SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 4 • 2014**

Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik

Mit Beiträgen von

P. Ullrich | N. Oswald | T. Hamann |
S. Schorcht | E. Ficara |
T. Räz & T. Sauer | G. Nickel

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 4 (2014)

Mit Beiträgen von:

P. Ullrich | N. Oswald | T. Hamann | S. Schorcht | E. Ficara |

T. Räz & T. Sauer | G. Nickel

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 4 (2014)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2014

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Vorwort

> „Es ist schon ein großer und nöthiger Beweis der Klugheit oder Einsicht, zu wissen, was man vernünftiger Weise fragen solle. Denn wenn die Frage an sich ungereimt ist und unnöthige Antworten verlangt, so hat sie außer der Beschämung dessen, der sie aufwirft, bisweilen noch den Nachtheil, den unbehutsamen Anhörer derselben zu ungereimten Antworten zu verleiten und den belachenswerthen Anblick zu geben, daß einer (wie die Alten sagten) den Bock melkt, der andre ein Sieb unterhält.“ IMMANUEL KANT

Das Sieb in IMMANUEL KANTS Gleichnis[1] illustriert die Vergeblichkeit eines in doppelter Weise absurden Unternehmens — die ohnehin nicht zu erwartende Milch des Bocks könnte mit einem Sieb auch gar nicht aufgefangen werden. Auf absurde Weise schlecht gestellt ist nach KANT die „alte berühmte Frage“ nach einem „allgemeine[n] und sichere[n] Kriterium der Wahrheit einer jeden Erkenntnis“. Dabei sei die gängige Definition der Wahrheit als „Übereinstimmung der Erkenntnis mit ihrem Gegenstande“ zwar zutreffend, im Grunde jedoch trivial und als Kriterium gerade nicht hilfreich. Ein solches allgemeines und hinreichendes Kriterium der Wahrheit könne aber gar nicht angegeben werden, „da man bei demselben von allem Inhalt der Erkenntnis (Beziehung auf ihr Objekt) abstrahiert, und Wahrheit gerade diesen Inhalt angeht“.

Als absurdes Unternehmen sind die Siegener Beiträge nun allerdings nicht gedacht; lohnend ist es jedoch allemal KANTS Hinweis auch in Bezug auf *ihre* Leitfrage zu bedenken. Es mag nicht mehr zeitgemäß klingen, sei aber probehalber erlaubt, diese Leitfrage als die ‘Frage nach dem Wesen der Mathematik’ zu formulieren. Diese umfasst die ontologischen Fragen nach ihren Gegenständen, epistemologische Fragen nach dem Status ihrer Beweise, aber auch die Frage nach ihrer Funktion in und Wechelwirkungen mit der Gesellschaft und im Gefüge von Künsten und Wissenschaften und nicht zuletzt auch die Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit ihrer Lehr- und Lernbarkeit. Und jede dieser Fragen lässt sich nur mit Bezug auf

1. Für dieses und die folgenden Zitate vgl. KrV B82ff. Nachforschungen zu Kants Bezugnahme auf „die Alten“ präsentiert Daniel S. Robinson: *Kant and Demonax–A Footnote to the History of Philosophy.* Philosophy and Phenomenological Research **10**, No. 3 (1950), 374-379.

die historische Genese der mathematischen Begriffe, Probleme und Prozeduren angemessen bearbeiten. Bei den Antwortversuchen eine einheitliche, allgemeine Methodik bzw. Beschreibungssprache – gar eine mathematisch formale Sprache – zu erwarten, wäre dabei wohl ebenso ungereimt wie die Suche nach dem von KANT verweigerten allgemeinen Wahrheitskriterium.

Ein Unternehmen wie die Siegener Beiträge wird also transdisziplinär angelegt sein müssen, nicht in jedem Einzelbeitrag, aber in seiner Gesamtanlage. Gerade wegen der Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden sind die Siegener Beiträge auf einen produktiven Diskurs angewiesen, der zugleich die Vielfalt der Aspekte wie die Einheit der Bemühung um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik zur Geltung bringt.

Wir freuen uns, hiermit den vierten Band der Siegener Beiträge, nach zwei monographischen Beitgrägen den zweiten Sammelband, vorlegen zu können. Ganz im Geiste der voranstehenden Gedanken dokumentiert er sehr eindringlich die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden — vereint er doch Beiträge zur Geschichte der Mathematik (Nicola Oswald) und des Mathematikunterrichts (Peter Ullrich, Tanja Hamann) sowie zur Rolle der Mathematikgeschichte für die Lehrerbildung (Sebastian Schorcht) mit Beiträgen zur Philosophie der Mathematik in historischer (Elena Ficara) und systematischer Perspektive (Tim Räz und Tilman Sauer, Gregor Nickel). Damit kann er hoffentlich ein Anstoß für den erwünschten produktiven Diskurs sein.

Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken, Herrn Daniel Rompf für die Bearbeitung des Manuskripts.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Inhaltsverzeichnis

Einige Bemerkungen zur Entstehung des Analysis-Unterrichts bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts

Peter Ullrich*

Zur Geschichte der Analysis als Teildisziplin der Mathematik[1]

Die Vorstellungen über das Differenzieren als das Bestimmen von Steigungen und über das Integrieren als das Bestimmen von Flächeninhalten entwickelten sich im 17. Jahrhundert. Auch wurde damals bereits erkannt, dass diese beiden Prozesse miteinander zusammenhängen (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Im Jahre 1696 erschien dann das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, die „Analyse des infiniment petits" des Marquis G. F. A. de l'Hôspital (1661–1704), der sich allerdings – für eine jährliche Rentenzahlung von 300 Livres – der Fachkompetenz von Johann Bernoulli (1667–1748) als „ghostwriter" versichert hatte.

Das einflußreichste Analysis-Lehrbuch des 18. Jahrhunderts war die 1748 zum ersten Mal erschienene „Introductio in Analysin Infinitorum" von Leonhard Euler (1707–1783). Wer allerdings nach dem theoretischen Unterbau dieses Werkes sucht,

∗. Dieser Text ist in einer Zeit der fachlich fruchtbaren und menschlich angenehmen Zusammenarbeit mit Wolfgang Hein in Siegen entstanden.

1. So trivial diese Aussage auch erscheinen mag, so grundlegend sind doch ihre Konsequenzen: Auch die Analysis hat eine Geschichte!

wird feststellen, dass Euler darin nur sehr selten Konvergenzfragen anspricht und unbefangen mit „unendlich großen Zahlen“ wie dem i in der Darstellung

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

der Exponentialfunktion arbeitet oder auch mit „unendlich kleinen Zahlen“ wie dx.

Erste Ansätze zu einer strengeren Begründung der Infinitesimalrechnung gab es jedoch durchaus: So leitete Isaac Newton (1642/43–1727) in seinen „Principia Mathematica“ (1687) Ergebnisse, die heutzutage der Differentialrechnung zugerechnet werden, der besseren Überzeugungskraft wegen *geometrisch* her. Auch Julius Plücker (1801–1868), der akademischer Lehrer Felix Kleins (1849–1925) pflegte in seinen Bonner Vorlesungen in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts einen geometrischen Zugang zur Differential- und Integralmathematik.

Andererseits gab es eine starke Strömung, die Infinitesimalrechnung *algebraisch* zu fundieren, indem man zum Beispiel wie schon Euler mit unendlichen Summen genau so rechnete wie mit endlichen, also Potenzreihen als „unendliche“ Polynome behandelte. In Frankreich betrachtete Joseph Louis Lagrange (1736–1813) in seiner „Théorie des fonctions analytiques“ (1797) nur solche Funktionen, die in Potenzreihen entwickelbar sind:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu.$$

Die Ableitung solch einer Funktion an der Stelle x_0 wurde von ihm definiert(!) als

$$f'(x_0) := a_1.$$

In Deutschland wurde dieses Gebiet der „Algebraischen Analysis“ dominiert durch die von Karl Friedrich Hindenburg (1741–1808) begründeten Schule der „kombinatorischen Analysis“, die sich intensiv mit Manipulationen an (Potenz)Reihen beschäftigte, wie Ausmultiplizieren von Produkten, Potenzieren und Invertieren.

Die heutzutage übliche *arithmetische* Fundierung von Differential- und Integralrechnung mittels „ε“ und „δ“ begann sich erst ab 1820 zu entwickeln mit dem „Cours d’Analyse de l’École Polytechnique“ (1821) von Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Ab 1860 wurde ein derartiger „strenger“ Zugang von Karl Weierstraß (1815–1897) in seinen Vorlesungen in Berlin propagiert. Weierstraß gab auch eine der ersten formalen Definitionen der reellen Zahlen; andere stammen von Richard

Dedekind (1831–1916) und Georg Cantor (1845–1918).[2]

Das 19. Jahrhundert: von Humboldt, Süvern und Schellbach

Unter Wilhelm von Humboldt (1767–1835) wurde das preußische[3] Unterrichtswesen grundlegend reformiert. Insbesondere wurde das Schulwesen der Oberaufsicht des Staates unterstellt.

Dies führte unter anderem dazu, dass in den Jahren 1809 bis 1816 zum erstem Mal ein Lehrplan für Gymnasien aufgestellt werden mußte. Bei den Beratungen zu diesem, der mit dem Namen von Johann Wilhelm Süvern (1775–1829) verbunden wird, hatte sich – der Schulpraktiker – Georg Wilhelm Bartholdy (1765–18??) dafür ausgesprochen, „erste... Gründe... der Differential- und Integralrechnung“ aufzunehmen, was jedoch bei der finalen Redaktion entfiel.

Andererseits war der Süvernsche Lehrplan auch nur als Minimalprogramm gedacht, in dem die für alle Gynmasien verpflichtenden Stoffe aufgeführt wurden: So wurde beispielsweise in der Geometrie Euklids „Elemente“ als verpflichtend erwähnt, nicht aber die Kegelschnitte.

Der Bereich der Zahlen- und Funktionenlehre war gemäß dem Konzept der Algebraischen Analysis strukturiert [Jahnke, S. 376]:

- die 4 Species mit ganzen und gebrochenen Zahlen,
- die 4 Species mit Buchstaben,
- Zahlensysteme (speziell das dekadische),
- entgegengesetzte Größen,
- Polynome,
- Potenzrechung (speziell Quadrat- und Kubikwurzeln),

2. Es ist bemerkenswert, dass Cauchy, Weierstraß und Dedekind zu der Zeit, als sie Beiträge zu den Grundlagen der Analysis leisteten, Vorlesungen für eine Hörerschaft hielten, die Mathematik nicht um ihrer selbst studierte, sondern sie anwenden wollte.

Was Cantor betrifft, so hatte dieser in Berlin Vorlesungen bei Weierstraß gehört. Nur Bernhard Bolzano (1781–1848) fällt aus dem Schema, dass die arithmetische Grundlegung der Infinitesimalrechnung aus Vorlesungen für Anwender entstand. Allerdings wurden seine, in relativer Abschiedenheit entwickelten, Beiträge zu seinen Lebzeiten kaum rezipiert.

3. Zwar bildete Preußen nur einen Teil des deutschen Sprachraums; für die im folgenden beschriebenen Entwicklungen hatte es aber in großen Teilen Schrittmacherfunktion.

– Proportionen,

– Gleichungen des ersten und zweiten Grades,

– Diophantische Gleichungen, Kettenbrüche,

– Logarithmen,

– irrationale und imaginäre Größen,

– kubische und höhere Gleichungen,

– Progressionen (Folgen),

– Kombinatorik,

– unendliche Reihen und analytische Operationen mit unendlichen Reihen,

– binomischer Satz.

(Insbesondere stammt das Ordnungsprinzip der Zahlbereichserweiterungen im heutigen Lehrplan von dieser Strukturierung ab.)

Der „Taylorsche Lehrsatz" wurde zwar erwähnt, jedoch nicht als Bestandteil der Differentialrechnung behandelt, sondern durch das Umentwickeln von Potenzreihen gewonnen.

Die politische Restauration in den Jahren nach 1815 wirkte sich auch auf den Bildungsbereich aus, unter anderem als Tendenz, die Humboldtschen Reformen rückgängig zu machen – und dabei auch noch hinter die Praxis der preußischen Aufklärung zurückzufallen –, indem man die „Realien", zu denen auch die Mathematik gezählt wurde, zugunsten der alten Sprachen wieder zurückdrängte.

Im Sinne dieser Zeitströmung ist etwa die Circular-Verfügung in der preußischen Provinz Sachsen aus dem Jahre 1826 zu sehen, die die Differential- und Integralrechnung als Schulstoff ausschloß, oder auch die 1834 erfolgte Festlegung, dass der als Minimalkatalog angelegte Süvernsche Lehrplan im Hinblick auf die Mathematik auch als Maximalkatalog anzusehen war (was insbesondere die Kegelschnitte endgültig aus dem Unterricht entfernte).

Diese restriktive Haltung bezüglich der Differential- und Integralrechnung war allerdings keinesfalls auf die (humanistischen) Gymnasien beschränkt: 1882 wurde durch Ministerialverfügung deren Behandlung für Realgymnasien, 1892 auch für Oberrealschulen verboten.

Ein Beispiel dafür, wie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts Stoff behandelt wurde, den man heute im Analysis-Kurs findet, ist die Bestimmung von Extrema mittels der Methode von Karl Heinrich Schellbach (1804–1892)[4]:

Um die Extrema einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen, verwendete man dabei im wesentlichen den „Satz von Fermat" in der algorithmischen Fassung, die Pierre de Fermat (1601(?)/07(?)–1665) selbst gegeben hatte:

- Man teile $f(x+\varepsilon) - f(x)$ durch ε.
- Man setze in dem Ergebnis ε gleich 0.
- Eine (notwendige) Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist dann, dass der so entstandene Ausdruck verschwindet.

(Ein konkretes Beispiel, wie mit diesem Verfahren vor hundert Jahren Aufgaben in der Schule gerechnet wurden, findet sich im nächsten Abschnitt.)

Felix Klein interpretierte diese Methode so, dass Schellbach damit das Verbot der Kultusverwaltung hinsichtlich der Infinitesmalrechnung habe umgehen wollen (etwa in „Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen", Teil 1, Teubner 1907, S. 108). Allerdings sollte man keinesfalls die Möglichkeit außer acht lassen, Schellbach habe sich – aus pädogogischen Überlegungen – nicht an die „Epsilontik" begeben wollen: 1860, als Schellbach seine „Mathematische[n] Lehrstunden. Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten" veröffentlichte, begann Weierstraß gerade mit seinen strikt „arithmetisierten" Vorlesungen in Berlin, und diese waren für die Studenten keinesfalls einfache Kost.

Ein Beispiel von vor hundert Jahren: Hermann Weyls Abiturarbeit

Als Beispiel wäre natürlich im wesentlichen fast jede Mathematikklausur der passenden Zeit geeignet; nur ist Hermann Weyl (1885–1955)[5], der Abiturient, aus dessen Abiturarbeit im folgenden zitiert wird, so prominent, dass seine Arbeit nach fast einem Jahrhundert als Dokument publiziert wurde.

4. Lehrer am Friedrich-Werderschen Gymnasium in Berlin; erster Leiter des 1855 gegründeten ersten mathematisch-pädagogischen Seminars; ein großer Teil der Mathematiker, die im 19. Jahrhundert in Berlin wirkten, wurde von ihm ausgebildet, sei es als Schüler oder als Lehramtskandidat.

5. 1908 Promotion bei David Hilbert, 1913 Professor an der ETH Zürich, 1930 Professor in Göttingen, 1933 Gründungsmitglied des Institute for Advanced Study in Princeton (neben, u. a., Albert Einstein), dort bis 1951 tätig.

Die Abiturprüfung fand 1904 am „Königlichen [Gymnasium] Christianeum in Altona“ statt. (Wohlgemerkt, Altona gehörte damals zu Preußen und wurde erst 1937/38 nach Hamburg eingemeindet.)

Die erste Aufgabe der Mathematikarbeit lautete:

> „Um ein Parallelogramm ein Dreieck von kleinstem Inhalte zu legen.“

Mit h der Höhe des Parallelogramms, y der des Dreicks leitete Weyl zunächst her, dass die gestellte Aufgabe darauf führt, dass

> „die Funktion
> $$f(y) = \frac{y^2}{y-h}$$
> ein Mininum“

wird [Elsner, S. 7].

Dies löste er wie folgt [Elsner, S. 7–8]:

> „Die Bedingung hierfür lautet:
> $$f(y+\varepsilon) = f(y)$$
> oder
> $$\frac{(y+\varepsilon)^2}{y+\varepsilon-h} = \frac{y^2}{y-h},$$
> also
> $$(y+\varepsilon)^2(y-h) = y^2(y-h+\varepsilon).$$
> Daraus findet man mit Und[!]erdrückung der von höherem Grade unendlich kleinen Glieder[6]:
> $$y^2(y-h) + 2y\varepsilon(y-h) = y^2(y-h) + y^2\varepsilon.$$
> Kürzt man mit $y\varepsilon$, so:
> $$2(y-h) = y,$$
> mithin
> $$y = 2h\text{“}.$$

Weyl standen aber auch noch andere Möglichkeiten zur Verfügung, um diese Aufgabe zu lösen. Am Ende seiner Arbeit fügte er noch an [Elsner, S. 13–14]:

6. Der Lehrer, Dr. Karl Eichler, notierte hier als Korrektur „der unendlich kleinen Glieder von höherem Grade“.

„Weitere Lösungen zu Aufgabe I:
Auch die sogenannte Diskriminantenmethode führt bei dieser Aufgabe zum Ziel. Aus

$$\frac{y^2}{y-h} = f$$

folgt nämlich

$$y^2 - fy + fh = 0.$$

Rechnet man aus, so:

$$y = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4fh}}{x[\text{lies: } 2]}.$$

Da für Minimum die Diskriminante zu Null werden muß, so erhält man:

$$f = 4h, \qquad y = \frac{f}{2} = 2h.$$

Am einfachsten führt die Anwendung der Differentialrechnung zum Ziel. Aus

$$f = \frac{y^2}{y-h}$$

ergibt sich unmittelbar

$$\frac{df}{dy} = \frac{2y(y-h) - y^2}{(y-h)^2} = 0,$$

also

$$y = 2h\text{“}.$$

Es sei dabei jedoch darauf hingewiesen, dass laut dem Jahresbericht des Christianeums von Jahre 1904 Differentialrechung gar nicht im Unterricht behandelt wurde.

Die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts: Klein und die Folgen(den)

Zur Zeit von Weyls Abiturarbeit, also Ende des 19., Anfang des 20. Jahrhunderts, wurde einerseits allgemein akzeptiert, dass die Differential- und Integralrechnung mächtige Hilfsmittel zur Verfügung stellt, um – durchaus anwendungsorientierte –

Aufgaben zu lösen (man vergleiche etwa Weyls obigen Kommentar). Andererseits gab es seitens der „Abnehmer“ mathematischer Bildung, etwa der Ingenieure, und auch der Schulpraktiker massive Vorbehalte gegenüber der als zu abstrakt empfundenen Infinitesimalmathematik in ihrer arithmetisch begründeten Fassung. Felix Klein, der selbst Vorbehalte gegenüber einer im Weierstraßschen Stile durchgeführten Analysis hatte, setzte sich dennoch für eine Einbeziehung der Differential- und Integralrechnung in den Schulunterricht ein.

Auf der Allgemeinen Schulkonferenz vom Juni 1900 wurde zwar die verpflichtende Berücksichtigung der Infinitesimalrechnung noch abgelehnt. Auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1905 in Meran legten Klein und andere dann jedoch ein Diskussionspapier zur generellen Reform des Mathematikunterrichts vor, das zur Grundlage der sogenannten „Meraner Reform“ wurde.

Bezüglich der Differential- und Integralrechnung machte dies den Kompromißvorschlag, dass die Frage von deren Behandlung dem Fachlehrer überlassen werden sollte. In der Praxis setzte sich dieser Kompromiß relativ rasch (d. h., bis Anfang des Ersten Weltkriegs) durch. Obligatorischer Schulstoff wurde die Differential- und Integralrechnung allerdings erst durch die Richtertsche Schulreform im Jahre 1925. Die darauffolgenden Jahre brachten dann keine Weiterentwicklung, die Zeit des „Dritten Reiches“ sogar eine Reduktion der Mathematikausbildung.

Nach dem Ende des Zweiten Weltkriegs wurde in den westlichen Besatzungszonen bzw. der Bundesrepublik an die Tradition der „Weimarer Republik“ angeknüpft. Den Anspruch, wenn auch nicht unbedingt die Realität, des Analysisunterrichts in jener Zeit kann man dem „Kasseler Lehrplan“ von 1953 entnehmen (nach [Blum/Törner, S. 187]):

> „<u>11. Schuljahr</u>: Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen. Anwendungen aus der Finanzwirtschaft und Versicherung. Zahlenfolgen. Grenzwertbegriff. Die unendliche geometrische Reihe. Einführung in die Differerentialrechnung am Beispiel ganzer rationaler Funktionen. Der Begriff des Integrals. Die Bedeutung infinitesimaler Begriffe und Verfahren für Geometrie und Physik. Die Winkelfunktionen …
>
> <u>12. und 13. Schuljahr</u>: Weiterführung der Infinitesimalrechnung: Gebrochene rationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Winkelfunktionen, Exponentialfunktion, logarithmische Funktionen, Anwendungen auf Kurvenuntersuchungen und physikalische Probleme. Fehlerrechnung. Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen. Flächenberechnungen, Rauminhalt von Drehkörpern.“

Zur weiteren Entwicklung vergleiche man die historischen Abschnitte der einschlägigen Werke zur Didaktik der Analysis wie etwa [Blum/Törner, Kapitel B.1] und, insbesondere für die Zeit nach 1983, [Tietze/Klika/Wolpers, Abschnitt 7.1].

Literatur

Blum, W.; Törner, G.: *Didaktik der Analysis*. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1983.

Elsner, B.: Hermann Weyls Abiturarbeit, *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg* **XXI/2** (2002), 5–16.

Jahnke, H. N.: *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*, Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik **8**. Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1990.

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H.: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Unter Mitarbeit von Frank Förster.* Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 1. Aufl. 1997, 2. Aufl. 2000.

David Hilbert, ein Schüler von Adolf Hurwitz?

Nicola Oswald

Der Mathematiker Adolf Hurwitz (1859 - 1919) zeichnete sich stets durch ein zurückhaltendes Auftreten aus. Dies schlägt sich noch in der modernen Rezeption seines Lebenswerks nieder. Obwohl seine Resultate, Teilgebiete der Mathematik übergreifend, weitreichenden Einfluss hatten, ist über sein Leben sowie seinen wissenschaftlichen Werdegang wenig bekannt.[1] Eine wesentlich auffälligere Persönlichkeit stellt hingegen David Hilbert (1862 - 1943) dar, der häufig als einer der letzten Vertreter der so genannten Universalmathematiker angeführt wird. Hilbert hatte enormen Einfluss auf eine heutzutage auch als ‚Moderne der Mathematik' (Gray 2008) bezeichnete Epoche der Mathematik, die einen gewissen Umschwung innerhalb der Grundlagenforschung der Mathematik markiert.[2] Gerade auf Grund dieser ungleichen Prominenz bleibt meist im Verborgenen, dass Hilbert ein Schüler Hurwitz' war. Ein Blick auf die wissenschaftlichen Vitae der beiden Mathematiker zeigt jedoch den tiefgehenden Einfluss, den der Lehrer auf seinen Schüler ausübte.

Im Archiv der ETH Zürich wird der Nachlass von Adolf Hurwitz verwahrt, darunter dreißig mathematische Tagebücher (Hurwitz 1882-1919). Diese werden nachfolgend im Kontext der wissenschaftlichen Beziehung von Adolf Hurwitz zu seinem Schüler David Hilbert analysiert. Hierbei steht insbesondere die Frage im Vordergrund, zu welchem Zeitpunkt das Lehrer-Schüler-Verhältnis der beiden Kollegen schließlich überwunden wurde.

1. Tatsächlich war Adolf Hurwitz' Leben nicht nur äußerst interessant, sondern ermöglicht darüber hinaus einen Einblick auf die Situation im wissenschaftlichen Betrieb des ausklingenden 19. Jahrhunderts. Für mehr Informationen siehe (Rowe 2007; Oswald und Steuding 2014).

2. Zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten beschäftigen sich mit dem Leben und Werk David Hilberts, siehe u. a. (Reid 1970; Tapp 2013).

Die Anfänge

Ein erstes Zusammentreffen der beiden Mathematiker fand im Jahr 1884 in Königsberg statt, wo Adolf Hurwitz auf seine erste Professur berufen worden war. Im Rückblick erinnerte sich der Jüngere:

> „Sein freundliches und offenes Wesen gewann ihm, als er nach Königsberg kam, rasch die Herzen aller, die ihn dort kennenlernten [...]" (Hilbert 1921, S. 167)[3]

David Hilbert, der in der Residenzstadt aufgewachsen war und dort studierte, galt zu dieser Zeit bereits als wissbegieriger junger Nachwuchsforscher, der nach fortschrittlicher Mathematik verlangte. Für ihn und seinen Freund und Kommilitonen Hermann Minkowski (1864 - 1909), der als außerordentliches Talent gehandelt wurde, war es sicherlich eine glückliche Fügung, dass Adolf Hurwitz ihr neuer Lehrer und Mentor wurde. Da dieser nicht nur mit der von Alfred Clebsch (1833 - 1872) und seinem Doktorvater Felix Klein (1849 - 1925) geprägten mathematischen Schule vertraut war, sondern darüber hinaus in Berlin bei Leopold Kronecker (1823 - 1891) und Karl Weierstrass (1815 - 1897) studiert hatte, ist der Beitrag seiner Kenntnisse auf den Königsberger Lehrbetrieb hoch einzuschätzen.[4] Tatsächlich schrieb Hilbert in seinem Nachruf auf Adolf Hurwitz selbst (S. 162):

> „Hier wurde ich, damals noch Student, bald von Hurwitz zu wissenschaftlichem Verkehr herangezogen und hatte das Glück, durch das Zusammensein mit ihm in der mühelosesten und interessantesten Art die Gedankenrichtungen der beiden sich damals gegenüberstehenden und doch einander so vortrefflich ergänzenden Schulen, der geometrischen Schule von Klein und der algebraisch-analytischen Berliner Schule kennenzulernen. [...] Auf zahllosen, zeitweise Tag für Tag unternommenen Spaziergängen haben wir damals während acht Jahren wohl alle Winkel mathematischen Wissens durchstöbert, und Hurwitz mit seinen ebenso ausgedehnten und vielseitigen wie festbegründeten und wohlgeordneten Kenntnissen war uns dabei immer der Führer."

Ferner zitierte ihn Otto Blumenthal (1876 - 1944), ein vormaliger Doktorand Hilberts, wie folgt: „Wir, Minkowski und ich, waren ganz erschlagen von seinem Wissen und glaubten nicht, dass wir es jemals so weit bringen würden." (Blumenthal

3. Hier zitieren wir aus der Gedächtnisrede ‚Adolf Hurwitz' von David Hilbert vom 15. Mai 1919, die im Rahmen einer öffentlichen Versammlung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaftlichen Göttingen gehalten wurde, auch veröffentlicht unter (Hilbert 1920).

4. Insbesondere im Bezug auf die geometrische und analytische Herangehensweise an Probleme der Funktionentheorie (Blumenthal 1932, S. 390)

1932, S. 390) Abgesehen von seiner wissenschaftlichen Expertise war Adolf Hurwitz augenscheinlich im besonderen Maße um die Betreuung seiner Studierenden bemüht. „In den Übungen war er ständig darauf bedacht, durch anregende Aufgaben zur Mitarbeit heranzuziehen, und es war charakteristisch, wie oft man ihn in seinen Gedanken auf der Suche nach geeigneten Aufgaben und Problemstellungen für Schüler antraf.“ (Hilbert 1921, S. 166), erinnerte sich der frühere Student Hilbert, sowie: „Anregungen vermittelten das Mathematische Kolloquium [...], vor allem aber die Spaziergänge mit Hurwitz „nachmittags präzise 5 Uhr nach dem Apfelbaum“.“ (Blumenthal 1932, S. 393) Diese Gewohnheit mathematischer Spaziergänge mit Studierenden wurde später von David Hilbert fortgeführt und Zeit seines akademischen Werdegangs beibehalten.

Folglich war es zu Beginn naturgemäß Hilbert, der von seinem Lehrer Adolf Hurwitz enorm profitierte. Im Jahr 1892 erhielt er seine erste Professur als Hurwitz’ Nachfolger in Königsberg.

Wissenschaftliche Lebenswerke

Sowohl Adolf Hurwitz als auch David Hilbert können als universelle Mathematiker bezeichnet werden: Beide hatten einen umfangreichen Kenntnisstand und forschten innerhalb einer Vielzahl mathematischer Disziplinen. Darüber hinaus waren beide extrem produktiv. Einen ersten Eindruck davon erhält man durch die circa 1350 Seiten umfassenden, wissenschaftlich einflussreichen *‚Gesammelten Abhandlungen I - III‘* von Hilbert (Hilbert 1935) sowie durch Adolf Hurwitz’ *‚Mathematisches Werk I + II‘* (Hurwitz 1932) mit mehr als 1400 Seiten.

Ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, soll hier zunächst ein stark konzentrierter Überblick über das mathematische Werk David Hilberts gegeben werden. Dabei halten wir uns an die sehr lesenswerte, biographische *‚Lebensgeschichte‘* (Blumenthal 1932), die von Otto Blumenthal über Hilbert verfasst wurde. Die folgende Liste skizziert das breite wissenschaftliche Spektrum des Mathematikers. Hierbei sei bemerkt, dass die Aufzählung anhand moderner Begrifflichkeiten geordnet ist und insbesondere einige Resultate, Veröffentlichungen oder Vorträge hervorgehoben sind, die bei der anschließenden Analyse im Zusammenhang mit Adolf Hurwitz’ Arbeiten dienen werden.

- 1885 - 1892 **Algebra**: Invariantentheorie

  1. 1890 *‚Ueber die Theorie der algebraischen Formen‘* (Hilbert 1890)

2. 1892 *,Ueber die Irrationalität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten'* (Hilbert 1935, Bd. II, Nr. 18) mit ,Irreduzibilitätssatz' (Blumenthal 1932, S. 393)

- 1892 - 1899 **Zahlentheorie**: Theorie der Zahlkörper

  1. 1893 Vereinfachung des Beweises von Hermite-Lindemann der Transzendenz von e und π (Hilbert 1935, Bd. I, Nr. 1)
  2. 1894 *,Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale'* (Bd. I, Nr. 2)
  3. 1896 *,Die Theorie der algebraischen Zahlkörper'* (Bd. I, Nr. 7), auch *,Zahlbericht'* genannt, beinhaltet Idealtheorie

- 1891 - 1902 **Geometrie**: Axiomatisierung der Geometrie

  1. 1895 - 1903 *,Grundlagen der Geometrie'* mit Anhängen (Hilbert 1903)
  2. 1895 *,Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte'* (Anhg. I)

- 1900 *,Über den Zahlbegriff'* (Hilbert 1900b): Axiomatisierung der Arithmetik
- 1900 Hilbert postulierte seine bekannten 23 Mathematischen Probleme bei dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris (Hilbert 1900a)
- 1902 - 1910 **Funktionentheorie**: Variationsprobleme, Unabhängigkeitssatz
- 1904 - 1910 **Lineare Algebra, Funktionalanalysis**: *,Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen'* mit Mitteilungen (Hilbert 1904, 1906), beinhalten neue Terminologie
- 1907 (1910 veröffentlicht) **Analysis verknüpft mit Geometrie**: Analytische Neubegründung von Minkowskis Theorie über Volumen und Oberflächen konvexer Körper in (Hilbert 1910)
- 1907 **Analysis verknüpft mit Zahlentheorie**: *,Beweis der Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsches Problem).'* (Hilbert 1909)
- 1902 - 1918 Axiomatisierung von Physik und Mechanik: Relativitätstheorie
- 1904 - 1934 **Mathematische Grundlagen**

  1. 1904 Erster Vortrag in Heidelberg zu *,Axiomatisierung der Zahlenlehre'* (Blumenthal 1932, S. 421)
  2. 1922 - 1934 **Hilbertprogramm**: Formalismus und Beweistheorie

3. 1931 *‚Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre.‘* (Hilbert 1931)

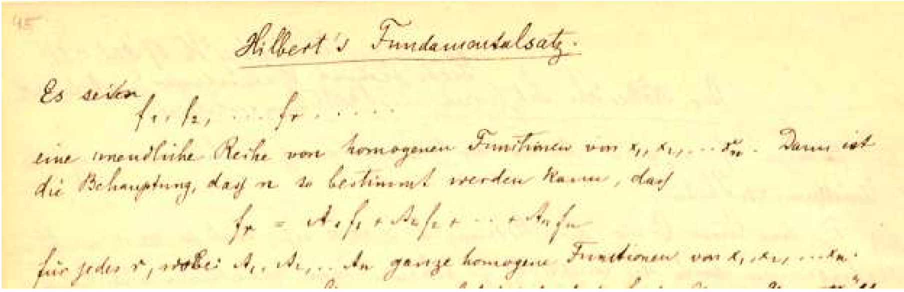
Obwohl David Hilbert und Adolf Hurwitz sich hinsichtlich ihrer außerordentlichen Produktivität sehr ähnelten, deutet ihr Auftreten innerhalb der wissenschaftlichen Gemeinschaft auf recht unterschiedliche Charaktere hin. Während Hilbert als eher extrovertiert beschrieben wurde und sich daran „gewöhnte [...], ein berühmter Mann zu sein“ (Blumenthal 1932, S. 407), „mied [Hurwitz] jedes persönliche Hervortreten im akademischen und öffentlichen Leben“ (Hilbert 1921, S. 167) und bevorzugte es, in kontinuierlicher, stiller Weise zu arbeiten. Dies zeigt sich unter anderem in Hurwitz’ konsequenter, nahezu akribischer Art, mathematische Tagebücher zu führen, welche im Folgenden mit den aufgeführten Forschungsgebieten David Hilberts in Beziehung gesetzt werden.

Analyse

„Es soll schon hier vorgreifend über das selten harmonische und fruchtbare Zusammenarbeiten dieser drei Mathematiker berichtet werden.“, schreibt Otto Blumenthal (Blumenthal 1932, S. 390) und bezieht sich dabei auf den regen mathematischen Austausch zwischen Minkowski, Hilbert und Hurwitz. Zahlreiche Einträge in den mathematischen Tagebüchern (Hurwitz 1882-1919) weisen direkte oder indirekte Bezüge zu Hilberts Arbeiten auf.

Wie bereits erörtert, profitierte in den ersten Jahren ihrer Bekanntschaft zweifellos David Hilbert von seinem Lehrer. Augenscheinlich wurde Hurwitz jedoch sehr schnell auf seinen talentierten Studenten aufmerksam. Ein erster entsprechender Eintrag befindet sich auf Seite 44 des sechsten Tagebuchs[5] (Nr. 6) mit der Überschrift „Der Nöther’sche Satz (nach einer Mitteilung von Hilbert)“. Hier macht sich Hurwitz vertraut mit dem so genannten ‚Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen‘ von Max Noether (1844 - 1921), der Eigenschaften einer zu zwei algebraischen Kurven assoziierten Linearform diskutiert. Interessanterweise folgt auf der nächsten Tagebuchseite ein Eintrag mit dem Titel „Hilberts Fundamentalsatz“, welcher sich mit einer aus homogenen Funktionen gebildeten Linearform auseinandersetzt:

5. Von April 1888 bis November 1889


45

Hilbert's Fundamentalsatz.

Es seien $f_1, f_2, \dots f_r \dots$ eine unendliche Reihe von homogenen Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$. Dann ist die Behauptung, daß n so bestimmt werden kann, daß

$$f_r = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n$$

für jedes r, wobei $A_1, A_2, \dots A_n$ ganze homogene Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$.

Abbildung 1: „Hilbert's Fundamentalsatz. Es seien $f_1, f_2, \dots, f_r, \dots$ eine unendliche Reihe von homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$. Dann ist die Behauptung, daß n so bestimmt werden kann, daß $f_r = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots A_n f_n$ für jedes r, wobei $A_1, A_2, \dots, A_n$ ganze homogene Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$."

Diese Notiz kann einerseits als Fortführung und Erweiterung des Noetherschen Satzes betrachtet werden, andererseits stellt sie eine frühe Version des so genannten ‚Hilbertschen Basissatzes' dar. Auch wenn es den Anschein macht, dass Hurwitz interessiert, vielleicht sogar inspiriert, von Hilberts Formen- und Invarianthentheorie war, erforschte er in seiner Arbeit *‚Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration'* ein „neues Erzeugungsprinzip für algebraische Invarianten, das es ihm ermöglicht, ein [von Hilbert] eingeschlagenes Verfahren [...] anzuwenden."(Hilbert 1921, S. 164) Diese Formulierung stammt von Hilbert selbst und kann derart interpretiert werden, dass Hurwitz die Anwendung einer von Hilberts Methoden auf eine gewisse Art verbesserte. Mindestens drei weitere Einträge widmet Hurwitz in seinen Notizbüchern (Nr. 8, S. 207; Nr. 14, S. 204; Nr. 25, S. 77) dem Hilbert'schen „Formensatz", heutzutage Basissatz genannt. Insbesondere im vierzehnten Tagebuch[6] (Hurwitz 1882-1919, Nr. 14) haben Hurwitz' Kommentare zu Hilberts Resultaten die Tendenz belehrend zu wirken. Zu Beginn schreibt er:


Der Beweis des Hilbert'schen Theorems II. (Ann. 36 p. 485) ist wohl am leichtesten so aufzufassen:

Abbildung 2: „Der Beweis des Hilbert'schen Theorems II (Ann 36. p. 485) ist wohl am leichtesten so aufzufassen: [...]."

Dies vermittelt den Anschein, dass Hilberts Ideen beziehungsweise seine Beweisart sprachlich vereinfacht werden sollten. Dem entspricht Hurwitz' Notiz auf der nächsten Seite:

6. Von Januar 1896 bis Februar 1897

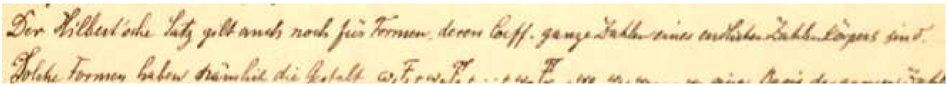

Der Hilbert'sche Satz gilt auch noch für Formen, deren Coeff. ganze Zahlen eines endlichen Zahlkörpers sind.
Solche Formen haben nämlich die Gestalt

Abbildung 3: „Der Hilbert'sche Satz gilt auch noch für Formen, deren Coeff. ganze Zahlen eines endlichen Zahlkörpers sind."[7]

Diese Verallgemeinerung ist dahingehend bemerkenswert, dass man sie als Grundlage einer späteren Version des Hilbertschen Basissatzes werten kann: *Der Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K ist Noethersch.*

Im Jahr 1891 veröffentlichten Hurwitz und Hilbert eine erste gemeinsame Note (Hilbert 1935, Bd. II, Nr. 17), in welcher sie verwenden, „daß eine gewisse, eine Anzahl Parameter enthaltende irreduzible ternäre Form auch für allgemeine ganzzahlige Werte dieser Parameter irreduzibel bleibt." (Blumenthal 1932, S. 393). Otto Blumenthal bezeichnet dies als Voraussetzung für Hilberts ‚Irreduzibilitätssatz' (Hilbert 1935, Bd. II, Nr. 18) von 1892. Zu diesem Zeitpunkt war der Einfluss noch stark auf Adolf Hurwitz' Seite.

Aus seinen ersten Jahren als Privatdozent in Königsberg, zu einer Zeit, in der Hilbert sich vornehmlich mit Zahlkörpertheorie auseinandersetzte, berichtet dieser von seinen gemeinsamen Spaziergängen mit Hurwitz, während derer die Theorien von Dedekind und Kronecker diskutiert wurden.

> „Einer nahm den Kroneckersches Beweis für die eindeutige Zerlegung in Primideale vor, der andere den Dedekindschen, und beide fanden wir scheußlich." (Blumenthal 1932, S. 397)

Trotz dieses kritischen Urteils erwies sich ihre Zusammenarbeit als äußerst ergiebig. Zuerst war es Hilbert, der eine Veröffentlichung aufbauend auf seinem Vortrag *‚Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale'*[8] aufsetzte. Darüber hinaus veröffentlichte Adolf Hurwitz, der sich ebenso mit algebraischen Zahlkörpern beschäftigte, ein Jahr später einen weiteren Beweis in seiner Arbeit *‚Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper'*. Diesen bezeichnete Hilbert als „bemerkenswert durch die Analogie mit dem Euklidischen Algorithmus in der elementaren Zahlentheorie" (Hilbert 1921, S. 165) und gab Hurwitz' Beweis in seinem berühmten *‚Zahlbericht'*[9] den Vorrang. Es macht den Anschein, dass selbst nach Hurwitz' Umsiedelung nach Zürich im Jahr

7. Wir können davon ausgehen, dass Hurwitz hier ‚algebraisch' anstelle von ‚endlich' meinte.
8. Gehalten in München im September 1893 bei einer Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
9. Eigentlich *‚Die Theorie der algebraischen Zahlkörper'*

1892 und Hilberts daran anschließender eigener Professur in Königsberg, der Jüngere noch unter leichtem Einfluss seines früheren Lehrers stand. Dieser Eindruck wird durch zwei Einträge von 1898 und 1899 im fünfzehnten[10] und im sechzehnten[11] Tagebuch (Hurwitz 1882-1919, Nr. 15, Nr. 16) verstärkt, beide mit direktem Bezug auf Hilberts *‚Zahlbericht'*. Im Verzeichis des Erstgenannten findet man den Titel „Zu Hilbert's „Körperbericht“ “ und die entsprechende Notiz beginnt mit den Worten:

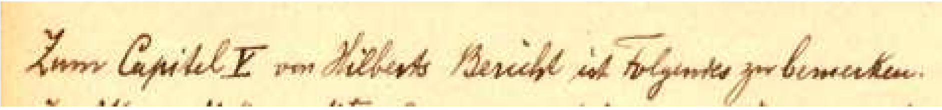

Zum Capitel V von Hilberts Bericht ist Folgendes zu bemerken.

Abbildung 4: „Zum Capitel V von Hilberts Bericht ist Folgendes zu bemerken.“

Im Folgenden setzt Hurwitz, unter Verwendung eines Resultats von Hilbert, dessen Arbeit über die Zusammensetzung von Idealen von Unterkörpern von Zahlkörpern fort. Zahlkörper werden hier mit K beziehungsweise k_i und Ideale mit ϑ beziehungsweise ϑ_i $(i = 1, 2, 12)$ bezeichnet.

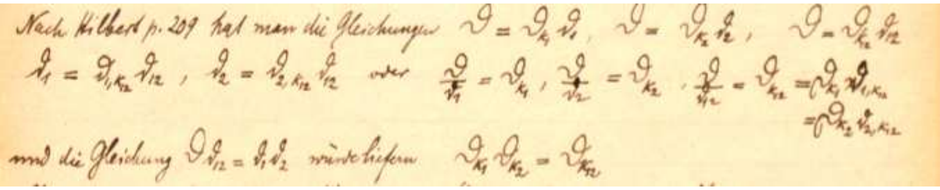

Nach Hilbert p. 209 hat man die Gleichungen $\vartheta = \vartheta_{k_1}\vartheta_1$, $\vartheta = \vartheta_{k_2}\vartheta_2$, $\vartheta = \vartheta_{k_{12}}\vartheta_{12}$
$\vartheta_1 = \vartheta_{1,k_{12}}\vartheta_{12}$, $\vartheta_2 = \vartheta_{2,k_{12}}\vartheta_{12}$ oder $\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \vartheta_{k_1}$, $\frac{\vartheta}{\vartheta_2} = \vartheta_{k_2}$, $\frac{\vartheta}{\vartheta_{12}} = \vartheta_{k_{12}} = \vartheta_{k_1}\vartheta_{1,k_{12}} = \vartheta_{k_2}\vartheta_{2,k_{12}}$
und die Gleichung $\vartheta\vartheta_{12} = \vartheta_1\vartheta_2$ würde liefern $\vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2} = \vartheta_{k_{12}}$

Abbildung 5: „Nach Hilbert p. 209 hat man [...] und die Gleichung $\vartheta\vartheta_{12} = \vartheta_1\vartheta_2$ würde liefern $\vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2} = \vartheta_{k_{12}}$“

Im Anschluss beweist Hurwitz zunächst die Konsequenz $\vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2} = \vartheta_{k_{12}}$ der Hilbertschen Formel und vergleicht diese mit seiner eigenen Vermutung.

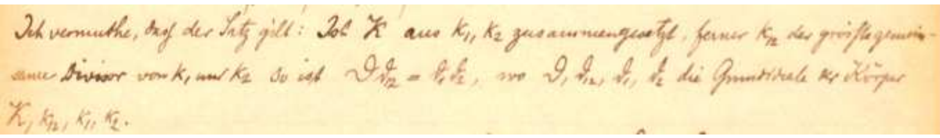

Ich vermuthe, daß der Satz gilt: Ist K aus k_1, k_2 zusammengesetzt, ferner k_{12} der größte gemeinsame Divisor von k_1 und k_2 so ist $\vartheta\vartheta_{12} = \vartheta_1\vartheta_2$, wo $\vartheta, \vartheta_{12}, \vartheta_1, \vartheta_2$ die Grundideale der Körper K, k_{12}, k_1, k_2.

Abbildung 6: „Ich vermuthe, daß der Satz gilt: Ist K aus k_1, k_2 zusammengesetzt, ferner k_{12} der größte gemeinsame Divisor von k_1 und k_2 so ist $\vartheta\vartheta_{k_{12}} = \vartheta_{k_1}\vartheta_{k_2}$, wo $\vartheta, \vartheta_{12}, \vartheta_1, \vartheta_2$ die Grundideale der Körper K, k_{12}, k_1, k_2.“[12]

10. Von Februar 1897 bis März 1898
11. Von März 1898 bis Februar 1899

Als Konsequenz leitet Hurwitz ein neues Resultat zu algebraischen Zahlkörpern ab:

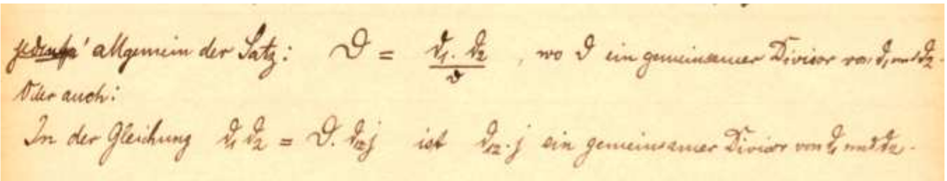

~~folglich~~ allgemein der Satz: $\vartheta = \frac{\vartheta_1 . \vartheta_2}{\vartheta}$, wo ϑ ein gemeinsamer Divisor von ϑ_1 und ϑ_2.
Oder auch:
In der Gleichung $\vartheta_1 \vartheta_2 = \vartheta . \vartheta_{12} j$ ist $\vartheta_{12} . j$ ein gemeinsamer Divisor von ϑ_1 und ϑ_2.

Abbildung 7: „[...] folglich besteht allgemein der Satz: $\vartheta = \frac{\vartheta_1 \cdot \vartheta_2}{\vartheta}$, wo ϑ ein gemeinsamer Divisor von ϑ_1 und ϑ_2.[13] Oder auch: In der Gleichung $\vartheta_1 \vartheta_2 = \vartheta \vartheta_{12} \cdot j$ ist $\vartheta_{12} \cdot j$ ein gemeinsamer Divisor von ϑ_1 und ϑ_2.“

Aus diesem Eintrag lässt sich schließen, dass Hurwitz den *‚Zahlbericht‘* als eine Art Lehrbuch verwendete. Vielmehr jedoch verdeutlicht die Notiz im sechzehnten Tagebuch, dass der Lehrer Hurwitz seinem vormaligen Schüler noch beratend zur Seite stand:

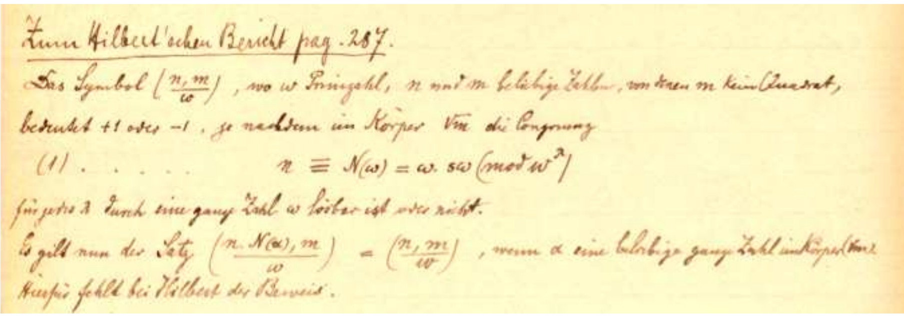

Zum Hilbert'schen Bericht pag. 287.
Das Symbol $\left(\frac{n,m}{\omega}\right)$, wo ω Primzahl, n und m beliebige Zahlen, von denen m kein Quadrat,
bedeutet +1 oder −1, je nachdem im Körper von $\sqrt{m}$ die Congruenz
(1) . . . . . $n \equiv N(\omega) = \omega . s\omega \pmod{\omega^\lambda}$
für jedes λ durch eine ganze Zahl ω lösbar ist oder nicht.
Es gilt nun der Satz $\left(\frac{n . N(\alpha), m}{\omega}\right) = \left(\frac{n, m}{\omega}\right)$, wenn α eine beliebige ganze Zahl im Körper $(\sqrt{m})$
Hierfür fehlt bei Hilbert der Beweis.

Abbildung 8: Unter der Überschrift „Zum Hilbert'schen Bericht pag. 287“ wird das Symbol $\left(\frac{n,m}{\omega}\right)$ behandelt, wobei ω prim, n und m beliebige Zahlen sind und m keine Quadratzahl sein soll.

Per Definition ist $\left(\frac{n,m}{\omega}\right)$ gleich $+1$ oder -1, abhängig davon, ob in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ die Kongruenz

$$n \equiv N(\omega) = \omega \cdot s\omega (\mathrm{mod} \omega^\lambda)$$

12. Die Verwendung der Bezeichnung ‚Grundideal‘ ist hier irreführend. Laut (Renschuch 1973) geht diese zurück auf eine Arbeit von Emmy Noether. Allerdings beschreibt Hilbert in (Hilbert 1935, Bd. I, S. 90), dass der Begriff bereits von Dedekind verwendet wurde und führt selbst den neuen Begriff ‚Differente‘ ein, der noch heute geläufig ist. Interessanterweise bezieht Hurwitz sich zwar auf Hilberts Arbeit, behält allerdings Dedekinds Wortwahl bei.

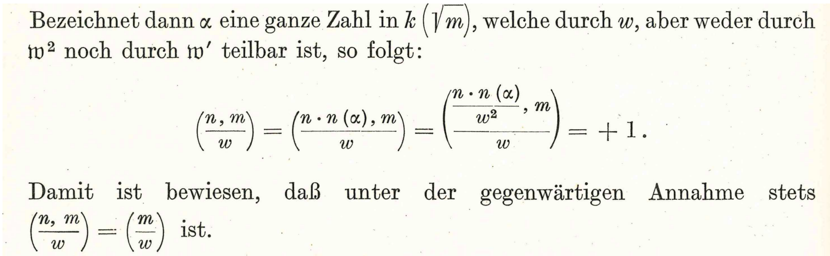
13. Wahrscheinlich vertauscht Hurwitz hier ϑ_{12} mit ϑ.

bei beliebigem λ eine Lösung für eine ganze Zahl ω besitzt (s und λ werden hier nicht näher bestimmt). Hurwitz schreibt: „Es gilt nun der Satz

$$\left(\frac{n \cdot N(\alpha), m}{\omega}\right) = \left(\frac{n, m}{\omega}\right),$$

wenn α eine beliebige ganze Zahl im Körper $(\sqrt{m})$.“[14] und fährt fort: „Hierfür fehlt Hilbert der Beweis.“

Tatsächlich lässt sich die aufgeführte Gleichung in Hilberts *‚Zahlbericht‘* zwei Seiten später ohne Beweis finden:


Bezeichnet dann α eine ganze Zahl in $k\left(\sqrt{m}\right)$, welche durch w, aber weder durch $\mathfrak{w}^2$ noch durch $\mathfrak{w}'$ teilbar ist, so folgt:

$$\left(\frac{n, m}{w}\right) = \left(\frac{n \cdot n(\alpha), m}{w}\right) = \left(\frac{\frac{n \cdot n(\alpha)}{w^2}, m}{w}\right) = +1.$$

Damit ist bewiesen, daß unter der gegenwärtigen Annahme stets $\left(\frac{n, m}{w}\right) = \left(\frac{m}{w}\right)$ ist.

Abbildung 9: Ausschnitt aus Hilberts ‚Zahlbericht‘, Seite 289 beziehungsweise (Hilbert 1935, Bd. I, S. 164).

Innerhalb einer Tagebuchseite füllt Hurwitz Hilberts Lücke und beweist die Gleichung unter Verwendung einer geschickten Fallunterscheidung:

Abbildung 10: „Also wird $n\eta \cdot s\eta \equiv x\eta \cdot sx \cdot s\eta(\omega^{\lambda-1})$ und $n \equiv x \cdot sx(\omega^{\lambda-2})$ q.e.d.“

Offensichtlich arbeitete Hurwitz zu diesem Zeitpunkt nicht nur mit Hilberts *‚Zahlbericht‘*, sondern führte darüber hinaus noch Verbesserungen durch.

Aus Gründen der Vollständigkeit soll hier ein Eintrag erwähnt werden, der allerdings nur Spekulationen zulässt: Im dreiundzwanzigsten Tagebuch[15] (Hurwitz 1882-1919, Nr. 23) von 1908 führt Hurwitz eine Aufgabe mit der Überschrift „Über die kürzeste Linie auf einem Parallelepiped“an. Bemerkenswerterweise trägt ein Artikel von Hilbert von 1895 den sehr ähnlichen Titel *‚Über die gerade Linie als*

14. Es ist anzunehmen, dass Hurwitz hier einen algebraischen Zahlkörper $K(\sqrt{m})$ meint.
15. Von Januar 1908 bis Februar 1910

kürzeste Verbindung zweier Punkte'. Da diese beiden Abhandlungen jedoch mit einem Abstand von dreizehn Jahren verfasst wurden, werden sie hier nicht weiter behandelt.

Vielmehr soll die Analyse chronologisch weitergeführt werden mit einem Eintrag aus dem neunzehnten Tagebuch[16] (Nr. 19) von 1902.

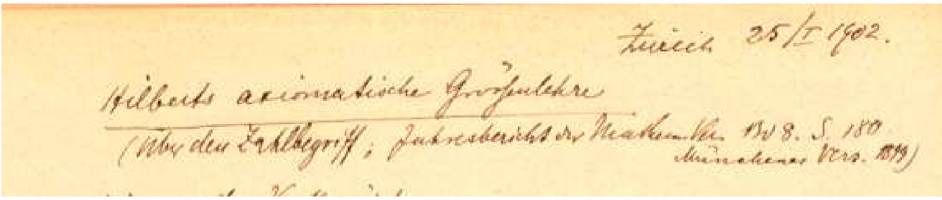
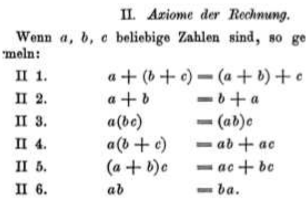


Abbildung 11: Der Tagebucheintrag trägt den Titel „Hilberts axiomatische Größenlehre", wobei Hurwitz sich auf Hilberts Vortrag ‚Über den Zahlbegriff' (Hilbert 1900b) bezieht.

Im Anschluss an seine Auseinandersetzung mit der Axiomatisierung der Geometrie widmete Hilbert sich der Entwicklung einer entsprechenden Axiomatisierung der Arithmetik. Hierbei forderte er insbesondere die komplette Widerspruchsfreiheit und wurde somit Verfechter einer neuen philosophischen Ausrichtung innerhalb der Mathematik: der vollständigen Begründung der Mathematik auf einem in sich geschlossenen Axiomensystem[17]. Sein bereits erwähnter Vortrag ebenso wie sein darauf aufbauender Artikel (Hilbert 1900b) werden in dieser Entwicklung als Meilensteine anerkannt. Was in diesem Zusammenhang Hurwitz' Tagebucheintrag erwähnenswert macht, ist die Tatsache, dass er eine exakte Abschrift aus Hilberts Arbeit darstellt. Insbesondere enthält er keinerlei zusätzliche Informationen.


II. *Axiome der Rechnung.*

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so ge
meln:

II 1.	$a+(b+c)$	$=(a+b)+c$
II 2.	$a+b$	$=b+a$
II 3.	$a(bc)$	$=(ab)c$
II 4.	$a(b+c)$	$=ab+ac$
II 5.	$(a+b)c$	$=ac+bc$
II 6.	ab	$=ba.$

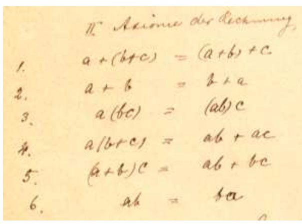


Abbildung 12: Ausschnitt aus Hilberts Publikation (Hilbert 1900b) sowie Hurwitz' Tagebucheintrag, „II. Axiome der Rechnung. [...]".

16. Von November 1901 bis März 1904

17. Hilbert gilt häufig als einer der vehementesten so genannten Formalisten. Tatsächlich war seine mathematikphilosophische Haltung auf Grund seines Austauschs mit einer Vielzahl von Mathematikern in stetigem Wandel; lesenswerte Informationen hierzu u.a. in (Tapp 2013).

Schritt für Schritt, beziehungsweise Axiom für Axiom folgt Hurwitz den Regeln Hilberts für Operationen, Rechnung, Ordnung und Stetigkeit sowie seinen Schlussfolgerungen:

Abbildung 13: „Einige Bemerkungen über die Abhängigkeit der Axiome hat Hilbert hinzugefügt:“.

Darüber hinaus eignet er sich Hilberts neue Terminologie an:

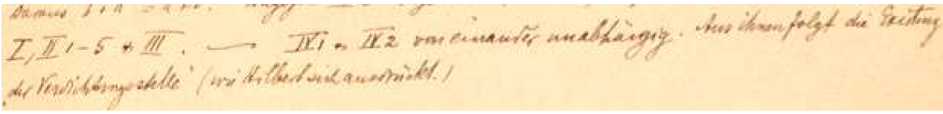


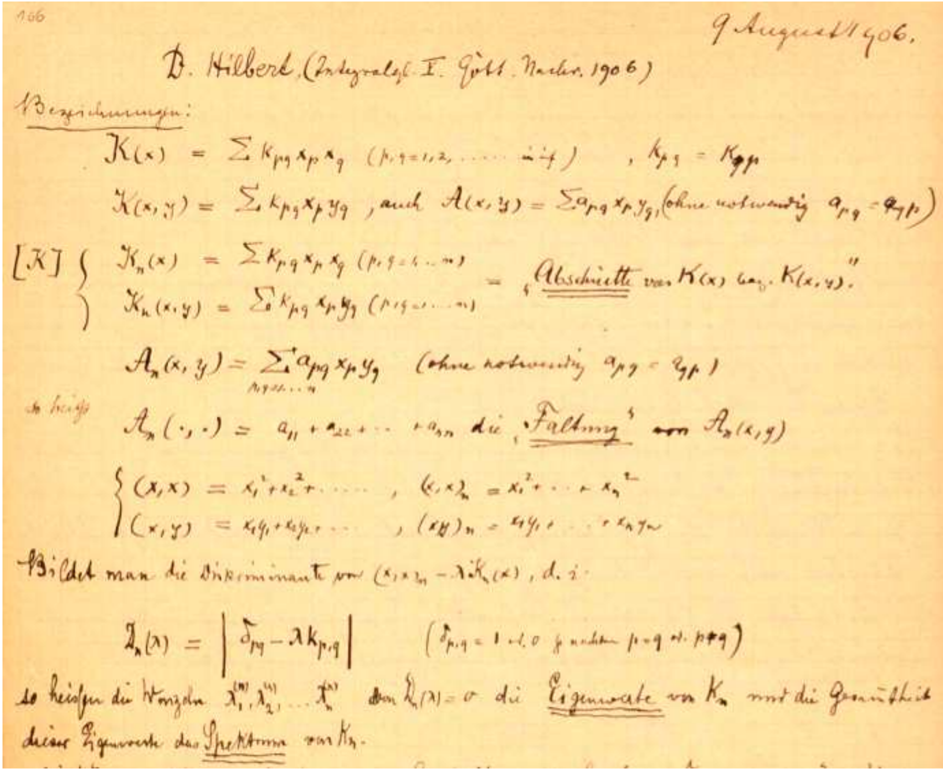
Abbildung 14: „Aus ihnen folgt die Existenz der „Verdichtungsstelle“(wie Hilbert sich ausdrückt.)“.

Es entsteht zum einen der Eindruck, dass Hilberts Konzept für Hurwitz völlig neu war, zum anderen, dass Hurwitz gewillt war, Verständnis für Hilberts Axiomatisierung zu entwickeln. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es, obwohl diese Epoche der Mathematik von Grundlagenfragen bestimmt war, keinerlei Hinweise darauf gibt, dass Adolf Hurwitz sich jemals tiefgehend mit mathematikphilosophischen Problemstellungen beziehungsweise der Neubegründung der Mathematik auseinandergesetzt hat. Hier ist deutlich erkennbar, dass das Lehrer-Schüler-Verhältnis dabei war, überwunden zu werden. Sicherlich sind Adolf Hurwitz und David Hilbert zu diesem Zeitpunkt längst als gleichgestellte, unabhängige Mathematiker zu betrachten.[18]

Recht offensichtlich wird Hilberts Einfluss durch einen Eintrag im einundzwanzigsten Tagebuch[19] (Hurwitz 1882-1919, Nr. 21) vom 9. August 1906, welcher mit „D. Hilbert (Integralgl. V. Gött. Nachr. 1906)“ betitelt ist. Dieser bezieht sich auf die fünfte Mitteilung zu Hilberts Artikel *‚Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen‘* (Hilbert 1906) von 1906. In seiner Arbeit führt Hilbert eine neue Terminologie ein und benutzt Konzepte der linearen Algebra

18. Das Jahr 1900 war auch das Jahr, in dem Hilbert seine wegweisenden dreiundzwanzig Probleme auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris vorstellte (Hilbert 1900a).
19. Von Februar 1906 bis Dezember 1906

zur Bearbeitung von Integralgleichungen. Seine Methode beruht auf der Symmetrie der Koeffizienten und deren Äquivalenz zur Symmetrie des Kerns der Integralgleichungen (siehe (Blumenthal 1932, S. 411)). In der vierten (Hilbert 1904) und fünften Mitteilung, auf die Hurwitz sich bezieht, werden Hilberts Ergebnisse auf Bilinearformen mit unendlich vielen Variablen erweitert. Hurwitz notiert sich detailliert Hilberts Definitionen für „Abschnitte“ und „Faltung“ sowie für „Eigenwerte“, „Spektrum“ und „Resolvente“.


166

9 August 1906.

D. Hilbert (Integralgl. I. Gött. Nachr. 1906)

Bezeichnungen:

$K(x) = \sum k_{pq} x_p x_q \quad (p,q = 1,2,\ldots \text{ ad inf}), \quad k_{pq} = k_{qp}$

$K(x,y) = \sum k_{pq} x_p y_q$, auch $A(x,y) = \sum a_{pq} x_p y_q$ (ohne notwendig $a_{pq} = a_{qp}$)

$[K] \begin{cases} K_n(x) = \sum k_{pq} x_p x_q \quad (p,q = 1 \ldots n) \\ K_n(x,y) = \sum k_{pq} x_p y_q \quad (p,q = 1 \ldots n) \end{cases}$ = „Abschnitte von $K(x)$ bez. $K(x,y)$.“

$A_n(x,y) = \sum_{p,q=1\ldots n} a_{pq} x_p y_q$ (ohne notwendig $a_{pq} = a_{qp}$)

so heisse $A_n(\cdot,\cdot) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ die „Faltung“ von $A_n(x,y)$

$\begin{cases} (x,x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots, & (x,x)_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ (x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots, & (xy)_n = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{cases}$

Bildet man die Diskriminante von $(x,x)_n - \lambda K_n(x)$, d.i.

$\Delta_n(\lambda) = \left| \delta_{pq} - \lambda k_{pq} \right| \quad (\delta_{pq} = 1 \text{ od. } 0 \text{ je nachdem } p = q \text{ od. } p \neq q)$

so heissen die Wurzeln $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots \lambda_n^{(n)}$ von $\Delta_n(\lambda) = 0$ die Eigenwerte von K_n und die Gesamtheit dieser Eigenwerte das Spektrum von K_n.

Abbildung 15: Ausschnitt aus Hurwitz einundzwanzigstem Tagebuch. Die neu definierten Begriffe sind doppelt unterstrichen.

Tatsächlich wurden diese Begriffe von Hilbert selbst eingeführt. Auf Seite 459 der fünften Mitteilung schreibt er beispielsweise: „Die Werte [...] sind wesentlich durch den Kern(s,t) bestimmt; ich habe sie *Eigenwerte* bez. *Eigenfunktionen* [...] genannt.“ Es scheint so, dass Hurwitz bis zu diesem Zeitpunkt mit Hilberts Konzept noch nicht vertraut war. Ein Hinweis darauf, ist das Hervorheben durch doppeltes Unterstreichen, ein anderer etwa das Setzen gewisser Ausdrücke in Anführungszeichen auf der zweiten Seite. Hier erörtert Hurwitz resultierende Gleichungen:

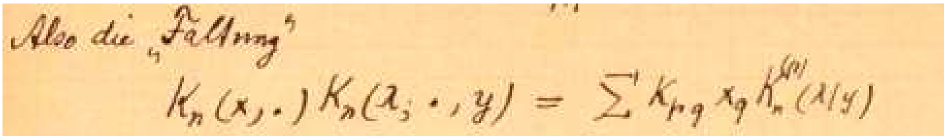


Abbildung 16: „Also die „Faltung" $K_n(x,\cdot)K_p(\lambda_j\cdot,y) = \sum K_{pq}x_qK_n^{(p)}(\lambda/y)$".

Dies verdeutlicht den ungewohnten Gebrauch von Hilberts Notation. Einige Tage später vervollständigt Adolf Hurwitz seine Analyse in einem Eintrag vom 2. September 1906. Er schreibt:

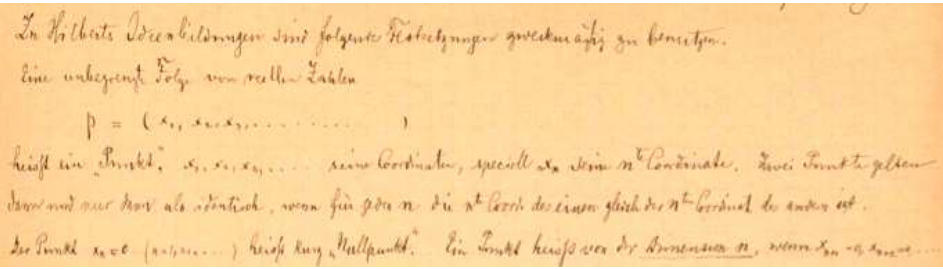


Abbildung 17: „In Hilberts Ideenbildung sind folgende Fortsetzungen zweckmäßig zu benutzen [...]".

Im Folgenden definiert Hurwitz erneut eine Reihe von Begriffen und führt im daran anknüpfenden Eintrag vom 16. September 1906 einen Satz über quadratische Formen an.

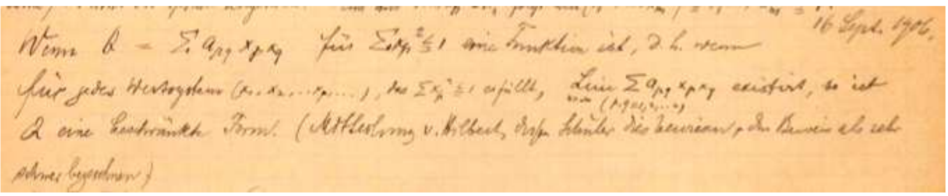


Abbildung 18: „Wenn $Q = \sum a_{pq}x_px_q$ für $\sum x_p^2 \leq 1$ eine Funktion ist, d.h. wenn für jedes Wertsystem $(x_1, x_2, \cdots, x_p, \cdots)$, das $\sum x_p^2 \leq 1$ erfüllt, $Lim_{n=\infty(p,q=1,2,\ldots n)} \sum a_{pq}x_px_q$ existiert, so ist Q eine beschränkte Form. (Mitteilung v. Hilbert, daß Schüler dies bewiesen, den Beweis als sehr schwer bezeichnen.)"

Diesen untersucht Hurwitz genauso wie dessen Beweis. Er gibt auf den Tagebuchseiten 170 und 171 einige Umformulierungen an und stellt schließlich zwei Seiten später einen neuen Satz auf.

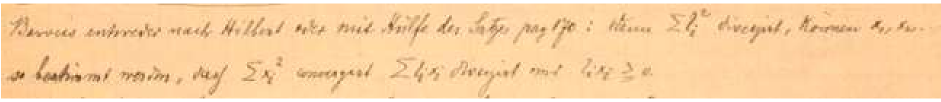


Abbildung 19: „Beweis entweder nach Hilbert oder mit Hilfe des Satzes pag 170 [...]“.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich weiter mit linearen und quadratischen Formen, was hier allerdings nicht vertieft wird. Hingegen hervorgehoben werden soll die Tatsache, dass Hurwitz sich nicht ausschließlich mit Hilberts Ideenbildung auseinandersetzte, sondern er sich darüber hinaus eine völlig neue Theorie seines Kollegen aneignete. Sicherlich nahm Hurwitz sich zu diesem Zeitpunkt nicht mehr als Hilberts Lehrer wahr.

Dies wird ein Jahr später offenkundig, als David Hilbert 1907 in der sechsten Mitteilung (Hilbert 1910)[20] die analytische Neubegründung der Minkowkischen Theorie der Volumen und Oberflächen konvexer Körper gelang. An dieser Aufgabe hatte sich 1901 und 1902 bereits Hurwitz versucht. So lautet der Titel eines Eintrags im achtzehnten Notizbuch[21] (Hurwitz 1882-1919, Nr. 18) über einen Kolloquiumsvortrag vom 21. Januar 1901:

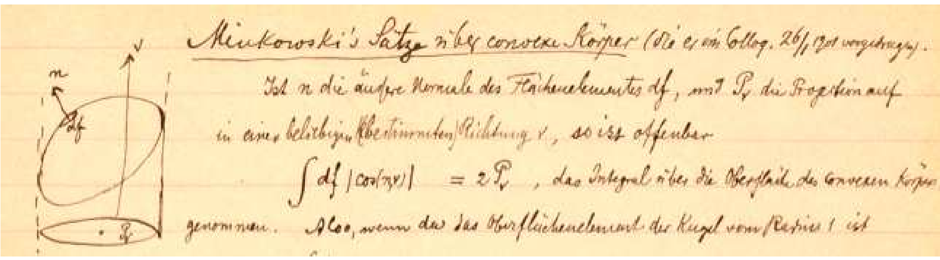


Abbildung 20: „<u>Minkowski's Sätze über konvexe Körper</u> [...]“.

Darin untersucht Hurwitz eine Vielzahl an Fragestellungen zu konvexen Körpern, schließt allerdings nach vier rechenreichen Seiten mit der Bemerkung:

20. Diese wurde erst 1910 veröffentlicht.
21. Von Dezember 1900 bis Oktober 1901

Abbildung 21: „Es bleibt fraglich, ob man hier zu einfachen Resultaten durchdringen kann."

Offensichtlich waren seine Ergebnisse nicht zufriedenstellend. Im darauf folgenden Jahr veröffentlichte Adolf Hurwitz einen Artikel (Hurwitz 1902), in dem er einen ersten Versuch einer entsprechenden Neubegründung notierte, „mit seiner Theorie der Kugelfunktionen [...], hatte aber nur einen Teilerfolg erzielt. Hilbert, im Besitze der mächtigen Hilfsmittel der Integralgleichungen, ersetzt die Kugelfunktionen durch allgemeinere, und kommt durch." (Blumenthal 1932, S. 414)[22]

Im Zuge von Hilberts Weiterentwicklung als zunehmend einflussreicher Mathematiker und Wegbereiter wird die Unabhängigkeit seiner Arbeiten immer deutlicher. Spätestens das Jahr 1907 markiert einen finalen Wendepunkt in der Lehrer-Schüler-Beziehung der beiden Mathematiker. Insbesondere beschreibt Blumenthal eine hierfür bemerkenswerte Situation: In einer kurzen Mitteilung (Hurwitz 1908) vom 20. November 1907 beweist Adolf Hurwitz eine Variation des so genannten Waringschen Problems. Diese zahlentheoretische Vermutung, aufgestellt von dem englischen Mathematiker Edward Waring (1736 - 1798) in seiner Arbeit *‚Meditationes algebraicae'* von 1770, besagt, dass es für jeden Exponenten $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl m gibt, so dass jede natürliche Zahl als Summe von mindestens m vielen k-ten Potenzen dargestellt werden kann. Hurwitz zeigt,

> „Ist die n-te Potenz von $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ identisch gleich einer Summe $(2n)$-ter Potenzen linearer rationaler Formen der x_1, x_2, x_3, x_4, und gilt die Waringsche Behauptung für n, so gilt sie auch für $2n$." (Blumenthal 1932, S. 415)

Dazu äußerte Otto Blumenthal: „Dieser Satz gab Hilbert die Anregung und Richtung zu seinen Untersuchungen. Er fand nämlich einen ungeahnten Weg, um für beliebige n eine Identität der von Hurwitz geforderten Art aufzustellen." Darüber hinaus leitete Hilbert „aus einem allgemeinen Prinzip, das Hurwitz 1897 in der Invariantentheorie benutzt hatte, eine Formel [...]" ab, womit es ihm gelang, „den durch die Integration geforderten Grenzübergang in die Koeffizienten der Summe zu verlegen und schließlich durch einen weiteren Kunstgriff diese Koeffizienten durch positive rationale zu ersetzen. Damit ist die Grundlage für den Beweis des

22. Zum einen ist es bemerkenswert, dass Hurwitz, obwohl er die Mitteilungen Hilberts eingehend studierte, nicht selbst die Methode der Integralgleichungen verwendete. Zum anderen sei hier erwähnt, dass sich Hilberts Dissertationsschrift mit Kugelfunktionen beschäftigte. Interessanterweise ist diese Doktorarbeit Hurwitz gewidmet.

Waringschen Satzes gelegt.“ (S. 415) Schließlich beweist Hilbert das Waringsche Problem (Hilbert 1909) und liefert damit einen unumstößlichen Beweis für seine mathematische Emanzipation:

> „Denn er kämpfte zusammen mit einem Meister von dem hohem Range Hurwitz's und siegte mit den Waffen aus Hurwitz's Rüstkammer an einem Punkte, wo dieser keine Aussicht auf Erfolg gesehen hatte.“ (Blumenthal 1932, S. 416)

Mit dieser aussagekräftigen Einschätzung Otto Blumenthals soll diese Analyse der Tagebuchenträge Adolf Hurwitz' über den mathematischen Austausch zweier großer Mathematiker mit einigen bezeichnenden Worten Hilberts geschlossen werden. Diese heben hervor, dass Hurwitz „[...] gern bereit zur Anerkennung der Leistungen anderer [war] und von aufrichtiger Freude erfüllt über jeden wissenschaftlichen Fortschritt an sich: ein Idealist im guten altmodischen Sinne des Wortes.“ (Hilbert 1921, S. 164)

Ein persönlicher Einblick

Neben den mathematischen Tagebüchern stößt man in dem Nachlass im Archiv der ETH Zürich auf weitere Hinweise über die facettenreiche Beziehung zwischen David Hilbert und Adolf Hurwitz. Letzterer war auf Grund seiner lebenslangen instabilen Konstitution ein seltener Teilnehmer bei Konferenzen außerhalb Zürichs. Dementsprechend lassen sich mehrere Grußkarten[23] finden, von „Lutetia Parisiorum, le 12 aout 1900“, dem „Landau-Kommers 18. Jan. 1913“ wie auch dem „Dirichletkommers am 13. Februar 1905“.

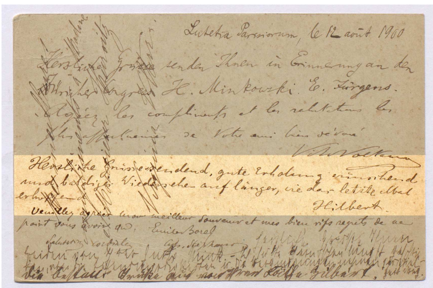


Abbildung 22: Grußkarten vom „Lutetia Parisiorum“ und dem „Landau-Kommers“.

23. Im Verzeichnis Hs 583: 52,53 und 57

Jede dieser Karten ist unterzeichnet von einer Vielzahl von Mathematikern, wobei die ersten beiden die Handschrift David Hilberts zeigen. Auf der Karte aus Paris (siehe linke Photographie in Abb. 22) schrieb er, „Herzliche Grüße sendend, gute Erholung wünschend und baldiges Wiedersehen auf länger, wie das letzte Mal erhoffend. Hilbert“.

Darüber hinaus verdeutlichen einige Dokumente die enge Beziehung zwischen den Familien Hurwitz und Hilbert. So gibt es mehrere Mitschriften zu Vorlesungen Hilberts von Adolf Hurwitz’ älterem Bruder Julius, der ebenso Mathematikstudent in Königsberg war. Auf einigen dieser Skripte befinden sich Hilberts handschriftliche Notizen und Kommentare und in der umfangreichen Korrespondenz zwischen Hilbert und Adolf Hurwitz konnte auch ein Briefaustausch mit Julius Hurwitz gefunden werden (siehe (Oswald 2014, Sec. 2.3)).

In einem zusätzlichen zweiunddreißigsten Notizbuch[24] vervollständigte Adolf Hurwitz’ jüngerer Kollege Georg Pólya nach Hurwitz’ Tod die mathematischen Tagebücher durch ein Register. Neben dieser Liste stehen die Notizen:

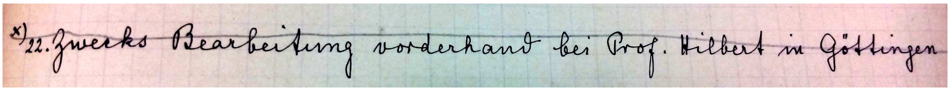


Abbildung 23: „22. zwecks Bearbeitung vorderhand bei Prof. Hilbert in Göttingen“

sowie eine ähnlich lautende Notiz mit Bezug auf die ersten neun Bände, welche im Nachhinein mit Bleistift ausgestrichen wurden. Offenbar hatte Hilbert diese Bücher ausgeliehen und zurückgegeben. Im Nachhinein ist es schwer rekonstruierbar, wann genau beziehungsweise wie lange er die Notizbücher inspizierte, es gibt jedoch zwei Hinweise. In seiner Gedächtnisrede spricht Hilbert von Hurwitz’ Aufzeichnungen:

> „Hurwitz hat seit seiner Habilitation 1882 in ununterbrochener Regelmäßigkeit von allem, was ihn wissenschaftlich beschäftigte, Aufzeichnungen gemacht und auf diese Weise eine Serie von 31 Tagebüchern hinterlassen, die ein getreues Bild seiner beständig fortschreitenden Entwicklung geben und zugleich eine reiche Fundgrube für interessante und zur weiteren Bearbeitung geeignete Gedanken und Probleme sind.“ (Hilbert 1921, S. 166)[25]

24. Im Verzeichnis Hs 582: 32

25. Tatsächlich sind es nur dreißig Tagebücher. Es existiert ein zusätzliches Notizbuch, in welchem Hurwitz Arbeiten anderer Mathematiker notierte, jedoch keine eigenen Gedanken.

Daraus ist ersichtlich, dass Hilbert die Tagebücher bereits vor 1920 durchgesehen hatte und darüber hinaus, dass er sie als Quelle neuer mathematischer Inspirationen sah.

In einem Kondolenzbrief[26] an Ida Samuel-Hurwitz vom 15. Dezember 1919, nur vier Wochen nach dem Tod ihres Ehemanns, schreibt Hilbert, dass für ihn und Georg Pólya die „Angelegenheit der Herausgabe der Abhandlungen von Hurwitz unsere wichtigste Sorge" ist. Er bietet an: „Die Verhandlungen könnte ich durch einen hiesigen sehr gewandten math. Kollegen mündlich mit [Julius] Springer führen lassen."[27] Es dauerte noch einige Jahre, bevor sein und Pólyas Einsatz für das mathematische Vermächtnis ihres Freundes und Kollegen von Erfolg war. Adolf Hurwitz' *‚Mathematische Werke'* (Hurwitz 1932) wurden 1932 publiziert.

Literaturverzeichnis

Blumenthal, Otto. 1932. Lebensgeschichte. *Gesammelte Abhandlungen von David Hilbert Hilbert 1935* Bd. 3:388–429.

Gray, Jeremy. 2008. *Plato's ghost: The modernist transformation of mathematics.* Princeton University Press.

Hilbert, David. 1890. Ueber die Theorie der algebraischen Formen. *Math. Ann.* 36:473–534.

———. 1900a. Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. *Gött. Nachr.* 1900:253–297.

———. 1900b. Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8:180–183.

———. 1903. *Grundlagen der Geometrie.* 2. Aufl. B. G. Teubner.

———. 1904. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung. *Gött. Nachr.* 1904:49–91.

———. 1906. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Fünfte Mitteilung. *Gött. Nachr.* 1906:439–480.

———. 1909. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem). *Math. Ann.* 67:281–300.

26. Im Verzeichnis Hs 583: 28
27. Wahrscheinlich spricht Hilbert von Richard Courant, seinem frühreren Studenten und zu dieser Zeit Professor in Göttingen, mit dem er die ‚Gelbe Buchreihe' im Springer Verlag gegründet hat.

Hilbert, David. 1910. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Sechste Mitteilung. *Gött. Nachr.* 1910:355–417.

———. 1920. Adolf Hurwitz, Gedächtnisrede gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 15. Mai 1920 von David Hilbert. *Gött. Nachr.* 1920:75–83.

———. 1921. Adolf Hurwitz. *Math. Ann.* 83:161–172.

———. 1931. Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre. *Math. Ann.* 104:485–494.

———. 1935. *Gesammelte Abhandlungen, 3 Bände.* Springer.

Hurwitz, Adolf. 1882-1919. *Mathematische Tagebücher, in: Hurwitz, A., wissenschaftlicher Teilnachlass Hs 582, Hs 583, Hs 583a, ETH Zurich University Archives.* in digitaler Form unter http://dx.doi.org/10.7891/e-manuscripta-12810.

———. 1902. Sur quelques applications geometriques des séries de Fourier. *Ann. Ec. norm. Sup. (3)* 19:357.

———. 1908. Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summe von n-ten Potenzen ganzer Zahlen. *Math. Ann.* 65:424–427.

———. 1932. *Mathematische Werke. Bd. 1. Funktionentheorie; Bd. 2. Zahlentheorie, Algebra und Geometrie.* Birkhäuser, Basel.

Oswald, Nicola. 2014. *Hurwitz's complex continued fractions - a historical approach and modern perspectives.* Dissertation (eingereicht).

Oswald, Nicola, und J. Steuding. 2014. Complex Continued Fractions – Early Work of the Brothers Adolf and Julius Hurwitz. *Arch. Hist. Exact Sci.* 68:499–528.

Reid, Constanze. 1970. *Hilbert.* 138–139. Springer.

Renschuch, Bodo. 1973. Zur Definition der Grundideale. *Mathematische Nachrichten* 55 (1 - 6): 63–71.

Rowe, David E. 2007. Felix Klein, Adolf Hurwitz, and the "Jewish question" in German academia. *Math. Intelligencer* 29:18–30.

Tapp, Christian. 2013. *An den Grenzen des Endlichen - Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus.* Springer - Spektrum.

Die Neue Mathematik am Beispiel des *alef*-Programms im Vergleich zu Kühnels *Neubau des Rechenunterrichts* – Eine didaktische Revolution?

Tanja Hamann

Die am 3.10.1968 von der Kultusministerkonferenz beschlossenen *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen* (KMK, 1968) schrieben die Einführung der sogenannten Neuen Mathematik (auch: Moderne Mathematik) an allen allgemeinbildenden Schulen der Bundesrepublik Deutschland ab 1972 vor. Zentrale Ziele der Neuorientierung umfassten die Vermittlung mathematischer Denkweisen, Konzepte und grundlegender Strukturen (ebd., 1 f.), die im Sinne eines Spiralcurriculums als Leitideen den Unterricht von der 1. bis zur 13. Klasse strukturieren sollten (ebd., 4). Die damit notwendig einhergehende inhaltliche Neugestaltung manifestierte sich vorwiegend in der Einführung des Mengenbegriffs. Obwohl die Reform gemäß der Empfehlungen „möglichst auch an traditionellen Stoffgebieten" (ebd., 1) umgesetzt werden sollte, gilt sie – besonders im Hinblick auf den Unterricht der Grundschule – heute als Bruch in der Geschichte des mathematischen Unterrichts und der Mathematikdidaktik (so z. B. Radatz & Schipper, 1983, 46; Karaschewski, 1969, V); die zunächst vorrangig inhaltlichen Neuerungen wurden in der Umsetzung um zahlreiche methodische erweitert, Ellrott & Schindler (1975, 43) sprechen gar von einer „völlige[n] Veränderung der Lehr- und Lernmethoden und der Unterrichtsorganisation". Nichtsdestotrotz finden sich in der Literatur auch gegenteilige Positionen, die die Neue Mathematik als Weiterführung der traditionellen Rechendidaktik darstellen (z. B. Griesel; für eine knappe Übersicht über die unterschiedlichen Positionen vgl. Schmidt, 1978, 1).

Die auseinandergehenden Interpretationen fordern einen Blick in die Quellen, einen Vergleich der Konzepte und eine differenziertere Beschreibung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Erschwert wird ein solches Unterfangen dadurch, dass es **die** Rechendidaktik ebenso wenig gab wie **die** Neue Mathematik. Fehlende wissenschaftliche Institutionalisierung führte zu einem Nebeneinander verschiedener methodischer Ausformungen des Rechenunterrichts (Wagemann, 1984, 103); in groben Zügen lassen sich als Hauptrichtungen der ganzheitliche Unterricht nach J. Wittmann, die sachlich orientierte Didaktik W. Breidenbachs sowie der traditionelle Rechenunterricht, als dessen bekanntester Vertreter J. Kühnel gilt, unterscheiden (vgl. Wagemann, 1984, 110-113; Radatz, 1983, 44 f.). Den Grundschullehrwerken zur Neuen Mathematik liegen ebenfalls verschiedene Konzeptionen zugrunde, beispielhaft seien hier die Werke *Mathematik in der Grundschule* von A. Fricke und H. Besuden (vgl. Fricke & Besuden, 1970) und *Wir lernen Mathematik* von W. Neunzig und P. Sorger (vgl. Neunzig & Sorger, 1969) genannt. Während Fricke & Besuden ihren operativen Zugang ausdrücklich auf die Forschungsergebnisse J. Piagets beziehen (und damit auf ein der Neuen Mathematik zeitlich vorgelagertes Konzept, das Wagemann auch als vierten Strang der Rechendidaktik identifiziert), greifen Neunzig & Sorger explizit die Ideen von Z. P. Dienes auf.

An dieser Stelle kann ein Vergleich daher nur in Ansätzen und exemplarisch erfolgen, anhand ausgewählter Quellen, die dennoch geeignet scheinen – ungeachtet der konzeptuellen Unterschiede – beispielhaft grundsätzliche Kernideen beider Richtungen zu verdeutlichen. Als Quelle für die Konzeption des Rechenunterrichts wird Johannes Kühnels Hauptwerk *Neubau des Rechenunterrichts* herangezogen, als Quelle für die der Neuen Mathematik zugrundeliegenden Ziele und Prinzipien der Lehrgang *alef* von Heinrich Bauersfeld und weiteren Autoren. Beide werden im Hinblick auf die formulierten didaktischen Ideen zunächst beschrieben[1] – wobei auch dies hier nicht erschöpfend geleistet werden kann, (zu Kühnel vgl. ausführlicher Selter, 1997) –, die Gegenstände des anschließenden Vergleichs ergeben sich aus dieser Beschreibung.

Neubau des Rechenunterrichts von J. Kühnel

Johannes Kühnel (1869 – 1928) – als ausgebildeter und praktizierender Volksschul- und Seminarlehrer, der nach mehrjähriger Berufserfahrung ein Pädagogikstudium und schließlich eine Promotion absolvierte, sowohl mit der Praxis als auch der Theorie von Unterricht vertraut (zu Biographie und Publikationen von Kühnel

1. Für bessere Vergleichbarkeit und leichtere Einordnung wird hierfür vorwiegend heutige Terminologie verwendet.

vgl. Schmidt, 1978, 615-622) – veröffentlichte sein zweibändiges Hauptwerk *Neubau des Rechenunterrichts* erstmals im Jahr 1916[2]. Das Werk erfuhr zahlreiche Neuauflagen, mutmaßlich die 11. und letzte im Jahr 1966 (seit der 7. Auflage von 1941 unter leicht verändertem Titel und jeweils in nur einem Band herausgegeben von Eugen Koller), was für eine breite Rezeption desselben über einen bemerkenswerten Zeitraum spricht.

Kühnel beginnt seinen „Neubau“[3] mit dem Wunsch nach Einriss des alten Unterrichtsgebäudes, das er stark kritisiert. Schwerpunkte der Kritik am mathematischen Anfangsunterricht um 1900 liegen in einer verfrühten Abstraktion durch unmittelbare Einführung eines allgemeinen Zahlbegriffs, die ihren Ursprung in der Orientierung am Denken eines Erwachsenen hat und methodisch im wiederkehrenden Abarbeiten einer eindeutig festgelegten Stufenfolge festgeschrieben ist (vgl. beispielhaft Kühnel, 1919 I, 21 f.). Der Wunsch nach Schematisierung, der in einer solchen Methodik ihren Ausdruck findet, ist auch maßgeblich für die Auswahl der Inhalte: Vermittelt werden ausschließlich schematische und eindeutige Lösungswege („Normalverfahren“, I, 12) für denkbare Rechenfälle des täglichen Lebens, was zu unverstandener Mechanisierung, Stofffülle und Vorratslernen führt (I, 43 f.). Der Erfolg bleibt aus: Schulabgänger sind häufig nicht in der Lage einfache Rechenaufgaben zu lösen (I, 1).

Beeinflusst von den psychologischen Erkenntnissen seiner Zeit (vgl. Selter, 1997, 23 f.) fordert Kühnel deutlich eine Ablösung des Stoffprinzips durch das psychologische Prinzip und damit die Berücksichtigung der Tatsache, dass ein bestimmtes Maß an Abstraktion erst Kindern eines gewissen Alters möglich ist (I, 148), jede Verfrühung daher abzulehnen ist. Generell spricht er sich dafür aus, dass Entwicklungen aus der Wissenschaft sich in der Methodik des Unterrichts in Form einer Verwissenschaftlichung des Rechenunterrichts niederschlagen, diese Forderung ist jedoch keineswegs mathematisch-inhaltlich zu verstehen, sondern auf die Umsetzung psychologischer und pädagogischer Erkenntnisse beschränkt (I, 45 u. 136).

Kühnel beschreibt den Zahlbegriffserwerb des Kindes als Folge von Stufen verschiedener Abstraktionen, die von unbestimmten Anzahlbegriffen (viel/wenig) (I, 59 f.) über an simultane Mengenauffassung gebundene Anzahlerfassung (1-4) (I, 67 f.) bis zum Erwerb der dezimalen Struktur der Zahlen innerhalb des Systems ebenso fortschreiten (I, 76), wie von der Konkretisierung der Zahl durch Dingmengen bis hin zur Erfassung des symbolischen Charakters der Zahl und schließlich der Ziffer (I, 73 f.). Ziel ist ein Zahlverständnis, wie es durch rein mechanische

2. Aus Gründen der Verfügbarkeit wird hier mit der 2. Auflage von 1919 gearbeitet.

3. Sofern nicht anders angegeben alles Folgende aus Kühnel (1919). Da die Seiten der zwei Bände nicht fortlaufend nummeriert sind, wird jeweils durch eine entsprechende römische Ziffer gekennzeichnet, aus welchem Band zitiert wird.

Aneignung der Zahlwortreihe kaum erreicht werden kann (I, 58 f.), dennoch spielt das Zählen eine gewichtige Rolle (I, 71). Kühnel berücksichtigt dabei verschiedene Zahlaspekte. In der Forderung nach der Arbeit mit Dingmengen kommt der kardinale Aspekt zum Tragen (Kühnel spricht von „Grundzahlen", z. B. I, 68), der später ergänzt wird durch den ordinalen Aspekt („Ordnungszahlen", I, 202), ebenso wie um einen gewissen Maßzahlaspekt (der vorwiegend als „Raumvorstellung" bezeichnet wird, z. B. I, 74). Während an einer Stelle die Definition des Zahlbegriffs über die Mengenvorstellung an die Cantorsche Mengendefinition erinnert („... eine begrenzte Menge [nichtidentischer psychischer Erlebnisse] zu einer Einheit zusammenfassen...", I, 67), offenbart Kühnel an anderer Stelle große Schwierigkeiten zu definieren, was eine Zahl ist: Über mehrere Seiten hinweg ringt er regelrecht um eine klare Einordnung des Begriffs; er ordnet ihn schließlich zwischen Eigenschafts- und Beziehungsbegriffen ein („Man meint etwas, [...] was **an** den Dingen ist", I, 49, Hervorh. im Orig.) und erweckt dabei den Eindruck, dass ihm das mathematische Konzept der Menge und ihrer Mächtigkeit nicht zur Verfügung steht. Nichtsdestotrotz hält er es für notwendig, dass sich der Lehrer im Klaren darüber ist, **was** eine Zahl ist. (I, 47).

Die additive und multiplikative Zahlzerlegung hat für Kühnel den Charakter einer ruhenden Beziehung, die als analog zum dynamischen Charakter der Operationen aufgefasst werden kann (vgl. I, 99). Als Vorbereitung der jeweiligen Operation sollte sie dieser im Unterricht zeitlich vorgelagert sein (I, 207), ihr besonderer Wert liegt darüber hinaus in einer genaueren Kennzeichnung der Zahl (I, 99) und in ihrem „logischen Charakter" (I, 207), die Zahlzerlegung dient also einem tieferen Zahlverständnis sowie implizit einer strukturellen Betrachtung der Zahlen. Auch die Operationen erhalten im Ansatz strukturellen Charakter, wenn das Rechnen als „Feststellung der zwischen [den Zahlbegriffen] vorhandenen Beziehungen" (I, 88) beschrieben wird und die Gleichsetzung rechnerischer Beziehungen mit einem bestimmten Zahlenwert im Sinne der Transitivität als Mittel, einen Vergleich der Beziehungen zu ermöglichen (I, 90). Es muss jedoch festgestellt werden, dass Kühnel hier keineswegs mit einem allgemeinen Relationsbegriff argumentiert, seine Betrachtungen bleiben ganz klar und ausschließlich dem Spezialfall der Relation „ist gleich" verhaftet. Der Überzeugung, dass jegliche Abstraktion schrittweise und über einen langen Zeitraum zu erfolgen hat, entsprechend betont Kühnel, dass die Operationen in der unterrichtlichen Behandlung vom Zahlbegriff getrennt werden müssen und auf keinen Fall zu früh eingeführt werden dürfen (I, 103).

Unabhängig von seinen Ausführungen zum Zahlbegriff macht Kühnel Bemerkungen zur Begriffsbildung im Allgemeinen. So weist er darauf hin, dass – entgegen der vorherrschenden Meinung, die der bisherigen Theorie der Formalstufen zugrundeliegt – Begriffe nicht von allen Kindern auf die gleiche Weise und auch keinesfalls im gleichen Tempo gebildet werden (II, 106). Auch die Vorstellung, ein abstrakter mathematischer Begriff könnte überhaupt vollständig „gelernt“ sein, lehnt er im Verbund mit der Formalstufentheorie ab. (II, 108 f.). Darüber hinaus unterscheidet er zwischen übernommenen, bloß rezipierten, und selbst erarbeiteten Begriffen („Abstraktionen“, vgl. I, S. 141-143). Hält er auch beide für notwendig im Unterricht, so sind die selbst erarbeiteten für ihn zwar mit größerem Aufwand verbunden, dafür höherwertiger und tiefer verankert. Es zeigen sich hier Ansätze einer konstruktivistischen Lerntheorie, die einen individuellen genetischen Zugang zu den abstrakten Begriffen des Rechenunterrichts erfordert.

Die Vorstellung, dass Begriffe individuell gebildet werden, steht im Einklang mit Kühnels Vorschlägen zur Repräsentation der Begriffe. Ebenso wichtig wie die Darstellung auf verschiedenen Abstraktionsstufen ist ihm die Anschauung auf verschiedenen Repräsentationsebenen sowie der stetige Wechsel zwischen diesen (I, 156 f.), in seiner Terminologie, dass die „Auffassung allseitig [. . .] mit allen Sinnen“ sein muss (I, 139). Besondere Aufmerksamkeit widmet er der enaktiven, also der Handlungsebene, indem Zahlen zunächst an konkreten Dingen bzw. Dingmengen, später dann an dinglichen Symbolen dargestellt werden. Unter dinglichen Symbolen versteht er dabei abstrakte Dinge wie Perlen, die in seinem Konzept nicht für sich stehen, sondern in einer höheren Abstraktionsstufe z. B. Puppen repräsentieren (I, 161 f.)[4]. Um sicherzugehen, dass die Kinder nicht nur die Handlung des Lehrers rezeptiv anschauen, sondern wirklich selber tätig werden, fordert er, dass jedes Kind über eine eigene Rechenmaschine verfügt (I, 140; einen Überblick über verbreitete Rechenmaschinen und Veranschaulichungsmittel bietet I, 241-244). Ikonische Darstellungen umfassen beispielsweise eine Art Zahlenstrahl (I, 93 f.), gezeichnete Striche und Punkte und die Hundertertafel, die Kühnel aus den Bornschen Zahlbildern entwickelt hat und deren Einsatzmöglichkeiten er in seinem Werk ausführlich beschreibt (vgl. etwa I, 176-180). Eine Verbindung der verschiedenen Ebenen findet statt, wenn die dinglichen Symbole gemalt, also in die ikonische Ebene übertragen, werden oder die Hundertertafel enaktiv auseinandergeschnitten wird, um mit den Teilen Aufgaben zu legen (I, 206).

Insgesamt schlägt Kühnel eine Variation der Veranschaulichung vor, die Verwendung mehrerer Anschauungsmittel nebeneinander (I, 246) soll einem zu starken mechanischen Lernen und Rechnen entgegenwirken (I, 152).

Unter dem Eindruck der frühzeitigen Abstraktion und Symbolisierung der zeitgenössischen Rechendidaktik stellt Kühnel die symbolische Ebene bei seinen Betrachtungen hintenan. Da die Ziffer als Symbol für das Zahlwort, das wiederum

4. Auffällig ist hier die zweidimensionale Unterscheidung der Darstellungen, wie sie sich auch bei Schmidt-Thieme (2010) findet.

selbst nur ein Symbol für die Zahl ist, eine doppelte Abstraktion darstellt (I, 283), warnt er vielmehr wiederholt davor, die Ziffern zu früh einzuführen und plädiert dafür, wie die Ziffern, so auch das Rechnen an sich möglichst lange hinauszuschieben (I, 180; in I, 151 stellt Kühnel gar die Frage, ob nicht aufgrund der hohen Abstraktion das Rechnen „bis zum 12. Jahre“ herausgeschoben werden müsste). Generell spricht sich Kühnel für eine langsame und behutsame Einführung der mathematischen Form aus (I, 257), Sache und Form seien strikt zu trennen (I, 288), und das schriftliche Rechnen sollte frühestens im 4. Schuljahr gelernt werden (I, 290).

Der Schwerpunkt in Kühnels Konzeption des Rechenunterrichts liegt auf der fortwährenden Konkretisierung des Zahlbegriffs. Befürchtungen, die Kinder kämen bei diesem Verfahren nicht von der Anschauung los, erteilt Kühnel zwar eine Absage (I, 268), indem er davon ausgeht, Abstraktion wäre am besten über Konkretisierung zu erreichen (I, 217); gleichwohl bezeichnet er Abstraktion auch nicht als allgemeines Ziel (I, 240). Stattdessen stelle die „überragende Bedeutung [...] der häuslichen Wirtschaftsführung als Anwendungsgebiet des Rechnens“ (I, 217) unzählige authentische Anwendungsbeispiele zur Verfügung, ebenso wie die anderen Schulfächer, insbesondere die Naturwissenschaften (II, S. 62). Der Begriff der Anwendung umfasst in Kühnels Verständnis jedoch weit mehr als die bloße Übung eines Schemas an eingekleideten Aufgaben, vielmehr sind Anwendungsaufgaben bei ihm von einer gewissen Offenheit geprägt, sind „Aufgaben [...], bei denen die Operationen nicht angegeben sind“ (II, 27), komplexe Beispiele mit mehreren möglichen Lösungen und Lösungswegen (vgl. I, 114-116) bzw. unvollständigen Angaben oder ohne vorgegebene Fragestellung (II, 79), also in unserer heutigen Terminologie Problemaufgaben. Auch das im „Neubau“ dargestellte Vorgehen zur Lösung solcher Anwendungsaufgaben erinnert an heutige Modelle von Problemlöse- und Modellierungsprozessen (vgl. I, 116 f. u. II, 15). Um die echte Offenheit solcher Aufgaben gewährleisten zu können, dürfen sie nicht zu früh eingesetzt werden, denn es müssen bereits mindestens zwei Operationen bekannt sein, damit die Kinder wählen können (II, 45). Während die Anwendungsaufgaben sich ausschließlich auf außermathematische Themenkomplexe beziehen, wird das Zulassen mehrerer Lösungswege und damit die klare Ablehnung des Normalverfahrens auch für innermathematische Aufgaben gefordert (I, 211, vgl. II, 2-7). Nur so sei gemäß Kühnel „mathematische Bildung“ möglich (II, 1).

Insgesamt soll Wissen durch Können ersetzt werden (I, 293), Mechanisierung durch Fähigkeiten und Urteilsvermögen (II, 15) und Verfahren durch Methoden (I, 269). Die Forderungen enthalten weitere Parallelen zu einer Orientierung an Kompetenzen statt an bloßen Inhalten, doch meint Letzteres keine allgemeinen mathematischen Methoden und Handlungen, sondern rechnerische Methoden, gewisse Heuristiken, mithilfe derer Aufgaben ohne Anwendung eines Normalverfahrens gelöst werden können.

Kühnel formuliert mathematische Bildung als oberstes Ziel des Rechenunterrichts. Er ordnet den Stoff klar diesem Ziel unter, reduziert ihn vom obersten Auswahlkriterium für Unterrichtsinhalte zu einem (im Grunde austauschbaren) Mittel zum Zweck der Persönlichkeitsbildung (II, 147 f.), einer formalen Bildung, die auch die Erziehung zur Kritikfähigkeit einschließt (II, 32 f.). Andererseits definiert er mathematische Bildung als quantitatives, zahlenmäßiges Erfassen der Welt und ihrer Gesetzmäßigkeiten (II, 44), eine Art von Bildung, die stets den Sachzusammenhang einzubeziehen hat (I, 133) und damit auch materiale Bildung ist. Kühnel sieht hierin jedoch keinen Widerspruch, er spricht sich gegen die strikte Trennung von Rechnen und Mathematik aus und benennt das Rechnen als Teil sowie als Grundlage der Mathematik (I, 133).

Ein unterrichtlicher Aspekt anderer Art, dem Kühnel ein erhebliches Maß an Aufmerksamkeit zukommen lässt, ist die Frage der Differenzierung. Bislang sei der Unterricht vorwiegend an mittleren und schwächeren Schülern ausgerichtet gewesen, die Forderung der Starken habe eine zu geringe Rolle gespielt (I, 159 f.). Die Motive dieses Vorgehens seien jedoch pädagogisch wie politisch überholt (vgl. II, 137-139). Als neue Möglichkeiten entsprechender Unterrichtsorganisation schlägt er vor, die Schülerinnen und Schüler in Gruppen arbeiten zu lassen (II, 123) oder gute Schüler als Hilfslehrer einzusetzen (II, 143). Die Zweckmäßigkeit von Hausaufgaben zweifelt Kühnel an, denn diese erziehen seiner Meinung nach zu einer passiven Beamtenmentalität (II, 130) und entsprechen somit nicht seiner Idee von mathematischer Bildung. Die Aufgabe des Lehrers ist es damit nicht länger, Stoff darzubieten, sondern Unterrichtsziele zu formulieren (II, 150) und Anlässe zur Begriffsbildung lediglich bereitzustellen (I, 136 f.). Insgesamt erfordert eine derartige Organisation von Unterricht von der Lehrkraft Flexibilität und vor allem Diagnosefähigkeiten (II, 149).

Die Inhalte des Rechenunterrichts sind klar umrissen (Zählen, Zahlbegriff, Grundrechenarten und Anwendungen), doch weist Kühnel darauf hin, dass auch der elementaren Formenlehre, als zusätzliches Mittel zur quantitativen Erfassung der Umwelt, ihr Platz im mathematischen Anfangsunterricht gebührt (II, 205 f.).

alef von H. Bauersfeld et. al.

1966 begannen Heinrich Bauersfeld und seine Mitarbeiter im Rahmen des *Frankfurter Projekts* Unterrichtsversuche zur Umsetzung der Neuen Mathematik an einer Reihe hessischer Grundschulen. Die Erfahrungen wurden ausgewertet, die Materialien überarbeitet und nach einer weiteren Evaluation und Revision ab 1969 im Unterrichtswerk *alef* herausgegeben (Weis, 1972, S. 589 f., vgl. auch Moon, 1986, 161 f. u. 165 f.). *alef* setzt sich zusammen aus einem Lehrerhandbuch, Arbeitsblättern und weiteren Materialien, wie den aufgrund spezifischer Kombination bestimmter Merkmale eindeutig beschreibbaren Plättchen des *matema Begriffsspiels* und dem *matema Formenspiel* zur Einführung in die Formenlehre. Ein Schülerbuch enthält der Lehrgang nicht. An dieser Stelle wird sich exemplarisch v. a. auf den Lehrerband für das 1. Schuljahr bezogen. *alef 1* ist in zwei Auflagen erschienen, die erste im Jahr 1969/70, die zweite, stark überarbeitete, 1975. Da das *Frankfurter Projekt* in seinem zeitlichen Umfang und seiner umfassenden empirischen Erprobung eine Besonderheit innerhalb der Neuen Mathematik in der Grundschule darstellt, ist davon auszugehen, dass auch die Ziele und grundlegenden Prinzipien des Konzepts besonders sorgfältig ausgearbeitet vorliegen.

Die Autoren von *alef* lehnen eine „herkömmliche“ Präsentation der Unterrichtsinhalte auf vorgefertigten Abstraktionsstufen, auf denen schnell von den Dingen zum Symbol übergegangen wird, ausdrücklich ab (Bauersfeld et. al, 1970, 9). Trotz Fortschritts in der Entwicklung von Methoden und Material kommt es immer wieder dazu, dass Kinder Unverstandenes mechanisch auswendig lernen und nicht rechnen können (ebd., 7; zur Rechenfähigkeit vgl. auch Karaschewski, 1969, XII), woraus die Forderung abgeleitet wird, das Rechnen nicht länger als voraussetzungslos zu betrachten, sondern neu grundzulegen (Bauersfeld et. al., 1970, 7). Zudem stellen die Autoren fest, dass Sprache einen zu großen Anteil am Unterricht einnimmt, obgleich kognitive Schemata auch vor-sprachlich gebildet werden können (ebd., 12 f.).

Neben diesem primären Ziel eines erfolgreicheren Arithmetik-Unterrichts begründen Bauersfeld et. al. ihr Konzept immer wieder mit Entwicklungen aus der Psychologie (vgl. Bauersfeld, 1970, 55 u. 66 f., auch wenn dies hier nicht so explizit und gebündelt im Vordergrund steht wie beispielsweise bei Fricke & Besuden, 1970, oder Neunzig & Sorger, 1969) oder beziehen sich auf Pädagogen wie W. Klafki (ebd., 15) und den Rechendidaktiker J. Wittmann (ebd., 12).

Für die Arithmetik liegt das Hauptaugenmerk auf der Frage nach den Grundlagen des Zahlbegriffserwerbs und des Rechnens, die dann in der unterrichtlichen Behandlung diesen voranzugehen haben. Bauersfeld et. al. haben diese in den „Begriffe[n] der neueren Mathematik“ gefunden (ebd., 7), also in Relationen, Mengen und Abbildungen, die ausgiebig pränumerisch behandelt werden. Die Zahl selbst wird als „Eigenschaft einer [. . .] Klasse von gleichmächtigen Mengen“ definiert und klar von einer Eigenschaft eines Objekts abgegrenzt (ebd. 209). Entsprechend wird der Zahlbegriff kardinal erworben, über die Bildung von Klassen gleichmächtiger Dingmengen (ebd., 205); Zahlwort und Ziffer werden etwas später eingeführt (ebd. 209), das Dezimalsystem erst in späteren Klassen. Vom Legen konkreter Mengen wird zur Arbeit mit Abbildungen von Dingmengen und schließlich zur Abbildung dinglicher Symbole übergegangen. In der zweiten Auflage erfolgt die Einführung der Zahlen und Zahlzeichen wesentlich früher als in der ersten und wird durch Anknüpfen an vorschulische Erfahrungen mit Zahlen vorbereitet (Bauersfeld et. al., 1975, 29). Der kardinale Aspekt wird kurz nach der Einführung des Zahlzeichens um den ordinalen erweitert (ebd. 78 f.). Die Operationen werden sowohl durch Handlungen des Hinzufügens und Wegnehmens als auch durch Betrachtung von Mengenzerlegungen vorbereitet (ebd., 90) und sind stets durch Betrachtung konkreter Mengen, Alltagsvorstellungen und Rechengeschichten zu konkretisieren (ebd., 59 u. 90).

Die Schülerinnen und Schüler sollen – in erheblichem Umfang über Regelspiele, die mathematische Strukturen offenbaren – selbsttätig und handlungsorientiert Begriffe bzw. deren Präfigurationen abstrahieren, in individueller Arbeit an Arbeitsblättern festigen und die Strukturen eigenständig transferieren. (Bauersfeld et. al, 1970, 9, 61 u. 90). Es offenbart sich hier ein klar konstruktivistisches Verständnis von Begriffsbildung, dem der konsequent genetisch-entdeckende Zugang entspricht.

Allgemein ist die Nutzung der unterschiedlichen Brunerschen Darstellungsebenen (vgl. Bruner, 1974, 16 f.) ein Prinzip, das – ebenso wie die Idee die Anschauung zu variieren – fortwährend Berücksichtigung findet, hauptsächlich implizit (z. B. ebd., 64 u. 72). Dabei liegt der Fokus für die 1. Klasse auf der enaktiven und der ikonischen Ebene[5], der symbolischen Ebene kommt in Form der Sprache dennoch eine besondere Rolle zu: Im Sinne einer kompensatorischen Erziehung wird für alle Kinder gleichermaßen der Aufbau einer präzisen Sprache angebahnt; dabei sollen stets Sprachanlässe geschaffen, Verbalisierung aber größtenteils nicht eingefordert werden (ebd., 13 f.).

Durch den genetisch-konstruktivistischen Zugang zu neuen Begriffen sowie die individuelle Festigung bedingt, erhält der Unterricht eine gewisse Offenheit, die an zahlreichen Stellen mehrere Lösungswege und Lösungen erlaubt und durchweg Differenzierungsmöglichkeiten bereitstellt. Von Anfang an sind die Inhalte ausdrücklich verschiedenen Niveaus zugeordnet; die Methode der Gruppenarbeit stellt zusätzliche Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bereit (Bauersfeld et. al., 1975, 16). Die Bevorzugung der Gruppenarbeit als Methode, der erhebliche Wirksamkeit

5. Mit der Neuauflage wurde die Zahl der Symbole weiter reduziert, vgl. Bauersfeld et. al, 1974, 3 f.

im Hinblick auf Begriffsbildung, soziale und sprachliche Ziele zugeschrieben wird, ist auch der Grund, weshalb der Lehrgang keine Hausaufgaben vorsieht. An die Lehrerschaft werden damit neue Anforderungen deutlich: Sie benötigen einen guten Überblick über ihre Klasse, Diagnosefähigkeiten und fachliche Sicherheit (vgl. Bauersfeld et. al, 1970, 36-40).

Die obersten Ziele des neuen Mathematikunterrichts liegen für die Autoren von *alef* in verständigem Rechnen und dem Aufbau kognitiver Schemata und Heuristiken sowie ferner in der Entwicklung des intermodalen Transfers – also der Übertragung eines Sachverhalts von einer Darstellungsart in eine andere – und dem Aufbau präziser Sprache (Bauersfeld & Weis, 1972, 72). Der Stoff steht hierbei nicht im Mittelpunkt, sondern wird Mittel zum Zweck der Ausbildung bestimmter Fähigkeiten bzw. Kompetenzen. Bauersfeld et. al. verwenden den Terminus Bildung zwar nicht, doch aus ihren Ausführungen wird deutlich, dass formale Bildung für sie klaren Vorrang gegenüber materialer Bildung hat.

Zu den Inhalten bleibt zu ergänzen, dass diese mitnichten auf die strukturellen Grundbegriffe sowie Zahlen und Operationen begrenzt sind, sondern die Geometrie im Anfangsunterricht eine wesentliche Rolle einnimmt. Dabei meint Geometrie hier weit mehr als elementare Formenlehre und schließt sowohl geometrische Abbildungen als auch topologische Grundbegriffe mit ein.

Vergleich der Konzeptionen

In der Bewertung des zeitgenössischen Rechenunterrichts finden sich bei Kühnel und Bauersfeld et. al. Parallelen, die nicht nur angesichts der zeitlichen Differenz überraschen. Obwohl Kühnels Ideen weite Verbreitung gefunden haben, scheinen sie doch nur in Teilen in der Praxis umgesetzt worden zu sein, die Theorie der Formalstufen mit ihren festgelegten Abstraktionsstufen hat sich ihren Platz im mathematischen Unterricht der Volks- und Grundschule aus einer langjährigen Tradition heraus offenbar hartnäckig bewahrt; die Klagen über mangelnde Rechenfertigkeiten sind ebenso wenig abgerissen.

Beide setzen der Stufentheorie auf Erkenntnissen der Psychologie und (Reform-) Pädagogik beruhende methodische Alternativen entgegen, denen gemeinsam ist, dass sie aus der Vorstellung eines individuellen, konstruktivistischen Lernens heraus einen genetischen Zugang zu den mathematischen Begriffen gewähren, der auf den Prinzipien der Selbsttätigkeit, einer Variation der Veranschaulichung sowie dem stetigen Wechsel der Repräsentationsformen beruht. In Bezug auf Letzteres liegt der Schwerpunkt klar auf der enaktiven und der ikonischen Darstellungsebene, die symbolische und mit ihr die mathematische Form soll keinesfalls überbetont werden. Entwicklungen in den Bezugswissenschaften werden somit als Argumentationsgrundlage herangezogen. Ein wesentlicher Unterschied liegt hier jedoch darin, dass Kühnel die Fachwissenschaft Mathematik selbst nicht zu den Bezugswissenschaften zählt und fachmathematische Entwicklungen in keiner Weise berücksichtigt, während die *alef*-Autoren ihre grundlegenden Strukturbegriffe aus der „neueren Mathematik“, also aus der Fachwissenschaft beziehen.

Der pränumerische Teil stellt ein echtes Novum in den Konzeptionen der Neuen Mathematik dar. Die dort behandelten Inhalte kommen in Kühnels Konzept nicht vor, zumindest nicht als Inhalte eigenen Rechts. Abbildungen finden keine Erwähnung, Relationen nur sehr implizit in Form des Spezialfalls der Gleichheitsbeziehung, Mengen sind aber auch bei Kühnel anschauliche Grundlage des Zahlbegriffs, obgleich unklar bleibt, ob ihm das fachliche Konzept bekannt ist. Die Raumlehre ist zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch vom Rechenunterricht getrennt und höheren Klassenstufen vorbehalten, dennoch fordert Kühnel sie zumindest in ihrer grundlegendsten Form – der elementaren Formenlehre – in den Anfangsunterricht zu integrieren, eine Forderung, der der *alef*-Lehrgang mehr als Genüge tut, wenn auch mit einer anderen Zielsetzung. Bemerkenswert ist, dass sich Kühnel des hohen Abstraktionsgrades des Zahlbegriffs und des Rechnens sehr bewusst ist, was ihn dazu veranlasst, gewissermaßen laut ein Hinausschieben des Rechnens in Erwägung zu ziehen (I, 151 u. 180). Entsprechend möchte er auch die Ziffer nicht vorm 2. Schuljahr eingeführt sehen und stimmt damit durchaus mit *alef* überein. Der Rechenunterricht beginnt jedoch mit der (mündlichen) Zahlreihe und einer fortwährenden quantitativen, nicht strukturellen Betrachtung der Welt (II, 198 f.). Die Zahlwortreihe und das Zählen spielen in *alef* dagegen eine untergeordnete Rolle. Nach Einführung der Zahlen über den Kardinalaspekt (konkret an Dingen wie in der Vorstellung) wird der Zahlbegriff in beiden Lehrgängen durch den Ordinalaspekt erweitert.

Beide Konzepte sehen in den Operationen sowohl den dynamischen Aspekt – für die Addition und Subtraktion in der Vorstellung des Hinzufügens und Wegnehmens, also des Operierens mit Mengen, verankert – sowie den ruhenden, strukturellen in der Zerlegung. Beide Zugänge müssen daher im Vorfeld des Rechnens behandelt werden.

Der Zahlbegriff soll stets an Dingmengen und Alltagserfahrungen konkretisiert werden, die nahezu ausschließliche Fokussierung auf das häusliche Wirtschaftsleben als Bezugsquelle für Aufgaben entfällt jedoch in der Neuen Mathematik mit der nachlassenden Bedeutung des sogenannten bürgerlichen Rechnens. Zum anderen sind die neuen Gegenstände des Unterrichts abstrakter, in dem Sinne, dass ihr

Nutzen für das alltägliche Leben und die Erfassung der Welt stärker ein indirekter ist und damit nicht unmittelbar sichtbar. Man mag hierin einen Bruch sehen oder auch eine notwendige Weiterentwicklung. Die Lebensumstände in der Bundesrepublik hatten sich stark gewandelt und forderten einen entsprechenden Wandel im Unterrichtswesen[6]; die alten Beispiele für Alltagssituationen, die Kühnel für den Unterricht vorschlägt, dürften in einer Zeit, in der Kinder mit unterschiedlichem kulturellen Hintergrund in den Klassen saßen, für viele von ihnen eben jene Lebensfremdheit aufgewiesen haben, die Kühnel am früheren Unterricht so stark kritisiert.

Der Stoffwird hier wie da den Zielen des Unterrichts untergeordnet. Der Erwerb fundierter arithmetischer Kenntnisse, Rechenfähigkeiten und Zahlverständnis gleichermaßen, ist in beiden Konzepten oberstes Ziel. Darüber hinaus sollen bei beiden über reines Wissen hinausgehende Kompetenzen, unter anderem die Fähigkeit zum Einsatz heuristischer Strategien in Problemkontexten, erworben werden. Das übergeordnete Ziel einer formalen mathematischen Bildung, das in *alef* in konkret benannten einzelnen Zielen (z. B. Aufbau kognitiver Schemata und präziser Sprache) deutlich wird, wird von Kühnel explizit genannt. Jedoch versteht er unter mathematischer Bildung im Wesentlichen die Fähigkeit zur zahlenmäßigen Erfassung der Welt. Mit der Einschränkung auf quantitative Begriffe steht dem Schüler bei Kühnel ein begrenztes Instrumentarium zur Beschreibung der Welt zur Verfügung, im Vergleich zu einem Vorrat struktureller Begriffe, wie er in *alef* angebahnt wird, und mit dem die Klassifizierung von Umwelterfahrungen sowie die Beschreibung von Beziehungen und Veränderungen ermöglicht wird. Zudem bleiben die quantitativen Schemata durch die permanente Anknüpfung an die Sachebene dem Konkreten verhaftet.

Auf der methodischen Ebene finden sich wiederum zahlreiche Parallelen zwischen den Ideen von Kühnel und Bauersfeld. Beide sehen eine selbsttätige, materialgestützte Erarbeitung von Begriffen vor, beide ergänzen ihren Lehrgang um passende Unterrichtsmaterialien, beide betonen die Notwendigkeit von Differenzierung und sehen Gruppenarbeit als eine hierfür geeignete Methode. Hausaufgaben werden – wenn auch aus verschiedenen Gründen – sowohl von Kühnel als auch von den Autoren von *alef* abgelehnt. Dafür finden sich in beiden Konzeptionen Hinweise auf einen durch die veränderte Unterrichtsorganisation bedingten Wandel der Lehrerrolle, die zwar weiterhin gute fachliche Kenntnisse – wenn nicht bessere – erfordert, aber nicht länger darin besteht, den Stoff zu präsentieren, sondern Anlässe zur individuellen, konstruktivistischen Begriffsbildung bereitzustellen. Damit

6. vgl. hierzu die Ausführungen durch Whitehead (1946, 116), die sich zwar auf die Meraner Reform bezogen, aber gut auf die Neue Mathematik zu übertragen sind.

folgt auch die einzelne Stunde keinem fest vorgegebenen Schema mehr, die Lehrperson benötigt gute Fähigkeiten zur Diagnose und muss in der Lage sein flexibel auf Entwicklungen zu reagieren; der Anspruch an die Lehrerschaft ist somit gestiegen.

Fazit

Es fällt angesichts des oben angestellten Vergleichs zunächst schwer, dem Argument von der „völlige[n] Veränderung der Lehr- und Lernmethoden und der Unterrichtsorganisation" zu folgen. Gerade in den Vorschlägen zur methodischen Gestaltung von Unterricht finden sich zahlreiche Parallelen zwischen den vorgestellten Konzeptionen des mathematischen Unterrichts. Erklärbar wird dieser Widerspruch jedoch, wenn man die jeweiligen Schilderungen der zeitgenössischen Methodik als Quellen für tatsächliche Unterrichtsrealität versteht; wenn der Rechenunterricht nach dem zweiten Weltkrieg in weiten Teilen des Landes noch so organisiert war wie im späten 19. Jahrhundert, dann muss der methodische Teil der Reform, vor allem in Verbindung mit den weiteren Neuerungen, wie eine Revolution im Klassenzimmer gewirkt haben. Was die Theorie betrifft, war sie das aber keineswegs, Vorbilder finden sich nicht nur bei Kühnel, sondern generell in der Reformpädagogik, so z. B. in Maria Montessoris Konzept der Freiarbeit, an das die Vorschläge aus *alef* immer wieder erinnern. Für die didaktischen Prinzipien, die sich aus den theoretischen Überlegungen zum Lernen ergeben, gilt das gleiche, ebenso für die grundsätzliche Idee, dass über die reine Stoffansammlung hinausgehende Fähigkeiten und Kompetenzen erworben werden sollen.

Die Bildungsziele, die mit dem *alef*-Programm formuliert werden, sind um einiges breiter gestreut als in Kühnels Rechenunterricht. Für letzteren liegt das oberste – und fast ausschließliche – Ziel letztlich in der Erfassung und Beschreibung der Umwelt und des bürgerlichen Lebens durch Zahl- und Größenbegriffe und die Bewältigung der Probleme des Alltags, Kühnels Bildungsziel ist somit – durchaus im Widerspruch zu dem von ihm formulierten Anspruch – vor allem ein materiales, wohingegen Bauersfeld et. al. – neben sozialen Zielen, die sich bei Kühnel nicht finden – deutlich formale Bildungsziele wie die Fähigkeiten zum logischen Denken und den Aufbau einer präzisen Sprache formulieren. Beide begründen ihre Stoffauswahl mit ihren Zielen, die unterschiedlichen Ziele bedingen hierbei naturgemäß verschiedene Inhalte. Die formalen Ziele gehen zum einen mit einer stärker formalen mathematischen Form einher, zum anderen erfordern sie sowohl den Erwerb an sich abstrakterer Begriffe wie auch eine möglichst weitgehende Abstraktion dieser Begriffe (während die fortwährende Rückbindung an die konkrete Vorstellung bei

Kühnel von zentraler Wichtigkeit ist). Zumindest in der äußeren Wahrnehmung liegt hierin ein wesentlicher Unterschied. Ob dieser ausreicht, um von einem Bruch innerhalb der Mathematikdidaktik zu sprechen, bleibt jedoch zweifelhaft; so wird mit der neuen Entwicklung zuallererst eine notwendige Anpassung an veränderte äußere Bedingungen vollzogen[7]. Dass aber im Anfangsunterricht – und um den geht es hier wie in der damaligen Diskussion schwerpunktmäßig – Abstraktionen, Formalismus, übertriebene Fachsprache oder sogar die axiomatische Methode die Oberhand gewinnen, wie ein weit verbreiteter Vorwurf lautet (der möglicherweise auf der – polemischen – Darstellung der Reform in den USA bei Kline, 1974 beruht), wird durch das Beispiel des *alef*-Programms in keinster Weise nahegelegt. Vielmehr besteht die Leistung der Autoren darin, die abstrakten Begriffe im Sinne des Brunerschen Spiralcurriculums[8] konkret erfahrbar zu machen und auf die Weise die späteren Abstraktionen frühzeitig auf einer kindgerechten Ebene zu präfigurieren; die Verwendung von Symbolen wird auf ein Minimum reduziert, die Fachsprache an ausgewählten Stellen vorbereitet.

Darüber hinaus ist beiden Konzepten die zentrale Stellung des Zahlbegriffs und des Rechnens, und zwar nicht im Sinne einer schematischen Abfolge von Mechanismen, sondern im Sinne eines verständigen Operierens, gemeinsam. Verschiedene Zahlaspekte werden im Laufe des Zahlbegriffserwerbs berücksichtigt, der kardinale Aspekt steht bei beiden am Anfang. Die Betrachtung der Zahl als Eigenschaft von (Klassen gleichmächtiger) Mengen erlaubt eine präzisere und klarere Definition als sie Kühnel zur Verfügung stand (vgl. auch Griesel, 1971, 133). Dass die permanente Konkretisierung der Zahlen durch Probleme des alltäglichen Lebens ihren hohen Stellenwert verliert, ist ebenfalls den veränderten Zielen geschuldet, hierin liegt sicher ein großer Unterschied, der vor allem bei Eltern den Eindruck erwecken konnte, ihre Kinder würden die grundlegendsten Kulturtechniken nicht mehr lernen. Umso mehr überrascht es, dass Kühnel die Einführung der Ziffer, zumindest in ihrer vollen Bedeutung, sogar noch zu einem späteren Zeitpunkt vorsieht als die Autoren von *alef*. Die nach außen hin revolutionär anmutende Rückstellung der Zahlen fast bis ins 2. Schuljahr in der ersten Auflage von *alef* findet in Kühnel einen Wegbereiter, wenn der in Erwägung zieht, Zahlen und Rechnen aufgrund ihres abstrakten Charakters so weit wie möglich hinauszuschieben. In der Praxis des Rechenunterrichts war dies jedoch keine ernsthafte Option, fehlten Kühnel und den anderen Rechendidaktikern doch schlicht die Inhalte und Begriffe, mit denen der frei gewordene Unterricht hätte gefüllt werden können. Wie in den Fragen der Unterrichtsorganisation muss auch hier festgehalten werden, dass der in der Praxis

7. Die Ursachen und Anlässe der Reform wurden hier nicht näher thematisiert, es finden sich Ausführungen dazu in den KMK-Empfehlungen sowie in zahlreicher weiterer zeitgenössischer Literatur.

8. vgl. Bruner, 1970.

des Unterrichts wahrgenommene Bruch in der Theorie nicht existierte, sondern ein erheblicher Teil der mutmaßlich neuen Ideen seine historischen Vorbilder hatte.

Der fundamentale Unterschied hingegen ist ein anderer: Der Übergang vom Rechen- zum Mathematikunterricht birgt einen tiefer greifenden Wandel in sich; die Neubenennung des Faches ist weit mehr als nur eine nominelle Neuerung, sie impliziert einen Paradigmenwechsel. Die Identifikation des Faches Mathematik mit seinen Teilgebieten Geometrie und Arithmetik, die auf die Antike zurückgeht, wurde in Form des Rechen- und Raumlehreunterrichts an den Volksschulen bis in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts konserviert, weitgehend ungeachtet der Entwicklungen und fortschreitenden Ausdifferenzierung der Fachwissenschaft Mathematik. Die Tradition des Rechenunterrichts geht dabei bis auf die Rechenmeister, -schulen und -bücher zu Beginn der Frühen Neuzeit zurück. Die Ersetzung des inhaltlich klar umrissenen, traditionellen Rechenunterrichts mit seinem Anwendungswissen durch einen propädeutischen Mathematikunterricht für die Grundschule überspringt damit im gewissen Sinne mehrere hundert Jahre mathematischer Entwicklung und stellt die Didaktik vor die Herausforderung, im Hinblick auf eine didaktische Reduktion der Gesamtheit des Faches diejenigen Inhalte zu identifizieren, die so grundlegend für die Mathematik sind, dass sie zu Anfang erworben werden sollen. Die Idee, im mathematischen Anfangsunterricht die Grundlagen des Faches zu vermitteln, findet sich bereits bei Kühnel, der in seinen Ausführungen zum Ziel der mathematischen Bildung davon spricht, „ihre Grundlagen [zu] vermitteln". Für Kühnel sind Zahlen und Operationen also Grundlagen der Mathematik, für die Autoren von *alef* sind es Mengen, Relationen und Abbildungen sowie topologische Grundbegriffe, beide Konzepte gehen also von unterschiedlichen Grundlagen des Faches aus und spiegeln somit unterschiedliche Auffassungen des Faches Mathematik. Die Reduktion der Arithmetik zu einem Teilgebiet neben anderen und eine damit einhergehende Zurückdrängung des Rechnens, die nach außen häufig als stärkste Veränderung wahrgenommen wurde, ist im Konzept eines Mathematikunterrichts – zumindest wenn dort ernsthaft Mathematik betrieben wird – angelegt und kaum vermeidbar.

Der Übergang vom Rechen- zum Mathematikunterricht, der faktisch der Einführung eines neuen Faches mit neuen Zielsetzungen und neuen Fragestellungen gleichkam, stellt damit in der Tat einen Einbruch in der Geschichte des mathematischen Elementarunterrichts dar. Dieser Bruch war jedoch nicht vermeidbar, jede noch so gut durchdachte Weiterentwicklung und Modernisierung der Rechendidaktik wäre doch immer noch dem Rechnen als primärem Ziel verhaftet gewesen und hätte die Frage nach den Grundlagen des Faches Mathematik nicht in den Blick genommen. Dass ein propädeutischer Mathematikunterricht ab der ersten Klasse notwendig ist, steht wohl heute kaum außer Frage. Dass die Neue Mathematik aber jegliche

Vorbilder aus der Geschichte des Rechenunterrichts unberücksichtigt lässt, kann an dieser Stelle nicht bestätigt werden.

Literatur

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Görner, U., Homann, G., Lubeseder, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1970): *alef 1: Wege zur Mathematik ; Handbuch zum Lehrgang*, Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Homann, G., Lubeseder, U., Mitsos-Görner, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1974): *Begleitschrift zu den ergänzenden Arbeitsblättern für das Schülerheft „alef 1“ aus der Neubearbeitung*, Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Homann, G., Lubeseder, U., Mitsos-Görner, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1975): *alef 1: Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung; Handbuch zum Lehrgang*, Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H. & Weis, V. (1972): *Aus dem „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule*“. Thema Curriculum: Beiträge zur Theorie und Praxis, Bebenhausen: Rotsch, S. 65-94.

Bruner, J. S. (1970): *Der Prozeß der Erziehung*, Düsseldorf [u. a.]: Päd. Verl. Schwann [u. a.].

Bruner, J. S. (1974): *Entwurf einer Unterrichtstheorie*, Berlin: Berlin-Verl.

Ellrott, D. & Schindler, M. (1975): *Die Reform des Mathematikunterrichts: Grundlagen mit Beispielen aus dem Unterricht der Primarstufe*, Bad Heilbrunn/ Obb.: Klinkhardt.

Fricke, A. & Besuden, H. (1970): *Mathematik: Elemente einer Didaktik und Methodik*, Stuttgart: Klett.

Griesel, H. (1971): *Die sogenannte Moderne Mathematik an Grund- und Hauptschulen als Weiterentwicklung der traditionellen Rechendidaktik (und nicht als Irrweg)*. BzMU 1970. S. 132-138.

Karaschewski, Horst (1969): *Irrwege moderner Rechendidaktik: eine kritische Analyse*, Bonn: Dürr.

Kline, Morris (1974): *Warum kann Hänschen nicht rechnen? Das Versagen der Neuen Mathematik*, Weinheim [u. a.]: Beltz.

KMK (1968). Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen: Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968. *Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland.*

Kühnel, J. (1919): *Der Neubau des Rechenunterrichts: ein Handbuch für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben*, Leipzig: Klinkhardt. 2 Bde.

Moon, B. (1986): *The 'new maths' curriculum controversy: an international story.* London: The Falmer Press.

Neunzig, W. & Sorger, P. (1969): *Einstieg in die Mathematik: Aufriß eines systematischen Weges für die Grundschule*, Freiburg [u. a.]: Herder.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*, Hannover: Schroedel.

Schmidt, S. (1978): *Die Rechendidaktik von Johannes Kühnel (1869 – 1928): Wissenschaftsverständnis, deskriptive und normative Grundlagen sowie deren Bedeutung für die Vorschläge zur Gestaltung des elementaren arithmetischen Unterrichts; eine metatheoretische Analyse zu einem historischen Versuch zur Verwissenschaftlichung der Didaktik des elementaren arithmetischen Unterrichts*, Aachen [u. a.]: Päd. Hochschule Rheinland.

Schmidt-Thieme, B. (2010): Wort, Bild und Aktion: Repräsentationsformen mathematischen Wissens und das Lernen von Mathematik. *MU* 56 (2010), 1. S. 3-11.

Selter, C. (1997): *Schulpädagogik und Fachdidaktik: zur Aktualität des Werkes von Johannes Kühnel (1869 – 1928)*, Bochum: Univ.-Verl. Brockmeyer.

Wagemann, E. B. (1984): Anmerkungen zur Rechendidaktik von 1945 bis 1967 aus persönlicher Sicht. *JMD* 5 (1984), 1/2. S. 101-129.

Weis, V. (1972): *Das Evaluationskonzept des „Frankfurter Projekts“*. Die Deutsche Schule: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft und Gestaltung der Schulwirklichkeit 64 (1972), 9. S. 589-597.

Whitehead, A. N. (1946): The mathematical curriculum. *The aims of education and other essays*, London: Williams & Norgate Ltd.

Lehrerinnen und Lehrer zum Einsatz mathematikhistorischer Quellen im Unterricht ausbilden

Sebastian Schorcht

Die Idee Geschichte der Mathematik im Unterricht zu verwenden wird schon seit längerer Zeit diskutiert (vgl. Lindner 1808; Toeplitz 1927; F. Klein 1933; Schubring 1978; Fauvel und Van Maanen 2000; Matthews 2014). Im Rahmen dieser Auseinandersetzungen mit Mathematikgeschichte, sind viele Ziele formuliert worden, zu denen Mathematikgeschichte im Unterricht beitragen kann. Beispielsweise soll sie zur Klärung epistemologischer Hindernisse dienen (vgl. Radford, Boero und Vasco 2000; Brousseau 2010) oder die Schülerinnen und Schüler zur Beschäftigung mit Mathematik motivieren (vgl. Lindner 1808). Einen möglichen Beitrag den Geschichte der Mathematik als Gegenstand des Lernens haben kann, benennt Jankvist in seiner Darstellung des internationalen Forschungsstandes. Mathematikgeschichte als Bildungsziel soll demnach folgendes Bewusstsein bei den Lernenden etablieren:

- „Mathematics exists and evolves in time and space [...];
- that it is a discipline which has undergone an evolution and not something which has arisen out of thin air [...];
- that human beings have taken part in this evolution [...];
- that the evolution of mathematics is due to many different cultures throughout history and that these cultures have had an influence on the shaping of mathematics as well as the other way round [...];
- or that the evolution is driven by internal as well as external forces [...].“ (Jankvist 2009, S. 22)

Neben der Erkenntnis, dass Mathematik eine historische Tiefendimension besitzt, sollen die Schülerinnen und Schüler im Unterricht die Evolution der Mathematik begreifen. Dabei spielen für Jankvist die Vielfalt mathematischer Kulturen und die Einflüsse, die auf Mathematik wirken, eine bedeutende Rolle. Es soll deutlich werden, dass Mathematik eine durch Personen beeinflusste Wissenschaft ist. Allerdings wird die explizite Auseinandersetzung mit mathematischen Verfahren und Begriffen nur randständig berührt. Bei Jahnke und Habdank-Eichelsbacher wird stärker die mathematische Begriffsbildung hervorgehoben, die durch eine Auseinandersetzung mit Mathematikgeschichte im Unterricht gestärkt werden kann. Für die Schülerinnen und Schüler soll eine Beschäftigung mit Geschichte der Mathematik im Unterricht beitragen

- „zu Einsichten in die *Entwicklung mathematischer Begriffe*;
- zu einem vertieften Verständnis der *Rolle der Mathematik in unserer Welt* und ihrer Beziehungen zu Anwendung, Kultur und Philosophie; sowie
- zur Wahrnehmung und zum Verstehen der Ziele und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen, der Möglichkeiten alternativer Wege und persönlicher Aspekte. Die Schüler erfahren so etwas über die *subjektive Seite* der Mathematik.“ [Hervorhebungen im Original] (Jahnke und Habdank-Eichelsbacher 1999, S. 96)

Durch die Analyse mathematikhistorischer Quellen, soll eine Diskrepanzerfahrung zwischen dem von Schülerinnen und Schülern gelernten und durch die historische Quelle verfremdeten Wissen hergestellt werden (vgl. Glaubitz 2011, S. 30). Die Entwicklung mathematischer Begriffe kann dann an dieser Diskrepanzerfahrung thematisiert werden, indem die Veränderungen zwischen der gegenwärtigen und vergangenen Verwendung mathematischer Begriffe und Techniken diskutiert wird. Für den zweiten und dritten Punkt im Katalog von Jahnke und Habdank-Eichelsbacher ist, meines Erachtens, ein Blick in die Arbeitsweise des Mathematikhistorikers notwendig.

Mathematikgeschichte ist eine wissenschaftliche Disziplin. Sie beschäftigt sich mit mathematischen Quellen, die in der Gegenwart zu finden sind. Sie lassen auf vergangenes mathematisches Handeln schließen. Durch eine hermeneutische Analyse der Quellen, versuchen Mathematikhistoriker die vergangene Verwendung der mathematischen Begriffe und Techniken zu rekonstruieren. Diese sind abhängig vom Kontext, in dem damaliges mathematisches Handeln stattfand. Epple nennt diesen Kontext auch „epistemische Konfiguration“ oder „mathematische Werkstatt“

(Epple 2000, S. 150). Er versteht unter einer mathematischen Werkstatt ein Konglomerat mathematischer Begriffe und Techniken. Unter Techniken werden mathematische Verfahren zur Darstellung, Operation und Interpretation mathematischer Begriffe verstanden. Dabei können gleiche Begriffe mit unterschiedlichen Techniken Ausdruck in historischen Quellen finden. Erst durch die Entwicklung bestimmter Techniken ist es möglich mit den mathematischen Begriffen - Epple nennt diese Begriffe, im Sinne des Arbeitens an Gegenständen in einer Werkstatt, auch „epistemische Gegenstände" (vgl. Epple 2000, S.150) - mathematisch zu handeln. Wissenschaftsexterne und -interne Einrichtungen sowie Kommunikationsstrukturen wirken in und auf diese mathematische Werkstatt, beeinflussen mathematisches Handeln und letztendlich die mathematikhistorische Quelle. Als Einrichtungen können beispielsweise Machtstrukturen oder institutionelle Rahmen und als Kommunikationsstrukturen die Sprache und Kontaktpersonen der mathematisch Handelnden genannt werden. Wie sich die Techniken in mathematischen Werstätten entwickeln, um mathematisches Handeln mit Begriffen zu ermöglichen, ist der von Epple definierte Untersuchungsgegenstand der Mathematikgeschichte (vgl. Epple 2000). Es spielen dann Fragen eine Rolle, wie: „Im Hinblick auf welche Motive und Zwecke war dieses Handeln angemessen? [...] Welche Art von mathematischen Handlungen in einer bestimmten Episode mathematischer Praxis [galten] als vernünftig und sinnvoll [...]?" (Epple 1999, S. 22f)

Um das Zusammenspiel der innerhalb und von außen wirkenden Einflüsse auf mathematische Werkstätten zu rekonstruieren, muss neben der Quelle auch die mathematische Werkstatt Gegenstand der Analyse sein: Um die vorliegende Quelle hermeneutisch zu erschließen ist es nötig die mathematischen Techniken und die zugehörigen Begriffe zu verstehen. Vor allem die gegenwärtige Nutzung mathematischer Begriffe kann dabei zu einer Betrachtungsweise der vorliegenden Quelle führen, die pauschal unsere heutige Wissensbasis in die Quelle hinein interpretiert (vgl. Jahnke, Arcavi u. a. 2000, S. 293). Um diesem Problem adäquat begegnen zu können, wird auf die Betrachtung mathematischer Werkstätten zurückgegriffen. Eingegrenzt wird das Gebiet des historisch zur Verfügung stehenden mathematischen Wissens, indem zusätzlich Quellen herangezogen werden, die zu beliebigen Zeitpunkten als mathematisches Wissen anerkannt waren (vgl. Epple 1999, S. 20). Es ergibt sich somit eine Wissensbasis, die den vergangenen Mathematikern zum jeweiligen Zeitpunkt der Forschung zur Verfügung stand. Die Verwendung neuer mathematischer Techniken, ist somit abhängig von den Möglichkeiten, die eine solche mathematische Werkstatt bietet. Durch die zeitliche und räumliche Umschließung der mathematischen Quelle, arbeitet der Mathematikhistoriker die Beziehungen heraus, die zur analysierten Quelle führen (vgl. Epple 2000, S. 143). Damit werden schlussendlich vergangene Ziele und Zwecke mathematischen Handelns herausgearbeitet, um sie zur „Selbstverständigung der Gegenwart“ (Epple 2000, S. 156) zu nutzen. Zur mathematikhistorischen Quellenarbeit gehört demnach neben mathematischen Kenntnissen auch der Umgang mit Methoden der Geschichtswissenschaft (vgl. Epple 2000, S. 132) und - je nach Quelle - die Kenntnis der Sprache des Verfassers (vgl. Imhausen 2006).

Die hier vorgestellte Quelleninterpretation, verstanden als historisch-hermeneutische Methode im Unterricht, ist eine Möglichkeit der Umsetzung mathematikhistorischer Themen. Dadurch soll zum „vertieften Verständnis der *Rolle der Mathematik in unserer Welt* und ihrer Beziehungen zu Anwendung, Kultur und Philosophie; sowie zur Wahrnehmung und zum Verstehen der Ziele und Intentionen mathematischer Begriffsbildungen, der Möglichkeiten alternativer Wege und persönlicher Aspekte“ [Hervorhebungen im Original] (Jahnke und Habdank-Eichelsbacher 1999, S. 96) im Mathematikunterricht beigetragen werden. Die Frage „Im Hinblick auf welche Motive und Zwecke war dieses Handeln angemessen?“ (Epple 1999, S. 22f) zeigt die Möglichkeiten und Bedingungen mathematischen Handelns im Rahmen mathematischer Werkstätten und kann die Verknüpfungen zu Anwendungen, Kultur und Philosophie herstellen. Die „Selbstverständigung der Gegenwart“ (Epple 2000, S. 156) dagegen ist vermutlich nur im Vergleich mit gegenwärtiger mathematischer Praxis erreichbar.

Neben Beispielen zum Einsatz mathematikhistorischer Quellen (Winter, Zerger u. a. 1986; Jahnke, Schoenbeck u. a. 1991, 1998; Jahnke und Habdank-Eichelsbacher 1999; Jahnke, Arcavi u. a. 2000; Biegel, Reich und Sonar 2008; Jahnke, Richter u. a. 2008) hat Michael Glaubitz in seiner Dissertationsschrift (vgl. Glaubitz 2011) dargelegt, wie diese historisch-hermeneutische Methode mit Hilfe des hermeneutischen Zirkels gelingen kann. In einem exegetischen Teil, erarbeitet er den mathematikhistorischen Kontext einer Quelle Al'Khwarizmis und zeigt in einer Interventionsstudie, mit einer Experimental- und Kontrollgruppe, welche Einflüsse mathematikhistorische Quellen im Unterricht haben können. Dabei kommt er zu folgenden, an dieser Stelle knapp dargestellten Ergebnissen: Die Arbeit mit Quellenmaterial sorgt für eine stärkeren Einbezug des Argumentierens, Kommunizierens und Problemlösens im Unterricht. Die Experimentalgruppe entwickelte im Vergleich zu einer Kontrollgruppe, die den an der Schule üblichen Regelunterricht folgte, einen deutlichen Leistungsschub. Im Leistungstest nach der Intervention konnte dieser Leistungsschub noch über längere Zeit nachwirken. Dabei wurde übergreifend ein Test ohne mathematikhistorische Bezüge angewendet, der die curricularen Kompetenzziele der Jahrgangsstufe erfasste. Es sollten quadratische Gleichungen syntaktisch gelöst, Lösungswege begründet und aus Texten Aufgabenstellungen zu quadratischen Gleichungen herausgearbeitet werden. Glaubitz versucht so positive Effekte durch die Nutzung der historisch-hermeneutischen

Methode nachzuweisen. Zusätzlich konnte die Interventionsstudie das Bild von Mathematik derjenigen Schülerinnen und Schüler verändern, die mathematikhistorische Bezüge im Unterricht nutzten. Für das Fach Mathematik gewann man durch die historisch-hermeneutische Methode neue Interessengruppen unter den Lernenden (vgl. Glaubitz 2011, S. 362f). Unter diesen Aspekten erscheint der Einsatz mathematikhistorischer Quellen als sinnvoll.

Allerdings besitzen Lehrkräfte nur selten die Expertise, die bei einer mathematikhistorischen Quelleninterpretation verlangt wird. Es existieren zwei Möglichkeiten der Problematik zu begegnen: Entweder es werden Lehrkräfte für die Verwendung mathematikhistorischer Themen im Unterricht ausgebildet oder diese Themen müssen durch Experten für den Gebrauch im Unterricht aufgearbeitet werden, ansonsten gestalten sich Quelleninterpretationen im Schulunterricht als komplexe Herausforderungen und werden trotz der Beiträge die sie bewirken sollen nicht eingesetzt.

Die *Ausbildung angehender Lehrerinnen und Lehrer* im Bereich mathematikhistorischer Themen wird an einigen Universitäten schon umgesetzt. Exemplarisch seien hier die Universitäten Wuppertal, Hildesheim, Siegen, Duisburg-Essen und Jena genannt. Die Ausbildung der Mathematiklehrkräfte kann aus internationaler Perspektive folgende Möglichkeiten bieten:

1. „letting teachers know of the part of mathematics (the direct teaching of history of mathematics)

2. enhancing teachers understanding of the mathematics they are going to teach (methodological and epistemological function)

3. equipping teachers with the methods and techniques of incorporating historical materials in their teaching (use of history in the classroom)

4. enhancing teachers' understanding of the evolution of their profession and of the curricula (history of mathematics teaching)" (Schubring, Cousquer u. a. 2000, S. 110)

Im dritten Punkt dieser Liste wird auf das Professionswissen, das Lehrerinnen und Lehrer beim Einsatz der Geschichte der Mathematik im Unterricht benötigen, verwiesen. Dazu gehört auch die Beherrschung der Methoden und Techniken zum Einsatz mathematikhistorischer Quellen im Unterricht. Wie bisher gezeigt, ist dies ein sehr komplexes Unterfangen. Mehrere Kompetenzen sind für eine adäquate Analyse notwendig. Zum Beispiel müssten Lehramtsstudenten mindestens drei Aspekte kennenlernen, um eine Analyse mathematikhistorischer Quellen möglich zu machen: (1) mathematische Techniken zum Darstellen, Operieren mit und Interpretieren von mathematikhistorischen Begriffen; (2) Methoden der Geschichtswissenschaft zur Einbettung mathematikhistorischer Quellen in mathematische Werkstätten und (3) didaktische Umsetzungsmöglichkeiten der Quellenarbeit im Mathematikunterricht. Dieses Plädoyer ist vor dem Hintergrund eines fehlenden mathematikhistorischen Professionswissens zukünftiger Lehrkräfte bei der Planung von Lehrveranstaltungen zu berücksichtigen. Erst die Ausbildung in diesem Sinne bietet den Lehrerinnen und Lehrern die Möglichkeit mathematikhistorische Quellen im Unterricht flexibel einzusetzen und unabhängig von gegebenen Beispielen ihren Unterricht im Sinne der historisch-hermeneutischen Methode zu planen.

Die Alternative zur Ausbildung angehender Lehrkräfte im Bereich Geschichte der Mathematik ist eine präzise, durch Expertinnen und Experten begleitete *Aufbereitung mathematikhistorischer Quellen* für den Unterricht. Die Quelle eingebettet in ihre mathematische Werkstatt und eine didaktische Erläuterung sollten so dargestellt sein, dass ihre Bearbeitung ohne spezifische Kenntnisse zur Mathematikgeschichte möglich ist. Dabei ist die Aufbereitung zumindest durch Expertinnen und Experten der Geschichte der Mathematik zu begleiten, um sich nicht den von Spalt genannten Gefahren einer Verkürzung auszusetzen (vgl. Spalt 1987).

Dieser Herausforderung gilt es bei der Planung zukünftiger Schulmaterialien mit mathematikhistorischen Bezügen zu begegnen. Allerdings ist die Planung dieser Materialien, egal wie gut sie umgesetzt sind, durch die Perspektiven der Autorinnen und Autoren beeinflusst. Jeder Unterricht wird durch unterschiedliche Perspektiven geprägt. Wie Hayden White (1991) herausarbeitete, ist die Darstellung historischen Geschehens maßgeblich von der zugrunde gelegten Geschichtsphilosophie des Autors abhängig. Die Aufbereitung der Themen wird durch eine chronologische Ordnung der Quellenlage und der Festlegung einer Fabel mit Anfang und Schluss bestimmt. Dabei greifen die Autorinnen und Autoren bei ihrer Darstellung der Ereignisse auf eine Erzählstrategie zurück. Auf die Darstellung „Was geschah?“ mit Hilfe sprachlicher Mittel folgt die Darlegung eines „Sinn des Geschehens“. Dabei ist der Sinn des Geschehens von der gegenwärtigen Sichtweise abhängig, mit den Worten Whites formuliert:

> „Die Behauptung, eine vergangene von einer gegenwärtigen Wirklichkeit des gesellschaftlichen Bewusstseins und seiner Praxis unterschieden zu haben, impliziert eine bestimmte Vorstellung davon, welche Form das Wissen von der Gegenwart haben muß, insofern diese eine Fort-

> setzung der Vergangenheit ist.“ [Hervorhebungen im Original] (White 1991, S. 38)

Das Bild der Mathematik wird in diesem Sinne zur perspektivischen Brille und entscheidet welche Quellen für den Unterricht ausgewählt werden und welche nicht. Die formalen Schlußfolgerungen im historischen Sinn heben die Merkmale des vergangenen Geschehens heraus, die für die Darstellung maßgeblich sind. Beispielsweise kann vergangenes mathematisches Handeln im historischen Kontext als stringenter roter Faden dargestellt werden oder es wird die Vielfalt mathematischer Werkstätten fokussiert. Letztendlich wird eine Intention verfolgt, die die Aufbereitung der Quellenlage durchzieht (vgl. White 1991).

Die Aufarbeitung mathematikhistorischer Quellen für die Schule ist demnach durch Perspektiven der Autorinnen und Autoren geprägt. Die Aufgabe der Lehrkraft als mathematikhistorischer Laie wird es sein, diese Perspektiven zu erkennen, um eine kritische Auseinandersetzung mit dem Material zu ermöglichen. Die Wahl der Quellenbeispiele für den Unterricht ist den gleichen Kriterien unterlegen. In der Schule eingesetzte Beispiele dienen demnach dazu, das Mathematikbild der Lehrkräfte zu vermitteln. Die Lernenden werden dieser Situation ausgesetzt, ohne eine Alternative kennenzulernen. Vermutlich in den wenigsten Fällen sind die Lehrenden und Lernenden auf dieses Phänomen vorbereitet.

Damit Mathematiklehrerinnen und -lehrer unterschiedliche Perspektiven wahrnehmen, ist schon bei der Aufbereitung der Quellen eine Offenlegung der Perspektive notwendig. Eine multiperspektivische Darstellung mehrerer Expertinnen und Experten könnte das Bewusstsein für historische Perspektiven schärfen. Eine adäquaten Ausbildung der zukünftigen Lehrenden im Themenbereich Mathematikgeschichte scheint allerdings eine sichere Methode zu sein, um den Beitrag, den Geschichte der Mathematik im Unterricht leisten soll, umzusetzen.

Literaturverzeichnis

Biegel, G., K. Reich und T. Sonar. 2008. *Historische Aspekte im Mathematikunterricht an Schule und Universität.* Göttingen, Stuttgart: Termessos.

Brousseau, G. 2010. Premières découvertes des Obstacles épistémologiques et didactiques en Mathématiques. *Obstacles Epistémologiques* Dossier 1. `guy-brousseau.com/541/presentation-du-dossier-1-<<-obstacles-epistemologiques->>` [15.10.2014].

Epple, M. 1999. *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie.* Braunschweig: Vieweg.

———. 2000. Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. *Mathematische Semesterberichte* 47:131–163.

Fauvel, J., und J. A. Van Maanen. 2000. *History in Mathematics Education: An ICMI Study.* New ICMI Study Series. Berlin, Heidelberg: Springer.

Glaubitz, M. 2011. *Mathematikgeschichte lesen und verstehen: Eine theoretische und empirische Vergleichsstudie.* Dissertation. Duisburg-Essen: Universität Duisburg-Essen. `http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=25416[16.12.2014]`.

Imhausen, A. 2006. Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. *The Mathematical Intelligencer* 28 (1): 19–27. `http://dx.doi.org/10.1007/BF02986998[16.12.2014]`.

Jahnke, H. N., A. Arcavi u. a. 2000. The use of original sources in the mathematics classroom. In *Fauvel und Van Maanen 2000, History in Mathematics Education: An ICMI Study,* 291–328.

Jahnke, H. N., F. Gerber u. a. 1998. Mathematik historisch verstehen. *Mathematik lehren* 91:4–69.

Jahnke, H. N., und B. Habdank-Eichelsbacher. 1999. Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. In *Mathematikdidaktik als design science: Festschrift für Erich Christian Wittmann,* herausgegeben von Christoph Selter und G. Walther, 95–104. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Jahnke, H. N., K. Richter u. a. 2008. Geschichte der Mathematik. *Mathematik lehren* 151:1–69.

Jahnke, H. N., J. Schoenbeck u. a. 1991. Historische Quellen für den Mathematikunterricht. *Mathematik lehren* 47:1–56.

Jankvist, U. T. 2009. *Using History as a 'Goal' in Mathematics Education.* Roskilde: Roskilde University. `http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/464.pdf[16.12.2014]`.

Klein, F. 1933. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus.* Herausgegeben von F. Seyfarth u. a. Band 1, 1968. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Lindner, F. W. 1808. *Über die historisch-genetische Methode: Ein Beytrag zur Verbesserung und Vereinfachung des Unterrichts sowohl in höhern, als niedern Schulen, als Einladungsschrift zu den von Ostern 1808 an zu haltenden sowohl theoretischen, als auch praktischen, pädagogischen Vorlesungen.* Leipzig: Gräff.

Matthews, M. R. 2014. *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching.* Dordrecht: Springer.

Radford, L., P. Boero und C. Vasco. 2000. Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In *Fauvel und Van Maanen 2000, History in Mathematics Education: An ICMI Study,* 162–167. Dordrecht.

Schubring, G. 1978. *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Schubring, G., E. Cousquer u. a. 2000. History of mathematics for trainee teachers. In *Fauvel und Van Maanen 2000, History in Mathematics Education: An ICMI Study,* 91–142. Dordrecht.

Spalt, D. 1987. Die Bedrohung der Mathematikgeschichte durch die Didaktik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 311–314. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Toeplitz, O. 1927. Das Problem der Universitätsvorlesung über Infinitisimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitisimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* 36:90–100.

White, H. 1991. *Metahistory: Die historische Einbildungskraft im 19. Jahrhundert in Europa.* 2. Auflage. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch.

Winter, H., H. Zerger u. a. 1986. Geschichte - Geschichten. *Mathematik lehren* 19:1–58.

Hegel on the Mathematical Infinite

Elena Ficara

> Idea[1] est synthesis infiniti et finiti et philosophia omnia est in ideis.[2]

> The character of the mathematical infinite and the way it is used in higher analysis corresponds to the concept of the genuine infinite.[3]

The question of the mathematical approach to infinity is not a marginal one, in Hegel's thought. It concerns the very core of the dialectical method, and the question: how is it possible to express conceptual contents (i.e. concepts that are, as to Hegel, complex and incommensurable) in a precise and scientific way? Both mathematics and philosophy deal, as to Hegel, with contents that are infinite and incommensurable. Unlike philosophy, mathematics has found a way to adequately express them. In what follows I will first briefly reconstruct Hegel's high consideration of the mathematical infinite, and then I will focus on one aspect that, in my view, is at the very core of the dialectical method, the link between conjunction and contradiction emerging from Hegel's characterisation of the mathematical infinite.

1 What is the Infinite?

Hegel's view on the problem of infinity in mathematics is scattered in many places, starting from Hegel's early writings *Systemfragment* of 1801,[4] the *Geometrische*

1. Note on citation: Hegel's works are cited according to the Moldenhauer and Michel edition, abbreviated as "Hegel Werke", followed by volume and page number. If the English translation is available, I also give the page number of the translation. If it is not, the translation is mine, and the original German text is reported in the footnotes.
2. Hegel Werke 2, 533.
3. Hegel Werke 5, 284 / Hegel 1998, 244.
4. Hegel Werke 1, 419-427.

Studien[5] the *Dissertatio philosophica de orbitis planetarum*,[6] *Glauben und Wissen*[7] and the so called *Jenaer Logik*[8]). As Antonio Moretto in 1984 has shown, Hegel came to a final assessment on the topic after an accurate study of the most recent results of the mathematical research on the infinite. The last version of Hegel's ideas is the remark to the second chapter of the second section of the *Wissenschaft der Logik*. In what follows, I will focus on this remark.

Here Hegel distinguishes between different approaches to the problem of the infinite, and different conceptions of the infinite, more specifically between the "usual" or "old mathematical definition", the "usual" or "old philosophical definition", i.e the one given by Kant, considered by Hegel as an example of "bad infinity" and, finally, the new mathematical, the "true one", which is the one, as to Hegel, in use in higher analysis.

Let us consider the three conceptions in more detail. According to the "usual" or old mathematical definition (OM) the infinite is:

> OM: a magnitude than which there is no greater (when it is defined as the infinitely great) or no smaller (when it is defined as the infinitely small), or in the former case is greater than, in the latter case smaller than, any given magnitude.[9]

Hegel comments:

> In this definition the true concept is not expressed but only, as already remarked, the same [bad] contradiction which is present in the infinite progress [bad infinite]; but let us see what is implicitly contained in it. In mathematics a magnitude is defined as that which can be increased or diminished; in general, as an indifferent limit. Now since the infinitely great or small is that which cannot be increased or diminished, it is in fact no longer a quantum as such.[10]

First Hegel points out that OM entails a contradiction, namely:

> The infinite is a magnitude and the infinite is not a magnitude.

In it, the infinite is said to be both, something that can be increased/diminished (a magnitude, since by magnitude is meant something that can be diminished

5. Hegel 2014, 369-376.
6. Hegel 1986.
7. Hegel Werke 2, 287-433.
8. Hegel 1971.
9. Hegel Werke 5, 282 / Hegel 1998, 243.
10. Ibid.

or increased) and something than which there is not greater (not a magnitude). Thus OM entails a contradiction and this is the reason why ordinary thinking finds difficult to deal with the mathematical conception.

> [The idea] that the quantum [...] is suppressed [*aufgehoben*] [...] is the cause of the difficulty for ordinary thinking. For quantum in so far as it is infinite is required to be thought as *aufgehoben*, as something which is not a quantum but *yet retains its quantitative character*.[11]

Kant highlighted the main difficulty within OM, and suggested an alternative definition of the infinite. The difficulty is that the definition: "the infinite is a magnitude that cannot be increased or diminished" leads to the idea that "there can be a greater or lesser infinite". Hegel admits that Kant's critique is justified because:

> so long as the infinite is represented as a quantum, the distinction of greater or less still applies to it.[12]

This critique, however, does not apply to the genuine mathematical infinite (NM) because this is definitely not a quantum, but rather, Hegel says, a relation, and more specifically: "infinite difference".[13]

Let us first consider what Hegel calls the "bad infinite", and in the remark to the *Wissenschaft der Logik* identifies with Kant's idea of the "transcendental" infinite. As a matter of fact, Kant suggested another view of the infinite, which he called "transcendental infinite" (and Hegel calls the bad infinite, in my reconstruction it would be the "old philosophical definition of the infinite": OP).

> OP: [the idea] that the successive synthesis of the unit in the measurement of a quantum *can never* be completed.[14]

Hegel comments that

> It is evident from this that we have here nothing but an expression of the progress to infinity.[15]

In this sense NM (the new mathematical definition) reveals, according to Hegel, a primacy over OP (the Kantian definition). Hegel says that Kant's definition is problematic because it entails a merely psychological and subjective qualification

11. Hegel Werke 5, 283 / Hegel 1998, 243.
12. Hegel Werke 5, 284 / Hegel 1998, 244
13. Ibid.
14. Ibid.
15. Ibid.

of the concept of the infinite. It implies the view that what is infinite is the subjective activity of “synthesizing the unit”, i.e. of adding further unities to an amount, an activity that can never be completed.

In this respect, Kant’s infinite is the bad infinite of the progress or series, which cannot be achieved without the spontaneous intervention of a subject who adds further elements to the series.

The genuine infinite is, in contrast, the one that emerges from higher analysis:

> NM: On the other hand [. . .] the character of the mathematical infinite and the way it is used in higher analysis corresponds to the concept of the genuine infinite.[16]

For example, if we take a fractional number,

> NM: Such fraction, 2/7 for example, is not a quantum like 1, 2, 3, etc.; although it is an ordinary finite number it is not an immediate one like the whole numbers but, as a fraction, is directly determined by two other numbers which are related to each other [...] The fraction 2/7 can be expressed as 0.285714...etc. As so expressed it is an infinite series; the fraction itself is called the sum, *or finite expression* of it.[17]

In other words, the processual version of the infinite expressed by the fraction 2/7 is 0.285714... *ad infinitum*, the infinite series. However, while the expression: 0.285714... is an expression of bad infinity, 2/7 expresses the good infinity. In fact, in the fraction the infinite is, as Hegel says, “all contained” as such. The mathematical symbols immediately convey the entire development of the infinite series. In contrast, in the progress of the series the infinite is incomplete, it always requires the iterated intervention of an operation.

Hegel criticizes that:

> The series contains and exhibits the contradiction of representing that which is a relation [...] as a mere *quantum*, as an amount. The consequence of this is that the amount which is expressed in the series always lacks something, so that in order to reach the required determinateness, we must always go further than the terms already posited [...] By continuing the series the amount can of course be made as accurate as *one needs it to be*; but representation by means of the series continues to be only an *ought-to-be.*[18]

16. Ibid.
17. Hegel Werke 5 285-286 / Hegel 1998, 245.
18. Hegel Werke 5, 288 / Hegel 1998, 247.

At the same time he stresses that the fraction is a finite expression too. However, its finitude fully entails its infinity. Hegel writes:

> But on the other hand, what is called the *finite expression* or the *sum* of such a series lacks nothing; it contains that complete value which the series only seeks, the beyond is recalled from its flight; what it is and what it ought to be are not separate but the same.[19]

The fraction 2/7 is a finite quantity, but what it expresses is infinite. Thus it is both finite and infinite.

In sum, Hegel distinguishes between three concepts of the infinite (OM, OP, and NM), observes that all of them entail a contradiction, and considers the first two inadequate to express the nature of the infinite. Only the third represents an adequate expression of the infinite (the "good", as opposed to the "bad" infinity). One can plausibly distinguish, on this basis, between bad contradictions (those conveyed by OM and OP) and good contradiction (the one entailed in NM). But what does the distinction between good and bad contradictions amount to, exactly?

2 Good and Bad Contradictions

The distinction between good and bad infinity is to be traced back to the difference between the kinds of contradictions involved in Hegel's characterisation of the two kinds of infinity.[20] There is a good contradiction related to the good infinite (NM), and there is a bad contradiction related to the bad infinity of OP and OM. But in what sense the contradictions conveyed by OP and OM are bad, while the one entailed in NM is good? What does "good" (infinity, or contradiction) exactly mean, in this context?

As we have seen, in OM there is a contradiction between the characterisation of infinity as quantity, i.e. as something that can be increased (or diminished) and the one of infinity as something that is not a quantity, i.e. as something that cannot be increased. In contrast, the symbolic notational account of NM allows us seeing that the infinity of the fraction 2/7 is indeed a quantity that can be added

19. Hegel Werke 5, 289 / Hegel 1998 248.
20. One could object that the relation between "the finite" and "the infinite" is not a contradiction in the technical meaning of the term (as couple of sentences or predicates one of which is the negation of the other). I endorse the view that Hegelian opposites (among them the pair "finite"/"infinite") are contradictories in the technical meaning of the term "contradiction". I have argued for this view in other occasions. See Ficara 2013, but also Henrich 1976, Priest 1989, Düsing 2012 among others.

to other finite or infinite quantities. I may add 2/7 to 3/5, or to 1, 2, whatever. So the NM account allows calculation even if the numbers involved are not properly natural numbers. Thus in light of NM the contradiction in OM is solved, since the infinite turns out to be a quantity of some sort.

The contradiction involved in OP, as we have seen, strictly concerns the impossibility of capturing infinity using finite subjective means. The process is given by the attempt to grasp the infinite nature of the series using subjective means. So we have the conception of an infinity, but we can neither use nor grasp it (in a sense, we have and do not have the infinite). However, this is a false contradiction, in the perspective of NM. In NM the symbolic notational account allows us to keep infinity "all enclosed" in the fraction without sacrificing its open infinite nature. In the infinite calculus we have finite operations with infinite quantities, in the philosophical bad account, in contrast, we have infinite (incomplete) operations with finite quantities.

3 Conjunction and Contradiction

In this respect, it is possible to show how the distinction between good and bad infinity is rooted in the peculiar Hegelian view about the conjunction linking two truly contradictory elements (sentences or predicates).[21] In Hegel's view, the conjunction that joins two truly contradictory terms does not allow simplification. Classically, if we state a conjunction then we can also assert one of the two conjuncts separately. For example, if it is the case that "The sun shines today and Siegen is in Germany" then that "Siegen is in Germany" is also the case.

A Hegelian conjunction of two contradictory statements, in contrast, implies that we cannot state only one of them separately. In a true contradiction each term as such, separated from its conjunct, is false, but the contradiction (their conjunction) is true. This means that if I have Fm and not-Fm each conjunct is false while their conjunction "Fm and not-Fm" is true. The contradiction grasped by NM is of this sort. We cannot say that 2/7 is only infinite and we cannot say that it is only finite (not-infinite), while we must say that 2/7 is both finite and infinite (not-infinite and infinite).

In the contradiction involved in OM ("the infinite is a quantity and the infinite is not a quantity"), in contrast, it is not the case that both: "the infinite is a quantity" and "the infinite is not a quantity" are false, since the infinite *is* a quantity, only the first conjunct is true, and the contradiction is only apparent.

21. For a more detailed analysis of the peculiar logical behaviour of Hegelian Conjunction see Beall/Ficara (to appear).

In OP, as Hegel says, the contradiction at stake is that "of representing that which is a relation [...] as a mere *quantum*, as an amount"[22] The contradiction is given by qualifying as "mere quantum, an amount" what is not a quantum. The two contradictory determinations are thus "being a mere amount" and "not being a mere amount". In this case, that "the infinite is a mere quantum" is simply false, while the second conjunct "the infinite is not a mere amount" is true, and the contradiction is, again, only apparent.

In conclusion, the good infinity is good simply because it entails that the contradictory terms are joined by a kind of conjunction according to which simplification does not hold. The two (contradictory) conjuncts of a Hegelian conjunction, taken in isolation, are simply false.

References

Beall, JC and Ficara, E. (to appear). "Hegelian Conjunction, Hegelian Contradiction".

Düsing, K. 2012. *Aufhebung der Tradition im dialektischen Denken*, München: Fink.

Ficara, E. 2013. "Dialectic and Dialetheism". *History and Philosophy of Logic* 34/1, 35-52.

Hegel, G.W.F. 1971ff. *Georg Wilhelm Friedrich Hegel: Werke in 20 Bänden.* Auf der Grundlage der Werke von *1832-1845 neu edierte Ausgabe.* E. Moldenhauer and K. M. Michel (eds.). Frankfurt a.M.: Suhrkamp (=Werke, 1-20).

Hegel, G.W.F. 1969. *Science of Logic.* English translation by A.V. Miller. New York: Humanity Books.

Hegel, G.W.F. 1971. *Jenaer Systementwürfe II.* ed by R.-P. Horstmann and J.-H. Trede. Gesammelte Werke vol 7. Hamburg: Meiner.

Hegel, G.W.F. 1986. *Dissertatio philosophica de orbitis planetarum.* Edited and translated into German by W. Neuser.

Hegel, G.W.F. 2014. *Frühe Schriften II.* ed. by W. Jaeschke. Gesammelte Werke vol. 2. Hamburg: Meiner.

Henrich, D. 1976. 'Hegels Grundoperation', in R.P. Horstmann (ed.), *Seminar: Dialektik in der Philosophie Hegels*, Frankfurt a.M.: Suhrkamp, 208-230.

Moretto, A. 1984. *Hegel e la matematica dell'infinito.* Trento: Verifiche.

22. Hegel Werke 5, 288 / Hegel 1998, 247.

Ein Zyklenmodell der Anwendung von Mathematik

Tim Räz und Tilman Sauer*

Einleitung

Das Problem der Anwendbarkeit der Mathematik hat in der neueren philosophischen Literatur im Vergleich zu den Fragen, die mit der reinen Mathematik verknüpft sind, erst vor kurzem vermehrt Aufmerksamkeit gefunden.[1] Ein Ausgangspunkt der Debatte war ein berühmter Aufsatz von Eugene Wigner (1960) über die "unerklärliche Effektivität der Mathematik in den Naturwissenschaften". Wigner formulierte sein Erstaunen über diese Anwendbarkeit allgemein, und seine Beispiele stammen aus allen Bereichen und Epochen, aber historisch gesehen war der Hintergrund für seinen Aufsatz die erstaunliche Effektivität, welche die Mathematik in der ersten Hälte des 20. Jahrhunderts bei der Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantentheorie gezeigt hat.

Obwohl Wigner das Problem als ein allgemeines erkannte, war die Anwendbarkeit der Mathematik in früheren Zeiten nichts Überraschendes. Die euklidische Geometrie behandelt die Geometrie gerader Linien und Kreise und löst ihre Konstruktionsaufgaben mit Lineal und Zirkel. Zwar formuliert sie die Geometrie von Lineal und Zirkel im dreidimensionalen Raum axiomatisch und beweist ihre Sätze mit sprachlichen und symbolischen Mitteln. Aber der Ursprung ihrer Theoreme in den Erfahrungen der praktischen Geometrie und Landvermessung und die Natürlichkeit ihrer Axiome für die physische Wirklichkeit waren stets offensichtlich. Auch als Hilbert die geometrischen Axiome ihrer direkten physikalischen Bedeutung beraubte, beharrte er dennoch darauf, dass die Geometrie, historisch gesehen, eine

∗. Dieser Beitrag ist eine gekürzte deutsche Fassung des Aufsatzes "Outline of a Dynamic Inferential Conception of the Application of Mathematics," [philsci-archiv.pitt.edu/10912].

1. Neuere Überblicksartikel zum Problem der Anwendbarkeit sind (Colyvan 2009) und (Steiner 2005).

empirische Wissenschaft war. Allerdings waren ihre Begriffe und Ergebnisse mit der Zeit so sicher und unendlich oft überprüft, dass niemand ihre Gültigkeit mehr in Frage stellte und die Geometrie vollständig in eine mathematische Wissenschaft transformiert wurde.

Die Ursprünge und die Anwendbarkeit des Differential- und Integralkalküls bieten ein ähnliches Bild. Von ihren Begründern als allgemeines Hilfsmittel für die Beschreibung von Bewegungen erdacht—siehe Newtons Ausdruck der "Fluxion"—war der Kalkül ausdrücklich entwickelt, um physikalischen Phänomenen eine rigorose, praktische und effektive mathematische Repräsentation zu geben. Ivor Grattan-Guinness (2008) wies darauf hin, dass eine historische Perspektive auf die These der erstaunlichen Effektivität viel von ihrer vermeintlichen Plausibilität nimmt.

Die euklidische Geometrie war über lange Zeit in ihrer ganzen Komplexität und Subtilität nie auf irgendetwas anderes angewandt worden als auf die physikalische Geometrie. Das änderte sich erst mit Hilberts neuem Verständnis der mathematischen Axiomatik. Hilbert selbst führte beispielsweise die elektrochemische Spannungsreihe und die Vererbungsgesetze der Drosophila als Beispiele für die euklidischen Axiome der linearen Kongruenz an (Sauer und Majer 2009, pp. 420–423), (Hilbert 1930). Noch offensichtlicher waren die Vielseitigkeit und Allgemeinheit des Differentialkalküls, der sich auf beinah allen Gebieten der Naturforschung nicht nur als anwendbar, sondern als unverzichtbar erwies.

Die Göttinger Lobpreisung der "prästabilierten Harmonie" zwischen Mathematik und Physik wurde pointiert am Beispiel der allgemeinen Relativitätstheorie vorgetragen. So sagte Hilbert in einem 1921 in Kopenhagen gehaltenen Vortrag: "Der Mathematiker aber, der schon so oft die prästabilirte Harmonie zwischen seinem Denken und der Wirklichkeit mit Staunen bemerkt, wird fast zu der Vorstellung gezwungen, als sei die Natur eigens so eingerichtet, dass es zu ihrer Erfassung der tiefsten mathematischen Spekulationen bedarf" (Sauer und Majer 2009, p. 387). Felix Klein schrieb in seinen Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert über die Relativitätstheorie: "Die wunderbare Harmonie aber, welche zwischen den Entwicklungen der reinen Mathematiker und den Gedankenkonstruktionen der neueren Physiker besteht, bewährt sich aufs neue auf einem erweitertem Gebiete" (Felix Klein 1927, p. 79).[2]

Mark Steiner (1998) argumentierte, dass es sich bei dem Problem der Anwendbarkeit der Mathematik eigentlich um mehrere Probleme handle, die sorgfältig zu unterscheiden seien. Steiner unterscheidet *semantische* Anwendbarkeit bezüglich der Gültigkeit von Argumenten, die sowohl auf empirischen als auch auf ma-

2. Vgl. auch Kleins Bemerkungen über Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie in (Felix Klein 1921, pp. 557–558).

thematischen Voraussetzungen beruhen, *deskriptive* Anwendbarkeit bezüglich der Adäquatheit mathematischer Begriffe zur Lösung empirischer Probleme, sowie die Frage des *analogischen* Denkens, d.h. von Schlussfolgerungen, die im Bereich der Mathematik oder mit mathematischen Gleichungen erfolgen. Steiner hält dafür—contra Wigner—, dass der Gebrauch einzelner mathematischer Begriffe in den empirischen Wissenschaften gar nicht das Hauptproblem darstellt. Vielmehr bestehe das philosophische Problem der Anwendbarkeit darin, dass die Mathematik als Ganzes sich als unglaublich erfolgreich erweist, und zwar ungeachtet der Tatsache, dass in ihrer Entwicklung anthropozentrische Kriterien wie Schönheit oder Praktikabilität wirksam sind.[3]

In der jüngeren philosophischen Diskussion der Anwendbarkeit gilt das Interesse allgemeiner der Aufgabe, die verschiedenen Funktionen der Mathematik in den Anwendungen auf empirische Probleme festzustellen. In diesem Aufsatz stellen wir uns ebenfalls diese Aufgabe und greifen dafür einen Vorschlag von Bueno und Colyvan (2011) auf: die sogenannte "inferentielle Auffassung" der Anwendung von Mathematik. Der Grundgedanke der inferentiellen Auffassung scheint uns vielversprechend für ein besseres philosophische Verständnis der Anwendbarkeit. Die Konfrontation dieses Ansatzes mit historischen Fallstudien—insbesondere mit der Episode der Zusammenarbeit Albert Einsteins und Marcel Grossmanns bei der Suche nach den Feldgleichungen einer verallgemeinerten Relativitätstheorie in den Jahren 1912 und 1913—zeigt allerdings auch, dass es notwendig ist, den Ansatz weiterzuentwickeln und insbesondere zu dynamisieren. In diesem Aufsatz skizzieren wir unsere *dynamische inferentielle Auffassung* und unsere Fallstudie der Anwendung des "absoluten Differentialkalküls" durch Einstein und Grossmann auf das Problem einer relativistischen Gravitationstheorie.

Die inferentielle Auffassung

Bueno und Colyvan (2011) verwenden ein bekanntes Bild der Anwendung von Mathematik als Ausgangspunkt für ihren Ansatz. Gemäß diesem Bild hilft uns die Mathematik in der Anwendung, indem sie empirische Strukturen repräsentiert. Wir erhalten neue Einsichten über die Welt, indem wir diese mathematische Repräsentation untersuchen. Die Abbildungsrelation wird durch eine strukturerhaltende Abbildung hergestellt, welche die mathematische Struktur mit relevanten Teilen der Welt verbindet. Abbildungstheorien haben eine lange Tradition, etwa in

3. Steiner (1998) diskutiert die Entdeckung der allgemeinen Relativitätstheorie, unsere Fallstudie, auf S. 94ff.

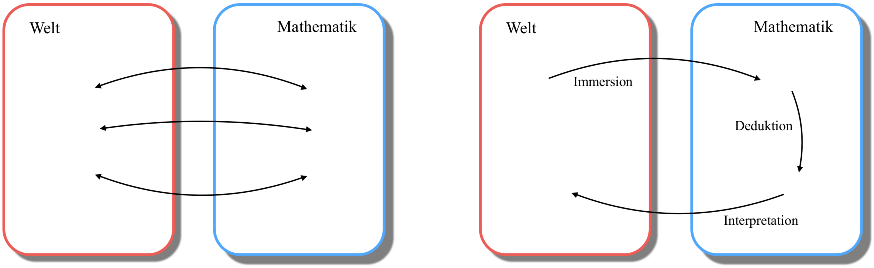


Abbildung 1: In Abbildungstheorien (links) verbindet eine strukturerhaltende Abbildung eine empirische Struktur mit einer mathematischen. In der inferentiellen Auffassung (rechts) wird die Abbildung in einen Immersionsschritt und und einen Interpretationsschritt differenziert, und ein Deduktionsschritt erlaubt Inferenzen innerhalb der mathematischen Theorie.

der Debatte um wissenschaftliche Repräsentationen und Modellierungen. Die Idee von Abbildungstheorien ist in Abb. (1) illustriert.

Das Beispiel eines Stadtplans liefert eine häufig verwendete Illustration von Abbildungstheorien. Ein Stadtplan repräsentiert die relevante Struktur einer Stadt, indem er gewisse Aspekte von Strassen und Gebäuden darstellt. Ein solcher Plan unterdrückt aber auch immer Informationen, etwa Höhenunterschiede, und gelegentlich stellt eine Karte nicht einmal die Distanzen treulich dar. Aber in jedem Fall gibt es eine Korrespondenz zwischen Elementen des Stadtplans und Elementen der Stadt. Vor allem soll der Plan repräsentieren, wie verschiedene Strassen und Stadtteile verbunden sind, und er soll Inferenzen darüber erlauben, wie Teile der Stadt durch Pfade verbunden sind. Wissen über mögliche Wege und Strassenverbindungen in der Stadt kann so aus Informationen des Stadtplans abgeleitet werden, und darin besteht die Brauchbarkeit des Plans.

Bueno und Colyvan (2011) diskutieren einige systematische Probleme der Abbildungstheorie und vertreten die Ansicht, dass diese keine vollständige Antwort auf die Frage geben kann, warum Mathematik in Anwendungen nützlich sein kann. Die Motivation für ihre inferentielle Auffassung liegt darin, diese Probleme zu lösen oder wenigstens eine Lösung anzudeuten, um so ein vollständigeres Bild der Anwendung von Mathematik zu erhalten.

Die inferentielle Auffassung unterscheidet im Prozess der Anwendung von Mathematik drei Schritte:

1. Im Schritt der *Immersion* oder *Einbettung* spezifizieren wir eine Abbildung von relevanten Aspekten der empirischen Domäne auf eine mathematische Struktur.

2. In einem *Ableitungsschritt* oder *Deduktionsschritt* realisieren wir Implikationen der mathematischen Theorie, d.h. wir vollziehen gewisse Ableitungen, welche im Rahmen der mathematischen Struktur möglich sind.

3. In einem *Interpretationsschritt* schließlich werden die Konsequenzen, die wir mittels der Deduktionen erhalten haben, wieder auf die empirische Domäne zurück abgebildet. Die hier zum Tragen kommende Abbildung muß nicht notwendigerweise invers zur Einbettungsabbildung sein.

Die inferentielle Auffassung weist gegenüber der Abbildungstheorie mehrere Vorteile auf. Da die inferentielle Auffassung zwischen einem Einbettungs- und einem Interpretationsschritt unterscheidet, erlaubt sie erstens die Verwendung unterschiedlicher Abbildungen bei der anfänglichen Einbettung und bei der späteren Interpretation eines möglicherweise anderen Teils der mathematischen Struktur. Zweitens ermöglicht die Unterscheidung zwischen der Einbettung und der Interpretation eine dynamische Auffassung: indem wir zwischen der Welt und der mathematischen Struktur hin- und hergehen, können wir die mathematische Beschreibung der empirischen Struktur allmählich verfeineren, neue empirische Phänomene einbeziehen oder unsere ursprünglichen Vorurteile über die Welt revidieren. Ein dritter wichtiger Aspekt ist die Betonung des Deduktionsschritts. Indem wir bestimmte Eigenschaften der empirischen Welt auf eine mathematische Struktur beziehen, werden uns Inferenzen und Einsichten möglich, die sonst nicht oder nur sehr schwer realisiert werden können.

Die Betonung der Bedeutung des Deduktionsschritts für eine Theorie der wissenschaftlichen Repräsentation und Modellierung hat bereits eine längere Tradition. Die Bedeutung der Deduktion wurde bereits von Mauricio Suárez (2004) hervorgehoben, der eine inferentielle Auffassung wissenschaftlicher Repräsentationen vertritt. Auch R.I.G. Hughes (1997) schlug eine Theorie des wissenschaftlichen Modellierens vor, die er "DDI" (Denotation, Demonstration, Interpretation) nennt und welche auch den inferentiellen Schritt über die Welt-Modell- und Modell-Welt-Korrespondenzen hervorhebt. Nancy Nersessians (2008) und Susan Careys (2009) Theorien der Begriffsentwicklung als (Quinesches) "bootstrapping" besteht aus einer Trias der Setzung von Statthalterstrukturen, Prozeduren der Modellkonstruktion wie analogische Konstruktionen, Grenzwertbetrachtungen, Gedankenexperimenten und Induktionsargumenten und schließlich der Interpretation in der wirklichen Welt. Abbildungstheorien wissenschaftlicher Repräsentation sind ebenfalls schon seit längerem kritisiert worden. So führt etwa Suárez (2003) Argumente gegen abbildungsbasierte Theorien der Modellierung und Repräsentation an.

Probleme der inferentiellen Auffassung

Ungeachtet der Vorteile der inferentiellen Auffassung gegenüber Abbildungstheorien hat auch diese Auffassung einige systematische Schwierigkeiten. Dazu gehören a) das Problem der Annahme der vorgängigen Struktur, b) ein Zirkularitäts- und c) ein Trivialitätseinwand, sowie d) die Trennung der empirischen und mathematischen Domäne.

a) Das Problem der *Annahme der vorgängigen Struktur* besteht sowohl für Abbildungstheorien als auch für die inferentielle Auffassung, da beide auf strukturerhaltenden Abbildungen beruhen. Das Problem besteht darin, dass wir bei der Verwendung solcher Abbildungen bereits annehmen müssen, dass es in der Welt irgendeine Art Struktur gibt, die in den Abbildungen erhalten bleibt. Es gibt aber keinerlei Garantie, dass die Welt in einer solchen Art und Weise strukturiert ist. Die Antwort auf diesen Einwand besteht darin, dass die inferentielle Auffassung uns zu keinerlei metaphysischen Stellungnahmen verpflichtet. Wir können daher eine ursprüngliche Struktur einfach versuchsweise annehmen und sie gegebenenfalls revidieren. Die tatsächliche Struktur der empirischen Wirklichkeit ist erst das Ergebnis eines—oftmals wiederholten—Hin- und Hergehens zwischen angenommener und mathematischer Struktur. Die inferentielle Auffassung spiegelt damit auch den historischen Prozess der Mathematisierung wider.

b) Der *Zirkularitätseinwand* weist darauf hin, dass die inferentielle Auffassung strukturerhaltende Abbildungen, also mathematische Objekte, verwendet. Daraus folgt, dass sowohl der Definitionsbereich als auch der Zielbereich ebenfalls mathematische Gegenstände sein müssen. Dann aber, so der Einwand, kann die inferentielle Auffassung die Anwendbarkeit der Mathematik auf die Welt nicht erklären, sondern nur die Anwendung der Mathematik auf sich selbst. Diesem Einwand kann durch eine Unterscheidung zwischen einer empirischen Struktur und deren mathematischer Repräsentation begegnet werden. Die Einbettung bildet die mathematisch repräsentierte angenommene empirische Struktur auf die mathematische Domäne ab. Außerdem läuft dieser Einwand darauf hinaus, die Mathematisierung empirischer Tatsachen überhaupt als Problem anzusehen, es sei denn man verzichtet ganz auf eine begriffliche Trennung von Mathematik und empirischer Wirklichkeit. Letztere Konsequenz würde aber einen umfangreichen Teil moderner Wissenschaft ignorieren.

c) Der *Trivialitätseinwand* bestreitet, dass es hier überhaupt eine philosophische Schwierigkeit gibt, jedenfalls aus der Perspektive des wissenschaftlichen Realismus. Diesem Einwand zufolge ist es *selbstverständlich* möglich, dass wir in der Welt Objekte, Relationen und Strukturen finden, die von der mathematischen Darstellung unabhängig sind und trotzdem auf die Mathematik bezogen werden können. Dieser Trivialitätseinwand greift allerdings nur dann, wenn wir die vorgängige Struktur metaphysisch interpretieren, d.h. wenn wir annehmen, dass es unproblematisch ist, die vorgängige Struktur als reale, empirische Struktur zu interpretieren. Zur Entgegnung dieses Einwands verweisen wir auf unsere Fallstudie: Wenn das Ziel einer neuen Theorie der Gravitation darin besteht, bislang verborgene Strukturen der Wirklichkeit auszudrücken, kann diese Struktur schwerlich schon am Anfang der Untersuchung zur Verfügung stehen.

d) Schliesslich sollten wir auf eine wichtige *Voraussetzung* der inferentielle Auffassung hinweisen, nämlich *dass wir überhaupt klar zwischen einer mathematischen und einer empirischen Domäne unterscheiden können.* Diese Voraussetzung ist in der Literatur wiederholt angezweifelt worden, etwa von Ladyman und Ross (2007, pp. 159), die auf das Problem der Unterscheidung von abstrakt und konkret hinweisen, oder von French (2000) mit der Behauptung, dass die Grenze zwischen Mathematik und der Welt unscharf sei. Obwohl eine umfassende Antwort auf die Frage der Unterscheidung von reiner und angewandter Mathematik nicht leicht gegeben werden kann, bedeutet dies dennoch nicht, dass wir auf eine solche Unterscheidung überhaupt verzichten müssen. Die Unterscheidung zwischen Repräsentation und Repräsentiertem ist ein Kernproblem vieler philosophischer Debatten, besonders in der Philosophie der Physik. Beispielsweise bestand eines der zentralen Probleme Einsteins bei der Ausarbeitung der allgemeinen Relativitätstheorie darin, die richtige Interpretation der Bedeutung von Koordinaten zu finden. Einstein gelang die Lösung dieses Problems erst nach langem Suchen und Nachdenken, und die Lösung erforderte die Einführung der repräsentativen und deduktiven Mittel des Tensorkalküls und die Auflösung des Arguments der berühmten Lochbetrachtung. Obwohl also eine klare begriffliche Trennung von Wirklichkeit und Mathematik nicht immer offensichtlich sein mag, ist diese Unterscheidung dennoch für den Prozess der Anwendung der Mathematik zentral. Wenn man sie in Frage stellt, wird zweifelhaft, ob eine philosophische Auseinandersetzung mit dem Problem der Anwendbarkeit überhaupt sinnvoll ist.

Die dynamische inferentielle Auffassung

Die inferentielle Auffassung scheint uns ein geeigneter Ausgangspunkt für eine Auseinandersetzung mit dem philosophischen Problem der Anwendbarkeit der Mathematik in den empirischen Wissenschaften, aber sie muß erweitert werden. Die Betrachtung historischer Episoden der Mathematisierung empirischer Theorien zeigt nämlich, dass ein Erfolg oftmals gar nicht garantiert ist, wenn mathematische Konzepte, Theorien und Methoden angewandt werden, um Aspekte der Welt besser zu verstehen. Sobald sich ein solcher Erfolg einstellt, erscheint zwar im Rückblick der Erfolg auch den Akteuren häufig als ganz natürlich und sogar als unvermeidlich. Aber eine genauere historische Untersuchung erweist den Prozess der Anwendung oftmals als einen komplizierten Äquilibrierungsprozess. Dass dieser Anpassungsprozess durch irrtümliche Prämissen, verkannte Einsichten, durch Sackgassen und begriffliche Revisionen geprägt ist, scheint eher die Regel als die Ausnahme zu sein.

Ein systematischer Grund für die Notwendigkeit, im Prozess der Begriffsbildung eine Angleichung von empirischen und mathematischen Strukturen zu finden, liegt darin, dass unsere Theorien über die empirische Welt immer auf einer begrenzten Sphäre empirischer Erfahrung fußen. Im Prozess der Elaborierung unserer Theorien werden die Grenzen dieser empirischen Gültigkeit systematisch überschritten. Dadurch entstehen Konflikte mit unverstandenen Phänomenen oder mit Bereichen der Wirklichkeit, die mittels anderer, unabhängig begründeter Theorien konzeptualisiert worden sind. Beispiele hierfür finden sich beispielsweise bei Peter Galison (1997) unter dem Begriff der "trading zones" diskutiert oder bei Jürgen Renns (2006) Betonung der Dreiteilung der klassischen Physik in Bereiche der klassischen Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik als der prinzipiellen Herausforderung für Einsteins Kreativität in seinen frühen Jahren.

Anwendungszyklen

Wenn wir Episoden der Wissenschaftsgeschichte betrachten, in denen Mathematik angewandt wurde, besteht gemäß der inferentiellen Auffassung die kleinste Einheit, die zeitlich iteriert wird, aus drei Schritten: Einbettung, Deduktion und Interpretation. Wir nennen eine solche Einheit einen *Zyklus*. Ein Zyklus besteht aus einem einmaligen Hin und Her zwischen der Welt und der Mathematik, er ist eine Instanz der Angleichung von mathematischer Theorie und einer empirischen Struktur. Der Ausgangspunkt eines Zyklus ist eine ursprünglich angenommene, vorgängige Struktur, das Ergebnis ist eine revidierte angenommene Struktur.

Die dynamische inferentielle Auffassung soll eine Theorie der Anwendung von Mathematik allgemein sein, nicht eine Theorie der *erfolgreichen* Anwendung von Mathematik. Der Begriffsrahmen umfaßt sowohl erfolgreiche als auch misslungene Anwendungen. Entsprechend unterscheiden wir zwei mögliche Ergebnisse von Anwendungszyklen. Eine erfolgreiche Anwendung bezeichnen wir als *geschlossenen* Zyklus. Wenn die Anwendung misslingt, sprechen wir von einem *offenen* Zyklus, vgl. Abb. (2).

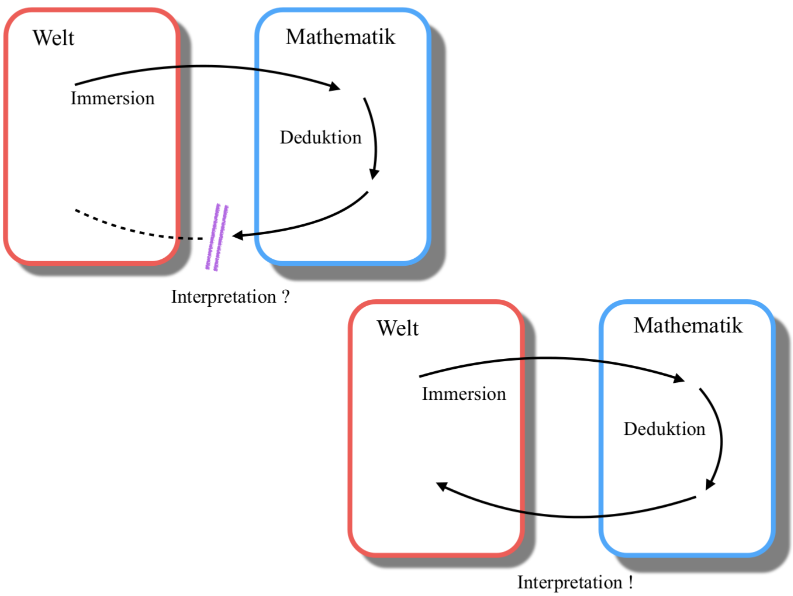


Abbildung 2: In der dynamischen inferentiellen Auffassung unterscheiden wir zwischen offenen und geschlossenen Zyklen der Anwendung von Mathematik.

Die Entscheidung der Frage, ob ein Zyklus offen oder geschlossen ist, also der Begriff des Erfolgs, hängt von den jeweiligen Zielsetzungen und Erwartungen der Wissenschaftler ab. Das Ziel der Anwendung von Mathematik kann zum Beispiel darin bestehen, ein neues empirisches Phänomen in einem etablierten theoretischen Begriffsrahmen zu interpretieren, unbekannte Implikationen einer Theorie zu explorieren, Beziehungen zwischen entfernten Teilen einer begrifflichen Struktur herzustellen oder bekannte Theoreme und Aussagen einer Theorie auf ihre logische Abhängigkeit, Konsistenz und Vollständigkeit hin zu untersuchen.

Ein Anwendungszyklus wird oftmals ausgelöst durch eine Schwierigkeit, die in der vorgängigen Struktur identifiziert wird. Diese Schwierigkeit wird daher auch eine Heuristik generieren, welche dem Zyklus ein Ziel vorgibt. Das Ergebnis des Anwendungszyklus wird dann verglichen mit den Erwartungen an die Lösung. Es können deshalb Widersprüche zwischen den erwarteten Ergebnissen und den tatsächlich erhaltenen Ergebnissen auftreten. Es ist auch möglich, dass das Ergebnis eines Zyklus den Erwartungen zwar entspricht, aber nicht alle Teile des Zyklus, etwa alle Schritte der Deduktion, mit der Heuristik übereinstimmen.

Insofern ein Anwendungszyklus ein Ziel hat, ist der Erfolg oder Misserfolg einer Anwendung auch unabhängig von den jeweiligen Ansichten der Forscher. So kann die mathematische Struktur beispielsweise auf die empirische Struktur passen oder nicht passen. Wir sprechen dann von einem *objektiv geschlossenen* oder *objektiv offenen* Zyklus. Andererseits können die beteiligten Forscher—zurecht oder zu Unrecht—davon überzeugt sein, dass der Anwendungszyklus geschlossen oder offen ist. Wir nennen einen Anwendungszyklus dann *subjektiv geschlossen* oder *subjektiv offen*. Diese Unterscheidung ist besonders für ein Verständnis der historischen Genese einer mathematisierten empirischen Theorie wichtig.

Je nach Ausgang des Anwendungszyklus werden unterschiedliche Folgedynamiken ausgelöst. Sollte das Ergebnis ein offener Zyklus sein, d.h. sollte keine Übereinstimmung zwischen mathematisch abgeleitetem Ergebnis und empirischer Domäne hergestellt werden können, dann wird ein Prozess der *Reflexion* in Gang gesetzt. In diesem wird der gesamte Verlauf des offenen Zyklus erneut betrachtet. Aber die Analyse des Zyklus erfolgt jetzt nicht mehr explorativ, sondern man *reflektiert* auf die einzelnen Schritte des Zyklus, um denjenigen Schritt zu identifizieren, der für das Fehlschlagen des Anwendungszyklus verantwortlich war.

Ein Anwendungszyklus kann an einer oder mehreren Stellen fehlschlagen, und wir können die Komponenten des Zyklus, wie sie von der inferentiellen Auffassung unterschieden werden, als diagnostisches Werkzeug verwenden, um offene Zyklen zu analysieren und um möglicherweise die Schwierigkeiten zu überwinden. Die Dopplung eines Zyklus in explorative Ausführung und anschließend in reflektierende Analyse bezeichnet unseres Erachtens wirkliche Momente des Forschungsprozesses, auch wenn die Akteure selbst ihre Tätigkeit nicht in diesen Kategorien wahrnehmen.

Es ergeben sich vier Kategorien von Problemen, die bei einem *objektiv offenen Zyklus* auftreten können. Diese Probleme entsprechen den vier Komponenten eines Zyklus:

1. Das Problem kann in einer *inadäquaten vorgängigen empirischen Struktur* bestehen. Vielleicht müssen die empirischen Phänomene, die den Ausgangs-

punkt der Modellierung bilden, erst noch genauer untersucht werden oder es müssen erst weitere Daten erhoben werden. Vielleicht ist sogar eine völlig andere Konzeptualisierung des empirischen Phänomens notwendig.

2. Das Problem kann auch in dem *Immersionsschritt* bestehen oder in der mathematischen Theorie, die wir anwenden wollen. Der mathematische Rahmen hat vielleicht nicht die nötigen Ausdrucksmittel für unser Problem, ist selbst noch zu wenig verstanden, weist interne Schwierigkeiten auf oder enthält Inkonsistenzen. In diesem Fall kann das Problem vielleicht gelöst werden, indem der mathematische Rahmen selbst revidiert, weiter untersucht oder auch ganz aufgegeben wird.

3. Es kann auch einen Fehler im *Deduktionsschritt* geben. Bestimmte Ableitungen können nur schwer oder gar nicht zu vollziehen sein, so dass es schwer wird, Ergebnisse zu erhalten, die wieder mit der Welt in Verbindung zu bringen sind. In diesem Fall kann der Forscher zusätzliche Annahmen machen, nach einer anderen Theorie suchen oder alternative Deduktionswege explorieren.

4. Es kann schließlich auch eine Schwierigkeit beim *Interpretationsschritt* auftauchen. Es kann z.B. unklar sein, ob die Lösung eines Gleichungssystems realistisch interpretiert werden muss oder ob sie nur ein mathematisches Artefakt darstellt.

Ein Zyklus kann aber auch *subjektiv offen* sein, wenn der Forscher entlang der Schritte des Zyklus einen Fehler begangen hat. Ein Beispiel hierfür bietet Einsteins Suche nach einem Differentialoperator für die Gravitationsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Auch in diesem Fall bietet die dynamische inferentielle Konzeption einen Rahmen, um solche Anwendungsfehler systematisch kategorisieren zu können:

1. Der Fehler kann in falschen Auffassungen über den Ausgangspunkt des Anwendungszyklus liegen oder darin, dass falsche Erwartungen an die empirische Zielstruktur gestellt werden, die man nach Vollendung des Zyklus einzuholen hofft.

2. Der Fehler kann darin liegen, dass ein empirisches Phänomen mit einer unangemessenen mathematischen Repräsentation verknüpft wurde. Es kann sein, dass es ein klar bestimmtes mathematisches Gegenstück für ein bestimmtes empirisches Objekt gibt, aber dass es unklar ist, wie die anderen Realitätsaspekte adäquat zu repräsentieren sind. Zum Beispiel sagt uns die Interpretation des Linienelements als Ausdruck für Distanzen zwischen Raumzeiter-

eignissen noch nichts darüber aus, wie die raumzeitlichen Ereignisse selbst zu repräsentieren sind.

3. Es kann auch Fehler im Deduktionsschritt geben. Hierzu gehören Rechenfehler oder auch das Versäumnis, alle deduktiven Möglichkeiten einer mathematischen Theorie zu realisieren.

4. Es kann schließlich der mathematische Rahmen falsch interpretiert werden, indem man etwa gewisse Charakteristika als physikalische Eigenschaften ansieht, die nur mathematische Artefakte sind, oder umgekehrt sie nur als Artefakte ansieht, obwohl sie physikalische Bedeutung haben. Ein wichtiges Beispiel liefert unsere Fallstudie mit dem Problem der Interpretation von Koordinatensystemen. Einstein schrieb den Koordinaten lange Zeit unmittelbare Realität zu, bevor er realisierte, dass sie in Wahrheit nur Mittel der Repräsentation darstellen.

Auch wenn ein Anwendungszyklus geschlossen ist, ist der Prozess der Anwendung damit noch nicht beendet. Auch in diesem Fall wird eine neue Dynamik in Gang gesetzt. Gewöhnlich bedeutet ein geschlossener Zyklus, dass der Forscher erfolgreich Konsequenzen mathematisch abgeleitet hat, denen eine empirische Bedeutung zugeschrieben werden konnte. Das Ziel wird nun aber darin bestehen, diesen geschlossenen Zyklus weiter zu konsolidieren und auszubauen. Verbesserungen sind wieder in allen Komponenten möglich: die revidierte oder bestärkte empirische Struktur kann erneut einem zweiten Anwendungszyklus unterworfen werden oder der Bereich der erfassten Phänomene kann erweitert werden, um zu prüfen, ob sich der Zyklus immer noch schließen läßt; es können weitere Deduktionen und Interpretationen ausgearbeitet werden; die Gültigkeit der Deduktionen kann auf neue Art überprüft werden; oder die Interpretation kann weitere empirische Untersuchungen suggerieren, indem etwa empirische Vorhersagen aus ihr ableitbar sind.

Die innere Struktur und Dynamik der beiden Domänen

Bislang haben wir die Abbildungen zwischen der empirischen und der mathematischen Domäne diskutiert, die Ableitungen innerhalb der mathematischen Theorie und die Kombination dieser Schritte in einem Anwendungszyklus. Diese Betonung sollte uns aber nicht dazu verleiten, die beiden Bereiche als passive Entitäten aufzufassen, die sich ausschließlich durch ihre Wechselwirkung entwickeln.

Die Untersuchung historischer Beispiele zeigt, dass die beiden Bereiche sich nicht nur gegenseitig ausgleichen, sondern auch autonomen Entwicklungen unterworfen sind. Wir erweitern die inferentielle Auffassung daher auch durch eine dynamische Auffassung der empirischen und mathematischen Strukturen für sich.

Die Tatsache, dass die mathematische Domäne eine eigene, autonome Dynamik haben kann, lenkt die Aufmerksamkeit auf ihre interne Struktur. Mathematik ist selbst in verschiedene Ebenen differenziert, in denen eine mathematische Theorie abstrakter sein kann als eine andere und in denen eine Theorie auf eine andere anwendbar ist. Wir können daher auch Anwendungszyklen haben, die sich vollständig innerhalb der Mathematik abspielen. Diese innermathematischen Anwendungsprozesse weisen viele Ähnlichkeiten mit den Anwendungen in den empirischen Wissenschaften auf. Es gibt aber auch wichtige systematische Gründe, sie von den empirischen Anwendungen zu unterscheiden. Beispielsweise gibt es in den innermathematischen Anwendungen kein Problem der vorgängigen Struktur, da wir es hier von vornherein nur mit Morphismen zwischen mathematischen Strukturen zu tun haben.

Das Beispiel der Allgemeinen Relativitätstheorie

Wir erproben im Folgenden die dynamische inferentielle Auffassung und unser Zyklenmodell anhand einer Fallstudie, der Zusammenarbeit Albert Einsteins mit seinem Studienfreund, dem Mathematiker Marcel Grossmann. Dies ist eine der interessantesten Episoden aus der Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie.[4] Diese Zusammenarbeit führte im Sommer 1913 zu einem “Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation” (Einstein und Grossmann 1913), in dem die beiden Freunde die unmittelbare Vorläufertheorie der endgültigen, allgemeinen Relativitätstheorie vorlegten. Diese sogenannte “Entwurf”-theorie entstand somit als Ergebnis der engen Zusammenarbeit eines Physikers mit einem Mathematiker und als Ergebnis der Anwendung eines mathematischen Kalküls, des sogenannten “absoluten Differentialkalküls” auf ein Problem physikalischer Theoriebildung. Die “Entwurf”-theorie enthält alle Elemente der endgültigen allgemeinen Relativitätstheorie bis auf die korrekten, allgemein kovarianten Feldgleichungen.

Man kann, John Stachel (2007) folgend, die Geschichte der allgemeinen Relativitätstheorie als Drama in drei Akten beschreiben. Im ersten Akt formuliert Einstein

4. Es gibt eine umfangreiche wissenschaftshistorische Literatur, die sich mit der Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie befasst und auf die wir uns in unserer Fallstudie beziehen, siehe vor allem (Renn 2007). Für eine ausführliche Darstellung unserer Fallstudie siehe (Räz 2013, Part II), für eine ausführliche Diskussion der Beiträge Grossmanns zur Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie, siehe (Sauer 2014).

(1907) die Äquivalenzhypothese. Dies ist die Annahme, dass man die physikalischen Vorgänge in einem Bezugssystem ohne Gravitationsfeld, welches sich in gradlinig gleichförmiger Beschleunigung relativ zu einem Inertialsystem befindet, nicht von denen in einem Bezugssystem unterscheiden kann, welches unbeschleunigt ist und in welchem ein statisches, homogenes Gravitationsfeld herrscht. Diese Äquivalenzannahme lieferte Einstein ein heuristisches Mittel, das ihm erlaubte, Eigenschaften von Gravitationsfeldern zu untersuchen, indem er Koordinatentransformationen auf Inertialsysteme anwandte.

Im zweiten Akt des Dramas erkannte Einstein, dass der Begriff der Metrik die Grundlage einer adäquaten mathematischen Repräsentation einer relativistischen Theorie der Gravitation liefert. Eine Metrik ist ein symmetrisches Tensorfeld zweiten Ranges, welches sowohl die metrischen Eigenschaften der Raumzeit ausdrückt als auch das Gravitationspotential darstellt. Um diese Funktion zu erfüllen, muss die Metrik nicht-euklidisch sein. Die prominente Rolle der Metrik in einer relativistischen Theorie der Gravitation warf dann die Frage auf, wie diese ihrerseits durch relativistische Feldgleichungen bestimmt wird.

Das ist der Ausgangspunkt für den dritten Akt. Glücklicherweise können wir für die Rekonstruktion des dritten Aktes auf ein wichtiges historisches Dokument zurückgreifen, das sogenannte Zürcher Notizbuch Einsteins, das der Gegenstand intensiver wissenschaftshistorischer Forschung wurde, siehe (Renn 2007). Das Zürcher Notizbuch dokumentiert auch die Zusammenarbeit Einsteins mit Grossmann und die Überlegungen, welche in die Formulierung der "Entwurf"-theorie mündeten. Nach der Publikation des "Entwurfs" hielt Einstein noch eine Weile an deren nicht allgemein kovarianten und falschen Feldgleichungen fest, bevor ihm im Herbst 1915 in einem dramatischen Wettlauf mit dem berühmten Mathematiker David Hilbert der Durchbruch zur allgemeinen Kovarianz gelang (Sauer 1999).

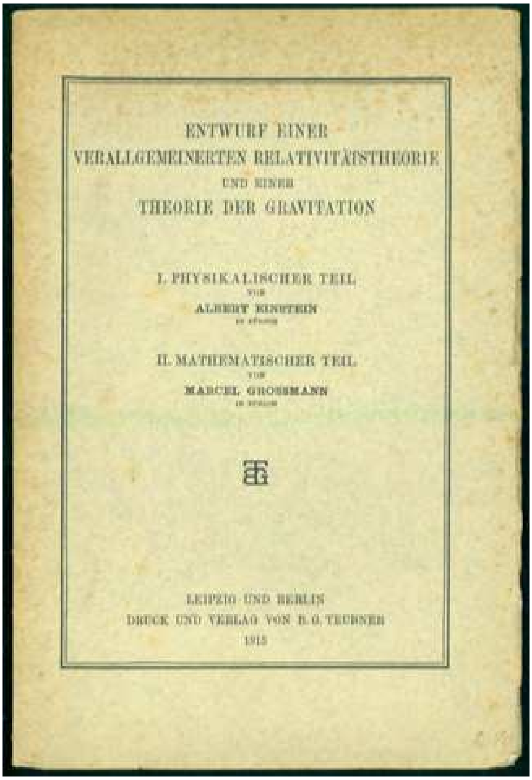
Die Zusammenarbeit Einsteins mit seinem Freund Grossmann ist aus mehreren Gründen ein besonders interessanter Fall der Anwendung von Mathematik. Erstens wurde die Mathematik des "Entwurfs", der "absolute Differentialkalkül", unabhängig vom physikalischen Problem der Gravitation entwickelt. Es ist deshalb ein Paradebeispiel für Wigners These von der unerklärlichen Effektivität der Mathematik, siehe etwa (Steiner 1998). Zweitens ist in diesem historischen Stadium die Arbeitsteilung zwischen Mathematik und Physik auf mehreren Ebenen offensichtlich. Die Protagonisten der Episode, Einstein und Grossmann, hatten beide klar abgegrenzte Kompetenzen und Aufgaben. Einstein initiierte die Zusammenarbeit und brachte die physikalische Fragestellung und das physikalische Fachverständnis in die Zusammenarbeit ein. Grossmann hatte bessere Kenntnisse der mathematischen Literatur. Seine Aufgabe bestand darin, eine Theorie zu finden oder zu entwickeln, die ein mehr oder weniger wohlformuliertes mathematisches Problem löst. Diese Arbeitsteilung zeigt sich auch in der gemeinsamen Publikation: Der "Entwurf" besteht aus zwei Teilen. Einstein zeichnete verantwortlich für den ersten, "physikalischen Teil", während Grossmann als Autor des zweiten, "mathematischen Teils" auf dem Titelblatt erscheint, siehe Abb. (3). Die Episode ist drittens deshalb interessant, weil es Einstein und Grossmann trotz anfänglicher Erfolge nicht gelang, die Anwendung des "absoluten Differentialkalküls" zu ihrer Zufriedenheit auszuführen. Im Hauptergebnis blieb die Anwendung des Tensorkalküls ein offener Zyklus. Die Charakterisierung der Theorie als "Entwurf" erwies sich auch im Nachhinein als gerechtfertigt, da sich die Feldgleichungen des "Entwurfs" und damit auch dessen eingeschränkte Kovarianz später als falsch herausstellten.

Die angenommene Struktur

Der Ausgangspunkt des Zyklus in der "Entwurf"-episode ist die vorgängige Struktur, also die zur Mathematisierung herangezogene Struktur des empirischen Bereichs. Seit dem Beginn des Dramas der Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie im Jahre 1907 hatte sich die vorgängige Struktur bereits substantiell gewandelt. Einsteins Ziel zu Beginn des dritten Aktes bestand darin, eine relativistische Feldgleichung der Gravitation zu finden, d.h. eine Gleichung des Schemas

$$OP(POT) = SOURCE. \tag{1}$$

Diese Gleichung drückt ein Schema einer solchen Feldgleichung aus, einen "frame" (Renn und Sauer 2007, p. 127), der in Abhängigkeit vom Kontext auf verschiedene Weise instantiiert werden kann. Seine Konkretisierungen sind Differentialgleichungen, welche ein Potential (POT) aus einer Verteilung von Quellen (SOURCE) bestimmen, in dem ein Differentialoperator (OP) zwischen ihnen die Beziehung einer Differentialgleichung herstellt. Zum Beginn der Suche nach der allgemeinen Relativitätstheorie war der "frame" durch die gravitative Poissongleichung instantiiert, an ihrem Ende war er in die Einsteingleichungen transformiert worden. Im Jahr 1912 waren zwei Komponenten des "frame" bereits verallgemeinert. Als Instantiierung der Quelle SOURCE fungierte der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$, und das Potential POT war instantiiert durch die Metrik $g_{\mu\nu}$. Die verbleibende Aufgabe bestand nun darin, geeignete Kandidaten für den Differentialoperator OP zu finden und auf ihre Eignung hin zu prüfen.


ENTWURF EINER
VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE
UND EINER
THEORIE DER GRAVITATION

I. PHYSIKALISCHER TEIL
VON
ALBERT EINSTEIN

II. MATHEMATISCHER TEIL
VON
MARCEL GROSSMANN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Abbildung 3: Titelblatt des "Entwurfs einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation" (1913). Die Arbeit besteht aus einem physikalischen Teil von Albert Einstein und einem mathematischen Teil von Marcel Grossmann.

Die Einbettung

Die Immersionsabbildung verknüpft die vorgängige Struktur mit der mathematischen Domäne. In unserem Fall hängt die Einbettung an einer Reinterpretation des Linienelements. Der Ausdruck

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2}$$

wo $g_{\mu\nu}$ den metrischen Tensor bezeichnet, hatte sich in der physikalischen Domäne als Ergebnis vorheriger Anwendungszyklen herausgebildet. Indem dieser Ausdruck nun in die mathematische Domäne abgebildet wurde, wurde er seiner physikalischen Konnotationen entledigt und als symbolischer Ausdruck eines differentiellen Linienelement reinterpretiert. Dieser Perspektivwechsel stellte eine Verbindung zur mathematischen Theorie der Differentialinvarianten her. Das *Ziel* der Einbettung bestand darin, Differentialoperatoren zu finden, die in eine Differentialgleichung eingehen können. Das mathematische Objekt, das zusammen mit der Einbettung des Linienelements ebenfalls in die mathematische Domäne abgebildet werden muss und dort eine Heuristik erzeugt, war der Laplaceoperator. Die Hauptaufgabe bestand nun also darin, Differentialoperatoren zu finden, die auf die $g_{\mu\nu}$ angewendet werden können und bestimmten Anforderungen genügen. Die Heuristik, durch die physikalische Fragestellung motiviert, erfordert also die Suche nach einer mathematischen Theorie, welche Kovarianten von homogenen quadratischen Differentialformen bereitstellt.

Einsteins Formulierung der Aufgabe im "Entwurf" macht deutlich, dass die Anforderungen an einen geeigneten Differentialoperator vorläufig sind und gegebenenfalls auch revidiert werden müssen:

> Dem Newton-Poissonschen Gesetz entsprechend wird man geneigt sein zu fordern, dass [die neuen Gravitationsgleichungen] zweiter Ordnung sein sollen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß es sich als unmöglich erweist, unter dieser Voraussetzung einen Differentialausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ zu finden, der eine Verallgemeinerung von $\Delta\varphi$ ist, und sich beliebigen Transformationen gegenüber als Tensor erweist. Apriori kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, daß die endgültigen genauen Gleichungen von höherer als zweiter Ordnung sein könnten. [...] Der Versuch einer Diskussion derartiger Möglichkeiten wäre aber bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis der physikalischen Eigenschaften des Gravitationsfeldes verfrüht. (Einstein und Grossmann 1913, p. 11)

Wir entnehmen diesem Zitat eine Liste von Anforderungen, Einsteins Prüfliste für geeignete Differentialoperatoren:

- Der Operator sollte zweiter Ordnung sein.
- Er sollte unter einer Transformationsgruppe invariant sein, die größer ist als die Lorentzgruppe.
- Er sollte eine Verallgemeinerung des Laplaceoperators darstellen.

Die erste heuristische Anforderung kann man von der Poissongleichung ablesen. Sie hatte keine zwingende Begründung, sondern basierte auf einer Analogie mit dem klassischen Fall. Die zweite Anforderung basiert auf dem "Prinzip der verallgemeinerten Relativität". Die dritte Forderung verkörpert das Korrespondenzprinzip.

Die mathematische Domäne

Die mathematische Theorie, der Zielbereich des Immersionsschritts, stellt eine oder mehrere mathematische Strukturen mit Schlussregeln bereit, welche die Form von Regeln für die Manipulation von Symbolsystemen annehmen. Die mathematische Theorie kann die auf sie abgebildete empirische Struktur repräsentieren, sie bietet aber im Allgemeinen mehr Möglichkeiten. Die mathematische Theorie stellt nicht nur die Mittel für den Deduktionsschritt bereit, sondern umfasst einen allgemeinen Begriffsrahmen, der einen Raum möglicher Strukturen und Ableitungen aufspannt, während der Deduktionsschritt auf ein jeweils spezifisches Anwendungsziel ausgerichtet ist.

Bei der Anwendung der dynamischen inferentiellen Auffassung auf die "Entwurf"-episode zeigt sich, dass die mathematische Domäne einer sehr genauen Charakterisierung bedarf. Im Fall der Anwendung des absoluten Differentialkalküls haben wir es zwar mit einem fertig ausgearbeiteten Kalkül zu tun, der von Einstein und Grossmann erstmals in einem neuen physikalischen Kontext angewandt wurde. Aber Grossmanns Rolle beschränkte sich nicht darauf, Einstein auf diesen Kalkül hinzuweisen, sondern er modifizierte den Formalismus mit Blick auf das vorliegende empirische Problem.

Bei genauerem Hinsehen stellt sich heraus, dass der absolute Differentialkalkül selbst das Ergebnis einer innermathematischen Dynamik darstellt. Diese zielt darauf ab, isolierte und abstrakte Ergebnisse—in diesem Fall Ergebnisse aus der Theorie der Differentialinvarianten—in eine zugängliche und für Anwendungen nützliche Form zu bringen. Wir nennen diese innermathematischen Entwicklungen die "apriorischen" Beiträge der Mathematik zu ihrer eigenen Anwendung. Daneben gibt es aber auch Adaptionen der mathematischen Theorien, die speziell auf die gewünschte Anwendung hin erfolgen, und zwar *bevor* die eigentlichen Deduktionen vorgenommen werden. In unserem Fall stellen wir fest, dass Grossmann selbst Modifikationen des absoluten Differentialkalküls vornahm, die ihm notwendig erschienen, damit der Kalkül seine deduktiven Möglichkeiten für die Ausarbeitung einer relativistischen Gravitationstheorie entfalten kann.

Auf welche mathematischen Theorien griff Grossmann im mathematischen Teil des "Entwurfs" zurück? Zitiert werden die folgenden Autoren: Christoffel (1869), Bianchi und Lukat (1899), Riemann (1876), Ricci und Levi-Civita (1901), Kottler (1912). Außerdem gibt es Verweise auf Minkowski (1908), Sommerfeld (1910a, 1910b), und Laue (1913). Wir werden uns auf die zuerst genannten, eigentlich mathematischen Arbeiten beschränken.

Nicht alle mathematischen Quellen sind gleich wichtig. Eine genauere Analyse der Zitate sowie der von Grossmann verwendeten Notation zeigt, dass vor allem die Arbeiten von Christoffel und Bianchi sowie die von Ricci-Curbastro und Levi-Civita wichtig waren. Dagegen war der Einfluss Riemanns geringer als die Bedeutung der Riemannschen Geometrie in der späteren allgemeinen Relativitätstheorie vermuten lässt, vgl. Abb. 4.

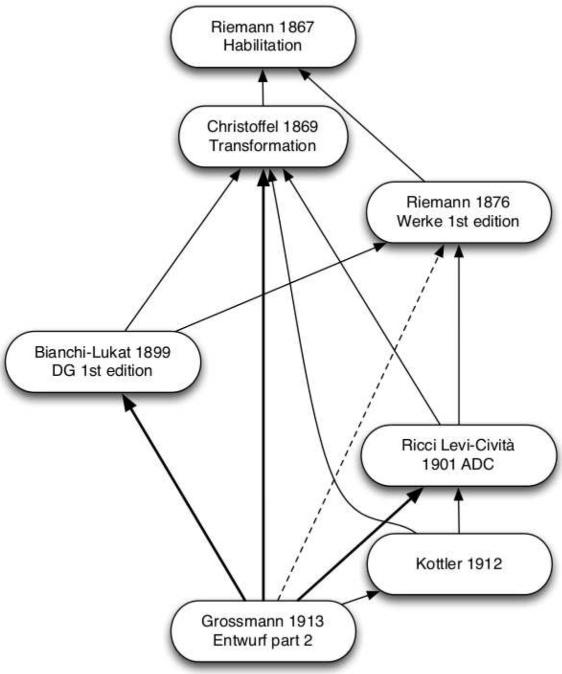


Abbildung 4: Die relative mathematische Bedeutung der mathematischen Quellen, die in Grossmanns Teil des Entwurf *zitiert werden. Die Quellen erscheinen vertikal in zeitlicher Ordnung. Grossmanns wichtigste Quellen werden durch fette Pfeile angedeutet. Die gestrichelte Linie zu Riemann (1876) deutet an, dass diese Quelle möglicherweise keine direkte Rolle gespielt hat.*

Wir können in Grossmanns Teil des "Entwurfs" zwei Teile mit verschiedenen Rollen unterscheiden. Die ersten drei Abschnitte liefern eine allgemeine Darstellung dessen, was wir heute Tensorkalkül nennen. Hier wird eine mathematische Theorie entfaltet, ohne dass bereits ein spezieller Deduktionsschritt in den Blick genommen wird. Erst im vierten Abschnitt finden sich Deduktionen, bei denen von den Mitteln des Tensorkalküls Gebrauch gemacht wird. Diese beiden Teile spiegeln daher unsere Unterscheidung zwischen Grossmanns Beiträgen zur Entwicklung der Mathematik und seinen eigentlichen Deduktionsschritten im speziellen Anwendungszyklus wider.

Oberflächlich betrachtet breitet Grossmann im ersten Teil nur die nötigen Konzepte des bereits vorhandenen absoluten Differentialkalküls aus. Bei genauerem Hinsehen zeigen sich jedoch Unterschiede zum absoluten Differentialkalkül. So ändert Grossmann beispielsweise die Notation, und zwar in einer Weise, die aus moderner Sicht als Rückschritt erscheinen muß. Während Ricci und Levi-Civita ko- und kontravariante Tensoren ("Systeme") mit unten und oben angebrachten Indizes unterscheiden, schreibt Grossmann alle Indizes unten und unterscheidet Ko- und Kontravarianz durch lateinische und griechische Buchstaben für die Tensorgröße selbst. Dieser Notationswechsel hängt damit zusammen, dass Grossmann Tensoren gemischten Charakters einführt, welche bei Ricci und Levi-Civita nirgends auftauchen. Gemischte Tensoren werden durch Frakturgrössen bezeichnet, wobei die ko- und kontravarianten Indizes durch eine Querstrich voneinander getrennt werden. Zweitens führt Grossmann für die "Systeme" von Ricci und Levi-Civita neu die Bezeichnung "Tensoren" ein. Mit dieser Benennung wird gleichzeitig ein rein mathematisches Objekt mit einem anderen mathematischen Objekt identifiziert, dass in einem anderen Kontext, der Kristallphysik, bereits eine andere physikalische Interpretation erhalten hat. Drittens trägt Grossmann auch genuin neue Ergebnisse zur Theorie bei, vor allem seinen Beweis, dass Beltramiparametern (bestimmten Differentialoperatoren) und ihren Verallgemeinerungen eine bestimmte Form gegeben werden kann, die sich bei der Darstellung der Energie-Impuls-Erhaltung als nützlich erweisen.

Die Anwendung des absoluten Differentialkalküls auf eine relativistische Gravitationstheorie hinterließ also in der mathematischen Domäne selbst ihre Spuren: die Reinterpretation von Riccis und Levi-Civitas "Systemen" als Tensoren; die Einführung gemischter Tensoren und die damit einhergehende neue Notation des Kovarianzcharakters sowie die Bildung des Riccitensor aus dem Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor. Viele, wenngleich nicht alle dieser Innovationen gehören heute zur Standarddarstellung des Tensorkalküls.

Drei Anwendungszyklen

Der vierte Abschnitt in Grossmanns Teil des "Entwurfs" ist seinerseits in drei Paragraphen unterteilt, von denen jeder die Details eines mathematischen Arguments darstellt. Im Rahmen der dynamischen inferentiellen Auffassung interpretieren wir diese drei Argumente als drei verschiedene Zyklen, wobei der erste und dritte Zyklus geschlossen sind, der zweite aber offen bleibt.

Der erste Zyklus: Energie-Impuls-Erhaltung

Im ersten der drei Argumente zeigt Grossmann, dass die Energieerhaltungsgleichung

$$\sum_{\nu n} \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sqrt{-g}\, g_{m\nu}\Theta_{\nu n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_m}\Theta_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

allgemein kovariant ist. Hier bezeichnet $\Theta_{\mu\nu}$ den kontravarianten Energieimpulstensor und g die Determinante des metrischen Tensors. Das Ergebnis ist insofern bedeutsam, als es zeigt, dass sich das Energieerhaltungsprinzip in allgemein kovarianter Form repräsentieren lässt. Das Ziel des Zyklus bestand in der Verallgemeinerung eines bekannten Sachverhalts.

Die Interpretation bestand darin, dass Einstein Gleichung (3) als Kontinuitätsgleichung für die Energie ($m = 4$) und die Impulsdichte ($m = 1, 2, 3$) auffasste, indem er den ersten Term als Divergenz ansah und den zweiten Term als Ausdruck für die Wirkung der Gravitationskraft, repräsentiert durch Ableitungen der Metrik, auf den materiellen Energie-Impuls-Gehalt. Während der Energieimpulstensor sich bereits im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie herausgebildet hatte, konnte die allgemeine Kovarianz seiner Divergenz als Ausdruck der Energieerhaltung nur mit Mitteln des absoluten Differentialkalküls abgeleitet werden.

Wir haben es hier mit einem geschlossenen Zyklus zu tun, weil das Ergebnis, die allgemeine Kovarianz der verallgemeinerten Energieimpulserhaltung, den Erwartungen an eine relativistische Gravitationstheorie entsprach. Das Ergebnis stärkte damit auch das Vertrauen Einsteins und Grossmanns in ihr Programm der Anwendung der neuen mathematischen Methoden für ihr physikalisches Problem.

Der zweite Zyklus: Betrachtung und Verwerfung des Riccitensors

Von der Warte der dynamischen inferentiellen Auffassung aus gesehen ist Einsteins und Grossmanns Suche nach einem geeigneten Differentialoperator für die Feldgleichung ein instruktives und wichtiges Beispiel für einen offenen Anwendungszyklus, weil ihr ursprüngliches Ziel darin bestand, eine *allgemein* kovariante Theorie zu formulieren, sie aber dieses Ziel im "Entwurf" nicht erreichten.

Der Deduktionsschritt hat hier zwei Teile. Zuerst bemerkte Grossmann, dass unter den heuristischen Anforderungen der Immersion in die Theorie der Differentialinvarianten der Riemann-Christoffeltensor derjenige Differentialoperator ist, aus dem sich alle anderen möglichen Operatoren, die zur Konstruktion einer Feldgleichung in Frage kamen, durch algebraische Operationen erzeugen ließen. Aus historischer Perspektive ist diese Einsicht der bedeutendste Beitrag Grossmanns zur Geschichte der allgemeinen Relativitätstheorie. Die Bedeutung dieses Schritts kann nicht genug betont werden. Die Reinterpretation des raumzeitlichen Abstandquadrats ds^2 zwischen benachbarten Ereignissen als differentielles Linienelement ermöglicht die Verwendung der deduktiven Resourcen einer ausgearbeiteten mathematischen Theorie von Differentialinvarianten. Allerdings wurden diese Möglichkeiten im "Entwurf" noch nicht erfolgreich ausgenutzt.

Zweitens benutzte Grossmann Inferenzregeln des modifizierten absoluten Differentialkalküls, um auf der Ebene der symbolischen Repräsentation formale Operationen auszuführen. Das Ziel dieser Rechnungen bestand darin, ein Objekt zu generieren, welches den Anforderungen an eine geeignete Instantiierung des Feldgleichungsssschemas genügte. Konkret ging es darum, einen Tensor zweiten Ranges zu finden, da die Instantiierung der SOURCE Komponente des Schemas mit dem Energieimpulstensor, ebenfalls einem Tensor zweiten Ranges, eine solche Bedingung erzwang. Grossmann wandte deshalb die kovarianzerhaltende Operation der Kontraktion auf den Riemann-Christoffelschen Tensor an und erzeugte so aus einem Tensor vierten Ranges einen allgemein kovarianten Tensor zweiten Ranges. Mit diesem Deduktionsschritt erzeugte Grossmann gleichzeitig ein neues mathematisches Objekt, das sich in der Exposition des absoluten Differentialkalküls bei Ricci und Levi-Civita (1901) noch nicht fand. Zwar hatte Ricci-Curbastro (1904) bereits das Objekt untersucht, das wir heute als Riccitensor bezeichnen, aber wir haben keinerlei Hinweis darauf, dass Grossmann diese Arbeit kannte. Aus der Analyse des Zürcher Notizbuchs wissen wir außerdem, dass Grossmann und Einstein weitere Deduktionswege erkundeten, um weitere Tensoren zweiten Ranges zu erzeugen, die sich als Kandidaten für Feldgleichungen interpretieren ließen. Alle diese Methoden schränkten allerdings das Ziel der *allgemeinen* Kovarianz bereits ein.

Die meisten Kommentatoren dieser Episode haben ihr Hauptaugenmerk auf den Interpretationsschritt gelegt, um den Misserfolg dieses Anwendungszyklus zu erklären. Die dynamische inferentielle Auffassung legt nahe, auch den Deduktionsschritt genau zu betrachten. Aus heutiger Warte müssen wir festgestellen, dass Grossmann nicht alle Deduktionsmöglichkeiten ausgenutzt hat, die der absolute Differentialkalkül zur Verfügung stellt. Es gibt nämlich noch weitere Tensoren zweiten Ranges, die aus dem Riemann-Christoffeltensor erzeugt werden können, und zwar ohne dass die allgemeine Kovarianz eingeschränkt werden müsste. Nichts in der Theorie der Differentialinvarianten oder des absoluten Differentialkalküls spricht dagegen, einen Spurterm zum Riccitensor hinzuzufügen, wie beim späteren Einsteintensor, oder einen zusätzlichen skalaren Term zu betrachten, wie bei der kosmologischen Erweiterung von 1917. Auch nicht-lineare Kontraktionen von Produkten des Riemann-Christoffeltensors wären möglich gewesen.

Das eigentliche Problem dieses Anwendungszyklus bestand aber im Interpretationsschritt. Das Zürcher Notizbuch (S. 14L) liefert uns dokumentarische Evidenz dafür, warum Einstein und Grossmann den Riccitensor als Kandiaten für die OP-Komponente des Feldgleichungsschemas verworfen haben, siehe (Janssen u. a. 2007, S. 610ff). Die Kontraktion des Riemann-Christoffeltensors lieferte vier Terme mit zweiten Ableitungen der Metrik, von denen sich aber nur einer im Grenzfall schwacher, statischer Felder auf den Laplaceoperator reduzierte. Die anderen drei Terme konnten nicht so interpretiert werden, wie es die ursprünglich angenommene Struktur des Gravitationsproblems nahegelegt hat. Daher konnte dieser Anwendungszyklus aus Einsteins und Grossmanns Perspektive nicht erfolgreich geschlossen werden.

Das Misslingen dieses Anwendungszyklus, d.h. das Verwerfen des Riccitensors bei Einsteins und Grossmanns Suche nach einer verallgemeinerten Relativitätstheorie, ist eine berühmte Episode der Wissenschaftsgeschichte. Die Tatsache, dass Einstein und Grossmann den Riccitensor als Kandidaten für eine Feldgleichung explizit in Erwägung zogen, diesen Weg aber dann wieder verwarfen, hat die Historiker seit langem vor Rätsel gestellt, siehe z.B. Pais (1982, sec. 12d). Das Rätsel wurde noch verschärft, als John Norton (1984) zeigte, dass Einstein und Grossmann im Zürcher Notizbuch auch einen weiteren Kandidaten für eine Feldgleichung betrachteten und verwarfen, der ebenfalls im Herbst 1915 erneut in Erwägung gezogen wurde, siehe (Renn und Sauer 1999). Die detaillierte Rekonstruktion von Janssen u. a. (2007), die das Zürcher Notizbuch Zeile für Zeile untersuchte, zeigte schließlich die ganze verwickelte Dynamik der Anwendung des Tensorkalküls in der Suche nach relativistischen Gravitationsgleichungen.

Wir wissen aus dieser Analyse, wie Einstein und Grossmann auf das Fehlschlagen dieses Anwendungszyklus reagiert haben. Sie reflektierten die einzelnen Schritte des Zyklus und zogen daraus den Schluß, dass der Deduktionsschritt, der aus dem Riemann-Christoffeltensor einen Differentialoperator als Kandidaten für eine Feldgleichung erzeugte, modifiziert werden musste. So führten sie weitere Bedingungen ein, um einen Tensor mit eingeschränkter Kovarianzgruppe zu bestimmen, der sich dann aber im Sinne des Korrespondenzprinzips im Newtonschen Grenzfall interpretieren ließ. Aber alle diese Versuche schlugen letzlich fehl.[5] Schließlich gaben Einstein und Grossmann diesen Versuch der Anwendung neuer mathematischer Methoden ganz auf und verwarfen die Theorie der Differentialinvarianten als Rahmen für dieses physikalische Problem.

Der dritte Zyklus: Ableitung der "Entwurf"-gleichungen

Im dritten seiner mathematischen Argumente gibt Grossmann die expliziten Rechenschritte für die Ableitung der nicht allgemein kovarianten Feldgleichungen an, die dann im "Entwurf" publiziert wurden. Dieser Deduktionsschritt verwendet nicht die vom absoluten Differentialkalküls bereitgestellten Einsichten. Stattdessen verwendet die Ableitung nur noch gewöhnliche algebraische Operationen und Mittel des gewöhnlichen Differentialkalküls.

Die Strategie bestand nun darin, zu dem Ergebnis des ersten erfolgreichen Anwendungszyklus, nämlich der Energieerhaltungsgleichung (3) zurückzukehren. Aber anstatt weiter Gebrauch von den Resourcen des absoluten Differentialkalküls zu machen, nahmen Einstein und Grossmann jetzt weitere Eigenschaften der vorgängigen Struktur als heuristische Wegweiser. Sie nahmen einen hypothetischen Differentialoperator $\Gamma_{\mu\nu}$ an, von dem sie voraussetzten, dass er die gewünschte Form im Newtonschen Grenzwert hat, setzten diesen für $\Theta_{\mu\nu}$ in (3) ein und bestimmten die Terme zweiter Ableitung aus formalen Manipulationen, die nur die Gültigkeit der Gleichung (3) bewahrten.

Die Ableitung der "Entwurf"-gleichungen mit dieser Strategie führte zu einem *subjektiv geschlossenen* Zyklus, obwohl die "Entwurf"-theorie sich letztlich als unhaltbar erwies. Denn die formalen algebraischen Manipulationen erwiesen den Differentialoperator der "Entwurf"-gleichungen als eindeutig bestimmtes Objekt, das fast alle heuristischen Erwartungen—insbesondere den Newtonschen Grenzfall und die Energieimpulserhaltung—an die neuen Gravitationsgleichungen erfüllte. Offen blieb nur die Frage, welche Kovarianzgruppe die Gleichungen tatsächlich erfüllten. Erst zwei Jahre später entdeckte Einstein, dass die vermeintliche Eindeutigkeit der "Entwurf"-gleichungen auf einem Irrtum beruhte.

5. Wir folgen hier dem Mehrheitsvotum von Janssen u. a. (2007), in welchem die Unterscheidung zwischen Koordinatenbedingungen und Koordinateneinschränkungen zentral ist. Für das Minderheitsvotum, siehe Norton (2007).

Schlussbemerkungen

Nachdem Einstein und Grossmann ihren “Entwurf” publiziert hatten, hielt Einstein für weitere zweieinhalb Jahre an dieser Theorie fest, bevor er in einer dramatischen Wendung im Herbst 1915 zur allgemeinen Kovarianz zurückkehrte. Auf diesen Teil der Geschichte der allgemeinen Relativitätstheorie kann hier nicht weiter eingegangen werden. Gemäß der hier skizzierten Interpretation hatten die Ergebnisse der Anwendungszyklen, die zur “Entwurf”-theorie führten, die angenommene Struktur zwischenzeitlich stabilisiert. Aber diese Stabilisierung geschah durch Einführung von Elementen in die mathematische Repräsentation, die sich als unvereinbar mit empirischen Phänomenen erwiesen, wie etwa die Anomalie der Periheldrehung des Merkur. Im Verlauf von zweieinhalb Jahren bereitete Einstein Änderungen der angenommenen Struktur vor; diese Bemühungen sowie die Einsicht in subjektive Deduktionsfehler führten im Herbst 1915 zu einem erneuten Versuch, den Tensorkalküls und die Theorie der Differentialinvarianten anzuwenden. Die Rückkehr zur allgemeinen Kovarianz führte schließlich zu einer Revision der Theorie, die eine volle, erfolgreiche Anwendung des Tensorkalküls in der Formulierung einer relativistischen Gravitationstheorie möglich machte.

Die begrifflichen Mittel der dynamischen inferentiellen Auffassung gestatten uns, den Prozess der Anwendung von Mathematik adäquat zu beschreiben und erlauben philosophische Einsichten. Die dynamische inferentielle Auffassung entstand aus der Anwendung der ursprünglichen inferentiellen Auffassung auf die Zusammenarbeit von Einstein und Grossmann an der “Entwurf”-theorie. Die Rekonstruktion der Episode in diesem Rahmen eröffnete eine neue Perspektive auf eine historische Fallstudie mit neuen Fragestellungen und neuen Einsichten. Wie wir gezeigt haben, erweist sich die dynamische inferentielle Auffassung als nützlich für die Analyse von historischen Episoden der Begriffsbildung in der Wissenschaftsgeschichte, die auf der Wechselwirkung von physikalischen und mathematischen Begriffen beruhen. Die funktionale Zerlegung des Anwendungsprozesses in die drei Schritte der Immersion, Deduktion und Interpretation zwingt uns, die Frage nach den jeweiligen Beiträgen der zwei Sphären und ihrer Wechselwirkung genau zu analysieren. Die Auffassung hebt die Bedeutung der mathematischen Domäne, ihre interne Dynamik und Differenzierungen auf dieselbe Höhe wie die korrespondierenden Aspekte in der empirischen Domäne.

Die Aufschlüsselung des Anwendungsprozesses in einzelne Teilschritte erleichtert die Analyse historischer Anwendungsprozesse durch begrifflich unterschiedene Stadien. Anwendungen von Mathematik sind strukturierte Prozesse. Die Auffassung erlaubt uns auch, die Schwierigkeiten und Fehler bei fehlgeschlagenen Anwendungsprozessen zu kategorisieren. Diese Schwierigkeiten können entweder subjektiver oder objektiver Natur sein, und sie können an jeder Stelle des Anwendungszyklus lokalisiert sein.

Es erscheint uns nützlich und notwendig, die hier skizzierte Auffassung auf weitere Episoden der Entstehung und Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie anzuwenden, besonders mit Blick auf ein besseres Verständnis der längerfristigen Dynamik von Zyklen. Aber auch die Interpretation anderer Fallstudien aus der Wissenschaftsgeschichte verspricht weitere Einsichten sowohl für das philosophische Problem der Anwendbarkeit der Mathematik als auch für das historische Verständnis tatsächlicher Anwendungen.

Literaturverzeichnis

Bianchi, Luigi, und Max Lukat. 1899. *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* 1st ed. Leipzig: Teubner.

Bueno, Otavio, und Mark Colyvan. 2011. An Inferential Conception of the Application of Mathematics. *Nous* 45 (2): 345–74.

Carey, Susan. 2009. *The Theory of Concepts.* Oxford: Oxford University Press.

Christoffel, E. B. 1869. Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 70 (1): 46–70.

Colyvan, Mark. 2009. Mathematics and the World. In *Handbook of the Philosophy of Science: Philosophy of Mathematics,* herausgegeben von Andrew D. Irvine, 651–702. North Holland: Elsevier.

Einstein, Albert. 1907. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. (Stachel 1989, Doc. 47), *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 4 (4): 411–462.

Einstein, Albert, und Marcel Grossmann. 1913. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. Klein, Kox, Renn und Schulmann 1995, Docs. 13, 26, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62 (3): 225–261.

French, Steven. 2000. The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics. *Synthese* 125:103–20.

Galison, Peter. 1997. *Image and Logic. A Material Culture of Microphysics.* Chicago: University of Chicago Press.

Grattan-Guinness, Ivor. 2008. Solving Wigner's Mystery: The Reasonable (Though Perhaps Limited) Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *The Mathematical Intelligencer* 30 (3): 7–17.

Hilbert, David. 1930. Naturerkennen und Logik. *Die Naturwissenschaften* 18 (47-49): 959–963.

Hughes, R. I. G. 1997. Models and Representation. *Philosophy of Science* 64:325–336.

Janssen, Michel, Jürgen Renn, Tilman Sauer, John D. Norton und John Stachel. 2007. A Commentary on the Notes on Gravity in the Zurich Notebook. In *The Genesis of General Relativity. Vol. 2. Einstein's Zurich Notebook. Commentary and Essays,* herausgegeben von Jürgen Renn, 489–714. Dordrecht: Springer.

Klein, Felix. 1921. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Erster Band.* Berlin: Springer.

———. 1927. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Vol. 2.* Berlin: Springer.

Kottler, Friedrich. 1912. Über die Raumzeitlinien der Minkowski'schen Welt. *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften (Wien). Mathematisch-physikalische Klasse. Sitzungsberichte* 121 (8-10): 1659–1759.

Ladyman, James, und Don Ross. 2007. *Every Thing Must Go.* Oxford, New York: Oxford University Press.

Laue, Max von. 1913. *Das Relativitätsprinzip.* Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

Minkowski, Hermann. 1908. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Nachrichten:*53–111.

Nersessian, Nancy. 2008. *Creating Scientific Concepts.* Cambridge, MA: MIT press.

Norton, John D. 1984. How Einstein Found His Field Equations, 1912-1915. Reprinted in *Einstein and the History of General Relativity*, eds. D. Howard, J. Stachel (Boston et al.: Birkhäuser, 1989), pages 101–159. *Historical Studies in the Physical Sciences* 14:253–316.

Norton, John D. 2007. What was Einstein's 'Fateful' Prejudice? In *The Genesis of General Relativity. Vol. 2,* herausgegeben von Jürgen Renn, 715–783. Dordrecht: Springer.

Pais, Abraham. 1982. *'Subtle is the Lord …' The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford: Oxford University Press.

Räz, Tim. 2013. On the Applicability of Mathematics—Philosophical and Historical Perspectives. Ph.D. thesis, Université de Lausanne.

Renn, Jürgen. 2006. *Auf den Schultern von Riesen und Zwergen. Albert Einsteins unvollendete Revolution.* Weinheim: Wiley-VCH.

———, Hrsg. 2007. *The Genesis of General Relativity (4 vols.)* Dordrecht: Springer.

Renn, Jürgen, und Tilman Sauer. 1999. Heuristics and Mathematical Representation in Einstein's Search for a Gravitational Field Equation. In *The expanding worlds of general relativity,* herausgegeben von Hubert Goenner, Jürgen Renn, Jim Ritter und Tilman Sauer, 87–125. Boston et al.: Birkhäuser.

———. 2007. Pathways out of Classical Physics. Einstein's Double Strategy in his Search for the Gravitational Field Equation. In *The Genesis of General Relativity. Vol. 1,* herausgegeben von Jürgen Renn, 113–312. Dordrecht: Springer.

Ricci, G., und T. Levi-Civita. 1901. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen* 54:125–201.

Ricci-Curbastro, Gregorio. 1904. Direzione e invarianti principali in una varietà qualunque. *Atti del Reale Istituto Veneto* 63 (2): 1233–39.

Riemann, Bernhard. 1876. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Illma Academia Parisieni propositae. In *Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass,* 370–383. Leipzig: Teubner.

Sauer, Tilman. 1999. The Relativity of Discovery: Hilbert's First Note on the Foundations of Physics. *Archive for History of Exact Sciences* 53:529–575.

———. 2014. Marcel Grossmann and his contribution to the general theory of relativity. In *Proceedings of the 13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation, and Relativistic Field Theory,* herausgegeben von Robert T. Jantzen, Khell Rosquist und Remo Ruffini. [arXiv:1312.4068]. Singapore: World Scientific.

Sauer, Tilman, und Ulrich Majer, Hrsg. 2009. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics, 1915–1927.* Dordrecht etc: Springer.

Sommerfeld, Arnold. 1910a. Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. *Annalen der Physik* 32 (9): 749–776.

———. 1910b. Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. *Annalen der Physik* 33 (14.): 649–689.

Stachel, John. 2007. The First Two Acts. In *The Genesis of General Relativity. vol. 1,* herausgegeben von Jürgen Renn, 81–112. Dordrecht: Springer.

Steiner, Mark. 1998. *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem.* Cambridge Mass., London: Harvard University Press.

———. 2005. Mathematics – Application and Applicability. Kap. 20 in *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic,* herausgegeben von Stewart Shapiro, 625–50. Oxford: Oxford University Press.

Suárez, Mauricio. 2003. Scientific Representation: Against Similarity and Isomorphism. *International Studies in the Philosophy of Science* 17 (3): 225–244.

———. 2004. An Inferential Conception of Scientific Representation. *Philosophy of Science* 71:767–779.

Wigner, Eugene P. 1960. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. Reprinted in *Philosophical Relections and Syntheses*, pp. 534–549, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1): 1–14.

Finanzmathematik – Prinzipien und Grundlagen? Nachruf auf einen Zwischenruf

Gregor Nickel

Noli turbare circulos meos.
Archimedes von Syrakus † 212 v. Chr.

1 Mathematik — Fraglos anwendbar?

Zweifellos[1] erleben wir derzeit eine Phase der Dominanz angewandter Mathematik. Dies betrifft nicht nur Rangordnung und Motivation innerhalb der Disziplin selbst, sondern auch die Kommunikation nach außen. Mathematik wird heute wesentlich durch Verweis auf ihre Anwendbarkeit legitimiert, man charakterisiert Mathematik beispielsweise als 'Schlüsseltechnologie'. Dass mathematische Probleme „zur Ehre des menschlichen Geistes" gelöst werden müssen (D. Hilbert), scheint demgegenüber deutlich weniger plausibel zu sein. In wieweit dies nur dem derzeitigen Trend einer Ökonomisierung fast aller Lebensbereiche, so auch der Wissenschaften und deren Insititutionen folgt, oder aber eine im wesentlichen innermathematisch motivierte Gegenbewegung zum 'Bourbakismus' ist, kann hier offen bleiben.

Dem Trend innerhalb der Disziplin entspricht allerdings eine zunehmende Mathematisierung von Wissenschaften, Technik und Gesellschaft. In der Tat prägen nicht-triviale mathematische Resultate und Verfahren wesentliche Bereiche der modernen Gesellschaft (vgl. Nickel 2011). Anders als bei Natur- und Ingenieurwissenschaften bleibt in Bezug auf die Mathematik eine normative Kontroverse

1. Für intensive Diskussionen im Vorfeld des „Zwischenrufs" danke ich den Mitgliedern der AGFA Tübingen, insbesondere Roland Derndinger, Uli Groh, Rainer Nagel und Ulf Schlotterbeck. Außerdem danke ich der Redaktion der Mitteilungen der DMV, für dessen ungekürzte Veröffentlichung im Dikussionsteil.

jedoch noch immer weitgehend aus. Während mittlerweile eine wohletablierte und differenzierte Wissenschaftsethik den Diskurs über die und mit den Naturwissenschaften führt, erreicht dieser im Bereich der Formalwissenschaften allenfalls noch die Informatik. Hauptsächlicher Focus des Diskurses sind dabei die gesellschaftlich relevanten wissenschaftlichen Resultate, hauptsächlich also die durch diese eröffneten technischen Handlungsmöglichkeiten. In Bezug auf die Implikationen für das (philosophische) Welt- und Menschenbild begleitet eine kontroverse Debatte die Entwicklung der Naturwissenschaften spätestens seit der Wende zur wissenschaftlichen Moderne (Galilei und Bacon), in verschärfter Form sicherlich seit dem 19. Jhr. (vgl. für die Physik Bayertz, Gerhard und Jaeschke 2012b, für die Biologie Bayertz, Gerhard und Jaeschke 2012a). Die Mathematik erscheint offenbar in beiden Aspekten als 'weltanschaulich neutral', wird entweder gar nicht verstanden bzw. rezipiert, oder aber in ihrem Vorgehen und ihren Resultaten für normativ irrelevant gehalten[2].

Spätestens jedoch wenn die Anwendbarkeit als charakteristische Eigenschaft hervorgehoben wird, sollte ein solcher Diskurs einsetzen. Wer sich als nützlich empfiehlt, muss auch über Risiken und Nebenwirkungen Auskunft geben. Vor diesem Hintergrund spielte sich eine kleine Episode nicht-erfolgter Reflexion und eingeforderten Diskurses ab, die im folgenden skizziert werden soll.

2 Finanzmathematik – Prinzipien ohne Verantwortung?

Im Jahr 2013 erschien im Verbandsorgan der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) ein längerer, mathematisch elementar gehaltener Aufsatz zur Finanzmathematik[3]. Diese wird darin als „jüngste mathematische Disziplin" vorgestellt, die gleichwohl einen „gewaltigen Aufschwung erlebt" habe. „Eine ihrer wichtigsten Aufgaben" sei „die Bewertung von Derivaten". Eine Theorie hierzu wird dann unter der Überschrift „ein verlockendes Angebot..." im Rahmen einer einfachen Modellsituation eingeführt: Wir „betrachten die Aktie" einer bestimmten Firma mit einem aktuellen Kursstand von 125 EURO und erhalten von einer Bank das Angebot zu dem folgenden „Geschäft"[4]. Für einen sofort zu entrichtenden Preis erhält der

2. Eine der wenigen Ausnahmen sind die sowohl historischen wie auf die Gegenwart bezogenen Studien zur militärischen Relevanz der Mathematik, vgl. Booß-Bavnbek und Hørup 2003, Mazliak und Tazzioli 2009, Nickel 2012.

3. Vgl. für die folgenden Zitate Biagini und Rost 2013.

4. Auffälliger Weise setzen die Autoren diesen Begriff in Anführungszeichen, als wäre der Charakter eines solchen Angebotes vielleicht doch nicht über allen Zweifel erhaben.

Kunde die Zusicherung, in einem Jahr den Betrag zu erhalten, um den der Preis der Aktie 96 EURO übersteigt; liegt ihr Preis unterhalb dieser Schranke, erhält er nichts. Die „entscheidende Frage“ sei nun: „Wieviel ist eine solche Option heute wert? Welchen Preis darf der Bankberater als Verkäufer dafür verlangen, bzw. welchen Preis sind Sie als Käufer bereit, dafür zu bezahlen?“ Eine erste Antwort wird auf rein deskriptive Weise gegeben; der „Preis der Option [wird] durch den Markt, d.h. durch die Nachfrage bestimmt.“ Gleich im Anschluss wird diese Antwort jedoch normativ zweitcodiert: es sei nämlich erstaunlich, „dass sich für diesen sich dann einstellenden ‘fairen’ Preis der Option ein einfaches Prinzip finden und sogar eine Formel angeben lässt.“ Der größte Teil des Artikels widmet sich dann der Aufgabe, an Hand eines einfachen Binomialmodells den gesuchten, „fairen“ Preis zu bestimmen. Auch das Prizip der Arbitrage-Freiheit, auf dem diese Ableitung basiert, weist normative Züge auf: „Eine Möglichkeit (Strategie), einen risikofreien Gewinn zu erzielen, nennt man *Arbitrage*. In einem effektiven Finanzmarkt darf es keine Arbeitrage geben.“ Dabei ist allerdings nicht ganz klar, ob hier die geforderte „Effektivität“ des Marktes, oder die „Fairness“ des Geschäftes als wertende Forderung zu betrachten ist.

Der Aufsatz basiert auf einem Vortrag der Autoren, den diese im Rahmen der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) gehalten hatten, und er beansprucht zugleich aufzuzeigen, „wie finanzmathematische Konzepte ohne Probleme in den Schulunterricht integriert werden können“. Nicht zuletzt vor diesem Hintergrund ist es frapierend, dass nicht einmal in einem Nebensatz auf die ethische Dimension der Thematik hingewiesen wurde. Die obige kurze Paraphrase konzentrierte sich bereits darauf, alle Spuren einer normativen Redeweise hervorzuheben.

Mit dem Ziel, innerhalb der Fachgesellschaft einen Diskurs zu dieser Thematik zu provozieren, wurde in einem der folgenden Hefte ein „Zwischenruf“ publiziert (Nickel 2013, siehe auch den Anhang zu diesem Aufsatz). Die Reaktion war allerdings ernüchternd. Abgesehen von der bereitwilligen Aufnahme durch die Redaktion erfolgte leider – namentlich auch durch die Autoren – keinerlei Replik.

3 Finanzmathematik — Aspekte eines wissenschaftsethischen Diskurses

In diesem kurzen Nachruf kann es nicht darum gehen, die ethische Dimension der Finanzmathematik auch nur ansatzweise vollständig zu charakterisieren oder gar zu entfalten. Den Zwischenruf ergänzend möchte ich im Folgenden lediglich drei Aspekte nochmals hervorheben.

1. Die Finanzmathematik wirft in doppelten Weise ethische Fragen auf, so wie dies im ersten Abschnitt bereits für die Naturwissenschaften allgemein skizziert wurde. Zum einen sind ihre direkten Auswirkungen auf das Wirtschaftsgeschehen inzwischen mehr als deutlich. Hier stellen sich ziemlich analog zur Situation in Naturwissenschaft und Technik Fragen nach einem verantworteten Einsatz handlungsrelevanter und wirkmächtiger Instrumente. Die im Zwischenruf angedeutete Ambivalenz von deskriptiver und normativer Seite macht dabei jedoch die Analyse komplizierter. Einer ethischen Debatte kann leicht ausweichen, wer behauptet, lediglich eine neutrale Sprache zur Beschreibung für ein von dieser vollkommen unabhängiges Geschehen zu entwickeln. Dabei wird jedoch ausgeblendet, dass finanzmathematische Konzepte wesentlich auch dazu dienen, neuartige Handlungs- bzw. Handelsmöglichkeiten überhaupt erst zu schaffen — entsprechend der auf naturwissenschaftlicher Forschung basierenden Technik, deren Einsatz nicht mehr wertneutral erfolgen kann. Zudem ist bereits die mehr oder weniger adäquate Deskription und Analyse einer Marktsituation ein handlungsleitendes Mittel für denjenigen, der über diese Deskription verfügt (vgl. Punkt 4. des Zwischenrufes). Die hierdurch erfolgende Rückkopplung von der Beschreibungsebene ins System selbst ist nicht nur theoretisch interessant, sondern auch ethisch relevant.

Zum anderen aber wird innerhalb der mathematischen Beschreibung unter der Metapher des *homo oeconomicus* eine keineswegs unumstrittene, anthropologische Perspektive (mehr oder minder explizit) vorausgesetzt. Auch hier könnte sich die Finanzmathematik auf eine scheinbar neutrale Position zurückziehen, bei der sich die Voraussetzungen als (rein deskriptiver) Modellrahmen einer ethischen Bewertung entziehen. Gleichwohl wird häufig mit einer solchen Formalisierung der Anspruch verbunden, wesentliche Aspekte menschlicher Rationalität adäquat abgebildet zu haben. Wer sich dem vorausgesetzten Handlungsschema nicht fügt, gilt als ‘irrational’ — auch hier müsste diskutiert werden, inwiefern ein deskriptiver bzw. normativer Anspruch vorliegt. Schließlich aber können — motiviert durch die ökonomische „Deskription“ — die wirschaftlich-sozialen Rahmenbedingungen so gesetzt werden, dass ein Anpassungsdruck hin zu einem der vorausgesetzten Rationalitätsform entsprechenden Verhalten entsteht, das dann *ex post* das gewählte Modell zu rechtfertigen hilft.

2. Anders als in den Naturwissenschaften, in denen Mathematik als zentrales Moment der Theoriesprache kaum noch in Frage gestellt wird, ist ein Diskurs über Ziele und Legitimität einer (durchgehenden) Mathematisierung in den Wirtschaftswissenschaften noch lange nicht beendet. Im Wissenschaftssystem selbst wird etwa

ein Unbehagen an der Deutungshoheit (nicht verständlicher) Mathematik artikuliert. An dieser Stelle soll nur *ein* aktuelles Beispiel angeführt werden. In einem Themenband der Zeitschrift *Aus Politik und Zeitgeschichte*, der das Jahr 2009 als Krisenjahr beleuchtet, widmet sich MAX OTTE dem Versagen der Wirtschaftsforschung angesichts der Aufgabe, die Finanzkrise vorauszusagen bzw. Strategien zu ihrer Bewältigung zu liefern:

> Im Jahr 2009 wandten sich in Deutschland 83 bekannte Ökonomen (...) mit einem Aufruf an die Öffentlichkeit, die Lehre von der Wirtschaftspolitik an den Universitäten zu retten. Zu sehr werde auf mathematische Modelle gesetzt, so dass das Denken über wirtschafts- und ordnungspolitische Fragestellungen mehr und mehr in den Hintergrund gerate. (...) Die Gefahr ist groß, dass die Priesterkaste der mathematischen Ökonomen auch in Zukunft grundlegende ordnungspolitische Zusammenhänge ignoriert und sich in esoterischen Modellen ergeht, während draußen in der Welt bereits die nächste Blase entsteht[5].

Gerade die Experten der Finanzmathematik müssten eine solche Debatte aufgreifen und sich um eine klare Darstellung von Voraussetzungen, Möglichkeiten und Grenzen ihrer Beschreibung und um eine Wertschätzung komplementärer Perspektiven bemühen.

3. Forderungen nach einer stärkeren Integration ökonomischer Themen einschließlich der Wirtschaftsmathematik in das schulische Curriculum werden seit einiger Zeit vermehrt gestellt. Hier scheint der Mathematikunterricht den passenden Rahmen zu bieten. Dies darf allerdings keinesfalls dazu führen, ökonomische Themen gleichsam im diskursfreien Raum zu unterrichten. Sofern eine solche Integration überhaupt erfolgen soll, scheinen mir zwei Varianten vertretbar. Entweder man lässt sich *innerhalb* des mathematischen Fachunterrichts auf kontroverse normative Debatten ein, fordert und fördert diese entsprechend einem Unterrichtsstil in den geistes- und gesellschaftswissenschaftlichen Fächern; dies setzt natürlich auch entsprechende Anstrengungen seitens der mathematischen Fachdidaktik voraus. Oder aber man beschränkt sich auf die mathematische Fachkompetenz, fordert aber eine *externe* Kooperation mit Fächern, die eine normative (politische, ethische) Perspektive einbringen. In diesem Sinne könnten ökonomische Themen zu Musterbeispielen für einen fächerübergreifenden Unterricht werden.

Sicherlich ist der hier eingeforderte normative Diskurs auf allen Ebenen nicht einfach (möglicher Weise stehen im schulischen Bereich noch die gerinsten mentalen

5. Otte 2009.

Hindernisse im Wege). Gleichwohl wären „Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik“ ohne einen solchen Diskurs weder vollständig noch verantwortbar.

Anhang – Aus den Mitteilungen der DMV 21-3 (2013), p. 132.

Diskussion

Money out of nothing? (21-1) — Ein Zwischenruf

In Unkenntnis dieser Gefahren lebten eigentlich nur die Mathematiker selbst und ihre Schüler, die Naturforscher, die von alledem so wenig in ihrer Seele verspüren wie Rennfahrer, die fleißig darauf los treten und nichts in der Welt bemerken als das Hinterrad ihres Vordermanns.

Robert Musil

Den „Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik“ war ein Aufsatz im letzten Heft der DMV Mitteilungen, **21**-1 (2013), gewidmet, in dem die Autoren zugleich demonstrieren wollten, „wie finanzmathematische Konzepte ohne Probleme in den Schulunterricht integriert werden können“ (Biagini und Rost 2013, p. 18). Man liest im weiteren eine didaktisch sorgfältig aufbereitete Darstellung, wie mit Hilfe eines einfachen Binomialmodells ein „fairer Preis“ für eine „Call-Option“ auf der Basis des Prinzips der „Arbitrage-Freiheit“, d.h. ein risikoloser Gewinn wird ausgeschlossen, ermittelt werden kann.

Es findet allerdings derzeit auch außerhalb des mathematischen Binnenraumes eine zunehmend intensive und durchaus kontroverse Debatte über die Grundlagen der Finanzmärkte und deren gesellschaftliche Rolle statt. Da es den beiden Autoren offenbar kein Anliegen war, die von ihnen präsentierte Mathematik in irgendeiner Weise mit diesem Diskurs in ein Verhältnis zu setzen, möchte ich im folgenden zumindest einige Beobachtungen und Anfragen zur Bezugnahme von Finanzmathematik und gesellschaftlicher Wirklichkeit formulieren.

1. Mathematik kommt insbesondere für das Wirtschaftssystem (wenn auch nicht ausschließlich dort) in einer deskriptiven und normativen Doppelrolle zum Einsatz: Zum einen erlaubt die mathematische Analyse eine genaue, neutrale Beschreibung vorgefundener ökonomischer Abläufe; so kann – wie bei Biagini und Rost 2013 – unter der *Voraussetzung* eines mit bestimmten Regeln vorgegebenen (und unter bestimmten Annahmen mathematisch

modellierten) Aktienmarktes entschieden werden, wann ein Optionspreis als arbitragefrei anzusehen ist – was man mit den Autoren als „fair“ interpretieren könnte. Zum anderen jedoch ermöglicht mathematische Konstruktion das Erfinden und Etablieren von neuen ökonomischen Spielen.

2. Setzt man (formalisierbare) Regeln eines vorgegebenen Spiels voraus, so lässt sich mit mathematischen Mittel häufig sehr gut entscheiden, ob bzw. wie (oder sogar wieviel) man gewinnen kann. Die Entscheidung, ob man überhaupt spielen will bzw. soll, aber auch welche Spiele nach welchen Regeln zu spielen sind, ist ist jedoch (zumindest *prima facie*) keine mathematische Entscheidung.

3. Nimmt man die zweite, neue Normen generierenden Funktion der Mathematik ernst, ist es nicht mehr zulässig, ethische Implikationen vollständig auszublenden. Schließlich beschreibt die Finanzmathematik dann nicht mehr ‘in aller Unschuld’ eine Realität, die sie vorfindet, sondern sie ist selbst daran beteiligt, gesellschaftliche Realität wesentlich zu gestalten. Es reicht dann also nicht mehr aus, ‘richtig zu rechnen’.

4. So wäre etwa in der konkreten Einstiegssituation des Artikels p. 18 zu thematisieren, dass ein extremes Machtgefälle zwischen Bank und Kunde in bezug auf die verfügbaren Informationen und Analyse-Mittel herrscht. Der Ausblick (p. 22) macht deutlich, dass wohl kaum ein Kunde, der sich durch die Darstellung der ersten Seiten gearbeitet hat, einen Optionspreis unter Verwendung der Black-Scholes-Formel beurteilen wird. Unter diesen Bedingungen kann eine rationale Entscheidung eigentlich nur bedeuten, das für den normalen Bankkunden nicht durchschaubare Börsen-Kasino grundsätzlich zu meiden.

5. Für den schulischen Mathematikunterricht dürfen die gesellschaftlichen Aspekte auf gar keinen Fall übergangen werden, insofern die Thematik ja gerade mit ihrer ‘lebenspraktischen’ Relevanz gerechtfertigt wird. (*Nota bene*: Dass diverse Themen reiner Mathematik ganz ohne eine solche Motivation auskommen, und durchaus ihren festen Platz im Bildungskanon verdienen, sei hier explizit betont. Mathematikunterricht soll durchaus auch rein mathematisch motivierte Inhalte behandeln.)

6. Der Ausblick deutet es an: Entscheidend für die Aussagekraft der mathematischen Diskussion ist die gewählte Modellierung (vgl. p. 22). Warum wird dieser Aspekt jedoch kaum diskutiert? Im Schlussteil findet sich allenfalls die Behauptung, es gäbe genauere, bessere Modelle, aus denen sich sogar „streng mathematisch“ etwas ableiten lasse. Zu fragen wäre zumindest, wie

ein Abgleich zwischen Modell und Beobachtungsdaten erfolgen könnte und – deutlich brisanter – inwiefern die Modellierung (als Hilfsmittel der Finanzmarktakteure) nicht selbst die angeblich neutral beschriebenen Marktrealität wesentlich beeinflusst.

7. In der Finanzmathematik wie bei den meisten mathematischen Disziplinen endet die Diskurskompetenz Außenstehender relativ schnell. Ohne die beteiligten Mathematiker selbst, läuft ein (normativer) Diskurs somit schnell in die Sackgasse der technischen Inkompetenz. Wenn sich Mathematiker jedoch andererseits – wie gewohnt – auf ihren rein innerfachlichen Diskurs beschränken, entfällt das überaus wichtige Zusammenführen beider Diskurse. Nur eine Kombination der fachlichen (deskriptiven) mit der gesellschaftlichen (normativen) Debatte könnte zu einer einigermaßen adäquaten Situationsbeschreibung *und* zu einer vernünftigen Entscheidung über Handlungsoptionen kommen.

Es wäre schön, wenn der hier diskutierte Aufsatz zum Anlass dienen könnte, diese Debatte auch und gerade im Rahmen der DMV weiterzuführen.

Gregor Nickel, Siegen

Literaturverzeichnis

Bayertz, K., M. Gerhard und W. Jaeschke, Hrsg. 2012a. *Der Darwinismus-Streit.* Meiner-Verlag, Hamburg.

———, Hrsg. 2012b. *Der Materialismus-Streit.* Meiner-Verlag, Hamburg.

Biagini, Francesca, und Daniel Rost. 2013. Money out of nothing? Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik. *DMVM* 21 (1): 18–22.

Booß-Bavnbek, Bernhelm, und Jens Hørup. 2003. *Mathematics and War.* Birkhäuser, Basel.

Mazliak, Laurent, und Rossana Tazzioli. 2009. *Mathematicians at war. Volterra and his French colleagues in World War I.* Springer, Berlin.

Nickel, Gregor. 2011. Mathematik — die (un)heimliche Macht des Unverstandenen. In *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven.* Herausgegeben von M. Helmerich u. a., 47–58. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

———. 2012. “Stör mir meine Kreise nicht!” Mathematik und die Tübinger Zivilklausel. In *Zivilklauseln für Forschung, Lehre und Studium,* herausgegeben von T. Nielebock, S. Meisch und V. Harms, 225–236. Nomos, Baden-Baden.

———. 2013. Money out of nothing? (21-1) — Ein Zwischenruf. *DMVM* 21 (3): 132.

Otte, Max. 2009. Die Finanzkrise und das Versagen der modernen Ökonomie. *Aus Politik und Zeitgeschichte* 52:9–16.

Einladung zur 13.Tagung

Allgemeine Mathematik:
Mathematik und Gesellschaft
Philosophische, didaktische und historische Perspektiven

Universität Gießen, Siegen und Wuppertal,
Schloss Rauischholzhausen
18. – 20. Juni 2015

Mit der Tagung **„Mathematik und Gesellschaft"** wird die Tagungsreihe „Allgemeine Mathematik" fortgeführt, die in Darmstadt 1995 begonnen wurde. Die Tagungen sollen dazu beitragen, eine breite Diskussion über Mathematik und ihre Bedeutung für die Allgemeinheit zu fördern; dabei soll es vor allem um eine Reflexion des Selbstverständnisses der Mathematik, ihres Verhältnisses zur „Welt" sowie um Fragen nach Sinn und Bedeutung mathematischen Tuns gehen.

In diesen Rahmen ist auch das Thema „Mathematik und Gesellschaft" einzuordnen. Auf der kommenden Tagung sollen u.a. aus philosophischer, didaktischer und historischer Perspektive Fragen diskutiert werden wie:

- Inwiefern ist Mathematik prägend für unsere Gesellschaft? Wie kann die zunehmende Mathematisierung moderner Gesellschaften beschrieben und bewertet werden? Welchen Einfluss hat sie auf den einzelnen Menschen? Welchen Einfluss haben mathematische Beschreibungen und mathematische Rationalitätskonzepte auf unser menschliches Leben?

- Welche Ansprüche an mathematische Bildung ergeben sich aus dem Verhältnis von Mathematik und Gesellschaft? Welche (individuellen) Sichtweisen auf die Rolle von Mathematik in unserer Gesellschaft sind hilfreich und wie könnten sie im Mathematikunterricht gefördert werden? Welchen Einfluss haben Schule und Mathematikunterricht auf die gesellschaftliche Rolle von Mathematik?

- Wie hat sich das Verhältnis von Mathematik und Gesellschaft historisch entwickelt? Ergeben sich aus der historischen Betrachtung Hinweise, was die aktuelle Situation ausmacht? Wie kam der Mathematikunterricht historisch zu seiner Stellung?

Um die Diskussion dieser Fragen breit anzuregen, wird die Tagung mit folgendem Format stattfinden: Es werden sechs eingeladene Vortragende das Thema aus jeweils einer der drei Perspektiven entfalten. Aus den beiden anderen Perspektiven wird je eine Reaktion zu jedem Vortrag erfolgen. Im Anschluss daran folgt eine intensive, gemeinsame Diskussionszeit. Zudem werden in drei Kurzvorträgen Außensichten auf Mathematik und Gesellschaft eingenommen, die sowohl die fachmathematische Perspektive, wie auch Anwenderperspektiven einbeziehen. Diejenigen Teilnehmer, die nicht für einen Vortrag oder eine Reaktionen angefragt wurden, haben die Möglichkeit einen eigenen Kurzbeitrag als Poster oder Kurzreferat (von maximal 7 Minuten) während der Abendgespräche einzubringen. Reichen Sie bitte ggf. einen Abstract bei der Tagungsanmeldung ein.

Mit der Tagung sollen Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen sowie wissenschaftlich Interessierte aus unterschiedlichen Bereichen wie vor allem der Mathematik, Didaktik, Philosophie, Geschichte, Erziehungswissenschaft, Informatik und anderen Anwendungsbereichen der Mathematik zusammen gebracht werden, um einen fruchtbaren Gedankenaustausch zur gesellschaftlichen Rolle der Mathematik aus „allgemeiner Sicht“ zu initiieren. Die Tagung richtet sich auch an interessierte Lehrerinnen und Lehrer.

Die Herausgabe eines Sammelbandes mit den ausgearbeiteten Vorträgen der Tagung und ergänzenden Beiträgen zum Tagungsthema ist geplant.

Veranstalter der Tagung sind:

Prof. Dr. Katja Lengnink (Universität Gießen)
Dr. Markus Helmerich, Prof. Dr. Gregor Nickel, Martin Rathgeb (Universität Siegen)
Prof. Dr. Ralf Krömer (Universität Wuppertal)

Die elektronische Anmeldung (*bis zum 1.3.2015*) sowie weitere Informationen zur Tagung finden Sie unter:

`http://www.uni-giessen.de/cms/fbz/fb07/fachgebiete/mathematik/idm/aktuelles`

Für Rückfragen:

Prof. Dr. Katja Lengnink, Universität Gießen, Karl-Glöckner-Str. 21c, 35394 Gießen
E-mail: katja.lengnink@math.uni-giessen.de
Tel: +49 (0)641-9932220 (Sekretariat Angelika Joester).

Adressen der Autoren

Elena Ficara
Universität Paderborn
Fakultät für Kulturwissenschaften
Institut für Humanwissenschaften: Philosophie
Warburger Str. 100/Technologiepark 21
D-33098 Paderborn
elena.ficara@upb.de

Tanja Hamann
Universität Hildesheim
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Universitätsplatz 1
D-31141 Hildesheim
hamann@imai.uni-hildesheim.de

Gregor Nickel
Funktionalanalysis und
Philosophie der Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Straße 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Nicola Oswald
Institut für Mathematik
Lehrstuhl IV
Universität Würzburg
Emil-Fischer-Straße 40
D-97074 Würzburg
nicola.oswald@uni-wuerzburg.de

Tim Räz
Universität Konstanz
Fachbereich Philosophie
Postfach 9
D-78457 Konstanz
tim.raez@gmail.com

Tilman Sauer
Institut für theoretische Physik
Albert Einstein Center for Fundamental Physics
Universität Bern
Sidlerstrasse 5
CH-3012 Bern
tilman@itp.unibe.ch

Sebastian Schorcht
Institut für Didaktik der Mathematik
Justus-Liebig-Universität Gießen
Karl-Glöckner-Str. 21c
D-35394 Gießen
Sebastian.Schorcht@math.uni-giessen.de

Peter Ullrich
Mathematik / Naturwissenschaften, Mathematisches Institut
Universität Koblenz Landau, Campus Koblenz
Universitätsstraße 1
D-56070 Koblenz
ullrich@uni-koblenz.de

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 4 (2014)

Mit Beiträgen von

Peter Ullrich
Einige Bemerkungen zur Entstehung des Analysis-Unterrichts bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts

Nicola Oswald
David Hilbert, ein Schüler von Adolf Hurwitz?

Tanja Hamann
Die Neue Mathematik am Beispiel des *alef*-Programms im Vergleich zu Kühnels *Neubau des Rechenunterrichts* – Eine didaktische Revolution?

Sebastian Schorcht
Lehrerinnen und Lehrer zum Einsatz mathematik-historischer Quellen im Unterricht ausbilden

Elena Ficara
Hegel on the Mathematical Infinite

Tim Räz und Tilman Sauer
Ein Zyklenmodell der Anwendung von Mathematik

Gregor Nickel
Finanzmathematik – Prinzipien und Grundlagen? Nachruf auf einen Zwischenruf

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN