische Transformation der Grundschritte Der illustrierten Transformation gemäß korrespondieren die beiden Wörter $-\sqcup-$ und $\overline{\ \ }|\ \overline{\ \ }|$. Demnach ist die Gleichung $-\sqcup- \ = \ -$ (I1$_{\mathsf{A}}$) das *eindeutige* Pendant des Initials $\overline{\ \ }|\ \overline{\ \ }| \ = \ \overline{\ \ }|$ (I1). Dagegen könnten dem Initial $\overline{\overline{\ \ }|}| \ = \quad$ (I2) *zwei* Gleichungen korrespondieren, nämlich $-- = \sqcup$ (I2$_{\mathsf{A}}$) und $-- = \quad$ (I2'$_{\mathsf{A}}$). Bestimmt man für diese Notation die Grundschritte ebenfalls schlicht und einfach als einseitige Lesarten der Initiale, so ist bspw. die Vereinfachung von $- - \sqcup -$ alias $\overline{\overline{\ \ }|}|\ \overline{\ \ }|$ nicht eindeutig, wie man etwa folgendermaßen sieht:

(1) $- - \sqcup - \ \rightharpoonup\ \sqcup\sqcup-$ mittels I2$_{\mathsf{A}}$;

(2) $- - \sqcup - \ \rightharpoonup\ \sqcup-$ mittels I2'$_{\mathsf{A}}$;

(3) $- - \sqcup - \ \rightharpoonup\ -- \ \rightharpoonup\ \sqcup$ mittels I1$_{\mathsf{A}}$ und I2$_{\mathsf{A}}$;

(4) $- - \sqcup - \ \rightharpoonup\ -- \ \rightharpoonup \quad$ mittels I1$_{\mathsf{A}}$ und I2'$_{\mathsf{A}}$.

Zwar könnten die A-Wörter $\sqcup\sqcup-$ und $\sqcup-$ als nicht-kanonische Formen des A-Worts $-$ vereinbart werden und damit gleichermaßen als Korrespondenzen zu dem $\overline{\ \ }|$-Wort $\overline{\ \ }|$. Und es könnten dementsprechend die A-Wörter $\sqcup$ und $\quad$ als zwei Korrespondenzen zu dem $\overline{\ \ }|$-Wort $\quad$ vereinbart werden. Doch wäre trotz dieser Vereinbarungen die Primäre Arithmetik *nicht* adäquat dargestellt, da das A-Wort $- - \sqcup -$ auf ein Pendant zu $\overline{\ \ }|$ und ein Pendant zu $\quad$ vereinfacht worden wäre. Das Beispiel zeigt also, dass die Grundregeln des A-Kalküls nicht *allzu* schlicht und nicht *allzu* einfach aus den beiden A-Gleichungen I1$_{\mathsf{A}}$ und I2$_{\mathsf{A}}$ bzw. aus den beiden A-Gleichungen I1$_{\mathsf{A}}$ und I2'$_{\mathsf{A}}$ genommen werden dürfen bzw. bei Anwendung auf A-Wörter eine gewisse Vorsicht geboten ist. Damit ist für den A-Kalkül auf ein Problem hingewiesen, das sich für den Indikationenkalkül gleichermaßen stellt, aber weniger klar zu Tage tritt. Bevor ich den A-Kalkül in einem eigenen Paragraphen behandle, möchte ich die A-Sprache in einem Vergleich zur `LoF`-Sprache sowie die Übersetzung zwischen den beiden Sprachen mit verschiedenen Grammatiken diskutieren.

Nimmt man die LoF-Notationskonventionen ernst, so ist für einen vereinfachenden I1-Schritt nicht gefordert, dass die beiden leeren Kreuze im Token direkt aufeinander folgen, und es kann hinsichtlich der *Nicht-Linearität* der LoF-Notation eine solche Nachbarschaft nicht gefordert sein. Beispielsweise geht aus $\overline{\ }|\ \overline{\overline{\ }|}|\ \overline{\ }|$ durch einen I1-Schritt $\overline{\ }|\ \overline{\overline{\ }|}|$ alias $\overline{\overline{\ }|}|\ \overline{\ }|$ hervor, wobei dies nur zwei *Token* von ein-und-demselben *Typ* sind. Ein in den LoF nicht betrachtetes Theorem erster Ordnung ist, dass es letztlich keine Einschränkung wäre, I1-Schritte nur an direkt benachbarten leeren Kreuzen vorzunehmen. Denn bspw. könnte bei Vereinfachungen – grob gesprochen – jeder vermeintlich störende Zwischenterm, der ja einzig aus Kreuzen bestünde, mittels I2-Schritten und mittels I1-Schritten an direkt benachbarten leeren Kreuzen durch Vereinfachung beseitigt werden.
Für einen vereinfachenden I1-Schritt müssen die beiden leeren Kreuze zwar nicht direkt benachbart sein, aber doch im gleichen Raum stehen, genauer: in *demselben Teil* eines Raumes.[65] Beispielsweise stehen in dem Arrangement $\overline{\overline{\ }|}|\ \overline{\overline{\ }|}|$ die beiden inneren Kreuze in dem gleichen Raum, nämlich in s_1, und sie spalten von s_1 gleichermaßen einen Teil von s_2 ab, wodurch s_2 und s_1 jeweils zweigeteilt sind. Obwohl die beiden inneren Kreuze leer sind, *darf nicht erlaubt sein*, dass sie mittels I1 zu nur einem leeren Kreuz in nur einem der beiden äußeren Kreuze kondensiert werden *dürfen*. Wäre eine solche Modifikation zu $\overline{\overline{\ }|}|\ \overline{\ }|$ alias $\overline{\ }|\ \overline{\overline{\ }|}|$ erlaubt, dann könnte $\overline{\overline{\ }|}|\ \overline{\overline{\ }|}|$ sowohl auf ein *empty cross* (I1-, I2-Schritt) als auch auf einen *empty space* (I2-, I2-Schritt) vereinfacht werden, was im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Vereinfachung stünde. Da I2 vereinfachend anwendbar sein soll, darf I1 nicht vereinfachend anwendbar sein. Durch diese und solche Überlegungen und eine kritische Analyse der Darstellungstheoreme, genauer: *ihrer Beweise*, zeigt sich – besser als von Brown symbolisiert –, wie im Indikationenkalkül gerechnet werden *soll*. Der Übergang von den Initialen zu den Grundregeln, genauer: die erlaubte Anwendung der Grundschritte in verschiedenen Kontexten, ist im Indikationenkalkül demnach eine heikle Angelegenheit des rechten Verstehens von Syntax, Semantik und Pragmatik des (gewünschten und erlaubten) Zeichen-*Gebrauchs*.

Im A-Kalkül werden die Grundregeln besser expliziert als im Indikationenkalkül, wofür wir auf eine andere Form der Termdarstellung zurückgreifen als $\mathsf{t}(\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n)$ und $\mathsf{t}(\cdots \mathsf{x}_\nu \cdots)$. Zur Illustration meines Vorgehens betrachten wir nochmals das obige Beispiel $-\ -{}_{\sqcup}-$ alias $\overline{\overline{\ }|}|\ \overline{\ }|$, bei welchem I1 nicht vereinfachend angewendet werden kann. Demnach ist ein $-$ ein Kontext, *nach* welchem es *nicht* erlaubt ist, $-{}_{\sqcup}-$ durch $-$ zu substituieren. Allgemein gesprochen: Wollen wir in einem Term einen (Teil-)Term ändern, so müssen wir seinen Kontext mitbeachten.
Wir betrachten nun Terme als Strings alias Wörter und notieren zur Explikation der Grundregeln ein A-*Wort* t als dreisilbiges Wort BME mit B als *Wortbeginn*, M als *Wortmitte* und E als *Wortende*, wobei diese drei Silben zwar Elemente von A^*

65 Vgl. die Unterscheidung zwischen „divide“ (teilen) und „cleave“ (spalten) (Brown, 1969, 87).

sind, doch im A-Kalkül nicht ableitbar sein müssen; vgl. (Burris, 1998, 225–228) für dieserart verallgemeinerte Termersetzungsregeln. Der eigentliche *Schritt* (step) wird nur an M vollzogen. Instruktiv ist dafür m. E. das Beispiel $\mathsf{B} \sqcup - \sqcup - + \mathsf{E} \rightharpoonup \mathsf{B} \sqcup - \mathsf{E}$, in welchem $-\sqcup-$ erlaubterweise durch $-$ substituiert wird. Durch die Substitution wird sowohl ein Trenner $\sqcup$ als auch der korrespondierende Verbinder $+$ getilgt.
Wohlgemerkt ist die A-Sprache linear, die ⌉-Sprache dagegen nicht. Demnach werden ⌉-Wörter bei ihrer Übersetzung in A-Wörter durch die jeweilige Lesart linearisiert und den unterschiedlichen Lesarten eines ⌉-Wortes korrespondieren A-Wörter, die im A-Kalkül nicht identisch, doch step-Modifikationen voneinander sind. Die Übersetzung codiert also nicht den *Typ* eines Arrangements, sondern ein *Token* des Typs, wobei das Token von links nach rechts gelesen wird.

Der A-Kalkül Im Folgenden werde ich meinen Entwurf eines A-Kalküls, welcher der Primären Arithmetik korrespondiert, vorstellen. Die drei *Atomfiguren* (AF) des A-Kalküls sind die Symbole $-, +, \sqcup$, die beiden *Grundfiguren* (GF) sind $-$ (für cross) und   (für void). Wohlgemerkt ist   und nicht der Trenner $\sqcup$ eine Grundfigur des Kalküls. Weiters können alle im A-Kalkül ableitbaren A-Wörter bereits als Grundfigur und als Normalformen gelten. Die Regel(anwendungs)zeichen $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ sowie deren Zusammenfassung zu $\rightleftharpoons$ verwenden wir in der Kalkül-Sprache und unserer Meta-Sprache für die Kalkül-Sprache. Ausschließlich meta-sprachlich verwenden wir die Symbole B und E, um von ableitbaren Wörtern, deren Mittelteil expliziert wird, den Wort-*B*eginn und das Wort-*E*nde zu symbolisieren, und weiter das Symbol Λ als *Repräsentation* des leeren Worts, also von void, das im A-Kalkül durch die zweite Grundfigur *präsentiert* wird.
Ich gebe zunächst die AF, GF und einige Grundregeln (GR) des A-Kalküls an und nachfolgend kurze Kommentare ab. Aus der Explizitheit der A-Notation inklusive einiger ihrer Konventionen[66] folgt, dass die beiden arithmetischen Initiale I1 und I2 mehr als je ein Paar von Grundregeln liefern.

Die AF	**Die GF**	**Einige Paare von GR**
(1) $-$	(1) $-$	(1) $\mathsf{B} \sqcup - \sqcup - + \mathsf{E} \rightleftharpoons \mathsf{B} \sqcup - \mathsf{E}$
(2) $+$	(2)	(2) $\mathsf{B} \sqcup - \sqcup - \sqcup \mathsf{E}_{++} \rightleftharpoons \mathsf{B} \sqcup - \sqcup \mathsf{E}_{+}$
(3) $\sqcup$		(3) $\mathsf{B} \sqcup - - - \mathsf{E} \rightleftharpoons \mathsf{B} \sqcup - \mathsf{E}$
		(4) $\mathsf{B} \sqcup - - + + \mathsf{E} \rightleftharpoons \mathsf{B} + \mathsf{E}$
		(5) $\mathsf{B} \sqcup - - \sqcup \mathsf{E}_{++} \rightleftharpoons \mathsf{B} \sqcup \mathsf{E}_{+}$

66 Beispielsweise beginnt jedes nicht-leere A-Wort konventionsgemäß mit dem Symbol $-$.

Offensichtlich werden für den A-Kalkül weitere GR benötigt, insofern keine der angegebenen eine der beiden GF transformiert. Nach Besprechung der angegebenen GR ergänze ich die fehlenden.

Im A-Kalkül ist vom Wortbeginn einer A-Figur abgesehen ein leeres cross durch das A-Wort ␣− zu repräsentieren. Folgt in der konkreten Repräsentation des LoF-Arrangements auf das leere cross ein weiteres leeres cross, so folgt auf ␣− als die Transformation des zweiten leeren cross gewiss nicht ␣, doch möglicherweise ␣ oder +. Betrachten und begründen wir dies nun genauer und zwar weiterhin nur die Fälle, in denen die beiden leeren cross nicht am Ende der konkreten Repräsentation des LoF-Arrangements stehen.
Im Hinblick auf das A-Wort B ␣ − ␣ − E ist dann bekannt, dass E *nicht* mit dem Symbol − beginnt, weil die beiden cross sonst in verschiedenen Räumen stünden, insofern der Wirkungsbereich von − durch das rechte ␣ in der explizierten Symbolfolge ␣ − ␣− begrenzt ist. Falls E mit ␣ beginnt, so folgt (gegebenenfalls) dem zugehörigen + direkt ein weiteres + nach, um den Trenner in der explizierten Symbolfolge zu neutralisieren; andernfalls beginnt E mit +.

Kommen wir nun auf die genannten Paare von GR zu sprechen: Offensichtlich sind GR1 und GR2 Abbilder von I1, dagegen sind GR3, GR4 und GR5 Abbilder von I2. Am einfachsten zu verstehen ist wohl GR3, nämlich die Anwendung von I2 in einem leeren cross. In GR1 und GR4 erfolgt die Substitution gemäß I1 bzw. I2 an einem Arrangement, das in der konkreten Repräsentation eines LoF-Arrangements ganz rechts in seinem Teil seines Raumes steht; das Paar korrespondierender Symbole ␣ und − vergeht bzw. entsteht dabei explizit. Dagegen erfolgt in GR2 und GR5 die Substitution gemäß I1 bzw. I2 an einem Arrangement, das in der konkreten Repräsentation eines LoF-Arrangements nicht ganz rechts in seinem Teil seines Raumes steht. Auf das dem Wortende implizite Vergehen/Entstehen von +, das dem vergehenden/entstehenden ␣ korrespondiert, soll die Indizierung von E hinweisen:

(1) Beim Wechsel von E_{++} zu E_{+} wird in E_{++} das erste +, dem in E_{+} kein − korrespondiert, durch substituiert.

(2) Beim Wechsel von E_{+} zu E_{++} wird in E_{+} das erste +, dem in E_{+} kein − korrespondiert, durch ++ substituiert.

Kommen wir nun auf die genannten fehlenden GR zu sprechen. In kanonischer Weise sind, zunächst Λ − ␣ − Λ ⇌ Λ − Λ und Λ − − Λ ⇌ Λ Λ sowie B ␣ − ␣ − Λ ⇌ B ␣ − Λ und B ␣ − − Λ ⇌ B Λ zu ergänzen. Weitere Substitutionen am Wortanfang sind Varianten von GR1, GR2, GR3 und GR5, in denen Λ die Rolle von B ␣ spielt.

Pointierende Zusammenfassung Diese Transformation der LoF-Sprache in die A-Sprache liefert also einen linear lesbaren und linear sprechbaren A-Kalkül als Darstellung der Primären Arithmetik, in dem die *Kontexte* der zu substituierenden

(Teil-)Arrangements explizit ausgewiesen werden können und auch explizit ausgewiesen werden müssen; kurz: In der A-Sprache werden die (Vor-)Bedingungen für step-Modifikationen (mit-)formuliert, wodurch eine *syntaktische Explikation der gewünschten Pragmatik* erfolgt.

Kommen wir zurück auf die Frage, ob ⌉⌉ ⌉⌉ durch einen I1-Schritt vereinfacht werden kann (vgl. S. 125). Unsere Überlegungen haben gezeigt, dass dem nicht so ist. Demnach tritt in ⌉⌉ ⌉⌉ und ebenso in ⌉⌉ ⌉ das Arrangement ⌉ ⌉ nicht in der für eine Vereinfachung mittels I1 benötigten Weise auf. Im A-Kalkül ist die Frage syntaktisch entscheidbar, weil die gewünschte Pragmatik explizit ausgedrückt ist. Folgt –␣– in einem A-Wort auf –, so ist eine Vereinfachung mittels I1 nicht erlaubt: Ein vorausgehendes – ist dafür der falsche Kontext. Dementsprechend sind im A-Kalkül auch die Anwendungsbedingungen für eine Vereinfachung mittels I2 (mit-)formuliert: In $\overline{\overline{a\,|}\,b\,|}\,c$ (vgl. S. 127) bspw. müssen a und b durch void instantiiert sein.

Weiters zeigt die Transformation, dass der Indikationenkalkül – wie auch der A-Kalkül und der simple Kalkül von Paul Lorenzen (vgl. S. 123) – nicht notwendigerweise dem *Operatoren-Operanden-Paradigma* gemäß interpretiert werden muss, sondern als Kalkül gelesen werden kann, in dem Symbole ersetzt werden, ohne dass ihnen zuvor eine Bedeutung als Operator oder Operand zugewiesen sein muss. Doch kann eine solche Zuweisung die Setzung der Grundregeln motivieren; anschließend ist der Symbolgebrauch durch die Grundregeln bestimmt und von (den zum Teil durchaus intendierten) Bedeutungen der Zeichen und Zeichenkombinationen unabhängig.

Kapitel 8

Die Sprache im Wandel nach Ladislav Kvasz

8.1 Ziel dieses Kapitels

In diesem Kapitel möchte ich das Verständnis der Laws of Form nochmals vertiefen. Unter Verwendung einiger Rückgriffe auf Chapter 2 gehe ich von Chapter 3 aus und auf Chapter 10 zu. Demnach wird der Originaltext diesmal – anders als noch in den Kapiteln 4, 5 und 7 – dem aufbauenden *Vorgehen* des Autors gemäß *nachvollzogen*,[67] um dadurch folgende Fragen zu beantworten: Inwiefern erstarkt die Sprache der Mathematik Browns? Welchen Wandel durchlaufen die Mathematik und ihre Sprache? Wohlgemerkt kann, soll und wird in diesen Nachvollzug ihrer *Ertüchtigung* die Vororientierung eingehen, welche durch die vorausgegangene, mehrfache und jeweils rückwärtsgewandte Beschäftigung mit dem Text bezweckt und erreicht wurde.

Doch werde ich dem Vorgehen von George Spencer Brown auch diesmal weder in Inhalt noch in Methode unreflektiert folgen, werde seinen mathematischen Essay also nicht nacherzählen, sondern erneut – um eines kritischen Verstehens willen – eine Distanz zum Gegenstand wahren. Ich wähle mir dafür als Optik die linguistisch orientierte, historisch informierte und systematisch interessierte Mathematikphilosophie von Ladislav Kvasz, die er in „Language in Change; how we changed the language of mathematics and how the language of mathematics changed us" (Kvasz, 2012) skizziert hat. Die Adäquatheit bzw. Tauglichkeit dieser Optik wird sich durch ihren Gebrauch erweisen, also in Kapitel 8.3 und 8.4. Vorstellen möchte ich sie in Kapitel 8.2 und vorher noch, nämlich in diesem Unterkapitel, als vielversprechende Optik plausibilisieren.

---

67 Vgl. (Brown, 1969, xii): „One of the merits of this form of presentation is the gradual building up of mathematical notions and common forms of procedure without any apparent break from common sense."

8.2 Präliminarium

8.2.1 Die Passung der Optik

Bemerkung zur Optik Im Fokus der Mathematikphilosophie von Ladislav Kvasz steht, wie schon der Titel der Arbeit zu verstehen gibt, die *Sprache* und damit der sprachliche Zugang zu und sprachliche Zugriff auf Mathematik. Mit der Wahl dieser Optik werden in Kapitel 8 also die Laws of Form unter dem Paradigma *Mathematik als Sprache* betrachtet und es zeigt sich dann das Phänomen von *Sprache im Prozess*. Kvasz seinerseits ist daran gelegen den Entwicklungsstand einer mathematischen Sprache anhand von sechs Aspekten zu spezifizieren, um mathematische Sprachen untereinander vergleichbar zu machen und dahingehend zu charakterisieren. Hinsichtlich mancher Fragestellung mag die Rede von *der* Sprache *der* Mathematik sinnvoll sein. Doch geht es in vielen Fragestellungen konkreter um die Sprache einer mathematischen (Sub-)Disziplin, wie bspw. Arithmetik, Algebra, Geometrie, Stochastik etc., konkreter noch um die Sprachen einer (Sub-)Disziplin bzw. der Vorform einer solchen (Sub-)Disziplin, nämlich ihren Ausformungen zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten, und noch konkreter um das sprachliche Klein-Klein mathematischer Strukturen zuzüglich Spracherweiterungen erster und zweiter Art, wie bspw. in Kapitel 5 für Boolesche Algebren.
Ladislav Kvasz illustriert in (Kvasz, 2012) seinen Fokus auf Mathematik als einer „Language in change“ anhand des Wandels der *algebraischen* Sprache: Er zeigt, dass die Algebra im Laufe der Zeit – gewissermaßen durch Reifung und Weitung – Schwächen und Schranken überwinden und so u.a. zentrale Fragen der Geometrie beantworten konnte. Zweifellos durchläuft die mathematische Sprache einen Wandel und dies nicht nur im Laufe der Geschichte, sondern auch innerhalb mancher Texte. Zugegeben ist der Wandel in den von Kvasz untersuchten mathematischen Sprachen ein *historisch* faktischer, also ein Wandel der mathematischen Sprache im Laufe der Geschichte: Auf solchen Wandel kann zurückgeblickt werden, doch können die früheren Phasen des Prozesses nicht geändert werden und es kann die Herkunft der Sprache, es kann die Vergangenheit des Prozesses nicht getilgt werden; der Wandel geschah und geschieht mehr oder minder unbemerkt in aller Öffentlichkeit. Der Wandel im Laufe der Geschichte, der Wandel im Großen also, zeigt sich uns allerdings nur im Kleinen, nämlich im Vergleich einzelner Texte oder anderer Zeugnisse. Das Einzelne ist dahingehend der Träger des Ganzen. Und doch ist es dann um den Wandel im Kleinen, um den Wandel innerhalb von Texten etwas anders bestellt als um den Wandel im Großen. Er ist ein anderer, insofern er – in den meisten Fällen – vom Autor bzw. den Autoren willentlich angelegt und dahingehend ein *systematisch* faktischer Wandel ist. Denn verfasst der Autor das Ende eines Textes, so hat er – in den meisten Fällen – den Anfang des Textes gewissermaßen noch in der Hand. Insofern der Anfang des Texts noch geändert

werden kann, kann der Autor für seinen Text und insbesondere für den Wandel der mathematischen Sprache in seinem Text – ihre Ausreifung – verantwortlich gemacht werden. Er könnte den Anfang noch umschreiben, könnte ihn neu verfassen. Das sollte er wohl auch, falls die Sprache am Ende der Sprache am Anfang in allen Punkten überlegen wäre. Doch ist unter diese „Punkte“ bspw. auch zu rechnen, ob die Sprache am Ende des Textes dem Leser zu Anfang des Textes schon verständlich ist – bei welchem Kenntnisstand des Lesers der Autor also ansetzen kann und will –, ob der Autor sich an Experten oder an Laien wendet, ob er der Mathematik neue Themen und Gegenstände erschließen oder das Mathematische selbst deskriptiv erfassen oder normativ in seiner Geltung rechtfertigen oder begründen möchte. So kann bspw. gerade die Darstellung des Erstarkens der mathematischen Sprache das Anliegen des Autors sein. Wie dem auch sei, im Allgemeinen hatte der Anfang eines Textes – bis der Autor sein Ende verfasst hat –, noch nicht seinen Weg in die Öffentlichkeit gefunden: Er – und mit ihm der Wandel der Sprache in ihm – wird auf ein Mal der Öffentlichkeit preisgegeben. Selbstverständlich steht und fällt diese letzte These mit dem veranschlagten Begriff von Text als einer *Einheit*; das heißt: Um die These zu retten, wäre bezüglich etwaiger Gegenbeispiele von verschiedenen Texten zu sprechen.

Dass Sprecher – und dementsprechend auch Autoren – ihre Gedanken selbst erst *kennenlernen* müssen, sie dafür selbst erst sprechen, schreiben und erproben müssen, darauf hat nicht zuletzt Heinrich von Kleist in seinem kurzen Aufsatz „Über die allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden“ von 1805 hingewiesen. Die Notwendigkeit einer solchen *Selbsterhellung*, einer solchen *Selbstverständigung* besteht auch für Simons Zeichenphilosophie und für Browns Mathematik. Beide Autoren haben ihrem Selbstverständnis gemäß ihrem Thema nur jeweils einen Anfang gegeben.[68] Ihre Themen bedürfen jeweils einer sorgfältigen Entfaltung und können nicht instantan erkannt werden. Die Themen müssen nicht nur in jedem neuen Leser eigens, sondern zudem selbst noch weiter entfaltet werden. Bei der *Vermittlung* bzw. der Anregung solcher *Vertiefung* eines Themas gehen didaktische und systematische Fragestellungen Hand-in-Hand: Dem Leser wird erst nach und nach mehr und mehr zugemutet. Für Simon hat „jede wissenschaftliche Disziplin ihren bestimmten Gesichtskreis“ (Simon, 1989, 1), nämlich eine ihr eigene Methode. Simon will mit seiner Zeichenphilosophie den Gesichtskreis einer Wissenschaft verlassen, will die Grenze des Gesichtskreises überschreiten, um damit den „Standpunkt mit dem ihm zugehörigen Horizont selbst in den Blick“ (Simon, 1989, 1) zu bekommen. In mathematischen Lehrbüchern werden die Themen für gewöhnlich einerseits verallgemeinert, wodurch mehr Beispiele erfasst werden, und andererseits spezifiziert, wodurch an Beispielen mehr erfasst wird. Das *explizite Thema* der Laws of Form ist das *Distinguieren*, also das Unterscheiden als eine

68 Vgl. (Simon, 1989, Kapitel 6) und (Simon, 1992) sowie (Brown, 1969, Introduction) und (Brown, 1999, Vorwort zur Ausgabe von 1979).

spezifische Form der Grenzziehung. Diese spezifische Form der Grenzziehung erfolgt als vollständige Disjunktion bzw. Partition eines Raums in zwei Teilräume. In nicht eindeutiger, doch m. E. hinreichend verständlicher Weise ist Browns Unterscheidung ein Entweder-Oder-Operator, soll heißen: Die Distinktion *verräumlicht* die Entweder-Oder-Unterscheidung als zweigeteilten bzw. zweigespaltenen Raum.[69] Mit dem expliziten Thema solchen Distinguierens geht in den Laws of Form ein *implizites Thema* einher, nämlich konkreter Fall von Grenzziehung, von Ein-, Aus- und Abgrenzung. Denn in den Laws of Form wird die `LoF`-Mathematik selbst konstituiert, es wird ihr eine Grenze bezogen auf Inhalt und Methode gezogen. Doch aus dem zunächst ganz kleinen abgegrenzten Raum heraus, werden der `LoF`-Mathematik nach und nach neue Inhalte und Methoden erschlossen. Damit wiederum wird am Beispiel der `LoF`-Mathematik eine anspruchsvolle Grundlegung von Mathematik praktiziert und mathematisches Praktizieren selbst ausgewiesen. Sowohl Simon als auch Brown vermitteln jeweils Grundlegendes über *Denken* und *Rechnen*. Der Eine ist dabei mehr an Philosophie orientiert, der Andere mehr an Mathematik, doch arbeiten sie beide damit, das jeweilige Rhema später zum Thema zu machen und Implizites zu explizieren.

Sehen wir nun davon ab, dass auch den aufmerksamsten Autoren etwas unbemerkt durch die Finger gleiten und insofern etwas Unbemerktes in den Text gelangen könnte, so ist der Wandel der mathematischen Sprache in einem Text also ein vom Autor gewollter und mit Absicht angelegter, zumindest ein nicht verhinderter Prozess. Der Wandel soll vom Leser im Laufe der Lektüre nachvollzogen werden können, oft soll er überhaupt erst vollzogen werden. Wer dann im Hinblick darauf metaphorisch davon spricht, dass die Sprache – mitunter die mathematischen Sprachen – ‚auf dem Weg' sei, dem wird darauf wohl mit den Fragen geantwortet: Auf welchem Weg denn? Woher also kommt sie? Und wohin geht sie? Weshalb wandelt sie sich denn überhaupt?[70] An diesen Fragen ist für uns von Relevanz, dass sie den Hinweis auf folgenden Unterschied geben: Der sprachliche Wandel mag in Texten und gleichermaßen in (der) Geschichte auf ein mehr oder minder bekanntes Ziel hin angelegt sein, seine teleologische Rekonstruktion mag also in vielen Fällen möglich sein, doch kann der Startpunkt für diesen sprachlichen Wandel in einem Text und damit anders als in der Geschichte relativ frei gewählt werden.

Kurz: Der Prozess, dem die Sprache in der Geschichte unterworfen ist und dem sie in Texten unterzogen wird, mag dieselben oder verschiedene Gründe haben. Solche etwaigen Unterschiede sind allerdings für das Folgende nicht von Relevanz, insofern – zumindest de facto und vermutlich auch de jure – nicht nur der historisch faktische, sondern auch der systematisch faktische und willentlich angelegte Wandel mathematischer Sprache aus Kvasz' linguistisch orientierter Perspektive beobachtet

69 Vgl. Rathgeb (2016), wobei die besondere Rolle, die dem Entweder-Oder-Junktor und seiner Negation, dem Genau-Dann-Wenn-Junktor, unter den 16 zweistelligen logischen Junktoren zukommt, in (Kauffman, 2001a, Abschnitt 7: The Logical Garnet) behandelt wird.

70 Josef Simon spürt mit seiner Zeichenphilsophie solchen Fragen nach; er geht auf Spurensuche.

und spezifiziert werden kann. Im Folgenden soll der in Laws of Form von Brown angelegte sprachliche Wandel analysiert werden.

Bemerkung zur Passung Wohlgemerkt sind die Laws of Form von George Spencer Brown kein gewöhnliches Lehrbuch einer mathematischen Theorie, in dem schlicht und einfach neue mathematische Begriffe und Sätze in Rückgriff auf alte mathematische Begriffe und Sätze und unter Verwendung der üblichen Konventionen und Vorgangsweisen in einer Gemeinsprache definiert und bewiesen werden. Brown definiert also seine Algebra nicht kurz und einfach im üblichen Stile: Eine Menge A mit zwei inneren Verknüpfungen $\cdot$ und $'$ sowie einem ausgezeichneten Element 0 heißt Brownsche Algebra, falls für alle $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathsf{A}$ gilt ... (vgl. Kapitel 4 und 5 hinsichtlich einer solchen (Re-)Konstruktion). Stattdessen bringt Brown eben diese Konventionen und Vorgangsweisen überhaupt erst zu Wege: die Verwendung von Symbolen für Konstanten und für Variablen, die Verwendung von Abbildungen sowie die Verwendung und Rechtfertigung von bestimmten Beweisverfahren. Und er leistet damit einen Beitrag zu einer möglichen Grundlegung von Mathematik, einer *Grundlegung* von Mathematik durch eine *Einführung* in Mathematik und dabei gehen dann didaktische und systematische Zwänge eine enge Verbindung miteinander ein. Wohlbemerkt ist Erziehung, Training und Unterweisung von Kindern Brown ein besonderes Anliegen,[71] wobei er diesen Exkurs wider das „fehlgeleitete[.] Schulsystem“ als *Präsident* von „The Sentinel Trust for Creative Education“ unterzeichnet und Daten zur Kontaktaufnahme angibt.[72]
Die Frage nach der richtigen Grundlegung von Mathematik *ist* für Brown – so lese ich die `LoF` – die Frage nach der richtigen Lehre von Mathematik. Insbesondere ist Browns Lehre der `LoF`-Mathematik eine sich selbst rechtfertigende Einführung *von* und *in* Mathematik und (Aussagen-)Logik.

> „What status, then, does logic bear in relation with mathematics? We may anticipate, for a moment, Appendix 2, from which we see that the arguments we used to justify the calculating forms (e.g. in the proofs of theorems) *can themselves be justified by putting them in the form of the calculus.* The process of justification can be [.] seen to feed upon itself, and this may comprise the strongest reason against believing that the codification of a proof procedure lends evidential support to the proofs in it. All it does is provide them with coherence.“ (Brown, 1969, 101f.)

Browns Auffassung gemäß trägt die (Aussagen-)Logik nicht die Beweislast der Mathematik. Der Kern, aus dem die LoF-Mathematik wächst, dessen systematische Entfaltung sie ist und *bei* dem und *mit* dem die in sie einführende Lehre ihren Ausgang nimmt, das ist Browns *Distinktionsbegriff*. Die Bedeutung des Zeichens

71 Vgl. (Brown, 1997, Einladung) und (Brown, 2007).

72 Vgl. (Brown, 2007, 6f., 9f.), doch sind diese Bemerkungen in (Brown, 1969) noch nicht, in (Brown, 1999) und (Brown, 2008) nicht mehr enthalten.

Distinktionsbegriff ist m. E. zugleich die Antwort auf die Frage: Was ist der Fallunterscheidung als Definitions- und Beweisprinzip transzendental?
Der Ermöglichungsgrund für die *Fallunterscheidung* als Definitions- und Beweisprinzip in der Mathematik ist – kurz gesagt – die generisch verstandene vollständige Disjunktion: Der Grundgedanke der `LoF` bzw. das in den `LoF` entfaltete Thema ist m. E. das Beweisprinzip der Fallunterscheidung, genauer: die in der üblichen Mathematik vollzogene Weise mit Entweder-Oder-Unterscheidungen umzugehen. Wir erfassen etwas als Gesamtheit von Fällen, analysieren die Fälle und bilden die Synthese im Hinblick auf die Gesamtheit. Der in der Mathematik übliche Umgang mit Entweder-Oder-Unterscheidungen ist Thema in diesem Kapitel und Kapitel 11, denn er ist Grundthema der `LoF`.

Mit seiner Grundlegung der LoF-Mathematik folgt Brown keiner der drei großen Schulen zu Anfang des 20. Jahrhunderts (Logizismus, Formalismus, Intuitionismus)[73] und geht auch nicht konform mit dem zeitgenössischen Konstruktivismus (vgl. Lorenzen, 1970). Die *Logik* gilt Brown nur als angewandte Mathematik, nicht aber als ein adäquates Fundament für die Mathematik; stattdessen ist die Aussagenlogik eine Einkleidung der LoF-Mathematik (vgl. Brown, 1969, Appendix 2). Der *Formalismus* gilt Brown nur als ein spätes, ein bestenfalls maßgeschneidertes Kleid für die jeweilig zu betreibende Mathematik; der Formalismus ist nicht der Kern der Mathematik und verdeckt allzu leicht ihren jeweiligen Sinn (vgl. Brown, 1969, Notes Chapter 8). Vom *Intuitionismus* und *Konstruktivismus* unterscheidet sich Brown allein schon dadurch, dass die Fallunterscheidung das für die LoF-Mathematik fundamentale Beweisprinzip ist. Die Fragestellung, ob es zwei irrationale Zahlen gebe, deren Potenz rational ist, gilt dahingehend als prototypisch, dass sie klassisch und üblicherweise auch formalistisch *leicht* zu beantworten ist, intuitionistisch bzw. konstruktiv betrachtet dagegen nicht. Denn im Rückgriff auf die (klassische) Menge an reellen Zahlen lässt sich mittels Fallunterscheidung folgendermaßen argumentieren: Entweder ist schon *die* Potenz rational, deren Basis und Exponent die Quadratwurzel von 2 ist, oder *deren* Potenz mit der Quadratwurzel von 2 als Exponent. Wohlgemerkt ist bereits in Kapitel 4 und 5 gezeigt, dass der Indikationenkalkül in kanonischer Lesart der *klassischen* Aussagenlogik isomorph ist. Die Autoren von (Fuchs und Hoegl, 2011), die dieser kanonischen Lesart nicht folgen, weisen auf eine gewisse Nähe der Laws of Form zur intuitionistischen Mathematik hin.
Weder Logik noch Formalismus sind also die Grundlage der `LoF`-Mathematik; Brown unternimmt eine andere Grundlegung. Der Anfang, den Brown der LoF-Mathematik gibt, ist nämlich – in Anlehnung an die alltägliche Praxis im Umgang mit Unterscheidungen – ein begrifflicher (Chapter 1), der dann arithmetisch und algebraisch erschlossen (Chapter 2) und expliziert (Chapter 3 bis 11) sowie rückblickend in seinem Ausgang geometrisch reflektiert (Chapter 12) wird. Die für die

73 Vgl. (Körner, 1968) für eine Darstellung dieser drei Schulen.

LoF-Arithmetik und LoF-Algebra angelegte Unterscheidung zwischen Zeichen und Sachen ist im Hinblick auf die LoF-Geometrie von geringer Relevanz, insofern dort – in einer m. E. möglichen Lesart – die Zeichen als die Sachen erprobt werden (vgl. Kapitel 10.4). Dieserart wird der Ausgang der Theorie über die Repräsentation der Sachen durch arithmetische und algebraische Zeichen plausibilisiert durch Betrachtungen zur Präsentation der Sachen durch geometrische Zeichen.
In (Brown, 1969) geht es also – wie ich in Kapitel 11 genauer thematisieren möchte – zunächst um eine Protomathematik, also um das Zuwegebringen von Mathematik und erster Begriffe und Sätze bzw. das erstarkende Ausgreifen des Mathematischen:

> „In recording this account of them [gewisser mathematischer Prinzipien; M.R], I have aimed to write so that every special term shall be either defined or made clear by its context“ (Brown, 1969, xi).

Als spezieller Ausdruck (special term) darf hier jedes Zeichen gelten, das über die gewöhnliche Kenntnis der englischen Sprache, des Zählens und der gewöhnlichen Repräsentation von Zahlen hinausgeht (vgl. Brown, 1969, xi). Mittels der Zeichen, die im Alltag gebraucht werden, etabliert Brown in Chapter 1 und 2 seine LoF-Mathematik. Das macht auf den Mathematiker, der den Umgang mit in ihrem Gebrauch präzise geregelten Zeichen gewohnt ist, einen irritierenden Eindruck, insofern die Bedeutungen[74] der alltäglichen, nun aber für die Grundlegung der Mathematik in Anspruch genommenen Zeichen irisieren.
Fassen wir zusammen: Für Brown ist die gewissermaßen beim Alltag ihren Ausgang nehmende, lehrende Einführung in Mathematik: Der richtige Weg einer Grundlegung von Mathematik ist also eine Darstellung der *Genese der Sache* als didaktisch wohlüberlegte, systematisch orientierte Entfaltung einer Lehre von Mathematik. Die LoF-Mathematik wird also als Geschöpf dargestellt und `LoF` ist also eine Begründungsschrift von Mathematik, die beim gewöhnlichen Sprachgebrauch ihren Ausgang nimmt und sowohl eine mathematische Fachsprache als auch eine eigene ungewöhnliche mathematische Formelsprache entwickelt. Die explizierte mathematische Sprache *erstarkt*, insofern sie erst im Fortgange der Argumentation und auf den jeweiligen Bedarf hin entwickelt und nicht schon vollständig entfaltet vorausgesetzt wird. Ich möchte demnach behaupten, dass Brown mit seinen Laws of Form klar Stellung bezogen hat für eine *Darstellung von Mathematik als methodisch geordnete Disziplin* und mehr noch: für eine *Grundlegung von Mathematik als Lehre, also als Mathesis* (vgl. Kapitel 11).

> „One of the merits of this form of presentation is the gradual building up of mathematical notions and common forms of procedure without any apparent break from common sense.“ (Brown, 1969, xiif.)

74 Der Terminus *Bedeutungen* sei diesmal nicht streng als Zeichen in Simons Sinne gebraucht.

Wird die Grundlegung von Mathematik dieserart als ihr *schrittweiser Aufbau* verstanden, so ist „the orderly development of mathematical conventions and formulations stage by stage“ (Brown, 1969, xiii) neu zu leisten und „every special term shall be either defined or made clear by its context“ (Brown, 1969, xi).

8.2.2 Sechs Spezifikationsaspekte

Im zweiten Abschnitt von „Language in Change“ (Kvasz, 2012) behauptet der Autor, dass jede (historische) Ausformung einer mathematischen Sprache im Hinblick auf sechs Aspekte *charakterisiert* werden kann: „Taken together they unequivocally characterize the language of mathematics of a particular historical period.“ (Kvasz, 2012, 16). Kvasz bezeichnet diese Aspekte als „*potentialities of the language of mathematics*“, denn „they express different things that the language enables us to do“ (Kvasz, 2012, 17).
Jede dieser sechs „potentialities“ ist in einer mathematischen Sprache bis zu einem gewissen Grad, ihrer jeweiligen „power“ ausgeformt. Die terminologische Unterscheidung zwischen ‚potentiality‘ und ‚power‘ wird in (Kvasz, 2012) nicht *explizit* getroffen. Ich lese Kvasz’ Ausführungen allerdings dahingehend, dass die *implizit* getroffene Unterscheidung es vorsieht, *power* als die Konkretion einer *potentiality* zu fassen. Damit ist ‚potentiality‘ ein Aspekt oder Kriterium für Beobachtungen und Klassifikationen von mathematischen Sprachen und ‚power‘ die *Kraft* bzw. *Eigenschaft* (‚feature‘, ‚property‘) einer (konkreten) mathematischen Sprache. Nach Kvasz können verschiedene Phasen (stage) einer mathematischen Sprache also durch folgende sechs Kräfte *charakterisiert* werden.

> „They are:
>
> (1) *Logical power* – how complex formulas can be proven in the language,
>
> (2) *Expressive power* – what new things can the language express, which were inexpressible in the previous stages,
>
> (3) *Methodical power* – which methods enables us the language to introduce there, where on the previous stages we saw only several unrelated tricks[,]
>
> (4) *Integrative power* – what sort of unity and order the language enables us to see there, where we perceived just unrelated particular cases in the previous stages,
>
> (5) *Explanatory power* – how the language can explain the failures which occured in the previous stages,
>
> (6) *Metaphorical power* – which shows how the language, by transgressing the rules of its own syntax, can create analogies for situations that defy normal expression[.]“ (Kvasz, 2012, 16f.)

Kvasz gruppiert die Eigenschaften zu Paaren, nämlich 1. und 2., 3. und 4., 5. und 6. Diese drei Paare von Aspekten bzw. Eigenschaften sind in (Kvasz, 2012) nicht nochmals eigens mit Bezeichnungen versehen, doch nenne ich sie in Anlehnung an Browns Klassifikation der neun arithmetischen Theoreme folgendermaßen: *powers of representation*, *powers of procedure* und *powers of connexion*.[75] Die Benennung *Kräfte der Darstellung* (powers of representation) für *logical power* und *expressive power* halte ich im Hinblick auf ihre Paraphrasierung „they make it possible to prove stronger theorems and to describe wider range of phenomena" (Kvasz, 2012, 17) für gerechtfertigt. Beide Eigenschaften betreffen im angedeuteten Sinne die *darstellerischen* Möglichkeiten der Sprache: Darstellung von einerseits Mathematikinternem, andererseits Mathematikexternem. Die Benennung *Kräfte der Vorgangsweise* (powers of procedure) für *methodical power* und *integrative power* halte ich im Hinblick auf folgende Paraphrasierung für gerechtfertigt: „[They] enable us to solve wider classes of problems by means of standard methods and offer a more unified view of its subject matter" (Kvasz, 2012, 17). Beide Eigenschaften betreffen im angedeuteten Sinne die *argumentativen* Möglichkeiten der Sprache: einerseits die Tragweite, andererseits die Transparenz von Argumenten. Die Benennung *Kräfte der Verbindung* (powers of connexion) für *explanatory power* und *metaphorical power* halte ich für gerechtfertigt im Hinblick auf folgende Paraphrasierung: „[They] offer a deeper understanding of its methods and provide us with powerful metaphors that shed light on new situations" (Kvasz, 2012, 17). Beide Eigenschaften betreffen im angedeuteten Sinne die *verbindenden* Möglichkeiten der Sprache: Verbindungen, die einerseits innerhalb des Verstehenshorizonts bleiben, den Themenbestand aber neu erhellen, andererseits Verbindungen, die zwischen Altem und Neuem vermitteln und damit den Themenbestand erweitern.

8.2.3 Sechs Spezifikationsgründe

In (Kvasz, 2012) skizziert der Autor für jeden der sechs *spezifizierenden Aspekte* einen in der Mathematikgeschichte vollzogenen Wandel der *algebraischen Sprache* (vgl. dort Kapitel 3) und detektiert für jeden genannten Wandel einen *spezifischen Grund* (vgl. dort Kapitel 4). Damit stehen dann den sechs Aspekten sechs Gründe eins-zu-eins gegenüber. Im fünften und abschließenden Kapitel formuliert Kvasz die sechs Gründe algebra-unspezifisch. Seine allgemein gehaltene Zusammenfassung lautet folgendermaßen:[76]

> „We can sum up the process of constitution of a new symbolic language in the following steps:

75 Vgl. (Brown, 1969, 24): „theorems of representation", „theorems of procedure" und „theorems of connexion".

76 Anders als im Zitat erfolgt im Original die Nummerierung mittels Zahlworten.

(1) a new kind of symbols is introduced;

(2) for these symbols an operation, which can be iterated indefinitely, is defined;

(3) an conventional distinction representing an epistemological difference, is introduced;

(4) the different expressions thus created are united into linguistic forms;

(5) these forms are transformed into formal predicates; and

(6) reality is adapted to these new predicates by postulation of new objects.

It seems that these six steps were repeated several times in the history of mathematics and gradually they turned mathematics into a strong and efficient tool of human thought. The understanding of the process of construction of new symbolic languages can help us, [...] to construct new languages or at least to use the existing ones with more insight.“ (Kvasz, 2012, 38)

Ich möchte also – in Anlehnung an Kvasz’ Empfehlung – sein ‚Verständnis vom Prozess der Konstruktion einer neuen symbolischen Sprache‘ als Optik nutzen, um Browns Konstruktion der LoF-Sprache besser bzw. tiefer zu verstehen, nämlich mit größerer Einsicht. Dieser Anwendung der Kvasz-Optik zur Analyse des Brown-Textes kommt entgegen, dass zwischen den Eigenschafts-Paaren bei Kvasz und den Theorem-Klassen bei Brown eine gewisse Analogie bereits festgestellt werden konnte, nämlich im Hinblick auf die Thematisierung von Fragen der *Darstellung* (in diesem Sinne auch: *Präsentation*, *Repräsentation*), der *Vorgangsweise* (in diesem Sinne auch: *Argumentation* oder *Verfahrensweise*) und der *Verbindung* (in diesem Sinne auch: *Anbindung*, *Einbindung*, *Erweiterung*).

Die angesprochene Analogie kann kaum überraschen, insofern Brown in LoF eine Sprache für Boolesche Algebren entwickelt und Kvasz seine charakterisierenden Aspekte anhand des Erstarkens der algebraischen Sprache über den reellen (oder auch nur rationalen) Zahlen exemplifiziert. In Kapitel 3 von (Kvasz, 2012) wird skizziert, wodurch die algebraische Sprache mächtiger wurde als die Sprache der synthetischen Geometrie. Im Folgenden vereinheitliche ich die Hinweise, die Kvasz im einzelnen gibt, insofern ich die wesentlichen Punkte an einem einzigen Beispiel verdeutliche, nämlich an der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$. Wohlgemerkt ist für die Formulierung der normierten quadratischen Gleichung über $\mathbb{R}$, der Charakterisierung ihrer Lösbarkeit zuzüglich Lösung heutzutage bereits die Schulalgebra stark genug. Genau darauf gehe ich nun näher ein und verdeutliche damit das Augenmerk von Kvasz, bevor ich den LoF-Text mittels dieser Optik analysiere.

Logische Kraft (logical power)[77] Die für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$ bereits in der Schulmathematik benutzte algebraische Sprache enthält Symbole für mathematische *Gegenstände*: einerseits Symbole für konkrete *Zahlen*, wie bspw. ‚0' für Null, andererseits (Symbole für) *Variablen*, wie bspw. die Buchstaben ‚p', ‚q', ‚x'. Mit „Variablen" ist hierbei – vor dem Hintergrund verschiedener Bezeichnungskonventionen – nicht eindeutig gegeneinander abgegrenztes gemeint, wie bspw. gleichermaßen Parameter, Unbekannte, Veränderliche, Unbestimmte/ Musterverallgemeinerer/ allgemeine Zahl etc. (vgl. S. 161).

Expressive Kraft (expressive power)[78] Zudem enthält die für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$ bereits in der Schulmathematik benutzte algebraische Sprache Symbole für mathematische *Operationen*. Im Beispiel ist ‚+' als Additionsoperation zu interpretieren und die Konkatenation als Multiplikationsoperation[79], deren Iterationen mittels Exponenten symbolisiert werden. Entscheidend ist nun, dass jeder Ausdruck x^n für positive $n \in \mathbb{N}$ im Hinblick auf das algebraische Rechnen sinnvoll definiert ist;[80] algebraisch betrachtet ist die Potenzbildung also nicht beschränkt. Für die Geometrie dagegen war es ein Paradigmenwechsel, x, x^2, x^3 nicht mehr als Inhalte von Strecken, Quadraten und Würfeln zu betrachten und weitere Potenzen dahingehend als sinnlos, sondern sie allesamt als Inhalte von Strecken bzw. von $(x^n \times 1)$-Rechtecken zu betrachten.

Die ersten beiden der insgesamt sechs von Kvasz gewiesenen Schritte im Prozess der Erweiterung zuzüglich Konstitution einer symbolischen Sprache können wir folgendermaßen zusammenfassen. Zunächst wird die bestehende Sprache um ein neues *Symbol* ergänzt, dann wird zusätzlich eine unbegrenzt iterierbare *Operation* für dieses Symbol betrachtet. Im Beispiel ist das die Einführung des Symbols x zuzüglich der Potenzbildung, das heißt die iterierte Multiplikation von x mit sich selbst, die durch die Symbole x, x^2, x^3, $\ldots$ angezeigt wird.
Analog können die positiven natürlichen Zahlen symbolisiert werden durch das Symbol ‚1' und die unbeschränkt iterierbare Operation des Nachfolgens ‚+1'.

Methodische Kraft (methodical power)[81] Wie bereits besprochen (vgl. S. 145), enthält die für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$ bereits in der Schulmathematik benutzte algebraische Sprache einerseits Symbole für konkrete *Zahlen*, wie bspw. ‚0' für Null, andererseits *Variablen*, wie bspw. die Buchstaben ‚p', ‚q',

77 Vgl. (Kvasz, 2012, 20–22, 30f., 38).

78 Vgl. (Kvasz, 2012, 22f., 31f., 38).

79 Alternativ zur Konkatenation wird die Multiplikation meist durch ‚$\cdot$' bzw. ‚$*$' bzw. ‚$\times$' symbolisiert.

80 Für $n = 0$ steht x^n, also x^0, nach Konvention meist für das multiplikativ neutrale Element.

81 Vgl. (Kvasz, 2012, 24f., 32–34, 38).

‚x'. Im Hinblick auf Variablen wird allerdings für gewöhnlich die *epistemologische Unterscheidung* getroffen zwischen *Unbestimmten* alias Parametern, die wir als bekannt annehmen, und *Unbekannten*, die wir (er)kennen wollen; das sind im Beispiel einerseits ‚p' und ‚q' und andererseits ‚x'. Man kann alternativ auch von *unabhängigen* Veränderlichen versus *abhängigen* Veränderlichen sprechen.
Die (analytische) Methode der Problemlösung ist die Separation der unbekannten Variablen x. Beispielsweise wird die Situation von $x^2 + px + q = 0$ im Verfahren der quadratischen Ergänzung auch durch $x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = -q + \frac{p^2}{4}$ und durch $(x + \frac{p}{2})^2 = -q + \frac{p^2}{4}$ dargestellt und in besonders expliziter Form durch $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, nämlich die sog. Lösung der normierten quadratischen Gleichung.

Integrative Kraft (integrative power)[82] Die für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$ bereits in der Schulmathematik benutzte algebraische Sprache ermöglicht die Formulierung von Polynomen höheren Grades und das nicht nur für positive Koeffizienten. Wir brauchen also nicht für $\tilde{p} > 0$ und $\tilde{q} > 0$ die vier *Formeln* $x^2 \pm \tilde{p}x \pm \tilde{q} = 0$ als je eigene Situation und damit einzeln zu betrachten und mit einer Formel auch nicht die drei Darstellungen der gleichen Situation, nämlich $x^2 \pm \tilde{p}x = \mp\tilde{q}$ und $x^2 = \mp\tilde{p}x \mp \tilde{q}$ und $x^2 \pm \tilde{q} = \mp\tilde{p}x$. Stattdessen gilt uns unter Verwendung der reellen und nicht nur nicht-negativen Zahlen das Polynom $x^2 + px + q$ als *eine* linguistische *Form* alias ein *formales Objekt* für die *vier* polynomialen Terme $x^2 \pm \tilde{p}x \pm \tilde{q}$.
Die integrative Kraft der Sprache ist diesbezüglich, *verschiedene Situationen gleich darstellen zu können.*

Die mittleren beiden der insgesamt sechs von Kvasz gewiesenen Schritte im Prozess der Erweiterung zuzüglich Konstitution einer symbolischen Sprache können wir für das Beispiel folgendermaßen zusammenfassen. Die methodische Kraft der Sprache zeigt sich im Beispiel daran, ein-und-dieselbe Situation verschieden darstellen zu können, wogegen sich ihre integrative Kraft daran zeigt, verschiedene Situationen auf ein-und-dieselbe Weise darstellen zu können.

Explanatorische Kraft (explanatory power)[83] Die für die Gleichung $x^2+px+q = 0$ bereits in der Schulmathematik benutzte algebraische Sprache ermöglicht – im Sinne der analytischen Geometrie – die Bestimmung (falls existent) von Schnittpunkten zwischen Kreislinien und Geraden, zwischen Kreislinien und zwischen Geraden, da dies im Wesentlichen lediglich auf das Lösen einer normierten quadratischen oder linearen Gleichung hinausläuft. Mit anderen Worten und unter Verwendung

82 Vgl. (Kvasz, 2012, 25f., 34f., 38).
83 Vgl. (Kvasz, 2012, 26f., 35f., 38).

der einschlägigen Begriffe: Die Inhalte / Längen der Strecken zwischen beliebigen Punkten, die – ausgehend von einer Strecke mit Einheitslänge – allein mittels Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten konstruiert werden können, liegen in einem ‚Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$', dessen ‚Grad über $\mathbb{Q}$' eine Zweierpotenz ist.
Demnach können einige *sinnvolle Prädikate* P für Zahlen – bspw. Eigenschaften E einer Zahl, aber auch Relationen R zwischen Zahlen – durch Polynome p nach folgendem Muster definiert werden: Es gilt ‚$\mathsf{P_p}(x)$ ist wahr' bzw. ‚x hat die Eigenschaft $\mathsf{E_p}$' per Definition genau dann, wenn $\mathsf{p}(x) = 0$ gilt.[84]
Zu den trivialsten Beispielen für die Definition von Prädikaten mittels Polynomen gehört wohl die folgende: Es gilt ‚$\mathsf{N_p}(x)$ ist wahr' bzw. ‚x ist Nullstelle von p' per Definition genau dann, wenn $\mathsf{p}(x) = 0$ gilt. Über den Charakter einer simplen Definition geht allerdings die Lösung des ‚Delischen Problems' hinaus, nämlich die *Erklärung*: Die ‚Würfelvolumenverdoppelung' ist konstruktiv (allein mittels Zirkel und Lineal und in nur endlich vielen Schritten) nicht lösbar. Denn die Lösung des Problems wäre äquivalent zur Konstruktion einer Strecke des Inhalts $\sqrt[3]{2}$, doch ist $\sqrt[3]{2}$ nicht (im üblichen Sinne) konstruierbar. Denn in der Algebra des 19. Jahrhunderts konnte gezeigt werden, dass diese Zahl in *keinem* Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ enthalten ist, dessen Grad über $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist.

Metaphorische Kraft (metaphorical power)[85] Bekanntermaßen hat nicht jede reelle quadratische Gleichung eine oder zwei reelle Nullstellen; das korrespondierende Prädikat wird dann also von keinem reellen ‚Objekt' erfüllt.
Diese fehlende Lösbarkeit einiger quadratischer Gleichungen ist allerdings in gewissem Sinne behoben worden: Man verwendet das Symbol i für eine postulierte Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ und hat sich daran gewöhnt, dass – in heutiger Sprechweise – der 2-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C} := \{a \cdot 1 +_{\mathbb{C}} b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ zuzüglich einer weiteren inneren Verknüpfung $\cdot_{\mathbb{C}}$ ein Körper ist. Dieser Körper enthält eine zweite Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, nämlich $-i = (-1) \cdot i$, und ist sogar algebraisch abgeschlossen.
Dabei ist $(\mathbb{R}; +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ in $(\mathbb{C}; +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}})$ in kanonischer Weise eingebettet, sodass insbesondere die Konstanten paarweise miteinander identifiziert werden können und das Rechnen in $\mathbb{C}$ eingeschränkt auf die Einbettung von $\mathbb{R}$ das Rechnen in $\mathbb{R}$ ‚ist'. Es entzieht sich i allerdings der (wohl)bekannten Trichotomie auf $\mathbb{R}$, sodass also die übliche Ordnung auf $\mathbb{R}$ nicht auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Die Betragsfunktion jedoch kann durch $\mid a \cdot 1 +_{\mathbb{C}} b \cdot i \mid := \sqrt{a^2 +_{\mathbb{R}} b^2}$ geeignet auf $\mathbb{C}$

84 Wohlgemerkt gilt das Interesse oftmals nicht den Zahlen selbst, sondern anderen Objekten, die sich aber möglicherweise mittels Zahlen charakterisieren lassen, sodass eine Zahl x ein Objekt $\hat{x}$ vertritt. Dann gilt ‚$\mathsf{P_p}(\hat{x})$ ist wahr' per Definition genau dann, wenn $\mathsf{p}(x) = 0$ gilt. Beispielsweise ist nach Festlegung der Einheitsstrecke $\hat{1}$ die Konstruierbarkeit einer Strecke $\hat{x}$ durch ihre Länge x charakterisierbar.

85 Vgl. (Kvasz, 2012, 27f., 36f., 38).

fortgesetzt werden, sodass also $|\pm\mathtt{i}| = 1$ gilt. Mit anderen Worten: In den Umgang mit Symbolen für reelle Zahlen konnten Symbole integriert und in ihrem Gebrauch reglementiert werden, die nicht mehr (nur) für reelle, sondern für sog. komplexe Zahlen stehen.
So weit der Fingerzeig in (Kvasz, 2012); auf das gleiche Anliegen und Verfahren der Mathematiker weist auch Simon hin, nämlich im Hinblick auf ‚Wurzeln', die nicht mehr rational sind:

> „Damit jede Zahl eine Wurzel habe, wird $\sqrt{2}$ als Zahl interpretiert, als „irrationale" Zahl. Es ist aber nicht unmittelbar zu verstehen, daß es sich hier wie bei den rationalen Zahlen um eine Zahl handeln soll. Es ist eine Zahl in „metaphorischer" Bedeutung, d. h. bestimmte Grundregeln der Arithmetik bleiben in der Übertragung anwendbar." (Simon, 1989, 58)

In beiden Fällen geht es darum, dass „mathematicians extend the universe represented by the language by postulating new objects" (Kvasz, 2012, 37). Mit anderen Worten: Die logische Kraft der Sprache hat zugenommen.

Die letzten beiden der insgesamt sechs von Kvasz gewiesenen Schritte im Prozess der Erweiterung zuzüglich Konstitution einer symbolischen Sprache können wir für das Beispiel folgendermaßen zusammenfassen. Die explanatorische Kraft der Sprache zeigt sich daran, dass sie das mit Zirkel und Lineal Konstruierbare (gewisse Punkte, Strecken, Geraden, Kreise) mittels formaler Objekte (gewisse Zahlen, Polynome) sprachlich rekonstruiert; die algebraische Behandlung dieser sprachlichen Rekonstruktionen erklärt die Unmöglichkeit bestimmter Konstruktionen. Die metaphorische Kraft der Sprache zeigt sich daran, den umfänglicheren Gebrauch des Begriffes *Zahl* zu plausibilisieren und durch die Aufnahme neuer Symbole in die Sprache das (Diskurs-)Universum zu weiten.

In vorliegender Arbeit untersuche ich die `LoF` zwar im Hinblick auf die Kräfte der Darstellung und der Vorgangsweise, doch nicht hinsichtlich ihrer Kräfte der Verbindung.[86] Denn mit meiner Arbeit möchte ich weniger Anwendungen (bspw. in der Logik) und Weitungen des Indikationenkalküls untersuchen, sondern sein Erwachsen. Da die folgenden Ausführungen zur Sprache des Indikationenkalküls im Stile der Mathematikphilosophie von L. Kvasz gehalten sind, fokussieren sie die Genese der *Fachsprache* als Genese der *Formelsprache* wegen einer Genese der *Symbolsprache*. Dargestellt wird also zentral die Genese des *symbolsprachlichen* Inventars mit der damit einhergehenden formelsprachlichen Möglichkeiten und lediglich peripher das zunehmende *verbalsprachliche* Vokabular (deepest space, shallowest space, pervasive space, indicative space etc.).

86 Es ist mit Blick auf die Appendices von `LoF` offensichtlich, dass Brown selbst seine Algebra erklärend und metaphorisch verwendet sehen möchte. Die von ihm in Chapter 11 angedeutete Weitung seiner Algebra ist bspw. in (Kauffman und Varela, 1980), (Turney, 1986), (Kibéd und Matzka, 1993), (Hellerstein, 1997) und (Hellerstein, 2010) auf verschiedene Weisen durchgeführt worden.

8.3 Die Kräfte der Darstellung

Für den jeweiligen Entwicklungsstand des Indikationenkalküls gilt es im Hinblick auf seine *logische* Kraft die Frage zu klären, „how complex formulas can be proven in the language", und im Hinblick auf die *expressive* Kraft die Frage, „what new things can the language express, which were inexpressible in the previous stages" (Kvasz, 2012, 16f.). Die Frage der Darstellung lautet demnach: Über welche (unbegrenzt) *wiederholbare Operationen* verfügt man im Hinblick auf welche *Symbole*?

Brown schreibt folgendermaßen über das *ziemlich natürliche Wachstum* der mathematischen Kommunikation:

> „Working outwards from this fundamental source, the general form of mathematical communication, as we understand it today, tends to grow quite naturally under the hand that writes it. We have a definite system, we name its parts, and we adopt, in many cases, a single sign to represent each name. In doing this, forms of expression are called inevitably out of the need for them". (Brown, 1969, xii)

Demnach haben wir am Anfang ein abgeschlossenes System mit Teilen. Dann benennen wir die Teile und wir verwenden weiter in vielen Fällen nur ein Symbol, um die Namen darzustellen. Wir (we, we, we) und unser Bedürfnis (need) sind also die Triebfeder der Sprach-Entfaltung.

8.3.1 Die arithmetische Darstellung

In Chapter 3 und 4 wird die Primäre Arithmetik als Kalkül definiert sowie in ihrer image-Form behandelt. Etwas kurz gerät dabei ihre content-Form. Kapitel 7 erschließt selbige im Lichte der Zeichenphilosophie Simons, nämlich ausgehend von der Primären Algebra als einer symbolischen Algebra und der Primären Arithmetik in image-Form. Die content-Form selbst behandle ich dann in Kapitel 7.4 und reformuliere ihre Formelsprache in meinem A-Kalkül. Im Folgenden formuliere ich mittels Kvasz' linguistischer Sicht auf die Sprache Mathematik die Formelsprache der Primären Arithmetik diachronisch, nämlich ihr Wachsen und Erwachen innerhalb des Textes.

Logische Kraft – Kreuz Das erste *Symbol* der neuen Symbolsprache der LoF-Mathematik ist $\urcorner$. Wohlgemerkt kann das Symbol $\urcorner$ als Zeichen für eine Operation gelesen werden und ist in dieser Lesart die Atomfigur des Indikationenkalküls, für die irrelevant ist, ob ihre beiden Seiten leer sind oder nicht. Zudem könnte das (auf der Innenseite leere) Symbol $\urcorner$ in der Kalkülsprache auch noch als (gewissermaßen eigenes, aber nur unkenntlich verschiedenes) Symbol für einen Operanden bzw.

den Namen des markierten Zustands gelesen werden und ist – je nach Lesart – zusammengesetzt oder atomar. Doch ist $\urcorner$ als Symbol der Sprache nicht selbst die Marke (mark), die den markierten Zustand zum markierten Zustand (ge-)macht (hat), sondern lediglich eine Kopie dieser Marke. Diese Kopien erhalten den Namen Kreuz.

Expressive Kraft – Juxtaposition und Exponentiation Mit der Einführung des Symbols $\urcorner$ in die zuvor leere LoF-Sprache gehen zwei gewissermaßen gleichberechtigte *iterierbare Operationen* für dieses Symbol einher.[87]

(1) $\urcorner, \urcorner\urcorner, \urcorner\urcorner\urcorner, \ldots$ (Juxtaposition)

(2) $\urcorner, \overline{\urcorner}\rvert, \overline{\overline{\urcorner}\rvert}\rvert, \ldots$ (Exponentiation)

Auch Mischformen dieser reinen Iterationsformen liefern *Arrangements* des arithmetischen Kalküls; genauer: Unter Verwendung von lateinischen Großbuchstaben als Mitteilungszeichen sind mit A und B auch stets AB und $\overline{\mathsf{A}}\rvert$ arithmetische Arrangements und damit bspw. auch $\overline{\mathsf{B}}\rvert$, $\overline{\mathsf{A}}\rvert\mathsf{B}$, $\mathsf{A}\overline{\mathsf{B}}\rvert$, $\overline{\mathsf{AB}}\rvert$ und $\overline{\mathsf{A}}\rvert\overline{\mathsf{B}}\rvert$. In der Primären Arithmetik (image) wird dann bewiesen, dass die Arrangements tatsächlich *Expressionen* (expressions) im intendierten Sinne sind. Mit anderen Worten: Die *Terme* sind in kanonischer – geradezu obligatorischer – Weise *Termfunktionen.*
Wohlgemerkt ist die doppelte Möglichkeit, das Symbol $\urcorner$ zu iterieren, nämlich auf übliche und unübliche Weise zu konkatenieren, eigentümlich –, nämlich ein (gewisses) Zugeständnis bzw. eine Angelegenheit der (gelingenden) Identifikation. Zugegeben iterieren wir bspw. in dem Wort Boot das Auftreten des Buchstaben o mittels der gewohnten Konkatenation und es tritt ‚o' in ‚oo' *zweimal* auf. Neben dieser gewöhnlichen Iteration der Symbole auf ihrer jeweiligen Außenseite, wie im Arrangement $\urcorner\urcorner$ das Arrangement $\overline{\urcorner}\rvert$, steht allerdings die Iteration auf der Innenseite von $\urcorner$. Doch stellt sich im Hinblick auf das gewöhnliche Alphabet die Frage, ob ein Buchstabe noch er selbst bleibt, falls in ihn geschrieben wird. Bleibt das ‚o' noch ein ‚o', falls wir in seinen Innenraum schreiben? Wird es noch als ‚o' (an)erkannt und wie ist diese Lokalisierung zu linearisieren? In welcher Reihenfolge treten die Buchstaben denn dann auf? Ist der innerste Buchstabe als erster oder als letzter zu lesen? Ist er überhaupt noch als Buchstabe zu lesen, da er ja ungewohnt platziert ist? Im gewöhnlichen Sprachgebrauch begnügen wir uns mit der üblichen Konkatenation, einer linearen Verkettung, und benötigen daher keine zusätzlichen Konventionen für die unübliche Konkatenation. In LoF benötigt Brown zusätzlicher

87 Mit *iterierbar* folge ich Kvasz' Rede von „can be iterated". Mancher Leser mag sich dabei an Husserl erinnert sehen. Vgl. (Weiss, 2006) über die Rolle der Iteration in der LoF-Mathematik und dort speziell Kapitel 5 hinsichtlich einer tragfähigen Inanspruchnahme der LoF-Mathematik für die Phänomenologie.

Konventionen, da er auch eine unübliche Konkatenation alias „exponentiation“ (Banaschewski, 1977, 507) benützt.[88]

Logische Kraft – Ock Wo bleibt bei diesem Zugang Ock ( ) und wo die beiden Grundfiguren und Normalformen (simple expressions) des arithmetischen Kalküls? Wie bei der Potenzbildung für x, das heißt der iterierten Multiplikation von x mit sich selbst, kann, darf und soll auch für die beiden `LoF`-Operationen eine nullte Iteration, also ein Pendant zu x^0, gedacht werden. Und diese nullte Iteration, dieses Pendant zu x^0, soll für *beide Iterationen gleichermaßen* Ock sein, nämlich die – mal mehr mal minder augenfällige – Abwesenheit   von Kreuz, das Fehlen von Kreuz. Der augenscheinliche Leerraum   ist nur eine meta-sprachliche Repräsentation des Gemeinten. Die objekt-sprachliche Präsentation kommt gewissermaßen *ohne* Symbol und *ohne* Symbol-Versatz aus, denn wie jede Menge die leere Menge als Teilmenge enthält, so hat jedes Wort das leere Wort bzw. Ock an jeder Stelle als Teilwort. Dieserart ist Ock zwar ein Zeichen, doch kein Symbol (im herkömmlichen Sinne) und daher auch kein atomares Symbol (im herkömmlichen Sinne). Davon abgesehen ist Ock gewissermaßen atomar, weil es nicht aus (anderen) Symbolen des Kalküls zusammengesetzt ist. Zwar liefert die iteration-Gleichung $\mathsf{a}\,\mathsf{a} = \mathsf{a}$ (C5) zuzüglich void-Substitution, dass ‚void void‘ und ‚void‘ *bedeutungsgleich* sind, doch sind die beiden Zeichen bereits auf Symbolebene nicht voneinander zu unterscheiden; sie sind *symbolgleich*, insofern sie beide gleichermaßen im Kalkül nicht (re)präsentiert werden. Gleichermaßen sind nach void-Substitution die beiden Seiten der integration-Gleichung $\urcorner\ \mathsf{a} = \urcorner$ (C3) auf Symbolebene nicht zu unterscheiden. Mit anderen Worten: Im Hinblick auf das Zeichen Ock ist die Rede von einer (unendlich) *iterierbaren Operation* ohne *weiteren* Sinn. Die Rede von einer solchen Operation gilt allein dem Kreuz und *liefert* dann insbesondere dessen ein- und sogar nullfaches Auftreten.

Exkurs: Explanatorische Kraft – Anwesenheit/Abwesenheit Die Abwesenheit von Kreuz wird von Brown in Chapter 2 instrumentalisiert, insofern er den beiden reinen Iterationsformen für Kreuz denselben neuen Anfang andichtet, indem sie also beide gleichermaßen um Ock rückverlängert werden, und weiters insbesondere jedes leere Kreuz als aus Ock und Kreuz zusammengesetzt gelesen werden kann. Darin kann – ganz `LoF`-konform – eine Anwendung von *Kanon Null* namens „Koproduktion“[89] gesehen werden. Ich formuliere diese Anwendung in der Terminologie von Chapter 1: Die Anwesenheit von Kreuz ist für uns von *Wert*. Und wir

88 Wohlgemerkt interpretiert Banaschewski die beiden Konkatenationen als Notationen für zwei zweistellige Operationen und interpretiert Kreuz und Ock als zwei Konstanten(symbole); für ihn ist Kreuz also *kein* Symbol für eine *einstellige* Operation (vgl. Kapitel 9.1).

89 Vgl. (Brown, 1999, ix) und (Brown, 1997, ix), doch ist dieser Kanon nicht (mehr) in (Brown, 2008) und (noch) nicht in (Brown, 1969) enthalten.

können zwischen der Anwesenheit von Kreuz und der Abwesenheit von Kreuz eine *Unterscheidung treffen*, die Anwesenheit und Abwesenheit sind deren beide *Seiten*. Kreuz selbst ist der *Inhalt* der Anwesenheits-Seite und zudem der *Name*, mit dem die Seite *bezeichnet* wird. Gleichermaßen ist Ock der Inhalt und bezeichnende Name der Abwesenheits-Seite. Die *Form* zwischen Anwesenheit und Abwesenheit ist asymmetrisch und bevorzugt im Allgemeinen die Anwesenheit gegenüber der Abwesenheit. Wohlgemerkt wird der Inhalt der `LoF` in `LoF` durchweg als Methode praktiziert und zeigt damit seinen Erfolg. Die Form der Unterscheidung zwischen Anwesenheit und Abwesenheit ist nur ein Beispiel.
Dieses augenfällig gemachte Fehlen von Kreuz liefert die beiden *Grundfiguren* und *Normalformen*, nämlich die beiden *einfachen Expressionen* (simple expression) des arithmetischen Kalküls: Dies ist einerseits *Ock* (empty space) selbst und andererseits das *leere Kreuz* (empty cross alias empty token alias empty copy of the mark). Wohlgemerkt werden Kreuz und gleichermaßen Ock als *einfache Expressionen* (simple expression) und nicht nur als einfache Arrangements bezeichnet. Statt von *Arrangement* als Begriffs-Pendant zu Figur oder Term, die für gewöhnlich als bedeutungslos bzw. interpretationsoffen gelten, ist von *Expression* als Begriffs-Pendant zu Termfunktion die Rede, also von interpretierten Termen. Von Anfang an verschweigt Brown also nicht die Intention (der Symbole) des Kalküls, das Rechnen mit Bezeichnungen für die beiden Zustände der ersten Form. Zur Diskussion steht also nur noch das Gelingen der intendierten Interpretation der Figuren.

Logische und expressive Kraft – Pfeile Da in der *image*-Form der Primären Arithmetik bewiesen wird, dass die in ihrer *content*-Form der Primären Arithmetik behandelten Arrangements als Expressionen im intendierten Sinne taugen,[90] die Terme also wunschgemäß Termfunktionen sind, interessieren *gewisse Zusammenhänge* zwischen diesen gelingenden Expressionen, nämlich ihre (gegenseitige) *Äquivalenz* (equivalence). Wohlgemerkt sind genau die *ineinander transformierbaren* arithmetischen Arrangements als Expressionen betrachtet zueinander äquivalent.
Brown symbolisiert diese Zusammenhänge mittels mehr oder minder gewohnter *ikonischer Zeichen*, nämlich durch das in Chapter 2 definierte (beidseitig lesbare) Symbol = (is equivalent to) den Zusammenhang per Äquivalenz (equivalence)[91] und durch die in Chapter 3 definierten (jeweils nur einseitig lesbaren) Symbole $\rightharpoonup$ (is changed to) sowie $\leftharpoondown$ (is changed to) den Zusammenhang per step-Modifikation (step)[92]. Die *Pfeile* dürfen zwischen arithmetischen Arrangements stehen, die gemäß Kanon 3 (Convention of substitution) durch die Substitution eines (Teil-)Arrangements gegen ein zu ihm äquivalentes (Teil-)Arrangement, genauer: durch den Austausch äquivalenter (Teil-)*Expressionen*, auseinander hervorgehen.

90 Vgl. (Brown, 1969, 4): „Call any arrangement intended as an indicator an expression.“
91 Vgl. (Brown, 1969, 5): „Let a sign = of equivalence be written between equivalent expressions."
92 Vgl. (Brown, 1969, 5): „Let a sign $\rightharpoonup$ stands for the words is changed to."

Das Äquivalenzzeichen zwischen arithmetische Expressionen zu schreiben, ist erst im Rückblick gestattet, nämlich erst im Hinblick auf die Darstellungstheoreme. Kurz: Das ist bzw. wird für die Primäre Arithmetik (content) gerechtfertigt durch die Primäre Arithmetik (image). Ohne Verwendung der Primären Arithmetik (image) sind nur die beiden arithmetischen Initiale als Gleichungen bekannt.[93] Durch das Äquivalenzzeichen und die beiden Pfeile lassen sich also tatsächlich *neue Situationen* formulieren, nämlich Äquivalenz und Schritte, die zuvor *nicht formulierbar* waren.

8.3.2 Die algebraische Darstellung

In Chapter 5 wird die Primäre Algebra als Kalkül für die Primäre Arithmetik definiert und ist in dieser Arbeit bereits aus mehreren Perspektiven behandelt worden, nämlich im Lichte der Beweistheorie (vgl. Kapitel 4) und im Lichte der Gleichungslogik (vgl. Kapitel 5) und als *symbolische Algebra* unter Verwendung der Zeichenphilosophie Simons (vgl. Kapitel 7). Als symbolische Algebra *ist* die Primäre Algebra von Chapter 5 bis 10 die um Variablen erweiterte Primäre Arithmetik. Gemäß dieser Lesart, die nun etwas verfeinert und diachron aufgelöst wird, sollen die Kräfte der Darstellung im Indikationenkalkül nun weiter ausgeführt werden.

Logische Kraft – Variable Zur Symbolsprache der Primären Algebra gehören zunächst die Buchstabensymbole $a, b, \ldots$ Diese *variablen Symbole* (tokens of variable form) repräsentieren arithmetische Expressionen. Einerseits sind es *verschiedene* Symbole dieser Art und andererseits ist die Interpretation jedes Symbols dieser Art *variabel*, nämlich zwar eingeschränkt auf die Primäre Arithmetik, doch nicht im Einzelnen festgelegt. Für jede Variable gilt, dass ihr Wert zwar (arithmetisch) unbekannt sein darf, über ihn allerdings gemäß Theorem 5 (algebraisch) bekannt sein muss: $a = a$, $b = b$, ...

Logische Kraft – Konstanten Zur Symbolsprache der Primären Algebra gehören weiter ein algebraisches *Kreuz* ($\urcorner$) und ein algebraisches *Ock* ( ).[94] Beide *Konstanten* der Primären Algebra sind von konstanter Bedeutung. Das algebraische Kreuz repräsentiert das arithmetische. Denn es gilt für das arithmetische Kreuz nach Vereinbarung: „to be an instruction for the operation“ (Brown, 1969, 6), für das algebraische Kreuz dagegen wird vereinbart: „[to] indicate instructions“ (Brown, 1969, 25), also ein Symbol für das arithmetische Kreuz zu sein. Das algebraische

93 Vgl. (Brown, 1969, 6): „Call an indication of equivalent expressions an equation.“

94 Vgl. (Brown, 1969, 92f.): „There are two constants in the calculus, a mark or operator, and a blank or void. Reference to ‘the constant’ without qualification will usually be taken to denote the operator rather than the void.“

Ock repräsentiert gleichermaßen das arithmetische, ist demgemäß ein Zeichen, doch kein Symbol. Demgemäß wird in Chapter 5 Kreuz als Bestandteil der algebraischen Sprache *behandelt*, Ock dagegen nur in den algebraischen Initialen *verwendet.*
Man beachte, dass die arithmetischen Expressionen Kreuz und Ock von den algebraischen Expressionen in der Notation – in kanonischer Weise aus pragmatischen Gründen – nicht unterschieden werden. Ersetzen wir bspw. in der algebraischen Expression $\overline{a|}$ gemäß der Regel R2 die Expression a durch $\overline{\;\;|}$, so erhalten wir $\overline{\overline{\;\;|}|}$, wobei das innere Kreuz ein arithmetisches Kreuz ist, das äußere dagegen ein algebraisches. Weiters können wir $\overline{\overline{\;\;|}|}$ einerseits mittels der Konsequenz C1 auf das arithmetische Ock vereinfachen, andererseits mittels des algebraischen Initials J1 auf das algebraische Ock. Die Notation verwischt diese Unterschiede zwischen den arithmetischen Zeichen Kreuz und Ock und ihren algebraischen Repräsentationen, genauer: Die Konsistenz des Indikationenkalküls (von Chapter 3 bis 10) erweist diese beiden Unterscheidungen als letztlich irrelevant.

Logische Kraft – Äquivalenzzeichen In der Primären Algebra können nicht nur algebraische Arrangements und Schritte, sondern auch algebraische Gleichungen formuliert werden, da das Äquivalenzzeichen $=$ in die Symbolsprache des Indikationenkalküls eingeführt wird. Demnach sind die beiden algebraischen Initiale Gleichungen *in* der Primären Algebra, wogegen die arithmetischen Initiale lediglich Gleichungen *für* die Primäre Arithmetik sind, doch *in* der Primären Arithmetik *nicht* formuliert werden können.

Expressive Kraft In der Primären Algebra (von Chapter 5 bis 10) tritt *keine weitere* (unendlich) iterierbare Operation für die Symbole auf, stattdessen wird eine arithmetische Operation spezifiziert. So können in der Primären Algebra zwar wie in der Primären Arithmetik beliebige Expressionen in *Juxtaposition* gesetzt werden, doch nicht in *Exponentiation.* So ist bspw. die Exponentiation a^c keine Expression der Primären Algebra, $\overline{a|}$ dagegen schon. Die Exponentiation ist nämlich nur als 1-stellige Operation algebraisiert.[95]
Die Iteration der algebraischen Exponentiation kann offensichtlich so gedeutet werden, dass das alte (Teil-)Arrangement jeweils auf der Innenseite des zusätzlichen Kreuzes enthalten ist. Dieser Lesart zufolge ist also bspw. in a, $\overline{a|}$, $\overline{\overline{a|}|}$, … das Buchstabensymbol a nicht nur das erste und innerste (Teil-)Arrangement, sondern es erfolgt zudem der Anbau des zusätzlichen Symbols jeweils außen. Hinsichtlich der korrespondierenden arithmetischen Iteration gibt es dagegen keinen solchen

95 Die Exponentiation a^c zweier algebraischer Expressionen a, c könnte im Hinblick auf die intendierte Interpretation allerdings in kanonischer Weise definiert werden durch $a^c :=$ $\overline{\overline{\overline{a|}\;c|}\;\overline{a\;\overline{c|}|}|}$ und es wäre diese Operation zudem (unendlich) iterierbar (vgl. Banaschewski, 1977).

Ankerpunkt. Das zusätzliche Kreuz kann außen und gleichermaßen innen ergänzt gedacht sein. Für die Arrangements *und* die jeweiligen Expressionen ist das wegen einer Assoziativität irrelevant.
Erneut sind Mischformen der reinen Iterationsformen ebenfalls Arrangements der Primären Algebra, nämlich unter Verwendung von lateinischen Großbuchstaben als Mitteilungszeichen mit A und B nicht nur AB und $\overline{\mathsf{A}}\rceil$, sondern bspw. auch $\overline{\mathsf{A}}\rceil\mathsf{B}$, $\mathsf{A}\,\overline{\mathsf{B}}\rceil$, $\overline{\mathsf{AB}}\rceil$ und $\overline{\mathsf{A}}\rceil\overline{\mathsf{B}}\rceil$.

8.4 Die Kräfte der Vorgangsweise

Im Hinblick auf die *methodische* Kraft gilt es die Frage zu klären, „which methods enables us the language to introduce there, where on the previous stages we saw only several unrelated tricks“, und im Hinblick auf die *integrative* Kraft die Frage, „what sort of unity and order the language enables us to see there, where we perceived just unrelated particular cases in the previous stages“ (Kvasz, 2012, 16). Die Frage der Vorgangsweise lautet demnach: Über welche *Beweismethoden* verfügt man im Hinblick auf welche *Darstellungsformen*?

Brown schreibt folgendermaßen über seine Beweise von Theoremen:

> „[T]he proofs of theorems, which are at first seen to be little more than a relatively informal direction of attention to the complete range of possibilities, become more and more recognizably indirect and formal as we proceed from our original conception.“ (Brown, 1969, xii)

Demnach erstarken die Formen und Mittel für Begründungen, insofern sich die Beweise wandeln von *informell* (und direkt) zu *indirekt* und *formal*. Dabei werden die üblichen Vorgangsweisen als je genutzte Formen des Begründens schrittweise aufgebaut:

> „One of the merits of this form of presentation is the gradual building up of mathematical notions and common forms of procedure without any apparent break from common sense.“ (Brown, 1969, xii)

Weil Brown die `LoF` für allgemeinverständlich hält, sich an den „non-specialist“, den Dilettanten wendet, und ich die `LoF` als Grundlegungsschrift von Mathematik lese, bin ich am Ausgangspunkt seiner Argumentation besonders interessiert, das heißt: Wie, womit und wodurch lenkt Brown in den ersten Beweisen die Aufmerksamkeit des Lesers? Was hält Brown für (selbst)verständlich und überzeugend? Inwiefern wird der Leser mit den indirekten und formalen Beweisverfahren vertraut gemacht und welche Beweisverfahren bekommt er letztlich überhaupt zu Gesicht?

Einerseits unterscheidet man in der *Fachmathematik*, in der man – wie auch Brown an zitierter Stelle – vornehmlich von Beweisen spricht, für gewöhnlich zwischen direkten Beweisen, indirekten Beweisen und Beweisen mittels vollständiger (eventuell auch transfiniter) Induktion. Diesbezüglich möchte ich fragen: Treten diese *Beweistypen* in den `LoF` auf und, wenn ja, dann wo? Werden sie dem Leser schon gleich zu Anfang zugemutet oder wird er auf sie vorbereitet – und wenn ja, dann wie? Andererseits unterscheidet man in einer an Grundlegungsfragen interessierten *Mathematikphilosophie* – in empfehlenswerter und der fachmathematischen Beweistypologie vornehmlich übergeordneten Weise – (mindestens) zwischen den drei folgenden *Begründungstypen*: proto-mathematischen Argumentationen, mathematischen Beweisen und formalen Deduktionen (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 20), wobei Formeln in Axiomensystemen *deduziert*, die Wahrheit von Aussagen in mathematischen Redebereichen *bewiesen* und für die wahrheitswertsemantische Wohldefiniertheit *argumentiert* wird. Diesbezüglich möchte ich gleichermaßen fragen: Treten diese Begründungstypen in den `LoF` auf – und wenn ja, dann inwiefern?

Die Fragen zur mathematikphilosophischen Begründungstypologie möchte ich erst in Kapitel 11 aufgreifen, die zur fachmathematischen Beweistypologie sollen noch in diesem Kapitel beantwortet werden. Besondere Aufmerksamkeit soll dabei der Analyse der ersten drei Beweise in `LoF` zukommen. Denn die in Chapter 2 mehr oder minder wortreich explizierten Begriffe kommen darin zum Einsatz und so zeigt sich ihr Zweck im Gebrauch, wogegen Brown nur formuliert:

> „Let the intent of a signal be limited to the use allowed to it.“ (Brown, 1969, 3)

Wie ein Blick in die Literatur zeigt, ist oft nicht eindeutig zu erkennen, welcher Gebrauch nun für ein bestimmtes Signal erlaubt ist (vgl. Kapitel 9.1). Um ein erstes Beispiel zu nennen: Es gilt als strittig, welcher Gebrauch dem Signal Innenseite (inside) bezogen auf die erste Unterscheidung erlaubt ist.[96] Doch sollte m. E. die Frage gar nicht lauten, für welche der beiden Seiten der Gebrauch erlaubt ist, sondern es sollte beachtet werden, dass das Signal Innenseite nur für Kreuze (genauer: tokens of the mark) erlaubt ist. Die Antwort auf die Frage wäre demnach: Erlaubt ist der Gebrauch für keine der beiden Seiten der ersten Unterscheidung und weiters ist die erste Unterscheidung nicht unbedingt – wie zumeist angenommen – ein Kreis. Im Hinblick auf die Beantwortung der für ein Textverständnis relevanten Fragen, empfehle ich, auf Browns Gebrauch der Signale/Zeichen zu achten. Kurz: Die Regelungen kann man nicht nur anhand ihrer Formulierung verstehen, sondern auch anhand ihrer Anwendungen, nämlich daran wie Brown sie gebraucht.

96 Vgl. (Weiss, 2006, 70f.) und (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 101).

8.4.1 Die arithmetische Vorgangsweise

Die content-Form der Primären Arithmetik ist in Kapitel 7.4 behandelt, ihre image-Form in Kapitel 7.3. Vor dem Hintergrund dieser Themenerschließung fokussiere ich im Folgenden nur noch auf die Punkte, die im Lichte der linguistischen Optik Kvasz' zentral sind.

Methodische Kraft – Demonstrationen In der Primären Arithmetik (content) werden Konsequenzen demonstriert, nämlich *Schritte* zwischen *einzelnen* Arrangements vollzogen, wofür Teilarrangements eines Arrangements durch Arrangements substituiert werden. Unerlässlich ist dahingehend, den Aufbau des Arrangements aus Teilarrangements zu verstehen. Beispielsweise ist $\overline{\overline{\;\;}|}|$ ein Teilarrangement von $\overline{\overline{\;\;}|}|\,\overline{\overline{\;\;}|}|$, doch ist $\overline{\;\;}|\;\overline{\;\;}|$ kein Teilarrangement. Kanon 3, 4 und 5, welche die Substitution von Teilarrangements und damit die Wertbestimmung von Arrangements bestimmen, setzen voraus, dass die Termstruktur verstanden ist. Brown hätte es dem Leser durch geeignete Kommentare m. E. leichter machen können.[97]
Kommen wir nun zu der Schwierigkeit, die vier Grundschritte aus den initialen Gleichungen zu gewinnen. Denn es ist hinsichtlich der `LoF`-Notation eine methodische Kraft,[98] eine Gleichung überhaupt *gerichtet* zu lesen. So muss in der Lesart die konventionelle Unterscheidung getroffen werden, eine epistem(olog)ische Verschiedenheit zu vollziehen. Zugegeben liefern die kanonische Leserichtung von links nach rechts und die unterschiedlichen Anzahlen an Kreuzen auf den je zwei Seiten der Initiale epistem(olog)ische Verschiedenheiten.[99] Doch müssen diese Verschiedenheiten erst noch durch eine Konvention zu einem Unterschied erhoben werden. Das gilt nach Kanon 1 *generell* und nach Definition des Äquivalenzzeichens speziell: Bei Brown werden Gleichungen zunächst als Ganzes erfasst, nämlich als „indication of equivalent expressions" (Brown, 1969, 6). Es sind $x = y$ und $y = x$ nur vermeintlich verschieden, nur zwei Token *eines* Typs. Sie sind nämlich ein-und-derselbe Hinweis auf die Äquivalenz der arithmetischen Expressionen x und y (vgl. Brown, 1969, 5, 29). Kurz: Die Symmetrie der Äquivalenz ist eine semantische Inferenz und nicht (nur) eine formale Ableitung. Die augenscheinliche Verschiedenheit der beiden Gleichungen ist lediglich der Notation geschuldet (vgl. S. 284).[100] Erst in Chapter 3 werden durch Kanon 5 die Verschiedenheiten zu (nach Konvention

97 Dies ist die in Kapitel 7.4.2 und 7.4.3 behandelte Problematik.

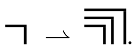
98 Vgl. (Kvasz, 2012, 38): Der konnotierte Grund für eine Änderung der methodischen Kraft ist, eine „conventional distinction representing an epistemological difference" einzuführen.

99 Vgl. (Simon, 1989, 58f.): „Das mathematische Axiom, daß Gleichungen so gut von rechts nach links wie von links nach rechts zu lesen seien, bewirkt erst die Vorstellung von *einer* Interpretation von *Verschiedenem*."

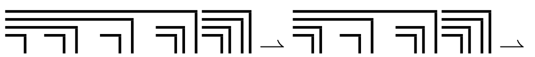
100 Schwartz dagegen ist in der von ihm verwendeten Sprache darauf angewiesen, diese Token-Typ-Relation als formale Ableitung zu regeln: „[S]ymmetry and transitivity of equality are formalized as rules of inference." (Schwartz, 1981, 242).

akzeptierten) Unterschieden und überhaupt erst dann kann *eine* Äquivalenz zu *zwei* Substitutionen Anlass geben, nämlich zu einem *vereinfachenden* $\rightharpoonup$-Schritt und einem *verkomplizierenden* $\leftharpoondown$-Schritt. Diese beiden Schrittsymbole – und im Rückblick dann auch noch das Äquivalenzzeichen – ermöglichen die Repräsentation des arithmetischen Rechnens. Sie verbinden und trennen ein Arrangement und seine step-Modifikation. Sie halten die beiden Arrangements auf Distanz.

Beispiele für Demonstrationen Nach den vier (Grund-)Schritten werden noch weitere vier arithmetische Demonstrationen behandelt: zwei in Chapter 3, eine in Chapter 4 und eine in Chapter 8. Ich notiere und kommentiere die Beispiele, ohne die Schritte selbst beim Namen zu nennen:

(1) . Brown zeigt damit, dass an ein-und-demselben Arrangement verschiedene Arten von Schritten möglich sind, nämlich bspw. an einem leeren Kreuz nicht nur der confirmation-Schritt gemäß I1, sondern auch ein compensation-Schritt gemäß I2 (vgl. Brown, 1969, 9).

(2) . Brown zeigt damit, dass diesem Arrangement durch Vereinfachung gemäß Kanon 4 ein Wert zugewiesen ist (vgl. Brown, 1969, 9). Wohlgemerkt ist keine andere Vereinfachung möglich als die auf ein leeres Kreuz.

(3) . Brown überprüft an diesem Beispiel, ob das im Beweis von Theorem 3 benutzte Verfahren im Ergebnis mit der Demonstration übereinstimmt (vgl. Brown, 1969, 18).

(4) . Brown thematisiert an diesem Beispiel, dass der Wert von ein-und-demselben Arrangement per Demonstration (wie angegeben) *im* Inhalt des Kalküls und per Beweis (vgl. Theorem 2) *im* Bild des Kalküls bestimmt werden kann.[101]

Das letzte Beispiel zeigt dem Leser insbesondere, dass Brown in Chapter 8, also vor dem Hintergrund der Darstellungstheoreme, nun auch Gleichungen zu der Primären Arithmetik (content) zählt. Weiters zeigen die Beispiele, dass nicht nur das leere Kreuz und Ock *Grundfiguren* des arithmetischen Kalküls sind, sondern alle arithmetischen Arrangements.

101 Vgl. (Brown, 1969, 43): „In the form of any calculus, we find the consequences in its content and the theorems in its image.“

Integrative Kraft – Mitteilungszeichen In Chapter 4 verwendet Brown in den Beweisen der arithmetischen Theoreme nicht nur Zeichen der LoF-Formelsprache und Zeichen der LoF-Fachsprache, sondern zudem sog. *Mitteilungszeichen* – wie das Äquivalenzzeichen –, um *über* Buchstaben und Wörter sowie *von* Buchstaben und Wörtern der Symbolsprache zu sprechen. Das sind insbesondere die folgenden *synkopierten Bezeichner*, die Brown wiederholt zur Bezeichnung von (allgemeinen und/oder speziellen) Arrangements bzw. Expression gebraucht: a (arrangement), e (expression), e_s (simple expression), e_c (compound expression), c_e (empty cross), v (variable [in eher technischem Gebrauch]) und weiters als *Parameter* für beliebige arithmetische Expressionen p, q, r (vgl. Theoreme der Verbindung) und x, y (vgl. Theoreme der Vorgangsweise).
Zur fachsprachlichen Beschreibung der *Struktur* von Arrangements und Expressionen der Symbolsprache wird weiters der *synkopierte Bezeichner* s (space) verwendet, oftmals versehen mit diversen Indizes wie Zahlen bspw. im Bezeichner s_n (space of depth n), aber auch Buchstaben, die selbst synkopierte Bezeichner sind, wie bspw. im Bezeichner s_d (deepest space). Beispielsweise ist c_d im Beweis von Theorem 1 der Bezeichner für ein Kreuz eines Arrangements a, das den tiefsten Raum (deepest space) s_d in a enthält. Die Möglichkeit des Mathematikers mit synkopierten Bezeichnern und – interessanter noch – mit gemischten Bezeichnungen, nämlich Bezeichnungen, die aus objektsprachlichen und synkopierten Zeichen bestehen, souverän umzugehen, zeigen m. E. die Zeichen m und n besonders schön und deutlich. Beispielsweise gilt $\overline{m|} = n$. Die Zeichen m und n werden von Brown für den Beweis von Theorem 3 als Mitteilungszeichen etabliert, worauf ich in Kapitel 11.5.3 näher eingehen werden.
Die Mitteilungszeichen und insbesondere die synkopierten Bezeichner machen es möglich, Arrangements des Kalküls zur Gänze und in Teilen zu thematisieren und Operationen an ihnen zu beschreiben. Sie ermöglichen dadurch *Beweise* für mehrere – zumal alle – arithmetischen Expressionen zugleich zu führen. Denn sie ermöglichen es, nicht nur konkrete Demonstrationen zu notieren, sondern allgemeine Demonstrationsverfahren zu formulieren.

Methodische Kraft – Beweise In der Primären Arithmetik (image) werden unter Verwendung der Mitteilungszeichen insbesondere mittels *Fallunterscheidung* Theoreme über Arrangements alias Terme bzw. über das arithmetische Demonstrieren bewiesen. Wird ein Term t_1 mittels Kanon 3 transformiert in einen Term t_2, wird also einer seiner Teilterme durch einen äquivalenten Teilterm substituiert, so ist das in der Primären Arithmetik zunächst nur als ein Schritt zwischen den Termen zu notieren, $t_1 \rightharpoonup t_2$. Mittels Kanon 5 kann jede solche Änderung rückgängig gemacht werden, also $t_1 \leftharpoondown t_2$, da es zu jedem der vier Grundschritte einen gegenläufigen gibt. Die vier Darstellungstheoreme garantieren, dass die arithmetischen Termfunktionen vor der Änderung eines Teilterms äquivalent sind zu den durch die Änderung erhaltenen Termfunktionen, dass also der Wert eine Invariante hinsichtlich der Schritte an Termfunktionen ist. Demnach gilt also $\mathtt{t}_1 = \mathtt{t}_2$ und gleichermaßen $\mathtt{t}_2 = \mathtt{t}_1$. Zwischen einem Term und seiner step-Modifikation kann also statt der Symbole $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ auch das Äquivalenzzeichen $=$ verwendet werden. Solche Gleichungen bezeichnen tatsächlich Äquivalenzen und erlauben damit gemäß Kanon 3 und 5 *zusätzliche* step-Modifikationen bzw. abgeleitete Regeln: In solchen Gleichungen, die nicht zu den beiden primitiven Gleichungen zählen, sind demnach mehrere Grundschritte kondensiert. Wohlgemerkt gehört erst in der Primären Algebra das Äquivalenzzeichen tatsächlich dem Kalkül an und kann erst im algebraischen Kalkül mit Gleichungen selbst gerechnet werden.

Beispiele für Beweise Brown beweist in Chapter 4 neun arithmetische Theoreme. Die Theoreme der *Verbindung* (T9) und (T8) zuzüglich ihrer Beweise sind Thema von Kapitel 11.5.3, die Theoreme der Vorgangsweise T7, T6 und T5 zuzüglich ihrer Beweise sind Thema von Kapitel 12.3.3 und die Theoreme der Darstellung T4, T3, T2 und T1 zuzüglich ihrer Beweise sind Thema von Kapitel 11.5.3.

Ich führe nun einen arithmetischen Beweis zu einer Gleichung, die Brown algebraisch demonstriert, nicht aber beweist, nämlich die reflexion-Gleichung C1.

Theorem. Reflexion[102]
In jedem Fall gilt

$$\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \mathsf{a}\,.$$

Beweis
Lass $\mathsf{a} = \overline{\ \ |}$ sein.
Somit gilt $\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \overline{\overline{\overline{\ \ |}|}|} = \overline{\ \ |}$ nach Substitution (K3) und Ordnung (I2).
Daher gilt in diesem Fall $\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \mathsf{a}$ nach T7.
Nunmehr lass $\mathsf{a} = \quad$ sein.
Somit gilt $\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \overline{\overline{\ \ |}|} = \quad$ nach Substitution (K3) und Ordnung (I2).
Daher gilt in diesem Fall $\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \mathsf{a}$ nach T7.
Es gibt keinen anderen Fall von a nach T1.
Es gibt keine andere Art, einen Fall von a zu substituieren nach T5 und T6.
Daher gilt $\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \mathsf{a}$ in jedem Fall.

In der Primären Algebra können Gleichungen nicht nur bewiesen, sondern zudem demonstriert werden. Das werden wir nun näher betrachten.

102 Vgl. (Brown, 1969, 28) für die allgemeingültige Gleichung und (Brown, 1969, 23f.) für die Art, die Aussage zu formulieren und zu beweisen.

8.4.2 Die algebraische Vorgangsweise

Die content-Form der Primären Arithmetik ist in Kapitel 7.4 behandelt, ihre image-Form in Kapitel 7.3. Vor dem Hintergrund dieser Themenerschließung spezifiziere ich im Folgenden nur die Punkte, die im Lichte der linguistischen Optik von Ladislav Kvasz zentral sind.

Integrative Kraft – Variablen Die Stärkung der logischen Kraft der Primären Algebra gegenüber der Primären Arithmetik erfolgt durch die Aufnahme der arithmetischen Mitteilungszeichen in die algebraische Symbolsprache. Die Algebra wird also als symbolische Algebra und damit insbesondere als Hilfsmittel zur Repräsentation der Arithmetik zu verstehen gegeben, wobei die zusätzlichen Symbole es ermöglichen *Muster* in arithmetischen Termen zu formulieren und über alle Instanzen dieser Term-Formen simultan zu sprechen. Das ist eine Stärkung der integrativen Kraft des Indikationenkalküls. Jede solche Klasse arithmetischer Terme, die in der Primären Arithmetik (image) unter Verwendung von Mitteilungszeichen thematisiert werden konnte, ist nun innerhalb der Primären Algebra (content) ein einzelner Term. Da die algebraische Symbolsprache das Äquivalenzzeichen enthält, können in der Algebra *algebraischen Terme* und *algebraischen Gleichungen* zwischen algebraischen Termen betrachtet werden. Das ist eine weitere Stärkung der integrativen Kraft des Indikationenkalküls.

Methodische Kraft – Demonstrationen Eine mehrfache Stärkung der Methode arithmetischen Demonstrierens ist, dass in der Primären Algebra (content) sowohl algebraische Arrangements als auch algebraische Gleichungen regelgeleitet umgeformt werden können (vgl. Kapitel 5.2.1). Das algebraische Rechnen mit den konstanten und *variablen* Zeichen sowie mit Expressionen und *Gleichungen* kodifizieren die beiden algebraischen Regeln R1, R2 sowie die drei Theoreme der Vorgangsweise T5, T6, T7. Dabei sind hinsichtlich der Variablen epistemologische Unterscheidungen ‚im Spiel', insofern die Variablen allesamt wechselweise unter den folgenden drei Aspekten betrachtet werden können: *Kalkülaspekt*[103], dem *Einsetzungsaspekt*[104] und dem *Gegenstandsaspekt*[105] (vgl. Malle, 1993, Kapitel 2.1). In der mathematikdidaktischen Literatur, aus der ich die Rede von Variablenaspekten nehme, geht es im Wesentlichen nur um Zahlen als Konstanten zu den Variabeln. Im Kontext der `LoF`-Mathematik entsprechen den Zahlen die Werte und den Zahlzeichen die

103 Vgl. (Malle, 1993, 46): „**Kalkülaspekt** (Rechenaspekt): *Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.*"

104 Vgl. (Malle, 1993, 46): „**Einsetzungsaspekt**: *Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf.*"

105 Vgl. (Malle, 1993, 46): „**Gegenstandsaspekt**: *Variable unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand.*"

Expressionen; doch ist dieser Unterschied in den fachsprachlichen Ausdrücken selbstverständlich irrelevant. Dementsprechend lasse ich im Folgenden Werte als Zahlen gelten und Expressionen als Zahlzeichen. Die algebraischen Regeln, die *substitution*-Regel R1 und die *replacement*-Regel R2, erlauben und explizieren beide den Kalkülaspekt und R2 zudem den Einsetzungsaspekt. In Konsequenzen (consequences) können die Variablen gut und gerne auch nur unter dem Gegenstandsaspekt betrachtet werden.

In den LoF kommt eine andere Unterscheidung zwischen Variablenaspekten erst spät ins Spiel. Ich spreche hierbei von der Unterscheidung im Hinblick auf die *Art der Repräsentation* (vgl. Malle, 1993, Kapitel 3.1): Erfolgt die Repräsentation unter dem *Einzelzahlaspekt*, so gilt sie einer beliebigen, aber festen Zahl aus dem betrachteten Bereich, eben nur *einer Zahl*. Erfolgt sie hingegen unter dem *Bereichsaspekt*, so repräsentiert die Variable *jede Zahl* des Bereichs. Umfasst der Bereich selbst mehr als nur eine Zahl, so kann bezüglich der Repräsentation unter dem Bereichsaspekt unterschieden werden zwischen dem *Simultanaspekt*[106] und dem *Veränderlichenaspekt*[107]. Alternativen zur Malleschen Terminologie gibt es mehrere.[108] Illustrierend möchte ich anführen, dass Variablen unter dem Einzelzahlaspekt auch *Unbekannte* (unbekannte Zahl) genannt werden, unter dem Simultanaspekt auch *Unbestimmte*, (unbestimmte bzw. allgemeine Zahl) sowie Muster-Verallgemeinerer und unter dem Veränderlichenaspekt auch *Veränderliche* (veränderliche Zahl) sowie Variable (in Funktionen).

Kommen wir nun zurück auf (Brown, 1969) und klassifizieren die dortige Verwendungsweise grob: In Chapter 5 bis 11 werden die Variablen vornehmlich als *allgemeine* Zahlen gebraucht, insofern bspw. die integration-Gleichung $\urcorner\, a = \urcorner$ (C3) allgemein gilt, nämlich für alle arithmetischen Instanzen von a. In Chapter 8 und 11 werden die Variablen vereinzelt auch als Pendants zu sog. *veränderlichen Zahlen* verwendet, insofern bspw. im Beweis von Theorem 16 die Variable ν zwischen den Grenzen ihres Wertes oszilliert, also *veränderlich* ist. Diese Sichtweise, dass ein algebraisches Arrangement als Funktion in seinen Veränderlichen betrachtet werden kann, entsteht in Chapter 8, insofern dort die iterierte algebraische Eponentiation einer Expression e betrachtet wird. Diese Expressionen haben jeweils einen konstanten Wert, doch alterniert die Folge ihrer Werte. In Chapter 11 wird diese Sichtweise dann wieder aufgegriffen und eine Oszillatorfunktion betrachtet. Diese Funktion selbst tritt als Lösung einer Bestimmungsgleichung auf. Mit anderen Worten: In einer Gleichung wird eine Variable als *unbekannte* Zahl gelesen, die es

106 Vgl. (Malle, 1993, 80): „**Simultanaspekt**: Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden *gleichzeitig* repräsentiert."

107 Vgl. (Malle, 1993, 80): „**Veränderlichenaspekt**: Alle Zahlen aus dem betreffenden Bereich werden *in zeitlicher Aufeinanderfolge* repräsentiert (wobei der Bereich in einer bestimmten Weise durchlaufen wird."

108 Vgl. (Siebel, 2005, 83) für eine tabellarische Gegenüberstellung von – einander mehr oder minder korrespondierender – Variablenaspekten verschiedener Autoren.

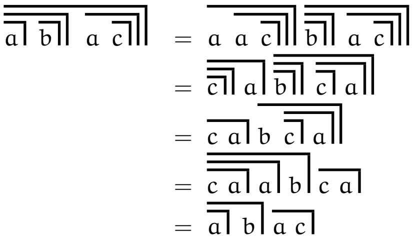
zu bestimmen gilt. Da für beide arithmetische Instanzen von f die Gleichung $\overline{\mathsf{f}|} = \mathsf{f}$ nicht gilt, ist die Gleichung hinsichtlich der Primären Arithmetik unlösbar (vgl. Chapter 11).

Beispiele für Demonstrationen Brown demonstriert in Chapter 6 neun algebraische Konsequenzen. Die Demonstrationen zeigen simultan die Äquivalenz zwischen den Elementen ganzer Klassen von arithmetischen Arrangements. Ich notiere und kommentiere zwei Beispiele, nämlich die algebraische Demonstration der auf S. 160 arithmetisch bewiesenen reflexion-Gleichung C1 von Chapter 6 und die Demonstration einer algebraischen Gleichung, die von Brown in Chapter 8 lediglich algebraische bewiesen wird.

Als erstes Beispiel möchte ich eine Demonstration der reflexion-Gleichung $\overline{\overline{a|}|} = a$ (C1) betrachten. Brown demonstriert diese Konsequenz zweifach, nämlich zunächst ausführlich und dann in einer verknappten Form (vgl. Brown, 1969, 28–31). In der ausführlichen Variante werden einerseits vor Anwendung der substitution-Regel die benötigten Instanzen der algebraischen Initiale explizit mittels der replacement-Regel hergestellt. Andererseits werden die Anwendungen von R1 und R2 jeweils paraphrasiert. In der verknappten Variante werden die algebraischen Schritte nur noch als Ketten-Ableitungen bzw. -Folgerung formuliert (vgl. S. 58): Denn die algebraischen Schritte lassen sich als *Ableitungen* und gleichermaßen als *Folgerungen* lesen, also *formal* oder *inhaltlich*. Ersterenfalls betont man den syntaktischen Aspekt, letzterenfalls den semantischen. Die Kurzversion der Demonstration lautet folgendermaßen (vgl. Brown, 1969, 31):

$$
\begin{array}{lll}
\overline{\overline{a|}|} & & \\
= & \overline{\overline{\overline{a|}|}\,\overline{a|}\,|}\;\overline{\overline{a|}|} & \text{J1} \\
= & \overline{\overline{\overline{\overline{a|}|}\,\overline{a|}\,|}\;\overline{\overline{\overline{a|}|}\,a\,|}\,|} & \text{J2} \\
= & \overline{\overline{\overline{\overline{a|}|}\,a\,|}|} & \text{J1} \\
= & \overline{\overline{\overline{\overline{a|}|}\,a\,|}\;\overline{\overline{a|}\,a\,|}\,|} & \text{J1} \\
= & \overline{\overline{\overline{\overline{a|}|}|}\;\overline{\overline{a|}|}\,|}\;a & \text{J2} \\
= & a & \text{J1.}
\end{array}
$$

Als zweites Beispiel für eine Demonstration behandle ich eine Gleichung, die Brown in Chapter 8 zwar arithmetisch beweist, aber nicht algebraisch demonstriert. In meiner Kettengleichung könnte statt „C2 (thrice)“ auch T13 verwendet werden.



C7
C2
C1 (twice)
C2
C2 (thrice)

Wie gesagt, demonstriert Brown diese Gleichung nicht, doch *beweist* er sie zweifach. Dabei liefert er eigentlich nicht verschiedene Beweise, sondern lediglich verschiedene Repräsentationen eines Beweises, wie er auch die reflexion-Gleichung zweifach demonstriert: zunächst ausführlich, dann verkürzt (vgl. S. 163).

Integrative Kraft – Mitteilungszeichen Die Stärkung der logischen und integrativen Kraft der Primären Algebra gegenüber der Primären Arithmetik erfolgt durch die Aufnahme der arithmetischen Mitteilungszeichen in die algebraische Symbolsprache. Damit können dann arithmetische Arrangements bestimmter Formen mittels Variablen notiert werden. Wie gelingt Brown der analoge Fall? Die Theoreme der Primären Algebra betreffen in Chapter 7 zunächst algebraische Arrangements bestimmter Formen, indem J2, C2, C8 und C9 verallgemeinert werden, und dann algebraische Arrangements beliebiger Form, indem bspw. ihre Normalformen fachsprachlich beschrieben und formelsprachlich skizziert werden. Um in solchen formelsprachlichen Skizzen des Termaufbaus über algebraische Arrangements im Allgemeinen zu sprechen, verwendet Brown „. . . “ als Mitteilungszeichen und setzt dabei implizit voraus/darauf, dass der Leser das Bildungsmuster erkennt. In Chapter 8 erweitert Brown für den Beweis von Theorem 16 die Fachsprache zu seinem Indikationenkalkül um die Möglichkeit über Eigenschaften von Bezeichnungen sprechen zu können und die spezielle Eigenschaft von Räumen entweder opak oder transparent zu sein.
Erst in Chapter 9 nimmt Brown für den Beweis von Theorem 17 weitere Mitteilungszeichen für die Formelsprache in Anspruch und dann gleich zweierlei: einerseits griechische Buchstaben, andererseits indizierte lateinische Großbuchstaben (vgl. Kapitel 7.2.2).

Methodische Kraft – Beweise, Mischformen Die algebraischen Beweise von Chapter 7, 9 und 10 sind Beweise über das algebraische Demonstrieren bzw. über algebraische Demonstrierbarkeit. Die epistemologische Unterscheidung, die dafür getroffen wird, ist – neben der bereits erwähnten Nutzung von Variablen speziell

auch als Veränderlichen –, dass die algebraischen Expressionen wieder vornehmlich als Arrangements in Räumen betrachtet werden. Behandelt und modifiziert werden also die formelsprachlichen Erscheinungen der Expressionen. Dies gelingt, da Brown den Termaufbau skizziert, indem er das allfällige Muster mittels der Mitteilungszeichen andeutet, und die Termmuster mittels demonstrierter Konsequenzen und/oder bewiesener Theoreme modifiziert. Weiters werden zwei weitere Kanons vereinbart, auf welche sich Argumentationen nun zusätzlich stützen dürfen.
Neben den arithmetischen Demonstrationen und den algebraischen, den arithmetischen Beweisen und den algebraischen, gibt es – so wird in Chapter 8 als Theorem 16 erläutert und bewiesen – im Indikationenkalkül auch *Mischformen.* Das ist zunächst die Möglichkeit, in arithmetische Beweise algebraische Demonstrationen zu integrieren, und weiter die Möglichkeit, in algebraischen Beweisen das zuvor nur in der Arithmetik genutzte Beweisverfahren der Fallunterscheidung hinsichtlich des Wertes einer Variablen unter vielen anzuwenden.

Beispiele für Beweise Die Beweise der Theoreme T10 und T13 erfordern die *Einsicht*, dass der allgemeine Fall prototypisch erfasst ist. Denn die Form, die innere Struktur, der betrachteten algebraischen Arrangements ist lediglich – aber immerhin – informell angedeutet. Zudem werden die Theoreme 11 und 12 vom Autor nicht mehr eigens bewiesen. Er begnügt sich damit, dem Leser einen Hinweis darauf zu geben, wie er die beiden Beweise zustande bekommt. Brown beweist nicht – im üblichen Stile – mittels vollständiger *Induktion* , sondern über eine *Reduktion.* Statt einer Induktion über den Termaufbau, die Termlänge o. ä. nutzt Brown für Theorem 14 und 17 eine *reduktive* Argumentation im Sinne von: Es gilt die Aussage $\mathsf{A}(\mathfrak{n})$, falls $\mathsf{A}(\mathfrak{n}-1)$ gilt; insbesondere gilt $\mathsf{A}(0)$. Die Reduktion beantwortet gewissermaßen die Frage für eine *vorgelegte* Aussage $\mathsf{A}(\mathfrak{n})$, indem sie die Aussage anhand der *vorausgegangenen* prüft. Die Induktion dagegen beantwortet gewissermaßen die Frage nach *allen* Aussagen $\mathsf{A}(\mathfrak{n})$. Für hemdsärmelig agierende Mathematiker ist dieser Unterschied irrelevant, doch stößt die Reduktion, anders als die Induktion, nicht in unbekannte Weiten vor ($\mathsf{A}(\mathfrak{n})$ für beliebig große $\mathfrak{n}$), sondern erschließt $\mathsf{A}(\mathfrak{n}_0)$ mittels der $\mathsf{A}(\mathfrak{n})$ für $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}_0$. Die übliche vollständige Induktion setzt einen stärkeren ‚Glauben' an die Menge der natürlichen Zahlen voraus. Eine deutliche Stärkung der methodischen Kraft im Indikationenkalkül ist das bridge-Theorem (T16) von Chapter 8.

> „**Theorem 16. The bridge**
> *If expressions are equivalent in every case of one variable, they are equivalent.*"
> (Brown, 1969, 47)[109]

109 Vgl. (Gumm und Poguntke, 1981, 33: 4.11 Folgerung): Eine Gleichung für Boolesche Algebren gilt genau dann, wenn sie für die 2-elementige Boolesche Algebra alias Boolesche Arithmetik $(\{0,1\};+,\cdot,';0,1)$ gilt.

Dem bridge-Theorem gemäß ist die Algebra mit der Arithmetik verbunden. Dieses Thema behandelt Brown in Chapter 8 unter der Überschrift „Re-uniting the two orders“, wobei mit den beiden Ordnungen in erster Linie die Arithmetik und die Algebra gemeint sind, in zweiter Linie auch das Demonstrieren und das Beweisen. Brown schreibt in diesem Zusammenhang insbesondere:

> „Any demonstrable consequence is alternatively provable as a theorem, and this fact may be of use where the sequence of steps is difficult to find. [...] By their origin, the consequences in the algebra are arithmetically valid, so we may use them as we please to shorten the proof.“ (Brown, 1969, 44, 46)

Browns Beispiel (vgl. S. 164) ist tatsächlich eine „demonstrable consequence“, die er zunächst allein mittels arithmetischer Initiale und arithmetischer Theoreme beweist und dann noch bei zusätzlicher Verwendung algebraischer Konsequenzen. Unter Berücksichtigung des completeness-Theorems T17 ist damit geklärt, dass eine Demonstration der Gleichung gibt. Diese Demonstration mag schwer zu finden sein, doch man weiß, dass es eine solche gibt. Wäre die Primäre Algebra dagegen unvollständig hinsichtlich der Primären Arithmetik, dann könnte die Suche schwierig sein, weil es den gesuchten Gegenstand *nicht* gibt. Die sog. Logik der Argumentation Browns – das Beispiel im Kontext – ist zwar nicht direkt falsch, aber doch unsauber und könnte den Leser irritieren. Denn – wie bereits implizit gesagt – es ist durch den arithmetischen Beweis allein nicht schon gezeigt, dass die Gleichung demonstrierbar ist. Der Diskussion, welchen Profit man aus der arithmetischen Gültigkeit der algebraischen Initiale schlagen kann, wäre – ohne completeness-Theorem besser gedient mit einer ‚Gleichung‘, die arithmetisch nicht gilt. Brown hätte m. E. also zunächst ein Beispiel dieser Art betrachtet bzw. schon auf die Vollständigkeit der Algebra im Hinblick auf die Arithmetik verwiesen.

Kapitel 9

Vier Zwischenbemerkungen

9.1 Verschiedene Lesarten und Notationsformen

In der Sekundärliteratur kursieren verschiedene Lesarten der Formelsprache des Indikationenküls. Im Folgenden skizziere ich zwei Lesarten der Primären Algebra, die von der Lesart Schwartz' abweichen, und zudem zwei Möglichkeiten die *nicht-Lokalität* der `LoF`-Notation zu denken.

Zunächst möchte ich mit den Worten von Schwartz an seine in Kapitel 4 genutzte Lesart erinnern. Daniel Schwartz nämlich beginnt seine Reformulierung der Primären Algebra mit folgenden Worten:

> „In order to present the primary algebra as a rigorously defined formal system, the following amendments are made to Spencer-Brown's original formalism:
>
> (1) a symbol ε is used to denote the blank space,
>
> (2) square brackets are used to replace the mark $\urcorner$, so that expressions may be written as linear strings of symbols rather than two-dimensional arrays,
>
> (3) the mark $\urcorner$ by itself, thought of as „covering" a blank space, thus becomes written as [ε]". (Schwartz, 1981, 242)

Demnach sieht Schwartz im Inneren des Symbols $\urcorner$ einen *leeren Raum* (blank space). Er selbst symbolisiert leeren Raum durch das Symbol ε und deutet ihn als Zeichen für einen Zustand $\mathfrak{u}$, das heißt: $\nu(\varepsilon) = \mathfrak{u}$ und $\nu([\varepsilon]) = \mathfrak{m}$ für jede Bewertung ν (vgl. S. 40). Kurz: Schwartz' formale Sprache enthält ein Symbol ε für eine Konstante, ein Symbol [.] (*brackets*-Klammerung) für eine ein-stellige Operation und ein Symbol = als Äquivalenzzeichen. Zur Symbolisierung einer zwei-stelligen Operation verwendet Schwartz kein eigenes Symbol, sondern nutzt die simple Möglichkeit der Konkatenation und er zeigt (Teil-)Termbündelung durch eine *parenthesis*-Klammerung an. Die Primäre Algebra ist in dieser Lesart vom Typ $(2, 1, 0)$.

In (Banaschewski, 1977) werden im Hinblick auf die Primäre Arithmetik der leere Raum und das leere Kreuz als *zwei* Konstantensymbole gelesen sowie zwei Symbolisierungen durch Lagebeziehungen, nämlich die *Juxtaposition* (juxtaposition) alias Konkatenation und die *Exponentiation* (exponentiation). Wohlgemerkt gibt es in dieser Lesart *keine ein*-stellige Operation. Im Hinblick auf die Primäre Algebra ist dann zu bemerken, dass die *exponentiation*-Operation *nur ein*-stellig ausgewertet wird, insofern eine Stelle im Argument durch das zweite Konstantensymbol fest besetzt und nur die andere Stelle frei ist. Die Primäre Algebra ist in dieser Lesart eine Algebra vom Typ $(2, 2, 0, 0)$.[110]

In (Cull und Frank, 1979) wird das leere Kreuz zwar als semantisch wohlbestimmt gelesen, nämlich als Zeichen für den markierten Zustand, doch als syntaktisch unbestimmt, nämlich als zweigliedrige Symbolkette sowie als einzelnes Symbol. Dafür wäre bspw. Schwartz' formale Sprache $\mathsf{L(PA)}$ (vgl. Kapitel 4.2.1), in der $[\varepsilon]$ eine zweigliedrige Symbolkette ist, erst noch um ein atomares Symbol $[\varepsilon]$ und ein Erweiterungsaxiom der *vermeintlich* trivialen Gestalt $[\varepsilon] = [\varepsilon]$ zu erweitern. Dieserart erhielte man in einer Erweiterung von $\mathsf{L(PA)}$ ebenfalls ein semantisch wohlbestimmtes, doch syntaktisch unbestimmtes Zeichen. Doch es ist in Chapter 2 die Genese des Zeichens $\urcorner$ eine andere: Dort ist das leere Token nämlich zunächst ein atomares Symbol (vgl. mit $\mathtt{u}$ in Kapitel 5.3.1), genauer: ein interpretiertes Konstantensymbol, und darf später dann zudem als zusammengesetztes Zeichen behandelt werden (vgl. $\mathtt{z'}$ zuzüglich Erweiterungsaxiom $\mathtt{z'} = \mathtt{u}$). Davon abgesehen, darf offen bleiben, ob das leere Kreuz auch noch *im* Indikationenkalkül, also ab Chapter 3, als atomares Symbol gelesen werden darf.
Gleichermaßen wird der leere Raum (blank, Ock) als ein *problematisches* Symbol (ungewisser Breite) erachtet. Denn der leere Raum symbolisiere, so die Autoren, einerseits eine Konstante und andererseits eine zwei-stellige Verknüpfung. Damit sei er bestenfalls semantisch (wohl-)bestimmt, doch erneut syntaktisch unbestimmt. Die zwei-stellige durch Ock repräsentierte Verknüpfung von Ock mit Ock enthalte demnach den leeren Raum dreifach und habe zudem (erneut) eine *vermeintlich* triviale Gestalt, nämlich bspw.: $\quad = \quad$. Kurz: Die Primäre Algebra ist in dieser Lesart eine Algebra vom Typ $(2, 1, 0, 0)$.

In (Cull und Frank, 1979) wird zudem Banaschewskis Lesart weiter expliziert, doch letztlich als die von Brown intendierte verworfen. Allem Anschein nach ist die Exponentiation nämlich nicht als eine *zweite* zwei-stellige Operation gedacht. Abgelehnt wurde die Lesart aus folgendem Grund. In dieser Lesart von $\overline{\mathfrak{p}}\rceil$ für beliebige arithmetische Expressionen $\mathfrak{p}$ kann nämlich die Gleichung $\overline{\overline{\mathfrak{a}}\rceil}\rceil = \mathfrak{a}$ sehr einfach demonstriert werden (vgl. S. 163). Nun die Überlegung: Dieser Lesart zu Folge ist $\overline{\mathfrak{a}}\rceil$ eine zweistellige Verknüpfung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\urcorner$, die wir für diese Überlegung explizit symbolisieren durch $+_2$. Dieses Symbol liegt nahe, da sich

110 Für die Primäre Algebra diskutiert der Autor zudem die Lesart wie bei Schwartz.

die Überlagerung als Operation auf der Menge $\{\overline{}|,\ \ \}$ offensichtlich verhält wie die Addition modulo 2 auf der Menge $\{1, 0\}$ (vgl. Cull und Frank, 1979, 202). Die Exponentiation ist in ihrer arithmetischen und algebraischen Variante eine assoziative Verknüpfung, die in kanonischer Weise, nämlich wie in der Arithmetik üblich, von links bzw. von innen zu lesen ist, also vom innersten Raum ausgehend; demnach gilt nach Definition $\mathfrak{a} +_2 \overline{}| := \overline{\mathfrak{a}}|$. Dann kann zunächst das arithmetische Initial $\overline{\overline{}|}| = \ \ $ (I2) alias $\overline{}| +_2 \overline{}| = \ \ $ als algebraische Konsequenz (C0) abgeleitet werden. Denn C0 ist für $\mathfrak{p} = \ \ $ die Instanz des algebraischen Initials J1. Demnach gilt folgende Ketten-Ableitung (vgl. Cull und Frank, 1979, 205f.):

$$
\begin{array}{lll}
\overline{\overline{\mathfrak{a}}|}| & & \\
= & (\mathfrak{a} +_2 \overline{}|) +_2 \overline{}| & \text{Definition von } +_2 \\
= & \mathfrak{a} +_2 (\overline{}| +_2 \overline{}|) & \text{Assoziativität von} +_2 \\
= & \mathfrak{a} & \text{Konsequenz 0.}
\end{array}
$$

Die Autoren Cull und Frank schließen aus der Offensichtlichkeit dieser simplen Ableitung von Konsequenz 1 m. E. zu Recht darauf, dass das Kreuz tatsächlich nicht als *null*-stellige Operation und dass die Exponentiation nicht als zwei-stellige Operation gelesen werden sollte. In kanonischer Lesart gibt es nämlich *keine* Überlagerungs-Operation und es ist die cross-Operation *ein*stellig.

Topologische Invarianz Auf (Kohout und Pinkava, 1980) komme ich nun mit einem anderen Anliegen zu sprechen, nämlich nicht um weitere Lesarten der Primären Algebra zu besprechen, sondern um die *nicht-Lokalität* der LoF-Notation zu behandeln.

> „From the algebraic point of view, the Spencer Brown calculus appears to be constructed at three distinct levels:
>
> a) *Level* 0*:* At this level strings are built from the alphabet of the calculus.
>
> b) *Level* 1*:* At this level restrictions are imposed by the arithmetic initials of *number* (I1) and *order* (I2).
>
> c) *Level* 2*:* At this level restrictions are imposed by the algebraic initials of *position* (J1) and *transposition* (J2).“ (Kohout und Pinkava, 1980, 163)

Erinnern wir uns zurück an die Kapitel 4 und 5. Darin axiomatisieren Schwartz und Kauffman für sein Axiomensystem Boolescher Algebren (vgl. S. 59) nicht nur die beiden algebraischen Initiale J1 und J2, sondern auch die *Assoziativität* und *Kommutativität* der zwei-stelligen Konkatenations- bzw. $*$-Operation.[111] Das geschieht in beiden Fällen durch zwei definierende Gleichungen auf Level 2 und dementsprechend für die Arithmetiken auf Level 1. Hinsichtlich der LoF-Notation

111 Vgl. dazu (K) und (A) in Kapitel 6.2.

sind solche Postulate in der Primären Algebra und in der Primären Arithmetik redundant. Die Äquivalenz muss nicht erst postuliert werden, da sie bereits als Identität vorliegt, nämlich auf Level 0 erledigt wird. Denn Brown definiert hinsichtlich der *cross*-Notation lediglich die *continence*-Relation als Grammatik der Formelsprache (vgl. Kapitel 9.2). Demnach ist bspw. die *Verschiedenheit* der Arrangements $\overline{\overline{\ \ }|\,}|\ \overline{\ \ }|$ und $\overline{\ \ }|\ \overline{\overline{\ \ }|\,}|$ nur eine scheinbare und es korrespondiert ihr kein *Unterschied*. Beide Arrangements sind Token ein-und-desselben Typs, denn es ist die cross-Notation eine *topologisch invariante Notation* (TIN):

> „Die Idee einer TIN beruht nun darauf, Zeichenketten wie ‚ab' und ‚ba' nur als verschiedene Token desselben Zeichentyps aufzufassen [...]. Jedoch wird durchaus ‚BB' von ‚B' un[t]erschieden. [...] Dann wären ‚[ab]c' und ‚c[ba]' Token desselben Typs und ‚[ab]c=c[ba]' wäre von der Form D=D." (Varga von Kibéd, 1989, 402)

Die *nicht-Lokalität* der `LoF`-Notation *ist*, dass die Termstruktur von Arrangements allein durch die *continence*-Relation (vgl. Kapitel 9.2) bestimmt ist, das heißt: allein durch die Lage der Kreuze auf der Innen- bzw. Außenseite der anderen Kreuze. Den Figuren des Indikationenkalküls entsprechen dahingehend Äquivalenzklassen von Figuren in einem an die Zeilenschreibweise gebundenen Kalkül, wobei die Äquivalenzklassenbildung nach dem Axiom $\mathtt{ab} = \mathtt{ba}$ erfolgt. Eine solche *Rekonstruktion* der nicht-Lokalität mittels einer Äquivalenzrelation in der Zeichenebene ist für ein Pendant zur Primären Arithmetik in (Kauffman, 1990, 54f.) und (Matzka, 1993) expliziert.
In (Matzka, 1993) geht die Diskussion der Termstruktur und damit der Token-Type-Beziehung noch tiefer. Denn die Wörter (strings) der `LoF`-Sprache können zwar als Äquivalenzklassen rekonstruiert werden, doch gibt es auch einen alternativen Zugang. Diesen Zugang nennt der Autor den „more natural way" (Matzka, 1993, 125). Er formuliert ein operatives Kriterium, um über die Gleichheit bzw. Verschiedenheit zweier Wörter der `LoF`-Sprache zu befinden:

> „(A) If the two given tokens of strings have different lengths, then tey are different. If they have equal length, then go to [(B'); M.R.]." (Matzka, 1993, 124)
> „(B') Check whether each atom appears equally often in both string-tokens. If this is the case, then they are equal, otherwise they are different." (Matzka, 1993, 125)

Diese Lesart erfasst Arrangements demnach nicht als „strings of atoms", sondern betrachtet sie als „heaps of atoms" (Matzka, 1993, 125). Der Autor denkt Gotthard Günther weiter und diskutiert zunächst zwei weitere *nicht-Standardnotationen* (für sich), nämlich „strings of kenoms" sowie „heaps of kenoms", und dann hinsichtlich korrespondierender mathematischer Strukturen:

> „If we look at these new semiotic objects from a mathematical point of view, we find that
>
> - heaps of atoms are structurally very similar to multisets
>
> - heaps of kenoms are structurally very similar to number theoretic partitions
>
> while strings of kenoms do not – as far as I know – resemble any well-known mathematical structure.“ (Matzka, 1993, 125)

Zu diesen Konzepten des Notierens gibt es einerseits jeweils einen naiven Zugang und andererseits jeweils eine Reformulierung mittels Äquivalenzrelationen auf der Wortmenge zu dem je gewählten Alphabet. Wohlgemerkt ist die Korrespondenz zwischen der *monoid*-Struktur und der Notation in „strings of atoms“, der *multisets*-Struktur und der Notation in „heaps of atoms“ und der *number-theoretic-partitions*-Struktur und der Notation in „heaps of kenoms“ nur die eine Seite der Medaille. Auf der anderen Seite steht, dass der Notation in „strings of kenoms“ möglicherweise eine bislang nicht betrachtete mathematische Struktur entspricht und dass sich der Mathematik durch solche nicht-Standardnotationen noch neue Themen erschließen. Dies ist wohlgemerkt tatsächlich ein Thema, das Brown in den Notes zu Chapter 4 anspricht, wonach wir es nämlich – gewissermaßen unnötigerweise – gewohnt seien die Ebene als Notationsfläche zu denken und nicht etwa die Oberfläche eines Torus.

9.2 Die continence-Relation

Im Folgenden werde ich die *continence*-Relation näher betrachten. Sie verursacht die Spezifika der `LoF`-Notation auf Level 0 (vgl. Kapitel 9.1, speziell S. 169) und damit insbesondere die iterierbaren Operationen des Indikationenkalküls (vgl. Kapitel 8.3.1). Brown definiert die continence-Relation in Chapter 2 und demnach für den Indikationenkalkül insgesamt, also für die Primäre Arithmetik und Primäre Algebra gleichermaßen.[112]

Die innere Struktur von Termen legt Brown fest als das Bestehen bzw. nicht-Bestehen einer Relation der *Be-Inhaltung* (continence)[113] zwischen den Symbolen

112 Vgl. (Bricken, 2013b) für mehrere Aufsätze über „Boundary Logic“; dies ist ein Konzept von Logik, das seinen Ausgang bei der continence-Relation und der Verwendung von Void nimmt. Mein expliziter Hinweis gilt hier dem Aufsatz „Iconic and Symbolic Containment in Laws of Form“ (Bricken, 2009); vgl. ebenfalls (Bricken, 2002) und (Bricken, 2004). Vgl. (Engstrom, 2001) für einen Vergleich der Ansätze bei Charles Sanders Peirce und bei George Spencer Brown.

113 Vgl. (Brown, 2008, 1): „There have been so many jokes about this that I had better point out that I was employing „continence“ in its original sense of „containment“, not in its later usage as „sexual abstinence“ – Author, reviewing this Text 2000-06-27“.

des Terms:

> „**Relation**
> Having decided that the form of every token called cross is to be perfectly continent, we have allowed only one kind of relation between crosses: continence.
> Let the intent of this relation be restricted so that a cross is said to contain what is on its inside and not to contain what is not on its inside.“ (Brown, 1969, 6f.)

Bevor ich auf die m. E. heikle Vergabe des Labels „inside“ näher eingehe, möchte ich zunächst anmerken, dass mit „perfectly continent“ und „continence“ Browns distinction-Prinzip ins Spiel gebracht ist, nämlich: „Distinction ist perfect continence.“ (Brown, 1969, 1), und dass nach Vereinbarung zudem jedes „token“ als Unterscheidung gelesen werden darf:

> „Let each token of the mark be seen to cleave the space into which it is copied. That is to say, let each token be a distinction in its own form.“ (Brown, 1969, 5).

Beispiele für Unterscheidungen Betrachten wir nun die Spaltung eines Raums, genauer: eine kanonische Unterscheidung in der komplexen Zahlenebene. Der Träger der Kurve $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = \exp(2\pi i \cdot t)$, eine Kreislinie um die Null mit Radius 1, partitioniert die Ebene in drei Teile, das sind die Kreislinie selbst sowie die beiden Gebiete zu den Windungszahlen $+1$ und -1. Das $+1$-Gebiet ist das (offene) Kreisinnere, das -1-Gebiet ist das (offene) Kreisäußere, die Menge der Punkte mit Windungszahl 0 ist die (abgeschlossene) Kreislinie, nämlich die den beiden Gebieten (vgl. Chapter 1) gemeinsame Grenze dazwischen. Wie die Kreislinie die komplexe Zahlenebene partitioniert, so trifft gleichermaßen auch jeder (nicht-entartete) Rechteckumriss in der (üblichen) Zeichenebene in kanonischer Weise eine Unterscheidung und jede (nicht-entartete) Kugeloberfläche im (üblichen) Raum in kanonischer Weise eine Unterscheidung. Eine solche Unterscheidung liefert auch jede reelle Zahl r in der Menge rationaler Zahlen hinsichtlich der (strikten) $<$-Relation auf der Menge der reellen Zahlen, nämlich einerseits die Menge der rationalen Zahlen, die kleiner als r sind, andererseits die Menge der rationalen Zahlen, die größer als r sind, und dazwischen r selbst als Grenze, die weder dem einen noch dem anderen Intervall angehört. Doch gehören rationale Grenzen r immerhin dem gespaltenen Raum an, nämlich der Menge der rationalen Zahlen, irrationale Grenzen r dagegen nicht. Statt der (strikten) $<$-Relation können auch die $\leqslant$- bzw. die $\geqslant$-Relation betrachtet werden –, mit der offensichtlichen Konsequenz, dass dann jede rationale Grenze einer ihrer beiden Seiten angehört. Doch ist die Menge der rationalen Zahlen selbst wiederum nur eine Seite der Grenze zwischen den rationalen und den irrationalen unter den reellen Zahlen. Dies ist nochmals ein Beispiel, bei dem die Grenze einer Unterscheidung dem Raum, den sie spaltet,

nicht angehört.
Hinsichtlich der vorgebrachten mathematischen Beispiele können Browns Begrifflichkeiten zwar (vermeintlich) präzise auf ihren Gehalt hin befragt werden, doch passen die Fragen eventuell eher zu den Beispielen als zu Browns Text. Es drängt sich bspw. die Frage auf, ob Brown die Grenze einer der beiden Seiten, dem gespaltenen Raum oder zumindest seinem Form-Begriff als zugehörig erachtet. Brown beantwortet diese Frage nicht explizit und beantwortet sie m. E. auch kaum implizit. Ich möchte folgenden Hinweis als Antwort geben. Man darf sich durch die Formulierungen in obigen Beispielen nicht in die Irre führen lassen, man darf nämlich die Grenze nicht vorschnell *ontologisieren* und man darf die Grenze nicht vorschnell mit einem Punkt (point) auf einer Seite der Grenze bzw. in dem gespaltenen Raum *identifizieren*. Das heißt zunächst, dass bspw. in einem der obigen Beispiele die Grenze zwar mit einer Zahl r identifiziert werden kann, nicht aber dass r selbst schon die Grenze *ist*. Das heißt weiter: Die Grenze selbst gehörte dem noch (*ungespaltenen*) Raum selbst *nicht* an, doch gehört sie zum *gespalteten* Raum und demnach dann auch der Form.

Browns Methode einer verschwiegenen Sprache Wohlgemerkt ist es überhaupt fraglich, ob von dem (noch) ungespaltenen Raum überhaupt gesprochen werden kann, ob er vor seiner Spaltung überhaupt ein Dasein hatte. Denn in (Brown, 1999, 3) heißt es dahingehend: „Nenne die Teile des Raumes, der durch die Teilung oder Spaltung gebildet wird, ... “. Ich gebe aber zu bedenken, dass für diese Übersetzung aus dem Englischen eine Entscheidung getroffen wurde, die auch anders hätte ausfallen können und m. E. anders hätte ausfallen sollen. Denn in (Brown, 1969, 3) lautet die Stelle: „Call the parts of the space shaped by the severance or cleft [...]“. In der Übersetzung ist also das Partizip „shaped“ auf „space“ bezogen und in einen Relativsatz aufgelöst worden. Ich meine ersteres geschah zu Unrecht. Denn im Satz vor dem zitierten Satzanfang ist „space“ bereits folgendermaßen thematisiert: „Call the space in which it is drawn the space severed or cloven by the distinction.“. Die zunächst zitierte Partizipialkonstruktion „shaped by the severance or cleft“ sollte daher nicht nochmals auf „the space“ bezogen werden, sondern auf „the parts of the space“. Wer nun also „shaped“ als „gebildet“ im Sinne von ‚ins Dasein gerufen‘ bzw. ‚zur Existenz gebracht‘ liest, so würde dies trotzdem nicht unmittelbar den (ungespaltenen) Raum betreffen, sondern die Teile des (gespaltenen) Raumes. Konform mit meiner Interpretation ist folgende Ausführung:

> „Der Raum, in dem die Unterscheidung getroffen worden ist, [...], soll *durch die Unterscheidung gespaltener Raum* genannt werden. Die Teile des Raums, die durch Spaltung gestaltet worden sind [...].“ (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 89f.)

Die Autoren interpretieren diese Stelle also wie ich und weichen dahingehend ebenfalls von der deutschen Übersetzung ab. Meines Erachtens übersetzen sie zudem „shaped“ im Hinblick auf kanonische Konnotationen schwächer, nämlich nur als „gestaltet“ und nicht als „gebildet“.

Und es ist der Hinweis, dass die Grenze dem (*ungespaltenen*) Raum selbst *nicht* angehören *könnte*, wohl aber dem *gespalteten* Raum, insbesondere der Hinweis darauf, dass Brown auf die Ausdrucksmöglichkeiten seiner Formel- und Fachsprache aufmerksam geachtet hat und dass sich daher – nach Möglichkeit – die s. E. irrelevanten Fragen nicht eindeutig beantworten und nicht einmal richtig formulieren lassen –, ohne dadurch auf die andere Seite des durch die Sprache Möglichen bzw. Erlaubten zu kreuzen. Kurz gefasst: Bereits in der Fachsprache und nicht erst bzw. nur in der Formelsprache sind manche Regelungen – in bezeichnender Weise – nicht getroffen. Beispielsweise wird für die beiden, eben besprochenen Teile des Raumes die Sprachregelung getroffen, sie „distinguished by the distinction“ zu nennen, doch bleibt (eigentlich) offen, wovon sie „distinguished“ sind. In naheliegender Weise ist man wohl gewillt, mit ‚unterschieden voneinander‘ zu antworten. Doch zeigt sich diese Interpretation eventuell als zu stark der gewöhnlichen Sprachregelung verbunden, insofern Brown wenige Zeilen später „Let a state distinguished by the distinction“ schreibt und damit und darin erneut keine Antwort auf die Frage ‚Unterschieden wovon?‘ andeutet. Es mag also sein, dass für Brown das Unterschiedensein keine zweistellige Relation ist, sondern eine einstellige. Dann aber ließ er die Frage ‚Unterschieden wovon?‘ nicht offen, sondern sie stellt sich nicht (in sinnvoller Weise).
Ich möchte aber anmerken, dass Brown von nur *einem markierten* Zustand, wohl aber *zwei unterschiedenen* Zuständen und wohlgemerkt nicht von den beiden *voneinander* unterschiedenen Zuständen spricht, wobei die unterschiedenen Zustände wohl trotzdem als voneinander unterschieden(e) gelten dürfen. Ich möchte dies betonen, da in (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 72) im Hinblick auf die vorderen Ausführungen in Chapter 1 zunächst von „zwei unterschiedenen Bereichen“ und „die zwei Unterschiedenen“ die Rede ist, dann aber in einer Zusammenstellung von vier Aspekten einer Unterscheidung die Bezeichnungen folgendermaßen modifiziert werden. Die Zusammenstellung lautet:

> [Es] treten also zunächst *drei* Aspekte einer Unterscheidung auf:
>
> **(1)** Das Unterschiedene, die eine Seite,
>
> **(2)** das Übrige, die andere Seite,
>
> **(3)** die Grenze zwischen den beiden Seiten. [. . .] Der vierte Aspekt lautet demnach:
>
> **(4)** der Kontext, der die beiden Seiten unterscheidbar bzw. zu verschiedenen macht.“ (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 72f.)

Die gewissermaßen symmetrische Redeweise von *zwei* Unterschiedenen wurde zur gewissermaßen asymmetrischen Rede von das *Unterschiedene* und das *Übrige*.

Wohlgemerkt baut Brown seine Sprache und Begriffe vorsichtig auf bzw. er expliziert sie nur nach und nach. Das Augenmerk auf die jeweiligen Änderungen zu richten, ist also ganz im Sinne seines Vorgehens. Das betrifft insbesondere die Fragestellung, wo/wie Symmetrien zerstört werden, wo/wie also Asymmetrien entstehen; oder auch umgekehrt: wo/wie Asymmetrien zerstört werden, wo/wie also Symmetrien entstehen. Eine Asymmetrie mag bspw. schon vorliegen, sie ist aber noch nicht nennbar, so sie nicht benannt ist. Brown vergibt zunächst die Bezeichnung „the first distinction" und vergibt später die Bezeichnung „the form of the first distinction". Zwischen diesen Stellen, an denen die beiden Bezeichnungen vergeben werden, ändert Brown die Situation, er nimmt an einem unterschiedenen Zustand eine Markierung vor[114] und damit den einen Zustand gegenüber dem anderen aus. Im Rückgriff auf die Redensart ‚Einem ein X für ein U vormachen' lässt sich sagen, dass die beiden Zustände in der ersten Unterscheidung zwar (voneinander) unterschieden sind, dass aber nicht nennbar ist, wer wer ist; gleichermaßen mögen sich Wirt und Gast einig sein, dass X und U zwar prinzipiell (voneinander) unterschiedene Symbole sind, dagegen mag strittig zwischen ihnen sein, welches Symbol sich ereignet hat, welches Symbol auf dem Untersetzer genannt ist. Kommen wir zurück auf die erste Unterscheidung und die Form der ersten Unterscheidung. Der Form der ersten Unterscheidung bezieht sich also nicht nur auf die erste Unterscheidung, sondern zudem auf die an einem unterschiedenen Zustand angebrachte Marke. In der ersten Unterscheidung mögen die Zustände zwar *unterschieden* sein, doch ist nicht geklärt, wie sie (voneinander) *unterscheidbar* sind, wie sie einzeln thematisiert werden können; dem ist in der Form der ersten Unterscheidung nicht mehr so. Ich denke, folgende Sprechart ist verständlich: Die (erste) Unterscheidung ist *symmetrisch*, die Form der (ersten) Unterscheidung ist dagegen *asymmetrisch*. Kurz: Form ist eine asymmetrische Unterscheidung.

Die fragwürdige Innenseite Für jedes Kreuz gilt im Hinblick auf jedes andere Kreuz eines Arrangements, dass es (zur Gänze) entweder in dessen Innenseite, nämlich „on its inside", oder in dessen Außenseite, nämlich „not on its inside", liegt.[115] Dabei sind die Innen- und die Außenseite eines jeden Kreuzes im Kontext der gewöhnlichen Zeichenebene voneinander abgegrenzt durch das Kreuz selbst zuzüglich seiner kanonischen Ergänzung zu einem Rechteck und es gehört das Kreuz selbst weder seiner Innenseite noch seiner Außenseite an.
Bei dieser continence-Lagebeziehung wird also nur darauf geachtet, welche (Teil-)arrangements auf der Innenseite bzw. der Außenseite einzelner Kreuze beinhaltet

114 Möglicherweise erlaubt Brown auch nur, dass die Markierung vorgenommen wird.

115 Diese Entweder-oder-Unterscheidung gilt nicht für alle in Chapter 11 behandelten ‚marker', doch gilt sie auch dort weiterhin für die Kreuze unter den markern.

sind; ihre sonstige Lage zueinander ist irrelevant.
Die beiden Paare von reinen Iterationsformen im Indikationenkalkül (vgl. Kapitel 8.3) können also derart beschrieben werden, dass bei der jeweils ersten Iterationsform das gesamte ‚alte' (Teil-)arrangement jeweils im Außerhalb des zusätzlichen Arrangements, das ist $\overline{\ }|$ für die Primäre Arithmetik und a für die Primäre Algebra, liegt, wogegen bei der jeweils zweiten Iterationsform das gesamte ‚alte' (Teil-)arrangement jeweils im Innerhalb des zusätzlichen Arrangements, das ist dann $\overline{\ }|$ für die Primäre Arithmetik und Primäre Algebra gleichermaßen, liegt; mit anderen Worten: Einerseits sind das alte und das neue (Teil-)arrangement jeweils die beiden Argumente der zwei-stelligen Konkatenations-Operation, andererseits wird das alte (Teil-)arrangement jeweils zum Argument einer ein-stelligen cross-Operation.
Die beiden Figuren $\overline{\ }|\,\overline{\ }|$ und $\overline{\overline{\ }|}|$, die insbesondere auf den linken Seiten der arithmetischen Initiale auftreten, sind also die beiden einzigen Arrangements, die aus genau zwei Kreuzen bestehen; dabei soll $\overline{\ }|\,\overline{\ }|$ nur als Prototyp jeder Schreibweise des Falles verstanden werden, in dem die zwei Kreuze einander nicht beinhalten, also jeweils in der Außenseite des jeweils anderen Kreuzes liegen. Dieser Fall ist auch dann (noch) dargestellt, wenn eines der beiden Kreuze in der Außenseite des anderen beliebig horizontal und beliebig vertikal verschoben ist – unter der pragmatisch zu verstehenden Nebenbedingung, dass die beiden Kreuze noch als ein Arrangement erkennbar bleiben bzw. dass erkennbar bleibt, was noch als Arrangement, nämlich diesem zugehörig, gelesen werden soll und was nicht. Für die Notation des Falles, dass ein Kreuz in einem anderen enthalten ist, gelten ebenfalls lediglich pragmatische Rahmenbedingungen dieser Art.[116]
In Arrangements ist die Lage jedes Kreuzes nur hinsichtlich des Bestehens oder nicht-Bestehens der continence-Relation mit allen anderen Kreuzen des Arrangements bestimmt, innerhalb der dieserart bestimmten Räume ist ihre Position prinzipiell irrelevant. Explizit(en) Gebrauch von dieser Form der *nicht-lokalen* Notation, macht Brown in der Demonstration von C1:

> „We next use the licence allowed in the definition (p. 6) of relation to change this to $\overline{\overline{\mathsf{p}}|\ \overline{\mathsf{q}}|}|\,\mathsf{r} = \overline{\overline{\mathsf{rp}}|\ \overline{\mathsf{rq}}|}|$." (Brown, 1969, 29)

Dabei ist „this" eine Referenz auf die Gleichung $\overline{\overline{\mathsf{p}}|\ \overline{\mathsf{q}}|}|\,\mathsf{r} = \overline{\overline{\mathsf{pr}}|\ \overline{\mathsf{qr}}|}|$ und es können demnach die beiden Expressionen p und r sowie q und r in s_2 ihre augenscheinliche Position wechseln.

116 Vgl. (Robertson, 1999) für eine Einführung in die LoF-Notation und eine Plausibilisierung der arithmetischen Initiale, die sich an *pragmatischen* Rahmenbedingungen orientiert. Dabei verortet der Autor den *Beobachter* m. E. zwar auf der falschen Seite, doch ist diese Platzierung für die LoF-Mathematik selbst völlig unerheblich.

Das Äquivalenzzeichen als Unterscheidung In Gleichungen trennt (divide) bzw. spaltet (divide) (vgl. Brown, 1969, 87) das Äquivalenzzeichen = die Außenräume der beiden Arrangements, so dass kein (Teil-)Arrangement hinsichtlich des Symbols = die Seite wechseln darf. Denn das würde nicht nur die Gleichung selbst ändern, sondern könnte zudem zur Folge haben, dass eine der beiden Gleichungen gilt und die andere nicht. Das wäre bspw. der Fall, falls der rechtsseitige Term der gültigen Gleichung $\urcorner\urcorner = \urcorner$ auf die linke wechseln würde, denn die Gleichung $\urcorner\urcorner\urcorner = \quad$ gilt eben *nicht*. Die beiden Arrangements einer gültigen Gleichungen zeigen denselben Term an und so kann die Gleichung selbst in kanonischer Weise als Zeichen für diesen Wert gelesen werden.

Etymologische Anmerkung Die Bedeutung des Zeichens *konkav* (concave) bleibt in `LoF` implizit, insofern Brown den Sprachgebrauch, dem er ‚concave' entnimmt, nicht spezifiziert. Ich nehme gerne an, dass Brown verständlich sein wollte und dass er einen Sprachgebrauch im Blick hatte, in welchem für gewöhnlich von ‚konkav' die Rede ist; das ist bspw. die Rede von ‚konkav' im Zusammenhang mit optischen Linsen. Man kann auch Browns genereller Empfehlung etymologischer Wörterbücher folgen, speziell seinem Hinweis auf „Origins" von Eric Partridge;[117] darin wird hinsichtlich ‚*concave, concavity*' und gleichermaßen hinsichtlich ‚*excavate, excavation*' verwiesen auf das lateinische ‚cauus', zu deutsch ‚Muschel', und dann unter Berücksichtigung der spezifischen Vorsilbe auf die Abwandlungen ‚concauus', ‚concavus' und ‚concave'. Damit ist die im Zusammenhang mit Linsen bekannte Verwendungsweise von ‚konkav' im Sinne von ‚ausgehöhlt' oder ‚einwärts gewölbt' gewissermaßen etymologisch konservativ, wenn man sie auf die Innenseite einer geöffneten Muschelschale bzw. einer einzelnen Muschelschalenhälfte, nicht aber auf eine lediglich von Außen ansichtige, geschlossene Muschelschale bezieht, insofern letztere in passenderer Weise als konvex zu bezeichnen ist.

9.3 Brownsche versus Boolesche Algebren

In dem Kapitel 4 und 5 kam mehrfach zur Sprache, dass die Primäre Algebra als Boolesche Algebra gelesen werden kann, dass sie allerdings gemäß Brown – genau genommen – keine Boolesche Algebra ist. Denn es regelt die *continence*-Relation die Notation in unüblicher Weise. Brown weist folgenden Unterschied zwischen einer Booleschen Algebra und seiner Algebra aus bzw. zwischen einer Booleschen und einer Brownschen Lesart seiner Primären Algebra.

---

117 Vgl. (Brown, 2007, 114), wobei aber keine Auflage von „Origins" spezifiziert ist; ich konsultier(t)e ^{3}1963, wobei im Hinblick auf die Erstveröffentlichung von (Brown, 2007) im Jahre 1971 die ersten vier, nämlich zwischen 1958 und 1966 erschienenen Auflagen als von Brown benutzt infrage kommen.

> „Der Unterschied ist der: Alle mathematischen Systeme (einschließlich das von Boole) vor dem meinigen waren so geordnet, daß jeder Operator exakt auf zwei Elementen wirkte, deren Reihenfolge der Darstellung für das Resultat relevant ist. [...] In einer Brown'schen Algebra und ihrer Arithmetik werden wir das erstemal in der Geschichte von beiden dieser Beschränkungen befreit: Die Anzahl der Elemente, auf die operiert wird, ist unbegrenzt und die Reihenfolge ihrer Darstellung irrelevant. Somit werden wir erstmals zu dem Spektakel eingeladen, was geschieht, wenn wir auf überhaupt nichts operieren.“ (Brown, 1999, xv)

Es ist offensichtlich falsch, dass in der Mathematik nur 2-stellige Operationen betrachtet werden. Etwas pedantisch mag der Hinweis sein, dass insbesondere Konstanten als 0-stellige Operationen konzeptualisiert werden können; aber gar zu pedantisch ist dieser Hinweis nicht, da auch Brown darauf hinweist, dass ein Operator „auf überhaupt nichts operier[t]“, wobei er – genau genommen – schreibt, dass ‚wir operieren‘ und nicht etwa der ‚Operator operiert‘. Auf 0-stellige Operatoren bzw. Operatoren mit leerem ‚Argument‘ komme ich gleich zurück. Zuvor aber sei der Hinweis gegeben, dass bspw. in Huntingtons viertem Postulate-System für Boolesche Algebren, das Brown in den Notes zu Chapter 6 explizit anführt, eine 1-stellige Operation betrachtet wird. Brown weiß also durchaus, dass in der Mathematik nicht nur 2-stellige Operatoren betrachtet werden.
Es ist allerdings richtig, dass in weiten Bereichen der Mathematik jedem Operator eine feste Stelligkeit zugewiesen ist und im Weiteren Strukturen nach ihrem sogenannten *Typ*, nämlich dem Zahlen-Tupel bestehend aus den Stellenzahlen der Operatoren, klassifiziert werden. Im Hinblick auf Boolesche Algebren werden bspw. in kanonischer Weise 2-, 1- und 0-stellige Operationen auf einer (nicht-leeren bzw. zumeist sogar mindestens zwei-elementigen) Menge betrachtet.
Im Hinblick auf die Addition und die Multiplikation nicht-negativer ganzer Zahlen, das sind zunächst beides kommutative, assoziative und 2-stellige Operationen auf der Menge $\mathbb{N}$, wird dann aber häufig die Summation/Summe sowie das Multiplizieren/Produkt n-vieler Zahlen definiert und mittels ‚Σ‘ und ‚$\prod$‘ notiert; dabei kann dann n eine natürliche Zahl größer gleich 2 sein, aber auch 1 oder sogar 0. Dieses Vorgehen ist völlig harmlos und (rechtfertigbar bzw.) gerechtfertigt und man darf summa summarum ‚Σ‘ und ‚$\prod$‘ als Symbole für zwei Operationen auf $\mathbb{N}$ lesen, für die weder die Stelligkeit noch die Reihenfolge im Argumentbereich festgelegt ist. Weil für die leere Summe und das leere Produkt als Werte 0 und 1 festgelegt sind, kann man jede natürliche Zahl – in einer ziemlich aufwendigen Weise – als Summe leerer Produkte darstellen: $n = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\prod_{\mu=1}^{0} a_\mu\right)_\nu$.

Ich möchte nun zeigen, dass Brown in seinem Indikationenkalkül analoge *Konventionen* verabschiedet. Zunächst ist zu sagen, dass die Primäre Arithmetik noch abseits eines Denkens innerhalb des Operatoren-Operanden-Paradigmas steht (vgl. Kapitel 7.4.3), die Primäre Algebra dagegen einer solchen Art zu denken schon recht nahe steht:

> „By the revelation and incorporation of its own origin, the primary algebra provides immediate access to the nature of the relationship between operators and operands. An operand in the algebra is merely a conjectured presence or absence of an operator.“ (Brown, 1969, 87f.)

Brown geht es in den Notes zu Chapter 6 darum, zu zeigen, dass auch die Primäre Algebra dem gewöhnlichen Operatoren-Operanden-Paradigma noch nicht zur Gänze unterworfen ist. Er verweist auf die beiden kanonischen 2-stelligen Operationen in Booleschen Algebren, die (wie die Addition und die Multiplikation nicht-negativer ganzer Zahlen) kommutativ und assoziativ sind, und insofern (gleichermaßen) als n-stellig für $n \geqslant 2$ betrachtet werden können. Brown beschreibt dies als „freeing their scope“ und „freeing the order of the variables within their scope“ (Brown, 1969, 88). Beide dieserart erweiterte Operationen sind also wertinvariant bezüglich Permutationen im Argumentbereich und für diese beiden Operationen können in kanonischer Weise für den 1- und 0-stelligen Fall Werte festgelegt werden: Im 1-stelligen Fall repräsentieren sie beide die identische Abbildung, im 0-stelligen repräsentieren sie jeweils eine konstante Abbildung, deren Wert das neutrale Element der Operation ist.
In diesem Sinne steht das Symbol   (void) im Indikationenkalkül für die 0-stellige Konkatenation alias Juxtaposition und (re-)präsentiert deren neutrales Element. Dagegen steht das Symbol $\urcorner$ (empty cross) für die 0-stellige *cross*-Operation oder auch 1-stellige *cross*-Operation, in deren Argument das Symbol   das neutrale Element der Konkatenation (re-)präsentiert; also repräsentiert das Symbol $\urcorner$ selbst den bezüglich der Konkatenation dominanten Wert. Dieserart ist die `LoF`-Notation durchaus *ideographisch*; sie ist sogar ideographisch in besonderem Maße. Denn im Vergleich zur gewöhnlichen Notation Boolescher Algebren fokussiert die `LoF`-Notation auf die *Bedeutung* der gewöhnlichen Zeichen. Derart werden durch Browns leeres Kreuz $\urcorner$ verschiedene zueinander bedeutungsgleiche Symbolketten simultan formuliert; unter Verwendung der auf S. 63 bzw. in (Lipschutz und Lipson, 1997, 477) genutzten Sprache möchte ich $1 + 0$, 1, $0'$ und $0' + 0$ nennen. Brown unterlässt es also, so manche – im Hinblick auf die Bedeutungsebene irrelevante – Unterscheidung in der Zeichenebene zu treffen und ist diesbetreffend, wie gesagt, ideographisch in besonderem Maße (vgl. Brown, 1969, 117).

Ein weiterer Unterschied zwischen Brownschen und Booleschen Algebren ist die in Kapitel 9.1 und 9.2 behandelte nicht-Lokalität.

9.4 Die void-Substitution

Betrachten wir nun Browns zweite algebraische Regel (R2) in etwas allgemeinerem Zusammenhang, genauer: Wir betrachten nun die Ersetzung einer Expression durch Ock, also die sog. void-Substitution, und sehen davon ab, dass die Primäre Algebra einen zwei-elementigen Grundbereich hat.

Davon ist bei Schwartz' Booleschen Algebren $(\mathtt{B}, \,, [\,], \varepsilon)$ und bei Kauffmans Booleschen Algebren $(\mathtt{B}, *, \sim, 1)$ die Rede. Schwartz und Kauffman behandeln Strukturen mit einer zwei-, einer ein- und einer null-stelligen inneren Verknüpfung auf einem nicht-leeren, doch möglicherweise ein-elementigen Grundbereich. Dabei wird ein Element des Grundbereichs durch das null-stellige Operationssymbol ε bzw. 1 ausgezeichnet. Brown dagegen legt im Grundbereich seiner Primären Algebra einen *default*-Wert fest, der insbesondere dann bezeichnet ist, *falls* kein anderer Wert genannt wird; das wird nun genauer besprochen und ich starte mit zwei indirekten Zitaten aus `LoF`.

(1) In Chapter 6 demonstriert Brown als dritte Konsequenz die *integration*-Gleichung C3, $\overline{\ \ }|\ \mathtt{a} = \overline{\ \ }|$, das ist die *Dominanz* von $\overline{\ \ }|$ in der $(2,1,0)$-Algebra $(\mathtt{B}, \,, \overline{\ \ }|, \,)$.[118] Der erste Schritt der Demonstration ist eine Instanz der zweiten Konsequenz; diese *generation*-Gleichung C2 lautet: $\overline{\mathtt{ab}}|\mathtt{b} = \overline{\mathtt{a}}|\mathtt{b}$, die verwendete Instanz ist: $\overline{\ \ }|\ \mathtt{a} = \overline{\mathtt{a}}|\mathtt{a}$. Sie ergibt sich aus der *generation*-Gleichung mittels der *replacement*-Regel R2, insofern die Variable $\mathtt{a}$ durch void, die Variable $\mathtt{b}$ durch $\mathtt{a}$ ersetzt wird.

(2) Weiter wird in Chapter 6 als fünfte Konsequenz die *iteration*-Gleichung C5, $\mathtt{a}\,\mathtt{a} = \mathtt{a}$, demonstriert; mit anderen Worten: die *Idempotenz* der (2)-Algebra $(\mathtt{B}, \,)$, die in Huntingtons viertem Postulate-System zunächst redundant bzw. abhängig war (vgl. S. 68). Die Demonstration lautet: $\mathtt{a}\,\mathtt{a} = \overline{\overline{\mathtt{a}}|}|\mathtt{a} = \mathtt{a}$. Dabei ist der erste Schritt die Anwendung der ersten Konsequenz; diese *reflexion*-Gleichung C1 lautet: $\overline{\overline{\mathtt{a}}|}| = \mathtt{a}$; der zweite und abschließende Schritt ist eine Instanz der vierten Konsequenz; diese *occultation*-Gleichung C4 lautet: $\overline{\overline{\mathtt{a}}|\mathtt{b}}|\mathtt{a} = \mathtt{a}$, die verwendete Instanz ist: $\overline{\overline{\mathtt{a}}|}|\mathtt{a} = \mathtt{a}$. Sie ergibt sich aus der *occulation*-Gleichung mittels der *replacement*-Regel R2, insofern die Variable $\mathtt{b}$ durch Ock ersetzt wird.
Bemerkenswerterweise hat Brown in den Demonstrationen der neun algebraischen Konsequenzen zwar mehrfach eine void-*substitution* gemäß (R1) vorgenommen, doch nur dieses eine void-*replacement* gemäß (R2), in der

118 In kanonischer Weise kann man $\overline{\ \ }|\ \mathtt{a} = \overline{\ \ }|$ auch als *Dominanz* von $\overline{\ \ }|$ in der $(2,0)$-Algebra $(\mathtt{B}, \,, \overline{\ \ }|)$ oder der $(2,1,0,0)$-Algebra $(\mathtt{B}, \,, \overline{\ \ }|, \overline{\ \ }|, \,)$ lesen. Der erste Beweisschritt liefert allerdings die Gleichung $\overline{\ \ }|\ \mathtt{a} = \overline{\mathtt{a}}|\mathtt{a}$; darin kann zwar das leere Kreuz als 0-stellige Operation gelesen werden, das $\mathtt{a}$-umfassende Kreuz dagegen ist (mindestens) 1-stellig.

> Demonstration von C5. Glücklicherweise hat er nicht darauf verzichtet, sondern das void-*replacement* dem Leser immerhin einmal vorgeführt. Bemerkenswerterweise wäre auch dieses void-*replacement* vermeidbar gewesen. Denn alternativ zur Argumentation mittels einer Instanz von C4 wäre folgende Argumentation mittels C2 und J1 möglich:[119] $a\,a = \overline{\overline{a}\rceil}\rceil\, a = \overline{\overline{a}\rceil\; a}\rceil\, a = a$.

Die beiden Instanzen $\rceil\; a = \overline{a}\rceil\, a$ und $\overline{\overline{a}\rceil}\rceil\, a = a$ machen ersichtlich, dass der waagrechte Strich eines leeren Kreuzes nicht verschwindend klein ist, es gibt dahingehend eine *default*-Länge, dass der Raum unter dem Strich allerdings von einem Term *eingenommen* werden kann, aber nicht *beibehalten* wird. Das hat im Beweis der Iterations-Gleichung zur Folge, dass der Term $\overline{\overline{a}\rceil}\rceil$ einerseits als *reflektiertes* a, andererseits als eine Instanz von $\overline{\overline{a}\rceil\, b}\rceil$ gelesen werden kann, in der b durch ein dieserart größenloses Ock ersetzt ist.
Mittels einer solchen default-Bezeichnung kann $B := \{\ , \rceil\}$ den 2-elementigen Grundbereich der Primären Algebra $(B, \,, \rceil, \,)$ illustrieren.
Eine solche default-Bezeichnung verwendet Brown auch in Appendix 5 und dort für einen 4-elementigen Grundbereich $G := \{\ , a, b, c\}$. Er betrachtet als (2)-Algebra $(G, \,)$ eine Instanz der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten *Kleinschen Vierergruppe* (a klein 4-group). Demnach ist $(G, \,)$ also eine 4-elementige kommutative Gruppe, in der die default-Bezeichnung dem neutralen Element gilt, jedes Element selbstinvers ist und die Gleichungen $ab = c$, $bc = a$ und $ca = b$ erfüllt sind.[120]
Brown verwendet in (Brown, 1999, 154f.) ein sicht- und sprechbares Symbol für den default-Wert. Er stellt es in (Brown, 1999, xvi) mit folgenden Worten vorstellt (vgl. S. 118):

> [I]ch erfand in der Folge das Wort *Ock* (vom Indoeuropäischen *okw* = das Auge), symbolisiert durch einen umgekehrten Kleinbuchstaben ɔ, um in einer sprechbaren Form die universelle rezessive Konstante zu kennzeichnen, die alle Systeme gemeinsam haben.“

In der Algebra $(G, \,)$ gilt also nicht $xx = x$ (Idempotenz), sondern $xx = \text{ɔ}$ (Idemposition) und folglich insbesondere die Gleichung $abc = \text{ɔ} = \quad =$, wobei ich den default-Wert, zunächst durch ɔ, dann als Ock mit einer gewissen positiven Breite und zuletzt als Ock ohne Breite illustriert habe.

Kommen wir nun auf die Rezeption von Ock bzw. blank space bei Schwartz und Kauffman zu sprechen. Zunächst – und dies nur zur Wiederholung – gibt Schwartz für seine Algebra $(B, \,, [\,], \varepsilon)$ explizit den Hinweis: „a symbol ε is used to denote the blank space“ (Schwartz, 1981, 242) und diese Rolle spielt das Symbol 1 in

119 Wohlgemerkt ist C4 selbst ableitbar aus C2 und J1.

120 Unter Vernachlässigung des jeweiligen Vorzeichens, also ‚modulo 2‘ und damit *als kommutativ* betrachtet, ist die multiplikative Gruppe der $\mathbb{R}$-Basis $\{1, i, j, k\}$ der Hamiltonschen Quaternionen zu $(B, \,)$ isomorph, nämlich eine Kleinsche Vierergruppe (vgl. Brown, 1999, 155).

Kauffmans Notation Boolescher Algebren $(\mathsf{B}, *, \sim, 1)$. Weiter – und dies nun zur Ergänzung – ist diese Symbolisierung von Ock nicht obligatorisch:

> „To allow the void into the box algebra is equivalent to having a zero element in the ordinary algebra. That is, we could allow the substitution of a void in the axioms.“ (Kauffman, 1990, 56)

Dabei ist die genannte „box algebra“ lediglich eine weitere Notationsform für Browns Primäre Algebra und es steht ‚zero element‘ für Kauffmans ‚1‘ (alias ‚one element‘) oder Schwartz' ‚ε‘.
Was Kauffman hier „void substitution“ nennt, ist bei Brown kein Axiom, sondern eine Ableitungsregel: eine Form der replacement-Regel R2; durch sie wird in einer Gleichung jedes Erscheinen einer Variablen getilgt. Das ist mit der wohlbekannten Auffassung von Variablen als *Platzhaltern* vielleicht leichter zu verstehen. Bei void-Substitution wird eine Variable und mit ihr auch der Raum, den sie besetzt, durch einen *größenlosen leeren Raum*, nämlich: „one blank and it does not have a size“ (Kauffman und Solzman, 1981, 254), ersetzt und demnach der durch die Variable besetzte Raum nicht nur frei-, sondern aufgegeben.
Das klingt vielleicht komisch, ist allerdings nur ungewohnt bzw. ungewohnt *kurz* in der Formulierung, denn Boolesche Algebren sind *Monoide*; vgl. S. 60. Ein Monoid $(\mathsf{M}, *, 1)$ ist eine Halbgruppe mit neutralem (Eins-)Element, genauer: Es ist $(\mathsf{M}, *, 1)$ vom Typ $(2, 0)$ und die Konstante 1 ist (links- und rechts-) neutral bezüglich der zwei-stelligen assoziativen Verknüpfung $*$; das heißt: $(x*y)*z = x*(y*z)$, $x*1 = x$ und $1*x = x$.
Betrachten wir nun einen Term $c*x$ bezüglich der Substitution von x durch 1, so ergibt sich zunächst $c*1$ und weiter c; Brown erhält aus cx das gleiche Ergebnis, insofern er die durch $*$ symbolisierte Operation als Konkatenation schreibt und dann x nicht erst durch (das bezüglich $*$) neutrale Element 1 ersetzt, sondern durch (das bezüglich der Konkatenation) tatsächlich neutrale (größenlose) Ock ersetzt. Mit anderen Worten: Es wird x durch void-Substitution getilgt. Das ‚spart‘ einen Rechenschritt und verlangt auf der *Ebene der Zeichen* das leere Wort ɔ, also Ock bzw. void, als Term und damit als mögliches Rechenergebnis zu betrachten.
Insbesondere im Hinblick auf eine zudem kommutative Verknüpfung notiert man das Monoid oft additiv: $(\mathsf{M}, +, 0)$ mit neutralem (Null-)Element 0.
Dementsprechend könnte dann bei Schwartz von Booleschen Algebren $(\mathsf{B}, \,, \square, \,)$, bei Kauffman von Booleschen Algebren $(\mathsf{B}, \,, \sim, \,)$ die Rede sein, die jeweils vom Typ $(2, 1, 0)$ sind, oder auch von $(\mathsf{B}, \,, \square)$ und $(\mathsf{B}, \,, \sim)$ jeweils vom Typ $(2, 1)$. Letzterenfalls gehört die void-Substitution nicht mehr in kanonischer Weise zu den Substitutionen, insbesondere nicht mehr zu den Substitutionen, die Variablen durch Konstanten alias null-stellige Operationen substituieren, sondern muss als eigene Regel geführt werden.
In (Huntington, 1933b,a) ist also gezeigt, dass jede $(2, 1)$-Algebra $(\mathsf{B}, +, ')$, die kommutativ und assoziativ ist und zudem das Huntington-Postulat (vgl. S. 68)

erfüllt, ein Null-Element $\mathtt{z}$ enthält und alle Postulate des ersten Systems von Huntington ableitbar sind. Demnach ist $(\mathtt{B}, +, ')$ eine Boolesche Algebra.
In (Kauffman, 1990) ist dagegen gezeigt, dass jede $(2, 1)$-Algebra $(\mathtt{B}, +, ')$, die kommutativ und assoziativ ist, zudem das Huntington-Postulat (vgl. S. 68) erfüllt und void-Substitution erlaubt, alle Postulate der im Paragraphen „Trivialisierung des Problems" (S. 59) multiplikativ formulierten Axiomatik Boolescher Algebren erfüllt; auch solche $(\mathtt{B}, +, ')$ sind also Boolesche Algebren. Dabei gilt wie erwartet, dass der bei Huntington durch $\mathtt{z}$ symbolisierte Term $\overline{\mathtt{x}\overline{\mathtt{x}|}|}$, der ein Null-Element *ist*, zu Ock äquivalent ist: $\overline{\mathtt{x}\overline{\mathtt{x}|}|} = \quad$. Das von Kauffman für die void-Substitution vorausgesetzte Ock korrespondiert also tatsächlich dem bei Huntington wohldefinierten bzw. als existent abgeleiteten Null-Element $\mathtt{z} := \overline{\mathtt{x}\overline{\mathtt{x}|}|}$.

Zusammengefasst ist die void-Substitution also ein verkapptes Existenzaxiom und zwar für ein *ausgezeichnetes*, also nennbares Element: das Eins-Element in Monoiden. Ein solches neutrales Element vermag das (größenlose) Ock, also „die universelle rezessive Konstante [. . .], die alle Systeme gemeinsam haben" (Brown, 1999, xvi), zu illustrieren. Dieserart dürfen bspw. in Kauffmans Algebra $(\mathtt{B}, +, ')$ letztlich alle zu $(\mathtt{x}' + \mathtt{x})'$ äquivalenten Terme auch direkt durch Ock *substituiert* (nach Brown) bzw. *ersetzt* (nach Burris) werden.[121]

121 Vgl. (Bricken, 2013b) für mehrere Aufsätze über „Boundary Logic"; dies ist ein Konzept von Logik, das seinen Ausgang bei der Verwendung von Void nimmt und void-Substitution erlaubt. Mein expliziter Hinweis gilt hier dem Aufsatz „Taking Nothing Seriously: A Foundational Diagrammatic Formalism" (Bricken, 2005).

Teil III

GELTUNG – Inwiefern ist Browns Mathematik reflektiert?

Die Laws of Form im philosophischen, auf ihren Sinn bezogenen Diskurs: *Spiegelungen der Mathematik*

Kapitel 10

Peter Reisingers Rationalitätstypologie als Spiegel

10.1 Präliminarium

In diesem Kapitel werde ich dem Aufsatz „Kalkülisieren oder Denken? Zur Bestimmung möglicher Rationalitätstypen aus einer Kritik ihrer möglichen Symbolisierbarkeit“ (1999) von Peter Reisinger einige Differenzierungen bezüglich Zeichen und Bedeutung entnehmen, die über den Ansatz von Josef Simon hinausgehen und gerade insofern einen anderen Fokus auf die `LoF` ermöglichen. Die Differenzierung und Einführung in die Terminologie Reisingers erfolgt mittels der Terminologie Simons. Zwar sollen die beiden philosophischen Ansätze letztlich meiner mathematikphilosophischen `LoF`-Interpretation dienen, doch werde ich sie zuvor zur gegenseitigen Verdeutlichung nutzen, wobei Reisingers Konzept vornehmlich als Inhalt und Simons Konzept vornehmlich als Methode fungiert.
Dieses Kapitel kann und soll also mit Gewinn als eine Fortsetzung von Kapitel 3 gelesen werden: Simons Konzept einer Philosophie, die eine *Philosophie des Zeichens* ist, wird in Methode und in Inhalt weiter verdeutlicht.

Die drei von Peter Reisinger näher untersuchten *Präsentationstypen* sind allesamt ‚räumlich-extensiv‘; es sind die Präsentationstypen der euklidischen Geometrie, arithmetischer oder logischer Kalküle und einer (Hand-)Schrift der natürlichen Sprache. Reisingers Grund für die Inblicknahme der Präsentanten – als die sichtbare Seite der ‚konversen Relation‘ zwischen Präsentanten und Präsentaten – sei zunächst folgendermaßen pointiert:

> „Welcher Rationalitätstyp im Referentenbezug sich in den drei Fällen […] bestimmen läßt, kann kritisch nur an dem Präsentantentyp entschieden, an ihm ‚abgelesen‘ werden.“ (Reisinger, 1999, 96)[122]

122 Selbstverständlich liegt in Welcher-Frage eine ob-überhaupt-ein-Frage.

Zu Beginn des Aufsatzes von Reisinger ist die Frage nach Rationalitätstypen gestellt und damit der Kontext der Überlegungen skizziert: Das ist die Verschiedenheit, die zwischen der „Vernünftigkeit selbstreferentiell systemischer Naturphilosophie“ (im Anschluss an Georg Wilhelm Friedrich Hegel) und der „systemisch transformierte[n] Form fremdreferentiellen Wirklichkeitswissens“ besteht; als ‚rational‘ bezeichnet Reisinger nur letztere (Wissens-)Form.
Eine solche *vertetende* Form (Präsentation) ist also nicht der allgemeine Fall, sondern genügt bereits gewissen Bedingungen: Ihnen wendet sich Reisinger in Paragraph 2 im Allgemeinen zu und macht Spezialformen zum Gegenstand der drei restlichen Paragraphen. Die Wahrnehmbarkeit der Präsentanten bildet den Hintergrund von Reisingers *Basistheorem*: „Ohne präsentationssystemische *Verkörperung* [...] in der Raum/Zeit ist kein Rationalitätstyp möglich.“ (Reisinger, 1999, 1.1.3). Diese Grundbestimmung wird dann in vier Theoremen dahingehend spezifiziert, dass Präsentate nicht wahrnehmbare, substanzenlose Formen sind und Präsentanten zur Eigenstruktur eine Selbstreferenz haben können.
Der fremdreferentielle Bezug auf Wirklichkeit (als Alternative zu dem selbstreferentiellen Bezug auf Natur) wird erst in Paragraph 5 wieder aufgegriffen. Zwischenzeitlich liegt das Augenmerk auf der Frage, ob Präsentanten bezüglich ihrer inneren Unterscheidung fremd- oder selbstreferentiell konstituiert sind; das heißt genauer: ob die Präsentationsform (der Präsentanten) rational ist, soll heißen: ob die Präsentanten einer geschlossenen, sich-transparenten Selbstherstellung genügen (in diese Richtung zielte bereits das vierte Theorem) und zudem der Bereich der Präsentanten ein System bildet.

10.2 Die rationalitätstypologische Optik

Bemerkung zur Optik Josef Simon thematisiert nicht den gelingenden Zeichengebrauch, sondern den *nicht gelingenden* Zeichengebrauch; Reisinger dagegen thematisiert den *gelingenden* Zeichengebrauch auf Vorbedingungen seines Gelingens hin. Bei Simon interessieren die Bedeutungen hinter den Zeichen, auf die Zeichen selbst wird weniger geachtet: Zeichengebrauch geht zwar nicht *ohne* sie, beim Zeichengebrauch geht es aber nicht *um* sie. Dagegen gilt Reisingers Interesse einer Beantwortung der Frage nach Rationalität, genauer: *theoretischer Rationalität* – und damit bspw. nicht der rationalen Analyse von Kunstwerken oder der Bestimmung von Zweckrationalität. Reisingers Aufmerksamkeit richtet sich darauf, welche Typen von Zeichen für seine Zwecke in Frage kommen (vgl. Reisinger, 1999, 88f.). Zielpunkt und Ansatz seiner Untersuchung sind also im Untertitel treffend genannt: „Zur Bestimmung möglicher Rationalitätstypen aus einer Kritik ihrer möglichen Symbolisierbarkeit“.
Mit *Symbolisierbarkeit* ist *Präsentation*, das heißt: Versinnlichung, Vertretung,

Bezeichnung oder auch Darstellung, in zweierlei Hinsicht angesprochen: einerseits die von Bedeutung, andererseits die von Zeichen selbst (vgl. Reisinger, 1999, 94f.). So präsentieren Zeichen einerseits ihre Bedeutung und präsentieren andererseits sich selbst, insofern sie als Zeichen zum Großteil von ihrem Dingcharakter unabhängig sind, wobei mit ‚Dingcharakter' ihre individuelle, empirische Erscheinung eines Zeichens bezeichnet ist. Beide Male hat Reisinger m. E. ein Figur-Form-Verhältnis vor Augen, wie es bei Zeichen der Geometrie vermutlich am augenfälligsten ist,[123] das aber nicht in allen Kontexten vorliegt: Einerseits ist jede gezeichnete Kreis*figur* kreis*förmig*, andererseits gibt es zwischen den Figuren empirische Unterschiede, trotz derer sie allesamt als Kreise bzw. Zeichen für Kreise gelten. Das Zeichen- bzw. Figur-Sein ist dahingehend – für Simon und für Reisinger – eine Angelegenheit des verstehenden Lesens.
Bei *Rationalitätstypen* handelt es sich um Zeichen- bzw. Präsentations-Systeme, die für Reisinger als *rational* gelten. Dabei kann s. E. eine Präsentation überhaupt nur dann rational sein, wenn sie innerhalb eines Systems erfolgt:

> „Ein Inhalt, der rational einsichtig sein will, muß unter einer Ordnungsform methodisch-systemisch [...] dargestellt werden können." (Reisinger, 1999, 89).[124]

Für die Rationalität einer Präsentationsform ist einerseits die Beziehung zwischen den Zeichen und ihrer Bedeutung entscheidend, andererseits der Bezug der Zeichen auf sich selbst und untereinander (innerhalb des jeweiligen Zeichensystems).
Geometrische Figuren und Formen sind – wie am Kreis thematisiert – für das Figur-Form-Verhältnis prototypisch. Die Adäquatheit der Beziehung zwischen Zeichen und Bedeutung steht allerdings nicht im Zentrum seines Aufsatzes. Reisinger geht es vielmehr um den Bezug der Zeichen auf sich selbst und das heißt letztlich: um die Voraussetzungen dafür, dass ein Zeichen als ein Zeichen erkannt wird. Die Voraussetzungen, die s. E. generell für Präsentation nötig sind, spezifiziert er für Kalkül- und Schrift-Zeichen. Deren zugehörige Systeme, das sind Kalküle und Sprache, werden von ihm als Orte des Kalkülisierens und Denkens betrachtet.
Nach der Behandlung der Präsentation von Bedeutung durch einzelne Zeichen (Basispräsentanten) in der Geometrie und im Kalkül wendet er sich allerdings nicht mehr einer Behandlung von *Präsentationssystemen* selbst zu: Deren jeweilige „methodische Selbstkonstitution" sowie das jeweilige „methodische Operieren [...] mit den Basispräsentanten" innerhalb ihrer, das die konverse Bewegung von Bedeutung vertritt, „muß eigens untersucht werden, was hier unterbleiben muß"

123 Wenn in (Reisinger, 1999) von Geometrie die Rede ist, so jeweils von ‚euklidischer' Geometrie; die Attribuierung werde ich im Folgenden unterlassen. Des Weiteren verwende ich ‚Geometrie-Zeichen' für ‚Zeichen der Geometrie'.

124 Anmerkung: Im Original steht an markierter Stelle „Präsentate", das ist Reisingers Terminus für Simons *Bedeutungen*. Dabei handelt es sich m. E. um einen Druckfehler, insofern an der Stelle ‚Präsentanten' zu erwarten wäre, das ist – wie ersetzt – *Zeichen* bei Simon.

(vgl. Reisinger, 1999, 108, 106).
Weil für Reisinger Kalküle keine Sprachen sind, Kalküle mit Sprachen nichts zu tun haben, beantwortet er die Titelfrage „Kalkülisieren oder Denken?“ dahingehend, dass das „oder“ ein ‚exklusives Oder‘ sei: Kalkülisieren und Denken sind zwei voneinander gänzlich verschiedene Tätigkeiten des Geistes. Seinem Rationalitätsverständnis zu Folge gilt ihm Kalkülisieren als eine rationale Präsentationsform, Denken dagegen nicht (vgl. Reisinger, 1999, 107). Wohlgemerkt sind die in (Reisinger, 1999) explizit thematisierten Kalkül-Zeichen arithmetisch und/oder gehören der formalen Logik an. Reisinger grenzt also Orte des Denkens – wie die Philosophie – von Orten des Kalkülisierens – wie die Logik – ab.

Reisingers Untersuchung ist einerseits in einer Manier abgefasst, deren bekanntestes Beispiel der *Tractatus logico-philosophicus* von Ludwig Wittgenstein ist: So besteht auch ihr Text nur als Aneinanderreihung einzelner Abschnitte, die zum Teil bis in vierter Gliederungsebene nummeriert sind; die Abfolge der Abschnitte ist zwar vom Inhalt geleitet, die Inhalte selbst aber werden nur konstatiert und nicht argumentativ entwickelt. Dahingehend ist der Text eine Liste von Thesen; die Untersuchung ist andererseits in fünf Paragraphen angelegt:

1. Rationalitätstypen (88–91; 0 bis 0.3.3.5)[125],
2. Präsentation (Präsentanten von Präsentaten) (91–96; 1.1 bis 1.2.2),
3. Die euklidische Geometrie als rationale Präsentation (96–98; 1.2.2.1),
4. Die Kalkülisierung als rationale Präsentation (98–101; 1.2.2.2) und
5. Die Schrift als nicht-rationale Präsentation (101–108; 1.2.2.3 bis 5.2.4).

Ein kurzer Blick auf das jeweilige Spektrum an Absatznummerierungen lässt richtigerweise vermuten, dass der letzte Paragraph inhaltlich heterogen ist.

Bemerkung zur Wahl Inwiefern ist Reisingers Aufsatz als Optik für eine Studie der Laws of Form interessant? Folgende Antwort soll im Weiteren in ihren Teilen noch expliziert und dabei präzisiert werden, hier erfolgt sie in kondensierter Form, um einen knappen Überblick zu geben: Zunächst können die drei von Reisinger charakterisierten graphischen Präsentationsformen bei geeigneter Lesart allesamt in den Laws of Form aufgefunden werden: Geometrie-, Kalkül- und Schrift-Zeichen einer natürlichen Sprache. Das macht einerseits auf eine inhaltliche Gliederung des LoF-Textes aufmerksam und liefert andererseits auch noch eine Begründung für sie. Umgekehrt ist die dem Konzept der Präsentation (eines Präsentates mittels eines Präsentanten) zu Grunde liegende Unterscheidung, das ist bei Simon die Unterscheidung zwischen Zeichen und Bedeutung, eine Instanz des in den Laws of

125 Das Semikolon trennt die Seitenangabe (links) von der Absatznummer (rechts).

Form behandelten Themas: eine *Distinktion*, deren beide Seiten zwar *voneinander unterschieden*, doch *aufeinander bezogen* sind. Dies gilt zumindest prima facie und insofern Zeichen/Bedeutung als ein Begriffspaar betrachtet wird. In der Anwendung aber – das ist gerade der Hinweis Simons – ist die Angelegenheit diffiziler: So kann der eine noch als fragwürdiges Zeichen lesen, was dem Anderen bereits Bedeutung ist, *Verschiedenheit* und *Bezogenheit* werden durch den Kontext mitbestimmt. Letzteres ist aber in den LoF selbst zu einem Thema gemacht.
Zudem nimmt Reisinger auf die Laws of Form sogar explizit Bezug (vgl. Reisinger, 1999, 99): Er weist auf einen Punkt hin, hinter den in den LoF nicht zurückgegangen wird, dass nämlich in den LoF bereits davon ausgegangen wird, dass Kalkül-Zeichen als Präsentanten ihren Dienst tun. Das ‚Weshalb' möchte Reisinger – und damit wendet er sich auch der Fragerichtung Simons entgegen[126] – nicht ununtersucht dahingestellt sein lassen. In Reisingers Untersuchung werden dann Voraussetzungen für den gelingenden Gebrauch von Kalkül-Zeichen im Allgemeinen genannt. Die Einhaltung dieser Regeln speziell durch die Zeichen des LoF-Kalküls möchte ich näher betrachten. Dabei zeigt sich insbesondere, dass der Kalkül vor dem Hintergrund einer Einteilung Reisingers ein interessanter Spezialfall unter den Kalkülen ist: Reisinger knüpft an die Unterscheidung an, die Immanuel Kant in § 59 der „Kritik der Urteilskraft" trifft, und spezifiziert die ununterschiedene Rede von Zeichen (bei Simon) bzw. Präsentanten (in seiner eigenen Terminologie) noch weiter nach Schemate, Symbole und Charakterismen. Andres als im „heutigen Sprachgebrauch" sind für Reisinger Kalkül-Zeichen keine Symbole. Im Hinblick auf das Verhältnis Zeichen-Bedeutung seien sie Charakterismen, im Hinblick auf den Bezug der Zeichenfigur auf eine Zeichenform dagegen Schemate (vgl. Reisinger, 1999, 98–101). Für das zentrale Zeichen des LoF-Kalküls gilt aber, dass es in Reisingers Verständnis zudem als Symbol gelesen werden kann.
Aber, so muss mit Voraussetzungen der Zeichen – insbesondere der Kalkül-Zeichen – wiederum andere Zeichen, die dem Leser verständlich sein müssen. Wie Reisingers Fingerzeige in gewöhnlichen Schrift-Zeichen erfolgen, so erfolgt auch durch Brown in den LoF die Konstruktion des Kalküls in Zeichen der natürlichen Sprache[127] – das sind insbesondere Wörter, deren Gebrauch zum Teil nur metaphorisch zu verstehen ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, wo im Spannungsfeld zwischen Präskription und Deskription die Zeichen positioniert sind, mit denen beim Leser ein Verstehen erwirkt werden soll. Demnach soll die von Reisinger verfolgte Verhältnisbestimmung zwischen Mathematik und Philosophie ebenso wie die dort vertretene Logikauffassung den Hintergrund bilden für eine Kritik der Rollen, welche Philosophie, Mathematik und Logik in den LoF füreinander spielen.

126 Vgl.(Borsche und Stegmaier, 1992, viii): „Nicht das Verstehen ist erklärungsbedürftig, sondern das jeweilige Nichtverstehen."

127 In (Reisinger, 1999) werden lediglich schriftliche Zeichen analysiert. Ob die natürliche Sprache aus schriftlichen und mündlichen Zeichen synthetisiert werden kann und wie das gegebenenfalls zu leisten ist, das bleibt ununtersucht.

10.3 Rationalität und Präsentation

In (Reisinger, 1999) geht es dem Autor nicht darum, zu bestreiten, dass vernünftig gedacht werden kann. Ihm ist dagegen an Rationalität einer bestimmten Art gelegen und deren Qualität ist durch die verwendeten Zeichen verbürgt. Reisinger geht es bezüglich *Rationalität* einerseits um rationales Wissen, andererseits um rationale Präsentation; dabei ist die rationale Darstellung eine Vorbedingung für rationales Wissen.

Rationales Wissen ist eine bestimmte Form der Bezugnahme auf Wirklichkeit (vgl. Reisinger, 1999, 89–91): Gegenstand seines Aufsatzes soll, so äußert sich Reisinger explizit, keine Naturphilosophie im Anschluss an Georg W. F. Hegel sein, in welcher auch „Vernunft in den Dingen" (Reisinger, 1999, 91) zu thematisieren wäre, sondern ein Wissen über Wirklichkeit, wie es Thema der Naturwissenschaften ist, insbesondere der sog. klassischen Physik, die den Beobachter nicht mitbeobachtet und der die Materie als seelenlos, geistlos u. ä. gilt. Damit ist das Wissen, das der Erkennende über Wirklichkeit hat, fremdreferentiell: Nur „Wissen in *vertretender*, präsentierender Form (Physik), nennen wir *rational*" (Reisinger, 1999, 91). Das System-Umwelt-Verhältnis zwischen Erkennendem und Wirklichkeit ist für rationales Wissen die in Paragraph 1 genannte Bedingung; der zudem geforderten Präsentationsform wendet sich Reisinger in Paragraph 2 im Allgemeinen zu und macht Spezialformen zum Gegenstand der drei restlichen Paragraphen.

Rationale Präsentation spezifiziert das Verhältnis zwischen Zeichen und ihren Bedeutungen sowie den Bezug eines Zeichens auf sich selbst (vgl. Reisinger, 1999, 91–96): Reisinger verlangt nämlich eine gewisse Bereichsgeschlossenheit sowie eine Selbst*herstellung* der Zeichen bei der Zeichen*bildung* (vgl. Reisinger, 1999, 104f.). Damit ist gemeint, dass Zeichen und Bedeutung entweder dem gleichen Bereich angehören oder die Zeichen in einem noch zu klärenden Sinne keine bestimmte von ihnen verschiedene Bedeutung tragen, aber dann zumindest noch als Zeichen ihrer selbst gelesen werden können. Letzterenfalls können die jeweiligen Zeichen immerhin als Figuren (ohne Fremdreferenz) identischer Form gelten. Für Reisinger gehören bspw. sowohl Kreisfigur als auch Kreisform und ebenso die anderen Zeichen und Bedeutungen der Geometrie zum Anschauungsraum und damit dem gleichen Bereich an. Dagegen gehören s. E. sowohl Schrift- als auch Kalkül-Zeichen dem jeweiligen Bereich ihrer Bedeutungen im Allgemeinen nicht an: Doch während Buchstaben auf Laute und damit aus dem optischen in den akustischen Bereich verweisen, können Kalkül-Zeichen[128] als formidentische Zeichen ihrer selbst gelesen werden. In diesem Sinne präsentieren Geometrie- und Kalkül-Zeichen ihre Bedeutungen rational, weil sie selbstreferentiell sind, Schrift-Zeichen die ihrigen dagegen nicht, weil sie fremdreferentiell sind.

128 Die in (Reisinger, 1999) explizit thematisierten Kalkül-Zeichen sind arithmetisch oder gehören der formalen Logik an.

Für die rationale Präsentation rationalen Wissens muss über die rationale Präsentation von Bedeutung mittels eines geeigneten Zeichens hinausgegangen und zu transparenten Zeichensystemen übergegangen werden, in welchen Operationen mit den Zeichen so geregelt sind, dass die benötigten Bedeutung(skombination)en in einer konversen Relation bezeichenbar sind. Dieses Thema wird in (Reisinger, 1999) erwähnt, doch nicht weiter untersucht. Die drei Konzepte Reisingers bezüglich Geometrie-, Kalkül- und Schrift-Zeichen werde ich erst am jeweiligen Ort ihrer hauptsächlichen Gegenlese mit den `LoF` darstellen, dem ihnen gemeinsamen Grundkonzept möchte ich mich dagegen im Folgenden zuwenden.

Für Simon zeigt sich ein Zeichen als unverstandene Bedeutung; es fordert nach weiteren Zeichen, die bestenfalls nur noch als Bedeutungen gelesen werden. Dass an Zeichen etwas Materielles ist, wird von Simon nicht bestritten, davon wird bei ihm ausgegangen und daher bleibt es weitgehend irrelevant.[129] Reisinger dagegen untersucht gerade den Umstand, dass Präsentanten für Präsentate (Referenten) wahrgenommen werden können und – bei ihm im Hinblick auf Rationalität – auch wahrgenommen werden müssen.[130] Sein ‚Basistheorem‘ rationaler Präsentation lautet: „Ohne präsentationssystemische *Verkörperung* [...] in der Raum/Zeit ist kein Rationalitätstyp möglich." (Reisinger, 1999, 92) Das heißt, dass rationale Präsentation verlangt, dass Zeichen ihre Bedeutungen in einem abgeschlossenen *System* vertreten und sie außerdem in Raum und Zeit auftreten. Die vertretenen Referenten selbst sind „nicht wahrnehmbar“ und haben weiters „keine Substanz“; sie sind „Formen“, die „potentiell-unendlich empirisch materialisierbar“ sind (vgl. Reisinger, 1999, 94: Theorem 1, 2 und 3).
Wie bereits in der oben gegebenen kondensierten Antwort angedeutet unternimmt Reisinger nicht den Versuch einer vollständigen Typologie vertretender Präsentationsformen theoretischer Rationalität, sondern er beschränkt sich auf drei Typen „räumlich-extensiver“ bzw. „graphischer“ Präsentation (vgl. Reisinger, 1999, 92). An den Präsentanten lassen sich dann einerseits ihr *Produkt*-, andererseits ihr *Graph*-Aspekt unterscheiden (vgl. Reisinger, 1999, 93–95). Wir sprechen bspw. davon, ein allgemeines Dreieck gezeichnet zu haben, obwohl die gezeichneten Striche – als dem empirischen, dem Wahrnehmungs-Bereich angehörend – nicht wirklich Geradenstücke sind und selbst wenn es gelungen wäre, drei gerade Striche zu ‚zeichnen‘, die zudem keine Dicke und paarweise genau einen gemeinsamen Schnittpunkt hätten, dann handelte es sich entweder um ein spitz- oder recht- oder stumpfwinkliges Dreieck (mit weiters genau bestimmten Seiten, Winkeln und Fläche). Selbst in

129 Vgl. (Simon, 1989, 100): „Ein Ding kann kein Anlaß für eine Handlung sein. „Ding“ ist ein Zeichen für das am Zeichen, was *an ihm nicht* als Zeichen fungiert, das heißt was nicht so verstanden wird, daß es eine Antwort verlangte."

130 Vgl. (Reisinger, 1999, 91), wobei „S“ für System und „U“ für Umwelt steht: „Präsentanten sind keine Produkte der Wirklichkeit, insofern diese *nicht* weiß (Präsentanten werden nicht am Orte U produziert, sondern am Orte S)." Bei Josef Simon war diesbezüglich von *Lesart* die Rede.

einer dieserart idealisierten empirischen Verkörperung steckt noch irreführende Information, von der aber abgesehen werden kann: Die gewöhnlichen Zeichnungen wie auch die idealisierten können allesamt als Zeichen für das *allgemeine Dreieck* gelesen werden. Wäre man an einem bestimmten Dreieck interessiert, so gäbe es zwar nur noch eine idealtypische Figur, die aber könnte an vielen empirischen Figuren abgelesen werden. Im Falle des bestimmten Dreiecks ist nach Reisinger mit *Graph* die idealtypische Figur gemeint; sie kann als Form der empirischen Figuren gedacht werden. Im Falle des allgemeinen Dreiecks werden die verschiedenen idealisierten Figuren nicht als voneinander unterschieden gedacht und sind damit allesamt der Graph, nach welchem die empirischen Figuren geformt sind.

In dem Beispiel, von dem zwei Varianten betrachtet wurden, sind die Figuren *Produkte* und nicht nur *Dinge*, insofern sie überhaupt erst für die Präsentation entstanden. Bei Reisinger würde – anders als bei Simon, weil bei ihm Zeichen-Sein fundamentaler als Ding-Sein ist – auch ein Stein von einem Ding zu einem Produkt, sofern er als ein Präsentant für was auch immer betrachtet wird. Ob er weiters als Bestandteil eines rationalen Präsentationssystems dienen kann, das ist eine andere Frage. Wird ein Ding (individuelles Dasein) zu Zwecken der Präsentation verwendet, bleibt es also nicht unbelassen, so gilt es bereits als artifiziell, als Produkt. Weiter können dem Stein oder auch den empirischen Figuren – als Dinge betrachtet – materielle Modifikationen widerfahren, ohne dass das an ihnen – als Zeichen betrachtet – etwas ändern würde.

Die geometrisch motivierte Unterscheidung zwischen Form und Figur tritt im üblichen Sprachgebrauch auf und kann für die Unterscheidung zwischen Referent und Präsentant und gleichermaßen ‚innerhalb' bzw. ‚bezüglich' des Präsentanten zwischen Graph und Produkt durchaus erhellend verwendet werden (vgl. Reisinger, 1999, 93-95): Ein Produkt, also ein instrumentalisiertes Ding, ist – als empirische Figur betrachtet – die Präsentation des Graphen als empirische Form; der Präsentant ist das als Graph gelesene Produkt (bzw. das vorgefundene Ding) und damit die Präsentation des Referenten, das heißt die Form wird vorstellig als Figur. So wie der Präsentant im Dienste des Referenten steht, so ist das Produkt (bzw. das vorgefundene Ding) nur Stellvertreter des Graphen und wird der Graph als der Vergänglichkeit der Ding-Materie nicht unterworfen gedacht. Das Produkt kann „in einer doppelten Vertreterfunktion operieren" (Reisinger, 1999, 95).

Der *Graph* wird durch die Produkte präsentiert, insofern er ihre identische Form ist. Die Möglichkeit einer solchen inneren Stuktur von Zeichen ist im zweiten „Theorem (3)" formuliert: „Ein Präsentant kann zur Eigenstruktur eine Selbstreferenz haben." (Reisinger, 1999, 95)[131] Für Reisinger wird in der Schrift diese Möglichkeit nicht umgesetzt, insofern ihre Produkte, das sind bspw. handgeschriebene Buchstaben, auf keine ihnen gemeinsame Formen verweisen; das heißt, dass es keinen zugehörigen Schrift-Graphen bzw. keinen Graphaspekt zu Schrift-Zeichen gebe. Schrift gilt ihm

131 Anmerkung: Die Hervorhebung im Original ist im hier vermieden.

daher nicht als eine rationale Präsentationsform (vgl. Reisinger, 1999, 101–105). Weiter muss, so Reisinger, *Referent* „definiert werden als die *reale Möglichkeit*, daß mit Bezug auf [ihn] empirische Figurenmaterialisationen seiner produziert werden können als empirisch wahrnehmbare Vertreter seiner Unsichtbarkeit“ (Reisinger, 1999, 94). Das Produkt als Tatsächlichkeit bestätigt insofern die eigene Möglichkeit, das heißt dass die Manifestation real möglich war. So werden durch ihre Zeichen Geometrie-Referenten ‚beobachtbar‘ und Kalkül-Referenten ‚gegeben‘ (vgl. Reisinger, 1999, 106).

Diesen Abschnitt möchte ich mit zwei Hinweisen Reisingers beschließen: Beide Hinweise gehen auf Konzeptionen Kants zurück, einen der Hinweise möchte ich zudem mit Simon kommentieren. Der Hinweis Reisingers auf § 59 von Immanuel Kants *Kritik der Urteilskraft* liefert eine Binnendifferenzierung von ‚Präsentation‘ in drei Teilbegriffe, die m. E. bei einer LoF-Interpretation hilfreich sind. Reisinger verwendet ‚Präsentanten‘ als genus proximum dreier Ausformungen, die er von Kant übernommen hat: Schemate, Symbole und Charakterismen; Präsentation erfolgt dahingehend jeweils gemäß einer von drei ‚Vorstellungsarten‘ als spezifische Weisen der ‚Versinnlichung‘ von Begriffen. Ein *Schema* ist eine Versinnlichung, bei welcher „einem Begriffe, den der Verstand faßt, die correspondierende Anschauung a priori gegeben wird“. „Bezeichnungen der Begriffe durch begleitende sinnliche Zeichen, die gar nichts zu der Anschauung des Objectes Gehöriges enthalten, sondern nur jenen nach dem Gesetze der Association der Einbildungskraft, mithin in subjectiver Absicht zum Mittel der Reproduction dienen“, werden *Charakterismen* genannt. Wird dagegen „einem Begriffe, den nur die Vernunft denken und dem keine sinnliche Anschauung angemessen sein kann, eine solche unterlegt, mit welcher das Verfahren der Urtheilskraft demjenigen, was sie im Schematisieren beobachtet, bloß analogisch ist“, so erfolgt die Versinnlichung in *Symbolen*.
Im Bereich des Discursiven können lediglich Charakterismen auftreten; Schemate und Symbole gibt es also nur im Bereich des Intuitiven. Weiter spricht Kant von „Darstellung“ nur bei Bezeichnung durch Schemate und Symbole. Reisinger dagegen verwendet „Darstellung“ mit „Präsentation“ synonym und damit für alle drei Präsentationsformen gleichermaßen.

Für Charakterismen, Schemate und Symbole Nominaldefinitionen zu geben, wie eben erfolgt, verbürgt natürlich nicht deren Anwendbarkeit und klärt nicht ihre Erkennnbarkeit als Zeichen. Gleichermaßen gilt: Wenn die „präsentationssystemische *Verkörperung* [...] in der Raum/Zeit“ nach dem Basistheorem eine conditio sine qua non für Rationalistätstypen ist und damit eine Voraussetzung dafür ist, „mögliche Rationalitätstypen an ihrem Präsentationsgebrauch aufsuchen, katalogisieren und analysieren“ zu können, dann bleibt die Frage offen, was die „darstellungsbedingenden Grundlagen“ sind. Statt „Präsentanten und seine Typen als vorhanden“ vorauszusetzen, untersucht Reisinger also die Voraussetzungen für einen Zeichengebrauch, der sich rationaler Präsentation bedient und dessen

Gelingen insofern garantiert ist. Dabei steht die „erkenntniskritische Fundamentaldifferenz“ von „Spontaneität = Denken“ und „Rezeptivität = Anschauen“ im unbeleuchteten Hintergrund, vor dem speziell die Voraussetzungen für Präsentanten beleuchtet werden (Reisinger, 1999, 92):[132] Die Rede von Ding, Eigenstruktur des Präsentanten (Produkt versus Graph), Referent und methodischem Operieren hat ihren Anlass also darin, die Voraussetzungen von Zeichen und Zeichensystemen sachbezogen beschreiben zu können. Präsentation soll rational sein, um „objektivierbar, identifizierbar, nachvollziehbar, kontrollierbar, kommunizierbar [zu] sein“ (Reisinger, 1999, 89). Reisingers Untersuchung über rationale Präsentation ist selbst in gewöhnlicher Schrift, in natürlicher Sprache abgefasst und damit – gemäß einer im Aufsatz gesetzten Hypothese (vgl. Reisinger, 1999, 107) – in keiner rationalen Präsentationform.
Im Hinblick auf Simon möchte ich anmerken, dass Reisinger also das Zeichen-Sein vom Ding-Sein her zu erklären versucht und er das Augenmerk auf Formen der systemischen Geschlossenheit richtet. Simon dagegen rückt Zeichen-Sein – genauer: *Zeichen*, ohne vom Sein her gedacht zu werden – ins Zentrum seines Ansatzes.

> „Wir *thematisieren* Zeichen als Seiendes, als *Ding* (res) im weitesten Sinne und wir sprechen diesem Ding zur Unterscheidung von andersgearteten Dingen Eigenschaften zu. [...] Wir gelangen über das Schema der Thematisierung von etwas als Ding mit Eigenschaften, an denen es von andersgearteten Dingen zu unterscheiden ist, nur hinaus, indem wir uns darauf besinnen, daß wir uns dabei schon an *Zeichen* orientieren.“ (Simon, 1989, 5)

Dagegen wird in Simons Zeichenphilosophie Seiendes als Zeichen thematisiert. Denn auch Sein, Sache und Ding werden, so Simon, immer erst mittels Zeichen thematisiert, das heißt: verständlich gemacht und verdeutlicht. Beim Erfassen sowie Vermitteln der Bedeutung von Zeichen – wie bspw. ‚Sein‘, ‚Sache‘, ‚Ding‘ – sind wir immer auf den gelingenden Gebrauch von (anderen) Zeichen angewiesen. Derart werden auch Denken, Wahrnehmen und Empfinden zu besonderen Formen des Zeichengebrauchs (Simon, 1989, 76–84). Kurz: Zu Zeichengebrauch gibt es keinen äußeren Standpunkt, keine Alternative, und es geht Simon um Öffnung und Weitung von bereits gelingendem Zeichengebrauch und dies gilt insbesondere für das Zeichen Zeichen. Solche Öffnung und Weitung gelingt – bei Gefahr des Misslingens – durch den unkonventionellen Gebrauch von Zeichen (Simon, 1989, 101–103), insbesondere durch Metaphern (Simon, 1989, 260–270).

132 Vgl. (Reisinger, 1999, 92): „Aus dieser Differenz geht erst die Möglichkeit hervor, anschauungsoperativ mit Zeichen eine konverse Relation erzeugen zu können.“

10.4 Zeichen und Zeichensysteme

Ich möchte hier zunächst nochmals die primären Resultate der Untersuchung Reisingers einzeln angeben und dann zu weiteren Positionen übergehen: Die Präsentation durch Geometrie-Zeichen ist schematisch, selbstreferentiell und damit auch rational. Die Präsentation *durch* einen Kalkül, das heißt in der Beziehung zwischen Präsentaten und Präsentanten, erfolgt mittels Charakterismen und ist damit fremdreferentiell, also nicht rational, die Präsentation *im* Kalkül, das heißt in der Beziehung innerhalb der jeweiligen Präsentanten, ist dagegen schematisch, selbstreferentiell und insofern rational. In der Schrift erfolgt die Präsentation der Referenten, das sind für Reisinger Laute, mittels Charakterismen und ist damit fremdreferentiell. Weiter ist bei den einzelnen Präsentanten bei Handschriften – normierte Schriften gelten Reisinger als Kalküle – keine innere Unterscheidung von dem Figur-Form-Schema möglich, das heißt die Buchstaben figurieren keine Formtypen, sondern müssen nur als voneinander verschiedene Zeichen gelesen werden können; (hand)schriftliche Präsentation ist damit fremdreferentiell und demnach nicht rational.

Für rationale Präsentation ist neben der Selbstreferentialität der Basispräsentanten die Geschlossenheit des betrachteten Zeichen*system*s – im Bezug auf den Bereich der Bedeutungen sowie auf weitere Zeichen – notwendig; diesbezüglich besteht an Kombinationen von Basispräsentanten ein systematisches Interesse. Beispielsweise ist in der Geometrie von Bedeutung, wie die grundlegenden Zeichen zueinander liegen, und in Kalkülen, welche Verknüpfungen (in welcher Reihenfolge) vorliegen. Die Basispräsentanten sind diesbezüglich nur Relate von Relationen und die Relationen können wiederum als Relate in komplizierteren Relationen auftreten, deren Bedeutung ‚geregelt' ist:

> „Rationalität ist allein durch schematisierende Konstruktion als Selbstherstellung von Möglichkeiten des Beobachtens (euklidische Geometrie) und des Gebens *(mathesis)* möglich. Dieses methodische Operieren wird vollzogen mit den Basispräsentanten. Es wird dadurch sichtbar, räumlich manipulierbar und physikalisierbar." (Reisinger, 1999, 106)

Nach Reisinger gilt für das methodische Operieren mit den Basispräsentanten: „Die Operationen sind [...] intersubjektiv von jedem Agenten operationsidentisch herstellbar, nachvollziehbar und kontrollierbar." (Reisinger, 1999, 106) – Für den Fall des in den `LoF` vorgestellten Kalküls möchte ich nun das methodische Operieren mit den Basispräsentanten näher untersuchen.

Das Analyse-Ergebnis von (Reisinger, 1999), dass ein solches für rationale Präsentationsformen notwendiges methodisches Operieren mit Schrift-Zeichen nicht möglich ist, wird am Ende der Arbeit verschärft zu der Hypothese: Die natürliche

Sprache ist kein Rationalitätstyp; soll heißen: Die natürliche Sprache insgesamt kann prinzipiell nicht – also nicht nur nicht durch Schrift – rational präsentiert werden (vgl. Reisinger, 1999, 107).
Aus dieser Hypothese, der These „daß der Ort des Denkens der Ort der natürlichen Sprache sein muß“ (Reisinger, 1999, 107), und dem Grundsatz „Denken muß die mathesis (Kalkül) in jedem Sinne als Methode ausschließen, und: mathesis ist nicht Denken.“ (Reisinger, 1999, 107)[133] ergibt sich dann als analytische Folge der Begriffsbildungen die zu Anfang dieses Unterkapitels bereits zitierte Antwort Reisingers auf die im Aufsatztitel gestellte Frage „Kalkülisieren oder Denken?“.

> „Denken und Kalkülisieren sind ausschließend, disjunkt“. (Reisinger, 1999, 107)

Im Anschluss daran kommt Reisinger wie im ersten Paragraphen auf verschiedene Formen der Bezugnahme auf Wirklichkeit zurück: So formuliert er nun in Rückgriff auf die erzielten Ergebnisse folgende dezidierte Position über den Zusammenhang zwischen Mathematik (in ihren beiden betrachteten Formen: Kalkül [mathesis] und Geometrie) und Wirklichkeit:

> „Die *mathesis* als methodische Selbstkonstitution von Strukturen und Operationen möglicher Gegebenheiten (und auch die euklidische Geometrie als methodische Selbstkonstitution von möglichen Beobachtbarkeiten im Raum) sind als Wissenschaften fähig, empirische Wirklichkeit schematisierend bestimmen zu können. Obwohl geschlossen formalselbständig, können sie auf mögliche Wirklichkeit beziehbar gemacht werden. [. . .] Die mathematisierte Erkenntnis [konstruierende Präsentationsform] kann auf mögliche Wirklichkeit anwendbar gemacht werden und kann dann selber als der möglichen Wirklichkeit angehörig aufgefaßt werden.“ (Reisinger, 1999, 108)[134]

Nach Reisinger wird die durch „können“ mehrfach genannte Option auch tatsächlich genutzt, denn es gilt: Die „formalen und realen Wissenschaften operieren im Kalkül (Mathematik)“ (Reisinger, 1999, 107), Philosophie dagegen nicht. Letzteres folgt daraus, dass „Philosophie denk[e]“ (Reisinger, 1999, 107), Denken in der Sprache beherbergt sei und der Mathematik Sprache wesensfremd sei. Bevor ich die genannte Wesensfremdheit kommentiere, möchte ich Reisinger noch das Wort geben bezüglich des Verhältnisses zwischen Sprache – und damit insbesondere der Philosophie – und Wirklichkeit:

133 Anmerkung: Die Hervorhebung im Original ist hier vermieden.

134 Die beiden geklammerten Einfügungen stehen beide im Original, wobei ich nach dem zweiten „[“ ein m. E. falsches Leerzeichen getilgt habe.

> „Sprache dagegen kann keine Wirklichkeit bestimmen: Sie fungiert in Beziehung auf *Wirklichkeit* (was nur *eine* ihrer möglichen Funktionen ist) *repräsentierend* und nicht wie angewandte *mathesis* wirklichkeitspräsentierend." (Reisinger, 1999, 108)

Performatives Sprechen steht m. E. im Widerspruch zu dieser Aussage – zumindest in der formulierten Ausschließlichkeit. Eine gewisse Ohnmacht der natürlichen Sprache im Vergleich zu der mathematischen Befehlssprache gerade im Hinblick auf die Vermittlung von Einsichten ist allerdings auch in den `LoF` zumindest einmal ein Thema.[135]

Dieses Unterkapitel möchte ich beschließen mit einigen Bemerkungen bezüglich des Verhältnisses zwischen Mathematik und Sprache, das von Reisinger folgendermaßen formuliert wird:

> „Die Zeichensysteme kalkülisierender Verfahrensweisen sind keine Sprachen. – Der Grund der Verwechslung, Mathematik sei eine Sprache, sowie der Grund des Mißverständnisses, es ließen sich durch Kalküle ‚Ideal*sprachen*' herstellen (beides hat der Philosophie sehr geschadet), wird durch die Differenz von Fall (2) [. . . , das sind die Kalkül-Zeichen,] und Fall (3) [. . . , das sind die Schrift-Zeichen] manifest. Mathematik und formalisierte ‚Sprachen' sind keine Sprachen." (Reisinger, 1999, 107)

Selbst wenn die genannte Differenz zwischen den Fällen von Kalkül- und Schrift-Zeichen zugegeben wird, dann folgt daraus weit weniger, als Reisinger hier behauptet. Denn die Bedeutungen der Zeichen Sprache und Mathematik sind innerhalb des Aufsatzes weitgehend unbestimmt geblieben: Was mit ‚Mathematik' und ‚Sprache' etikettiert ist, das bleibt weitgehend unbekannt. Es könnte also sein, dass sich die Position einer Wesensfremdheit von Mathematik und Sprache als eine unter Umständen triviale Folgerung aus (mindestens) einer zu engen Begriffsbestimmung ergibt; was man prüfen könnte, so man sie vorliegen hätte. Davon abgesehen drängt sich die Frage auf: Sind diese beiden Begriffsbestimmungen Reisingers passend? Mag man sie gelten lassen? Ist man zu den sich ergebenden Folgerungen bereit? Das Paradigma, wonach Mathematik eine Sprache sei, ist nicht ohne Sinn. Eine diesbezüglich einschlägige Untersuchung für die Mathematik ab der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hat Herbert Mehrtens vorgelegt (vgl. Mehrtens, 1990) und im Lichte dieses Paradigmas steht der zweite Teil im Hauptteil meiner Arbeit, die Genese-Untersuchungen. Mit der Rede von *Sprache* im Hinblick auf *Mathematik*, lassen sich einige Aspekte von Mathematik – und zwar sowohl sich etablierender als auch etablierter, sich nur noch weitender Mathematik – sinnfällig beleuchten (vgl. Kvasz, 2012). So ist folgender Hinweis Browns m. E. berechtigt:

135 Vgl. bereits (Brown, 1969, xx) und als eine Ergänzung dazu (Brown, 1997, x-xii).

> „One of the most beautiful facts emerging from mathematical studies is this very potent relationsship between the mathematical process and ordinary language." (Brown, 1969, 90f.)

Reisinger sitzt m. E. – so viel lässt sich doch sagen – mehreren Verwechslungen auf: Das ist zunächst eine Verwechslung zwischen mathesis und Mathematik, so er in der eben zitierten Stelle Mathematik auf mathesis einzuschränken scheint; und das scheint mir tatsächlich eine echte Einschränkung zu sein: Einerseits von Mathematik mit mathesis und andererseits vielleicht auch von mathesis mit mathesis. Zunächst sei betont: Mathematik ist mehr als Rechnen! Mathematik ist demnach mehr als Kalkül und mehr als Kalkülisieren in einem engeren Sinne. Denn bereits in dem Wort Kalkülisieren aus Reisingers Überschrift – und damit in Reisingers mathesis – steckt eine Dimension, die Reisinger der Mathematik zum Teil abzusprechen scheint: Kalkülisieren bezeichnet einerseits das Rechnen innerhalb von Kalkülen und andererseits eine Form des Formalisierens, nämlich das Verfertigen eines Kalküls. Ersteres wird von Reisinger mitgedacht, zweiteres teilweise auch; vgl. für letzteres: „Die *mathesis* als methodische Selbstkonstitution von Strukturen und Operationen möglicher Gegebenheiten". Aber auch mit dieser zweiten Bedeutung der Bezeichnung mathesis ist Mathematik nur unzureichend umfassend charakterisiert. Gerade in den Laws of Form werden die Kalkülregeln nicht einfach vorgegeben, nicht einfach methodisch konstituiert, sondern sie werden erst nach und nach *sinnvoll* festgelegt – mal vor mal nach ihrer Rechtfertigung (vgl. Kapitel 7 und 8). Ich möchte damit nicht behaupten, dass dieses Vorgehen Browns für Darstellungen von Teilen der Mathematik typisch sei – eine interessantere Frage ist, ob es typisch sein sollte –, doch hat Reisinger m. E. lediglich ‚fertige' Mathematik im Blick, die sich damit zufrieden gibt, dass sie rechnen kann.[136] Mathematik kommt ihm – wie auch Simon und darin unterscheiden sich m. E. beide von Brown – nicht auch als eine sich selbst erarbeitende Sprache in den Sinn, die innerhalb ihres Bereiches immer wieder auf neue Themen, neue Grammatiken stößt.
Wie Reisinger in Fall (2) mathesis betrachtet und anschließend mit Mathematik weitgehend zu identifizieren scheint, so wird in Fall (3) auch nicht Sprache betrachtet, sondern es werden handschriftliche Buchstaben analysiert: Reisinger universalisiert also einerseits Kalkül-Zeichen zu Mathematik und andererseits schriftliche, vornehmlich handschriftliche Zeichen zu Sprache. Im Hinblick auf die im Aufsatz erfolgende Zusammenfassung von Schemate, Symbole und Charakterismen zu Präsentanten sollte von Präsentierbarkeit oder im Hinblick auf Josef Simon von Bezeichenbarkeit die Rede sein. Im Aufsatz ist zwar von Schemata und Charakterismen die Rede, von Symbolen allerdings nur dahingehend, dass Charakterismen manchmal für Symbole gehalten werden, ohne eben solche zu sein. Wird in der Mathematik just das Zeichen Symbol gebraucht, ohne eine Präsentation per Analogie zu fordern, so

136 Vgl. (Reisinger, 1999, 99) für die Einschätzung, dass es Brown um eine „conception of calculation" geht.

sind just Symbole für Reisinger *Präsentanten per Analogie*.

Meines Erachtens ist der besprochene Aufsatz Reisingers insofern originell, dass er bei möglicher Symbolisierbarkeit ansetzt, um mögliche Rationalitätstypen bestimmen zu können. Bei dem zweiten „möglich“ muss letztlich mitgedacht werden, dass die Untersuchung der Rationalität einzelner Präsentanten-Typen galt und nicht auch bereits der Rationalität von Systemen von Präsentanten-Typen (inklusive ihrer Kombinationsregeln): Die handschriftlichen Buchstaben haben bereits den ersten Test nicht bestanden; Geometrie- und Kalkül-Zeichen würden auch den zweiten bestehen. In (Reisinger, 1999) fehlt für diese Behauptung der Nachweis und erfolgt auch kein Hinweis auf Literatur, wo ein solcher zu finden wäre.
Das Thema ist also weitgespannt und in den Details nicht entwickelt: Die Stärke des Aufsatzes liegt in den dezidierten Positionen, die meiner `LoF`-Interpretation als Anregung dienen. Mit Reisinger lässt sich also behaupten: Dass Brown in seinen Laws of Form dreifach ansetzt, dass er drei Darstellungsformen je eigener Rationalität nutzt, hat nicht nur methodisch-didaktische, sondern zudem methodisch-systematische Gründe. Dabei liegt Browns Vorgehen selbstverständlich nicht in Reisingers Erörterungen begründet, da der philosophische Aufsatz von letzterem erst 30 Jahre nach dem mathematischem Aufsatz von ersterem erschien. Die Schwäche des Aufsatzes „Kalkülisieren oder Denken? Zur Bestimmung möglicher Rationalitätstypen aus einer Kritik ihrer möglichen Symbolisierbarkeit“ liegt darin, dass eine Terminologie skizziert wird, deren Begriffe nicht argumentativ verbunden werden und dadurch zu einem guten Teil unbestimmt bleiben. Das aber liegt an ihrer Präsentationsform, wie der Autor weiß und einräumt:

> „Der Stringenz des gedanklichen Aufbaus wegen ist die Kurzform des Vortrages beibehalten.“ (Reisinger, 1999, 88)

10.5 Drei Darstellungsformen der Mathematik Browns

Im Hinblick auf die Position Reisingers lässt sich mit Simon formulieren, dass Brown in den Laws of Form verschiedene Zeichen versucht und dass wir annehmen, dass er damit einen *Kern* dreifach darstellt und entfaltet: er nutzt verschiedene Zugänge zu Demselben, worauf er auch explizit hinweist:

> „We can see the calculus by the form and the form in the calculus unaided and unhindered by the intervention of laws, initials, theorems, or consequences.“ (Brown, 1969, 69)

Dabei sind `LoF` in Teilen ein Ort des Kalkülisierens, in weiten Teilen aber auch ein Ort des Denkens. Denn das Kalkülisieren im engeren Sinne – zunächst mit arithmetischen bzw. algebraischen Zeichen, dann mit geometrischen bzw. topologischen Zeichen – ist zwar stupide, das Kalkülisieren im weiteren Sinne dagegen nicht. Das Kalkülisieren im engeren und weiteren Sinne kommt selbst in bezeichnender Weise in Chapter 11 und 12 kritisch in den Blick: Dort beobachtet sich der Mathematiker beim Mathematik machen und erkennt die grundlegenden Unterscheidungen als aus seiner Entscheidung erwachsen. Ja, die Laws of Form sind ein Buch der *mathesis* (Kalkül) , und ja, sie sind ein Buch der *mathesis* (methodische Selbstkonstitution von Strukturen und Operationen); doch damit ist es nicht getan. Denn in den Laws of Form wird zudem die *Methode* selbst nach und nach besser erkannt. Sie sind demnach weiter eine *methodologische* Schrift und nicht zuletzt darin kommt das Denken zum Zuge und spielt es die entscheidende Rolle. Der Beobachter erkennt im Rückblick ‚sich' als den Entscheider für eine Unterscheidung und er erringt diese Einsicht nicht allein durch Kalkülisieren, sondern durch Denken.

Im Haupttext der Laws of Form treten offensichtlich alle drei von Reisinger ausgewiesenen Präsentationstypen bzw. Darstellungsformen auf. Das sind zunächst in Chapter 1 und auch noch in Chapter 2 (vornehmlich) Schriftzeichen, nämlich ein aus der Lebenswelt genommenes Spiel mit Begriffen. Das sind in Chapter 3 bis 11 vornehmlich die arithmetischen und algebraischen Zeichen des Indikationenkalküls und in Chapter 12 insbesondere geometrische bzw. topologische Zeichen.
Dies nochmals aufmerksamer geordnet: Die Arithmetik (Chapter 3 und 4) ist der Algebra (Chapter 5 bis 10 zzgl. Chapter 11) systematisch vorgelagert. Die ersten Referenzformen für das virtuose Spiel mit Zeichen und Zeichenketten im Indikationenkalkül werden in Chapter 2 konzipiert. Dafür werden vom Autor bzw. Leser Sach- und Zeichenebene nach Maßgabe des Begriffsgerüsts von Chapter 1 schrittweise konzipiert (vgl. Kapitel 11.3). Die Experimente und Reflexionen in Chapter 12 verhelfen zu einer Neuorientierung bezüglich Chapter 1 und 2.
Werden die Laws of Form insgesamt betrachtet, so nutzt also Brown die von Reisinger unterschiedenen und eigens ausgewiesenen Repäsentationstypen zur gegenseitigen Verdeutlichung. Werden die Laws of Form im Detail genauer betrachtet, so zeigt sich, dass Brown die Unterscheidungen Reisingers unterläuft. Die arithmetische Sprache selbst ist nicht in gewohntem Sinne arithmetisch, sondern mitunter geometrischer Natur. Denn das *Zeichen für* eine der beiden in der Sachebene unterschiedenen Seiten, *unterscheidet selbst* in der Zeichenebene. Und weiter wird in Chapter 12 die Sach- und Zeichenebene miteinander vermengt bzw. wird die *Unterscheidung von Zeichen und Sachen* gewissermaßen aufgehoben. Im Hinblick auf Chapter 2 bis 4 *können* die Zeichen wohlgemerkt als *ikonische Präsentationen* ihrer Bedeutungen verstanden werden; das heißt: Der markierte und der unmarkierte Zustand werden beide in der Zeichenebene selbst realisiert (vgl. Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 95). Doch favorisiere ich die Lesart der Zeichen als *indexikalische Reprä-*

sentationen oder noch vorsichtiger als *symbolische Repräsentation*. Der besondere Reiz von *Chapter 12*, in dem Brown in vier Experimenten Unterscheidungen und Markierungen gleichermaßen mittels Kreisen in Ebenen darstellt, ist m. E. dann, dass *dort* die Unterscheidung (distinction) zwischen Sachen und Zeichen nicht mehr zur Gänze getroffen ist. Chapter 8 und 11 können in Teilen und auf verschiedene Weisen als propädeutische (Vor-)Untersuchungen zum nicht-Vollzug einer vollständigen Unterscheidung zwischen Zeichen und Sachen verstanden werden. In Chapter 12 wird die in Chapter 2 getroffene Unterscheidung zwischen der ersten Form und anderen Formen unterlaufen und es sind die geometrischen Zeichen eben (sich selbst) präsentierende Zeichen.
Kurz: Durch die Experimente mit den geometrischen Zeichen (Chapter 12) erkundet Brown nicht nur sein Rechnen mit den Zeichen (Chapter 2 bis 11) nochmals neu, sondern insbesondere seinen grundlegenden distinction- bzw. form-Begriff (Chapter 1). Der Frage adäquater Darstellung geht Brown in den Notes zu Chapter 12 und auch schon in Chapter 4 nach (vgl. Rathgeb, 2016).

Mit dem Unterlaufen der Unterscheidung zwischen Zeichen- und Sachebene geht eine Umdeutung des Äquivalenzzeichens einher. Denn in *Chapter 12*, also außerhalb der Primären Arithmetik und sogar außerhalb des Indikationenkalküls, symbolisiert ‚=' eine intendierte Verwechslung (is confused with) (vgl. Brown, 1969, 69). Das ist eine neue Bedeutung, insofern das Symbol = in Chapter 2 ganz explizit die Bedeutung eines *deskriptiven* Äquivalenzzeichens (is equivalent to) erhält und diese bis in Chapter 11 behält, um dort zudem implizit noch den Bedeutungsaspekt eines *präskriptiven* Äquivalenzzeichens zu bekommen. Um diese Rolle als Bestimmungs- bzw. Definitionszeichen explizit zu bezeichnen, wird das Symbol = außerhalb der Laws of Form oft noch einseitig mit einem Doppelpunkt versehen (:=); vgl. Kapitel 12.3.3 und (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 60f.). Das *Konzept der Äquivalenz* von Ausdrücken, nämlich der Äquivalenz von Arrangements, die als Hinweise auf denselben Wert gedacht sind, hat m. E. in seinem Hintergrund die Unterscheidung zwischen der Zeichenebene mit ihre Term(funktion)en und der Sachebene mit ihren Werten (vgl. Kapitel 11.3). In das *Konzept der Verwechslung* geht eine solche Unterscheidung m. E. in nicht ein.

Insgesamt sind die für die Formelsprache vereinbarten Konventionen von faszinierender Stimmigkeit. So steht das Äquivalenzzeichen in dem Raum, dessen Wert interessiert (vgl. Kapitel 12.3.3). Denn den Vereinbarungen über den „Indicative Space" in Chapter 8 gemäß nimmt ein Raum den Wert an, den das Arrangement, das insgesamt in ihm steht, anzeigt. Und gültige Gleichungen zeigen den Wert an, der in den beiden Räumen links und recht des Äquivalenzzeichens gleichermaßen angezeigt wird (vgl. S. 176). Den Vereinbarungen in der Section „Instruction" in Chapter 2 gemäß trägt wiederum jedes Kreuz selbst den Wert, den es dem Raum, in dem es steht, vermittelt (vgl. Brown, 1969, 81): Dieser Wert eines Kreuzes ist bezogen auf den Wert, den sein Innenraum hat, der jeweils andere Wert. In Chapter

11 werden nun Kreuze in spezifischer Weise zu Markern verallgemeinert; selbigen wird nämlich erlaubt und zugedacht, ihren Wert nicht nur dem Raum zu vermitteln, *in dem* sie stehen, sondern zudem bestimmten und jeweils explizit auszuweisenden – tieferen bzw. höheren – Räumen *auf* ihrer Innen- oder Außenseite.

Anmerkung: Ceterum Censeo Die Terminologie und Sprache der Laws of Form lässt sich adäquat kaum allein aus einer Lektüre von Chapter 1 erschließen; sie erweist sich in Chapter 1 einfach nicht. Dort sind die Begriffe zwar wortsprachlich formuliert und dadurch in gewissem Sinne definiert. Doch sie bleiben noch unbestimmt und deutungsoffen, so ihr *Gebrauch* nicht beachtet, ihr *Zweck* nicht mitgedacht wird. Um dies mittels eines mitunter die Mathematik betreffenden Klischees der Philosophiegeschichte zu formulieren, an Platons Akademie hat ein Schild mit folgender Inschrift gehangen: *Kein der Geometrie Unkundiger trete hier ein.* Für die Interpretation der Laws of Form soll das heißen: Der Weg zu den philosophisch nützlichen Begriffen und Implikationen, genauer: zu einem werkgetreuen Verständnis, führt durch die Mathematik im Werk; erst in der Mathematik Browns zeigt sich seine Philosophie in Gehalt, Genese und Geltung (vgl. S. 292), obwohl sich das form-Konzept – wie zu Anfang dieses Unterkapitels zitiert – nach Brown auch ohne das Dazwischentreten des Kalküls sehen lässt. Mit Reisinger lässt sich formulieren: Theoretische Rationalität liegt weniger in einzelnen Zeichen, sie liegt mehr in Zeichensystemen; daher gilt es Browns Zeichen im Zusammenhang zu beachten, um dann auch einzelne Zeichen (besser) zu verstehen. Zwei Gründe, die für eine ganzheitliche Lektüre der Laws of Form sprechen, lauten: Die Bedeutung der Zeichen, Browns Begriffsarchitektur, *zeigt* sich vornehmlich in deren Gebrauch und lässt sich zudem aus ihrem Zweck erahnen. Beide Gründe verweisen auf die mathematischen Ausführungen und verlangen deren Lektüre.

Der erste Grund lautet: *Die Bedeutung zeigt der Gebrauch.* Selbstverständlich können und dürfen die Worte Browns gebraucht und neu kombiniert werden, um damit eigene Begriffe zu bilden und Phänomene zu beschreiben. Brown selbst greift ja Bezeichnungen der Normalsprache auf. Beispielsweise mag die in soziologischen Kreisen viel bemühte Rede vom *unmarked space* einerseits so manches erhellen und manchem bei manchem helfen, doch ist sie nur auf den ersten Blick Brownsch; dem zweiten Blick aber zeigt sich, dass die Bezeichnung „unmarked space“ aus zwei Bezeichnungen Browns zusammengesetzt ist „unmarked“ und „space“, dass aber erstere bei Brown nicht auf letztere, sondern auf „state“ (Zustand) bezogen wird. Im Hinblick auf Kanon 1 (convention of intention) bleibt auch noch unter Berücksichtigung von Kanon 2 (contraction of reference) unklar, ob einem Zustand die Eigenschaft des Markiertseins sinnvollerweise zu- bzw. abgesprochen werden *kann* und ob gegebenenfalls weiter eine solche Eigenschaft mit der für Räume in Gebrauch stehenden Bezeichnung marked/unmarked angezeigt werden *darf.*
Kommen wir von diesen theorieimmanenten Anmerkungen darauf zurück, dass der

Gehalt von Chapter 1, nämlich Browns Terminologie, einer vorsichtigen Erschließung bedarf. Ein Kniff meiner Analyse von Chaper 1 ist, dieses Chapter insgesamt als eine holistische Definition, als Explikation empraktischer Begriffe/Konzepte zu lesen, die derart aufeinander bezogen werden, dass sie als Teilaspekte voneinander gelten dürfen (vgl. Kapitel 11.3). Diesbezüglich bleibt trotzdem eine Berücksichtigung der späteren Chapter zu fordern, da sich erst dort zeigt, wie Brown selbst seine Begriffe und Konzepte gebraucht und wie er sie im Gebrauch weiter entfaltet. Erst indem Brown seinem Kalkül die ersten arithmetischen und dann auch geometrischen Zeichen und zudem deren Zeichenkombinationen und ersten Referenzformen formt, zeigt sich in deren mathematischer Betrachtung und Beschreibung, in den Theoremen und insbesondere in den Beweisen, was mit Browns Worten gemeint ist, wie sie zu verwenden sind, welche Begriffe sie anzeigen und welche Bedeutung sie tragen.

Der zweite Grund dafür, die Laws of Form im Ganzen zu betrachten, lautet: *Der Zweck lässt die Bedeutung ahnen.* Weiter gilt es zu beachten, dass Brown nach einer Grundlage für Boolesche Algebren gesucht hat, dass er weiter nach einer Grundlage für deren Arithmetik geforscht hat und dass er deshalb in Chapter 2 die Zeichen, Zeichenkombinationen und ersten arithmetischen Referenzformen (vgl. Kapitel 11.3, 11.4 und 12.2) konzipiert hat. Selbigen hat er dann als Chapter 1 einen wortsprachlichen Anfang vorangestellt, nämlich Axiome, als deren Abbilder die arithmetischen Initiale, die ersten Referenzformen gelten dürfen. George Spencer Brown hat also die Begriffsarchitektur von Chapter 1 geschaffen zum Zweck der nachfolgend praktizierten Grundlegung von Mathematik und es ist der Brückenschlag von Chapter 12 gen Chapter (2 und) 1 eine nochmalige Verständigung über die Adäquatheit, die Plausibilität des Anfangs. Insofern sich mathematische Begriffe und Sachverhalte just in ihrer Konstruktion als möglich erweisen, so zeigen sich die – vielleicht philosophisch zu nennenden – Begriffe bzw. Konzepte von Chapter 1 erst in den und durch die späteren, im engeren Sinne mathematisch gehaltenen Chapter.

Kapitel 11

Pirmin Stekeler-Weithofers Mathematikphilosophie als Spiegel

11.1 Präliminarium

> „Jede Beschäftigung mit den Themen Raum, Zeit und Anschauung bzw. Geometrie, Arithmetik und Physik wird mit dem wohl schwierigsten Wort der Philosophie zurechtkommen müssen. Es ist das Wort ‚*Form*'." (Stekeler-Weithofer, 2008, 63)

In diesem Kapitel leiste ich eine Engführung von George Spencer-Browns *Laws of Form* (Brown, 1969) mit Pirmin Stekeler-Weithofers *Formen der Anschauung* (Stekeler-Weithofer, 2008). Diese Engführung mag aus den Titeln der beiden Bücher durchaus eine erste Anregung bekommen, insofern einerseits von „Form" und andererseits von „Formen" die Rede ist, doch gehen die Gemeinsamkeiten nebst Unterschieden in Thematik, Methodik und nicht zuletzt Anliegen selbstredend über diesen ersten Hinweis hinaus. Das Verständnis werden dabei nicht nur die Gemeinsamkeiten, sondern auch die Unterschiede befördern und vertiefen. Ich stimme also Stekeler-Weithofers andernorts geäußerten, kritischen Anregung zu, wonach „wir uns gerade auch für die Differenzen und nicht bloß für die Ähnlichkeiten interessieren [sollten]" (Stekeler-Weithofer, 2012, 115). Als Ähnlichkeiten nennen möchte ich, dass in beiden Grundlegungsschriften mathematische Gegenstands- und Redebereiche konstituiert werden, dass darein diagrammatische Überlegungen fließen und dass – obwohl in beiden Titeln von Form die Rede ist – das materialbegriffliche Schließen das Primat hat.

Bevor ich die Grundlinien der beiden Bücher miteinander vergleiche, möchte ich das Thema von (Stekeler-Weithofer, 2008) zumindest im Groben dadurch bestimmen, dass ich die Frage nach der Bedeutung des als Zeichen verstandenen Buchtitels beantworte und dafür zunächst auf das im Zeichen ‚Formen der Anschauung' nach herkömmlicher Lesart enthaltene ‚Anschauung' eingehe.

Die Bedeutung von ‚Anschauung', so die Teilantwort, ist nicht schlicht und einfach Schauen alias Sehen, sondern „*jede[r]* präsentisch-perzeptive Dingbezug, wie er konkret durch unseren *praktischen Umgang mit formbaren Körpern strukturiert* ist" (Stekeler-Weithofer, 2008, 29). Die Bedeutung von ‚Formen der Anschauung', so die Antwort im Ganzen, sind zuvorderst die *Formen des praktischen Umgangs*, „*in* denen wir auf Welt Bezug nehmen", nämlich „lebensweltliche, implizite, *empraktische* Formen unseres *Tuns* und *Handelns*, gerade auch des *Sprechens* und verbalen *Schließens*", sind nicht die „wahrnehmbare[n] *Gestalten* oder *Figuren*", über die wir in gegenständlicher Rede sprechen, sind aber weiters die *Formen*, „*über die* wir in [...] *reflektierender Rede*" sprechen (Stekeler-Weithofer, 2008, 29), nämlich über Punkte, Geraden und Ebenen, über Strecken, Kreise und andere Formen, insbesondere über Kombinationen solcher Formen:

> „Unsere Analyse beginnt [.] mit der sprachlogischen Differenzierung zwischen präsentischen bzw. empirisch präsentierten *Figuren* oder *Gestalten* an entsprechend gestalteten Körpern auf der einen Seite, den durch solche Gestalten oder Figuren bloß angedeuteten oder repräsentierten, aber als solche nie wirklich präsentierbaren idealen bzw. ‚reinen' *Formen* auf der anderen Seite." (Stekeler-Weithofer, 2008, 30)

Der sprachlogischen Differenzierung zufolge *sind* gestaltete Körper und Figuren (kurz: Gestalten) *Gegenstände der Anschauung*. Und es *haben* die Körper und Figuren eine geometrische Form. Diese geometrische Form, diese Formen der Anschauung, werden in der Geometrie zu den *Gegenständen theoretischer Rede* bzw. *Gegenständen geometrischer Rede* und damit auch zu *Gegenständen des Denkens* (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 30f.). Dieser Weg hinein in die Mathematik, der Gestalten und Figuren *in* der Anschauung mit Formen der Anschauung verbindet, setzt sich fort als Weg in die Physik hinein und insofern als Weg aus der Mathematik heraus:

> „Im Zentrum meiner Überlegung steht daher die Mathematisierung unserer vormathematischen Rede über räumliche und zeitliche Verhältnisse einerseits, die Anwendung mathematischer Darstellungen derartiger Verhältnisse auf die reale Welt andererseits. Das heißt, es geht um den *Weg in die Mathematik*, der, wie der Titel des Buches sagt, *bei der Anschauung beginnt* und zu *Formen* oder so genannten *Strukturen* führt. Und es geht um den *Weg aus der Mathematik*, der von den mathematischen Formen und Strukturmodellen zu Realisierungen der Modelle sowohl in der Anschauung, als auch in einer nicht mehr direkt in der Anschauung gegebenen und kontrollierbaren Welt führt." (Stekeler-Weithofer, 2008, 19f.)

Der Ausgangspunkt ist also kein wie auch immer axiomatisierter „*mathematische[r] Raum*" und nicht ein relativistisch oder nicht-relativistisch konzipierter „globale[r] *Bewegungsraum* der physikalischen Kinematik" (Stekeler-Weithofer, 2008, 29), sondern der „lokale *Anschauungsraum*", in dem die Existenz – qua Herstellbarkeit

mittels geeigneter Verfahren – hinreichend exakter und formstabiler Quader und Keile postuliert wird.
Erst im fünften Kapitel von (Stekeler-Weithofer, 2008) wird dann die ‚axiomatische, algebraische und analytische Geometrie' in Anlehnung an Hilberts *Grundlagen der Geometrie* vorgestellt, nachdem zuvor in vier Kapiteln nach Maßgabe des proto-mathematischen Anschauungsraums ein genuin geometrisches, streng geregeltes Sprachspiel eingerichtet und damit der (geometrischen) Axiomatik tatsächlich ein wahrheitswertsemantisch wohldefinierter, mathematischer Redebereich als tatsächlich geometrisches und nicht nur arithmetisches Modell vorbereitet worden ist.

> „Es geht hier nicht darum, schnell mit dem mathematischen Denken zu beginnen oder fertig zu werden. Es geht darum zu zeigen, welche faktischen Voraussetzungen, welche nichtsprachlichen Demonstrationen und sprachlogischen Techniken bei der Konstitution mathematischer Redeformen (Aussagen, Urteile) und Beweise eine Rolle spielen." (Stekeler-Weithofer, 2008, 8)

Auf diesem Weg in die Mathematik geht es Stekeler-Weithofer nicht nur um eine Grundlegung der formentheoretischen synthetischen Geometrie in zwei und drei Dimensionen, sondern auch um die dafür in Anspruch genommenen und insofern in ihrem Gebrauch vorgeführten „sprachtechnischen Grundlagen", die viel zu oft mit „metaphysischen oder ontologischen Meinungen vermengt bzw. verwechselt werden" (Stekeler-Weithofer, 2008, 1):

> „Damit erlernen wir im Begriff der geometrischen Form ein sprachanalytisch äußerst wichtiges Paradigma, das ganz allgemein zeigt, wie abstrakte Begriffe eine *Praxisform* in vergegenständlichter Ausdrucksweise beredbar machen." (Stekeler-Weithofer, 2008, 180)

Beispielsweise sind Zahl, Menge und Klasse dieserart „abstrakte Begriffe", genauer: Dies sind „Abstraktoren" und damit „sprachliche *Funktoren*", mit denen wir „*abstrakte Namen*" bilden und uns damit „auf je besondere Bereiche abstrakter Gegenstände" (Stekeler-Weithofer, 2008, 166) beziehen können, wie eben auf Zahlen, Mengen und Klassen und gewissermaßen auch auf Zeichen, Bedeutungen und Begriffe. Im Lichte der Zeichenphilosophie Josef Simons gesprochen, liefern die drei letztgenannten, also nicht genuin mathematischen Abstraktoren Benennungen, deren Benanntes in entscheidendem Maße situationsabhängig ist. Weiters fungiert meiner Lesart zufolge „form" (auch) in (Brown, 1969) zuweilen als Abstraktor, nämlich einheitsstiftend: „Call the form of a number of tokens considered with regard to one another [. . .] an arrangement." (Brown, 1969, 4) Für die Engführung mit (Brown, 1969) ist der erste Teil des Weges in (Stekeler-Weithofer, 2008) von Bedeutung, nämlich der Weg hinein in die Mathematik, die beide Male zuvorderst eine Mathematik des Raumes ist.

Weiters geht es in den *Formen der Anschauung* wohlgemerkt nicht nur um Formen, sondern auch um Unterscheidungen, speziell um Unterscheidungen, die einer gemeinsamen Kontrolle zugänglich sind, gerade weil sie anschaulich sind:

> „[A]ller Unterschied beginnt in der Anschauung, dem Bereich gemeinsamer Unterscheidungen von etwas, das uns [durch direkten Umgang oder sprachliche Repräsentation] gemeinsam präsent *gemacht* werden kann“. (Stekeler-Weithofer, 2008, 24).

Stekeler-Weithofer knüpft hier an eine Einsicht Kants an und verdeutlicht sie mittels dreier beispielhafter Unterscheidungen, nämlich der Unterscheidung zwischen „‚a‘ und ‚b‘“, zwischen „einer Kreisfigur und einer Strecke“ und zwischen „einem Punkt in einem Kreis und einem Punkt außerhalb“. Keine dieser Unterscheidungen sei sinnvollerweise *bloß als empirisch* oder *schon als begrifflich* zu betrachten, wohl aber jeweils als „*gemeinsam überprüfbare*“ bzw. kontrollierbare Unterscheidung, insofern wir wohl annehmen dürfen, dass wir lernen können, die jeweilige Verschiedenheit zunächst zu erkennen und dann auch anzuerkennen. Wohlgemerkt dürfen die beiden Zeichen a und b nicht als dasselbe Zeichen gelten, insofern von der Unterscheidung zwischen den Zeichen oder von der Unterscheidung zwischen deren Bedeutungen die Rede sein soll.

Im Lichte der Zeichenphilosophie Josef Simons gesprochen, sind zwei Zeichen, die nicht als dasselbe Zeichen gelten sollen, in ihrer dahingehenden Bedeutung bereits verstanden, falls sie lediglich *als* verschiedene Zeichen verstanden sind. Weiters ist im Hinblick auf (Brown, 1969) das dritte Beispiel für eine Unterscheidung in der Anschauung besonders interessant. Eine Unterscheidung in der Anschauung ist eine gemeinsam überprüfbare Unterscheidung. Die Situation einer Kreislinie in einer Ebene wird von Brown in Chapter 12 behandelt und in den Notes zu Chapter 2 und 4 als kanonische Illustration für eine Unterscheidung (distinction) angesprochen.

In (Stekeler-Weithofer, 2008, 183) erläutert der Autor den *besonderen Sinn* von synthetisch-apriorischen Begriffsbestimmungen und demonstrativen Folgerungen. *Synthetisch-apriorische Begriffsbestimmungen*, das heißt: als erfüllbar aufzeigbare Begriffsbestimmungen, sind, so Stekeler-Weithofer, nicht weniger präzise als formsyntaktische Definitionen, wie bspw. axiomatisch-implizite. Jene sind gleichermaßen klar und deutlich wie diese. Gleichermaßen sind *demonstrative Folgerungen*, wie bspw. materialbegriffliche Folgerungen und geometrische Demonstrationen, nicht weniger zuverlässig als deduktive Figurenumformungen. Letztere sind sogar auf erstere angewiesen. Denn bereits das erste Beispiel für eine Unterscheidung in der Anschauung zeigt, dass für die Beurteilung (der Darstellung) von Deduktionen die Zeichen in geeigneter Weise als dasselbe bzw. als verschiedene erkannt werden müssen. Kurz: Wie die sog. Demonstrationen bedürfen auch Deduktionen einer geeigneten Kontrolle in der Anschauung. Demnach ist auch die „inzwischen an der Arithmetik ausgerichtete[.] Sprache der Mathematik“ im Prinzip nicht alternativlos. Denn nach Stekeler-Weithofer sind nicht nur lineare, an der (linearen)

Zeit-Anschaung orientierte Schriften unstrittig zu lesen, sondern auch mehrdimensionale, an der Raum-Anschauung orientierte Schriften. Wohlgemerkt wird in (Cull und Frank, 1979) gegen Brown und seine ⏋-Notation der Vorwurf erhoben, von der gewöhnlichen Notation abzuweichen, insofern seine Notation nicht ideographisch und linear sei, sondern geometrisch.
Die dritte der drei Bemerkungen gilt dem Kern der ersten der zehn Thesen, dass nämlich die axiomatische Methode nicht als Anfang oder Beginn von Mathematik taugt.

> „In der Mathesis, der Lehre, ist die Grundlage der Mathematik zu sehen, nicht etwa in den deduktiven Axiomensystemen, in deren richtigen Umgang samt richtigen Verständnis wir ja auch immer erst eingeführt werden müssen. (Stekeler-Weithofer, 2008, 184)

Zu Lehren bzw. zu Erlernen ist insbesondere die gängige mathematische Praxis, die wir für lehrbar und lernbar halten, und daher „im Falle eines Nicht-Gelingens der gemeinsamen Beurteilung von Konstruktionen oder Deduktionen bei den Beteiligten eine Störung vorliegen muss“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 184).
Wohlgemerkt ist der Anfang oder Beginn von (Brown, 1969) kein axiomatischer, sondern gut lesbar als lehrende Einführung in die arithmetische, algebraische und formale Sprache und das Vorgehen in einem semantischen bzw. syntaktischen Beweissystem für Boolesche Algebren; vgl. Kapitel 4 und 5. Insbesondere gilt es m. E. zu erkennen, dass es zu den Quaderpostulaten von (Stekeler-Weithofer, 2008) in (Brown, 1969) Analogien gibt. Dieserart wird der Calculus of Indikations ebenfalls mittels materialbegrifflicher Folgerungen zu Wege gebracht und erhellt die zugrunde liegende Form der ersten Unterscheidung. Falls dann die Frage gestellt ist, ob der jeweilige Indikationenkalkül und die jeweilige Form der ersten Unterscheidung verschiedener *Beobachter* tatsächlich lediglich Ausdrucksvarianten des gleichen strukturierten Gegenstandsbereichs sind, stellt sich zugleich die Frage, ob bspw. der Unterschied zwischen zwei Formen der ersten Unterscheidung eine der beiden ersten Unterscheidungen ist. Beides lässt sich im Hinblick auf die Experimente und Illustrationen von Chapter 12 thematisieren und entscheiden, nämlich in der Anschauung, die den einschlägigen Begriffen Regulativ bzw. Korrektiv ist.

Stekeler-Weithofer ist demnach an einer *sinnanalytischen Philosophie* (Stekeler-Weithofer, 2008, 19) gelegen, an „einer sowohl historisch als auch systematisch informierten Kenntnis *über die Gründe*, warum man welche Argumente anerkennt und unter welchen Voraussetzungen man überhaupt ein mathematisches Theorem [bloß formal oder sogar intern] beweisen kann“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 247).

11.2 Die mathematikphilosophische Optik

Mit seinen *Formen der Anschauung* hat Stekeler-Weithofer eine Sinn-Analyse der axiomatischen Geometrie vorgelegt und Brown hat in seinen *Laws of Form* für die Axiomatik Boolescher Algebren entsprechendes geleistet. Den Ausgangspunkt bilden also beide Male weder Formelsprache noch mengentheoretische Strukturen, nämlich nicht Mengen von Gegenständen zusammen mit Prädikaten, fundamentalen Funktionen/Operationen und ausgezeichneten Elementen, sondern mathematische Redebereiche, für die gezeigt sein muss, dass ein formaler Wahrheitsbegriff festgelegt ist, nämlich die beiden logisch grundlegenden Prinzipien erfüllt sind: das Leibnizprinzip sowie das allgemeine Substitutions- und Wertigkeitsprinzip (vgl. S. 214). Ich behandle in diesem Unterkapitel zunächst die Frage, weshalb von Stekeler-Weithofer nicht der übliche Ansatz genommen wird, und danach die Frage, worum es sich bei solchen Redebereichen handelt.

Für Stekeler-Weithofer ist es nicht einfach eine Frage des Geschmacks, im Hinblick auf Grundlegungsfragen den Anfang nicht bei Axiomen und dem Kalkül der Prädikatenlogik erster Stufe zu nehmen (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, Kapitel 5), sondern bei mathematischen Redebereichen (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, Kapitel 4) und deren Konstitution (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, Kapitel 2 und 3).

> „Der Ausgangspunkt meiner Überlegungen ist sicher nicht ganz unkontrovers, zumal er notwendige Bedingung der Untersuchung und ihr Ergebnis zugleich ist. Es ist die schon in der Vorrede formulierte These, oder Einsicht, dass formallogische Schluss- oder Beweisprinzipien keineswegs ohne jede Einschränkung allgemein gültig sind. [. . .] *Formale* Logik ist in Wirklichkeit immer bloß die Explikation von Schemata und Regeln *des mathematischen Beweisens* (unter Einschluss syllogistisch-terminologischen Schließens), die erst durch die *besondere Einrichtung* von *mathematischen Redebereichen* oder *formalen Terminologien* allgemein gültig werden.“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 16)

Die formalen Methoden sind demnach nicht ohne weiteres verfügbar, insbesondere nicht „allgemein gültig“, sondern bedürfen dahingehend einer „besonderen Einrichtung“. Mittels der Prädikatenlogik erster Stufe aus Axiomensystemen formal deduzierte Formeln gelten dem Vollständigkeitssatz Gödels gemäß zwar tatsächlich allgemein, nämlich für alle Strukturen in der Klasse von Modellen des Axiomensystems (Stekeler-Weithofer, 2008, 16). Doch klärt das im Hinblick auf eine Struktur, insbesondere im Hinblick auf eine nicht bereits mengentheoretisch formulierten Struktur, natürlich noch nicht – zumindest nicht unmittelbar – die Fragen, *ob* die Struktur der Klasse von Modellen überhaupt angehört und *wie gut* das Axiomensystem die Struktur gegebenenfalls beschreibt; bspw. ist ein Ring durch die Gruppenaxiome trivialerweise nicht besonders gut beschrieben.
Offen bleibt auch die Frage, *ob* es in einer vermeintlichen, nicht mengentheoretisch

gegebenen Struktur überhaupt einen formalen Wahrheitsbegriff gibt. Die Vollständigkeit alias Allgemeingültigkeit der üblichen formalen Methoden ist im Hinblick auf konkrete Strukturen zugleich eine Schwäche, so lautet gewissermaßen Stekeler-Weithofers Interpretation des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes:

> „Gödels Beweis zeigt den Unterschied zwischen einem *rein* axiomatisch-deduktiven Denken (a), einem umfassenderen Beweisbegriff (b) und einem noch umfassenderen Wahrheitsbegriff in der Mathematik (c). [...] Was er bewiesen hat, ist [...], dass es eine wichtige Differenz zwischen mathematischen Beweisen in mathematischen Redebereichen und formalaxiomatischen Deduktionen gibt." (Stekeler-Weithofer, 2008, 265f.)

In konkreten Strukturen muss demnach nicht jede wahre Aussage beweisbar und nicht jede beweisbare Aussage deduzierbar sein und „es gibt höchst wichtige *Prinzipien* des Beweisens [...], welche sich *nicht vollständig* als formale Anwendung von schematischen Kalkülregeln darstellen lassen", wie bspw. „das *Prinzip des indirekten Beweisens* einer Aussage $\mathfrak{p}$ durch Widerlegung der Annahme, die Aussage $\mathfrak{p}$ sei falsch" (Stekeler-Weithofer, 2008, 17).[137]

Philosophie der Mathematik ist für Stekeler-Weithofer „mehr und anderes als bloße beweistheoretische Metamathematik der Deduktionskalküle" (Stekeler-Weithofer, 2008, 21). So ist dem Autor an einer „wirklich sinnanalytischen Philosophie" (Stekeler-Weithofer, 2008, 19) gelegen, denn auch in mathematischen Definitionen gehe es nicht „immer nur um die Festlegung der Bedeutung der Wörter" (Stekeler-Weithofer, 2008, 19). Ich möchte das genauer formulieren: In Definitionen geht es nur dann „immer nur um die Festlegung der Bedeutung der Wörter", falls das schwierigere Problem der Klärung der Bedeutungen selbst, die sog. Bedeutungskonstitution, bereits andernorts gelöst wird. Dazu zunächst allgemein: Auf dass die formalen Symbole für Elemente, Funktionen und Operationen als die Elemente, Funktionen und Operationen einer Struktur interpretiert werden können, müssen diese Elemente, Funktionen und Operationen eben bereits bekannt sein und ein geeigneter formaler Wahrheitsbegriff vorliegen. Und nun konkret gegen die Rede von der impliziten Definition geometrischer Begriffe: Die geometrischen Axiome sollen nicht erst nachträglich auf beliebige konsistente Weise interpretiert werden, sollen bspw. nicht einfach arithmetisch modelliert werden als bestimmte Punktmengen in Zahlenräumen, sondern es soll den Worten Punkt, Strecke, Winkel, Kreis, Ebene u. a. bereits vorab durch den Gebrauch und die Herstellung von geeignet gut realisierten Quadern eine wohlbestimmte geometrische Bedeutung verliehen sein. Stekeler-Weithofer empfiehlt demnach eine Revision gängiger Revisionen.

137 Vgl. (Stekeler-Weithofer, 2008, 247): „In der Praxis aber akzeptiert man (glücklicherweise) immer auch nicht-deduktive wahrheitssemantische Beweise. Man denke etwa an indirekte Beweise der Wahrheit von Sätzen bzw. Aussagen in konkret auf syntaktischer Grundlage wohlkonstituierten Redebereichen wie im Fall natürlicher Zahlen."

Mathematiker dagegen setzen, so Stekeler-Weithofer, für gewöhnlich „die Gegenstandsbereiche, über die sie reden, und die Wahrheiten, die sie beweisen, als gegeben voraus“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 19). Das ist heikel, insofern „es immer eine Analyse der Konstitution dieser Gegenstandsbereiche gewesen [war], welche die Mathematik wesentlich vorangebracht und neue Möglichkeiten des strengen Redens und exakten Beweisens geschaffen hat“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 19). Das Ergebnis und den Vorteil einer erfolgreichen Konstitutionsanalyse formuliert Stekeler-Weithofer für die Arithmetik:

> „Es ist vielmehr die *Praxisform* unseres *Umgangs mit basalen arithmetischen Symbolen oder möglichen Zahlvertretern*, in der allein der Zahlbegriff auf nicht dogmatische und nicht mystische (pythagoräistische) Weise klar und deutlich definiert ist. Auf ihrer Grundlage werden die Axiome zu wahren Sätzen und nur so.“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 167)

Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie Brown und Stekeler-Weithofer ihre mathematischen Redebereiche konstituieren, beantworten wir nun die terminologische Frage, worum es sich bei mathematischen Gegenstandsbereichen und mathematischen Redebereichen handelt.

> „Ein formaler oder mathematischer *Gegenstandsbereich* G ist wohlkonstituiert [genau dann, wenn] eine (hinreichend exakte) Charakterisierung der elementaren G-Benennungen t vorliegt [... zuzüglich] einer (reflexiven, symmetrischen und transitiven) Gleichheitsrelation auf G“. (Stekeler-Weithofer, 2008, 172)

Die Gegenstände in einem solchen Gegenstandsbereich sind also elementare *Benennungen*, nämlich Terme t, für die eine *Gleichheit* als Äquivalenzrelation definiert ist: Jedem Satz der Form $\mathsf{t}_1 = \mathsf{t}_2$ ist genau ein Wahrheitswert formal zugeordnet, wobei diese Zuordnung reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
Redebereiche sind Gegenstandsbereiche, in denen nicht nur Benennungen Gegenstände mimen, sondern neben der Gleichheit noch weitere Prädikate mittels Prädikatworten gemimt werden:

> „Ein formaler [oder mathematischer] *Gegenstandsbereich* G heiße formaler oder mathematischer *Redebereich*, wenn zusätzlich zur Gleichheit irgendwelche n-stellige Prädikatworte $\mathsf{P}^{\mathsf{n}}_{\mathsf{i}}$ und die zugehörigen Wahrheitswertzuordnungen festgelegt sind, so dass sich mit diesen Worten Prädikate auf G ausdrücken lassen.“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 172)

Solche *Wahrheitswertzuordnungen* für ein Prädikatwort P^{n} müssen zwei Prinzipien gehorchen, nämlich dem (1) *Allgemeinen Substitutions- und Wertigkeitsprinzip* (ASWP) und dem (2) *Leibnizprinzip*:

(1) Jedem Satz der Form $\mathsf{P}^{\mathsf{n}}(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_{\mathsf{n}})$ ist genau ein Wahrheitswert formal zugeordnet (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 169).

(2) Den Sätzen der Form $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ und $P^n(t_1^*, \ldots, t_n^*)$ ist derselbe Wahrheitswert zugeordnet, falls jedem der n Sätze der Form $t_1 = t_1^*, \ldots, t_n = t_n^*$ der Wahrheitswert das Wahre zugeordnet ist (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 169).

Bemerkung zur strengen Sprechweise: Es werden den Sätzen *Wahrheitswerte zugeordnet* und damit sind im Hinblick auf die durch Sätze formulierten Aussagen die *Wahrheitsbedingungen festgelegt*. Weil bspw. in der gewöhnlichen Arithmetik dem Satz ‚$1+1=2$' der Wert das Wahre zugeordnet ist, sagen wir die Aussage $1+1=2$ sei wahr. Laxerweise werden wir auch von wahren Sätzen und nicht nur von wahren Aussagen sprechen und sind zudem weiterhin hemdsärmelig im Umgang mit dem Unterschied zwischen Zeichen und Bedeutung, wie bspw. bei Satz und Aussage, und illustrieren ihn oft nicht durch einfache Anführungszeichen oder geeignete Abstraktoren, wie bspw. durch Form und Zeichen, genauer: wie bspw. durch ‚Form' und ‚Zeichen' (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 167f.).

Mathematische Gegenstandsbereiche und mathematische Redebereiche *sind* also streng geregelter Sprachgebrauch, für dessen Sätze ein formaler Wahrheitsbegriff vorliegt. Um dies zu betonen, spricht man letzterenfalls zuweilen explizit von *wahrheitswertsemantisch wohlgeformten mathematischen Redebereichen* (Stekeler-Weithofer, 2008, 20). Die Schwierigkeit besteht nun zumeist darin, einem mathematischen Gegenstandsbereiche einen formalen Wahrheitsbegriff zu erweisen. Sie zu meistern, gehört zum Kerngeschäft der beiden Autoren in den Werken „Formen der Anschauung" und "Laws of Form".
Dieses von Frege angeregte Verfahren einer sprachlichen Systematisierung beginnt nicht mit Axiomen und auch nicht mit Gegenständen, sondern mit möglichen Benennungen für mögliche Gegenständen; solche Benennungen für Gegenstände sind gewissermaßen die ersten Gegenstände und weiter geht es um eine Redeform, „die sich *rein verbal und schematisch lehren und lernen* lässt" (Stekeler-Weithofer, 2008, 37).

> „Formale Redebereiche sind [...] nichts anderes als wahrheitssemantische Interpretationen prädikatenlogischer Formelsysteme." (Stekeler-Weithofer, 2008, 173)

Umgekehrt können solche Gegenstands- und Redebereiche miteinander verglichen und zumal als „bloße Ausdrucksvarianten des gleichen Gegenstandsbereiches" bzw. des gleichen strukturierten Gegenstandsbereiches betrachtet werden. Die „Vernachlässigung von *Ausdrucksvarianzen oder Isomorphien*" liefert dann und daher den *strukturierten Gegenstandsbereich*, das ist in kanonischer Weise eine mengentheoretische Struktur (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 173f.).

> „Der Form nach geht die Idee der Aufhebung der Ebene der Ontologie in einer Logik der Verfassung von Gegenstandsbereichen auf Kant und dann auch auf

> Frege zurück. Beide lassen allerdings [. . .] den sprachlogischen Unterschied zwischen *vor-* oder *protomathematischen* und schon wirklich mathematisierten Redebereichen durchaus noch im Unklaren. Sie sehen nicht, dass es geradezu das Ziel der Konstitution mathematischer Gegenstandsbereiche ist, die Prinzipien des formalen logischen Schließens in diesen Bereichen *allererst durchzusetzen*." (Stekeler-Weithofer, 2008, 13)

Dieser „Idee der Aufhebung der Ebene der Ontologie" folgt Brown nicht, insofern er die Benennungen seines Gegenstandsbereichs tatsächlich schon als Benennungen zweier, zuvor eigens konstruierter Gegenständen einrichtet. Mit anderen Worten: Die Zeichenebene dient von vornherein der Darstellung der Sachebene. Das Augenmerk meiner Lesart der Laws of Form gilt der Grundlegung der LoF-Mathematik, insbesondere dem Etablieren der Argumentationspraxis, also: *Wie* ist *wovon* die Rede und *weshalb* stimmt diese Rede und gelten das ASWP und das Leibnizprinzip? In den Laws of Form und den Formen der Anschauung geht es beide Male zunächst nicht um mengentheoretische Strukturen, also nicht um Mengen von Gegenständen zusammen mit Prädikaten (inklusive Funktionen) und ausgezeichneten Elementen, sondern nicht-mengentheoretische Strukturen, nämlich um mathematische Redebereiche, deren wahrheitswertsemantische Wohlgeformtheit explizit erwiesen wird. So treten in beiden Büchern Beispiele für „*[v]ollformale Deduktionen von Formeln*", „*[m]athematische Beweise der Wahrheit* von Aussagen" und „*[p]roto-mathematische Begründungen*" (Stekeler-Weithofer, 2008, 20) auf. Für die Laws of Form sind das zunächst die *Demonstrationen* in Chapter 6, weiter die *Beweise* der Theoreme 9 und 8 in Chapter 4 und ebenfalls in Chapter 4 die *Argumentationen* für die Theoreme 1–4. Von eigentümlichem Charakter sind die Argumentationen für die Theoreme 5–7, da sie üblichen Beweisverfahren gelten.
Für die Formen der Anschauung nenne ich nicht Beispiele, sondern zitiere stattdessen die Absichtserklärung des Autors:

> „Eine der Zielsetzungen des Buches ist es daher, den Unterschied zwischen der Verfassung eines *mathematischen Redebereiches* wie der elementaren Geometrie und dann auch der Arithmetik mit den je zu ihm gehörigen *Beweisformen* (1), der Verfassung *vor- oder proto-mathematischer* Redebereiche und ihren *Begründungsformen* (2) und der Verfassung *formaler Axiomensysteme* und ihrer kalkülartigen *Deduktionen* (3) im Detail aufzuzeigen." (Stekeler-Weithofer, 2008, 72f.)

Im Folgenden stelle ich die Konstitution der Primären Arithmetik als mathematischen Gegenstandsbereich kritisch dar. Ich unterscheide diesbezüglich im Groben zwischen drei Bereichen: einem Bereich der Begriffe, einem Bereich der Sachen alias Gegenständen und einem Bereich der fachsprachlichen Zeichen. Statt von „Bereich" werde ich auch von *Kosmos* sprechen, um der den Bereichen jeweils innewohnenden Ordnung Ausdruck zu verleihen. Als weiteres Synonym verwende ich – gewissermaßen doppeldeutig – *Ebene*, insofern sowohl die *Zeichenebene* (alias Ebene der

fachsprachlichen Zeichen) als auch die *Sachebene* (alias Ebene der Sachen) von Brown zumeist in ebenen Flächen illustriert werden.
Mir scheint dann die folgende Lesart für die `LoF` möglich und gewinnbringend zu sein: In den *Laws of Form* wird ein bestimmtes Thema dreifach dargestellt und entfaltet: Zunächst über ein aus der Lebenswelt – genauer: aus dem Handeln *und* Sprechen[138] – genommenes Spiel mit *Worten* (Chapter 1, 2 und 8), dann über ein Spiel mit *arithmetischen und algebraischen Zeichen* (Chapter 3 bis 11) und zuletzt über ein Spiel mit *geometrischen Zeichen* (Chapter 12). Dabei hat das Spiel mit arithmetischen und algebraischen Zeichen drei Phasen: die Arithmetik (Chapter 3 und 4), die Algebra zur Arithmetik (Chapter 5 bis 10) und eine von der Arithmetik losgelöste Algebra (Chapter 11). Insbesondere wird in Chapter 3 die Arithmetik einer in Chapter 2 semiotisch fixierten Situation entnommen. Diese Semiotik ist zweifach gerechtfertigt, nämlich begrifflich vorbereitet in Chapter 1 und geometrisch verdeutlicht in Chapter 12.
Ich möchte die Lesart der ersten vier Chapter nochmals anders verdeutlichen, da in ihnen der mathematische Redebereich konstituiert wird: In Chapter 1 werden aus *vor-mathematischer* Rede, nämlich dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, Begriffe bzw. Prinzipien genommen – man könnte auch von Konzepten, Kernideen oder Kerngedanken sprechen – und mittels des gewöhnlichen Sprachgebrauchs mehr oder minder deutlich erläutert. Diesen Anfangspunkt der Begriffsebene der `LoF`-Mathematik bildet m. E. wie in den *Formen der Anschauung* eine breitgefächerte holistische Definition, nämlich eine Liste von *Kriterien* und *Erklärungen*, die Stekeler-Weithofer explizit ausweist, Brown dagegen nicht. Doch ist für Brown und Stekeler-Weithofer wiederum gleichermaßen die (Lebens-)Welt bzw. darin gepflegte Praxisformen der maßgebliche Schlüssel, der die Mathematik systematisch im Hinblick auf ihre Grundlegung, aber auch ihre Vermittlung eröffnet. In Chapter 2 werden die *proto-mathematischen* Begriffe mathematisiert: Es wird zunächst die Sachebene und im Anschluss daran die Zeichenebene der `LoF`-Mathematik mittels der holistisch definierten Begriffe bzw. Konzepte grundgelegt. In Chapter 3 und 4 wird der Zeichengebrauch weiter mathematisiert, einerseits inhaltlich erschlossen und andererseits formal eingerichtet. Wohlgemerkt ist *Form* der Zentralbegriff der *Laws of Form* und es liegen die ersten Argumente in dem Buch m. E. tatsächlich in diesem Konzept begründet. Sie sind allerdings nicht im üblichen Sinne *formal*, sondern materialbegrifflich. Das materiale Schließen bringt in den *Laws of Form* also das formale Schließen zuwege. Demnach ist/wird *materialbegrifflich* begründet, dass die Primäre Arithmetik wahrheitswertsemantisch wohldefiniert ist, das heißt: dass die beiden logisch grundlegenden Prinzipien, das ASWP und das Leibnizprin-

138 Vgl. (Brown, 1969, 90f.): „One of the most beautiful facts emerging from mathematical studies is this very potent relationship between the mathematical process and ordinary language. There seems to be no mathematical idea of any importance or profundity that is not mirrored, with an almost uncany accuracy, in the common use of words“.

zip, in der Primären Arithmetik erfüllt sind.[139]
Wir gehen nun daran, das jeweilige Vorgehen genauer in Augenschein zu nehmen, und werden dabei bemerken, dass Erschließung und Einrichtung – per Konstruktion und Konvention – von Sach- und Zeichenkosmos nach Maßgabe der in Chapter 1 skizzierten Konzepte erfolgen. Im Einzelfall wird auf den gewöhnlichen Sprachgebrauch auch anderweitig zurückgegriffen.
So zeigt sich, dass Freges Forderung im Hinblick auf Hilberts Axiomatik, nämlich den Zusammenhang zwischen den formalen Axiomen und der normalen Rede zu klären (vgl. Stekeler-Weithofer, 2008, 105), in `LoF` für die Booleschen Algebren erfüllt ist, obwohl Brown nicht explizit an Frege erinnert.

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels stelle ich also Fragen hinsichtlich des Kosmos der Begriffe, der Sachen und der Zeichen und gehe weiter der Frage nach, inwiefern die Vergabe des Labels Innenseite am cross heikel ist. Meine Antworten muss ich dem Leser schriftlich vorlegen. In ihnen kann lediglich eine gewisse Deutlichkeit erreicht und insbesondere nicht jede Nachfrage vorweggenommen werden. Bestimmt sind sie nicht jedem Leser und nicht zu jeder Zeit deutlich genug. Die Erklärung von Zeichen, die Verständigung auf ihre Bedeutung kann, so Simon, nicht im Allgemeinen gelingen. Über ihr Gelingen ist nur situativ zu entscheiden. Dieserart bescheidet sich Simons Philosophie des Zeichens mit dem expliziten Eingeständnis der Vorläufigkeit allen Verstehens. Diesem Eingeständnis sehe auch ich mich verpflichtet. Die Grenze zwischen diskursiv und dogmatisch ist nicht letztgültig zu ziehen. Ein gleichermaßen relevantes Problem adäquater Grenzziehung formuliert Stekeler-Weithofer im Hinblick auf die Grenze zwischen unangebrachter Heterogenität und unangebrachter Homogenität.

> „Die Hauptschwierigkeit wissenschaftlichen Denkens und philosophischer Reflexion besteht darin, dass sich in der Artikulation unseres Wissens zwei mögliche Gefahren wie Skylla und Charybdis so gegenüber stehen, dass die Vermeidung des einen Fehlers allzu leicht in den anderen führt. Das Problem besteht darin, dass Unterscheidungen und Inferenzformen zu grob, aber auch zu subtil sein können. Es bedarf daher ebenso einer Subtilitätskritik an irrelevanter sophistischer Smartheit (gerade im Gebrauch formallogischer Schlussformen) wie einer Kritik an irreführenden Vereinfachungen und Verallgemeinerungen. In allzu subtilen Unterscheidungen und im Bestehen auf einem schematischen Schließen, wie es bloß in der Mathematik möglich ist, geht das Allgemeine unseres Verstehens verloren oder gerät vor lauter Einzelheiten aus dem Fokus. Zu grobe Identifikationen vernachlässigen relevante Unterscheidungen.“ (Stekeler-Weithofer, 2012, 121)

So gilt es, im Folgenden die `LoF` im Lichte der Mathematikphilosophie von Stekeler-Weithofer verständlich zu machen. Wir dürfen sie dazu weder zu grob noch zu

139 Dass in der Primären Algebra (zur Arithmetik) das ASWP und das Leibnizprinzip erfüllt sind, ist in Chapter 5 und 9 gezeigt.

genau betrachten, da sonst die Details und/oder der Zusammenhang aus dem Blick geraten.

11.3 Vom Begriffs- zum Sachkosmos

Die Leitfrage dieses Unterkapitels Welchen Begriffskosmos und welchen Sachkosmos haben die Laws of Form und was haben die beiden Kosmen miteinander zu tun? Diese Leitfrage beantworte ich durch folgende Auslegung der Chapter 1, 12 und 2 und frage dafür zunächst speziell nach dem Gehalt von Chapter 1. Diese Frage beantwortet Brown selbst in den Notes zu Chapter 1:

> „Although it says somewhat more, all that the reader needs to take with him from Chapter 1 are the definition of distinction as a form of closure, and the two axioms which rest with this definition.“ (Brown, 1969, 77)[140]

Der Begriffskosmos von `LoF` wird in Chapter 1 und 12 entfaltet. Die Kernaussage betrifft die Definition von Distinktion als eine Form der Schließung und die beiden Axiome. Die Axiome, das sind die Gesetze, von denen im Buchtitel die Rede ist, interessieren meiner Lesart gemäß nicht schon im Hinblick auf den Sachkosmos, sondern erst im Hinblick auf den Zeichenkosmos. Ich wende mich ihnen daher erst in Kapitel 11.4 zu.
Das Wort *form* dagegen gehört zum Begriffs- und zum Sachkosmos. Doch wird es in Chapter 1, „The form“, von der Überschrift abgesehen nur in einem einzigen Satz gebraucht, nämlich im zweiten, in diesem allerdings zweimal und dabei – wie ich noch ausführen möchte – m. E. in einem je eigenen Sinne.
Bevor ich näher darauf eingehe, dass und wie Brown m. E. in Chapter 1 und 12 Distinktion holistisch und empraktisch-implizit definiert, werde ich ein Beispiel für eine solche, nämlich holistische und empraktisch-implizite, Definition anführen und zuvor noch zwei Bemerkungen Browns über den *Status* und die *Bedeutsamkeit* von Definitionen zitieren, die in der Originalausgabe von 1969 noch nicht enthalten waren.

> „Wirkliche Kinder [in Abgrenzung zu Erwachsenen, die sich kindisch benehmen; MR] [. . .] wissen, wenn sie eine Definition gemacht haben, alles was sie taten war, die Regeln für ein Spiel „Laßt uns so tun, als ob“ festzulegen.“ (Brown, 1999, x)

> „Mathematics is the science of what we *know* of what we have defined. It has no place for opinions or beliefs of any kind.“ (Brown, 2008, xxiii)

140 Vgl. (Brown, 2008, 64): „[. . .] the two axioms that rest [. . .]“.

Woher sind nun also Definitionen zu nehmen? Woraus sind sie zu gewinnen? Immerhin sind sie es, durch welche die *Spielregeln*, das So-tun-als-ob, festgelegt werden und aus welchen die Mathematik ihr *Wissen* zieht.

Skizze einer holistischen, empraktisch-impliziten Definition Um dem Leser eine solche Definition vor Augen zu führen, zitiere ich von Stekeler-Weithofers Postulaten, „die für Quader gelten sollen" (Stekeler-Weithofer, 2008, 97), den *Vorspann*, das erste *Kriterium* sowie in Auszügen (zum Teil nur Satzanfänge) die zugehörige *Bemerkung* und den Anfang des zweiten Kriteriums:

> „Praktisch wissen wir alle, was ein Quader ist, welche Eigenschaften wir also von einem Quader erwarten, und dass wir diese auch mehr oder weniger gut realisieren können. Die folgenden Kriterienliste versucht nur, *die wichtigsten inferentiellen Postulate*, die für Quader gelten sollen, *explizit zu artikulieren und damit auf geordnete Weise sprachlich zu vergegenwärtigen*. Selbstverständlich könnte es hierbei auch andere Ordnungen geben.
> *Kriterium 1:* Ein Quader ist ein Körper mit 6 Flächen, die wir unter einer festen Betrachterperspektive als obere, untere, vordere, hintere, linke und rechte Flächen von einander unterscheiden. Er hat 12 Kanten und 8 Ecken.
> *Bemerkung:* Offenbar tritt hier – wie bei jeder Erläuterung von Grundbegriffen – das Problem auf, dass die erläuternden Worte schon verstanden sein müssen. Eine Fläche ist, so kann man dieses Verständnis vielleicht befördern, eine [...]. Eine Kante entsteht [...]. Selbstverständlich setzen wir für das Verständnis dieser weiteren Erläuterungen die Erfahrung im Umgang mit Körpern und Körperschnitten voraus. [...]
> *Kriterium 2:* Sei F eine Fläche eines Quaders Q und sei Q^* eine Kopie von Q, so dass [...]." (Stekeler-Weithofer, 2008, 97f.)

Wohlgemerkt wird im zitierten *Vorspann* nicht behauptet, dass es ideale Quader realiter gibt, wohl aber, dass wir wissen, was ideale Quader wären bzw. sind, dass wir sie „mehr oder weniger gut realisieren können" und dass wir mit Quader-Gestalten insbesondere auch praktischen Umgang hatten und haben; bspw. sind sog. Bauklätze ein beliebtes Spiel-, Lehr- und Lernmaterial für Kinder. Wir haben erlebt und erwirkt, dass durch hinreichend genaue Formung formstabiler Körper Quader(gestalten), deren Flächen und Kanten aneinander und aufeinander *passen*, dass sie sich in (je zwei kongruente) *rechtwinklige* Keile zerlegen und dass je zwei kongruente rechtwinklige Keil(gestalt)en sich zu Quader(gestalte)n zusammensetzen lassen. Wir sind also erfahren im *Umgang* mit sowie der *Formung* von Quader(gestalte)n und der „Beurteilung der Güte der (Stabilität der) Körperformen" (Stekeler-Weithofer, 2008, 105) und wissen sehr wohl, worum es diesbezüglich unter der „Klausel: ‚in den Grenzen der angestrebten bzw. möglichen Genauigkeiten'" (Stekeler-Weithofer, 2008, 108) geht bzw. gehen soll.[141]

141 Vgl. (Stekeler-Weithofer, 2008, 113): „[K]ein ernsthafter Mathematiker [würde] rein formale

Die acht *Kriterien* präzisieren sich *gegenseitig*, sind also keineswegs – in einem naiven Sinne – unabhängig voneinander, sondern liefern erst *zusammengenommen* einen „holistischen Materialbegriff des Quaders mit seinen sechs ebenen Flächen, zwölf geraden Kanten und den entsprechenden rechten Winkeln ergeben“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 114). So werden im Zusammenhang die bereits in Kriterium 1 und auch noch später erwähnten Teilbegriffe bzw. Teilaspekte Fläche, Kante, Ecke (der gemeinsame Punkt rechtwinkliger Kantenpaare) und andere in weiteren Kriterien aufgegriffen und weiter ausgeschärft; vgl. diesbezüglich den zitierten Anfang von Kriterium 2.

Erst insgesamt und dieserart *holistisch* entsteht der Materialbegriff eines Quaders und er entsteht *dieserart* holistisch und nicht *axiomatisch-implizit*. Was ein Quader ist, wird also nicht *theoretisch-implizit* definiert, sondern *empraktisch-implizit*. Denn es werden lediglich die Erfahrungen und Erwartungshaltungen *erläutert*, die wir im mehr oder minder alltäglichen Umgang mit (hinreichend starren) quaderförmigen Körpern gewonnen haben. Damit ist der erläuternd definierte Quaderbegriff – und gleichermaßen Browns Unterscheidungsbegriff – nicht bloß eine beliebige Sprachkonvention, sondern der Ausdruck erlebter Praxis bzw. einer normierten Handlungsform.

Diese Skizze einer holistischen, empraktisch-impliziten Definition möchte ich mit dem Hinweis auf den Anfangssatz der Bemerkung zu Kriterium 1 beschließen, in dem Stekeler-Weithofer eine Schwierigkeit nennt, die auch im Hinblick auf Browns Text von Relevanz ist:

> „Offenbar tritt hier – wie bei jeder Erläuterung von Grundbegriffen – das Problem auf, dass die erläuternden Worte schon verstanden sein müssen.“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 97)

Wohlgemerkt weist Brown in `LoF` keinen Vorspann, keine Kriterien und keine Erläuterungen explizit aus, doch denke ich, dass in Chapter 1 die jeweilige Funktion seiner Sätze klar erkennbar ist.

Der Vorspann mit drei Voraussetzungen und einer Setzung Horchen wir nun in die `LoF` hinein, genauer: zunächst nur auf die beiden ersten Sätze von Chapter 1, und darauf, welche Grundbegriffe darin genannt werden:

> „We take as given the idea of distinction and the idea of indication, and that we cannot make an indication without drawing a distinction. We take, therefore, the form of distinction for the form.“ (Brown, 1969, 1)

Meiner Lesart zufolge ist das der *Vorspann* zu Browns holistischer, empraktisch-impliziter Definition von Unterscheidung. Bevor wir auf sie näher eingehen, bleiben

---

Definitionen und Deduktionen untersuchenswert finden, wenn diese nicht in einen anerkannten Sinnzusammenhang (etwa der Analysis, Algebra, Kalkültheorie usf.) eingeordnet werden können.“

wir noch beim Vorspann selbst. In ihm ist von vier *Annahmen* die Rede. Die ersten drei Annahmen können wir als *Voraussetzungen* lesen, nämlich als bereits vollzogen, akzeptiert oder anerkannt (we take as given); die vierte Annahme dagegen können wir als *Setzung* lesen, nämlich als nun zu vollziehen, zu akzeptieren oder anzuerkennen (take).
Als Interpret möchte ich dem Leser die vom Autor verwendeten Zeichen noch etwas genauer sondieren sowie sortieren und diesbezüglich an folgendes Diktum von Brown erinnern:

> „I have assumed on the part of the reader no more than a knowledge of the English language, of counting, and of how numbers are commonly represented."
> (Brown, 1969, xi)

Meines Erachtens darf der Leser also *einigermaßen* hemdsärmelig mit den Zeichen umgehen und ihren angeblichen Bedeutungen zumindest vorläufig – also fallibel – trauen.
Um nicht zu unvorsichtig zu sein, orientiere ich mich und den Leser an einem von Brown sehr deutlich verwendeten Zeichen, nämlich der schematischen Verfasstheit des Textes, insofern in den `LoF` manche Sätze und Absätze in Paaren auftreten. Die Abweichungen und Übereinstimmungen solcher Pendants voneinander bzw. miteinander erleichtern es dann, die spezifischen Zeichen aus ihrem Kontext zu lösen.

Die Grundbegriffe: Distinktion, Indikation und Form; Idea, Make und Drawing
Im Vorspann werden insbesondere folgende sechs Zeichen verwendet: „the idea of distinction", „the idea of indication", „make an indication" sowie „drawing a distinction" und weiter „the form of distinction" sowie „the form". Wohlgemerkt macht die Lektüre der `LoF` bzw. die Lektüre mancher Interpretation – zumindest mich – etwas neurotisch einerseits gegenüber allzu frei verfahrender Sekundärliteratur und damit andererseits gegenüber den Zeichen im Primärtext. Was genau ist das Zeichen und was genau ist seine Bedeutung? Wird diese Frage allerdings permanent und unentwegt und methodisch gestellt bzw. das Nachfragen/-haken zur blinden Methode, so verkehrt der Interpret – um es mal salopp zu sagen – nicht mehr auf Simons Pfad der Tugend, auf dem er der Frage nämlich dann nur dann begegnet, falls sich *zeigt*, dass Verstehen nicht (mehr) gelingt, dass ein Miss-/Unverständnis tatsächlich vorliegt. Lassen wir uns also von einer gewissen Unvorsicht bzw. unserem Sprachgefühl[142] leiten und versuchen mit dem rechten Maß an Sensibilität Gleiches in Verschiedenem zu erkennen, so zeigen sich die sechs Zeichen als zusammengesetzt. Die Bestandteile ergeben sich sukzessive und

142 Übersetzungen, insbesondere vom Autor autorisierte wie (Brown, 1999, 1997), machen den Gehalt von (Brown, 1969) oder späterer Ausgaben nicht nur über das englische Sprachgefühl zugänglich. Ein solcher Abgleich ist im Einzelnen durchaus erhellend.

auf gewissermaßen eindeutige Weise: Zunächst das sechste Zeichen *form*; dann *distinction* als Rest des fünften Zeichens; demnach *drawing* als Rest des vierten Zeichens und zugleich *idea* als Rest des ersten Zeichens; nun *indication* im zweiten und zuletzt noch *make* im dritten Zeichen.

Mit dem doppelten „the idea“ wird m. E. auf ein *Vorverständnis* verwiesen, von dem wir – so die implizite Aufforderung der Autors – annehmen wollen und dürfen, dass es uns gemeinsam ist. Wir vollziehen und nachvollziehen fortwährend Unterscheidungen und Bezeichnungen außerhalb und innerhalb der Sprache, denn wir unterscheiden und bezeichnen mittels und in der Sprache sowie in Bezug auf Sprache. Brown nennt in Appendix 2 Beispiele für Unterscheidungen: die Unterscheidung offen/geschlossen bei Türen, an/aus bei Schaltern, frei/blockiert bei Verbindungen sowie zwischen wahr/falsch bei Sätzen (vgl. Brown, 1969, 112); und wir können diesbetreffend dann bspw. eine Türe als offen, einen Schalter als geschlossenen, eine Verbindung als frei sowie einen Satz bzw. eine Aussage als falsch bezeichnen. Unterscheiden und Bezeichnen gehören gleichermaßen zu unserem Vollzugswissen, sie sind „*empraktisch*, d. h. im Tun und Reden gegeben“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 64), und als Die Zeichen *Distinktion* (distinction) und *Bezeichnung* (indication) und *Form* (form) entstammen tatsächlich dem gewöhnlichen deutschen (englischen) Sprachgebrauch. Mit anderen Worten: Diese Zeichen, deren – zum Teil wohl defiziente – Kenntnis gewissermaßen zu Anfang des Textes vorausgesetzt wird, werden im und durch den Text weiter spezifiziert. Dadurch werden die großteils gewöhnlichen Begriffe letztlich doch zu termini technici, die ich als ‚Distinktion‘ und ‚Indikation‘ bezeichnen werde. Zu Anfang einer erneuten Lektüre der `LoF` sind Browns Annahmen dann noch besser erfüllt, weil die vorausgegangene Lektüre dem Leser die Begriffe erhellt hat.

Der erste Satz obigen Zitats formuliert demnach die zweifache Voraussetzung hinsichtlich eines Wissens vom Unterscheiden und Bezeichnen und weiter die Setzung zweier Sprechweisen: *Distinktionen* lassen sich *treffen* und *Indikationen* lassen sich *machen* bzw. *vornehmen*. Wohlgemerkt ist das Zeichen ‚drawing a distinction‘ doppeldeutig und kann neben der aktiven Bedeutung ‚eine Unterscheidung *Treffen*‘ auch die (eher) passive Bedeutung ‚eine Unterscheidung *Antreffen*‘ haben; im engeren Wortsinne kann das Zeichen ‚drawing‘ also *Zeichnen* und *Nachzeichnen* bedeuten. Auf die Indifferenz bezüglich aktiver und passiver Bedeutung weist Brown in den Notes zu Chapter 2 zumindest hinsichtlich des „Draw a distinction“, mit dem er Chapter 2 eröffnet, explizit hin (vgl. Brown, 1969, 94). Dagegen eröffnet er Chapter 3 mit der expliziten Aufforderung zu Aktivität: „Construct a cross.“. Mit Blick auf die Notes zu Chapter 8 sei ergänzt, dass sich Unterscheidungen nicht nur (an)treffen, sondern auch *machen* und *einführen* lassen: „In making this distinction [...]“ (Brown, 1969, 93) und „[...] introduce a distinction [...]“ (Brown, 1969, 95).

Im zweiten Satz werden insbesondere folgende zwei Zeichen verwendet: „the form of distinction" und „the form". Ein erneut hemdsärmeliger Umgang mit den Zeichen analysiert das erste hinsichtlich des zweiten und eines Zeichens aus dem ersten Satz als grammatikalischen Modul der auch eigenständig verwendeten Zeichen „form" und „distinction". Der zweite Satz obigen Zitats informiert dahingehend darüber, dass die zu betrachtenden Distinktionen (zumindest jeweils) eine Form haben, genauer: dass „the form of distinction" als „the form" gelten soll. Wohlgemerkt ist von „form of distinction" und nicht etwa von ‚form of the idea of distinction' die Rede. Wir haben eine Idee von Distinktion – in meiner Lesart: einen gewissen Kenntnisstand über Distinktion – und bezeichnen mit ‚Form' die Form von Distinktion. In Chapter 2 wird die Sprachregelung für „form" nochmals, doch etwas anders getroffen, nämlich im Hinblick auf eine bestimmte, eine einzelne Unterscheidung: „Call the form of the first distinction the form." (Brown, 1969, 4); als Form soll im Fortgange der `LoF` also nicht die Form irgendeiner Distinktion gelten, sondern die Form der *ersten* Distinktion, wobei zuvor durch das Label „the first distinction" schlicht und ergreifend „a distinction" ausgezeichnet wurde. Aus dem unbestimmten Artikel „a" vor „distinction" wird also erst durch die dahingehende Bezeichnung der bestimmte Artikel „the" vor „first distinction".

In dem zweiten Satz des Vorspanns, „we take [. . .] the form of distinction for the form", ist m. E. einerseits die explizite Setzung formuliert, wonach „the form" als *Kurzform* für „the form of distinction " gebraucht werden darf, und andererseits die implizite Voraussetzung – eine fünfte Annahme gewissermaßen –, dass die *Langform* „the form of distinction" ein bedeutungsvolles Zeichen ist: Darin ist „the form" meiner Lesart gemäß ein *Abstraktor*, mittels welchem von etwas gesprochen werden kann, das all den Distinktionen, um die es Brown geht, gemeinsam ist. Beispielsweise geht es Brown im Hinblick auf Form nicht um die (konkrete) Trichotomie der reellen Zahlen (den positiven Kegel, die Null, den negativen Kegel) und nicht um die (konkrete) Dichotomie der reellen Zahlen nach rational und irrational, sondern gewissermaßen um das Konzept der Trichotomie bzw. der Dichotomie oder anders: um das allen Trichotomien bzw. allen Dichotomien Gemeinsame. Auf ein solches Gemeinsames hin und nicht ins Ungewisse hinein soll – durch *Form* (form) angezeigt – abstrahiert werden. Damit stehen im Hinblick auf das Zitat[143] gleich mehrere Fragen zur Diskussion:

(1) Das sind zuerst Fragen hinsichtlich der Bedeutung des zweimal auftretenden Zeichens „idea", wie bspw.: Ist „idea" ein weiterer Abstraktor und inwiefern ist er gegebenenfalls von „form" verschieden?

(2) Das sind weiters Fragen hinsichtlich der Bedeutung des Zeichens „without"

143 Zum Vergleich (Brown, 1969, 1): „We take as given the idea of distinction and the idea of indication, and that we cannot make an indication without drawing a distinction. We take, therefore, the form of distinction for the form."

zuzüglich des Zeichens „therefore“, wie bspw.: Ist Distinktion primär gegenüber Indikation oder vielleicht umgekehrt?

(3) Das sind zuletzt Fragen hinsichtlich des Zeichens „distinction“ und des form-Abstraktors, wie bspw.: Welche Bedeutung hat das Zeichen „distinction“, wovon und worauf wird also abstrahiert?

Gehen wir zunächst eine Beantwortung des ersten Fragenkomplexes an. Mit dem doppelten „the idea“ wird m. E. auf ein *Vorverständnis* verwiesen, von dem wir – so die implizite Aufforderung des Autors – annehmen wollen und dürfen, dass es uns gemeinsam ist. Meines Erachtens nimmt der Autor also an, dass wir über die Zeichen Distinktion und Indikation (vor-)orientiert sind und selbige für ihn selbst und für den Leser im Wesentlichen schon die gleiche Bedeutung tragen. Selbige gilt es im Hinblick auf weitere Verständigung nur noch zu erläutern. Diese Annahme ist gerechfertigt, insofern von Distinktionen und Indikationen im Alltag allenthalben die Rede ist. Distinktionen und Indikationen gehören zum Vollzugswissen, innerhalb und außerhalb der Sprache, denn wir unterscheiden und bezeichnen mittels und in der Sprache. Die beiden Zeichen – wie auch der Abstraktor Form (form) – entstammen tatsächlich dem gewöhnlichen Sprachgebrauch. Autor und Leser sind demnach gewissermaßen *sinnvoll* (vor-)orientiert über diese empraktischen Begriffe bzw. Konzepte, die dann im und durch den Text nur noch weiter *spezifiziert* werden. Mit anderen Worten: Diese Zeichen, deren – zum Teil wohl defiziente – Kenntnis gewissermaßen zu Anfang des Textes vorausgesetzt wird, werden im und durch den Text in ihrer Bedeutung, ihrem (besonderen) Gebrauch weiter spezifiziert. Und doch hat es Brown nicht bei den Worten belassen, die er im Text von 1969 gibt.[144]

Wenden wir uns also dem zweiten Fragenkomplex zu, nämlich dem zu „without“ und „therefore“. In dem zweiten Teil des ersten Satzes, nämlich: „we cannot make an indication without drawing a distinction“, ist also im Hinblick auf „indication“ und „distinction“ nicht mehr von „idea“ die Rede. Diesmal geht es also um „indication“ und „distinction“, ohne dass noch von deren „idea“ die Rede wäre. Genauer: Es geht um eine Verhältnisbestimmung zwischen den prozessualen Erscheinungsformen „make an indication“ und „drawing a distinction“. Das Zusammenspiel der beiden Phänomene ist durch das schlichte Verbindungs- und Erläuterungswort „without“ m. E. ziemlich deutungsoffen zum Ausdruck gebracht. Es ist wohl so gemeint, dass eine Bezeichnung das Bezeichnete vom Nicht-Bezeichneten unterscheidet und es dahingehend keine Bezeichnung ohne Unterscheidung gibt (vgl. Brown, 1999, xviii). Das heißt allerdings nicht, dass nicht auch jede Unterscheidung als Bezeichnung des

144 Er hat diesem Text in späteren Auflagen nämlich weitere Vortexte beigegeben, durch welche er seinen Originaltext in verschiedene Kontexte rückt (Esoterik). Eine dieser Selbstkommentierungen betrifft die Fragen zu „without“, also die Frage nach dem Primat zwischen „distinction“ und „indication“. Eine andere betrifft die Frage zu „distinction“ und „form“.

Raumes genutzt werden kann, in dem sie eine Unterscheidung ist (vgl. S. 226).[145] Unter das „somewhat more“[146] fallen insbesondere folgende Begriffe: motive, differ in value, intention (is intended), instruction, identified, taken together, recross.

Den Unterschied zwischen den beiden abkürzenden Redeweisen von Form, nämlich als Form der Distinktion versus Form der Indikation möchte im Rückgriff auf Browns in Chapter 1 gegebene Illustration von Distinktion explizieren, nämlich:

> „For example, in a plane space a circle draws a distinction.“ (Brown, 1969, 1)

Der Kreis[147] ist kanonischerweise lesbar als *Unterscheidung in* der Ebene, dem ebenen Raum, nämlich als Darstellung der Unterscheidung zwischen Kreisinnerem und Kreisäußerem (und der Kreislinie selbst) und ebenfalls lesbar als *Bezeichnung für* entweder das Kreisinnere oder das Kreisäußere – und in gewissem Sinne auch als Bezeichnung für beides zugleich, also für die Ebene. Der dieserart *in der* Ebene unterscheidende Kreis kann aber auch als *die* Ebene unterscheidender Kreis gelesen werden. Dieserart ist der Kreis lesbar als *Bezeichnung für* die Ebene, als ihr Unterscheidungsmerkmal oder Erkennungszeichen im Hinblick auf andere Ebenen in einem drei-dimensionalen Raum. Weiters trifft die bezeichnete, markierte bzw. erkennbare Ebene selbst in dem Raum eine Unterscheidung. Kurz: Der Kreis trifft nicht nur eine Unterscheidung, sondern kann – anders gelesen bzw. anders verkontextet – auch *bezeichnen* bzw. auszeichnen. Er ist als Hinweis lesbar, und zwar nicht notwendigerweise auf sich selbst. Er ist auch lesbar als Hinweis auf die ihn enthaltende Ebene. Je nach Kontext ist der Kreis also einerseits eine Unterscheidung *in der* Ebene und andererseits eine Unterscheidung *für die* Ebene. Letzteres heißt, er ist eine Bezeichnung der Ebene, also des Kontextes, in dem die in ersterem genannte Unterscheidung getroffen ist.
Die Beantwortung des zweiten Fragenkomplexes soll also folgendermaßen lauten: Brown hat angenommen, dass jegliches Bezeichnen (make an indication) ein Unterscheiden (drawing a distinction) ist. Diese Voraussetzung wird weder gerechtfertigt noch begründet und es werden die Grenzen ihrer Plausibilität nicht betrachtet. Ja, ein (deiktisches) Zeichen wie *Dieses da!* ist Bezeichnung und Unterscheidung zugleich und weiters ist dieserart jeder gelungenen bzw. verstandenen Bezeichnung die Unterscheidung zwischen dem Bezeichneten und dem Nicht-Bezeichneten implizit. Weiters nimmt Brown „the form of distinction“ – in m. E. durchaus akzeptabler Weise – als „the form“ an: Er entscheidet sich also für die distinction-Form statt für die indication-Form, obwohl auch umgekehrt Unterscheiden (drawing a distinction)

145 An späterer Stelle in Chapter 1 wird das Verhältnis nochmals umgekehrt erwähnt, aber gleichermaßen relativ deutungsoffen (vgl. S. 227).

146 Zum Vergleich (Brown, 1969, 77): „Although it says somewhat more, all that the reader needs to take with him from Chapter 1 are the definition of distinction as a form of closure, and the two axioms which rest with this definition.“

147 In Chapter 12 betrachtet Brown Kreislinien (circumferences) als Unterscheidungen in der Ebene.

Bezeichnen (make an indication) ist, insofern sich Distinktionen als Indikationen verwenden lassen. Dabei dient in „the form of distinction" das Wörtchen „form" als *Abstraktor*, in „for the form" dagegen nur noch als abkürzende *Bezeichnung* für „the form of distinction" und damit als Bezeichnung für das allen distinction-Formen gemeinsame.
Wohlgemerkt nutzt Brown in Chapter 2 das Bezeichnen nicht als Unterscheiden im Sachkosmos, wie das bei *Dieses da!* im Alltag der Fall ist, sondern er benutzt Bezeichnungen als Unterscheidungen im Zeichenkosmos, wie das bei *Dieses (Zeichen) da!* gelegentlich auch der Fall ist, womit also dieses Zeichen da zum Gegenstand der Rede wird. Browns Zeichen, die Zeichen für etwas in der sog. ersten Unterscheidung Geschaffenes sind, sind zudem selbst als Unterscheidungen leicht nutzbar, insofern sie unschwer als Andeutung einer Grenzlinie in der Zeichenebene gelesen werden können. Dies wäre bspw. für einen Punkt in der Zeichenebene nicht so leicht zu bewerkstelligen. In der ersten Sektion von Chapter 3 begegnen dem Leser *unterscheidende Bezeichnungen* sowie *bezeichnete Unterscheidungen*, insofern ein Kreuz (als Zeichen, das in der Zeichenebene eine Unterscheidung trifft), selbst wiederum mit dem Buchstaben `c` (ein Zeichen, das in der Zeichenebene ein Zeichen von anderen unterscheidet) bezeichnet wird: Das Kreuz ist demnach auch eine bezeichnete Unterscheidung bzw. eine unterschiedene Bezeichnung. Brown erweist m. E. nicht, dass Distinktion gegenüber Indikation primär ist; er behauptet das m. E. auch nicht. Stattdessen behandelt er die Unterscheidungsform und thematisiert sie mittels Bezeichnungen.

> „Once a distinction is drawn, the spaces, states, or contents on each side of the boundary, being distinct, can be indicated." (Brown, 1969, 1)

Diesem sechsten Satz von Chapter 1 gemäß können – und auch dies wird dem Leser ohne Rechtfertigung und ohne Begründung mitgeteilt – die unterschiedenen (being distinct) Seiten einer Grenze bezeichnet werden. Solchen konkret einzuführenden Bezeichnungen gehen allgemeine Bezeichnungen voraus: Räume, Zustände und Inhalte. In Chapter 2, 3 und 4 wird hinsichtlich einer Distinktion bzw. hinsichtlich der Distinktionsform ein Zusammenspiel konkreter Bezeichnungen für zwei Zustände etabliert und auf seine Adäquatheit hin untersucht; in diesem formalen Darstellungssystem ist der Kontext und die Grenze der Distinktion kein Thema. In späteren Chaptern dagegen werden weitere Distinktionen getroffen und insbesondere werden in `LoF` auch normalsprachlich gehaltene Hinweise gegeben, so dass insgesamt auch Kontexte und Grenzen von Distinktionen zu einem Thema werden.

Wenden wir uns weiters dem dritten Fragenkomplex zu, nämlich dem zu „distinction" und „form". Welche Bedeutung hat das Zeichen „distinction", wovon und worauf wird also abstrahiert, wenn von der Distinktionsform die Rede ist? Auf die in Chapter 1 Satz 2 vereinbarte Redeweise „We take, therefore, the form of distinction for the form." folgt die einzige explizite Definition in LoF. Diese *Definition* von „distinction" bleibt ziemlich fragwürdig und lautet folgendermaßen.

> **Definition**
> *Distinktion is perfect continence.*
> That is to say, a distinction is drawn by arranging a boundary with separate sides so that a point on one side cannot reach the other side without crossing the boundary. For example, in a plane space a circle draws a distinction."
> (Brown, 1969, 1)

Die Definition – bestehend aus vier Worten, nämlich einem für das Definiendum, einem für die Kopula und zweien fürs Definiens – stellt nicht nur den unbedarften Leser, sondern auch die Interpreten vor Schwierigkeiten. Einige der Strategien, Browns Distinktionsbegriff besser zu verstehen und besser zu verstehen zu geben, möchte ich hier zusammentragen.

(1) Brown selbst lässt der Definition unmittelbar zwei Erläuterungen folgen: zunächst eine allgemeine Illustration (vgl. „That ist to say [...] boundary."), dann eine Konkretisierung der allgemeinen Illustration (vgl. „For example [...] distinction."); und mittelbar, nämlich in *Notes* zu Chapter 1, die bereits zitierte Formulierung: „distinction as a form of closure".

(2) Ein weiterer Zugang zur Definition ist die Etymologie der vier darin verwendeten Wörter zzgl. der Etymologie von „Definition" selbst. Nicht nur das Zeichen Distinktion trägt die Bedeutung einer *Grenzziehung* (vgl. „That ist to say [...] boundary."), sondern auch das Zeichen *Definition*: (lat.) „finis" {m} für (dt.) „Grenze" {f}. [148]

(3) Vielversprechend scheint mir ein an den Beweisen der Theoreme orientierter Zugang zu sein, denn in LoF war Brown laut „Introduction" an einer Genese der Geltungsansprüche gelegen. Woraus also schöpfen die ersten Beweise in LoF ihre Überzeugungskraft? Welcher Konzepte bedienen sie sich? Diese Beweise sind nicht formal, nicht axiomatisch-deduktiv, nicht analytisch, sondern synthetisch. Sie sind – wie ich im Rückgriff auf Stekeler-Weithofers Terminologie formuliere – *material-begrifflich* alias „synthetisch": Anhand des Beweises von Theorem 1 wird m. E. gut erkennbar, was der Gehalt von Distinktion wohl ist bzw. sein muss, um die LoF-Mathematik systematisch (und weitestgehend aus sich selbst heraus) entwickeln zu können.

(4) Brown schreibt an anderer Stelle über die LoF.

> „In „Laws of Form" versuchte ich, die maskuline Seite der Dinge so weit ich konnte darzulegen[. ...]
> Nur das männliche Prinzip repräsentiert sich selbst in der Perfektion

148 Vgl. (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009) für an der Etymologie orientierte Ausführungen.

> und mit der Durchschlagskraft des Entweder/Oder, der Methode aller Argumentation." (Brown, 2007, 93)

> Demnach deutet Brown selbst einen Kulminationspunkt meiner Interpretationsbemühungen an. Browns material-begriffliche Begründungen werden getragen von der Fallunterscheidung, nämlich dem eingschlägigen Gebrauch des *Entweder/Oder* –, insbesondere in den Beweisen per Fallunterscheidung.

Zusammenfassend und mittels gewöhnlicher Zeichen gesagt, ist Browns „form", nämlich seine „form of distinction", schlicht und einfach die gewöhnliche vollständige Disjunktion, also die Unterscheidung zweier Fälle zuzüglich der Möglichkeit sie iterativ zu betrachten und die Beobachtungsergebnisse zusammenzubringen. Wohlgemerkt wird dies, also ein solcher Begriff von und Umgang mit Unterscheidungen, bereits im Beweis von Theorem 1 in Anspruch genommen. Weshalb ist nun aber ganz explizit von „form of distinction" die Rede? Zur Beantwortung dieser Frage möchte ich zunächst auf folgendes Zitat verweisen.

> „There can be no distinction without motive, and there can be no motive unless contents are seen to differ in value." (Brown, 1969, 1)

Brown thematisiert hier ein Abhängigkeitsverhältnis zwischen „distinction" und „differ", in dem „motive" gewissermaßen das Bindeglied ist. Dabei lässt sich „differ" als eine *Verschiedenheit* interpretieren, die noch nicht durch eine *Unterscheidung* stabilisiert ist (vgl. Kibéd und Matzka, 1993). Mit anderen Worten: Im Zitat ist eine Unterscheidung zwischen Unterschiedenheit (distinction) und Verschiedenheit (differ) formuliert, ich meine damit: zwischen bereits *explizi(er)ten* und noch *impliziten* Unterscheidungen. Und es ist dabei von Wert (value) die Rede, ohne dass damit eine Wertung im Sinne von besser oder schlechter gemeint wäre, sondern lediglich ein *Wert*, wie ihn im mathematischen Sprachgebrauch Funktionen an *Stellen* annehmen (vgl. Haase, 2016). Dabei bleibt allerdings offen, *wer*(?) ein (Welches?) Motiv (motive) bzw. einen (Welchen?) Beweg(ungs)grund (Wofür?) hat. Ich möchte nun in kanonischer Weise annehmen, dass von einem Motiv die Rede ist, demzufolge eine Unterscheidung getroffen wird, kurz: von einem Anlass zu unterscheiden, einem distinction-Motiv. Wer hat nun dieses Motiv? Ein Individuum, eine Gesellschaft, die Wissenschaft oder der Weltgeist? Von wem ist da die Rede? Wer redet und zu wem? Lassen wir die vielen Einzelfragen außer Acht und wenden wir uns dem Allgemeinen zu; halten wir also unsere Annahme fest: Unterscheiden geht, so Brown, nicht ohne Motiv. Davon ist dann in Laws of Form gewissermaßen noch ein weiteres Mal zu lesen, zwar erst in Chapter 12, doch dort an prominenter Stelle, nämlich im ersten Satz: „The conception of the form lies in the desire to distinguish." (Brown, 1969, 69). Und es schließt Chapter 12 und damit der Haupttext der Laws of Form mit einem Satz, der nochmals an die Frage nach dem Aktanten erinnert, der das Motiv hat, eine Unterscheidung zu treffen:

> „We see now that the first distinction, the mark, and the observer are not only interchangeable, but, in the form, identical." (Brown, 1969, 76)

Dieser Satz, der Schlusssatz der Laws of Form, nennt also die Aktanten bei ihrem Namen bzw. er bestimmt sie in ihrem Agieren: Sie sind *Beobachter*. Sie beobachten, indem und insofern sie Unterscheidungen treffen bzw. Bezeichnungen vornehmen. Beobachter gebrauchen unterscheidende Bezeichnungen und bezeichnen Unterschiede. Aus Browns Perspektive formuliert: Jeder Leser der Laws of Form nimmt, insofern er sie liest, Anteil an der dortigen Unterscheidungspraxis und wird demnach zum Beobachter eines Textes übers Beobachten.[149]
Kommen wir nun zurück auf obiges Zitat aus Chapter 1: Unterscheidungsmotive und Wertunterschiede bedingen einander wechselseitig, ein Primat ist in den Laws of Form nicht ausgemacht. In diesem Sinne wird kein unterschiedsloser Anfang besprochen, der nämlich sei, so Christina Weiss, ein blinder Fleck für Browns methodischen Ansatz: Es ist Brown,

> „unter der konstruktiven Leitlinie des Ausgehens von einer Unterscheidungspraxis, nicht möglich [.], in absolutistischer Manier von einem unterschiedslosen Anfang [ausgehend] der Geschichte seiner Genese nachzuspüren." (Weiss, 2006, 55)

In (Brown, 2007) behauptet der Autor explizit, erst im Nachgang zu den Laws of Form den *unterschiedslosen* Anfang ausgemacht zu haben: *das Nichts*. Vielleicht wäre er auch bereit, so möchte ich mutmaßen, das Nichts den *voraussetzungslosen* Anfang zu nennen, auf welchen die Vernunfterkenntnis im Gegensatz zur Verstandeserkenntnis gemäß Platons Liniengleichnis abziele (vgl. Politeia, 511b–c). Denn nur in Nichts könne es, so Brown, ohne das weitere Zutun eines Beobachters zu einer Unterscheidung kommen. Meines Erachtens ist diese Begründung kaum zwingender als die gleichnamige Lösung der Rätselfrage: Was ist mächtiger als Gott und wenn man es isst, dann verhungert man? Doch wird *in* den Laws of Form, wie gesagt, die Frage nach dem unterschiedslosen Anfang nicht beantwortet und nicht zu beantworten versucht, denn es wird die Frage selbst nicht explizit gestellt. Doch darf mit Blick auf Browns Ausführungen in (Brown, 2007) behaupten werden, dass Brown sich die Frage nach dem unterschiedslosen Anfang just *durch* die Laws of Form beantwortet hat. Seiner Antwort muss nicht zugestimmt werden; es ist aber *seine* Antwort.

Ich möchte nun nochmals die zu Anfang dieses Unterkapitels zitierte Antwort Browns auf den Gehalt von Chapter 1 in Erinnerung rufen.

> „Although it says somewhat more, all that the reader needs to take with him from Chapter 1 are the definition of distinction as a form of closure, and the two axioms which rest with this definition." (Brown, 1969, 77)

149 Vgl. (Egidy, 2007, Kapitel 2) für eine Beobachtungstheorie, die genauer als bei Luhmann ihren Ausgang bei den Laws of Form nimmt.

Von all den prima facie zu nennenden Schlagworten aus Chapter 1 gehört neben „idea“ demnach einzig „motive“ nicht zu den Schlüsselbegriffen, denn alle anderen Schlagworte tauchen in den Erklärungen zu den beiden Axiomen wieder auf. Mit anderen Worten: Das Motiv *verschwindet.*[150] Das Motiv zum Verschwinden zu bringen, es zu invisibilisieren, muss als eine Aufgabe des Abstraktors form gesehen werden. Der form-Abstraktor, wobei meine Interpretation von Form als Abstraktor durch meine Lektüre von (Stekeler-Weithofer, 2008) initiiert bzw. motiviert ist, soll gleichermaßen erzwingen, vom speziellen Inhalt (content) der Unterscheidung und vom jeweiligen Motiv zur Unterscheidung abzusehen. Es soll – eben – lediglich auf deren *Form* ankommen. Fraglich ist dabei, ob das Prinzip des Unterscheidens nach Loslösung von Motiv und Inhalt noch wohldefiniert fassbar ist, ob das Allgemeine im Speziellen hinreichend – bzw. interpersonell – bestimmt ist. Fragwürdig ist dies insbesondere deswegen, weil nach Brown das Unterscheiden nicht ohne ein distinction-Motiv auftritt. Das Gelingen der Abstraktion auf die Form der Distinktionen, nämlich der Lesart von Distinktionen lediglich auf ihre Form hin, ist also weder *in* noch *durch* die Laws of Form verbürgt. Das Gelingen zeigt sich lediglich darin, dass kein Misslingen auffällt.

Ich fahre nun fort mit der holistischen Definition, die Brown in Chapter 1 gibt. Dafür stelle ich die beiden Textstellen, in welchen Brown die Gesetze bzw. Axiome erläutert, einander in einer Tabelle sinnfällig gegenüber (vgl. oben auf S. 232). Dadurch wird der gleichschrittige, genauer: der dreischrittige, Aufbau m. E. sofort ersichtlich.

Beiden Axiomen, welche jeweils mit einer Nummer (fett), einem Namen (fett) und einer Formulierung (kursiv) versehen sind, gehen also zwei Sätze voran. Der erste Satz formuliert jeweils eine Möglichkeit (can), den Wert eines Inhaltes (content) anzuzeigen: *if a content is of value, ... can be taken to indicate this value.* Die eine Möglichkeit der Indikation ist ein Name (name), die andere eine Anweisung (ein Motiv, eine Absicht) die Grenze in den Inhalt hinein zu kreuzen. Die erste Möglichkeit des Hinweisens ist eine deskriptive, da sie mittels eines Namens erfolgt, die zweite eine operative, da sie mittels einer Operation (Kreuzen) erfolgt. Der zweite Satz formuliert jeweils eine Möglichkeit (can), die Möglichkeit der Inhaltsanzeige zu nutzen, also die Hinweismöglichkeit zu nutzen: durch das Nennen des Namens (calling of the name) bzw. das Kreuzen der Grenze (crossing of the boundary). Die beiden Axiome bzw. Gesetze formulieren dann jeweils den Wert einer *wiederholten* Nutzung einer Hinweismöglichkeit hinsichtlich der *einzelnen* Nutzung der Hinweismöglichkeit: „the value of ... made again ‚is/is-not‘ the value of ... “. Leider ist nicht ganz klar, ob durch „a call made again“ bzw. durch „a crossing made again“ das *zweite Nennen* bzw. das *zweite Kreuzen* gemeint ist oder die *beiden Nennungen* bzw. die beiden *Kreuzungen zusammengenommen/gemeinsam.* Gleichermaßen ist

150 Eine gewisse Wiedererinnerung erfolgt erst in Chapter 12 mit der Rede von „desire“.

„If a content is of value, a name can be taken to indicate this value.	„Equally, if the content is of value, a motive or an intention or instruction to cross the boundary into the content can be taken to indicate this value.
Thus the calling of the name can be identified with the value of the content.	Thus, also, the crossing of the boundary can be identified with the value of the content.
Axiom 1. The law of calling	**Axiom 2. The law of crossing**
The value of a call made again is the value of the call.	*The value of a crossing made again is not the value of the crossing.*
That is to say, if a name is called and then is called again, the value indicated by the two calls taken together is the value indicated by one of them.	That is to say, if it is intended to cross a boundary and then it is intended to cross it again, the value indicated by the two intentions taken together is the value indicated by none of them.
That is to say, for any name, to recall is to call.“	That is to say, for any boundary, to recross is not to cross.“
(Brown, 1969, 1)	(Brown, 1969, 2)

Tab. 11.1: Eine holistische Definition (vgl. Chapter 1).

nicht ganz klar, ob das „not“ im letzten Satz (rechts) des Zitats dem „is“ oder dem „to cross“ zuzurechnen ist.
Ich möchte diese holistische Definition mit dem Hinweis schließen, dass die Gesetze für manche Situationen plausibel sind, doch nicht in allen Situationen gelten. Zu Axiom 1: Bleibt das mehrfache Nennen eines Namens unbeantwortet, so gibt uns das möglicherweise Grund zur Sorge. Und viele fühlen sich von einem tropfenden Wasserhahn gestört. Zu Axiom 2: Eine Acht (8) kann in der Zeichenebene als Grenze einer Unterscheidung gelesen werden. Wird die Grenze zunächst von dem unteren „o“ in das obere „o“ hinein gekreuzt und nachfolgend von dem oberen „o“ auf die Außenseite, so führen diese beiden Kreuzungen nicht ins untere „o“ zurück. Und wird nur zwischen den beiden Seiten innerhalb der Acht und außerhalb Acht unterschieden, also einerseits den beiden o-Räumen zusammengenommen und andererseits dem Restraum der Ebene, so wechselt man beim Kreuzen über den Schnittpunkt der Linie/Grenze mit sich selbst nicht die Seite der Grenze.

Kommen wir nun zum Sachkosmos, einem Ebenbild des Begriffskosmos.

> „Der praktische Übergang in eine ‚mathematische‘ Redeform besteht im Wesentlichen darin, dass die formallogischen Schluss- oder Beweisprinzipien *als gültig unterstellt werden.* Theoretisch bedeutet das, dass diese Prinzipien in

> einer besonderen, zunächst impliziten, Einrichtung der mathematischen Redebereiche *wahr gemacht werden*. Wie das konkret geschieht, bedarf immer einer strengen, in der Regel auf eine vorlaufende Praxis sinnkritisch reflektierende, Konstitutionsanalyse.“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 14)

Die Leitfragen dieses Unterkapitels Was ist der *Sachkosmos* der Mathematik Browns? Wie bzw. wodurch wird im Sachkosmos Ordnung generiert? Für welche *Sachen* stehen die Zeichen der `LoF`-(Formel-)Sprache? In weniger als der gebotenen Kürze können die Antworten folgendermaßen skizziert werden: Ich interpretiere *die Form* (the form), nämlich die Form der ersten Unterscheidung und das ist der durch die erste Unterscheidung gespaltene Raum mitsamt seinem Inhalt, als den Sachkosmos.

> „**Form** Call the space cloven by any distinction, together with the entire content of the space, the form of the distinction.
> Call the form of the first distinction the form.“ (Brown, 1969, 4)

Damit stellt sich naheliegenderweise die Frage: Wie kommt es dazu, was ist der gesamte Inhalt des Raumes und weshalb hat der Raum ihn?

Konstitution des Sachkosmos Brown definiert Form (form) in Chapter 2 ausführlicher als in Chapter 1. Hieß es dort kurz und bündig „We take, therefore, the form of distinction for the form“, so erfolgt die Definition von Form bzw. die Konstitution des Sachkosmos in Chapter 2 über folgende Teilschritte. Dieser Sachkosmos besteht also aus der Grenze mitsamt der Teilraum-Markierung und den beiden Teilen des gespaltenen Raumes als die *Sachen*, die durch die `LoF`-Formel-Sprache repräsentiert werden. Durch die Zeichen der `LoF`-Symbolsprache werden dann die Sachen in diesem Kosmos bezeichnet. Brown veranlasst in Chapter 2 durch folgende Anweisungen den Leser zur Konstitution der Form:

> „**Construction**
> Draw a distinction.
>
> **Content**
> Call it the first distinction.
> Call the space in which it is drawn the space severed or cloven by the distinction.
> Call the parts of the space shaped by the severence or cleft the sides of the distinction or, alternatively, the spaces, states, or contents distinguished by the distinction. [...]
>
> **Knowledge**
> Let a state distinguished by the distinction be marked with a mark $\urcorner$ of distinction.

> Let the state be known by the mark.
> Call the state the marked state. [. . .]
>
> **Instruction**
> Call the state not marked with the mark the unmarked state.“ (Brown, 1969, 3, 4, 5)

Fassen wir die einzelnen Schritte zusammen: Der gesamte Inhalt (entire content), von dem in der form-Definition die Rede ist, *ist* m. E. ein *Raum* (space), der in zwei *Zustände* (state) *geteilt oder gespalten* (severed or cloven) ist bzw. in dem zwei Zustände durch die Unterscheidung unterschieden sind (distinguished by the distinction), von denen genau einer mit einer Marke markiert (marked with a mark) ist. Damit ist insbesondere gezeigt, dass *Form* (der ersten Unterscheidung) in `LoF` ein zusammengesetzter Begriff ist.
Dabei ist die Marke das einzige Unterscheidungsmerkmal, von dem hinsichtlich der beiden Zustände gesprochen werden kann; sie ist also das Charakteristikum des einen Zustands gegenüber dem anderen. Dieser Umstand ist von unterschiedlichem Nutzen: Einerseits gewinnt der eine Zustand aus seinem markiert-Sein in der `LoF`-Fachsprache seine *kanonische Bezeichnung*, nämlich: markierter Zustand, die in der `LoF`-Fachsprache zudem im üblichen Sinne als der Name des Zustand verstanden und gebraucht werden kann; andererseits sollen insbesondere in der `LoF`-Formelsprache Kopien der Marke, nämlich das Symbol ⏋, als Bezeichnungen des markierten Zustands fungieren (dürfen), sie werden sogar selbst als Name des markierten Zustands bezeichnet.

11.4 Vom Sach- zum Zeichenkosmos

Ich möchte nun darauf zu sprechen kommen, welche Bedeutung Brown den Symbolen seines Kalkül zugedacht hat und stelle dahingehend die Genese der intendierten Interpretation der fachlichen Symbole dar. Da Begriffs- und Sachkosmos der `LoF`-Mathematik in den beiden vorausgegangenen Unterkapiteln jeweils nur *per se* erörtert sind, gehe ich auf sie im Zusammenhang mit dem Zeichenkosmos nun nochmals ein.

Schon in *Chapter 1* werden (fast) alle spezifischen fachsprachlichen Ausdrücke der `LoF`-Sprache verwendet: boundary, calling, content, crossing, distinction, form, indication, instruction, intention, motive, name, point, side, space, state und value. Von diesen zentralen Begriffen oder Konzepten wird einzig *Distinction* (distinction) – mehr oder minder verständlich – explizit *definiert*:

> „**Definition**
> *Distinction is perfect continence.*“ (Brown, 1969, 1)

Diese Definition wird dann noch *erläutert* und durch ein Beispiel *illustriert*. Die anderen zentralen Begriffe oder Konzepte bleiben – mehr oder minder – undefiniert und werden nur durch ihr Zusammenspiel und in ihrem Ineinandergreifen expliziert; vgl. bspw.:

> „There can be no distinction without motive, and there can be no motive unless contens are seen to differ in value.“ (Brown, 1969, 1).

Um einem naheliegenden Missverständnis vorzubeugen, möchte ich der Überschrift dieses Paragraphen entsprechend anfügen: Die fachsprachlichen Ausdrücke – wie auch fachlichen Symbole – werden aus gemeinsprachlichen Ausdrücken erworben, die weder dem Leser noch dem Autor deutungsoffen gegenüberstehen. Die grundlegenden, sinntragenden Prinzipien stehen nicht zur freien Verfügung. Brown spricht demnach mittels der gemeinsprachlichen Ausdrücke „distinction“, „indication“ und „boundary“ tatsächlich von (gewissen Formen der) Unterscheidung, (gewissen Formen der) Bezeichnung und (gewissen Formen der) Grenze und bspw. nicht von Tischen, Stühlen und Bierseideln. Auf die angedachten Prinzipien muss er sich im Detail mit dem Leser durchaus verständigen, es gilt sie zu spezifizieren, doch stehen sie – ich wiederhole mich – nicht zur freien Verfügung.[151] Kurz: Die `LoF`-Mathematik ist nicht Mathematik im Elfenbeinturm oder im luftleeren Raum, sondern zunächst einmal — und das darf und soll nicht unbemerkt bleiben – sehr bodenständig. Denn im Hintergrund der in Chapter 1 dieserart skizzierten *Begriffsebene* steht m. E. ein vom Autor beim Leser in Anspruch genommenes Vorverständnis der verwendeten Begriffe: Brown also rekurriert auf das Vorwissen des Lesers bzw. eher auf den vom Autor veranschlagten empraktischen Gebrauch der Begriffe durch den Leser. Der erste Satz von Chapter 1 lautet bspw.: „We take the idea of distinction and the idea of indication, and that we cannot make an indication without drawing a distinction.“ (Brown, 1969, 1).
Die `LoF` sind also ein Lehrbuch, das gleich zu Anfang und damit dem Leser zur Orientierung die zentralen Begriffe allesamt ins Felde führt, obwohl sie erst im Weiteren und durch das Weitere ihren spezifischen, nämlich einschlägig reglementierten Gebrauch erhalten und damit ihre eigentliche Bedeutung erlangen. In dieser von Brown guten Gewissens und explizit in Anspruch genommenen materialbegrifflichen Aufgeladenheit der mitunter grundlegenden Begriffe liegt zweifelsohne eine Besonderheit der `LoF`. Zumindest sind sie dahingehend als eine Grundlegungsschrift von Mathematik zu erkennen, in der mit logizistischen und formalistischen Ansprüchen gebrochen ist: Die Wurzel der `LoF`-Mathematik ist nicht formal; dagegen ist die Formalisierung von *Entweder-Oder* (als Operator und nicht als Junktor, soll heißen: das Etablieren eines Bereichs, auf dem der Entweder-Oder-Junktor eine

151 In der Mathematik wird bspw. in spezifischer Weise definiert, was ein *Körper*, ein *Ring*, eine *Gruppe* ist, doch wird nicht in beliebiger und völlig deutungsoffener Weise festgelegt, was als (akzeptabler) Beweis gelten soll.

Wahrheitsform liefert), einem material bereits zugänglichen Begriff, das eigentliche Projekt der LoF-Mathematik. Soweit zum Geschehen in den LoF im Hinblick auf die *Begriffsebene* (distinction, indication, form, boundary, side, point, space, state etc.) der Primären Arithmetik, die weitgehend schon die Begriffsebene des Indikationenkalküls ist.

In *Chapter 2* wird eine *Sachebene* angelegt, insofern Sachen bzw. Gegenstände konstruiert werden. Dies geschieht dadurch, dass *zunächst* eine *Distinktion getroffen* wird (Draw a distinction.). Nach Maßgabe der Begriffsebene in Chapter 1 ist darunter zu verstehen, eine *Grenze einzurichten* (arranging boundary) und dadurch – als die beiden Seiten ihrer gemeinsamen Grenze – zwei *Zustände* zu erhalten, von denen *dann* (nur) einer durch eine *Marke* (mark) markiert wird. Diesbezüglich wird präsupponiert, dass die beiden Prädikate *markiert* (marked) und *unmarkiert* (unmarked) nicht mehr prädiziert werden müssen, sondern schon in verständlicher Weise verwendet werden können und dass die beiden Zustände im Hinblick auf das Vorliegen bzw. das Nicht-Vorliegen der Eigenschaft des *Markiertseins* (marked / not marked) in verständlicher Weise thematisiert werden können.
Zur Sprachregelung sei angemerkt: Die beiden *Zustände* zuzüglich ihrer gemeinsamen *Grenze* bilden einen *Raum*, in dem – so heißt es – die Distinction getroffen sei. Dieser Raum, das heißt also die Grenze und die beiden Zustände, zuzüglich der Marke, die den markierten Zustand markiert, bilden eine *asymmetrische Unterscheidung*, genauer: *die Form der ersten Unterscheidung* (the form of the first distinction). Brown thematisiert *dann* die beiden Zustände einzeln und versieht sie in der LoF-Fachsprache bei der jeweiligen Gelegenheit mit einem kennzeichnenden Namen. Die beiden Namen lauten in bezeichnender Weise: *markierter Zustand* und *unmarkierter Zustand.* Soweit zum Geschehen in der *Sachebene* der Primären Arithmetik, die gleichermaßen die Sachebene des Indikationenkalküls ist (vgl. Brown, 1969, 3–5).
Weiters soll die Sachebene auch in einer Kalkülsprache zur Sprache gebracht werden können. Dafür wird wiederum präsupponiert, dass die Marke (a mark $\urcorner$ of distinction) in einen anderen Raum (genauer: in another form) kopiert werden kann, den ich als (die jeweilige) *Zeichenebene* bezeichnen möchte. Die Marke ist hinsichtlich ihres Kopierens die *Zeichengestalt*, die sich an anderem Ort (genauer: auch an anderen Orten) in den *Zeichenvorkommnissen* jeweils eigens und neu *ereignet.* Die Kopien der Marke sind allerdings nicht nur als *Zeichen für* die Marke zu verstehen, denn eine solche *Kopie der Marke* (copy of the mark) kann auf verschiedene Weisen gelesen werden: hinsichtlich der Marke als *ikonisches* Zeichen, hinsichtlich des markierten Zustands als *indexikalisches* Zeichen, hinsichtlich der Grenzziehung in der Sachebene als *symbolisches* Zeichen.
Wenn das *number*-Initial in Chapter 2 *zum ersten Mal* formuliert wird, ist das Symbol $\urcorner$ nur als Kopie der Marke in die Symbolsprache eingeführt worden und steht zudem nur für den Gebrauch als Name (name) zur Verfügung. Das Symbol

$\urcorner$ kann also an Ort und Stelle als ein atomares (Nenn-)Zeichen gelten – vergleichsweise als *ein* (quasi) vokaler Buchstabe. Erst im Rückblick auf diesen frühen Entwicklungsstand der Symbolsprache ist hinsichtlich des Symbols $\urcorner$ von einem *leeren* Kreuz zu sprechen, ad dato ist der Rede von Seiten am Symbol $\urcorner$, ob leer oder nicht, noch kein Sinn gegeben. Dies ändert sich, insofern die Sprache bzw. die Grammatik von Kreuz neu geregelt wird, um das order-Initial zu formulieren: *Dann* darf Kreuz auch als Grenze gelesen werden, die zwei Seiten hat, und eine Unterscheidung in der Zeichenebene trifft; erst im Hinblick auf den Gebrauch des Symbols $\urcorner$ als unterscheidende Grenze ist die Rede von Seiten an $\urcorner$ sinnvoll und ist das zuvor gebrauchte Symbol $\urcorner$ auf seiner Innenseite (concave side) als leer bzw. als Ock enthaltend zu erachten. Nun also kann und darf das leere Kreuz als zusammengesetztes Zeichen gelten – vergleichsweise als *ein* (quasi) konsonanter Buchstabe bzw. als Diphthonge.
Im Hinblick auf die dem Leser wohl bekannte Rede über Winkel möchte ich den Unterschied zwischen Kreuz und leerem Kreuz und die Rede von Seiten des Kreuzes folgendermaßen zu verstehen geben: Das *Kreuz* ist lesbar als ein angedeutetes Paar von Halbgeraden, die einen rechten Winkel bilden; die *Seiten* des Kreuzes sind die beiden Winkelfelder; die *Innenseite* alias konkave Seite ist das innere Winkelfeld des rechten Winkels; ein *leeres Kreuz* ist ein Kreuz zuzüglich seiner Innenseite, die als leer betrachtet wird.

Das leere Kreuz kann und darf demnach als zusammengesetztes Zeichen gelten, nämlich als ein Ock in einem cross-Operator. Da die Lesart als atomares Zeichen nicht verboten ist, sollten die beiden Lesarten miteinander verträglich sein. Dass sie dies tatsächlich sind, soll nun besprochen werden. Das Kreuz, so es – wie erlaubt – als Grenze in der Zeichenebene betrachtet wird, kann als *Index* auf und auch als *Ikon* für die Grenze in der Sachebene gelesen werden. Denn wie beim Lesen von Kreuz der Blick über das Zeichen als *Grenze in der Zeichenebene* hinweg geht, also die Seite wechselt, so darf das Zeichen als Absicht zum Zustandswechsel bezüglich der *Grenze in der Sachebene* gelesen werden. Damit indiziert das leere Kreuz dann den markierten Zustand in doppeltem Sinne:

(1) in unmittelbarer Weise als *deskriptives* Zeichen (name), nämlich als Name für den markierten Zustand;

(2) in mittelbarer Weise als *operatives* Zeichen (instruction), nämlich als Anweisung zum Zustandswechel, wobei der Startpunkt des Zustandswechsels der unmarkierte Zustand ist, der vom innen gelegenen Ock indiziert wird.

Meines Erachtens formuliert Brown den durch ein leeres Kreuz doppelt – und damit in verträglicher Weise – gegebenen Hinweis auf den markierten Zustand folgendermaßen kurz und knapp:

> „We now see that if a state can be indicated by using a token as a name it can be indicated by using the token as an instruction subject to convention.“ (Brown, 1969, 6)

Wohlgemerkt sind hinsichtlich des leeren Kreuzes also zwei Lesarten *möglich*, doch werden sie in der Primären Arithmetik nicht notwendigerweise beide *wirklich*. Ob Brown die deskriptive und/oder die injunktive Lesart in seiner Primären Arithmetik als verwirklicht betrachtet, das lässt er in bezeichnender Weise offen, denn die Ambiguität ist eine problemlose Verwechslung hinsichtlich einer letztlich irrelevanten Unterscheidung. Zudem zeigen die Ausführungen in Kapitel 7.4.3, dass die Primäre Arithmetik auch als reiner Termersetzungskalkül gelesen werden *kann* – ohne all die Konnotationen, die durch die Rede von deskriptiven versus operativen Zeichen evoziert werden, und dass auch Ock symbolisiert werden *kann*: So geschehen in Schwartz' (Re-)Formulierung und (Re-)Konstruktion der Primären Algebra (vgl. Kapitel 4.2.1) als formales Beweissystem PA, worin Ock durch das 0-stellige, deskriptive Konstantensymbol ε symbolisiert wird und Kreuz durch das 1-stellige operative Konstantensymbol alias Operationssymbol [·], so dass bspw. das leere Kreuz symbolisiert wird durch die Symbolkombination [ε]. Wohlgemerkt *können* die Zeichen der Symbolsprache interpretationsfrei und lediglich algorithmisch-syntaktisch gelesen werden.

In *Chapter 3* zuzüglich Chapter 2 nutzt Brown die Kreuz und Ock zugedachte Bedeutung, um der Symbolsprache eine Grammatik zu definieren, insofern er in Chapter 2 zwei Gleichungen und in Chapter 3 weitere Möglichkeiten der Termumformung rechtfertigt. Erst am und als Ende von Chapter 3 bestimmt Brown – mehr oder minder explizit – die Primäre Arithmetik als einen Kalkül, worunter für gewöhnlich ein interpretationsfreies Spielen mit (alias Manipulieren von) Zeichen verstanden wird, kurz: ein nicht von Inhalten geleitetes Rechnen (calculation). Doch weist Brown in Chapter 4 mittels Gleichungen auf Äquivalenzen hin und behandelt die darin auftretenden äquivalenten Symbolketten nicht als Terme (arrangements), sondern als Termfunktionen (expressions). Brown hantiert also auch in seinem Kalkül mit Ock und Kreuz – und gegebenenfalls auch dem leeren Kreuz – als bedeutungsvollen Zeichen, das heißt: Im arithmetischen Kalkül bzw. der neuen Symbolsprache kann und darf Kreuz als das operative Zeichen gelesen und verwendet werden, nämlich als (Anweisungs-)Zeichen für einen Zustandswechsel. Weiters kann und darf Ock (bei Bedarf) als Zeichen für den unmarkierten Zustand gelesen und verwendet werden sowie konsequenterweise das leere Kreuz als Zeichen für den markierten Zustand.

In *Chapter 4* zeigen die *Darstellungstheoreme*[152] zuzüglich ihrer Beweise, dass die

152 Vgl. „Theoreme der Darstellung“ (Brown, 1997, 22) für „theorems of representation“ (Brown, 1969, 24) und „Theoreme der Representation“ (Brown, 1997, 24) für „theorems of representation“ (Brown, 1969, 26) jeweils im Hinblick auf theorem 1 bis 4.

Primäre Arithmetik von Chapter 3 zur vollständigen und konsistenten Darstellung der beiden in Chapter 2 unterschiedenen Zustände genutzt werden kann (vgl. Brown, 1969, 24). Die Darstellung gilt als *vollständig*, da es für beide Zustände mindestens einen Indikator gibt, nämlich bspw. die beiden simple expressions, und als *konsistent*, da die intendierte Unterscheidung nicht verwechselt wird. Im Anschluss an den Beweis von Theorem 4 erklärt Brown dem Leser den Begriff der Konsistenz relativ ausführlich – und zwar durch die Rückführung von Konsistenz auf die für die `LoF` zentralen Begriffe (distinction, indication, form, value und intention aus Chapter 1 sowie be confused with aus Chapter 12) – und betont dabei, dass eine Inkonsistenz, nämlich eine Verwechslung einer beabsichtigten Unterscheidung, nicht lokal bleibt, sondern sich global auswirkt:

> „**Consistency**
> We have now shown that the two values which the forms [alias: arrangements; M.R.] of the calculus are intended to indicate are not confused by any step allowed in the calculus and that, therefore, the calculus does in fact carry out its intention.
> If, in a calculus intending several indications, they are anywhere confused, then they are everywhere confused, and if they are confused then they are not distinguished, and if they are not distinguished they cannot be indicated, and the calculus thereby makes no indication.
> A calculus that does not confuse a distinction it intends will be said to be consistent.“ (Brown, 1969, 19)

Unter besonderer Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel 12.3, nämlich Josef Simons Rede über mathematische Zeichen, die ihre Bedeutung, so Simon, dadurch gewinnen, dass sie sich gegenseitig interpretieren, also als Zeichen füreinander und als Bedeutung voneinander fungieren, und nicht dadurch, dass sie Sachen bezeichnen würden, die nämlich erst nachträglich als im Hintergrund der Zeichen stehend angenommen werden, ist im Hinblick auf die Konsistenz der Primären Arithmetik entscheidend, dass in der Primären Arithmetik letztlich nur zwei disjunkte, doch jeweils unendlich viele Zeichen umfassende Interpretationskreise behandelt werden, insofern jede (endliche) arithmetische Expression (expression) entweder als Zeichen für das leere Kreuz und gleichermaßen als Bedeutung von dem leeren Kreuz interpretiert werden kann oder als Zeichen für Ock und gleichermaßen als Bedeutung von Ock. So charakterisieren das leere Kreuz und Ock als die beiden Normalformen alias Normalfiguren – und auch als die beiden Grundfiguren – der arithmetischen Expressionen (expressions) die beiden Interpretationskreise.

Fragen zur Konsistenz Die erste Frage zur Konsistenz soll sein: Ist die Primäre Algebra *konsistent* bzw. in welchem Sinne kann sie als (nicht) konsistent gelten? Darauf ist m. E. folgendermaßen zu antworten: Die Primäre Algebra von Chapter 5 bis 10 ist konsistent, insofern für kein Paar (meta-)arithmetischer Expressionen

α, β die beiden Gleichungen $\alpha = \beta$ und $\alpha = \overline{\beta}\rceil$ gleichermaßen ableitbar sind. Dies ist klar, insofern einerseits von den beiden Gleichungen den arithmetischen Darstellungstheoremen gemäß genau eine arithmetisch gültig ist und andererseits die Primäre Algebra die image-Form der Primären Arithmetik korrekt und vollständig kalkülisiert.
Das äußere Kreuz in $\overline{\beta}\rceil$ gegenüber β macht also einen (arithmetischen) Unterschied, der auch vom algebraischen Kalkül respektiert wird.
Die zweite Frage zur Konsistenz soll sein, ob in `LoF` auch das Phänomen nichtkonsistenter Kalküle betrachtet wird. Wird dem (unbedarften) Leser also verständlich gemacht, dass die Konsistenz der Primären Arithmetik und die der Primären Algebra tatsächlich eine besondere, eine beweisbedürftige Eigenschaft ist? Tatsächlich wird auch der Hinweis auf einen nicht-konsistenten Kalkül gegeben und zwar insbesondere dadurch motiviert, dass Brown daran die für die `LoF`-Mathematik getroffenen Vereinbarungen thematisiert und reflektiert.
Ich möchte mich diesen Hinweisen Browns folgendermaßen nähern. Im Indikationenkalkül gibt es *vier* bedeutsame Instanzen der iteration-Gleichung $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (C5). Das ist zunächst das arithmetische Initial $\urcorner\,\urcorner = \urcorner$ (I1). Das sind weiter die beiden Gleichungen $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}\,\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, die Brown nebst $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$ nutzt, um Kanon 6 und damit das Beweisverfahren von Theorem 3 zu rechtfertigen (vgl. Brown, 1969, 16). Die letzte der angekündigten vier bedeutsamen Instanzen von C5 ist die Gleichung $\rightharpoonup\,\rightharpoonup = \rightharpoonup$, die scheinbar I1 korrespondiert. Eine scheinbare Korrespondenz zu I2 ist dementsprechend die Gleichung $\rightharpoonup\,\leftharpoondown = \quad$ (vgl. Brown, 1969, 36f.). Werden diese beiden Gleichungen als Initiale betrachtet, so gibt es in kanonischer Weise zwei Möglichkeiten, das Wort $\rightharpoonup\,\rightharpoonup\,\leftharpoondown$ dieser Pfeil-Sprache zu vereinfachen:

(1) $\rightharpoonup\,\rightharpoonup\,\leftharpoondown = \rightharpoonup\,\leftharpoondown = \quad$;

(2) $\rightharpoonup\,\rightharpoonup\,\leftharpoondown = \rightharpoonup$.

Der Komparativitätsregel (vgl. S. 55) gemäß gilt demnach $\quad = \rightharpoonup$. Sollen die beiden einander entgegengerichteten Pfeile und die Abwesenheit der Pfeile als paarweise unterschieden gelten, so ist der skizzierte Pfeil-Kalkül inkonsistent bzw. nicht konsistent, da er eine intendierte Unterscheidung verwechselt bzw. nicht respektiert. Mit anderen Worten: Interpretiert man die Pfeile als Konstanten und die Konkatenation als Funktion, so wäre die zugehörige Algebra bestimmt keine Halbgruppe, denn die Termfunktion $\rightharpoonup\,\rightharpoonup\,\leftharpoondown$ ist (ohne Klammernsetzung) nicht wohldefiniert.
Woran allerdings ist Brown mit diesen Rechnungen gelegen? Brown führt nicht nur die Rechnungen vor, sondern thematisiert sie zudem bzw. thematisiert mit ihnen seine Bezeichnungskonventionen (vgl. Brown, 1969, 36f.). Einerseits soll ein und dasselbe Label unterschiedliche Gleichungen bzw. verschieden weitreichende Umformungen bezeichnen dürfen; bspw. soll „Integration“ ein Label für $\urcorner\,\mathfrak{a} = \urcorner$ sein und gleichermaßen für $\overline{\mathfrak{a}}\rceil\,\mathfrak{a} = \urcorner$ (vgl. Brown, 1969, 32, 35). Andererseits und

zugehörig sollen zwei (und mehr) Schritte in einen Schritt zusammengefasst werden dürfen; symbolisch: $\rightharpoonup\,\rightharpoonup=\rightharpoonup$.
Dementsprechend könnte dann die ‚Gleichung' $\rightharpoonup\,\leftharpoondown=\quad$ dafür stehen, dass ein und derselbe Schritt gemacht und rückgängig gemacht ‚äquivalent' dazu ist, dass er nicht gemacht wird. Doch könnten die beiden gegenläufigen Pfeile auch für Schritte stehen, die sich nicht gegenseitig aufheben. Beispielsweise könnte $\urcorner\ \mathfrak{a}$ mittels eines $\rightharpoonup$-Schrittes der Integration in $\mathfrak{a}$ überführt werden und dies $\mathfrak{a}$ mittels eines $\leftharpoondown$-Schrittes der Integration in $\overline{\mathfrak{a}}\!\urcorner\mathfrak{a}$; zusammengenommen liefert dies eine Instanz der Generations-Gleichung C2, nämlich $\urcorner\ \mathfrak{a}=\overline{\mathfrak{a}}\!\urcorner\mathfrak{a}$. Zwischen den beiden Expressionen der Gleichung liegt nicht unbedingt ein (Integrations-)Schritt, vielleicht aber doch ein Schritt, doch vielleicht ist es kein Schritt von Relevanz. Mit anderen Worten: Im Hinblick auf $\quad=\rightharpoonup$ kann auch *kein* Schritt als *ein* Schritt aufgefasst werden,[153] wodurch der skizzierte Pfeil-Kalkül nicht mehr als inkonsistent zu gelten braucht:[154] Er ist gewissermaßen trivialisiert und unterscheidet nicht mehr zwischen den Symbolen $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ und $\quad$.
Beachtenswert ist die relevante Verschiedenheit zwischen der Gleichung $\quad=\urcorner$ und der ‚Gleichung' $\quad=\rightharpoonup$; diese Verschiedenheit ist ein relevanter Unterschied, es sind nicht nur verschiedene Tokens eines Typs, sondern von zwei Typen.
Zunächst gilt es zu erkennen, dass die ‚Gleichung' $\quad=\rightharpoonup$ keine relevante Inkonsistenz anzeigt. Relevant dagegen ist, dass die endlichen Schrittfolgen, die durch den Pfeil-Kalkül dargestellt werden, allesamt die (Grenze der) ersten Unterscheidung respektieren:

(1) Ausgehend von irgendeiner arithmetischen Expression liefert in der Primären Arithmetik jede endliche Schrittfolge stets Expressionen desselben Werts.

(2) Ausgehend von irgendeiner algebraischen Gleichung, deren arithmetische Instanzen allesamt gelten, liefert in der Primären Algebra jede endliche Schrittfolge stets Gleichungen, deren arithmetische Instanzen ebenfalls allesamt gelten.

Dagegen würde die Gleichung $\quad=\urcorner$ und ebenso jeder der ihr impliziten Schritte, nämlich $\quad\rightharpoonup\urcorner$ bzw. $\quad\leftharpoondown\urcorner$, die (Grenze der) ersten Unterscheidung *nicht* respektieren:[155] Die arithmetisch intendierte Unterscheidung, gewissermaßen $\quad\neq\urcorner$,

153 Vgl. (Burris, 1998, 208f.): Für die dort zu betrachtenden Kalküle werden (im Wesentlichen) $\rightharpoonup^*$ und $\rightharpoonup^+$ als (Kurz-)Zeichen für *ein oder mehrere* Schritte vereinbart, wobei in $\rightharpoonup^*$ auch *kein* Schritt inkludiert ist.

154 Vgl. (Brown, 1969, 36): „But now if we allow steps in the indication of steps, we find that the resulting calculus is inconsistent." Im Anschluss leitet Brown die ‚Gleichung' $\quad=\rightharpoonup$ ab und beseitigt dann die angebliche Inkonsistenz durch Anerkennung der ‚Äquivalenz': Auch kein Schritt wird als ein Schritt betrachtet.

155 Neben der Symbolkette $\quad=\urcorner$ ist auch die Symbolkette $\urcorner=\quad$ ein für den intendierten (arithmetisch ungültigen) Gleichungs-Type gleichberechtigtes Token; m.a.W.: Es sind weiters die Schritte $\urcorner\rightharpoonup\quad$ bzw. $\urcorner\leftharpoondown\quad$ implizit.

würde verwechselt werden bzw. es würden verwechselt werden die beiden Zustände dieser Unterscheidung miteinander.
Bemerkenswerterweise ist dies auch der Grund dafür, weshalb die beiden kanonischen Grundfiguren des arithmetischen Kalküls, das sind ⌉ und , als Grundfiguren eingeführt werden (müssen) und nicht – wie sonst oft üblich – als zwei weitere Grundregeln mit leerem Vorderglied eingeführt werden (können): Das dann gemäß gängiger Konvention leere Vorderglied würde mit Ock verwechselt werden, wonach durch $\rightharpoonup$ ⌉ prima facie Ock mit Kreuz verwechselt würde.[156]

Demnach ist also die Primäre Arithmetik – anders als der Pfeil-Kalkül – konsistent und es ist auch die Primäre Algebra konsistent (vgl. Chapter 8). Weiter ist der Wert eines Arrangements invariant hinsichtlich der je verfolgten Vereinfachung, da jede Vereinfachung eines Arrangements zu derselben einfachen Expression führt. Durch die beiden einfachen Expressionen, genauer: durch ‚= ⌉‘ und ‚= ‘, können demnach zwei Prädikate für den Indikationenkalkül definiert werden. Damit ist die Primäre Arithmetik in folgendem Sinne ein mathematischer Redebereich.

> „Die definitorische Bestimmung eines solchen *mathematischen Redebereiches* besteht in der *erläuternden Definition* der Sätze bzw. Aussagen, in denen Namen bzw. Benennungen des Redebereiches vorkommen oder dann auch durch Variable vertreten werden, und in einer Zweiteilung dieser Sätze oder Aussagen in eine nicht leere Klasse der ‚wahren‘ und eine dazu disjunkte nicht leere Klasse der ‚falschen‘, und zwar durch Festlegung entsprechender formaler Kriterien. Diese Kriterien liefern uns nur manchmal, nicht immer, ein *Verfahren* zur Entscheidung, welcher der zwei ‚Wahrheitswerte‘ einem gegebenen Satz zugeordnet ist. Wohl aber sollte es immer eine allgemeine *Begründung* dafür geben, dass für jede im Bereich (also strukturintern) sinnvollen Aussage genau ein Wahrheitswert zugeordnet ist.“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 12)

Die Benennungen bzw. Namen der Primären Arithmetik (image) bzw. Primären Algebra (content) sind die Arrangements bzw. Expressionen zwischen denen eine Äquivalenz als Äquivalenzrelation wohldefiniert ist (vgl. die Definition von Äquivalenz sowie Theorem 5 und 7). Für diese Gegenstandsbereiche können Prädikate definiert werden, welche die beiden logisch grundlegenden Prinzipien respektieren: das Leibnizprinzip sowie das allgemeine Substitutions- und Wertigkeitsprinzip (vgl. S. 214, Kanon 3, Regel R1 und R2). Brown betrachtet in Chapter 4 Expressionen der Primären Arithmetik die beiden Prädikate: *dominant*- (symbolisch: $= \mathfrak{m}$) bzw. *rezessiv*- (symbolisch: $= \mathfrak{n}$) zu-sein.[157] Für Expressionen der Primären Algebra ist zudem das Prädikat *kontingent*-zu-sein sinnvoll (Brown, 1969, 37).

---

156 Wohlgemerkt kann unnötigerweise jedes arithmetische Arrangement als Grundfigur betrachtet werden.

157 Vgl. (Brown, 1969, 15): „Call the value of $\mathfrak{m}$ a dominant value, and call the value of $\mathfrak{n}$ a recessive value.“

Ein interessanter Unterschied zwischen dem Vorgehen in den beiden Büchern ist, dass Stekeler-Weithofer zunächst Benennungen hat und dem mathematischen Redebereich dann einen Sachbereich *unterstellt*. Brown dagegen *bezieht* die Zeichen des mathematischen Redebereichs zunächst fortwährend auf Sachen. Doch könnte er dann im Hinblick auf die Darstellungstheoreme den Zeichen ihre Sachen *entziehen*. Denn die beiden einfachen Expressionen könnten gemäß Theorem 4 als die beiden unterschiedenen Zustände fungieren. Daran ist Brown allerdings nicht gelegen, da er bei der Definition der Primären Algebra in Chapter 5 wieder auf die erste Unterscheidung Bezug nimmt.

11.5 Drei Detailstudien zur Mathematik Browns

Im Lichte der Mathematikphilosophie Stekeler-Weithofers werde ich nun auf drei Textstellen genauer eingehen.

11.5.1 Die arithmetischen Initiale in Revision

Der Gehalt der beiden arithmetischen Initiale kann im Hinblick auf die `LoF` mehrfach thematisiert werden, nämlich einerseits bezüglich seiner Herkunft, andererseits hinsichtlich seiner weiteren Verwendung. Dabei ist die Richtung der *Forschungsperspektive* der Richtung der *Erzählperspektive* gerade entgegengerichtet: Der Explikation in `LoF` gemäß kommen die arithmetischen Initiale von Axiomen bzw. Gesetzen (Chapter 1) her und führen auf algebraische Initiale hin (Chapter 5, 6). Dieser Erzählung ist die vorausgegangene und umgekehrte Erforschung implizit, insofern Brown von den algebraischen Initialen herkam und zu den arithmetischen Initialen und weiter zu Axiomen bzw. Gesetzen hinging. Kurz: Brown hat zunächst Boolesche Algebren arithmetisiert und dann die Brownsche Arithmetik algebraisiert.

Des Weiteren ist der Gehalt von Chapter 12 eine (weitere) *Rechtfertigung* der durch Konstruktion *grundgelegten* Initiale (Chapter 2) und ist in Appendix 5 das sog. Idempositions-Axiom als gemeinsame Wurzel der beiden Initiale I1 und I2 formuliert, wogegen in appendix 4 speziell I1 im Kontext der Arithmetik natürlicher Zahlen illustriert wird, nämlich als Formulierung der Gleichung $1^0 = 1$. Kommen wir nun allerdings zurück auf die Chapter 1 bis 6.

Zunächst ist klar, dass die beiden arithmetischen Initiale Instanzen verschiedener algebraischer Gleichungen aus Chapter 6 sind. Mathematisch betrachtet ist die Frage irrelevant, welche algebraische Gleichung für welche arithmetische Gleichung Pate stand. Doch ist die Frage bemerkenswert, so man berücksichtigt, wie es zur Primären Arithmetik und Primären Algebra kam. Brown suchte zunächst nach der kanonischen Arithmetik Boolescher Algebren (vgl. Brown, 1969, xi). Doch bezeichnet man seine Primäre Arithmetik hinsichtlich ihrer nicht-kanonischen Sprachkonventionen[158] besser als *Brownsche Arithmetik* denn als Boolesche Arithmetik. Gleichermaßen bezeichnet man die zur Primären Arithmetik gehörige Primäre Algebra besser als *Brownsche Algebra* denn als Boolesche Algebra; vgl. dazu folgenden Hinweis:

> „For this reason it is more-correct to describe the algebra in this text as *brownian* rather than ‚boolean', since boolean and all previous algebras were constrained by the crippling limitations of order-relevance and binary scope.
> – Author, 2000 06 27" (Brown, 2008, 75)[159]

Die Gleichung $\urcorner\,\urcorner = \urcorner$ ist sofort als Instanz der fünften algebraischen Gleichung, das ist die *iteration*-Gleichung $\mathsf{a}\mathsf{a} = \mathsf{a}$, also die Idempotenz der Konkatenation in der Primären Algebra, zu erkennen.[160] Gleichermaßen ist die Gleichung $\overline{\urcorner}\rceil =$ sofort erkenntlich als Instanz der ersten algebraischen Konsequenz, das ist die *reflexion*-Gleichung $\overline{\overline{\mathsf{a}}\rceil}\rceil = \mathsf{a}$. Natürlich sind beide Gleichungen auch Instanzen anderer algebraischer Gleichungen. Beispielsweise ist $\urcorner\,\urcorner = \urcorner$ auch eine Instanz der *integration*-Gleichung $\urcorner\,\mathsf{a} = \urcorner$, wobei diese eine Algebraisierung von T2 ist. Und es ist $\overline{\urcorner}\rceil = \quad$ eine Instanz der *position*-Gleichung $\overline{\overline{\mathsf{p}}\rceil\,\mathsf{p}}\rceil = \quad$, wobei diese eine Algebraisierung von T8 ist.

Die behauptete kanonische Korrespondenz zwischen den arithmetischen Initialen und den algebraischen Gleichungen der Iteration und der Reflexion halte ich für gerechtfertigt, insofern es in Chapter 1 zu den Initialen geeignete Vorformen gibt, nämlich die Begriffe *Nennen* (calling) und *Kreuzen* (crossing), die durch jeweils ein *Axiom* (axiom) alias *Gesetz* (law) spezifiziert sind.[161] Zur Erinnerung gebe ich die beiden Gesetze bzw. Axiome nochmals an (vgl. S. 232):

> „**Axiom 1. The law of calling**
> The value of a call made again is the value of the call." (Brown, 1969, 1)

> „**Axiom 2. The law of crossing**
> The value of a crossing made again is not the value of the crossing." (Brown, 1969, 2)

Sie verdeutlichen jedoch bereits *prima facie* die präformale Herkunft der beiden Gleichungen und verweisen durch ihr jeweiliges „made again" auf eine *Wiederholung*

158 Vgl. Kapitel 7.

159 Vgl. (Brown, 2007, 92).

160 Bemerkenswerterweise ist die *iteration*-Gleichung just das Postulat, das in der ersten Version von Huntingtons viertem Postulate-System redundant, nämlich abhängig ist (vgl. S. 68).

161 Wohlgemerkt demonstriert Brown in Chapter 9, genauer: im Beweis von Theorem 17, I1 mittels C3 und I2 mittels C1. Mit anderen Worten: I2 wird zwar als Instanz der *reflexion*-Gleichung, I1 allerdings als Instanz der *integration*-Gleichung gelesen.

bzw. *Repetition*.
Algebraisiert man die beiden Gesetze (laws) unter Verwendung des Symbols $\mathfrak{a}$ als „call“ eines „values“, des Symbols $\urcorner$ als „crossing“, des Symbols $=$ als „is“ und des Symbols $\neq$ als „is not“, so erhält man als affirmierende *calling*-Repetition die Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ und als negierende *calling*-Repitition die Ungleichung $\overline{\overline{\mathfrak{a}}\rceil}\rceil \neq \overline{\mathfrak{a}}\rceil$. Mit etwas gutem Willen erlaubt man für letzteres auch die Formulierung $\overline{\overline{\mathfrak{a}}\rceil}\rceil = \mathfrak{a}$, da nach Definition des *cross*-Operators $\overline{\mathfrak{a}}\rceil$ von $\mathfrak{a}$ verschieden ist und für $\mathfrak{a}$ und $\overline{\mathfrak{a}}\rceil$ insgesamt nur zwei Werte in Frage kommen. Denn gemäß der Vereinbarung des Autors mit dem Leser gelten die Gesetze und Formen ab Chapter 2 bis 10 im Hinblick auf folgendes Sprachspiel: Im Diskursuniversum wird lediglich über zwei Zustände gesprochen — den markierten und den unmarkierten. Auf den ersten verweist die Anwesenheit von cross, auf den zweiten seine Abwesenheit: Es kann also $\urcorner$ als *Nennen* des markierten Zustands und $\urcorner\,\urcorner$ als *Wieder-Nennen* gelesen werden. Weiter wird $\urcorner$ als-Kondensation von deskriptivem und injunktivem Zeichengebrauch vereinbart, insofern cross als *Name* (name) für den markierten Zustand (mögliche Sichtweise von cross als Operand) und als *Instruktion* (instruction) gelesen werden kann. Beachten wir dazu folgende Stelle in Chapter 2:

> „We now see that if a state can be indicated by using a token as a name it can be indicated by using the token as an instruction subject to convention.“ (Brown, 1969, 6)

Im Hinblick auf die Notation in Kapitel 5.3 lässt sich die zitierte Stelle m. E. folgendermaßen erhellen (vgl. insbesondere S. 64): Der Passus „using a token as a name“ verweist auf $\urcorner$ gelesen als Konstantensymbol (bspw. $\mathtt{u}$), der Passus „using the token as an instruction“ verweist auf $\urcorner$ gelesen als Operationssymbol zuzüglich Konstantensymbol (bspw. $\mathtt{z}'$). Da es im Zitat um die Bezeichnung *eines* Zustandes geht, kann die Aussage m. E. folgendermaßen symbolisiert werden: $\mathtt{u} = \mathtt{z}'$ alias $1 = 0'$.
Die Lesart von $\urcorner$ als Instruktion, $0'$, weist auf den markierten Zustand hin, nämlich auf den anderen bezüglich des durch die leere Innenseite angezeigten unmarkierten Zustands   alias 0: Das ist die Sichtweise von cross als Operator. Sie liefert im Gesetz des Kreuzens bzw. in der Form der Aufhebung und in der üblichen Abgrenzung der Syntax von der Semantik je eine weitere Kondensation.
Wohlgemerkt werden in Chapter 2 diese Vereinbarungen getroffen, doch ist damit nicht gesagt, dass das cross als Name auch Einzug in den arithmetischen Kalkül erhält. Meines Erachtens lässt Brown dies bewusst offen: Im Kalkül interessiert die Pragmatik und nicht die Semantik eines Symbols und erstere darf als hinreichend geklärt gelten, sodass letztere nicht weiter von Relevanz ist.

Neben den beiden Erscheinungsformen der arithmetischen Initiale als *algebraische Konsequenzen* in Chapter 5 und 6 sowie als *präformale Gesetze* in Chapter 1, werden sie in Chapter 2, 3 und 4 mehrfach als Äquivalenzen bzw. Gleichungen

formuliert und dabei mit verschiedenen Bezeichnungen versehen.
Die Gleichung $\urcorner\,\urcorner = \urcorner$ wird in Chapter 2 Section „Equivalence“ als *Form der Kondensation* (form of condensation) bezeichnet und durch bestimmte Vereinbarungen über den Zeichengebrauch in ihrer Bedeutung gerechtfertigt. In Chapter 3 Section „The calculus of indications“ wird die Gleichung mit dem Label *number* versehen und sie erscheint in Chapter 4 unter dem Label *Initial 1. Number*.
Die Gleichung $\overline{\urcorner}\rceil = \quad$ wird in Section „Instruction“ als *Form der Aufhebung* (form of cancellation) bezeichnet und durch bestimmte Vereinbarungen über den Zeichengebrauch in ihrer Bedeutung gerechtfertigt. In Chapter 3 Section „The calculus of indications“ wird die Gleichung mit dem Label *order* versehen und sie erschient in Chapter 4 unter dem Label *Initial 2. Order*.

Die Bedeutung dieser Label ist m. E. nur implizit bestimmt. In den Notes zu Chapter 4 gibt Brown den Hinweis, dass „the rule of number is sufficient to unify a divided space, but not to void a cloven space“ (Brown, 1969, 87). Diese Sprechweise bezieht sich auf die von Brown in Chapter 2 etablierte Fachsprache zum Indikationenkalkül. Derzufolge steht $\urcorner$ im Raum s_0 und es befindet sich ein Raum s_1 in(nerhalb von) $\urcorner$. Das gilt in $\urcorner\,\urcorner$ für beide $\urcorner$ gleichermaßen: Beide stehen im Raum s_0 und beide haben Teile des Raums s_1 in sich. Meines Erachtens ist folgende Illustration instruktiv: einerseits $s_0\,\overline{s_1}\rceil s_0$ und andererseits entsprechend $s_0\overline{s_1}\rceil s_0\overline{s_1}\rceil s_0$, wobei hier anders als gewöhnlich die Bezeichnungen der Räume und nicht ihre Inhalte expliziert sind. Mit dem *number*-Initial kann zwar die Anzahl an Teilen eines Raumes verändert werden, das gilt hier für s_1, nicht aber welche Räume in einem Term auftreten, mit dem *order*-Initial dagegen können Paare von (Teilen von) Räumen zum Erscheinen und Verlöschen gebracht werden.

11.5.2 Vorschlag einer alternativen Lesart von I2

Hinsichtlich des Arrangements $\overline{\overline{a}\rceil b}\rceil c$ lautet nun erneut die Fragestellung: Welche der Platzhalter a, b und c müssen tatsächlich für void Platz halten, auf dass ein vereinfachender I2-Schritt möglich ist. Nach gängiger Lesart von I2 sind dies sowohl a als auch b, für die gängige Lesart von C1, $\overline{\overline{a}\rceil}\rceil = a$, ist dies nur b.

In Booleschen Algebren ist die einstellige Operation $'$ eine *Involution*; sie modellieren also die Gleichung $x'' = x$. In der klassischen Aussagenlogik ist die Negation eine Involution. Das Pendant der Gleichung, das sog. *Gesetz der doppelten Negation*, wird bspw. durch $\neg\neg p = p$ symbolisiert. Im Indikationenkalkül ist die reflexion-Gleichung $\overline{\overline{a}\rceil}\rceil = a$ (C1), das algebraische Pendant und wird mittels der algebraischen Initiale J1 und J2 *demonstriert*. J1 und J2 selbst werden als Theoreme T8 und T9 im Hinblick auf die arithmetischen Initiale I1 und I2 *bewiesen*. I1 und I2 wiederum werden im Hinblick auf die beiden Axiome A1 und A2 *vereinbart* (vgl. S. 232 und

244). Bei Vereinbarung order-Gleichung $\overline{\overline{|}|} = \ $ (I2) wird explizit an das Axiom A2 erinnert,[162] bei Demonstration von C1, der reflexion-Gleichung $\overline{\overline{\mathsf{a}|}|} = \mathsf{a}$, dagegen nicht. Wohlgemerkt ist die order-Gleichung eine Instanz der reflexion-Gleichung.
Fassen wir zusammen: Brown wollte den Booleschen Algebren eine Boolesche Arithmetik als Fundament ausweisen. Die Geltung der *Algebra* wird durch die *Arithmetik* verbürgt. Richtmaß für die Arithmetik sind wiederum zwei *Axiome*. Die kritische Rückfrage nach dem Ursprung, nach Henne oder Ei, hat diesbetreffend zwei kanonische Formen: Sind die Axiome *arithmetischer Natur*, entwickelt sich im Indikationenkalkül also tatsächlich das Allgemeine aus dem Speziellen? Oder sind die Axiome *algebraischer Natur* und das Spezielle ruht anfänglich selbst schon im Allgemeinen? Diese beiden Formen der Frage nach dem arithmetischen oder algebraischen Ursprung des Indikationenkalküls in `LoF`, nämlich der Natur der Axiome, sind ein Thema in Kapitel 11.5.1.

Im Folgenden wende ich mich einer spezielleren Frage zu. Wird I2 für gewöhnlich unnötig schwächer interpretiert als nötig? Bemerkenswerterweise wird nach herkömmlicher Interpretation ein I2-Schritt im (lokal betrachtet) *deepest space* eines arithmetischen Ausdrucks vollzogen, ein C1-Schritt dagegen im (lokal betrachtet) *shallowest space* eines algebraischen Ausdrucks. In der Sekundärliteratur wird m. W. nicht die Lesart diskutiert, wonach die order-Gleichung $\overline{\overline{|}|} = \ $ alias $--= \ $ (vgl. Kapitel 7.4) eine verallgemeinerte Form der beiden obigen Lesarten von I2 und C1 *ist*.
Im Hinblick auf Chapter 4 kann in Nachahmung der Theoreme 8 und 9 die Aussage meines alternativen Lesevorschlags folgendermaßen meta-arithmetisch formuliert werden:

> Wenn aufeinanderfolgende Räume s_n, s_{n+1}, s_{n+2} durch zwei Kreuze unterschieden werden, und s_{n+1} nur das Bild (image) des Ausdrucks in s_{n+2} durchdringt (s_{n+1} ist somit der anzeigende Raum des Bildes des Ausdrucks in s_{n+2}), dann ist der ganze Ausdruck e in s_n äquivalent mit einem Ausdruck, in dem der gesamte Inhalt aus s_{n+2} herausgenommen und in s_n gestellt wurde. In jedem Fall, $\overline{\overline{\mathsf{p}|}|}\,\mathsf{q} = \mathsf{p}\,\mathsf{q}$. (vgl. Brown, 1999, 20f., 37)[163]

Für den A-Kalkül würde mein alternativer Lesevorschlag im Falle eines nicht-leeren Wortbeginns B folgendes Paar von Grundregeln liefern: $\mathsf{B}\sqcup\mathsf{M}{-}{-}\mathsf{E} \rightleftharpoons \mathsf{BME}$, wobei B, M und E drei A-Wörter symbolisieren, von welchen B und M Übersetzungen von $\overline{|}$-Wörtern sind. Symbolisiert B speziell das leere Wort, so vereinfacht sich die Situation zu $\mathsf{M}{-}{-}\mathsf{E} \rightleftharpoons \mathsf{ME}$. Gegen meinen alternativen Lesevorschlag von I2 könnte – vorschnell – eingewendet werden, dass er nicht nur algebraisch symbolisiert

162 Vgl. (Brown, 1969, 5): „Now, by axiom 2, $\overline{\overline{|}|} = \ $."

163 Vgl. weiter (Brown, 1999, 75): Es wird beobachtet werden, dass die symbolische Darstellung des Theorems von dem Theorem selbst abweicht, insofern bereits eine Aufhebung (cancellation) vollzogen ist.

ist, sondern auch der Arithmetik erst in image-Form, nicht aber schon in content-Form angehört. Einem solchen Einwand würde ich erwidern, dass mein Vorschlag m. E. durchaus als eine arithmetische Lesart von I2 gelten könne, genauer: als eine *Instanz* des „*axiom[s] of idemposition*“:

> „[T]he idemposition of two identical formation-marks cancels both of them.“ (Brown, 1969, 152f.)

Die beiden aneinandergrenzenden Kreuze inklusive ihres leeren Zwischenraums tilgen/erzeugen (cancel/compensate) einander also gegenseitig, wobei der Inhalt von s_{n+2} und s_n nicht von Relevanz ist. Im Hinblick auf das Idempositions-Axiom nehmen die beiden cross nämlich aufgrund der Leere ihres Zwischenraums s_{n+1} (gewissermaßen) dieselbe Position ein. Dieses Rechnen mit aneinandergrenzenden Kreuzen erfordert nur die lokale Betrachtung eines Arrangements; es erfolgt durch das Verrechnen von zwei Konstanten und ist insofern tatsächlich arithmetisch.

Ich behaupte nicht, dass diese Lesart von Brown intendiert ist, im Gegenteil: Brown beweist die arithmetischen Theoreme allesamt mittels der (voraussetzungsreicheren und damit schwächeren) Lesart von I2. Mein alternativer Lesevorschlag ist allerdings *möglich* und trotz Canon 1 *erlaubt*, insofern in der LoF-Notation das für die gängige Interpretation Relevante nicht explizit charakterisiert ist. Insbesondere ist meine implizite Forderung schwächer als die der gängigen Interpretation: Jede Anwendung der gängigen Interpretation ist eine Anwendung meiner vorgeschlagenen Lesart und jede Anwendung meiner vorgeschlagenen Lesart ist durch C1 letztlich gerechtfertigt.

11.5.3 Sinnanalyse der Darstellungstheoreme

Meine Interpretation der distinction-Definition ist, dass Browns *distinction* das Entweder-oder in einer generierenden Verwendungsweise ist. Denn wird eine Distinktion getroffen, so gibt es das eine und das andere ohne Überlapp und ohne Rest (im jeweiligen Kontext).

Da ich die LoF als ein Einführungsbuch in die Mathematik und grundlegende Konzepte der Mathematik lese, bin ich daran interessiert, wie Brown zu argumentieren beginnt. Ich inspiziere dahingehend die Beweise der Darstellungstheoreme.

> „The first four theorems contain a statement of completeness and consistency of representation. Their proofs comprise a justification of the use of the primary arithmetic as a system of indicators of the states distinguished by the first distinction. We call them theorems of representation.“ (vgl. Brown, 1969, 24)

Im Hinblick auf die *Primäre Algebra* hält Brown zu Anfang von Chapter 5 durch die vorausgegangene Betrachtung der Primären Arithmetik genau die Regeln für bereitgestellt, die von Birkhoff im Hinblick auf die *Gleichungslogik* als konsistentes und zudem vollständiges System von Ableitungsregeln erwiesen sind (vgl. Kapitel 5.2.1).
Das ist zunächst die durch das Äquivalenzzeichen = angezeigte (a sign = of equivalence) und durch Gleichungen indizierte (Call an indication of equivalent expressions an equation) *Äquivalenz* zweier Terme als *Äquivalenzrelation* auf der Menge der Terme und das sind weiter die Substitution, mittels welcher Terme wertinvariant modifiziert werden können, und das Replacement, durch welches aus Äquivalenzen Instanzen abgeleitet (wie gleichermaßen gefolgert) werden können.

Brown entwickelt diese Vorgangsweisen in Chapter 3 und 4. Bemerkenswert scheint mir zu sein, wie und woraus Brown diese für die Algebra kanonischen Vorgangsweisen gewinnt. Wie werden sie von Brown aus der Taufe gehoben? Was ist für Brown von fundamentaler Überzeugungskraft? Zur Beantwortung dieser Fragen sind die Beweise der ersten Theoreme zu beachten. Steigen wir also ein in deren Analyse und beginnen mit Theorem 2, dessen Beweis besonders einfach und übersichtlich ist.

Kommentar zum Beweis von Theorem 2

> „**Theorem 2. Content**
> *If any space pervades an empty cross, the value indicated in the space is the marked state.*
>
> *Proof*
> Consider an expression consisting of a part p in a space with an empty cross $\mathsf{c_e}$. It is required to prove that in any case
>
> $$\mathsf{pc_e} = \mathsf{c_e}.$$
>
> *Procedure.* Simplify p.
> If the procedure reduces p to an empty cross, then the empty cross condenses with $\mathsf{c_e}$, and only $\mathsf{c_e}$ remains.
> If the procedure eliminates p, then only $\mathsf{c_e}$ remains.
> Thereby, the simplification of every form of $\mathsf{pc_e}$ is $\mathsf{c_e}$.
> But $\mathsf{c_e}$ indicates the marked state.
> Therefore, if any space pervades an empty cross, the value indicated in the space is the marked state.“ (Brown, 1969, 13f.)

Offensichtlich wird die Formulierung des Theorems als letzter Satz im Beweis nochmals wiederholt. Weiter besteht der Beweis aus relativ kurzen Sätze, aus Beobachtungen, unter Verwendung von Schriftsprache und Mitteilungszeichen, genauer: synkopierten Bezeichnern. Betrachtet wird eine zusammengesetzte Expression. Brown setzt also voraus, dass der Leser die Konkatenation von p und c_e in pc_e erkennt. Der Beweistrick ist die vollständige Disjunktion von zwei Fällen. Dabei wird schon verwendet, dass die Expression p vereinfacht werden kann und dass die Vereinfachung auf Kreuz oder Ock führt. Damit ist pc_e gegebenenfalls mittels einer Kondensation zu c_e vereinfacht. Bleibt zu fragen, weshalb der Beweis von einer Expression und nicht von einem Arrangement spricht und weshalb p zu einer einfachen Expression vereinfacht werden kann. Das liegt an Theorem 1, dem ich mich nun parallelisiert mit Theorem 3 zuwenden möchte.

Kommentar zu den Beweisen von Theorem 1 und 3 Die Theoreme 1 und 3 sind bereits besprochen worden (vgl. S. 108 und 114). Ich begnüge mich daher damit, nun nur noch kurz auf die Beweisanfänge einzugehen.

	Beweisanfang von Theorem 1	Beweisanfang von Theorem 3
1	„Take any such arrangement a in a space s.	„Let e stand in the space s_0.
2	*Procedure.* Find any deepest space in a. It can be found with a finite search since in any given a the number of crosses, and thereby the number of spaces, is finite.	*Procedure.* Count the number of crossings from s_0 to the deepest space in e. If the number is d,
3	Call the space s_d.	call the deepest space s_d.
4	Now s_d is either contained in a cross or not contained in a cross.	
5	If s_d is not contained in a cross, then s_d is s, and there is no cross in s, and so a is already simple.	
6	If s_d is [contained] in a cross c_d, then c_d is empty, since if c_d were not empty s_d would not be deepest.“ (Brown, 1969, 12f.)	By definition, the crosses covering s_d are empty, and they are the only contents of s_{d-1}.“ (Brown, 1969, 15f.)

Wir erkennen sofort, dass die Beweise ziemlich analog aufgebaut sind, dass aber der Beweis von Theorem 3 etwas sparsamer formuliert ist. Die Beweise zeigen zunächst, wie Brown selbst die Definitionen in Section „Depth“ von Chapter 2 gebraucht: deepest space, cover etc. Im Beweis von Theorem 3 kann wie im Beweis von Theorem 2 eine Expression und nicht *nur* ein Arrangement, also ein sprachliches Objekt, betrachtet werden, da nach Theorem 1 Arrangements vereinfacht werden können und demnach als Expressionen taugen. Wir sehen, dass Brown die Endlichkeits-Bedingung (form of any finite cardinal number of crosses) in der Voraussetzung von Theorem 1 verwendet, um die Rede von einem tiefsten Raum in a zu legitimieren. In den Notes zu Chapter 4 gibt er allerdings den Hinweis, dass er zudem annehmen muss, dass die endlich vielen Kreuze in geeigneter Weise notiert sind, nämlich auf einer Fläche vom Genus 0. Um dieses Notationsproblem genauer zu benennen: Wenn im A-Kalkül das Zeilenende mit dem Zeilenanfang ‚verklebt' bzw. identifiziert würde, so gäbe es eben keinen Zeilenanfang und damit keinen Wortanfang mehr. In entsprechendem Sinne können auf kruden Flächen $\urcorner$-Wörter so notiert werden, dass es keinen tiefsten Raum gibt. Wie nämlich einem A-String bestehend aus drei $+$ sein Anfang bzw. ein ␣ fehlt, so fehlt dem zugehörigen Arrangement bestehend aus drei cross ein tiefster Raum, der insbesondere leer wäre. Denn, obwohl nur aus endlich vielen, genauer: drei, Symbolen bestehend, gibt es für keine der beiden Figuren einen definierten Anfangspunkt im Hinblick auf die geforderte *Lektüre*, denn der Leser (be-)findet sich jeweils schon mitten im *Text.* In beiden Beweisen soll der Leser vom tiefsten Raum (bzw. einem seiner Teile) ausgehend, das Arrangement bzw. die Expression bearbeiten.

Die Beweismethode, insbesondere in Theorem 1, ist offensichtlich die Fallunterscheidung und weiter die Argumentation mittels Widerspruch. Die Leser muss sie, genau betrachtet, hinsichtlich verschiedener Eigenschaften von Arrangements beherrschen: *contained*, (implizit auch hinsichtlich) *simple*, *empty*, *stand alone*, *together versus alone*, *one-cross/eliminated-completely.* Im Beweis von Theorem 3 ist nicht der Fall abgefangen, dass s_{d} der Raum s_0 sein könnte, dass der Raum also leer ist bzw. dass der Ausdruck e der leere Ausdruck ist und damit schon vereinfacht ist. Diese fehlende Aussage wird dem Beweis nicht inhaltlich, nur formal zum Problem. Dem Beweis von Theorem 3 vorab werden synkopierte Bezeichner vereinbart.

> „Let m stand for any number, greater than zero, of such expressions indicating the marked state.
> Let n stand for any number of such expressions indication the unmarked state." (Brown, 1969, 14)

Im Hinblick auf die Vereinbarung von n ist also zu bemerken, dass auch *kein* Indikator, nämlich 0-viele Indikatoren, des unmarkierten Zustandes *ein* Indikator des unmarkierten Zustandes ist.
Im Anschluss wird das Rechnen mit den Symbolen m und n nicht nur für die (nicht-lokale) Konkatenation bestimmt, nämlich $\mathsf{mm} = \mathsf{m}$ und $\mathsf{nn} = \mathsf{n}$ gemäß Axiom 1 sowie $\mathsf{nm} = \mathsf{mn} = \mathsf{m}$ (gemäß Theorem 2), sondern auch das Rechnen mit den Symbolen m und n auf der Innenseite von cross, nämlich $\overline{\mathsf{m}}\rceil = \mathsf{n}$ und $\overline{\mathsf{n}}\rceil = \mathsf{m}$, da insbesondere $\mathsf{m} = \urcorner$ und $\mathsf{n} = \quad$ gilt. Dabei sind nicht nur $\overline{\mathsf{m}}\rceil$ und $\overline{\mathsf{n}}\rceil$ gemischte Bezeichnungen, sondern es sind auch mm und nn Vorformen von Theorem 6, wonach äquivalente Ausdrücke identifiziert werden dürfen.
Dem ist vorausgegangen die Festlegung von m als ‚sprechende' bzw. abkürzende und/oder synkopierte Bezeichnung für (eine beliebige *positive* Anzahl an) Indikatoren des *m*arkierten (*m*arked) Zustandes und gleichermaßen n als ‚sprechende' bzw. abkürzende und/oder synkopierte Bezeichnung für (eine *beliebige* Anzahl an) Indikatoren des *n*icht-markierten bzw. unmarkierten (*n*ot marked) Zustandes. In

die Bezeichnungen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ selbst geht bereits das Assoziativitätsgesetz ein. Das liegt an der üblichen Vorstellung, dass endlich viele Gegenstände in beliebiger Reihenfolge abgezählt werden können. Die Vereinbarung über den Gebrauch von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ als sammelnde Indikatoren ist – ziemlich unauffällig – *reichhaltig*: Nehmen wir das Arrangement $\urcorner\urcorner\urcorner$, das kann nach Definition dargestellt werden als $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}$. Auf den ersten Blick sind die drei Darstellungen wohl jeweils und allesamt unspektakulär: Nach Vereinbarung über den Gebrauch von $\mathfrak{m}$ ist die erste erlaubt und auch die dritte, also bereits zwei Darstellungen für die gleiche Situation. Mit Kvasz lässt sich diesbezüglich davon sprechen, dass in der Definition (des Gebrauchs) der Mitteilungszeichen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eine methodische Kraft liegt. Brown *rechnet* mit den Bezeichnern und rechtfertigt dies prinzipiell durch einen Verweis auf Axiom 1 sowie Theorem 2. Dieses Rechnen ist also nicht im Kalkül bewiesen, sondern wird für die Beweise über das Rechnen im Kalkül vorausgesetzt. Zudem beweist Brown erst als Theorem 5, dass $\mathfrak{x}$ überhaupt zu $\mathfrak{x}$ äquivalent ist.

Die Darstellungstheoreme sind interessant, da sie zeigen, welche Argumente der Autor dem Leser *im* Anfang der Mathematik schon zumutet und wie er seine grundlegenden Definitionen gebraucht. Sie sind aber auch im Lichte der Mathematikphilosophie von Stekeler-Weithofer bemerkenswert. Denn die Darstellungstheoreme erweisen die Primäre Arithmetik als mathematischen Redebereich, also als mathematischen Gegenstandsbereich mit den kanonischen Prädikaten, für den ein formales Wahrheitsprädikat gilt. Die sog. Beweise der Darstellungstheoreme sind eigentlich proto-mathematische Begründungen.

Kapitel 12

Josef Simons Zeichenphilosophie als Spiegel

12.1 Präliminarium

> „Ein Zeichen ist das, was wir verstehen. Insofern wir ein Zeichen verstehen, fragen wir nicht, *was* es bedeutet. [...] Die Bedeutung eines Zeichens ist das Zeichen, das wir als Antwort auf die Frage nach der Bedeutung verstehen. Es ist die Interpretation des Zeichens. [...] Im vollkommenen Verstehen [...] tritt kein Zeichen und keine Frage nach „seiner" Bedeutung ins Bewußtsein. Das Zeichen und seine Interpretation sind dann *eins*. [...] Das Nichtverstehen hält im Lesen inne. Es fragt nach der Bedeutung und damit nach einem anderen Zeichen, das *für* das unverstandene stehen, es erklären soll." (Simon, 1989, 39)

Beim Nichtverstehen als *defizientem* Verstehen wird ein Zeichen als ein Zeichen erkannt, dessen Bedeutung fraglich ist; beim *vollkommenen Nichtverstehen* dagegen ist überhaupt kein Zeichen augenfällig und damit auch kein Zeichen und keine Bedeutungsfrage vorhanden; beim *vollkommenen Verstehen* wird die Bedeutung unmittelbar erfasst und insofern das Zeichen nicht eigens bemerkt – wie auch ein vollkommener Spiegel selbst invisibel ist; solche Unmittelbarkeit ist selbst vermittelt worden. Verstehensproblemen liegt also ein defizientes Verstehen zu Grunde; dieses Teilweise-Verstehen verlangt Interpretationsarbeit, um die *Fragen, die sich stellen*, zu beseitigen. Insofern betreibt Simon eine ‚Hermeneutik des Nichtverstehens' und ist die „Erklärung eines Zeichens durch ein anderes [...] Arbeit an Zeichen" (Simon, 1989, 41). Über Simons Ansatz schreiben dieserart auch Tilman Borsche und Werner Stegmaier: „Nicht das Verstehen ist erklärungsbedürftig, sondern das jeweilige Nichtverstehen." (Borsche und Stegmaier, 1992, VIII).

Browns Mathematik exploriert sehr allgemeine Zeichen: das Unterscheiden und das Bezeichnen. Um einen Zugriff auf dieses fundamentale Konzept zu bekommen, nutze ich die fundamentale und universale Zeichenphilosophie Josef Simons als Optik (vgl.

Kapitel 3.1). Diese philosophische Optik liefert einen nützlichen Ausgangspunkt und eine hilfreiche Außenperspektive, um das nicht zuletzt mathematische Vorgehen in (Brown, 1969) als ein mehr oder minder *Fremdes* in den Blick zu bekommen und es aus sich selbst heraus zu erschließen (vgl. Kapitel 7).

Die Philosophie Simons ist eine Fundamentalphilosophie, die beim Zeichen und dem mehr oder minder gelingenden Gebrauch von Zeichen ansetzt (vgl. Kapitel 3.1). Für diesen Ansatz spricht, dass die Klärung von Zeichen einerseits auf Zeichen und andererseits auf deren Verstehen angewiesen ist. Dabei tragen die beiden Wortpaare *Zeichen/Bedeutung* und *Verstehen/Nichtverstehen* folgende Bedeutungen und geben damit die vier grundlegenden Zeichen an:

> „Ein Zeichen ist das, was wir verstehen. Insofern wir ein Zeichen verstehen, fragen wir nicht, *was* es bedeutet. [...] Die Bedeutung eines Zeichens ist das Zeichen, das wir als Antwort auf die Frage nach der Bedeutung verstehen. Es ist die Interpretation des Zeichens. [...] Im vollkommenen Verstehen [...] tritt kein Zeichen und keine Frage nach ‚seiner' Bedeutung ins Bewußtsein. Das Zeichen und seine Interpretation sind dann *eins*. [...] Das Nichtverstehen hält im Lesen inne. Es fragt nach der Bedeutung und damit nach einem anderen Zeichen, das *für* das unverstandene stehen, es erklären soll." (Simon, 1989, 39)

Beim Nichtverstehen als „defiziente[m] Modus des Verstehens" (Simon, 1989, 41) wird ein Zeichen nur als Zeichen erkannt, nicht aber seine Bedeutung. Beim *vollkommenen Verstehen* wird die Bedeutung unmittelbar erfasst und insofern das Zeichen nicht eigens bemerkt. Verstehensproblemen liegt also ein *defizientes Verstehen* zu Grunde. Solches unvollständige Verstehen verlangt Interpretationsarbeit, um die Fragen, die sich stellen, zu beseitigen.

Die Zeichenphilosophie von Josef Simon (vgl. Kapitel 3.1) ließ mich die `LoF` in verschiedene Kontexte rücken, um damit ihrer Polymorphie etwas besser beizukommen. So las ich die `LoF` im ersten Hauptteil – angeregt durch Daniel Schwartz – *mathematisch-formal* und im zweiten Hauptteil dann – unterstützt von Josef Simon und Ladislav Kvasz – *phänomenologisch*. Im dritten Hauptteil nutzte ich bislang den philosophisch-reflektierten Blick von Peter Reisinger und Stekeler-Weithofer. Last, not least möchte ich in diesem Kapitel im Lichte der Simonschen Zeichenphilosophie nochmals neu auf mathematische Zeichen blicken und dann auf die Mathematik, insbesondere die `LoF`-Mathematik zu sprechen kommen.

12.2 Eine Detailstudie: Die ersten symbolischen Referenzformen

> „He may wander at will, inventing his own illustrations, either consistent or inconsistent with the textual commands.“ (Brown, 1969, 79)

Dieser Einladung Browns gemäß, versuche ich im Folgenden die arithmetischen Initiale dem Leser zu erschließen: die condensation-Form und die cancellation-Form. Das in Kanon 5 verwendete Zeichen „form of references“ (Brown, 1969, 10) weist – insbesondere – auf diese beiden Referenzformen hin. Dabei bleibt außer Betracht, auf welche Weise Brown eine *Sachebene* etabliert und *Signale* als Zeichen darauf bezieht. Die beiden *primitiven Gleichungen* werden zudem aus ihrem Kontext in der *Zeichenebene* gelöst und zunächst nur aus der Perspektive Simons thematisiert. Erst rückblickend wird in (Brown, 1969) bezüglich der Verbindung zwischen Zeichen und Sachen Einblick genommen.[164]

12.2.1 Analyse ihrer Zeichen

Kondensationsform	*Aufhebungsform*
„Now, by axiom 1, $\urcorner\urcorner = \urcorner.$ Call this the form of condensation.“ (Brown, 1969, 5)	„Now, by axiom 2, $\overline{\urcorner}| = \quad .$ Call this the form of cancellation.“ (Brown, 1969, 5)

Die Zeilen $\urcorner\urcorner = \urcorner$ und $\overline{\urcorner}| = \quad$ der beiden vorstehenden Zitate sind jeweils als Zeichen zu erkennen, insofern sie durch die Zeilenwechsel „als etwas aus seiner Umgebung Isoliertes verstanden“ (Simon, 1989, 55) werden. Damit ist folgende Minimalforderung an Zeichen erfüllt: „Zumindest muß an einem Zeichen verstanden sein, daß es Zeichen ist, so daß es einen *Sinn* hat, das ist eine Richtung weist, nach *seiner* Bedeutung zu fragen“ (Simon, 1989, 53). Die weitere Interpretationsarbeit, d.h. die Analyse der beiden Zeichen, erfolgt in diesem Abschnitt explizit und

164 Die Kapitel 12.2.1, 12.2.2 und 12.2.3 weichen in Inhalt, Argumentation und Formulierung kaum von meinem Aufsatz (Rathgeb, 2011) ab: Sie *sind* meine damalige Untersuchung, in der ich auf andere Weise als in den vorstehenden Kapiteln vorliegender Arbeit ein Verstehen der Zeichen Kreuz und Ock erreichen wollte. Ich möchte den Leser dazu einladen, sich nochmals neu auf die Zeichen in den `LoF` einzulassen. Um diese *Verfremdung* etwas zu unterstützen, werde ich zunächst nicht mehr von Kreuz und Ock sprechen, sondern Browns Fachausdrücke nur selten übersetzen, genauer: Das Zeichen Cross ist der Name von cross und cross wiederum verbalisiert ‚$\urcorner$‘. Es gilt entsprechend: Das Zeichen Void ist der Name von void und void verbalisiert ‚ ‘.

kleinschrittig unter besonderer Verwendung der Kapitel 10 bis 13 von (Simon, 1989).[165] Dabei kann von einer Hermeneutik des Nichtverstehens gesprochen werden, insofern sich das Nichtverstehen erst auf Basis eines weitgehenden Verstehens einstellt. Das gelungene Verstehen ist also vorgängig, das Nichtverstehen wird daran zum Epiphänomen.

Die beiden Formen $\urcorner\urcorner = \urcorner$ und $\overline{\urcorner|} = \quad$ werden *defizient verstanden*: Sie sind als Zeichen erkannt, doch werden ihre Bedeutungen nicht gewusst. So stockt der Leser in der Lektüre; ihm zwingt sich die Frage nach der Bedeutung auf und damit „nach erklärenden Einschüben und Diskursen“ (Simon, 1989, 39). Dabei sollte solches Innehalten den Lesefluss nicht prinzipiell verhindern, denn gerade die weitere Lektüre könnte die drängenden Fragen beantworten; vgl. dazu Brown in den Notes zu Cahpter 2:

> „[I]f the reader does not follow the argument at any point, it is never necessary for him to remain stuck at that point until he sees how to proceed. We cannot fully understand the beginning of anything until we see the end.“ (Brown, 1969, 79)

Das Nichtverstehen bzw. die offene Bedeutung wird ihm zum Problem. Ein solches „Problem löst sich auf, wenn es gelingt, etwas so anzusehen, daß es keine unverstandenen Teile hat“. Insofern gilt es bei der Interpretation eines Zeichens eine „Einteilung [zu finden], in der das Ganze verstehbar wird“ (Simon, 1989, 55). Solche Einteilungen ergeben sich von selbst, denn laut (Simon, 1989, 52) gilt:

> „Bestimmte Zeichen *geschehen* als Schlüsselzeichen für einen umfassenden Text.“

Werden die beiden Formen dieserart als *Sätze*[166] gelesen und insofern als minimale Texte, so tritt ‚=‘ von selbst als Schlüsselzeichen auf den Plan. Denn an die Verwendung eines solchen Zeichens ist der Leser aus anderen Kontexten gewohnt und zudem erfolgt in (Brown, 1969, 5) – direkt vor der Kondensationsform – mit folgenden Worten die Einführung von ‚=‘ als Zeichen:

> „Let a sign
>
> $$=$$
>
> of equivalence be written between equivalent expressions.“

165 Dabei wird bzgl. des zweifach zitierten „by“ nicht nach dem *Wie* gefragt.

166 Das ist hier t.t. für „Schritt im Verstehen“, den „übergang [...] vom Thema, als etwas in seiner Bedeutung Fraglichem, zu einer befriedigenden Antwort. [...] Der so verstandene Satz ist nicht ein Teil der Sprache, sondern die der Sprache als Lautsprache *vorausliegende* (transzendentale) Struktur des Bewußtseins als Zeichenverstehen“ (Simon, 1989, 51).

Also ist ‚=' ein Äquivalenzzeichen und damit in der Schlüsselrolle für die Interpretation der beiden Formen. Diese zerfallen insofern in je zwei von ‚=' zusammengehaltene Satzteile und werden dabei als Gleichungen erkannt und in (Brown, 1969) speziell *primitive Gleichungen* genannt.

Der jeweils links von ‚=' gelegene Satzteil gibt das Thema vor, auf das rechtsseitig das Thema folgt, welches damit selbst thematisiert ist; insofern lässt sich der Satz als explizite Definition lesen und die rechte Seite als Bedeutung der linken (vgl. Simon, 1989, 51, 50). Dabei weist das bekannte Zeichen als *explizite Definition* dem Interpretationsversuch der unbekannten Zeichen die Richtung. Werden die Formen dieserart als Bedeutungsexplikationen gelesen, so beantworten sie die beiden Fragen: Was bedeutet ? Was bedeutet ?

> „In der Mathematik steht das Gleichheitszeichen zwischen einem Zeichen und dem es interpretierenden Zeichen." (Simon, 1989, 56)

Handelt es sich bei der Gleichung um eine Definition, so gilt gemäß Simon:

> „Auch eine Definition muß Zeichen enthalten, die im Kontext „schlicht", das heißt ohne Frage nach ihrer Bedeutung gebraucht werden." (Simon, 1989, 50)

Werden also die primitiven Gleichungen als explizite Definitionen gelesen, so werden dabei ihre rechten Seiten behandelt, als seien sie bereits verständlich. Ihre ‚Schlichtheit' wird in Abschnitt 12.2.3 thematisiert werden, doch sei sie vorübergehend weiter vorausgesetzt. Wird insofern , benannt mit cross, als bekanntes Zeichen genommen, so kann erneut „nach der Bedeutung eines Satz*teiles* [gefragt werden]. Es besteht dann die Vermutung, daß die Variation dieses Teilzeichens zum Verständnis des ganzen Satzes führe" (Simon, 1989, 51).

Bei Thematisierung der linken Satzteile geschieht cross als Schlüsselzeichen. Die Lesart der primitiven Gleichungen lautet dann: In der Kondensationsform stehen linksseitig zwei cross nebeneinander ( ) und befindet sich rechtsseitig ein cross ( ); in der Aufhebungsform stehen linksseitig zwei cross ineinander ( ) und befindet sich rechtsseitig kein cross (   ). Im Originaltext wird mittels des Zeichen ‚die konkave Seite' eine ‚Innenseite am cross' ausgewiesen; das Resultat ist illustriert in *innen*. Eine Bemerkung sei hier allerdings zur Bezeichnung ‚Innenseite' eines cross bereits gemacht: Generell ist cross *Zeichen* für eine *Sache*; es ist die Bezeichnung eines *Zustands* einer *Unterscheidung*. Für die Definition der ‚Innenseite' wird cross selbst als eine Unterscheidung in der Notationszeile bzw. innerhalb der Zeichenebene genommen; eine ‚Seite' dieser Unterscheidung wird als die ‚innere' bezeichnet.
Eine pointierende Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse lautet folgendermaßen:

(1) Zwei ‚nebeneinander‘ gestellte cross sind bei Brown ‚äquivalent‘ zu einem cross; mit Simon formuliert sind sie dasselbe Zeichen wie ein cross. Denn es werden Zeichen bezüglich ihrer Bedeutung identifiziert: Im Hinblick auf eine Bedeutung gibt es nur ein Zeichen; eine etwaige Verschiedenheit ist nur Schein.

(2) Zwei ‚ineinander‘ gestellte cross sind bei Brown ‚äquivalent‘ zu keinem cross, mit Simon formuliert sind sie dasselbe Zeichen wie kein cross. Im Hinblick auf das Doppelcross der Aufhebungsform werden zwei Bezeichnungen eingeführt: ‚Innenseite‘ eines cross und weiter ‚leeres cross‘ für ein cross, auf dessen Innenseite kein cross liegt.

(3) In den primitiven Gleichungen werden rechts von ‚=‘ An- und Abwesenheit eines cross als voneinander verschiedene Zeichen gelesen. Die andernfalls gegebene Trivialität würde der von Brown intendierten Anwendung zuwider laufen.

(4) In den primitiven Gleichungen ist links von ‚=‘ die Lage zweier cross zueinander – ‚nebeneinander‘ bzw. ‚ineinander‘ – durch das Erfülltsein bzw. das Nichterfülltsein einer einzigen Relation bestimmt: Das geht durch die Relation der *Beinhaltung* (vgl. Chapter 9.2). Dahingehend ist in der Aufhebungsform durch die ineinander gestellten cross das Erfülltsein, in der Kondensationsform dagegen durch die nebeneinander gestellten cross das Nichterfülltsein der Beinhaltungsrelation illustriert.

Bemerkenswerterweise können die primitiven Gleichungen so gelesen werden, dass linksseitig durch das Nicht- bzw. Erfülltsein der Beinhaltungs-Relation je eine zweistellige Verknüpfung zwischen cross illustriert wird oder gleichermaßen je eine Art, auf welche ein cross auf einem anderen operiert: In der Kondensationsform ist ein cross neutral bzw. die Operation idempotent, in der Aufhebungsform ist ein cross invers zum anderen bzw. die Operation selbstinvers. Der folgende Abschnitt gilt der Vermittlung einer bislang nur vorausgesetzten Unmittelbarkeit im Verstehen der beiden schlichten Zeichen, also von ‚⏋‘ und ‚ ‘.

12.2.2 Synthese ihrer Zeichen

Brown ist nicht an einem zahlen- oder mengentheoretischen Modell für seine schlichten Zeichen gelegen. Denn sein eigener Ansatz ist fundamentaler als diese Konzepte, insofern die Element-von- und die Teilmenge-von-Relation nur spezielle binäre Unterscheidungen sind.

> „My basic contribution to mathematics has been to discover the fundamental particles from which numbers and other, simpler, elements of mathematical systems can be made.“ (Brown, 1999, 131)

Darin liegt auch eine Antwort auf die kritische Frage: Warum werden die schlichten Zeichen, die später zu den Grundzeichen eines Kalküls werden, überhaupt gedeutet? Dahinter steckt die These: Durch jede (nicht-formale) Modellbildung verliert der Kalkül an Allgemeinheit. Zunächst sei hier nochmals gesagt, dass meiner mathematik-philosophischen Lektüre nicht an (einer Erweiterung) der Allgemeinheit des Indikationenkalküls gelegen ist, sondern an einem Verständnis der Konzeption des Originaltextes; in diesem indizieren die formalen Zeichen nicht-formal thematisierte *Sachen* und wird das Zusammenspiel von Kalkül und Interpretation in (Brown, 1969, 112f.) eigens kommentiert. Weiter gerät laut Brown manche mathematische Einsicht gerade deswegen *zu kurz*, weil sie sich nur auf syntaktische Verknüpfungen und Zeichenmanipulationen in einem Kalkül stützt (vgl. Brown, 1969, xi–xx). Mit Simon gesprochen sind Zeichen nur im Anschluss an Vorwissen verständlich und auch für Brown ist es ein grundsätzliches Anliegen mit dem Rechnen nicht gleich in einer Algebra zu beginnen, sondern die zugehörige Arithmetik zu kennen, d.h. den Pool zu erkennen und zu erkunden, dem die Werte entstammen: „ordinary arithmetic is a richer ground for investigation than ordinary algebra“ (Brown, 1969, 96). Seine Algebra generiert er daher nicht durch die Angabe von Initialen und Regeln für Formation und Transformation, sondern entwickelt zunächst eine Arithmetik aus den seines Erachtens einfachst möglichen Grundprinzipien: Das sind insbesondere die Idee einer binären Unterscheidung[167] sowie die vorausgesetzten Möglichkeiten zu benennen, zu markieren und zu nennen. Erst daraus wird das Konzept der Substitution und damit das der Kalkulation als wertinvarianter Zeichenmanipulation gewonnen und nachfolgend algebraisiert. Ein solches Entfalten erfolgt durch das Sammeln und Bedenken von Erfahrungen.

Für Brown liegt die Überzeugungskraft der `LoF` in der beim Leser geweckten Aufmerksamkeit gegenüber eigenem Handeln und sind Kalküle, zumal algebraische, weder Dreh- noch Angelpunkt noch der angestammte Ausgang lohnenswerter Beschäftigung, da ihre Rechenregeln und deren Sicherheit inhaltlichen Überlegungen entnommen und für sich allein höchstens defizient verständlich sind (Brown, 1969, 84f., 85–7, 93–6). Das ist auch in der Struktur des mathematischen Essays berücksichtigt, insofern in Chapter 12 durch den „Re-entry into the form“ der in Chapter 1 und 2 genommene *entry*[168] in die ‚form‘ neu zum Thema wird (Brown, 1969, 102–6). Die Allgemeinheit des Indikationenkalküls erfährt also durch die Deutung keine wesentlichen Einbußen, weil er überhaupt nur zur Darstellung

167 Durch die binäre Unterscheidung werden zwei Zustände generiert: der cross-Zustand Cross und der void-Zustand Void.

168 Vgl. (Lau, 2006, 32) bzgl. Übersetzungen von *entry*: ‚Anfang‘, ‚Beginn‘, ‚Ursprung‘, ‚Einsatz‘.

inhaltlicher Überlegungen zum Konzept von Unterscheidungen und Indikationen eingerichtet wurde: Nicht der Kalkül wird interpretiert, sondern umgekehrt ist er die Kalkülisierung der Brownschen Interpretation von „the idea of distinction and the idea of indication“:

> „The author's previous journey was in the opposite direction, from the forms of interpretation [...], towards the form of indication from which they arise.“ (Brown, 1969, 112)

12.2.3 Verstehen ihrer Zeichen

Das Konzept der *Turingmaschine* (TM) (vgl. Schöning, 2001, 81) – als Alternative zum Kalkül-Konzept (vgl. Kapitel 7.4.2 und 7.4.3) – soll nun dabei helfen, die Bedeutung der Zeichen cross und void über ein Vorwissen zu illustrieren. Dieses Paradigma der theoretischen Informatik bietet zur Orientierung an, dass eine Maschine (Rechner) mittels eines Programms zu Aktionen (lesen, schreiben, shiften) und Zustandsänderungen angewiesen wird. Auch die LoF sind weitgehend als Befehlsfolge insbesondere bezüglich der Zeicheninterpretation und -manipulation zu lesen (vgl. S. 2): Den injunktiven Charakter der Mathematik und seiner Mathematik im Speziellen diskutiert Brown in (Brown, 1969, 77–84).[169] Der ihnen gegenüber alternative Zugang ermöglicht die Inblicknahme von Gemeinsamkeiten und Unterschieden und ist durch die Einladung zu eigenen Illustrationen gestattet und empfohlen, die in den Notes zu Chapter 2 gibt (vgl. Brown, 1969, 79). Für die folgende Interpretation sind Turings Berechenbarkeitsbegriff und die formale Explikation einer LoF-TM nicht von Belang. Die Abkürzung oTM sei Hinweis darauf, dass nur *orientierend* von einer TM die Rede sei. Ein Notationsproblem ist offensichtlich: Die beiden Arrangements $\overline{}|\overline{}|$ und $\overline{\overline{}|}|$ bestehen gleichermaßen aus zwei Kreuzen, doch ist auf dem Schreib-Lese-Band nur das Nebeneinander einzelner Zeichen des Alphabets möglich. Können die beiden Arrangements voneinander unterschieden notiert werden? Dieses Problem ist durch einen Wechsel der verwendeten Notationssprache leicht lösbar; dafür bietet sich bspw. der in Kapitel 7.4.3 behandelte linearisierte A-Kalkül an.

Zur Konzeption eines Interpretationsmodells für die primitiven Gleichungen wird also eine Lesart gewählt, welche die Zeichenverknüpfungen (Syntax) derart mit Bedeutungen (Semantik) belegt, dass ein zumindest zunächst frageloses Verstehen erreicht wird: Die Terme links und rechts des Äquivalenzzeichens werden als Programmtexte interpretiert, die den Zustand codieren, in welchen die oTM durch

169 Vgl. (Lau, 2006, 23–9) und (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 32–5) zur injunktiven Methode in (Brown, 1969). Vgl. weiters (Mehrtens, 1990) zur Thematik *Rede und Sprache in der Mathematik*.

Befolgung der Anweisungen versetzt wird (Pragmatik). So gelten die Terme als Zeichen für die Endzustände, deren Übereinstimmung durch die Gleichung behauptet wird. Es sei weiter vorgegeben: Die oTM durchläuft die Terme nur einmal von links nach rechts, insofern auf jedes Lesen ohne Schreibaktion ein Rechtsshift folge; das Termende gebe damit die Termination ‚von außen' vor. Der durch die Eingabe der rechten Seite der Aufhebungsform, das ist cross, erhaltene Endzustand heiße *Cross*; bei Eingabe der (leeren) rechten Seite der Aufhebungsform, das ist void, dagegen terminiert die oTM im Anfangszustand *Void*.

In (Brown, 1969) heißen solche Programmtexte *Arrangements*, das sind also Kombinationen mehr oder minder vieler cross, die in der Relation der Beinhaltung betrachtet werden. Ein Arrangement wird *Ausdruck* genannt, falls es als Zeichen für den encodierten Endzustand gelesen wird, das ist der *Wert* des Ausdrucks. Eine *Gleichung* ist Zeichen für die *Äquivalenz* zweier Ausdrücke. Die Kondensations- und Aufhebungsform sind die beiden primitiven Gleichungen, deren Terme (Mit Simon formuliert sind das Satzteile.) bereits vier Arrangements vorstellen, die auch als je zwei gleiche Ausdrücke zu lesen sind; cross und void sind die beiden *einfachen Ausdrücke*.

Kondensationsform $\urcorner\urcorner = \urcorner$. Der Satzteil links des Gleichheitszeichens wurde gelesen als zwei cross, die einander nicht beinhalten. Das Gleichheitszeichen verlangt eine Interpretation von cross und Nicht-Beinhaltung, so dass die beiden Programme den gleichen Effekt haben. Folgende Lesart erfüllt diesen Zweck: Die oTM geht bei cross in den Zustand Cross. Damit ist die Wiederholung des cross-Befehls redundant: Endzustand ist Cross.

Aufhebungsform $\overline{\urcorner|} = \quad$. Der Satzteil links des Gleichheitszeichens wurde gelesen als ein cross, das in einem cross beinhaltet ist. Folgende Lesart von cross, void und Beinhaltung erfüllt den gewünschten Zweck: Rechtsseitig erfolgt keine Eingabe, also ist dort Void durch void encodiert. Linksseitig wird das beinhaltete cross in obigem Sinne interpretiert: Die oTM liest dieses cross, geht in Cross und rückt eine Position nach rechts. Dort liest sie das beinhaltende cross und geht (Das ist durch die behauptete Äquivalenz verlangt.) in Void. Unter der Vereinbarung, dass die Zustandsmenge der oTM nur aus Cross und Void besteht,[170] soll das beinhaltende cross als Befehl zum Zustandswechsel (und Rechtsshift) interpretiert werden: Also ist Void wie behauptet Endzustand, doch stellt sich die Frage, ob cross hierbei zweifach gelesen werden muss: einmal als beinhaltetes leeres cross, einmal als beinhaltendes nicht-leeres cross.
Anmerkung: Der Verzicht auf ein Zeichen gelingt nicht immer als ein Zeichen. Beispielsweise ist es im Kontext der TM stattdessen üblich mit ‚Blank' dem Ausbleiben eines Zeichens ein explizites Zeichen zu setzen. Im oTM-Modell dagegen

170 Zur Orientierung kann auch ein anderes Begriffspaar bemüht werden: ‚Grundzustand' für Void und ‚Anregungszustand' für Cross.

ist die leere Eingabe (void), als Zeichen für den Anfangszustand (Void) leicht zu verstehen und es ist in der Musik die Pause im Hörerlebnis durchaus ein eigenes Zeichen.

Rückfragen an die Interpretation Im Folgenden wird das oTM-Modell auf ‚Konsistenz' getestet: Ein leeres cross bringt die oTM unabhängig vom Momentanzustand in Cross; void dagegen führt zu Void genau dann, wenn Void schon gilt. Doppelcross wird gelesen als leeres cross beinhaltet in einem nicht-leeren cross. Ist cross also nicht nur *ein* Zeichen, insofern bzgl. leerer und nicht-leerer cross zu unterscheiden ist oder ist dieser Unterschied irrelevant? Spielt void hierin die Schlüsselrolle?
Die Frage der Konsistenz ist in `LoF` selbst mehrmals das Thema: zunächst im Hinblick auf den Gebrauch von ⏋,[171] dann im Hinblick auf die Darstellungstheoreme der Primären Arithmetik (vgl. Chapter 4) und zuletzt hinsichtlich der Darstellung der Primären Algebra durch die Primäre Arithmetik (vgl. Chapter 8).

Die Aufhebungsform gibt void rechtsseitig als Zeichen vor. Mit void als Schlüsselzeichen kann linksseitig der Unterschied zwischen beinhaltendem und nicht-beinhaltendem cross getilgt werden: Das leere cross beinhaltet void.[172] So zerfällt das Doppelcross folgendermaßen: void ist beinhaltet in einem cross, das in einem cross beinhaltet ist. Encodiert Doppelcross auch dann noch Void? Ja. Denn bei void, die oTM startet insofern eine Position weiter links, bleibt sie zunächst in Void; das beinhaltende, doch leere cross verlangt diesbezüglich einen Zustandswechsel: Die oTM geht in Cross. Damit ist im Modell zunächst gezeigt, dass ein leeres cross Zeichen für Cross ist auch dann, wenn es als ‚void beinhaltet in einem cross' gelesen wird. Als nächstes und letztes Zeichen ist das nicht-leere cross zu lesen; es weist einen Zustandswechsel an: Die oTM geht damit in Void. Doppelcross blieb also Zeichen für Void. Damit ist die Ausgangsfrage dieses Abschnittes beantwortet: Beide cross der Aufhebungsform können als Anweisung zum Zustandswechsel gelesen werden; cross ist *ein* Zeichen.

In dieser Lesart der Aufhebungsform, für welche void ein schlichtes Zeichen mit Schlüsselrolle ist, zeigt sich allerdings auch die Kondensationsform neu; in Paraphrase mit Termklammern lautet sie: (‚void beinhaltet in cross' nicht beinhaltet in ‚void beinhaltet in cross') ist äquivalent zu ‚void beinhaltet in cross'. Dies lässt sich als Prototyp für einen allgemeinen Fall auffassen: ‚Nicht-Beinhaltung' lässt ein Arrangement in Teile zerfallen; diese können als eigene Programme betrachtet werden und encodieren insofern entweder Cross oder Void. Diesbezüglich wird durch Kanon 6, „Die Regel der Dominanz" (Rule of dominance), vereinbart, dass

171 Vgl. (Brown, 1969, 5): „[I]f a state can be indicated by using a token as a name it can be indicated by using the token as an instruction".

172 Die Beinhaltungsrelation zwischen cross sei demnach auch für ein einzelnes cross gültig: Das (anwesende) cross beinhaltet ein abwesendes und ist in einem abwesenden beinhaltet.

Zeichen für Cross solche für Void *dominieren* (vgl. Brown, 1969, 14f.). Bspw. ist $\overline{\overline{\ \ }|}|\,\overline{\ \ }|$ ein Zeichen für Cross. Es gilt also $\overline{\overline{\ \ }|}|\,\overline{\ \ }| = \overline{\ \ }|$ (vgl. Brown, 1969, 9). Damit werden gewisse Fragen irrelevant: Muss in den primitiven Gleichungen generell void als Zeichen berücksichtigt werden? Muss das Doppelcross eigentlich folgendermaßen gelesen werden: void, cross, void, cross, void (, void, . . .)? Wieviel void ist ein void? Auf diese lässt sich etwa folgendermaßen antworten: Ein void ist nur dort, wo wider Erwarten kein Zeichen auftritt. Dieses Fehlen sollte nicht unmotiviert weiter untergliedert werden. Also ist nur *ein* void, wo Zeichen fehlen. Diesert ist die Klammer „(, void, . . .)“ unnötig; vgl. (Weiss, 2006, 85, 97–9) bzgl. einer Notation, bei welcher leerer Raum weit weniger augenfällig ist.

Interpretationskreise: Das Kalkulationskonzept Wie in Kapitel 3.2 besprochen, besteht für Simon eine „Eigenart der Mathematik [darin] Verschiedenes als dasselbe zu interpretieren [und damit] Reduktion von Mannigfaltigkeit“ (Simon, 1989, 57) zu gebieten (vgl. Riss und Schmidt, 2011).[173] Dieser Eigenart wird im Folgenden nachgespürt. In expliziten Definitionen der Mathematik erfolgt die Anweisung ‚dieses‘ *als nichts anderes als* ‚jenes‘ zu verstehen; damit geht aber die vorausgegangene Asymmetrie eines Interpretationsbogens zwischen dem unverstandenen (nun interpretierten) und dem verstandenen (nun interpretierenden) Zeichen verloren. Dann sind beide Zeichen schlicht und vollkommen verstanden. Also ist es gerade in der Mathematik möglich durch Interpretationen Zeichen aneinander zu fügen und solche Zeichenketten zu schließen:

> „In mathematischen Gleichungen hat das interpretierende Zeichen seinerseits seine Interpretation in dem interpretierten: $(a = b) = (b = a)$. Es bilden sich *Kreise* von Interpretationen: $3 = 2 + 1 = 5 - 2 = 3$.“ (Simon, 1989, 57)

Die zweite Termkette soll nicht mittels $3 = 2 + 1$, $2 + 1 = 5 - 2$ und $5 - 2 = 3$ über Transitivität zeigen, dass $3 = 3$ gilt; denn anders als $2 + 1 = 5 - 2$ gilt dies für Gewöhnlich als fundamental. Es gilt $2 + 1 = 5 - 2$ wegen $2 + 1 = 3$ und $3 = 5 - 2$ zzgl. Transitivität von ‚=‘. Beachtenswerterweise ist die Behauptung „Identical expressions express the same value“ (Brown, 1969, 20) erst das fünfte Theorem der `LoF`-Mathematik. Dem Beweis ist in (Brown, 2008, 17) die Fussnote beigegeben: „Previous authors had to take $\mathtt{x} = \mathtt{x}$ as axiomatic. I am the first author to prove it from his axioms. – Author, 2000 06 27.“ Für eine cross-Kombination $\mathtt{x}$ läuft die Argumentation so: Ausgehend von $\mathtt{x}$ werden erlaubte Transformationsschritte zunächst gemacht und dann wieder zurückgenommen; damit ist $\mathtt{x}$ via wertinvarianter Umformungen von $\mathtt{x}$ aus zu erreichen und die behauptete Identität gezeigt.

173 In (Brown, 1969) bedeuten verschiedene Arrangements als Ausdrücke nur je einen von zwei Werten.

In obigem Zitat geht es stattdessen um Kreise von Interpretationen und das ist kein Hinweis darauf, dass die Zeichen a bzw. 3 in den Termketten ganz links und ganz rechts stehen. Die erste Termkette lautet in Worten: (a = b) wird interpretiert durch (b = a); und damit weiter: Die Interpretation von a durch b ist die Interpretation der Interpretation von b durch a; Also: a wird durch b interpretiert, weil b durch a interpretiert wird. Gleichsetzungen und allgemeiner Definitionen *symmetrisieren* in der Mathematik vermittelte und unvermittelte Zeichen, schließen Interpretationsbögen und generieren damit *Interpretationskreise* (vgl. Brown, 1969, 80). In der zweiten Termkette stehen ‚$2+1$‘ und ‚$5-2$‘ gleichermaßen für das ‚b‘ der ersten; das sind die jeweils vermittelten Zeichen: in ‚$2+1=3$‘ und ‚$5-2=3$‘ durch ‚3‘, in ‚b = a‘ durch ‚a‘. Durch diese Vermittlung eignen sie sich allerdings selbst zur Interpretation von ‚3‘ bzw. ‚a‘; sie sind nun selbst unmittelbar verstandene und schlichte Zeichen.

> „Ein von der Art des Verstehens abgetrenntes Zeichen existiert nicht.“ (Simon, 1989, 61)

Die primitiven Gleichungen von Chapter 2 wurden in Abschnitt 12.2.1 als *explizite* Definitionen gelesen, wofür ‚cross‘ und ‚void‘ als schlichte Zeichen galten, in Abschnitt 12.2.2 als *implizite* Definitionen genommen, wodurch die gesetzte Unmittelbarkeit im oTM-Modell vermittelt werden konnte. Dabei unterscheidet Simon zunächst folgendermaßen zwischen impliziten und expliziten Definitionen und gibt nachfolgend den Hinweis, dass man für explizite Definitionen darauf angewiesen ist, über hinreichend schlichte Zeichen zu verfügen.

> „Eine Definition ist, als implizite Definition, ein Satz, an dem eine Bedeutung aufscheint. Als explizite Definition hat der Satz nur diese Funktion. [...] Auch eine Definition muß Zeichen enthalten, die im Kontext „schlicht“, d. h. ohne Frage nach ihrer Bedeutung gebraucht werden. Andererseits wird an jedem jedem noch so „schlichten“ Zeichengebrauch eine Nuance von Individualität deutlich [wird], so daß man sagen kann, daß die Extreme der Unterscheidung in Sätze, die über „etwas“, und Bedeutungsexplikationen, die über den Sprachgebrauch redeten, sich als Abstraktionen darstellen.“ (Simon, 1989, 50)

In Chapter 3 wird vereinbart, dass und wie auch ein Arrangement aus drei und mehr Kreuzen (crosses) als Ausdruck gelesen werden kann. In Erweiterung des bisherigen Modells ist damit die Arbeit eines Präprozessors bestimmt, der die Programmeingabe wertinvariant reduzieren aber auch expandieren kann. Eine *semantische* Lesart von ‚=‘ hat das oTM-Modell initiiert; dagegen motiviert eine *pragmatische* Lesart dieses Konzept des *Kalkulierens* (calculation), das heißt des regelgeleiteten Rechnens.

> „Let a sign ‚$\rightharpoondown$‘ stand for the words ‚is changed to‘.“ (Brown, 1969, 8)

In der Mathematikdidaktik werden am Gleichheitszeichen verschiedene Bedeutungen unterschieden; das erfolgt aus stoffdidaktischem Interesse bei (Kieran, 1981) sowie (Winter, 1982) und verfolgt bei (Prediger, 2008) ein diagnostisches Anliegen: Die Interpretation von ‚=' als ‚Operationszeichen' mit einer ‚Aufgabe-Ergebnis-Deutung' ist schülergerecht auf ein Verständnis als ‚Relationszeichen' und ‚Setzungszeichen' auszuweiten; das ist zunächst ein früher arithmetischer Standpunkt, dann eine fortgeschrittene arithmetische und insbesondere die algebraische Sicht. In diesem Sinne mussten auch bei Simon Interpretationsbögen erst noch zu Interpretationskreisen geschlossen werden. Von Brown dagegen wird ‚=' in Chapter 2 sogleich als symmetrisches Relationszeichen eingeführt, als Setzungszeichen verwendet und erst in Chapter 3 als (symmetrisches) Operationszeichen gelesen:[174] Den beiden primitiven Gleichungen werden also vier Transformationsschritte entnommen: $\overline{}|\,\overline{}| \rightharpoonup \overline{}|$; $\overline{}|\,\overline{}| \leftharpoondown \overline{}|$; $\overline{\overline{}|}| \rightharpoonup \quad$; $\overline{\overline{}|}| \leftharpoondown \quad$.

Die Iteration der Transformationsschritte baut Arrangements auf bzw. ab; dass dies wertinvariant erfolgt, ist durch Kanon 4, „Hypothese der Vereinfachung" (Hypothesis of simplification) (Brown, 1969, 9), festgelegt. Dafür seien zwei Beispiele angegeben:[175]

(1) $\overline{}| \rightharpoonup \overline{}|\,\overline{\overline{}|}| \rightharpoonup \overline{}|\,\overline{\overline{}|\,\overline{}|}| \rightharpoonup \overline{\overline{\overline{}|}|}|\,\overline{\overline{}|\,\overline{}|}|$, also $\overline{}| = \overline{\overline{\overline{}|}|}|\,\overline{\overline{}|\,\overline{}|}|$;

(2) $\overline{\overline{}|\,\overline{}|\,\overline{}|}|\,\overline{\overline{}|}| \rightharpoonup \overline{\overline{}|\,\overline{}|}|\,\overline{\overline{}|}| \rightharpoonup \overline{\overline{}|}|\,\overline{\overline{}|}| \rightharpoonup \overline{\overline{}|}| \rightharpoonup \quad$, also $\overline{\overline{}|\,\overline{}|\,\overline{}|}|\,\overline{\overline{}|}| = \quad$.

Dabei stellt sich die Frage: Landet die ‚vereinfachende' Kalkulation unabhängig von der Reihenfolge der Transformationen beim selben schlichten Zeichen; also: entweder jeweils bei cross oder jeweils bei void? Die positive Antwort wird im Theorem „Agreement" (Brown, 1969, 14) gegeben. Die Formalisierung der Brown'schen Substitutions-Interpretation lautet für zwei cross-Kombinationen A, B: Es gilt $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ genau dann, wenn $\mathsf{A} \rightharpoonup \mathsf{B}$ genau dann, wenn $\mathsf{A} \leftharpoondown \mathsf{B}$; dabei können die Pfeile für mehrere Transformationen stehen. Darin zeigt sich der Umgang mit *Demselben und Verschiedenem*: Die Ausdrücke A und B sind dasselbe Zeichen!

> „Verschiedene Zeichen, die als dasselbe gedeutet werden, sind dadurch als ein Zeichen gedeutet." (Simon, 1989, 58)

> „Expressions of the same value can be identified." (Brown, 1969, 20)

Dabei ist die Rede von *Identifikation* gegenüber der von *äquivalenz* ein Hinweis darauf, dass es bei der `LoF`-Mathematik in erster Linie um die Werte geht, d.h. um die Sachen und damit um die beiden Seiten der zu Grunde liegenden Unterscheidung;

174 Das Äquivalenzzeichen wird erst in Chapter 4 als reflexiv und transitiv erwiesen (vgl. Kapitel 7.3.4).

175 Vgl. (Simon, 1989, 45): „Beispiele müssen verstanden werden und können in ihrer Fraglosigkeit nicht Beispiele für Nichtverstandenes sein. Sie haben damit *nichts gemeinsam*."

Arrangements und Ausdrücke sind nur Mittel zu diesem Zweck – vollkommen verstanden sind ihre vordergründigen Unterschiede invisibel (vgl. Simon, 1989, 39). So ist es für die mit Präprozessor kombinierte oTM nicht von Belang, aus wievielen (endlich vielen!) cross das Arrangement wie gestaltet ist: Die Werte sind unmittelbar zugänglich. Das zitierte Zahlenbeispiel für Interpretationskreise könnte in der `LoF`-Mathematik zum Beispiel lauten: $\overline{\quad}| = \overline{\quad}|\overline{\quad}| = \overline{\quad}|\overline{\overline{\quad}|}| = \overline{\quad}|$, darein die Interpretationsbögen $\overline{\quad}|\overline{\quad}| \rightharpoonup \overline{\quad}|$ und $\overline{\quad}|\overline{\overline{\quad}|}| \rightharpoonup \overline{\quad}|$ fließen. Durch Interpretationskreise können als Gültigkeitsbereiche von initialen Gleichungen *Metakreise* etabliert werden:

> „Call the calculus limited to the forms generated from direct consequences of these initials the primary arithmetic." (Brown, 1969, 11)

Die im Zitat genannten ‚Initialen' sind die primitiven Gleichungen mit einer *syntaktischen* Lesart von ‚=', die ‚Generierung' erfolgt durch (iterierte) Anwendung der vier erlaubten Transformationsschritte und ‚direkt' verbietet in den arithmetischen Kalkül Variablen einzubeziehen. Die ‚primäre Arithmetik' ist zur Illustration folgenden Zitats gerade reichhaltig bzw. komplex genug:

> „Jedes Zeichen hat in der Mathematik beliebig viele, aber nicht beliebige Bedeutungen, und jedes ist die Bedeutung von beliebig vielen, aber nicht von beliebigen anderen Zeichen. $3 = 4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3$ und unendlich so weiter, aber nicht $= 4$." (Simon, 1989, 58)

In der primären Arithmetik gibt es zwar im vorgeschlagenen Sinne unendlich viele Arrangements, die als Ausdrücke genommen allesamt äquivalent und daher zu identifizieren sind, doch gibt es nur *einen* weiteren Wert, zu dessen Ausdrücken *keine* Äquivalenz besteht. Dahingehend gibt es in einem ein-wertigen Kalkül nicht die Möglichkeit Simons Zahlenbeispiel entsprechend zu illustrieren.

12.3 Drei Globalstudien zur Mathematik Browns

12.3.1 Gedanken über Interpretationsregeln

In Simons Zeichenphilosophie kommt der Mathematik eine Sonderrolle zu, die insbesondere unter der Überschrift „Dasselbe und Verschiedenes" (Simon, 1989, 57–59: Kapitel 14) besprochen wird; vgl. (Simon, 1997) und (Simon, 1971). Ich zitiere zunächst, wie das Verstehen von Zeichen mittels anderer Zeichen außerhalb der Mathematik vonstatten geht:

> „Im außermathematischen Zeichenverstehen wird [.] immer ein unverstandenes durch ein verstandenes interpretiert, und das Unverstandene am interpretierenden wird wieder durch ein weiteres Zeichen interpretiert, *solange*, bis am letzten Zeichen nichts Unverstandenes mehr ist, d. h. bis es „unmittelbar“ verstanden wird. Die Asymmetrie ist außerhalb der Mathematik nicht auflösbar.“ (Simon, 1989, 57f.)

Hinsichtlich dieser Art des Zeichenverstehens gilt es eine spezifische „Eigenart der Mathematik“ (Simon, 1989, 57) zu verzeichnen:

> „Der außerhalb der Mathematik vorhandene *asymmetrische* Unterschied zwischen „unmittelbar“ und „mittelbar“ verstandenen Zeichen, der den gewöhnlichen Satz ausmacht, soll [und kann; M.R.] durch Reduktion getilgt werden.“ (Simon, 1989, 57)

Die angesprochene Tilgung ist die „*Tilgung* der Unumkehrbarkeit der *Zeit*“; sie kann in der Mathematik erreicht werden durch „eine axiomatische Interpretationsregel“ hinsichtlich des Gleichheitszeichens, welche die „Wiederholbarkeit, d. h. die Identität von Zeichen bei *vordergründig* verschiedener Bedeutung sicher[stellt]“ und einen „*Hintergrund*“ (Simon, 1989, 57) errichtet.

Ich möchte nun zunächst Simons Lesart des Gleichheitszeichens, ‚=‘, spezifizieren und dabei weiters insbesondere auf die ‚axiomatische Interpretationsregel‘ eingehen; erst im Anschluss daran lässt sich sinnfällig nach dem Hintergrund fragen, vor dem mathematische Zeichen stehen.
Im *allgemeinen Sprachgebrauch* ist das Verhältnis zwischen Zeichen und Bedeutung, nämlich zwischen unverstandenen Zeichen und verstandenen Zeichen, und insbesondere das Zuverstehengeben von Unverstandenem mittels Verstandenem asymmetrisch und bleibt es auch unaufhebbar. Der gleichgeartete Gebrauch des Gleichheitszeichens ist dann ebenfalls ein *einseitiger*, wonach $y = x$ gelesen wird als ‚y ist ein Zeichen mit der Bedeutung x‘ und das Gleichheitszeichen im Sinne von ‚wird interpretiert als‘, ‚bedeutet‘ und/oder ‚ist Zeichen für‘ gelesen wird.
In der *Mathematik* dagegen wird das Gleichheitszeichen symmetrisiert, also zudem umgekehrt und damit beidseitig gelesen; das ist die besagte ‚Tilgung der Unumkehrbarkeit der Zeit‘. Betrachten wir dafür Simons konkretes Beispiel, wonach zunächst ‚3‘ durch ‚$2 + 1$‘ und auch durch ‚$5 - 2$‘ interpretiert werden kann. Bliebe es dabei, so wäre ‚3‘ zwei Zeichen für verschiedene Bedeutungen. Es bleibt allerdings nicht dabei, sondern es wird den beiden Zeichen ‚$2 + 1$‘ und ‚$5 - 2$‘ die gleiche Bedeutung unterstellt und sie können beide durch ‚3‘ interpretiert werden, wobei ‚3‘ als ein und dieselbe Bedeutung gedacht ist und dementsprechend ‚3‘ zuvor ein und dasselbe Zeichen war: Mit $3 = 2 + 1$ und $3 = 5 - 2$ *dürfen*, *können* und *sollen* eben auch $2 + 1 = 3$, $5 - 2 = 3$ und insbesondere $2 + 1 = 5 - 2$ gelten.

> „Zwar wird „3“ einmal durch „2+1“, ein anderes Mal durch „5−2“ interpretiert. Insofern wäre es jedesmal ein anderes Zeichen. Da aber sowohl „2+1“ wie auch

> „$5-2$“ umgekehrt als „3“ interpretiert werden können, sind beide Ausdrücke dasselbe Zeichen. „3“ erfährt durch beide dieselbe Interpretation und bleibt somit dasselbe Zeichen. Diese *Tilgung* der Unumkehrbarkeit der *Zeit* ist in der Mathematik durch eine axiomatische Interpretationsregel sichergestellt.“ (Simon, 1989, 57).

Bemerkenswerterweise ist mit der Phrase „beide Ausdrücke [sind] dasselbe Zeichen“ nicht nur $2+1=5-2$ in einem schlichten Sinne gemeint, nämlich nicht nur im herkömmlichen Sinne als zwei Zeichen mit gemeinsamer Bedeutung, sondern in einem verschärften Sinne, den Simon auch für Allgemeinbegriffe formuliert:

> „*Allgemeinbegriffe* sind Zeichen, die scheinbar verschiedene andere Zeichen interpretieren. Man sagt, diese bildeten dadurch eine Klasse. Sie sind dadurch aber als dasselbe Zeichen verstanden. Verschiedene Zeichen, die als dasselbe gedeutet weren, sind dadurch als ein Zeichen gedeutet. Wenn $\mathtt{x}$ und $\mathtt{y}$ als dasselbe verstanden werden, z. B. jeweils als ein Haus, dann „sind“ sie dadurch auch dasselbe: Jedes *ist* ein Haus. *Alles*, was an ihnen als fraglich hervortrat, ist dann dadurch befriedigend beantwortet. Sie kommen *jetzt* als nichts anderes in Betracht. Wenn sie unterschieden werden, werden sie dadurch unterschieden, daß sie als Verschiedenes, d. h. verschieden interpretiert werden, z. B. als das Haus rechts und das Haus links. Es ist ein oberflächliches Verständnis zu meinen, es könnte Verschiedenes als dasselbe verstanden werden. Es wäre eben dadurch dasselbe.“ (Simon, 1989, 58)

Was heißt das nun bspw. für obige Gleichungen $2+1=3$ und $5-2=3$? Es werden die Ausdrücke $2+1$ und $5-2$ im Hinblick auf ihre Vermittlung durch 3 nicht mehr als voneinander verschieden gelesen bzw. verstanden, sondern *als* dasselbe; Simon bezeichnet bzw. symbolisiert sie im nachfolgenden Zitat gleichermaßen durch $\mathfrak{b}$ und $2+1=5-2$ ist dann eine Instanz von $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$.
Kommen wir nun auf die *axiomatische Interpretationsregel* zu sprechen:

> Das mathematische Axiom, daß Gleichungen so gut von rechts nach links wie von links nach rechts zu lesen seien, bewirkt erst die Vorstellung von *einer* Interpretation von *Verschiedenem.* Außerhalb der Mathematik, und d. h. auch in aller Einführung in sie, geht der Weg immer zeitlich in der einen Richtung vom nicht „unmittelbar“ Verstandenen zu „seiner“ Interpretation. Es gilt das principium identitatis indiscernibilium, aber die Ununterscheidbarkeit beruht auf dem Verstehen *als* dasselbe.“ (Simon, 1989, 58f.)

In Gleichungen wird der zeitliche Verlauf vom unverstandenen Zeichen zu verstandenen Zeichen und demnach die Asymmetrie *getilgt*, insofern Gleichungen beidseitg gelesen werden dürfen bzw. die beiden Terme auch ihre Seiten wechseln könnten: Die vordergründig verschiedenen Zeichen sind doch dasselbe Zeichen.[176]

176 Ich möchte anmerken, dass die Asymmetrie bei einführenden Gleichungen nur *aufgehoben* und nicht gänzlich getilgt ist, insofern sie von Anderen doch wieder als die Einführung unbekannter Zeichen und damit einseitig gelesen werden können.

> „In mathematischen Gleichungen hat das interpretierende Zeichen seinerseits seine Interpretation in dem interpretierten: $(\mathtt{a} = \mathtt{b}) = (\mathtt{b} = \mathtt{a})$. Es bilden sich *Kreise* von Interpretationen: $3 = 2 + 1 = 5 - 2 = 3$. Nur so erhalten verschiedene Zeichen „dieselbe" Bedeutung." (Simon, 1989, 57)

Solche Interpretationskreise wie bspw. $3 = 2 + 1 = 5 - 2 = 3$ sind nur in der Mathematik, im mathematischen Zeichengebrauch möglich und es erfolgt die Tilgung, insofern nicht nur das zunächst unverstandene Zeichen durch das Zeichen interpretiert wird, welches das Verständnis vermittelt, sondern dann auch umgekehrt, das vermittelnde Zeichen durch das vermittelte Zeichen gleichberechtigt interpretiert werden darf und kann: „In der Mathematik ist alles unmittelbar *und* vermittelt." (Simon, 1989, 58), denn es gibt eine spezifische, zirkuläre Form des „Verstehen[s] *als* dasselbe" (Simon, 1989, 59). Dieserart zeigt sich durch das Verketten von Gleichungen mit einer gemeinsamen Seite folgendes:

> „Jedes Zeichen hat in der Mathematik beliebig viele, aber nicht beliebige Bedeutungen, und jedes ist die Bedeutung von beliebig vielen, aber nicht von beliebigen anderen Zeichen, $3 = 4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3$ und unendlich so weiter, aber nicht $= 4$." (Simon, 1989, 58)

In gewissem Sinne sind die Zeichen der Mathematik also nach ‚dasselbe und verschieden' klassifiziert und es können zur Lösung bestimmter Probleme auch „neue Arten von Zeichen *als* „unmittelbar" zu verstehende erfunden" (Simon, 1989, 58) werden wie bspw. $\sqrt{2}$ als Lösung einer rational nicht lösbaren Gleichung, doch können sie nachfolgend gleichberechtigt auch als Verständnis vermittelnde Zeichen verwendet und im Hinblick auf andere Zeichen nach ‚dasselbe und verschieden' klassifiziert werden. Für den mathematischen Zeichengebrauch bzw. den Zeichengebrauch in der Mathematik ist also der spezifische Umgang mit ‚Demselben und Verschiedenem' und insbesondere das ‚Verstehen *als* dasselbe' bezeichnend.

Josef Simon beobachtet also den Zeichengebrauch in der Mathematik; er beobachtet und bedenkt unter der bezeichnenden Überschrift „Dasselbe und Verschiedenes" ein den mathematischen Zeichengebrauch charakterisierendes Moment. Um Simons Hinweis auf dieses Charakteristikum noch deutlicher und zudem als nicht-eigentümlich ausweisen zu können, möchte ich zunächst einen in der Fachdidaktik für Mathematik üblichen Unterschied im vordringlichen Gebrauch des Gleichheitszeichens hinsichtlich der Arithmetik und Algebra gewöhnlicher Zahlen formulieren.
Die vornehmlich *arithmetische* Sichtweise des Gleichheitszeichens ist seine Deutung als *Zuweisungszeichen*, nämlich seine Aufgabe-Ergebnis-Deutung bzw. Deutung als ergibt-Zeichen: Demnach ist in $7 + 5 = 12$ links eine Rechenaufgabe formuliert und rechts deren Lösung. Das Gleichheitszeichen wird dieserart einseitig gelesen und zwar als *Handlungszeichen* bzw. ein zu Handlungen verleitendes Zeichen (vgl. Malle, 1993, 137). Die vornehmlich *algebraische* Sichtweise ist seine Deutung als *Vergleichszeichen*: Der ersten Lesart der Gleichung $7 + 5 = 2 \cdot 6$ gemäß *stellen* die

beiden Terme dieselbe Zahl *dar*, das ist die „Numerische Gleichheit"; der zweiten Lesart zufolge *erreicht* der Zustand 7 durch $+5$ in denselben Zustand wie 2 durch $\cdot 6$, das ist „Gleichheit der Endzustände"; nach der dritten Lesart *erzielen* die beiden Terme im Hinblick auf jeden dritten Term dieselbe Wirkungdas ist „Gleichheit der Wirkungen". In allen drei Lesarten wird das Gleichheitszeichen beidseitig gelesen und zwar als *Beziehungszeichen* (vgl. Malle, 1993, 137f.).
Simon weist also genau darauf hin, dass das Gleichheitszeichen „in aller Einführung in [Mathematik; M.R.]" (Simon, 1989, 58f.) einseitig gelesen werden kann. Betrachtet man dies genauer, so zeigt sich, dass sogar *eine* Gleichung in zweierlei Hinsicht jeweils einführend gebraucht werden kann. Beispielsweise kann im Rahmen der Einführung von Standardnamen für natürliche Zahlen durch die Gleichung $3 = 2+1$ das Zeichen 3 via $+1$ als Zeichen mit der Bedeutung Nachfolger-von-2 ausgewiesen sein; diese Lesart lautet dann expliziter gefasst: $3 := 2 + 1$. Umgekehrt kann im Rahmen der schulischen Arithmetik, in der 1, 2 und 3 schon als bedeutungsvoll vorausgesetzt werden, die Addition allerdings noch zu üben ist, in der Gleichung $2 + 1 = 3$ die zuvor unbekannte Lösung der Rechenaufgabe $2 + 1$ als 3 ausgewiesen werden. Beide Male könnte also dem linksstehenden unbekannten Zeichen eine Bedeutung *zugewiesen* werden bzw. sein.
Weiters kann, darf und soll die Gleichung allerdings auch zweiseitig gelesen, also 3 und $2 + 1$ wechselweise durch einander interpretiert werden. Die beiden Zeichen werden dann miteinander verglichen und sie gelten als dasselbe Zeichen für ihre gemeinsame (hintergründige) Bedeutung.

In Simons Bild(nis) von Mathematik ist vornehmlich hineingeprägt, wie ihr etablierter Zeichengebrauch vonstatten geht bzw. wie er weiter geht: Der Gebrauch der Zeichen greift immer wieder über den etablierten Gebrauch hinaus, indem er sich neue Zeichen verleibt; mit anderen Worten: Der neue Zeichengebrauch greift auf den etablierten zurück. In sein Bild(nis) ist nicht abgebildet, wie der Zeichengebrauch los-geht und los-legt bzw. wie er frei-gelegt und grund-gelegt wird. Trotzdem ist Simons Blick wie auch Kvasz' Blick erhellend im Hinblick darauf, wie die mathematische Sprache in `LoF` erstarkt (vgl. Kapitel 8.3).
Doch möchte ich zunächst nochmals deutlicher formulieren, was Simon nicht explizit in den Blick nimmt bzw. bringt. Simon schreibt darüber, dass der Umgang mit mathematischen Zeichen den Gebrauch neuer mathematischer Zeichen evoziert und integriert. Simon sucht nicht nach dem *ersten Zeichen* der Mathematik, weder im Lichte einer historischen noch einer systematischen noch einer pädagogischen oder didaktischen Fragestellung. Die ‚Zeit', von deren Tilgung Brown im Hinblick auf die beidseitige Lesart von Gleichungen spricht, ist nicht der Wandel historischer Formen von Mathematik, also bspw. nicht der Wandel des Zahl-, Funktions- oder Raum-Begriffs, ist gleichermaßen nicht der Aufbau von Mathematik im Kleide der Mengenlehre oder Kategorientheorie und ist gleichermaßen nicht der Wandel der individuellen Vorstellungen von Zahl, Funktion oder Raum.

Simons Interesse gilt der etablierten Mathematik in einem status quo und nicht einem ursprünglichen Etablieren von Mathematik – bspw. in seiner Abspaltung aus dem üblichen Zeichengebrauch. So ist der mathematische Symbolgebrauch bei Simon bereits eine fest gefügte und in sich feste – und dahingehend isolierte – Insel in einem Meer von Zeichen, die zwischen verschiedenen Individuen, Personen, Akteuren, Aktanten, Systemen oder anderen Bezugsgrößen innerhalb eines philosophischen Weltdeutungsansatzes gewechselt und ausgetauscht werden. Wie aber an und auf diese Insel zu gelangen, wie an ihr festzumachen sei, das nimmt Simon nicht eigens in den Blick. Mathematik ist bei ihm das Andere, insofern sie gerade anders ist als der (restliche) lebensweltliche Umgang mit Zeichen und insbesondere insofern sie eben ganz anders als Philosophie ist.

Unstrittig ist aber auch sog. altbekannte Mathematik für den Lernenden je neu[177] und wendet sich gleichermaßen mancher Forschende von altbekannter Mathematik ab und unbekannter zu oder sucht nach systematischen Anfängen für ein mathematisches Gebiet, nach einer adäquaten Hierarchie in ihm.
Bevor ich mit Simon und Kvasz die Einführung zunächst nur mittelbar verständlicher Zeichen in die `LoF`-Mathematik und deren allmähliches Erstarken beschreibe, also den *Erwerb* der mathematischen Zeichen, ihrer Deutlichkeit und Eindeutigkeit, aber auch des sicheren Umgangs mit ihnen, gilt es noch das Thema der *Hintergründigkeit der Mathematik* anzugehen. Was also steht denn nun im Hintergrund der mathematischen Zeichen? Steht da überhaupt etwas oder nicht vielmehr nichts? Und macht das für die mathematischen Interpretationskreise bzw. die Mathematik als Ganzes überhaupt einen Unterschied?
Im 14. Kapitel von (Simon, 1989) kommt nicht zur Sprache, dass es hinter den mathematischen Zeichen ‚etwas' gäbe, das nicht selbst ein mathematisches Zeichen ist. Die dortige Sichtweise ist eine innermathematische, insofern mathematische Zeichen lediglich mittels mathematischer Zeichen interpretiert werden und diese Interpretationen wechselweise erfolgen können. Die ‚prima facie' verschiedenen Zeichen werden dabei als dasselbe verstanden und das generiert ihren Hintergund, der sie selbst sind, nämlich hinsichtlich ihrer Austauschbarkeit bezüglich eines Interpretationskreises.
Auf die Mathematik als Ganzes kommt Simon folgendermaßen zu sprechen.

> „Das Mathematische bildet einen Kreis von Interpretationen. Dadurch bildet es ein geschlossenes Ganzes, und es kann sich die Frage nach dessen Bedeutung stellen; sie liegt außerhalb der Mathematik, als Antwort auf die Frage, was Mathematik sei. Diese Antwort kann, wenn sich die Frage stellt, nicht mehr mathematisch sein. Die Mathematik wird so zum Spezialfall." (Simon, 1989, 60)

177 Literarisch besonders gehaltvoll ist der Einblick, den Thomas Mann in seinem Roman *Die königliche Hoheit* in einen unverständigen Blick auf mathematische Zeichen gibt.

Statt der innermathematischen Frage nach der Bedeutung mathematischer Zeichen, die eine mathematische Antwort in der Form $y = x$ finden kann, ist die Frage nach der Bedeutung der Mathematik als Ganzes von anderer Natur; sie ist nicht mathematisch, sie ist wohl philosophisch. Simon liefert hierfür zwei bemerkenswerte Hinweise. Das ist erstens, dass der Platonismus (sich) die Welt nach dem Vorbild der Mathematik erklärt:

> „Der Platonismus versteht alles von dieser Eigenart der Mathematik her. Er unterstellt damit, daß Verschiedenes als dasselbe zu interpretieren sei. Damit gebietet er Reduktion von Mannigfaltigkeit." (Simon, 1989, 57)

Diesbezüglich sei nochmals daran erinnert, dass die angesprochene „Eigenart der Mathematik" für Simon in der „Identität von Zeichen bei *vordergründig* verschiedener Bedeutung" (Simon, 1989, 57) besteht. Das ist zweitens, dass die Kritik am Platonismus (sich) die Mathematik nach dem Vorbild der Welt erklärt:

> „Die Kritik am Platonismus, der das Viele von einer ihm gemeinsamen Idee her versteht, besteht darin, die Besonderheit des Spezialfalles [das ist mitunter die Mathematik; vgl. dazu das Ende des vorletzten Zitates; M.R] zu verstehen. Sie führt den Kreis des Mathematischen auf das gewöhnliche Verstehen zurück. Hier [beim gewöhnlichen Verstehen; M.R.] führen Interpretationen von Zeichen *zu* Zeichen, *solange*, bis die Interpretation in einem unübersehbaren Kontext des Zeichenverstehens „unmittelbar" verstanden wird. Darin ist das interpretierte Zeichen auf die Wirklichkeit bezogen." (Simon, 1989, 60)

Zusammenfassend ist zu sagen, dass nach der Hintergründigkeit der Mathematik und ihrer Zeichen verschieden gefragt werden kann: Der *Platonismus* fragt und antwortet innermathematisch, insofern er sich nicht nur die Welt nach dem Vorbild der Mathematik, sondern die Fragen nach mathematischen Zeichen stets mittels mathematischer Zeichen beantwortet; die *Kritik am Platonismus* dagegen fragt und antwortet nicht mehr innermathematisch, insofern sie nicht nur die Mathematik nach dem Vorbild der Welt erklärt, sondern mathematische Zeichen durch geeignete Interpretationen auf die Welt bezieht.

Von einem platonistischen Zeichenbegriff grenzt sich Simon folgendermaßen ab:

> „Jede Interpretation erfüllt einen Zweck. Sie ist befriedigend, wenn sie ihren Zweck erfüllt. D. h. aber nicht, daß *ein* Zeichen in verschiedener Hinsicht interpretierbar sei. Es ist, wenn es nicht unmittelbar verstanden wird, die Bezeichnung dessen, was die jeweilige Interpretation besagt. „x" bedeutet „y" oder „z", je nach dem Zweck, in dessen Zusammenhang es Zeichen ist, aber es handelt sich dann einmal um das Zeichen für „y", das andere Mal um das Zeichen für „z", also um verschiedene Zeichen. Unsere Sprache ist so voll von platonistischer Metaphysik, daß wir sagen, ein Zeichen könne verschiedene Bedeutungen haben, je nach Lesart. Aber die Lesart *erkennt* erst das Zeichen." (Simon, 1989, 61)

Die Antwort auf die Frage nach dem Hintergrund der Mathematik und ihrer Zeichen ist also abhängig davon, wie die Frage (eigentlich) genau lautet und nach welcher Mathematik dabei (eigentlich) gefragt ist.

12.3.2 Gedanken über Verschiedenes

Die Eigenart der Mathematik Die *Bedeutung des Mathematischen*, dass es nämlich „einen Kreis von Interpretationen“ und dadurch „ein geschlossenes Ganzes bildet“ (Simon, 1998, 60), ist die „Antwort auf die Frage, was Mathematik sei“ (Simon, 1998, 60). Dementsprechend ist die *Bedeutsamkeit des Mathematischen* wohl die ‚Antwort auf die Frage, was der Sinn von Mathematik sei‘. Beide Antworten, von denen Simon nur die erste angeht, können „nicht mehr mathematisch sein“, sondern liegen „außerhalb der Mathematik“ (Simon, 1998, 60).
Dementsprechend ist weiter die *Bedeutung eines mathematischen Zeichens* die Antwort auf die Frage, was das für ein mathematisches Zeichen sei, also für was das mathematische Zeichen Zeichen sei, m.a.W.: Welche Sache wird bezeichnet bzw. durch das Zeichen dargestellt? In der Mathematik können, dürfen und sollen als Bedeutung eines mathematischen Zeichens genau die Zeichen gelten, die selbst als Bedeutung des Zeichens gelten (vgl. Kapitel 12.3). Durch mathematische Zeichen werden also wiederum Zeichen bezeichnet und die Erklärung eines Zeichens erfolgt mittels genau der Zeichen, die es selbst erklärt: „Es bilden sich *Kreise* von Interpretationen.“ (Simon, 1998, 57)

> Eine axiomatische Interpretationsregel „stellt Wiederholbarkeit, d. h. die Identität von Zeichen bei *vordergründig* verschiedener Bedeutung sicher. Sie errichtet einen *Hintergrund*.“ (Simon, 1989, 57)

Die „Eigenart der Mathematik“ besteht eben darin, „daß Verschiedenes als dasselbe zu interpretieren sei“ (Simon, 1989, 57). Verschiedenen Zeichen wird nämlich dieselbe Bedeutung zugesprochen und das liefert den zureichenden Grund für die Rede von einem gemeinsamen *Hintergrund* der Zeichen: Die voneinander verschiedenen Zeichen werden also nicht untereinander unterschieden und gelten insofern als dasselbe Zeichen und damit weiter als Zeichen für Dasselbe.

Sachen versus Zeichen – (Simon, 1998) Josef Simons Kritik am Platonismus bekommt gleichermaßen und folgendermaßen den Prioritätenstreit zwischen Zeichen und Sachen bagatellisierend in den Blick:

> „Daß „etwas“ als Zeichen verwendet werde, ist eine platonistisch-metaphysische Redensart. Sie suggeriert einen absoluten Unterschied zwischen Zeichen und Sachen. Wir machen diesen Unterschied, aber wir machen ihn, indem wir

> etwas als Zeichen, etwas anderes als davon unterschiedene Sache *bezeichnen*, sofern wir etwas nicht „unmittelbar“ verstehen. Wenn wir „unmittelbar“ verstehen, stellt sich nicht die Frage, als *was* wir etwas verstehen. Insofern ist der *Unterschied* zwischen Sache und Zeichen immer eine Sache der mehr oder weniger gelingenden Interpretation.“ (Simon, 1998, 76)

Die Entscheidung, etwas als Sache oder als Zeichen zu betrachten, wird also innerhalb eines mehr oder minder klar umrissenen Kontextes und hinsichtlich eines mehr oder minder klar erfassten Anliegens gefällt: Dieserart hat jedes „etwas“ prinzipiell eine doppelte Staatsbürgerschaft, nämlich einerseits für den Kosmos der Sachen, also den Hintergrund hinter den *Zeichen*, und andererseits den Kosmos der Zeichen, also den Vordergrund vor den *Sachen*. Es ist für Simon eine Frage der jeweiligen Lesart, nämlich des unmittelbaren Verstehens, ob ein Etwas als Zeichen gelesen oder unmittelbar als Sache verstanden wird.
Dieserart ist auch in den Laws of Form die Unterscheidung zwischen Zeichen und Sachen eine vom jeweiligen Kontext abhängige, worauf ich im Folgenden im Allgemeinen und im Konkreten eingehe.

Zeichen versus Sachen – (Stekeler-Weithofer, 2008) Simon erklärt – kritischer formuliert: entlarvt – also den mathematischen Platonismus als eine a posteriori Ansicht, die nicht nur – kritischer formuliert: in Verkehrung der Tatsachen – die Sachen *höher* als die Zeichen schätzt, sondern auch die Sachen für den Zeichen ‚logisch‘ vorgeordnet hält. Dieserart denkt der Platonismus die Beziehung zwischen Sachen und Zeichen von den Sachen her, statt die Konstitution der Sachen von den Zeichen her zu verstehen.
Kommen wir nun in einem Exkurs auf eine solche umgekehrte Sichtweise zu sprechen (vgl. Kapitel 11): In ihr wird die Explikation der Konstitution gefordert und zwar einer methodischen und reflektierten und eine solche Konstitution wird für die Arithmetik natürlicher Zahlen skizziert und für die euklidische Geometrie geleistet. So wird in der Monographie „Formen der Anschauung. Eine Philosophie der Mathematik“ (Stekeler-Weithofer, 2008) im Detail aufgezeigt, was Simon lediglich im Ganzen und im Effekt andeutet. Stekeler-Weithofer übt wie Simon Kritik am mitunter mathematischen Platonismus und folgt insofern gleichermaßen Hilberts Diktum für die Mathematik, wonach „*am Anfang [...] das Zeichen [sei]*“ (Hilbert, 2003, 138),[178]. Ich möchte diesbezüglich in Erinnerung rufen, dass es auch für Stekeler-Weithofer „ein logisches Primat der Namen vor den Gegenständen“ und gleichermaßen „der Sätze vor ihren Inhalten“ gibt.

178 Der Passus – und damit der von Hilbert formulierte Anspruch – lautet genauer: „Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik – wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen – für erforderlich halte: ‚*am Anfang* – so heißt es hier – *ist das Zeichen*‘.“ (Hilbert, 2003, 138).

Sachen versus Zeichen – (Brown, 1969) Kommen wir auf die Laws of Form zurück, genauer: auf die Unterscheidung zwischen Gegenständen (bei Stekeler-Weithofer) alias Sachen (bei Simon) und Zeichen in den LoF, und beachten dabei, dass das – zumindest vorläufige – Anerkennen von Unterscheidungen eine Frage der Entscheidung ist. Die aufmerksame Lektüre von Chapter 1 und 2 zeigt, dass Brown darin Sachen zu Zeichen macht, um damit Sachen zu bezeichnen, und dass er Zeichen zu Sachen macht, indem er die Bezeichnungen selbst zwischenzeitlich thematisiert. Dabei ist das Thema der LoF eine gewisse Form der Unterscheidung (distinction), wobei ‚Unterscheidung' zwischen Prozess und Resultat und demnach zwischen Unterscheiden und Unterschiedensein changiert. Brown geht es also um einen konstruierten Sachverhalt, der Simons Worten „etwas anderes als davon unterschiedene Sache" implizit ist, und er ‚spielt' mit seiner Unterscheidungs-Form – er spielt sie durch –, insbesondere indem er sie einerseits als absolut und andererseits als (nur) relativ betrachtet und dabei jeweils die auffälligsten der möglichen Konsequenzen behandelt.
Bemerkenswert ist dabei – und wir werden darauf wiederholt zurückkommen –, dass Brown seine ‚demonstrative Lehre' ‚mathematischen Tuns', nämlich seine in Chapter 3 bis 10 am Beispiel Boolescher Algebren agierende systematisch angelegte Explikation von *Mathematik als Praxisform*, mit Zeichen eröffnet, die er m. E. für weitgehend unmittelbar verständlich hält, damit Sachen konstituiert und dafür neue Zeichen einführt: Brown konstituiert nämlich eine Zeichensprache mit dem Zweck, die unterschiedenen Sachen, an denen ihm also gelegen ist, vollständig darstellen zu können. Die LoF-Mathematik ist Simons und Stekeler-Weithofers Votum gemäß also eine *a-typische Mathematik*, insofern nicht Sachen im Hintergrund der Zeichen errichtet werden, sondern ein Vordergrund der Sachen mit Zeichen eingerichtet wird. Das Vorgehen Browns mag also als eigenwillig gelten, insofern er den Sachen das Primat gegenüber den formalen Zeichen *für* die Sachen einräumt. Den LoF-Zeichen geht dahingehend zwar ihr *Sinn* voraus, doch wird nachfolgend reflektiert, ob ihre methodische Konstitution *zweckmäßig* erfolgte, also erfolgreich und folgenreich.

Wie Simon ist m. E. auch Brown, wenn ich mit Simon spreche, dem Lager derer zuzuordnen, die Kritik am Platonismus üben, genauer: Kritik üben an *der* Mathematiksicht, die dem Platonismus maßgeblich für die Weltsicht ist. Browns Mathematikbild ist – in der Redensart von Simon und auch von Stekeler-Weithofer gesprochen – ein nicht-platonisches: Die Sachebene (zur Zeichenebene) wird *explizit* konstituiert und *kommentiert*; die Konstitution wird also durchaus reflektiert. Im Nachgang dazu erfolgt die Konstitution von Konventionen im Zeichengebrauch, insbesondere dass das Nicht-Bezeichnetsein selbst als Zeichen dienen kann.
In LoF geht also die Konstitution der Sachebene der Konstitution der einschlägigen Zeichenebene (für die LoF-Formelsprache) voraus und ist normalsprachlich formuliert: Die Begriffe bzw. Konzepte, mittels derer in Chapter 2 die Sachebene und gleichermaßen die Zeichenebene der LoF-Mathematik grundgelegt werden, werden

in Chapter 1 aus dem gewöhnlichen Sprachgebrauch genommen und innerhalb diesem mehr oder minder deutlich erläutert. Das bildet die Begriffsebene der `LoF`-Mathematik. Die (Lebens-)Welt ist gewissermaßen der maßgebliche Schlüssel zur Mathematik und es etabliert Brown erst in einem zweiten Schritt einen Kosmos mathematischer Zeichen, weil er im ersten Schritt seinen Kosmos mathematischer Sachen konstruiert. Jener Kosmos stellt diesen Kosmos dar. Die Konstruktion und Konventionalisierung der beiden Kosmen erfolgt weitgehend unter der strikten Verwendung der in Chapter 1 skizzierten Konzepte. Im Einzelfall wird auf den gewöhnlichen Sprachgebrauch auch anderweitig zurückgegriffen.

Verschiedenheit und Relevanz *Verschiedenheiten*, die uns prima facie entgegentreten, können von *Relevanz* sein oder auch nicht. Verschiedenes kann also als Dasselbe oder als Unterschiedliches gelten sollen: Dafür ist Verschiedenes miteinander zu *identifizieren* oder voneinander zu *unterscheiden.* Ich lasse bewusst dahingestellt, ob das mehrfache „oder“ in allen eben formulierten Fällen in allen Kontexten als ein exklusives Oder verstanden werden muss oder auch in manchen Kontexten als inklusives Oder verstanden werden darf. Vielleicht ist also in manchen Kontexten die Verschiedenheit von Dasselbe und Unterschiedenes nicht von Relevanz.
In manchen Kontexten sind manche Token erkenntlich verschieden und gelten doch demselben Typ; sie sind dahingehend miteinander zu identifizieren. Ein doppeltes Beispiel liefern die vier Arrangements der beiden Gleichungen $\overline{\overline{}|}|\ \overline{}| = \overline{}|\ \overline{\overline{}|}|$ und $\overline{}|\ \overline{\overline{}|}| = \overline{\overline{}|}|\ \overline{}|$, wobei es sich hierbei gewissermaßen nur um eine Gleichung des Types $\mathsf{D} = \mathsf{D}$ und damit gewissermaßen nur um ein Arrangement handelt (vgl. S. 170). Ein weiteres Beispiel ist, dass Void ein Type ist, der in Formeln keines Tokens bedarf, für den im Fließtext dagegen das Token   verwendet wird. Andererseits sind in manchen Kontexten manche Token (beinahe) unkenntlich verschieden und gelten doch unterschiedlichen Types; sie sind dahingehend voneinander zu unterscheiden. Ein doppeltes Beispiel liefert ein einzelnes Kreus, das im Hinblick auf die Reformulierung von Huntingtons erstem Postulate-System (vgl. S. 63) als 0 (bzw. 1) und gleichermaßen als $1'$ (bzw. $0'$) gelesen werden könnte. Ein weiteres Beispiel sind zwei Arrangements, die jeweils nach der zweiten reinen Iterationsform aufgebaut sind – einmal aus 42, einmal aus 43 Kreuzen. Von den beiden Tätigkeiten, nämlich dem Identifizieren und dem Unterscheiden, könnte eine als die kanonische gelten; als die kanonische Tätigkeit könnte sie dann auch invisibel sein und demnach nicht als Tätigkeit gelten. Infolgedessen ist dann Verschiedenes Dasselbe, so es nicht unterschieden wird, oder Verschiedenes Unterschiedliches, so es nicht identifiziert wird.

Verschiedenheit und Mathematik Für Josef Simon ist der Umgang mit Verschiedenem als Dasselbe, dem der Umgang mit Verschiedenem als Unterschiedenem implizit entgegengesetzt ist, ein Charakteristikum der *Mathematik*: Sie geht auf ganz spezifische Weise über Verschiedenheiten hinweg, insoweit sie nicht auf Dauer zwischen diesen unterscheidet, insoweit nämlich erklärende Zeichen von den jeweils erklärten Zeichen nicht unterschieden bleiben; sie werden nachfolgend ununterschieden gebraucht (vgl. Kapitel 12.3.3).[179] Doch identifiziert die Mathematik nicht über alle Verschiedenheiten hinweg, sondern respektiert manche als Unterschiedenheiten. Derart entstehen Interpretationskreise, was wohlgemerkt ein Plural ist. Zwei Beispiele für oft irrelevante Verschiedenheiten aus der Arithmetik natürlicher Zahlen sind $7 + 5 = 12 = 13 - 1 = \ldots$ und $6 \cdot 7 = 42 = 43 - 1 = \ldots$, doch ist die Unterschiedenheit $12 \neq 42$ in vielen Kontexten von Relevanz. Zeichen, die prima facie verschieden sind, bspw. durch ihre augenfällige Symbol-Gestalt, werden durch einander wechselseitig erklärbar, nämlich bspw. $12 = 7+5$ und $42 = 6 \cdot 7$ und damit erklärbar als Zeichen für Dasselbe, doch bleibt es auch bei $42 \neq 12$. Damit werden die verschiedenen Zeichen letztlich zu demselben Zeichen (vgl. Kapitel 12.3).
Stekeler-Weithofer spricht diesbezüglich vom „Primat der Benennungen und Aussagen vor den Gegenständen und Wahrheiten“ bzw. im Einzelnen: einerseits das – in einem *weiten* Wortsinne als „logisch“ ausgewiesene – „Primat der Namen vor den Gegenständen“ und andererseits das „Primat der Sätze vor ihren Inhalten“ (Stekeler-Weithofer, 2008, 12).

Verschiedenheit und LoF-Mathematik Für Josef Simons Blick auf Mathematik ist die *LoF-Mathematik* in ganz besonderer Weise interessant. Denn zunächst ist sie relativ einfach, eben nur zwei-wertig, und damit *so* einfach, dass sie *gerade noch* kompliziert genug ist, um das Phänomen auftreten zu lassen. Für einen ein-wertigen Kalkül gäbe es keine relevante Verschiedenheit (vgl. S. 266). Denn die LoF-Mathematik thematisiert eine Unterscheidung und zeigt einen geregelten Umgang mit Bezeichnungen für diese Unterscheidung, wobei sie wiederum diesen Umgang mit Bezeichnungen methodisch ausformt: Es wird eine explizite erste Unterscheidung getroffen. Hinsichtlich dieser Unterscheidung, genauer: hinsichtlich des durch die erste Unterscheidung Unterschiedenen, nämlich der beiden Zustände, nicht aber für die Grenze, werden verschiedene und insbesondere auch unterschiedene Zeichen etabliert und der Umgang mit diesen Zeichen konventionalisiert. Ein Symbol wirkt – in pucto seiner An- und auch Abwesenheit – als zwei Zeichen. Die beiden reinen Iterationsformen zuzüglich ihrer Mischformen liefern Symbolkombinationen als weitere Zeichen. Diese Zeichen werden auf ihre Äquivalenz hin

179 Die Mathematik wird hierbei personifiziert bzw. es bleibt ununterschieden, dass es vielleicht besser heißen sollte: *In* der Mathematik wird über Verschiedenheiten spezifisch hinweggegangen bzw. *Mathematiker* (zuzüglich Mathematiker*innen*) gehen auf spezifische Weise über Verschiedenheiten hinweg. Ich gehe davon aus, dass der geneigte Leser hierin nur Ausdruckvarianten sieht, also nur Verschiedenheiten und nicht Unterschiede von Relevanz.

untersucht, desweiteren werden Modifikationen an den Zeichen untersucht bezüglich ihrer Wertinvarianz oder auch Relevanz für das je Bezeichnete (Termumformungen in der Arithmetik und in der Algebra) und dieserart werden dann auch Modifikationen an Gleichungen untersucht, also ‚dieselbe' Modifikation an äquivalenten Termen (Gleichungsumformungen in der Algebra). Dafür werden wiederum im Erläuterungstext hinsichtlich der Zeichen systematisch Unterscheidungen getroffen, erprobt und beibehalten oder vernachlässigt.

Letztlich bleibt auch die *erste Unterscheidung* selbst, nämlich die in Chapter 2 (an-)getroffene *Raum*-Unterscheidung als Ganze, nicht allein und isoliert im Außerhalb der ausgreifenden Thematisierungs-Spirale stehen. Zwar sind zwischenzeitlich weitere Unterscheidungen (in der Zeichenebene) getroffen worden und ist insbesondere die Zeichenebene von der Sachebene verschieden, doch möchte ich erst im Hinblick auf Chapter 11 von der *zweiten Unterscheidung* sprechen, nämlich der dort getroffenen *Zeit*-Unterscheidung. Meiner Interpretation zufolge ist die zweite Unterscheidung nicht *in* der ersten Unterscheidung getroffen, insbesondere nicht *in* einem der beiden unterschiedenen Zustände. Sie muss auch nicht *in* der Zeichenebene getroffen sein: Die zweite Unterscheidung könnte stattdessen aus der einen Zeichenebene weitere Zeichenebenen generieren, eine Folge von Zeichenebenen. Mit anderen Worten: Berücksichtigt man neben der ersten Unterscheidung auch die zweite, so könnte man davon sprechen, dass ein und dasselbe Zeichen zu unterschiedlicher *Zeit* auch Unterschiedliches bezeichnet. Man betrachtet dann also Zeichen für Folgen von Zeichen (vgl. Turney, 1986).

Der Umgang mit Verschiedenem als Demselben oder als Unterschiedenem gilt der `LoF`-Mathematik also nicht nur als Tugend, sondern als Thema und es wird dieses Thema tugendhaft entfaltet und die Tugend thematisiert. Entwickelt wird eine Mathematik für das Rechnen mit bekannten Konstanten – wie in der gewöhnlichen Arithmetik – und mit unbekannten Konstanten – wie in der gewöhnlichen Algebra; in Chapter 11 kommt auch noch der Phänomenbereich einer Mathematik von Folgen und Funktionen in den Blick. Doch wird für diesen Phänomenbereich das Rechnen nicht mehr eigens entwickelt; vgl. (Hellerstein, 2010), Hellerstein (1997) und insbesondere (Kauffman und Varela, 1980).

Mit anderen Worten: Die `LoF` zeigen, wie sich das virtuose Spiel mit Verschiedenheiten hinsichtlich der Unterscheidung zwischen ihrem Gebrauch als Dasselbe und ihrem Gebrauch als Unterschiedenes entfaltet.[180] Die `LoF`-Mathematik ist ein virtuoses Sprachspiel, das den Mathematiker – das heißt zunächst den Autor und weiters den Leser als dessen Eleven – als den *magister ludi* zeigt. Doch ist die `LoF`-Mathematik kein `x`-beliebiges freies Spiel. Denn es *soll* die Rekonstruktion und damit Simulation des gewöhnlichen Zeichengebrauchs sein: Insbesondere werden Regeln der Logik als Gesetze des Zeichengebrauchs ersichtlich.

Dieses Mathematik-Spiel ist dahingehend nicht (nur) ein Spiel, das vom `LoF`-Autor

180 Es gilt auch hier, dass es vielleicht besser heißen sollte: Das Spiel wird entfaltet, wofür gewisse Unterscheidungen expliziert insbesondere als Kanons akzeptiert werden müssen.

als (konkretes) Individuum oder (subjektive) Person abhängig ist –, kein Spiel, das er in einem solchen Sinne erfunden hat (vgl. Brown, 1969, xx). Brown hat die LoF-Mathematik wohlgemerkt formuliert, doch spielt sie sich nicht nur in seiner *Vorstellung* ab, stattdessen reflektiert sie in der *Anschauung* eine gängige Praxis.

Verschiedenheit und LoF-Formelsprache In der *LoF-Formelsprache* sind bspw. im Hinblick auf die Reformulierung von Huntingtons erstem Postulatesystem (vgl. Kapitel 5) gewisse Unterscheidungen nicht getroffen. So gibt es in der Lesart von Schwartz (vgl. Kapitel 4) weder eine zweite 0-stellige noch eine zweite 2-stellige Operation. Einer alternativen Lesart gemäß mögen diese Unterscheidungen zwar auch in der LoF-Formelsprache getroffen sein, doch sind sie zum Verschwinden gebracht, indem das Bild einer Konstanten unter der 1-stelligen Operation und die andere Konstante durch dasselbe Zeichen und damit ununterscheidbar dargestellt werden.
Die Irrelevanz einer solchen Unterscheidbarkeit gilt allerdings nicht nur für das leere cross, sondern allgemeiner: In der LoF-Formelsprache kann, darf, soll jedes cross sowohl als *Anweisung zu kreuzen* („instruction to cross“) als auch als Indikator und damit als Name für den Zustand, in den das Kreuzen hinsichtlich des auf der Innenseite des cross angezeigten Zustands führt, gelesen werden. Ein solcher „name-with-instruction“ bzw. „instruction-with-name“ (Brown, 1969, 81) könne hinsichtlich eines mathematischen Sprachgebrauchs als ‚degenerated structure‘ oder hinsichtlich eines psychologischen Sprachgebrauchs als *condensed space* bezeichnet werden.

Verschiedenheit und LoF-Fachsprache Insbesondere in der Fachsprache wird von Brown eine „systematische Ambiguität“ in Anspruch genommen:

> Mit systematische Ambiguität „sind intendierte Mehrdeutigkeiten gemeint, durch die verschiedene und zum Teil auch gegenläufige Bedeutungen in einem gemeinsamen Vorläufer verdichtet sind.“ (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 68)

Im Kontext der zitierten Stelle wird darauf verweisen, dass der Ausdruck *Ambiguität* von Matthias Varga von Kib}ed stamme und für die vorgelegte Interpretation eine wichtige Rolle spiele. Dem möchte ich auch für meine Deutung zustimmen. Meines Erachtens ist in Kanon 5 von Ambiguität die Rede, insofern Brown darin die Erlaubnis zur *Explikation des Impliziten* formuliert und in (Brown, 1969, 81f.) die *Kondensation* nicht unterschiedener Bedeutungen in einem Zeichen eigens thematisiert. Die von Brown systematisch verwandte Ambiguität ist einer der Gründe dafür, dass es in der LoF-Sprache Implizites gibt. Um dafür ein erstes Beispiel zu nennen: In den Laws of Form bleibt oft systematisch ambig, ob eine Benennung einem Prozess oder seinem Resultat gilt; dies betrifft insbesondere die

Grundbegriffe bzw. -konzepte *Distinktion* und *Indikation*, deren durch „we cannot make an indication without drawing a distinction" (Brown, 1969, 1) angesprochenes Abhängigkeitsverhältnis gleichermaßen unspezifiziert bleibt (vgl. Kapitel 11.3). Als drittes Beispiel sei die bspw. in Chapter 2 sehr häufig auftretende Formulierung der Form „Let ... be ... " genannt, womit entweder nur die Erlaubnis gefordert oder das Geforderte auch schon verwirklicht sein könnte.
Brown selbst macht ebenfalls verschiedentlich darauf aufmerksam, dass unter ein und derselben Bezeichnung in `LoF` Verschiedenes geführt wird; dies betrifft insbesondere die mehrdeutigen Labels für Konsequenzen (vgl. Brown, 1969, 35–37). Ein weiterer Hinweis erfolgt im Hinblick auf die Schwierigkeit einer adäquaten Übersetzung des englischen Textes ins Deutsche:

> „Unter den europäischen Sprachen ist die deutsche einzigartig, weil sie die meisten verschiedenen Worte für Bedeutungsnuancen enthält, welche im Englischen durch ein und dasselbe Wort ausgedrückt werden, und der Unterschied dabei durch den Kontext festgelegt wird. Daher geht das, was ich das Irisieren englischer Worte nennen will – ihre Fähigkeit, jeden Augenblick die Farbe zu verändern, die unserer Prosa und Poesie solche Magie verleiht – im Deutschen verloren, wo für jedes Wort eine exakte Farbe gewählt und fixiert werden muß, welche nicht das ganze erforderliche Spektrum besitzen mag." (Brown, 1997, ix)

Dieses „Irisieren" bezieht sich m. E. nicht auf das verwendete Vokabular, sondern auf den von Brown gepflegten Stil, viele Partizipial-Konstruktionen zu verwenden. Sie werden zumeist als Relativsätze übersetzt, wodurch das Nomen und die Tätigkeitsform aktiv/passiv fixiert wird. Das ist bspw. insbesondere in der `LoF`-Formelsprache die irrelevante Reihenfolge in der Notation von arrangements innerhalb der sie beinhaltenden Räume. Das ist weiter die von Brown angezeigte gewöhnliche grammatikalische Unterscheidung nach aktiv und passiv: Jede Formulierung zeigt nur jeweils eine Seite dieser Unterscheidung, doch ist zumindest manchenorts die andere ununterschieden mitgemeint. Von Brown gewünscht ist also eine gewisse Deutungsoffenheit seiner Formulierungen (vgl. Brown, 1969, 84): Er diskutiert dort alternative Formulierungen für „Draw a distinction", das demnach ins Deutsch sowohl mit „Triff eine Distinktion." als auch mit „Triff eine Distinktion an." übersetzt werden darf. Es ist beides ununterschieden zugleich gemeint.
Obwohl also auch ich den Ausdruck der systematischen Ambiguität für richtig und wichtig halte und ihn in `LoF` selbst als explizit angesprochen erachte, einerseits im zitierten Hinweis auf Übersetzungsschwierigkeiten, andererseits im Zusammenhang mit Kanon 5, stimme ich mit (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 115f.) hinsichtlich der Interpretation von Kanon 5 nicht ganz überein. Denn Kanon 5 gilt nicht zuletzt für die `LoF`-Fachsprache, nicht nur für die `LoF`-Formelsprache, wie im Textkommentar m. E. behauptet wird.

Verschiedenheit und Methode – (Brown, 1969) Explizit zustimmen möchte ich dem in (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009) formulierten „Darstellungsschema“ für den Umgang mit Verschiedenheiten in LoF: Sie irisieren zwischen Unterschiedlichem und Demselben infolge von Unterscheidungen und Identifikationen.

> „Das Darstellungsschema, dem das Buch folgt, lässt sich als variierende Wiederholung folgender Etappen beschreiben, wobei manche Etappen oft nur implizit mitzudenken sind:
>
> (1) Positionierung oder Konstatierung einer Verschiedenheit beispielsweise durch die Verwendung unterschiedlicher Begriffe.
>
> (2 a) Gefolgt von einer Aufhebung der Differenz durch explizite Aufforderung, das Benannte (wieder) gleichzusetzen.
>
> (2 b) Gefolgt von einer Explizierung der eingeführten Unterscheidung durch eine Aufforderung, sie *nach-zu-machen*, oder durch eine Definition, die anschließend formalisiert wird.
>
> (3 a) Im Anschluß daran ergehen explizite Aufforderungen an den Leser, das Vorgeführte *gemäß aufgestellter Gesetze* oder *Regeln*, d.h. auch in der formalisierten Form, *zu verwenden.*
>
> (3 b) Formulierung von Regeln, bereits gemachte Unterscheidungen wieder einzuziehen, Unterschiede wieder aufzuheben.
>
> (4) Implizite Aufforderung an den Exegeten: *Schau, was alles entsteht* oder *entstehen kann, wenn es zur Verwendung kommt* und *wie und was sich dabei verändert* und *welche Unterschiede an welcher Stelle relevant sind.*
>
> (5) Auswahl, Benennung, Explizierung und Verwendung weiterer im jeweiligen Kontext relevanter Unterschiede.“ (Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 48)

Der letzte Punkt der Aufzählung entspricht gewissermaßen dem ersten und zeigt demnach eine Schließung des Schemas an. Selbstverständlich kann sich ein und dieselbe Stelle in einem Text hinsichtlich verschiedener Unterscheidungen in verschiedenen Etappen befinden.

Verschiedenes in einer Schlussbemerkung Mit Blick auf Kapitel 12.3 ist zu sagen, dass Browns Vorgehen in scharfem Kontrast zu Simons Beschreibung steht, insofern laut Simon in der Mathematik das Augenmerk auf den Zeichen im Vordergrund der Sachen und nicht auf den Sachen im Hintergrund der Zeichen liegt. Brown exploriert in Chapter 1 einige lebensweltliche *Begriffe* und bestimmt in Chapter 2 dem Indikationenkalkül eine *sachliche* Grundlage, eine *aboutness*, indem er die *Konstruktion* des in seiner Mathematik behandelten Gegenstandes mittels eines gewöhnlichen Sprachgebrauchs zu beschreiben versucht. Er *konventionalisiert*

dann gleichermaßen für seine Mathematik einen dezidierten Gebrauch von *Zeichen*, sowohl eine Fach- als auch eine Formelsprache. Brown geht dabei in beiden Fällen, nämlich hinsichtlich der Sach- und der Zeichenebene, seinem form-Begriff gemäß vor, der eine eigenwillige Kombination seines distinction- und indication-Begriffes ist, wobei m. E. alle drei Begriffe nur leicht variierte bzw. perspektivisch verzerrte Ansichten desselben sind. Ersteres nochmals genauer: Die Sachebene wird verlassen, sobald der form-Begriff definiert ist. Dabei ist die Sachebene der ausgefaltete form-Begriff –, wie er nach seiner Explikation als Sache und sachliche Grundlage der Bildung von Zeichen, die seinem Muster gemäß erfolgt, definiert wird.
Es ist allerdings eine ganz andere Frage, ob bzw. inwiefern dieser Versuch Browns gelingt, nämlich seine Mathematik mittels des gewöhnlichen, der Lebenswelt entnommenen Sprachgebrauchs – nach einigen Spezifikationen – präzise und unmissverständlich zu bestimmen. Insbesondere im Hinblick auf die Rezensions- und Rezeptionsgeschichte möchte ich behaupten, dass `LoF` nicht unmissverständlich ist bzw. nicht einhellig verstanden wird und dass zudem manche Frage der Exegese wohl nur durch den Geschmack bzw. die persönliche Vorliebe entschieden werden kann. Das mag insbesondere im Hinblick auf folgendes Anliegen Browns überraschen, so man die Verschiedenheiten nicht als gehaltlos betrachten kann, was glücklicherweise oft gelingt.

> „For in mathematics, as in other disciplines, the power of a system resides in its elegance (literally, its capacity to pick out or elect), which is achieved by condensing as much as is needed into as little as is needed, and so making that little as free from irrelevance (or from elaboration) as is allowed by the necessity of writing it out and reading it in with ease and without error." (Brown, 1969, 81)

Bemerkenswerterweise kann der Umgang mit strittigen Interpretationsfragen im Lichte der `LoF` betrachtet werden: Es kann als Konfliktvermeidungsstrategie erfahren werden, explizit Unterscheidungen zu treffen, welche die konkurrierenden, also verschieden markierten Interpretationen als ‚Zustände' liefern. Im Nachgang dazu gilt es dann zu klären, ob einer der beiden Zustände durch den Quelltext, also gewissermaßen intern, in entscheidendem Maße besser oder deutlicher markiert ist als der andere, oder ob zwischen den beiden Zuständen nur hinsichtlich anderer Motive wie bspw. persönlichen Vorlieben, also gewissermaßen extern, entschieden werden kann. Neben der expliziten Unterscheidung zwischen den beiden konkurrierenden Interpretationen ist es insbesondere die explizite Unterscheidung zwischen internen und externen Gründen – hinsichtlich der Entscheidung zwischen den Interpretationen –, die eine Konfliktvermeidungsstrategie bzw. Konfliktbewältigungsstrategie liefert.

Einheit versus Vielheit Der von Simon als „Platonismus" bezeichnete Blick auf Mathematik und auf Welt versucht eine Welterklärung nach dem Muster seines

Mathematikbildes: Der dieserart verstandene Platonismus „gebietet [.] Reduktion von Mannigfaltigkeit“ (Simon, 1989, 57), indem er „das Viele von einer ihm gemeinsamen Idee her versteht“ (Simon, 1989, 60) und einen gemeinsamen Grund unter- bzw. hinterstellt. Neben diese Sicht stellt Simon eine „Kritik am Platonismus“, die m. E. eine Kritik Simons am Platonismus ist:

> „Die Kritik am Platonismus [. . .] besteht darin, die Besonderheit des Spezialfalles [Mathematik; M.R.] zu verstehen. Sie führt den Kreis des Mathematischen auf das gewöhnliche Verstehen zurück. Hier führen Interpretationen von Zeichen zu Zeichen, *solange*, bis die Interpretation in einem unübersehbaren Kontext des Zeichenverstehens „unmittelbar“ verstanden wird. Darin ist das interpretierte Zeichen auf die Wirklichkeit bezogen. Die Referenz eines Zeichens auf die Wirklichkeit ist immer die *zur Zeit* gelungene, zu Ende gekommene Interpretation. „Wirklichkeitsbezug“ ist hier die Tatsache des sich zeigenden „unmittelbaren“ Verstehens, in dem Bedeutungen, Intensionen, nicht mehr gefragt sind.“ (Simon, 1998, 60)

Die ersten drei zitierten Sätze sind sehr dicht formuliert und schließen gedanklich direkt aneinander: Die im zweiten Satz angesprochene *Rückführung* ist genau die Ausführung des im ersten Satz angesprochenen *verstehen* und das „Hier“ des dritten Satzes bezieht sich auf „das gewöhnliche Verstehen“ des zweiten Satzes. Im Folgenden geht es dann – weit weniger dicht – um dieses gewöhnliche Verstehen, von dem das mathematische Verstehen ein Spezialfall ist: Die Interpretation eines Zeichens erfolgt hinsichtlich eines Kontextes des Zeichenverstehens, von dem es heißt, dass er „unübersehbar“ ist. Dabei kann „unübersehbar“ zweierlei bedeuten, nämlich hinreichend ‚auffällig‘ und hinreichend ‚ausgedehnt‘. Simons Pointe ist m. E. die folgende: Der Platonismus versteht das Viele von einer ihm gemeinsamen Idee her; sie ist das Gemeinsame im Hintergrund der jeweiligen Zeichen. Ein solcher Erklärungsansatz gelingt hinsichtlich der Mathematik und wird diesen extern ausweitend für die Welt versucht. Die Kritik am Platonismus nimmt bei einem Konzept des unmittelbaren Verstehens ihren Ausgang, nämlich des je zumindest vorläufig gelungenen Erklärens von Mathematik und von Welt, des Erklärens für sich und Andere. Im Lichte dieses Erklärungsansatzes, nämlich des Ausganges beim unmittelbaren Verstehen, wird ersichtlich, dass es auf den Hintergrund mathematischer Zeichen nicht ankommt, dass er ohne Relevanz ist: Er kann und darf leer bleiben, er kann und darf ontologisiert werden. Entscheidend ist, dass in der Mathematik wie in der Welt mit dem Verstehen der Zeichen die Frage nach ihrer Bedeutung verstummt. Für diese Kritik am Platonismus ist die Mathematik gewissermaßen ein Spiel, bei welchem virtuos an Fäden gezogen wird, ohne dass dabei in Betracht käme bzw. überhaupt von Belang wäre, ob an den Fäden eine Marionette hängt.
Den Prioritätenstreit zwischen dem Einen und dem Vielen gewinnt in der Mathematik demnach das Viele. Wohlgemerkt sind der Aussage bereits beide ‚Ideen‘ implizit, insofern einerseits von „der Mathematik“, also einer Ein-heit, die Rede ist, doch eben nur von der Mathematik als einem neben anderem, also einer Viel-heit.

12.3.3 Gedanken über Gleichungen

> „In der Mathematik steht das Gleichheitszeichen zwischen einem Zeichen und dem es interpretierenden Zeichen.“ (Simon, 1989, 56)

Das Thema, unter welchem Simon die Mathematik behandelt, ist ihr Umgang mit Demselben und Verschiedenem. Dazu gehört insbesondere ihre Verwendungsweise des Äquivalenz- alias Gleichheitszeichens.

> „Das mathematische Axiom, daß Gleichungen so gut von rechts nach links wie von links nach rechts zu lesen seien, bewirkt erst die Vorstellung von *einer* Interpretation von *Verschiedenem*. Außerhalb der Mathematik, und d. h. auch in aller Einführung in sie, geht der Weg immer zeitlich in der einen Richtung vom nicht „unmittelbar“ Verstandenen zu „seiner“ Interpretation. Es gilt das principium identitas indiscernibilium, aber die Ununterscheidbarkeit beruht auf dem Verstehen *als* dasselbe.“ (Simon, 1989, 58f.)

Vor dem Hintergrund dieser Einschätzung möchte ich nochmals Browns Umgang mit Gleichungen unter die Lupe nehmen.

Gleichungen und Schritte als Formen Im Hinblick auf das Thema der `LoF` als mathematischer Essay über Formen, übers Unterscheiden und Bezeichnen, über gewisse Grenzziehungen ist m. E. folgender Hinweis bemerkenswert: Gleichungen und step-Modifikationen sind selbst Formen in der *Zeichenebene*,[181] was Brown durch die Namensgebung bereits andeutet. Was hier also Form heißt, ist auch tatsächlich eine Form im Sinne der `LoF` (vgl. Brown, 1969, 1): Dabei heißt das erste Initial, die *number*-Gleichung, zunächst nur *form of condensation* und das zweite Initial, die *order*-Gleichung, zunächst nur *form of cancellation*. Gleichermaßen sind die vier Grundregeln alias Schritte Formen, ohne dass sie dies gleichermaßen im Namen tragen würden. Denn die Symbole $=$, $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ treffen eine Unterscheidung (drawing a distinction) in der Zeichenebene, insofern sie selbst Grenzen mit zwei getrennten Seiten (boundary with separate sides) sind und für einen Seitenwechsel gekreuzt (crossing the boundary) werden müssen. *Inhalt* (content) der beiden Seiten ist je ein Arrangement. Wohlgemerkt korrespondiert dem Wechsel in der Zeichenebene, nämlich zwischen den Seiten des Symbols, kein Wechsel in der Sachebene, nämlich zwischen den Zuständen als Seiten der ersten Unterscheidung (first distinction). Denn die beiden Arrangements, die durch das jeweilige Symbol korrekterweise *getrennt* und damit zugleich *verbunden* werden, sind äquivalent; mit anderen Worten: Sie haben denselben Wert bzw. sie zeigen denselben Zustand an.

---

181 Vgl. (Brown, 1969, 4): „Let there be a form distinct of the form.“ In die „a form“ werden dann *Zeichen* für *Sachen* in der „the form“ kopiert. Dementsprechend unterscheide ich – wie auch Brown durch sein „distinct“ – zwischen der sog. *Sachebene* und der sog. *Zeichenebene*.

Die für die Inhalte (Arrangements bzw. Expressionen) geforderte Wertverschiedenheit (differ in value) besteht also selbstredend nicht hinsichtlich des jeweils gleichermaßen angezeigten Zustandes, sondern eher in der Art und Weise der Anzeige. Ferner ist die geforderte Wertverschiedenheit *nicht nur* eine Angelegenheit der Geltung, *sondern auch* der Episteme und des Erkennen-, Wissen- und Sehen-*Wollens*, insofern der einschlägige Passus genauer betrachtet folgendermaßen lautet: „contents are seen to differ in value“ (Brown, 1969, 1). Genese und Geltung des Indikationenkalküls sind für Brown in `LoF` – so mein Interpretationsaugenmerk – gleichberechtigt und gehen miteinander Hand-in-Hand.
Das *Motiv* (motiv) für eine solche in der Zeichenebene erfolgende Unterscheidung mittels $=$, $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ ist daher im Allgemeinen genau der Hinweis auf eine – zumindest fragwürdige – Äquivalenz oder step-Modifikation. Man beachte zudem, dass durch die Definition des Indikationenkalküls in Chapter 3 zunächst nur step-Modifikationen zwischen *Arrangements*, nicht aber schon Wertäquivalenzen zwischen *Ausdrücken* gesehen werden können. Dies ändert sich erst im Kontext der Überlegungen und Untersuchungen in Chapter 4. Gegenstand des arithmetischen Kalküls sind *Arrangements*: Durch Theorem 1 zuzüglich Chapter 3 Kanon 4 werden sie als *Ausdrücke* erkannt. Die Ausdrücke sind im Wesentlichen der Gegenstand der image-Form der Primären Arithmetik: Durch die Theoreme 2, 3 und 4 wird die *Äquivalenz* als sinnvolle Relation zwischen Ausdrücken erkannt, nämlich als nicht-leere, doch echte Teilmenge der Menge von Paaren von Ausdrücken. Weiter wird die Äquivalenz, die in Chapter 2 als symmetrische Relation definiert ist, durch Theorem 5 als *reflexiv* und durch Theorem 7 gewissermaßen als transitiv erkannt, also insgesamt als *Äquivalenzrelation* auf der Paarmenge.
Interpretiert man dieserart Gleichungen als Unterscheidungen, nämlich das Äquivalenzzeichen als Grenze mit zwei Seiten, deren Inhalte – zumindest vordergründig – als verschieden in ihrem Wert gesehen werden, so handhabt man Gleichungen als *nicht-triviale* Hinweise auf Äquivalenzen. Und wohlgemerkt ist für Brown auch die Gleichung $x = x$ mit x als arithmetischem Ausdruck nichttrivial, denn er beweist sie als Theorem 5.

Eine Analyse von Theorem (und Beweis) 5 Für Brown ist die Äquivalenz zwischen x und x, also die Reflexivität dieser Relation, tatsächlich eines Theorems zuzüglich Beweises würdig:

> „**Theorem 5. Identity**
> *Identical expressions express the same value.*
> In any case, ‚$x = x$‘.“ (Brown, 1969, 20)

Doch soll nicht nur das Theorem, sondern auch sein Beweis interessieren. Browns Argument ist recht einfach und lautet im Wesentlichen folgendermaßen: Jede step-Modifikation von x ist zu x äquivalent, da Theorem 3 und 4 den Wert als

invariant unter (endlich vielen) Schritten erweisen; x selbst kann allerdings als step-Modifikation von x betrachtet werden, nämlich bspw. als Modifikation mittels zweier Schritte der gleichen Art (kind), doch verschiedener Richtung (direction); kurz: Es ist x zu x äquivalent.
Dass Brown diese Aussage als *Theorem* verwendet und für sie einen *Beweis* liefern kann, darauf wird in (Brown, 2008) nochmals eigens hingewiesen – in einer Fußnote, die am Ende des Beweises platziert und mit einem Zeitstempel versehen ist:

> „Previous authors had to take $x = x$ as axiomatic. I am the first author to prove it from his axioms. – Author, 2000 06 27.“ (Brown, 2008, 17)

Meines Erachtens formuliert Brown in offensichtlicher Weise einen Prioritätsanspruch bezüglich der Idee, die Äquivalenz hinsichtlich der Identität als beweisbar zu behaupten und zu erweisen, und sieht darin ein Alleinstellungsmerkmal seines Kalküls.
Pointiert formuliert: Indem die Äquivalenz zwischen $\urcorner\urcorner$ und $\urcorner$ sowie die Äquivalenz zwischen $\overline{\urcorner|}$ und   vereinbart wird, also zwei Gleichungen zwischen vier paarweise verschiedenen Arrangements akzeptiert werden, ist für jedes Arrangement a des arithmetischen Kalküls – unter den expliziten und impliziten Voraussetzungen von Theorem 1 – die Gleichung $a = a$ beweisbar; da gemäß Theorem 1 jedes arithmetische Arrangement als arithmetischer Ausdruck betrachtet werden kann, ist damit die Gleichung $x = x$ für jede Substitution von x durch einen arithmetischen Ausdruck e bewiesen.

Eine Analyse von Theorem (und Beweis) 6 und 7 Im Hinblick auf Theorem 6 können nicht nur die *Ausdrücke* (expressions), sondern auch die *Äquivalenzklassen* der Ausdrücke als ein Gegenstand der Primären Arithmetik (image) betrachtet werden, denn auf den Vertreter (des Wertes) kommt es im Einzelnen nicht an.

> „**Theorem 6. Value**
> *Expressions of the same value can be identified.*“ (Brown, 1969, 20)

Diesem Theorem gemäß ist Wert (value) das Identifikationskriterium für Ausdrücke (vgl. Schönwälder-Kuntze u. a., 2009, 127) und es braucht die Verschiedenheit der Wert-Anzeige in der Primären Arithmetik (image) also nicht berücksichtigt zu werden. Doch soll nicht nur das Theorem, sondern auch sein Beweis interessieren. Browns Argument ist recht einfach und lautet im Wesentlichen folgendermaßen: Dass zwei Ausdrücke x und y, die beide zum einfachen Ausdruck e_s äquivalent sind, miteinander identifiziert werden können (can be identified), wird bewiesen, insofern gerechtfertigt wird, dass x und y gleichermaßen durch einen – beliebigen unter den ebenfalls zu e_s äquivalenten – identischen Ausdruck v ausgetauscht werden dürfen (may be changed for an identical expression v). Diese Rechtfertigung erfolgt, indem daran erinnert wird, dass durch die substitutions-Konvention (Chapter 3

Kanon 6) erlaubt ist, zunächst sowohl $\mathfrak{x}$ als auch $\mathfrak{y}$ schrittweise zu $\mathfrak{e}_s$ zu vereinfachen und anschließend beide $\mathfrak{e}_s$ in $\mathfrak{v}$ zurückverwandelt werden, indem jeweils die Vereinfachung von $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{e}_s$ rückgängig gemacht wird; kurz: Der Beweis zeigt, dass die beiden Ausdrücke durch ein-und-denselben Ausdruck ausgetauscht werden *dürfen*, und zudem, wie der Austausch für gegebene arithmetische Ausdrücke $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{v}$ im Prinzip Schritt für Schritt vonstatten gehen *kann*.
Ein Zwischenstand in dieser Argumentation lautet „Thus $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}$ and $\mathfrak{y} = \mathfrak{v}$.“, womit eine Gleichung – gewissermaßen die erste ihrer Art – zwischen verschiedenen arithmetischen Ausdrücken formuliert ist, von denen keiner ein einfacher Ausdruck ist. Das Gleichungssystem symbolisiert, dass $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gleichermaßen zu einem beliebigen Ausdruck $\mathfrak{v}$ äquivalent sind, der selbst zu dem einfachen Ausdruch $\mathfrak{e}_s$ äquivalent ist, zu dem auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ äquivalent sind. Wohlgemerkt können die Theoreme 5 und 7 demnach als Korollare des Beweises zu Theorem 6 betrachtet werden, denn durch die durchaus mögliche Wahl von $\mathfrak{v}$ als $\mathfrak{y}$ ist insbesondere $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}$ bewiesen, wobei letzteres eine durchaus beliebige Instanz von Theorem 5 wäre und ersteres tatsächlich die Behauptung von Theorem 7 ist. Brown dagegen beweist die Theoreme 5 und 7 anders, nämlich eigens. Für Theorem 5 ist das bereits gezeigt, für Theorem 7 wird das nun behandelt. Das Gleichungssystem $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{v}$, das im Beweis von Theorem 6 betrachtet wird, wird von Brown allerdings als die symbolisierte Voraussetzung von Theorem 7 verwendet:

> „**Theorem 7. Consequence**
> *Expressions equivalent to an identical expression are equivalent to one another.*
> In any case, if ‚$\mathfrak{x} = \mathfrak{v}$‘ and ‚$\mathfrak{y} = \mathfrak{v}$‘, then ‚$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$‘.“ (Brown, 1969, 21)

Die Argumentation im Beweis von Theorem 6, das heißt die Rechtfertigung der Behauptung von Theorem 6 vor dem Hintergrund der Voraussetzung von Theorem 6, führt also auf einen Sachverhalt, der in Theorem 7 zu einem eigenen Thema wird. Doch beachte man, dass der Blickwinkel in der Voraussetzung von Theorem 7 (Expressions equivalent to an identical expression) allgemeiner ist als der in der Voraussetzung von Theorem 6 (Expressions of the same value): So werden letzterenfalls die beiden Ausdrücke über ihren selben Wert bzw. über ein-und-denselben *einfachen* Ausdruck $\mathfrak{e}_s$ gekoppelt, ersterenfalls lediglich über *variablen* (alias unbestimmten) Ausdruck $\mathfrak{v}$, zu dem sie beide äquivalent sind. Doch soll nicht nur das Theorem, sondern auch sein Beweis interessieren. Browns Argument ist recht einfach und es ist insbesondere recht gut mit dem für Theorem 6 zu vergleichen. Denn der Unterschied in der Argumentation ist gewissermaßen die Blickrichtung. Ging es im Beweis von Theorem 6 darum, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in das gleiche $\mathfrak{v}$ zu transformieren, so geht es im Beweis von Theorem 7 darum, $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{y}$ zu transformieren – mittels eines gewissen $\mathfrak{v}$. Für die Rechtfertigung der Behauptung wird diesmal daran erinnert, dass nach Voraussetzung $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch elementare Schritte (steps) zu genau dem einfachen Ausdruck vereinfacht werden können, zu dem auch $\mathfrak{v}$ vereinfacht werden kann. Die Vereinfachung von $\mathfrak{x}$ zuzüglich der Umkehrung der Vereinfachung von $\mathfrak{y}$

ist dann eine Transformation von x in y.
Inwiefern nach Voraussetzung x und y durch elementare Schritte (steps) zu genau dem einfachen Ausdruck vereinfacht werden können, zu dem auch ν vereinfacht werden kann, wird als keiner weiteren Rechtfertigung wert erachtet. Eine Rechtfertigung könnte die Angelegenheit folgendermaßen explizieren: Der Gleichung $x = \nu$ gemäß sind die Ausdrücke x und ν zueinander äquivalent, also Ausdrücke desselben Werts. Gemäß Theorem 1 und 3 können beide Ausdrücke auf jeweils genau einen einfachen Ausdruck vereinfacht werden und das ist dann gemäß Theorem 4 derselbe einfache Ausdruck, weil x und ν sonst Ausdrücke verschiedenen Werts, also nicht äquivalent wären. Diese Argumentation umfasst also direkte und indirekte Schlüsse.

Die Theoreme 6 und 7 sind – wie auch die Theoreme 1 und 16 – im „Index of Forms" (vgl. Brown, 1969, 138–141) mit einem Stern $*$ markiert und haben demgemäß laut Brown eine wahre Konversion: „A theorem marked with an asterisk has a true converse." (Brown, 1969, 138–141). In `LoF` und auch in der Sekundärliteratur kenne ich keine Stelle, die diesen Sachverhalt bzw. den Begriff *Konversion* (converse) für den Indikationenkalkül näher expliziert. Meines Erachtens kann Theorem 5 als die gemeinte wahre Konversion von Theorem 6 und Theorem 6 als die gemeinte wahre Konversion von Theorem 7 verstanden werden.[182]

Eine Reflexion auf Theorem 6 Sind *Arrangements* nicht nur als *Ausdrücke* erkannt, sondern ist auch der jeweils ausgedrückte *Wert* erkennbar, so brauchen die Symbole $=$, $\rightharpoonup$ und $\leftharpoondown$ in der Zeichenebene nicht mehr als Unterscheidungen verwendet zu werden: Das eine Zeichen, bspw. das auf der linken Seite, ist so gut wie das andere, im Beispiel dann das auf der rechten Seite, und es ist – nach Simon – überhaupt nur noch ein-und-dasselbe Zeichen.

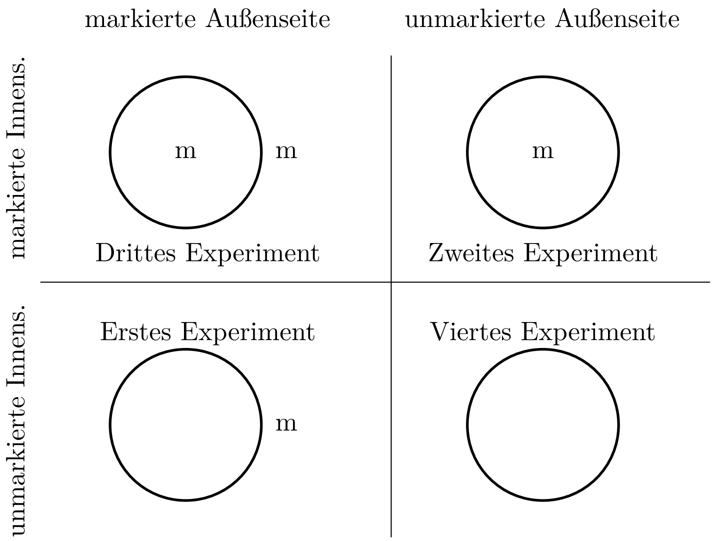
> „Identität ist eine Bestimmung des als identisch Gesetzten, der gesetzten Relation eines Zeichens zu „seiner" Bedeutung (bzw. zwischen Zeichen, die „dasselbe" bedeuten sollen." (Simon, 1989, 102)

Bei einer gültigen Gleichung steht, für Brown und für Simon, das Äquivalenzzeichen zwischen Zeichen, die dasselbe bedeuten, genauer: Wird die Gültigkeit einer Gleichung behauptet, so wird behauptet, dass die beiden durch das Äquivalenzzeichen getrennten Zeichen dasselbe bedeuten bzw. so gelesen werden sollen.
Ob das Zeichen ein *Arrangement*, *Ausdruck* oder *Wert* ist, das ist eine Frage der

182 Die (oder eine) gemeinte wahre Konversion von Theorem 16, „If expressions are equivalent in every case of one variable, they are equivalent", könnte sein: Wenn Ausdrücke äquivalent sind, dann sind jeweils ihre Instanzen für eine Variable äquivalent. – Die (oder eine) gemeinte wahre Konversion von Theorem 1, „The form of any cardinal number of crosses can be taken as the form of an expression.", könnte sein: Die Form eines Ausdrucks kann als die Form jeder endlichen Zahl von Kreuzen aufgefasst werden.

Lesart. Und es ist der mathematische Zeichengebrauch, in welchem *virtuos* zwischen Zeichen, zwischen Bedeutungen (als vollkommen verstandenen Zeichen), zwischen Zeichen und ihren Bedeutungen sowie Sachen hin-und-her gewechselt werden *kann* und die Unterscheidung zwischen einem Zeichen und seiner Bedeutung sowie Sache selbst unterlaufen werden *darf*. Verschiedenheiten gelegentlich zu beachten, gelegentlich zu missachten und dahingehend – in geeigneter Weise sowie in jeweils doppeltem Sinne – zu *übersehen* und *aufzuheben*, ist *die* Kunst und Tugend in der Mathematik.

Skizze einer Analyse von Chapter 12 In Chapter 12 experimentiert Brown mit einer circle-Notation für zwei Werte: nämlich ein oder kein Kreis in einer Ebene (vgl. Rathgeb, 2016). Ein Kreis in einer Ebene vermag zweifach gelesen zu werden: einerseits *markiert* der Kreis die Ebene, andererseits *distinguiert* er in der Ebene. Brown unternimmt nacheinander vier Experimente. Jedes nimmt seinen Ausgang bei einem distinguierenden Kreis in einer ansonsten leeren Ebene. Demnach gibt es eine Außen- und eine Innenseite des Kreises in der Ebene. In der jeweils zweiten Phase werden Markierungen gesetzt. Folgende Tabelle zeigt die vier Zwischenergebnisse auf einen Blick und verdeutlicht so, dass Brown im Stile einer Vierfeldertafel die Unterscheidung, die der Kreis in der Ebene trifft, mit der Unterscheidung markiert/unmarkiert kreuzt. Dies soll heißen: Er setzt auf Außen- und Innenseite eine Markierung oder nicht.



In der jeweils dritten Phase lässt Brown die vorhandenen m-Markierungen Kreise sein. Er ersetzt also die vorhandenen m-Markierungen durch jeweils einen Kreis, wodurch vier circle-Arrangements entstehen, die aus ein, zwei oder drei Kreisen bestehen. In der vierten und damit letzten Phase sollen die Arrangements als Ausdrücke gelesen werden. Dafür bestimmt Brown ihnen jeweils einen bzw. *ihren* Wert. Im ersten, dritten und vierten Experiment ergibt sich als Wert *ein* Kreis, im zweiten Experiment dagegen *kein* Kreis. Ich möchte diesbezüglich anmerken, dass ich die Zuweisungen einerseits für durchaus plausibel halte, insofern sie konsistent sind, sie aber andererseits nicht als zwingend erachte. Da ist kein Zwang gegeben, der nicht erst durch die Festlegungen selbst vereinbart wird. Diesen vier Bestimmungen/Festlegungen gemäß entspricht dem Kalkül für cross-Indikatoren gewissermaßen ein Kalkül für circle-Indikatoren, wobei das erste Experiment ein Pendant zur condensations-Form liefert und das zweite Experiment ein Pendant zur cancellations-Form. Sympathisch ist mir dabei folgender Hinweis Browns:

> „We may also note that the sides of each distinction experimentally drawn have two kinds of reference.
> The first, or explizit, reference is to the value of a side, according to how it is marked.
> The second, or implicit, reference is to an outside observer. That is to say, the outside is the side from which a distinction is supposed to be seen." (Brown, 1969, 69)

Ein äußerer Beobachter kann sich der expliziten Definition des impliziten Bezuges gemäß durchaus auf der Innenseite eines Kreises befinden. Doch hat das Verwechslungszeichen = m. E. als eine Markierung zu gelten. Es markiert den Raum, in dem sich der Beobachter befindet, also den Raum, der bezüglich der zu betrachtenden Unterscheidung als außen gilt und dessen Wert zu bestimmen ist. Vgl. dazu bereits den Hinweis in Chapter 8:

> „In evaluating e we imagine ourselves in s_0 with $\mathsf{e}[.]$" (Brown, 1969, 42)

Die Innenseite eines Kreises ist dann außen bzw. das Außen, falls *dort* nach dem Wert gefragt wird, falls dort bspw. das Symbol = notiert ist und auch dort die Antwort zu geben bzw. zu notieren ist. Insbesondere gilt nach Experiment 4, dass ein leerer Kreis, der in einer (ansonsten leeren) Papierebene eine Unterscheidung trifft, dabei seine eigene Außenseite markiert. Den Vereinbarungen in Chapter 2 gemäß dürfen dann also Kopien des Kreises, der zugleich Marke seiner Außenseite ist, als Zeichen für selbige fungieren. Wird dagegen der Kreis nicht als Unterscheidung in der Ebene, sondern nur als Marke der Ebene gelesen, so ist er ein Zeichen für die Ebene und nicht für seine Außenseite; die Ebene ist dabei durch eine (andere) Unterscheidung von allem anderen im Raum abgespalten (cleaved): „[W]e cannot make an indication without drawing a distinction." (Brown, 1969, 1). Ein Kreis in einer Ebene kann demnach wahlweise als Markierung der Ebene bzw. seiner Außenseite in der Ebene gelesen werden und seine Kopien entsprechend als Indikatoren der Ebene bzw. der Außenseite. Ferner kann er als Unterscheidung gelesen werden. Das ist nicht weiter verwirrend oder problematisch, wie Simon allgemein für Zeichen kurz und treffend formuliert:

> „Aber die Lesart *erkennt* erst das Zeichen. Sie bewirkt auch die Frage nach der Bedeutung als nach einer nicht beliebigen Antwort. Ein von der Art des Verstehens abgetrenntes Zeichen existiert nicht." (Simon, 1989, 61)

Browns Kreis in einer Ebene illustriert also dem aufmerksamen Beobachter, dass es die Lesart ist, die aus dem Arrangement einen Ausdruck oder einen Wert macht. Entscheidend ist, wie wir lesen. In diesem Sinne können wir aus Browns Experimenten mit Kreisen tatsächlich einiges über das Rechnen – mit Kreuzen, Kreisen und anderem – und das Beweisen, also kurz: über Mathematik, lernen – so wir sie geeignet lesen.

Skizze einer Reflexion auf Chapter 12 Meine These lautet: Der Kreis in einer Ebene ist Sinnbild für den distinction-Begriff, der die Entweder-Oder-Unterscheidung ist. Die Seiten der unterscheidenden Grenze stehen für das Entweder und das Oder. Und es gehören das Entweder und das Oder zusammen wie die Seiten der Grenze. Dementsprechend ist für Beweise mittels Fallunterscheidung entscheidend, dass nicht nur die beiden Teile (nämlich die Seiten) einer Einheit (nämlich die Ebene) je einzeln untersucht werden können, sondern dass dabei ihr Zusammenhang nicht vergessen wird; das ist und leistet die Grenze. Sie fungiert trennend und verbindend zugleich. Beweise mittels Fallunterscheidung verlangen demnach eine geeignete *Analyse* sowie eine gelingende *Synthese*. Wir sind bei solchen Beweisen also auf ein *synthetisches Element* wie die gemeinsame Grenze angewiesen, insofern wir aus dem Zutreffen der Hypothese für jede Seite einzeln auf ihr Zutreffen insgesamt schließen wollen. Und wir sind weiter darauf angewiesen, dass auch der Beweis-Rezipient, diese Synthese leistet. Der Kreis in einer Ebene kann auch als form-Begriff gelesen werden. Dabei ist dann betont, dass auf die beiden Seiten einzeln Bezug genommen werden kann, dass also von der einen und von der anderen Seite gesprochen werden kann und dabei geklärt ist, welche jeweils gemeint ist. Es sind nicht einfach nur *zwei* Seiten, sondern die einzelnen Seiten sind einzeln ausweisbar. Man spricht diesbezüglich oft von *asymmetrischen* Unterscheidungen. Kommen wir nochmals auf die These zurück und stellen also die Fragen: Welche Bedingungen ermöglichen die Beweise der Theoreme? Weshalb vertraut Brown in seinem mathematikphilosophisch anspruchsvollen Ansatz auf die umstrittene Methode des Beweisens mittels Fallunterscheidung (vgl. Kapitel 11.5.3)? Meine Antwort lautet: Browns distinction-Begriff (perfect continence) ist bzw. liefert just das Konzept der Fallunterscheidung, nämlich die Entweder-Oder-Unterscheidung, bei welcher der *Zusammenhang* des Unterschiedenen *vollzogen* wird. Diesen souveränen Umgang des Beobachters mit markierenden Unterscheidungen und mit Bezeichnungen, die selbst als Unterscheidungen fungieren, sowie den souveränen

Gebrauch von impliziten und von expliziten Bezügen (vgl. S. 290) verdeutlicht Brown nochmals in Chapter 12. Dieses distinction-Konzept ist der Ausgangspunkt von Browns Mathematik – in *Inhalt* (vgl. Kapitel 11.3) und *Methode* (vgl. S. 281). Und daher gilt dem Begriffsgeflecht von Unterscheidung, Markierung, Bezeichnung und Beobachtung auch das *methodologische Interesse* des Werks Laws of Form.

Schlussreflexion Der Indikationenkalkül mag bestimmte Anschauungen – zumindest einzelne Vorstellungen – hinsichtlich der Begriffe *Unterscheidung*, *Bezeichnung* und *Form* illustrieren und in einer ihm zugänglichen Form behandeln. Damit ist aber kaum mehr als seine Möglichkeit und die Möglichkeit seiner Begriffsexplikation erwiesen. Die Mathematik mit ihren Definitionen, Regeln, Theoremen (zuzüglich Beweisen) und Konsequenzen (zuzüglich Demonstrationen), aber auch mit ihren triftigen Vermutungen und einzelnen Beispielen, kann bestenfalls stichhaltige Denkmöglichkeiten erweisen, nicht aber die Wahrheit über die Wirklichkeit aufweisen. Mit dieser Aussage wage ich wohlgemerkt einen kleinen Widerspruch gegenüber Brown (vgl. Brown, 1969, vf., xvii). Die Laws of Form zeigen nicht, wie die Wirklichkeit ist –, höchstens wie wir sie behandeln. Sie zeigen einen form-Begriff, der manchem als Werkzeug für Wirklichkeitsbewältigung und Weltkonstitution dient. Ob und inwieweit Browns form-Begriff dazu taugt, das ist in `LoF` nicht ewiesen. Um es mit (Rotman, 2000b) zu sagen: Der Mathematiker kritzelt und denkt, wenn er die Laws of Form liest. Doch eine wie auch immer zu `LoF` passende Weltdeutung ist nicht allein deswegen schon als gültig bewiesen. *Interne Stimmigkeit darf mit externer Adäquatheit nicht verwechselt werden.* So musste für die Primäre Algebra eigens erwiesen werden, ob ihre Theoreme zudem Konsequenzen sind und ob umgekehrt die Konsequenzen auch Theoreme sind.
Daran knüpfen werde ich vor dem Hintergrund eines Beispiels eine anthropologische und methodologische Bemerkung. Die philosophischen „Meditationen über die Grundlagen der Philosophie“ (1641) von René Descartes haben zur Selbstbestimmung des Menschen als ausschließlich denkendes bzw. zweifelndes Wesen geführt: *Cogitans sum.* Descartes’ Methode war streng durchgeführt und führte durch Selbstthematisierung auf die skizzierte Einsicht –, die aber strikt einseitig ist. Die mathematischen Erörterungen von George Spencer Brown, insbesondere Chapter 12 im Hinblick auf Chapter 2, führen zur Selbsterkenntnis des Menschen als beobachtendes Wesen. Auch diese Selbstbestimmung des Menschen verkürzt ihn und darf nicht anthropologisch überzogen werden: Sie fokussiert die „maskuline Seite“ (Brown, 2007, 93) des Menschen. Die Methode des Beobachtens lieferte dem Beobachter die Einsicht in sein Agieren, *dieser* Inhalt zeigt sich der Methode, doch erweist sie sich dadurch nicht schon als untrüglich. Schließen wir mit folgender Einsicht. Der Mensch ist (nicht nur) ein *observing-being* mit der Losung:

I am distinguishing and indicating. I’m an observer.

Teil IV

EPILOG – Browns Nussschalenmathematik
Ein mathematisch-philosophischer Sonderweg

Kapitel 13

Schluss. Zeichenlesen im Rückblick und Ausblick

> „Alle Interpretation, die zum Schluß kommt als zu der Feststellung, was *sei*, ist in diesem Sinne pragmatisch begründet. Wenn „keine Zeit“ mehr ist für das Erwägen der Meinungen innerhalb eigener Überlegungen oder auch zwischen den Meinungen verschiedener Personen, dann und nur dann – und nicht etwa an einem endgültigen Ende aller Überlegungen, verstanden als definitiver *Begriff von Sachen selbst* – schlägt die Freiheit der Meinung und damit der subjektive Vorbehalt gegenüber der Festlegung in *einer* Interpretation in das subjektiv gewisse Urteil um, „was“ etwas *sei*. Das Urteil optiert für den Augenblick ontologisch.“ (Simon, 1989, 284)

George Spencer Brown betont im „Vorwort zur Ausgabe von 1979“, dass *Laws of Form* „ein Textbuch der Mathematik ist, keines der Logik oder Philosophie, obgleich sowohl Logik als auch Philosophie natürlich von seiner Anwendung Nutzen ziehen können“ (Brown, 1999, xix). Das mag nicht weiter verwundern, immerhin war das Anliegen des Buches schon zehn Jahre folgendermaßen spezifiziert:

> „A principial intention of this essay is to separate what are known as algebras of logic from the subjec of logic, and to re-align them with mathematics.“ (Brown, 1969, xi)

Die vorstehenden Kapitel dieser Arbeit haben gezeigt, dass die Laws of Form tatsächlich als *Textbuch der Mathematik* gelesen werden können. Denn in dem Buch werden wesentliche Stationen mathematischen Handelns durchlaufen: das Rechnen mit *Konstanten* ab Chapter 3, das Rechnen mit Konstanten und *Variablen* ab Chapter 5 sowie das Rechnen mit *Funktionen* in Chapter 8 und 11. Die verwendete Sprache umfasst zunächst nur Terme und Modifikationen von Termen, später auch Gleichungen und Modifikationen von Gleichungen in arithmetischen, algebraischen, geometrischen Zeichen. Dabei sind die Gleichungen von Chapter 6 bis 10 allesamt allgemeingültig bezüglich der Primären Algebra. In Chapter 11 wird dann der Prototyp einer Gleichung betrachtet, die nicht allgemeingültig und zudem nicht lösbar ist. Nachfolgend werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, solche Gleichungen zu notieren und ihnen auch noch eine Lösung zuzuweisen. Dabei wird Browns Mathematik also über für sie zunächst bestehende Grenzen hinaus erweitert und das wird insgesamt betrachtet durchaus mehrfach praktiziert: im Entstehen der ersten Form; durch den Wechsel von der ersten Form zu einer anderen Form; im Übergang von ersten Referenzformen zu einem arithmetischen Kalkulationssystem; durch den Wechsel von der Arithmetik in content-Form zu ihrer image-Form; im Übergang von der Arithmetik zur Algebra; durch den Wechsel von der Algebra in content-Form zu ihrer image-Form; im Übergang zu einer Gesamtschau von Algebra und Arithmetik; durch den angedeuteten Wechsel in eine Algebra, deren Terrain arithmetisch noch nicht erschlossen war. Die Laws of Form sind dahingehend *Mathematik in nuce*.

Anders als Ludwig Wittgenstein mit seiner logisch-philosophischen Abhandlung, deren Titel er vor Drucklegung noch latinisierte, will George Spencer Brown mit den Laws of Form weder ein Textbuch der Logik noch der Philosophie, sondern der Mathematik vorgelegt haben, „obgleich sowohl Logik als auch Philosophie natürlich von seiner Anwendung Nutzen ziehen können“ (Brown, 1999, xix). Tatsächlich kann und wird sein Text, genauer: der form-, distinction- bzw. observer-Begriff, durchaus als Ausgangspunkt philosophischen, logischen, auch soziologischen Denkens genutzt. Doch habe ich wohlgemerkt bereits als Ende von Kapitel 10 mein ceterum censeo formuliert, dass die Laws of Form nur schwerlich adäquat erfasst sind, so der Interpret und Nutzer seinen Blick nicht an den im engeren Sinne mathematischen Ausführungen geschult hat. Die Mathematik ist der Zweck der durchaus philosophisch zu nennenden Begriffe Browns und just in Browns *mathematischen* Ausführungen erweist sich ihr angestammter Gebrauch.

> „We cannot fully understand the beginning of anything until we see the end.“
> (Brown, 1969, 79)

Erst anhand der dortigen Zeichen, kann den normalsprachlich klingenden Wörtern streng und exakt auf den Mund geschaut bzw. hinter sie geblickt werden.

Browns Laws of Form, das meint den Text, seine Mathematik im Allgemeinen und seinen Indikationenkalkül im Speziellen, sind *anders*, als man es heutzutage von einem Mathematikbuch und Mathematik erwartet. Das liegt insbesondere an dem explizit gesetzten Anfang, der in Teilen über alternative diagrammatische Grundlegungsprojekte hinausgeht, also an den komplexen Begriffsapparat in Chapter 1, den semiotischen Konstruktionen in Chapter 2, bei welchen Syntax, Semantik und Pragmatik produktiv miteinander verquickt werden. Ebenso liegt es daran, dass in den Laws of Form Inhalt und Methode durchwegs aufeinander bezogen sind, insbesondere zum Zwecke methodologischer *Selbstvergewisserung*. Und das liegt weiter an der extremen Form einer ideographischen Notation, welche geometrische (genauer: topologische) Eigenschaften der arithmetischen Zeichen (mit-)nutzt.
Dabei legt Brown hinsichtlich einer Unterscheidung einen Kalkül für Bezeichnungen

vor und thematisiert dafür die Bezeichnungen als Unterscheidungen. Vom empraktischen Wissen übers Unterscheiden und Bezeichnen wird der Leser in ein elegantes Rechnen mit logischen Werten eingeführt und wieder zurückgeführt zur kritischen Reflexion von Unterscheiden und Bezeichnen. Auf diesem *Sonderweg* zu einer *Nussschalenmathematik* wird der Leser mathematisch-philosophisch sozialisiert und gewinnt der Anfang des Buches durch das Ende an Kontur. Das Werk ist eine *Einführung* in und *Grundlegung* von Mathematik, das mathematisch-philosophische Laien und Profis gleichermaßen (nicht zuletzt: hermeneutisch) herausfordert, fasziniert und bereichert. Wem die Laws of Form als Phänomen entgegenstehen und wer dieses Phänomen in verschiedenen Aspekten zu verstehen und in den Griff zu bekommen versucht, der kann verschiedene Vergleiche mit etablierter Mathematik ziehen und dafür zu verschiedenen Optiken greifen.

Meine Forschungsfrage nach dem rechten Ort von George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie habe ich in drei Aspekten entfaltet, um den systematischen Zusammenhang der konzeptionellen Einzelheiten mehrfach und verschiedentlich zu verdeutlichen.

(1) GEHALT – Was ist der Indikationenkalkül?
Die Laws of Form im mathematischen, das Produkt spezifizierenden Diskurs: *Mathematik als Struktur*

(2) GENESE – Wie entsteht der Indikationenkalkül?
Die Laws of Form im linguistischen, den Prozess fokussierenden Diskurs: *Mathematik als Tätigkeit*

(3) GELTUNG – Inwiefern ist Browns Mathematik reflektiert?
Die Laws of Form im philosophischen, auf ihren Sinn bezogenen Diskurs: *Spiegelungen der Mathematik*

Den ersten beiden Fragen galten, von zwei Zwischenbemerkungen abgesehen, insgesamt vier Erklärungsansätze, je zwei pro Frage. Die ersten drei Erklärungen erfolgten *top-down* und setzten dafür jeweils bei Browns Primärer Algebra an, also in Chapter 5; die vierte Erklärung erfolgte dann *bottom-up* und setzte dafür bei Browns Primärer Arithmetik an, also in Chapter 3.

(a) Das war zunächst in Kapitel 4 Daniel Schwartz' Vorschlag einer an formalen Systemen orientierten, vorwiegend syntaktischen Lesart der Primären Algebra im Stile der *Beweistheorie*.

(b) Das war dann in Kapitel 5 mein Vorschlag einer stärker semantisch orientierten, doch streng syntaktisch durchgeführten Lesart der Primären Algebra im Stile der *Gleichungslogik*.

(c) Das war weiter in Kapitel 7 mein Vorschlag einer an der arithmetischen Verwurzelung der Primären Algebra interessierten und nach ihr grabenden, naiven Lesart im Stile der *Schulmathematik*.

(d) Das war zuletzt in Kapitel 8 mein Vorschlag einer die Ertüchtigung des Indikationenkalküls fokussierenden Lesart im Stile von Kvasz' *linguistischer* Mathematikphilosophie.

Die ersten beiden Zugänge gaben – um es pointiert zu sagen – *unsere* Antworten auf *unsere* Fragen zur `LoF`-Mathematik wieder: Ist in den Laws of Form eine Algebra wohldefiniert? Ist sie unabhängig und in welchem Sinne vollständig axiomatisiert? Wie lautet ihr arithmetisches Fragment? etc. Der dritte Zugang zeigte genauer, wie Brown selbst vorgeht; wie er *seine* zum Teil nur implizit gestellten Fragen beantwortet und Aufgaben gelöst hat: nämlich die Frage nach einem geeigneten Grundkonzept und adäquater Notation für die Arithmetik zu einer vorgegebenen Algebra und die Aufgabe, aus diesem Grundkonzept die Arithmetik und die Algebra erwachsen zu lassen. Just dieser Wechselbeziehung zwischen Arithmetik und Algebra galten der dritte und vierte Zugang.

Skizzieren wir diese vier Zugänge noch ein wenig genauer: In *Kapitel 4* wurde insbesondere Schwartz' (Re-)Formulierung und (Re-)Konstruktion der Primären Algebra als formales System zuzüglich formaler Interpretation behandelt. Schwartz' beweistheoretisches Gewand für die Primäre Algebra ist nach dem gleichen Muster gestrickt wie das Gewand, in das Hilbert und Ackermann die Logik kleideten: ein formales System zusammen mit einer formalen Semantik. Schwartz zeigte die Isomorphie zwischen den beiden formalen Systemen, insofern er die Isomorphie der beiden formalen Semantiken zeigte, die beide korrekt und vollständig durch ihr jeweiliges (formales) System formalisiert sind.
In *Kapitel 5* wurden die Ergebnisse Schwartz' alternativ bewiesen, nämlich im Rückgriff auf spezielle Resultate der Beweistheorie für die Gleichungslogik. Dieser alternative Zugang zur Primären Algebra ist im Hinblick auf Chapter 5 und 6 sowie auf die dazugehörigen Notes m. E. geradezu kanonisch, denn Brown verweist explizit auf Huntingtons Untersuchungen zu Booleschen Algebren und argumentiert mittels zweier Regeln, zweier Theoreme und einer Definition völlig analog zu Birkhoffs Beweiskalkül für die Gleichungslogik. Der zweite Zugang stand der Schulmathematik näher als der erste und irritierte den Nichtmathematiker kaum, denn anders als Schwartz' formales Beweissystem spiegelten die Birkhoffschen Regeln und die von Brown vorgeführten Ketten-*Folgerungen* bzw. -*Ableitungen*, je nach semantischer oder syntaktischer Lesart, das gewöhnliche und auch dem Laien bereits aus der Schulmathematik vertraute Rechnen wider.
In *Kapitel 7* wurde gezeigt, dass Brown dem an Schulen gängigen Verfahren Mathematik aufzubauen folgt, insofern er nämlich zunächst das arithmetische und erst hernach das algebraische Rechnen und beide Rechenformen zweifach behandelt,

nämlich zunächst objektsprachlich, also von innen, und weiter metasprachlich, also von außen; mit anderen Worten: einerseits als Kalkül und andererseits als Theorie über den jeweiligen Kalkül. Die von Brown behandelte Algebra ist also eine algebraisierte Arithmetik bzw. eine arithmetische Algebra, insofern sie lediglich der Repräsentation der Arithmetik gilt und vor dem Hintergrund von Erfahrungen mit der Arithmetik definiert wird. Dass in den Laws of Form dem algebraischen Teil des Indikationenkalküls ein arithmetischer Teil vorausgeht, muss in der Analyse und Interpretation dieserart beachtet werden. Erst im Hinblick auf diese Erfahrungen *in* dem und *über* den arithmetischen Kalkül entsteht bei kanonischer Erweiterung der erlaubten Transformationen eine Algebra, die zunächst nur eine regelgeleitete Deskriptionssprache *für* die Arithmetik ist.
In Kapitel 4 und 5 galt aber das Augenmerk nicht der Arithmetik Boolescher bzw. Brownscher Algebren und insbesondere nicht ihrem Entstehen. Denn im Lichte der Beweistheorie und speziell der Gleichungslogik sind Arithmetiken *objektsprachlich* – in content-Form – beäugt lediglich variablenlose Fragmente von Algebren (vgl. S. 63). Wird eine Arithmetik allerdings *metasprachlich* – in image-Form – betrachtet, so lassen sich mittels Parametern ganze Klassen arithmetischer Terme und Rechnungen formulieren: Ein einzelner algebraischer Term mit Variablen repräsentiert, so man ihn meta-arithmetisch liest, eine ganze Klasse arithmetischer Terme. Diese Entwicklung der Arithmetik und der Algebra, nämlich die Entwicklung der Algebra *aus* der Arithmetik, das Anwachsen ihrer *gemeinsamen* Fach- und Formelsprache, ist in den Laws of Form ein *Abstraktionsprozess*, der in Kapitel 7 entgegengerichtet dargestellt wurde, nämlich als *konkretisierende Reduktion*. In *Kapitel 8* dagegen wurde er gleichgerichtet thematisiert und damit thematisiert als *Ertüchtigung der Sprache*. Dort erfolgte ein *bottom-up*-Erklärungsansatz, genauer: eine Betrachtung des Entwicklungsprozesses der Sprache des Indikationenkalküls im Lichte des historisch informierten, systematisch interessierten und linguistisch orientierten mathematikphilosophischen Ansatzes von Ladislav Kvasz.

Dieser vierfache Ansatz, die `LoF`-Mathematik bzw. ihre Zeichen zu lesen, war selbst wiederum eine Konsequenz aus dem Grundgedanken der Zeichenphilosophie von Josef Simon: Dieser Zeichenphilosophie gemäß wird die Bedeutung eines unbekannten Zeichens nicht nur durch bekannte Zeichen vermittelt, sondern die verstandenen Zeichen *sind* die Bedeutung des zuvor unverstandenen Zeichens. Simon gibt also das (gelingende) Verstehen von Zeichen und deren Bedeutungen durch den ungestörten Austausch von Zeichen zu verstehen; die Welt oder äußere Wirklichkeit kommt dabei (zunächst) nicht anders denn als weitere Zeichen ins Spiel. Die Antworten auf die Nachfragen zu unverstandenen Zeichen gibt bestenfalls der Gesprächspartner, schlimmstenfalls gibt es keinen solchen; in diese Situation wähnte ich Leser der `LoF` gestellt.
Fragen erstehen dem Leser, wenn ihm die Zeichen als Zeichen vor Augen stehen bleiben, statt seinen Blick unvermittelt – und insofern unbemerkt – auf ihre Bedeu-

tungen zu lenken; das sind die Fragen nach der Bedeutung der sichtbaren Zeichen. Wenn kein Gesprächspartner dem (Nach-)Fragenstellenden die Antworten gibt, so muss er diese Rolle selbst übernehmen und die Antworten sich selbst in solchen Gepflogenheiten, Diskursen und Zeichenprozessen suchen, in denen er sich auch sonst befindet und in deren Kontext er den Text deswegen stellt. So kann versucht werden, spielerisch Antworten auf die eigenen (Nach-)Fragen über die Bedeutungen der (fremden) Zeichen aus verschiedenen und mittels verschiedener Kontexte zu gewinnen. Der jeweilige Kontext, in den der Leser den Text – im Hinblick auf die Beantwortung seiner jeweiligen (Nach-)Frage – dann stellt, wirft sein eigenes, spezielles Licht auf den Gegenstand und erhellt dadurch von Mal zu Mal nicht jeweils dieselben Details und diese nicht jeweils auf dieselbe Weise und jede Antwort ist letztlich lediglich von nur vorläufigem und unabgeschlossenem und prinzipiell unabschließbarem Charakter.

Durch den von Daniel Schwartz gewiesenen Zugang habe ich den Leser vorliegender Arbeit direkt in die Primäre Algebra mit hinein genommen und also die Primäre Arithmetik und deren Anknüpfung an die Lebenswelt (vgl. Chapter 1 bis 4) übergangen. Schwartz' Zugang schien und scheint mir als Einstieg geeignet, da er auf einer etablierten, sehr präzisen und exakten mathematischen Theorie fußt. Von diesem mathematisch profilierten und transparenten Zugang ausgehend wurde der `LoF`-Text nach und nach adäquater und hermeneutisch präziser erfasst.

Der dritte Teil des Hauptteils meiner Arbeit galt dem Geltungs-Aspekt und damit weiter der Frage: Inwiefern ist Browns Mathematik reflektiert? Für diese kritische Reflexion der Mathematik Browns verwende ich drei philosophische Optiken.

In *Kapitel 10* analysierte ich den konzeptionellen Aufbau der Laws of Form insgesamt und diskutierte, inwiefern in ihnen kalkülisiert, inwiefern gedacht wird. Für diesen Blick habe ich die Rationalitätstypologie von Peter Reisinger genutzt, die er im Hinblick auf drei von ihm unterschiedene Präsentationstypen entwirft. Die drei Darstellungsformen sind allesamt in Laws of Form offensichtlich vertreten.

In *Kapitel 11* kam die Mathematikphilosophie von Pirmin Stekeler-Weithofer als Optik zum Tragen. Die in (Stekeler-Weithofer, 2008) gezeigte, diagrammatisch angelegte Konzeption von mathematischen Gegenstands- und Redebereichen, insbesondere unter Verwendung holistischer Definitionen und materialbegrifflicher Schlüsse, eignete sich vortrefflich als kontrastierende Folie für Chapter 1 und 2. Darin ließen sich dann drei Bereiche klar ausweisen, je einer für die mathematischen Begriffe, Gegenstände/Sachen und Zeichen. Wohlgemerkt verglich ich hierbei nicht das Abbild mit dem Vorbild. Denn die Laws of Form dienten Stekeler-Weithofer nicht als Vorlage für seine Philosophie der Mathematik, wie die Literaturliste von (Stekeler-Weithofer, 2008), in der `LoF` nicht geführt ist, vermuten ließ und der Autor mir auf Nachfrage bestätigte.

Abschließend beobachtete ich in *Kapitel 12* Browns Mathematik im Lichte der Zeichenphilosophie Josef Simons. Im Zentrum standen dabei Chapter 2 bis 4 bzw.

der kunstvolle Umgang mit Demselben und Verschiedenem in der Mathematik. Wohlgemerkt kam Josef Simons Zeichenphilosophie in sämtlichen Kapiteln meiner Arbeit mehr oder minder deutlich zum Zuge.

Fazit Die Laws of Form von George Spencer Brown sind im Hinblick auf Platons Unterscheidung zwischen Verstandes- und Vernunfterkenntnis im Liniengleichnis (Politeia, 511b–c) sowohl ein mathematisches als auch ein philosophisches Buch: Sie sind *mathematisch-philosophisch*. Denn einerseits werden die Voraussetzungen als Setzungen genutzt und auf ihre Konsequenzen hin untersucht, andererseits werden sie auf ihre Anfänge und ihren (voraussetzungslosen) Anfang hin untersucht. Als mathematisch übliche Voraussetzung dürfen hier zunächst die algebraischen Initiale (Chapter 5) gelten, die in Chapter 6 bis 10 bezüglich ihrer Konsequenzen (in doppeltem Sinne, nämlich nach Platon und nach Brown) untersucht und in Chapter 11 verallgemeinert werden; dafür spielt die Notation eine wesentliche Rolle. Als einer der Anfänge dieser algebraischen Vorraussetzungen darf das arithmetische Fundament gelten (Chapter 3 und 4). Selbiges wird in Chapter 2 konzipiert, wofür die in Chapter 1 von Brown gegebene holistische Definition − metaphorisch gesprochen − Material, Plan und Bindemittel vorgibt. In Chapter 12 werden die arithmetischen Anfänge nochmals experimentell erprobt und geprüft, wobei sich kein Fehler zeigt und alles verlässlich – zumindest miteinander verträglich – gebildet scheint. Zudem beleuchten die Illustrationen den holistischen Begriff von Chapter 1, an dem verschiedene Facetten aufschimmern. Der Leserichtung folgend formuliert: Der distinction-Begriff (Chapter 1) wird in Chapter 2 als form-Konzept verdeutlicht und bringt auf die Iteration von Indikationen angewandt einen indication-Kalkül zu Wege (Chapter 3 bis 11); in Chapter 12 wird er dann als observer-Konzept erkannt.
Wohlgemerkt galt es dem ersten Satz von Chapter 1 gemäß, sowohl die Idee der Unterscheidung als auch die Idee der Bezeichnung anzunehmen. Nicht eigens gefordert war, anzunehmen, dass Unterscheiden und Bezeichnen per se zweierlei sind. Tatsächlich kann eine Marke wahlweise unterscheiden oder bezeichnen. Ob eine Marke unterscheidet oder bezeichnet, das hängt von der Lesart ab, aber ihr Unterscheiden bzw. Bezeichnen erfolgt auf verschiedenen Ebenen.
Der voraussetzungslose Anfang, auf den Platon zufolge alle Vernunfterkenntnis abzielt, ist auch Browns form-Konzept m. E. nicht. Es ist, selbst für Brown, auf das Nichts als den *unterschiedslosen* Anfang angewiesen und/oder auf Unterscheider, nämlich Beobachter (vgl. S. 230). Charmant am form-Konzept ist, dass allein schon die Rede von *dem* einen Anfang versus *den* vielen Setzungen eine Unterscheidung in Anspruch nimmt und mittels Bezeichnungen thematisiert.

Schließen möchte ich diese Arbeit mit einem Hinweis, der schon auf S. 292 anklang: Der Indikationenkalkül mag bestimmte Anschauungen – zumindest einzelne Vorstellungen – hinsichtlich der Begriffe *Unterscheidung*, *Bezeichnung*, *Markierung* und *Form* illustrieren und in einer ihm zugänglichen Form behandeln. Doch es ist ein konsistentes mathematisches Modell nicht schon ein Modell der Wirklichkeit.

> „The theme of this book is that a universe comes into being when a space is severed or taken apart. [...] By tracing the way we represent such a severance, we can begin to reconstruct, with an accuracy and coverage that appear almost uncanny, the basic forms underlying linguistic, mathematical, physical, and biological science, and can begin to see how the familiar laws of our own experience follow inexorably from the original act of severance." (Brown, 1969, v)

Brown arbeitet in Laws of Form keine Erkenntnistheorie, keine Ontologie und auch keine Anthropologie aus. Trotzdem mag sein form-Begriff mancher Theoriebildung helfen, Wirklichkeit zu bewältigen, Wahrheitsfragen zu behandeln oder Welt zu konstituieren; vgl. (Haase, 2016), (Lau, 2006) und (Egidy, 2007). Ob und inwieweit Browns form-Begriff dazu taugt, das ist in den Laws of Form weder mathematisch demonstriert noch bewiesen.

> „Jede Abhandlung könnte noch weiter verdeutlicht werden. Sie findet ihren Abschluss in der Vermutung, deutlich *genug* zu sein, um verstanden werden zu können, wenn auch nicht von allen, denn das ist unmöglich." (Simon, 1989, 314)

Literaturverzeichnis

Baecker, Dirk (Hg.) (1993a): *Kalkül der Form.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Baecker, Dirk (Hg.) (1993b): *Probleme der Form.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Baecker, Dirk (1997): George Spencer-Brown und der feine Unterschied. Sein Kalkül belehrte nicht nur Luhmann. Frankfurter Allgemeine Zeitung. Rezension: Sachbuch. Erschienen am 14.10.1997.

Baecker, Dirk (Hg.) (2005): *Schlüsselwerke der Systemtheorie.* Wiesbaden: Springer VS.

Baecker, Dirk (2008): *Nie wieder Vernunft. Kleine Beiträge zur Sozialkunde.* Heidelberg: Carl-Auer.

Baecker, Dirk (2013): George Spencer-Brown wird 90. URL: http://catjects.wordpress.com/2013/04/02/george-spencer-brown-wird-90. Veröffentlicht am 02.04.2013, Zugriff am 24.03.2016.

Banaschewski, Bernhard (1977): On G. Spencer Brown's laws of form. In: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII(3), S. 507–509.

Beer, Stafford (1969): Book review. Math created. In: *Nature. International weekly journal of science*, 223, S. 1392–1393.

Borsche, Tilman und Stegmaier, Werner (Hgs.) (1992): *Zur Philosophie des Zeichens.* Berlin: de Gruyter.

Bricken, William (2002): Boundary Logic from the Beginning. URL: http://iconicmath.com/mypdfs/bl-from-beginning.021017.pdf. Veröffentlicht am 17.10.2002, Zugriff am 03.04.2016.

Bricken, William (2004): The Advantages of Boundary Logic. A Common Sense Approach. URL: http://iconicmath.com/mypdfs/bl-commonsense.040717.pdf. Veröffentlicht am 17.07.2004, Zugriff am 03.04.2016.

Bricken, William (2005): Taking Nothing Seriously: A Foundational Diagrammatic Formalism. URL: http://iconicmath.com/mypdfs/bl-serious.060105.pdf. Veröffentlicht am 06.01.2005, Zugriff am 03.04.2016.

Bricken, William (2009): Iconic and Symbolic Containment in Laws of Form. URL: http://iconicmath.com/mypdfs/bl-containment-v47.091209.pdf. Veröffentlicht am 09.12.2009, Zugriff am 03.04.2016.

Bricken, William (2013a): Iconic Mathematics. Math that looks like what it means. Arithmetic. URL: http://iconicmath.com/arithmetic. Ein Portal: Veröffentlicht in 2013, Zugriff am 03.04.2016.

Bricken, William (2013b): Iconic Mathematics. Math that looks like what it means. Boundary Logic. URL: http://iconicmath.com/logic/boundary. Ein Portal: Veröffentlicht in 2013, Zugriff am 03.04.2016.

Brown, George Spencer- (1957): *Probability and Scientific Interference.* London: Longmans, Green & Company.

Brown, George Spencer- (1969): *Laws of Form.* London: Allen & Unwin.

Brown, George Spencer- (1972): *Laws of Form.* New York: Julian Press.

Brown, George Spencer- (1993): Selfreference, Distinction and Time. In: *Teoria sociologica.* Milano: Istituto di Sociologia dell'Università di Urbino, S. 47–53.

Brown, George Spencer- (1994): *Laws of Form.* Portland: Cognizer.

Brown, George Spencer- (1995): *Löwenzähne. Geschichten von „einem, der so kam“.* Lübeck: Bohmeier.

Brown, George Spencer- (1997): *Laws of Form. Gesetze der Form.* 1. Auflage. Lübeck: Bohmeier.

Brown, George Spencer- (1999): *Laws of Form. Gesetze der Form.* 2. Auflage. Lübeck: Bohmeier.

Brown, George Spencer- (2007): *Dieses Spiel geht nur zu zweit.* Soltendieck: Bohmeier.

Brown, George Spencer- (2008): *Laws of Form.* 5. Auflage. Leipzig: Bohmeier.

Brown, George Spencer- (als James Keys) (1970): *23 Degrees.* Cambridge: Cat Books.

Brown, George Spencer- (als James Keys) (1971): *Only two can play this game.* Cambridge: Cat Books.

Brunnsteiner, Bernhard (2009): *Die Lügner-Paradoxie. Kleine Philosophie-Geschichte des Wiederspruchs.* Marburg: Tectum Verlag.

Burris, Stanley (1998): *Logic for mathematics and computer science.* New Jersey: Prentice Hall.

Corfield, David (2003): *Towards a Philosophy of Real Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Corseriu, Eugenio (1992): Zeichen, Symbol, Wort. In: Borsche, Tilman und Stegmaier, Werner (Hgs.): *Zur Philosophie des Zeichens.* Berlin: de Gruyter, S. 3–27.

Cull, Paul und Frank, William (1979): Flaws of form. In: *International Journal of General Systems*, 5(4), S. 201–211.

Egidy, Holm von (2007): *Beobachtung der Wirklichkeit.* Heidelberg: Carl-Auer.

Engstrom, Jack (2001): Precursors to Laws of Form in C. S. Peirce's Collected Paper. In: *Cybernetics & Human Knowing. A Journal of Second-Order Cybernetics, Autopoiesis and Cyber-Semiotics*, 8(1–2), S. 25–66.

Fuchs, Peter und Hoegl, Franz (2011): Die Schrift der Form. In: Pörksen, Bernhard (Hg.): *Schlüsselwerke des Konstruktivismus.* Wiesbaden: Springer VS, S. 175–207.

Grant, John (1971): Spencer-Brown, George. In: *Who's who of British Scientists. 1971/72.* Longman, S. 92.

Gumm, Heinz-Peter und Poguntke, Werner (1981): *Boolesche Algebra.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

Haase, Markus (2016): Von der (Un-)Möglichkeit, Recht zu haben. In: Krömer, Ralf und Nickel, Gregor (Hgs.): *SieB. Band 7.* univer*si.* Ankündigung.

Hellerstein, Nathaniel S. K. (1997): *Delta. A paradox logic.* Singapore: World Scientific.

Hellerstein, Nathaniel S. K. (2010): *Diamond. A paradox logic.* Hackensack, NJ: World Scientific.

Hennig, Boris (2000): Luhmann und die Formale Mathematik. In: Merz-Benz, Peter-Ulrich (Hg.): *Die Logik der Systeme.* Konstanz: Universitäts-Verlag Konstanz, S. 157–198.

Hilbert, David (2003): Neubegründung der Mathematik (1922). In: Büttemeyer, Wilhelm (Hg.): *Philosophie der Mathematik.* Freiburg: Karl Alber, S. 131–146.

Hoffmann, Michael H. G. (2005): *Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz.* Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Huntington, Edward V. (1904): Sets of independent postulates for the algebra of logic. In: *American Mathematical Society*, 5(3), S. 288–309.

Huntington, Edward V. (1933a): Boolean Algebra. A Correction. In: *American Mathematical Society*, 35(2), S. 557–558.

Huntington, Edward V. (1933b): New Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic, With Special Reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica. In: *American Mathematical Society*, 35(1), S. 274–304.

Kaplan, Robert (2001): *Die Geschichte der Null.* Frankfurt/Main: Campus-Verlag.

Kauffman, Louis H. (1977): Review Nr. 4892. Laws of Form. In: *Mathematical Reviews*, 54, S. 701–702.

Kauffman, Louis H. (1979): Some Notes on Teaching Boolean Algebra. URL: http://homepages.math.uic.edu/~kauffman/BooleanAlgebra.pdf. Veröffentlicht in 2016; Zugriff am 31.03.2016.

Kauffman, Louis H. (1990): Robbins algebra. In: *Multiple-Valued Logic, 1990., Proceedings of the Twentieth International Symposium on.* Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society Press, S. 54–60.

Kauffman, Louis H. (1995): Arithmetic in the form. In: *Cybernetics and Systems*, 26(1), S. 1–57.

Kauffman, Louis H. (2001a): The Mathematics of Charles Sanders Peirce. In: *Cybernetics & Human Knowing. A Journal of Second-Order Cybernetics, Autopoiesis and Cyber-Semiotics*, 8(1–2), S. 79–110.

Kauffman, Louis H. (2001b): The Robbins problem. Computer proofs and human proofs. In: *Kybernetes. The International Journal of Systems & Cybernetics*, 30(5/6), S. 726–751.

Kauffman, Louis H. (2005a): Das Prinzip der Unterscheidung. In: Baecker, Dirk (Hg.): *Schlüsselwerke der Systemtheorie.* Wiesbaden: Springer VS, S. 173–190.

Kauffman, Louis H. (2005b): Reformulating the map color theorem. In: *Discrete Mathematics*, 302, S. 145–172.

Kauffman, Louis H. und Solzman, David M. (1981): Letter to the Editor. In: *International Journal of General Systems*, 7(4), S. 253–256.

Kauffman, Louis H. und Varela, Francisco J. (1980): Form Dynamics. In: *Journal of social and biological structures. Studies in human sociobiology*, 3(2), S. 171–206.

Kibéd, Matthias Varga von und Matzka, Rudolf (1993): Motive und Grundgedanken der „Gesetze der Form". In: Baecker, Dirk (Hg.): *Kalkül der Form.* Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 58–85.

Kieran, Carolyn (1981): Concepts associated with the equality symbol. In: *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), S. 317–326.

Kohout, Ladislav und Pinkava, Václav (1980): The algebraic structure of the spencer brown and varela calculi. In: *International Journal of General Systems*, 6(3), S. 155–171.

Körner, Stephan (1968): *Philosophie der Mathematik. Eine Einführung.* München: Nymphenburger Verlagshandlung.

Kvasz, Ladislav (2012): *Language in Change. How we changed the language of mathematics and how the language of mathematics changed us.* Lisbon: Fundação Calouste Gulbenkian.

Lau, Felix (2006): *Die Form der Paradoxie. Eine Einführung in die Mathematik und Philosophie der „Laws of Form" von George Spencer Brown.* Heidelberg: Carl-Auer.

Lipschutz, Seymour und Lipson, Marc Lars (1997): *Schaum's outline of theory and problems of discrete mathematics.* New York: McGraw-Hill.

Lorenzen, Paul (1970): *Formale Logik.* Berlin: de Gruyter.

Luhmann, Niklas (1993): Die Paradoxie der Form. In: Baecker, Dirk (Hg.): *Kalkül der Form.* Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 197–212.

Malle, Günther (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig: Vieweg.

Matzka, Rudolf (1993): Semiotic abstractions in the theories of Gotthard Günther and George Spencer Brown. In: *Acta analytica. International periodical for philosophy in the analytical tradition*, 10, S. 121–128.

Mehrtens, Herbert (1990): *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Nickel, Gregor (2011): Mathematik. Die (un)heimliche Macht des Unverstandenen. In: Helmerich, Markus; Lengnink, Katja; Nickel, Gregor und Rathgeb, Martin (Hgs.): *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner, S. 47–58.

Nickel, Gregor und Rathgeb, Martin (2014): Umnutzungen in der Mathematik. In: Habscheid, Stephan; Hoch, Gero; Schröteler-von Brandt, Hilde und Stein, Volker (Hgs.): *Umnutzung. Alte Sachen, neue Zwecke.* Göttingen: V&R unipress, S. 125–132.

Orchard, Robert A. (1975): On the laws of form. In: *International Journal of General Systems*, 2(1), S. 99–106.

Packard, Stephan (2006): *Anatomie des Comics. Psychosemiotische Medienanalyse.* Göttingen: Wallstein-Verlag.

Pörksen, Bernhard (Hg.) (2011): *Schlüsselwerke des Konstruktivismus.* Wiesbaden: Springer VS.

Prediger, Susanne (2008): „…nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz. In: Barzel, Bärbel; Berlin, Tajana; Bertalan, Dagmar und Fischer, Astrid (Hgs.): *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker.* Hildesheim: Franzbecker, S. 89–99.

Radu, Mircea (2003): Als das Zeichen nicht am Anfang stand. Eine Untersuchung der amerikanischen Grundschularithmetik zwischen Colburn und Thorndike. In: Hoffmann, Michael H. G. (Hg.): *Mathematik verstehen.* Hildesheim: Franzbecker, S. 144–159.

Rathgeb, Martin (2011): Zeichen defizient verstehen. George Spencer Browns Zeichen sehen und mit Josef Simon verstehen. In: Helmerich, Markus; Lengnink, Katja; Nickel, Gregor und Rathgeb, Martin (Hgs.): *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner, S. 27–46.

Rathgeb, Martin (2013): Zur Kritik an George Booles mathematischer Analyse der Logik. In: Rathgeb, Martin; Helmerich, Markus; Krömer, Ralf; Lengnink, Katja und Nickel, Gregor (Hgs.): *Mathematik im Prozess. Philosophische, historische und didaktische Perspektiven.* Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 57–71.

Rathgeb, Martin (2016): Können wir von Kreisen das Rechnen und Beweisen lernen? Experimente zur Entweder-Oder-Unterscheidung. In: Caluori, Fraco; Linneweber-Lammerskitten, Helmut und Streit, Christine (Hgs.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel.* Münster: WTM-Verlag, S. 724–727.

Reisinger, Peter (1999): Kalkülisieren oder Denken? Zur Bestimmung möglicher Rationalitätstypen aus einer Kritik ihrer möglichen Symbolisierbarkeit. In: Gloy, Karen (Hg.): *Rationalitätstypen.* Freiburg (Breisgau): Alber, S. 88–108.

Riss, Uwe V. und Schmidt, Vasco A. (2011): Wissen und Handeln der Mathematiker. Philosophische Analyse und Betrachtung ihrer Relevanz für die Industrie. In: Helmerich, Markus; Lengnink, Katja; Nickel, Gregor und Rathgeb, Martin (Hgs.): *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven*, Kap. 4. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, S. 283–296.

Robertson, Robin (1999): Some-thing from no-thing. G. Spencer-Brown's laws of form. In: *Cybernetics & Human Knowing. A Journal of Second-Order Cybernetics, Autopoiesis and Cyber-Semiotics*, 6(4), S. 43–55.

Rosen, Stanley (1992): Kann die Freiheit ein Zeichen sein? In: Borsche, Tilman und Stegmaier, Werner (Hgs.): *Zur Philosophie des Zeichens*. Berlin: de Gruyter, S. 59–78.

Rotman, Brian (1996): *Signifying nothing. The semiotics of zero*. Stanford, Calif: Stanford Univ. Press.

Rotman, Brian (2000a): *Die Null und das Nichts*. Berlin: Kulturverl. Kadmos.

Rotman, Brian (2000b): *Mathematics as sign. Writing, imaging, counting*. Stanford, California: Stanford University Press.

Russell, Bertrand (1998): *Autobiography*. London: Routledge.

Schöning, Uwe (2001): *Theoretische Informatik. Kurz gefasst*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schönrich, Gerhard (1991): Optionen einer Zeichenphilosophie. In: *Philosophische Rundschau. Eine Zeitschrift für philosophische Kritik*, 38(3), S. 178–200.

Schönwälder-Kuntze, Tatjana; Wille, Katrin und Hölscher, Thomas (2009): *George Spencer Brown. Eine Einführung in die „Laws of Form"*. Wiesbaden: Springer VS.

Schreiber, Peter (1977): *Grundlagen der Mathematik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Schwartz, Daniel G. (1981): Isomorphisms of Spencer-Brown's laws of form and Varela's calculus for self-reference. In: *International Journal of General Systems*, 6(4), S. 239–255.

Sheffer, Henry Maurice (1913): A set of five independent postulates for boolean algebras, with application to logical constants. In: *Transactions of the American Mathematical Society*, 14(4), S. 481–488.

Shimogawa, Takuhei und Takahara, Yasuhiko (1994): Reconstruction of G. Spencer Brown's theme. In: *International Journal of General Systems*, 23(1), S. 1–21.

Shoup, Richard und James, Jeffrey Mark (2008): American University of Masters Conference. URL: http://alterationstailor.scot/gsb/aum. Veröffentlicht in 2008, Zugriff am 29.03.2016.

Siebel, Franziska (2005): *Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemein-mathematische Untersuchung.* Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Simon, Fritz B. (1988): *Unterschiede, die Unterschiede machen. Klinische Epistemologie. Grundlage einer systemischen Psychiatrie und Psychosomatik.* Berlin: Springer.

Simon, Fritz B. (2013): Ankündigung. Meine Begegnungen mit George (Spencer-Brown). URL: https://www.carl-auer.de/blogs/kehrwoche/ankundigung-meine-begegnungen-mit-george-spencer-brown. Blogpost vom 23.06.2013 (weitere Posts folgten), Zugriff am 29.03.2016.

Simon, Josef (1971): *Sprachphilosophische Aspekte der Kategorienlehre.* Frankfurt am Main: Heiderhoff.

Simon, Josef (1989): *Philosophie des Zeichens.* Berlin: de Gruyter.

Simon, Josef (1992): Bemerkungen zu den Beiträgen zur Philosophie des Zeichens. In: Borsche, Tilman und Stegmaier, Werner (Hgs.): *Zur Philosophie des Zeichens.* Berlin: de Gruyter, S. 195–219.

Simon, Josef (Hg.) (1994): *Zeichen und Interpretation. [Teil 1].* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Simon, Josef (1997): *Zeichen und Interpretation. Teil 3: Orientierung in Zeichen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Simon, Josef (1998): Von Zeichen zu Zeichen. Zur Vermittlung von Unmittelbarkeit und Vermittlung des Verstehens. In: Simon, Joseph und Stegmaier, Werner (Hgs.): *Zeichen und Interpretation. Teil 4: Fremde Vernunft.* Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 23–51.

Stegmaier, Werner (Hg.) (2000): *Zeichen und Interpretation. Teil 6: Kultur der Zeichen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Stegmaier, Werner (2008): *Philosophie der Orientierung.* Berlin: de Gruyter.

Stekeler-Weithofer, Pirmin (2008): *Formen der Anschauung. Eine Philosophie der Mathematik.* Berlin: de Gruyter.

Stekeler-Weithofer, Pirmin (2012): *Denken. Wege und Abwege in der Philosophie des Geistes.* Tübingen: Mohr Siebeck.

Turney, Peter (1986): Laws of Form and Finite Automata. In: *International Journal of General Systems*, 12(4), S. 307–318.

Urban, Michael (2009): *Form, System und Psyche. Zur Funktion von psychischem System und struktureller Kopplung in der Systemtheorie*, Kap. 2. Formtheoretische Begründungen der Systemtheorie Niklas Luhmanns. Wiesbaden: Springer VS, S. 23–94.

Varela, Francisco J. (1975): A calculus for self-reference. In: *International Journal of General Systems*, 2(1), S. 15–24.

Varela, Francisco J. (1979): The extended calculus of indications interpreted as a three-valued logic. In: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 20(1), S. 141–146.

Varga von Kibéd, Matthias (1989): Wittgenstein und Spencer Brown. In: Weingartner, Paul (Hg.): *Philosophie der Naturwissenschaften.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 402–406.

Varga von Kibéd, Matthias und Ferrari, Achim (2008): *George Spencer Brown. Die Unterscheidungstheorie Spencer Browns und die Unterscheidungsformaufstellung.* Aachen: Ferrari Media.

Veroff, Bob (2016): Simple Axiom Systems for Boolean Algebra. URL: http://www.cs.unm.edu/~veroff/BA. Veröffentlicht am 16.02.2016, Zugriff am 31.03.2016.

Weiss, Christina (2006): *Form und In-formation. Zur Logik selbstreferentieller Strukturgenese.* Würzburg: Königshausen und Neumann.

Whitaker, Randall (2001): George Spencer Brown. Laws of Form (Calculus of Indications). URL: http://www.enolagaia.com/GSB.html#GSB. Ein Portal: Veröffentlicht in 2001, Zugriff am 24.03.2016.

Winker, Steve (1992): Absorption and idempotency criteria for a problem in near-boolean algebras. In: *Journal of Algebra*, 153, S. 414–423.

Winter, Heinrich W. (1982): Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Grundschule. In: *mathematica didactica*, 5, S. 185–211.

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart., Preis: 13,– Euro
Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield
Band 2 (2013), 278 S., kart., Preis: 22,– Euro
Susanne Spies: Ästhetische Erfahrung Mathematik. Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler
Band 3 (2014), 207 S., kart., Preis: 22,– Euro
Henrike Allmendinger: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" aus. Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht
Band 4 (2014), 109 S., kart., Preis: 13,– Euro
Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel
Band 5 (2015), 241 S., kart., Preis: 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi
Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)

Über **SieB**

1. (1) Erscheinungsweise: einmal jährlich.
2. (2) Hauptziel: die Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. (3) Publikationssprachen: Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. (4) Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. (5) Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

Martin Rathgeb

George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Gehalt – Genese – Geltung

George Spencer Brown hat in *Laws of Form* einen Kalkül für Bezeichnungen vorgelegt, dessen mittlerer Teil als formales System für Boolesche Algebren gelesen werden kann. Die Lektüre weist dem Leser einen Weg vom Unterscheiden und Bezeichnen zum Rechnen mit logischen Werten und von dort zurück zur Reflexion von Unterscheiden und Bezeichnen. Auf diesem Sonderweg zu einer *Nussschalenmathematik* wird der Leser mathematisch-philosophisch sozialisiert und gewinnt der Anfang des Buches durch das Ende an Kontur. Das Werk ist eine *Einführung* in und *Grundlegung* von Mathematik, das mathematisch-philosophische Laien und Profis gleichermaßen fasziniert und bereichert.

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage nach dem rechten Ort von George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie in drei Aspekten entfaltet; dabei wird der systematische Zusammenhang der konzeptionellen Einzelheiten mehrfach und verschiedentlich verdeutlicht.

(1) GEHALT – Was ist der Indikationenkalkül? Die *Laws* im mathematischen, das Produkt spezifizierenden Diskurs:
Mathematik als Struktur

(2) GENESE – Wie entsteht der Indikationenkalkül? Die *Laws* im linguistischen, den Prozess fokussierenden Diskurs:
Mathematik als Tätigkeit

(3) GELTUNG – Inwiefern ist Browns Mathematik reflektiert? Die *Laws* im philosophischen, auf ihren Sinn bezogenen Diskurs:
Spiegelungen der Mathematik

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN