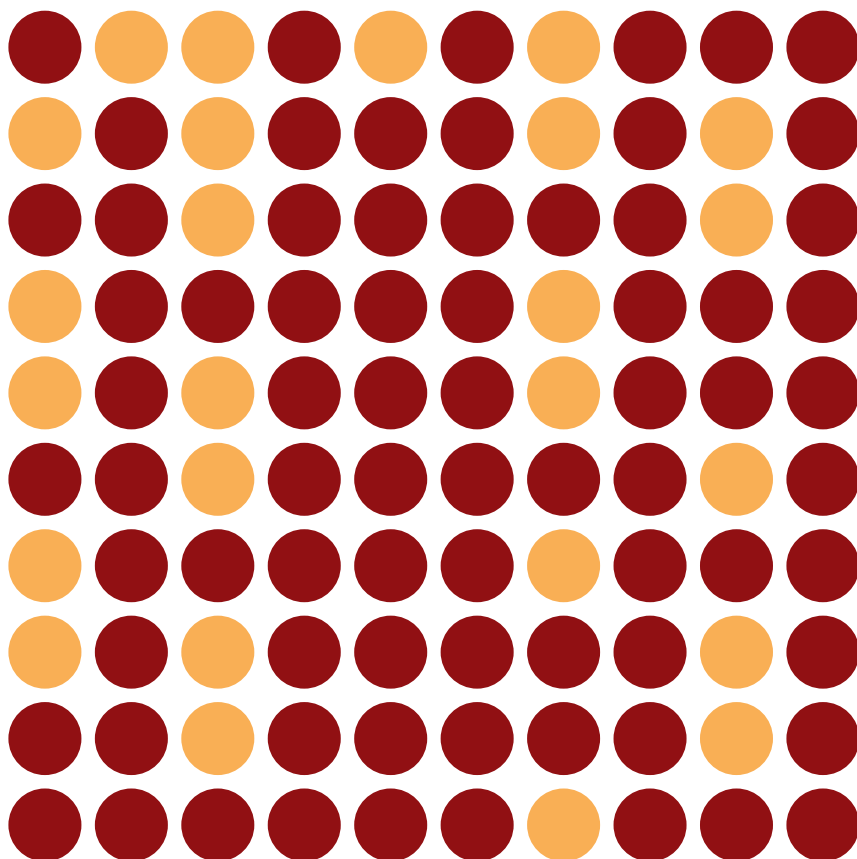


SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

| Band 8 • 2017

Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik



Mit Beiträgen von

**T. Gruber | A.-S. Heinemann | E. Kanterian |
D. Koenig | M. Rathgeb | A. Vohns | M. Wille**

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

**Siegener Beiträge
zur Geschichte und Philosophie der Mathematik**

Band 8 (2017)

Mit Beiträgen von:

Th. Gruber | A.-S. Heinemann | E. Kanterian | D. Koenig | M. Rathgeb |

A. Vohns | M. Wille

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 8 (2017)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

Rechte: bei den Herausgebern/den Autoren

universi – Universitätsverlag Siegen 2017

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen
gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
universi – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Vorwort

Die in diesem nunmehr vorliegenden achten Band der Siegener Beiträge vereinten Aufsätze dokumentieren jene Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden, die uns schon in den vorangehenden Bänden stets ein Anliegen war. Überspitzt gesagt, eint sie, zumindest auf den ersten Blick, nicht viel mehr als das große Oberthema Geschichte und Philosophie der Mathematik. Wir haben uns sehr über die zahlreichen Einreichungen gefreut (deren Vielzahl unterstreicht, dass tatsächlich ein Forum gebraucht wird, wie es die Siegener Beiträge sein möchten), uns aber mangels einer besseren Alternative der Anordnung schließlich entschieden, diese im Band einfach in alphabetischer Reihenfolge der Autorennamen abzdrukken. So tut zur Orientierung der Leserinnen und Leser wenigstens eine kurze inhaltliche Charakterisierung der einzelnen Beiträge Not, die im Folgenden versucht werden soll; diese lässt dann aber durchaus thematische Verbindungen und das Potential eines gegenseitigen Befruchtens erkennen.

Zwei der Beiträge gehören zum Themenkreis der Geschichte der Logik im deutschen Sprachraum. Anna-Sophie *Heinemann* liefert eine umfangreiche Untersuchung der Geschichte des Begriffs ‘formale Logik’ im 19. Jahrhundert, insbesondere im Werk von Moritz Wilhelm Drobisch. Matthias *Wille* dokumentiert eindrucksvoll, anknüpfend an frühere Beiträge zu Gottlob Frege, die internationale Editions- und Übersetzungsgeschichte von Freges *Begriffsschrift*.

Gehört der Beitrag von Daniel *Koenig* ganz in den Bereich der (Geschichte der) Philosophie der Mathematik – geht es doch um Ernst Cassirers Rezeption der Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien –, so nimmt Edward *Kanterian* gewissermaßen eine diametrale Perspektive ein: er unterzieht Versuche, Probleme der Philosophie mit Mitteln der Mathematik zu lösen, einer kritischen Betrachtung, und schlägt dabei einen historischen Bogen über einige der notorischsten dieser Versuche. Im Grunde ähnlich weist auch Thomas *Gruber* auf problematische Anwendungen der Mathematik hin, hier jedoch aus ethischer (und durchaus auch politischer) Sicht, und den sehr “handfesten” militärischen Bereich betreffend. Eine solche Öffnung des Diskurses über Mathematik hin zu Fragen von Ethik und Verantwortung ist uns ausdrücklich ein Anliegen.

Von dort ist es nicht weit zu Fragen der didaktischen Vermittlung von Mathematik als gesellschaftlicher Aufgabe. Mit Martin *Rathgeb* und Andreas *Vohns* widmen sich zwei unserer Autoren Überlegungen zur mathematischen Lehramtsausbildung. Hierbei setzt Vohns einen deutlichen Akzent, indem er vom *Ausbildungsbegriff* den *Bildungsbegriff* klar abgrenzt. Rathgeb greift einen klassischen Dialog von Carroll auf (den er bereits in einem früheren Beitrag historisch und philosophisch gewürdigt hat) und lotet sein (hochschul-)didaktisches Potential aus, insbesondere im Blick auf die Winterschen Grunderfahrungen.

Allen Autoren sei nochmals herzlich für ihre Beiträge gedankt. Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Linus Tischner für die L^AT_EX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow, Stefan Pracht und Johannes Herbst für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer

Gregor Nickel

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
<i>Thomas Gruber</i>	
Im Spannungsfeld von militärischer Anwendung und Wissenschafts- verantwortung? Zur Verquickung der mathematischen Forschung in Deutschland mit der modernen Kriegsführung	1
<i>Anna-Sophie Heinemann</i>	
„Die Logik ist in der That nichts als bloßer Formalismus...“ Zu einer Episode in der Geschichte des Begriffs ‚formale Logik‘	27
<i>Edward Kanterian</i>	
Die Idee einer mathematischen Philosophie: Von Descartes bis zur funktionalen Semantik	73
<i>Daniel Koenig</i>	
Raumproblem und Erkenntnisproblem – Ernst Cassirers Rezeption der Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien	99
<i>Martin Rathgeb</i>	
Lewis Carroll, die Schildkröte und Achill – Teil II. Ein unendlicher logischer Diskurs auf drei Seiten	115
<i>Andreas Vohns</i>	
Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage	139
<i>Matthias Wille</i>	
›a labor of love‹ – Aus der Geschichte der <i>Begriffsschrift</i> -Editionen (1952-2017)	169
Adressen der Autoren	203

Im Spannungsfeld von militärischer Anwendung und Wissenschafts- verantwortung? Zur Verquickung der mathematischen Forschung in Deutschland mit der modernen Kriegsführung

Thomas Gruber

1 Einleitung

„Physicists, chemists, and biologists have a tradition of discussing meta-aspects of their subject – among which are the military use and misuse of the knowledge they produce. Concerns of the latter kind are rare among mathematicians.“ (Booß-Bavnbek und Høyrup 2003, S. 1)

Booß-Bavnbek und Høyrup beschreiben ein weit verbreitetes Phänomen unter Mathematiker_innen: Die eigene Forschung wird oft als etwas „Reines“, Unintentionales betrachtet und findet erst durch Fachbereiche wie die Informatik, die Wirtschafts- oder die Ingenieurwissenschaften in die tatsächliche Anwendung. Eine ethische Auseinandersetzung mit den Folgen der Forschungsergebnisse obliegt nach dieser Logik dann den Informatiker_innen, den Wirtschafts- und den Ingenieurwissenschaftler_innen. Ähnlich ist es auch um die gesellschaftspolitische Auseinandersetzung mit neuen Technologien bestellt: Kritische Aspekte werden meist direkt mit Entwickler_innen und Anwender_innen in Verbindung gebracht;

die Mathematik spielt in den öffentlichen Diskursen über neue Waffensysteme, dubiose Spekulation und Bankgeschäfte sowie über die Fortschritte im Bereich der künstlichen Intelligenz keine bedeutende Rolle. Gesellschaftliche Transformationen, an denen sich die Frage nach einer Wissenschaftsethik in der Mathematik motivieren ließe, gäbe es dagegen einige – die Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Krieg sind eine davon.

Gerade in den Methoden der modernen Kriegsführung ist der Einfluss der Mathematik über die letzten Jahrzehnte immer stärker sichtbar geworden. Was Boock-Bavnbeek und Høyrup als „Mathematisierung der Kriegsführung“¹ bezeichnen, fasst teilweise äußerst fragwürdige Formen militärischen Wirkens zusammen. Seien es Bemühungen um eine möglichst umfassende Satellitenüberwachung, die ständige Verbesserung von Tötungsgerät wie Cruise Missiles oder Kampfdrohnen, die gezielte Spionage oder Meinungsbildung im Cyber- und Informationsraum oder die Entmenschlichung in Kriegsentscheidungen wie etwa bei der automatisierten Zielerkennung – zentrale Ansätze der modernen Kriegsführung wären ohne mathematische Zuarbeit undenkbar.

Wie kommt es zu diesen beiden Realitäten – der weitgehend unreflektierten mathematischen Forschung auf der einen Seite und der Mathematisierung des Krieges auf der anderen? Ist die Forschung in der Mathematik wirklich weitgehend zweckfrei und eventuelle ethische Konflikte entstehen erst durch die Anwendung? Und direkt daraus folgend: Wie weit kann Verantwortlichkeit (sowohl innerhalb der Wissenschaft als auch gesamtgesellschaftlich) reichen?

2 Die mathematische Forschung in Deutschland und der Krieg – Ursprünge und aktuelle Beispiele

Wenn die Frage nach einer wissenschaftsethischen Auseinandersetzung innerhalb der Mathematik bezogen auf die militärrelevante Forschung motiviert werden soll, wird zunächst eine Bestandsaufnahme der Verbindungen zwischen Mathematik und Krieg benötigt. Dabei gilt es sowohl zwischen den verschiedenen mathematischen Teilgebieten zu unterscheiden, als auch zwischen einer historischen und einer aktuellen Betrachtung. Weil die Arten der Verquickung zwischen Mathematik und Krieg allerdings so vielschichtig sind wie die verschiedenen Teilgebiete, kann dieser Aufsatz in jenen Punkten nur einen Überblick geben. Zum Zwecke

1. Engl.: mathematization of warfare

einer Vertiefung der Thematik wird an passenden Stellen weiterführende Literatur genannt und der allgemeine Überblick durch einzelne Beispiele aus der deutschen Forschungslandschaft ergänzt.

Im Sinne einer möglichst authentischen Auseinandersetzung mit der Thematik liegen die Schwerpunkte dieses Textes in den Arbeitsgebieten des Autors – sowohl fachlich (in der Mathematik) als auch regional (in Deutschland). Da allerdings weder wissenschaftliches Wirken noch die Anwendung militärrelevanter Forschungsergebnisse sich regional beschränken lassen, wird häufiger Bezug auf internationale Entwicklungen genommen. Die Struktur des Aufsatzes ist stellenweise an die Dissertation Gruber 2018 angelehnt, die der _dem geneigten Leser_ in als weiterführende Literatur empfohlen sei.

2.1 Chronologische Schlaglichter

Viele Teilbereiche der Mathematik hatten in ihrer historischen Entwicklung erhebliche Wechselwirkungen mit der jeweiligen Kriegsführung – sei es auf taktischer Ebene, in der Logistik, der Verbesserung von Waffentechnik, zur Verschlüsselung von Kriegsnachrichten oder bei der militärischen Aufklärung und Spionage. Dabei hat sich in manchen Forschungsbereichen eine militärische Relevanz erst entwickelt (wie etwa in der Zahlentheorie oder der Numerik), andere entstammen dagegen direkt aus einer militärischen Fragestellung (wie das Operations Research oder zentrale Teile der Theorie zur optimalen Kontrolle). Gerade die Phasen des Zweiten Weltkrieges und des Kalten Krieges waren geprägt von Bemühungen um militärische Überlegenheit, die auch sehr stark in die Wissenschaft getragen wurden. Doch auch wenn die engen Verbindungen zwischen Wissenschaft und Krieg in diesen Zeiten der weitreichenden Militarisierung besonders auffällig waren, fanden einige mathematische Methoden schon weit früher ihren Weg in die militärische Anwendung.

Die Rolle, welche die Mathematik in den ersten Phasen der Technisierung und der Mechanisierung der Kriegsführung einnahm, war vornehmlich die einer Hilfswissenschaft (Booß-Bavnbek und Høyrup 2003, S. 2 - 3). Mathematische Methoden wie etwa die Trigonometrie oder ballistische Berechnungen gehörten ab dem 14. Jahrhundert fest zum Werkzeugkasten kriegführender Nationen – so beispielsweise in der Schiffsnavigation und der Entwicklung von Kanonen während des Hundertjährigen Krieges zwischen England und Frankreich. Dabei bedienten sich die Militärs allerdings meist bereits existierender mathematischer Konzepte und Ideen, nur selten flossen theoretische Ergebnisse aus dem Krieg zurück in die Wissenschaft.

Eine Ausnahme von dieser Regel stellt zum Beispiel der Ursprung des polyadischen Zahlensystems dar, der sich vermutlich in einer logistischen Strukturierung und Normierung von Arbeitskraft mittels einer Militärreform im Sumer um 2070 v. u. Z. finden lässt.

Mit dem Ersten Weltkrieg änderte sich dann die Beziehung zwischen Mathematik und Krieg grundlegend: Die neuen technischen Mittel des Krieges verlangten auch nach aktuellen wissenschaftlichen Erkenntnissen und nicht mehr nur nach bereits verfestigtem, Jahrhunderte altem Wissen (Booß-Bavnbek und Høyrup 2003, S. 4). So waren neuere mathematische Methoden beispielsweise unabdingbar für die Entwicklung des Sonars und Überlegungen zur Aerodynamik, die wiederum bedeutende Bestandteile von See- und Luftschlachten waren. Mathematiker_innen wurden außerdem in vielen Ländern als kompetente Ingenieur_innen und Rechner_innen für militärische Probleme benötigt. Doch trotz der erheblichen Bedeutung mathematischer Methoden im Ersten Weltkrieg war die Mathematik als Wissenschaft noch weit davon entfernt, kriegsentscheidend zu sein. Aus diesem Grund hatten wohl die militärischen Fragestellungen keinen größeren Einfluss auf die zivile Forschungslandschaft und auch die angewandte Mathematik richtete sich nach dem Ersten Weltkrieg wieder auf vornehmlich zivile Fragestellungen aus.

Ab dem Beginn des Zweiten Weltkrieges begann eine globale Welle der Militarisierung (und in Nazideutschland zusätzlich eine Zeit der beispiellosen Verrohung), die noch Jahrzehnte später spürbar war und beinahe alle Bereiche der Gesellschaft durchdrang. Die Mathematik leistete einen essentiellen Beitrag zur neuen Kriegsführung², unter anderem in der wachsenden Komplexität von Flugbahnberechnungen, in der militärischen Logistik und Taktik (wie etwa durch Methoden der Optimierung, der Spieltheorie und dem Operations Research), in der Entwicklung und Automatisierung von Kriegsgerät (beispielsweise mithilfe der Numerik und der Kontrolltheorie) sowie zu neuen Verschlüsselungssystemen und Angriffen auf dieselben. Die zwei großen Veränderungen in der Beziehung zwischen Mathematik und Krieg waren dabei, dass die neuen Methoden der Kriegsführung zunehmend auf mathematischen Konzepten beruhten und dass die allgemeine Militarisierung der Gesellschaft auch erheblichen Einfluss auf zivile Forschungsinstitutionen hatte – sowohl bei den Achsenmächten, als auch bei den Alliierten. Am Beispiel Nazideutschlands lässt sich diese gegenseitige Abhängigkeit gut erkennen (Segal 2003). Forscher_innen lieferten Erkenntnisse und Methoden für die militärische Luftfahrt (z. B. Gustav Doetsch), neue Waffensysteme (z. B. die Berechnungen von Lothar Collatz und Alwin Walther für die *Vergeltungswaffe 2*) und die Chiffrierung kriegsrelevanter Nachrichten (z. B. Helmut Grunsky und Oswald Teichmül-

2. vgl. z. B. Siegmund-Schultze 2003 und Kjeldsen 2003

ler). Mathematiker_innen beteiligten sich natürlich auch an der Durchsetzung der Naziideologie innerhalb und außerhalb der Hochschulen. Zum einen war es ihnen so im Wissenschaftsbetrieb möglich, jüdische Konkurrenz – wie etwa die berühmten Professoren Edmund Landau in Göttingen oder Felix Hausdorff in Bonn – auszuschalten. Zum anderen trieb sie die pure Überzeugung an: Ludwig Bieberbach propagierte beispielsweise die „Deutsche Mathematik“, welche „undeutsche“ Einflüsse aus der Mathematik verbannen und die Ideologie der Nazis mathematisch zu begründen suchte. Ähnlich entwickelte sich der größte deutsche Interessensverband von Mathematiker_innen, die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (kurz: DMV): Jüdische Mitglieder wurden ausgeschlossen, es entbrannte Streit um die Einführung eines „Führerprinzips“ und Wilhelm Süss, Mitglied der NSDAP und des NS-Dozentenbundes, wurde Präsident der DMV (Remmert 2004b und Remmert 2004a).

Der anschließende Kalte Krieg festigte die schon bestehende Verquickung zwischen mathematischer Forschung und militärischen Problemstellungen. So war beispielsweise die Arbeit in der Numerik, der Optimierung und der Kontrolltheorie weiterhin grundlegend für ingenieurwissenschaftliche Durchbrüche in der Luft- und neuerdings auch der Raumfahrt sowie der Entwicklung von Lenkwaffen³. Ergebnisse aus der Optimierung, dem Operations Research und der Spieltheorie sollten Industrie und Militär Planungsunterstützung bei der Produktion, der Logistik, in Schlachtszenarien und beim Rüstungswettlauf bieten⁴. Und die in den Geheimdiensttätigkeiten und der Staatskommunikation ständig präsente Kryptologie stützte sich maßgeblich auf abstrakte Algebra – insbesondere auf die Forschung zu endlichen Körpern. Dabei war es die massive finanzielle Förderung militärrelevanter Projekte durch USA und Sowjetunion, die einzelne Ansätze der angewandten Mathematik – wie etwa zur Theorie der optimalen Steuerung (Gamkrelidze 2003) – erst entstehen ließ oder eine Vertiefung gewisser Forschungsbereiche ermöglichte. Gleichzeitig fand im Bereich der Datenverarbeitung eine regelrechte Revolution statt: Die 1950er Jahre brachten die ersten digitalen programmierbaren Computer. Nach und nach wurden diese immer rechenstärker bis sie schließlich in den 1960er Jahren nicht mehr aus der Wissenschaft wegzudenken waren. Mit der *Informatik* entstand ein eigenes Fachgebiet zur automatischen Informationsverarbeitung⁵. Die neuen Computer ermöglichten beispielsweise komplexe numerische Berechnungen in der Luft- und Raumfahrt, parameterintensive Schlachtsimulationen und eine schnellere Chiffrierung von Nachrichten, wodurch bessere Verschlüsselungsschemata und Angriffe auf dieselben entwickelt werden konnten. Aus der Euphorie

3. vgl. z. B. Babovsky 1998, S. 149 - 151 und Dorf und Bishop 2011, S. 8

4. vgl. z. B. Tichatschke 2008, S. 10 - 19

5. vgl. z. B. Edwards 1996, S. 43 - 73

der kurzen Rechenzeiten, der immer kleiner werdenden Computer und der zunehmenden Automatisierung entstand schließlich auch der Ansatz der *künstlichen Intelligenz* (kurz: KI). Innerhalb weniger Jahre, so dachten einige Forscher_innen, sollten Maschinen mit der menschlichen Intelligenz gleichziehen – eine verlockende Aussicht für staatliche und militärische Geldgeber_innen.

Bis heute wurde die Verbindung zwischen vielen militärischen Ansätzen aus dem Zweiten Weltkrieg und dem Kalten Krieg mit der Mathematik verstärkt, einige wurden aber auch fallen gelassen und wieder neue kamen hinzu. So bedürfen beispielsweise die technische Weiterentwicklung von Waffen und Transportgerät, die Implementierung und Analyse neuer Kryptosysteme, logistische Fragestellungen in Armeen und allgemein auch alle weiteren komplexen militärischen Berechnungen nach wie vor der Hilfe aus mathematischen Fachbereichen wie etwa der Numerik, der Kontrolltheorie, der Optimierung oder der Algebra. Gleichzeitig haben sich allerdings auch einige Modelle als unpraktikabel herausgestellt – wie zum Beispiel der Ansatz, eine umfassende künstliche Intelligenz zu erschaffen oder mit den Methoden der Spieltheorie komplexe Schlachtverläufe zu simulieren. Dennoch wurden Ideen der KI über die letzten Jahre weiterverfolgt, meist mittels kleinteiligerer Konzepte zur Teilautonomie von Systemen. So lässt sich der Beitrag der Mathematik zur aktuellen, modernen Kriegsführung überwiegend in drei nur sehr unscharf abgrenzbare – aber dennoch zentrale – Prozesse militärischen Wirkens einordnen: die technische Auf-, die digitale Umrüstung und die zunehmende (Teil)Automatisierung militärischer Methoden, Waffen und Geräte. Auf wissenschaftlicher Ebene ist die Mathematik sehr viel näher an ihre Anwendungsfelder gerückt. Inzwischen existieren vielerorts Forschungsbereiche zur Finanzmathematik, der Techno- oder Ingenieursmathematik und selbstverständlich ist die rechenintensive Forschung auch immer enger mit der Informatik verbunden. Diese Interdisziplinarität spiegelt sich dann natürlich auch innerhalb konkreter anwendungsbezogener Forschungsprojekte und -gruppen – seien sie nun zivil oder militärisch verortet – wider. Im Folgenden sollen zwei konkrete Beispiele einen Einblick in die Verquickung zwischen aktueller mathematischer Forschung in Deutschland mit der modernen Kriegsführung geben.

2.2 Die Kryptologie und der diskrete Logarithmus

Schon die Stichworte „Mathematik“ und „Krieg“ verleiten oft zur Assoziation mit der von den Nazis im Zweiten Weltkrieg genutzten Chiffriermaschine *Enigma* und deren spektakulärer Entschlüsselung durch alliierte Mathematiker_innen in Bletchley Park. Und auch sonst ist die Militärgeschichte durchzogen mit der Entwicklung möglichst sicherer Kryptosysteme und feindlichen Angriffen auf dieselben:

der Skytale, die von den Spartanern 404 v. u. Z. benutzt wurde, um Kriegsbotschaften zu übermitteln (Bauer 2013, S. 4 - 5); der Caesar-Chiffre, mit der der römische Feldherr seine Kommunikation auf dem Schlachtfeld verschlüsselte (Bauer 2013, S. 11 - 12); der Nutzung der Vigenère-Chiffre durch die Südstaaten im US-amerikanischen Bürgerkrieg und den erfolgreichen kryptoanalytischen Angriffen der Nordstaaten (Kahn 1996, S. 217 - 218); der Entschlüsselung des Zimmermann-Telegramms, das zum Kriegseintritt der USA im Ersten Weltkrieg führte (Bauer 2013, S. 185 - 187); der kryptoanalytischen Angriffe des US-Militärs auf japanische Militärcodes, die den Kriegsverlauf der 1940er Jahre im Pazifik grundlegend änderte (Bauer 2013, S. 293 - 311); und vieles mehr. Zu beachten ist dabei vor allem eine Parallele: Die taktisch relevanten Nachrichten, die innerhalb einer Kriegspartei versandt wurden, sollten so sicher als möglich verschlüsselt sein. Und erfolgreiche feindliche Angriffe auf die verwendete Verschlüsselung veränderten nicht selten den Kriegsverlauf erheblich. Mit der zunehmenden Bedeutung der Kryptographie im zivilen Sektor der Kommunikation gerät häufig die Tatsache in den Hintergrund, dass die Kryptologie ein Kind des Krieges ist. Denn die kryptologischen Anwendungen reichten in den ersten Jahrhunderten ihrer Entstehung kaum über die Ver- und Entschlüsselung kriegs- oder staatsrelevanter Nachrichten hinaus.

An der Bedeutung der Kryptologie für die Kriegsführung hat sich auch in modernen Kriegen nichts geändert. Und da die Sicherheit und Angreifbarkeit moderner Kryptosysteme maßgeblich von aktuellen Erkenntnissen in der mathematischen Forschung abhängen, weitet sich das militärische Interesse an den Schwachstellen aktuell genutzter Verschlüsselungsschemata auf entsprechende Teilbereiche der Mathematik aus. Ein Beispiel hierfür ist das *diskrete Logarithmusproblem* aus der algebraischen Zahlentheorie. Die Fragestellung zur Lösung eines Logarithmus gestaltet sich in den reellen Zahlen wie folgt:

Für ein $a \in \mathbb{R}^+$ und ein $b \in \mathbb{R}^+$ finde $x \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $b^x = a$.

Oder als Funktion: $\log_b a = x$.

Eine reelle Logarithmusfunktion ist mithilfe eines Computers oder händisch in beliebiger Annäherung numerisch lösbar. Auf der Grundlage des reellen Logarithmus lässt sich eine analoge Problemstellung für endliche zyklische Gruppen formulieren – der *diskrete Logarithmus*. Das Konzept einer *endlichen zyklischen Gruppe* ist dem algebraischen Forschungsgebiet der Gruppentheorie entnommen⁶; sie bezeichnet eine endliche Menge G , die mit einer Verknüpfung \circ die allgemeinen

6. vgl. z. B. Lidl und Niederreiter 1997, S. 2 - 11

Gruppeneigenschaften erfüllt und aus einem Element $g \in G$ der Gruppe zyklisch erzeugt werden kann.⁷ Die Eigenschaft der Zyklizität motiviert auch die Schreibweise $G = \langle g \rangle$. Als Analogon des Logarithmus in den reellen Zahlen wird die Fragestellung, die den diskreten Logarithmus in der endlichen zyklischen Gruppe $G = \langle g \rangle$ definiert, zu (Jungnickel 1993, S. 84):

Für $a \in G$ finde $x \in \{0, 1, \dots, |G| - 1\}$, sodass gilt: $g^x = a$.

Oder als Funktion: $\log_g a = x$.

Im Gegensatz zum reellen Logarithmus ist der diskrete allerdings für große Gruppen G keinesfalls mühelos zu berechnen.

Auf dieser Komplexität der Berechnung fußt die Sicherheit vieler moderner Kryptosysteme – ein Umstand der im Folgenden am Beispiel des weit verbreiteten Diffie-Hellman-Schlüsselaustauschs verdeutlicht werden soll. Für eine geheime Kommunikation zwischen zwei Personen mittels eines symmetrischen Kryptosystems gilt es, sich zunächst auf einen gemeinsamen Schlüssel zu einigen, mit dem die Nachrichten verschlüsselt werden können. Da aber Nachrichtenkanäle (E-Mail, Post, Chat, usw.) oft abhörbar sind, muss eine sichere Methode zum Schlüsselaustausch über jene Kommunikationswege gefunden werden. Der Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch nutzt die diskrete Exponentialfunktion als sogenannte *Einwegfunktion*, also eine Funktion deren Umkehrfunktion – der diskrete Logarithmus – nur unter enormem Rechenaufwand zu lösen ist. Die algorithmische Schreibweise des Austauschverfahrens verdeutlicht die zentrale Voraussetzung einer Unberechenbarkeit der diskreten Logarithmusfunktion⁸:

1. Alice und Bob wollen einen gemeinsamen Schlüssel finden. Sie einigen sich zunächst öffentlich auf eine zyklische Gruppe G mit primärer Ordnung p und Erzeuger g .
2. Beide wählen eine geheime Zufallszahl a bzw. b aus $\{1, 2, \dots, p - 1\}$.
3. Alice berechnet $A = g^a$ und schickt das Ergebnis an Bob.
4. Bob berechnet $B = g^b$ und schickt das Ergebnis an Alice.
5. Alice berechnet $K = B^a$, Bob berechnet $K = A^b$. Beide besitzen nun den gemeinsamen Schlüssel K zur weiteren Verwendung in der verschlüsselten Kommunikation.

7. Das heißt genauer: $G = \{g^0, g^1, g^2, \dots, g^{|G|-1}\}$

8. vgl. z. B. Stinson 2006, S. 430

Schnell wird ersichtlich, warum die Berechenbarkeit des diskreten Logarithmus sicherheitskritisch ist: Könnte die Angreiferin Eve in sinnvoller Rechenzeit den diskreten Logarithmus $a = \log_g A$ (bzw. $b = \log_g B$) berechnen, so könnte auch sie mittels $K = B^a$ (bzw. $K = A^b$) den gemeinsamen Schlüssel von Alice und Bob berechnen.

An dieser Stelle knüpft auch die Fragestellung des Bundesministeriums der Verteidigung an, von dem die Universität Leipzig 2013 mit einer Studie zu den „Möglichkeiten und Grenzen der Berechnung des diskreten Logarithmus“ (Sächsische Staatsregierung 2013, S. 6) beauftragt wurde. Das militärische Interesse an der Berechenbarkeit einer Funktion, mit der die Sicherheit ganzer Kryptosysteme steht und fällt, ist denkbar vielseitig begründet: Einerseits bietet sie Ansatzpunkte für kryptologische Angriffe auf feindliche Kommunikationsstrukturen in deutschen Kriegseinsätzen oder auf andere selbstgewählte Ziele außerhalb kriegerischer Handlungen wie Privatpersonen, Staaten oder Unternehmen. Andererseits gibt eine solche Analyse Aufschluss über die derzeitige und zukünftige Sicherheit der eigenen Kryptosysteme, mit denen die Kommunikation in ebendiesen Kriegen verschlüsselt wird. Die Auslagerung einer solchen Studie in ein universitäres Forschungsprojekt scheint sinnvoll: Das Thema des diskreten Logarithmus entstammt direkt der theoretischen algebraischen Forschung. Die Leipziger Forscher_innen können daher nicht nur ihre eigenen aktuellen Forschungsergebnisse, sondern die der internationalen Forschungsgemeinschaft abbilden, was meist auch die Erkenntnisse von Forscher_innen der Länder umfasst, die potentielle deutsche Angriffsziele wären. Dabei ist es möglich, sie mit Geheimhaltungsklauseln zur Verschwiegenheit zu verpflichten, was einen für das Verteidigungsministerium bedenkenlosen Austausch innerhalb des Forschungsprojekts und damit eine auftragsspezifische Bearbeitung desselben ermöglicht. Außerdem hilft die fertige Studie dem Verteidigungsministerium bei der Bewertung des Potentials militärisch-akademischer Zusammenarbeit und damit bei der Auswahl zukünftiger Themen für kryptologische Forschungsprojekte.

Die Ergebnisse der Studie selbst sind weder öffentlich zugänglich noch wird die Kooperation mit dem BMVg von Universitätsseite benannt. Der aktuelle Forschungsstand zur Berechenbarkeit des diskreten Logarithmus ist allerdings problemlos abzubilden und auf seine Relevanz für die moderne Kriegsführung prüfbar. Dabei scheint es sinnvoll, zwischen der rein mathematischen Komponente des diskreten Logarithmusproblems und der konkreten Implementierung der diskreten Exponentialfunktion in aktuellen Kryptosystemen zu unterscheiden. Die theoretische mathematische Analyse des diskreten Logarithmusproblems ist ein rege bearbeitetes Teilgebiet der algebraischen Forschung. Zu den prominentesten Algorithmen der Bestimmung eines diskreten Logarithmus zählen das *Zahlkörpersieb* (Lenstra und

Lenstra Jr. 1993, S. 11 - 42), der *Babystep-Giantstep-Algorithmus* (Swenson 2008, S. 82 - 83), der *Pohlig-Hellman-Algorithmus* und der *Index-Calculus-Algorithmus* (Stinson 2006, S. 241 - 246). Doch obwohl diese Ansätze augenscheinlich zunächst erhebliche Vorteile gegenüber der reinen Brute-Force-Methode bieten, sind sie bei den Größen der zyklischen Gruppen, wie sie auch in der modernen Kryptographie verwendet werden, faktisch wirkungslos. Die Sicherheit eines Kryptosystems hängt allerdings nicht nur von der mathematischen Unberechenbarkeit des diskreten Logarithmus ab, sondern auch von möglichen Schwachstellen der zugrunde liegenden zyklischen Gruppen und der jeweiligen Implementierung des Verschlüsselungsalgorithmus. Während die aktuellen Fortschritte in der algorithmischen Bestimmung des diskreten Logarithmus vernachlässigbar sind, wächst der Erkenntnisstand zur Angreifbarkeit konkreter Implementierungen gewisser Kryptosysteme stetig. Die so erforschten Angriffe auf spezifische Implementierungen sind zahlreich; es sollen daher an dieser Stelle einige ausgewählte aktuelle Angriffsschemata genannt werden, die die Gründe für das momentane militärische Interesse an den diskreten Logarithmen verdeutlichen.

Einige der neuesten Angriffsschemata auf etablierte Kryptosysteme beziehen sich auf die vergleichsweise junge *Elliptic Curve Cryptography* (kurz: ECC). Dabei ist die konzeptuelle Idee der ECC, eine elliptische Kurve für die grundlegende zyklische Gruppe eines Kryptosystems zu wählen (Stinson 2006, S. 254 - 267). Auf jener elliptischen Kurve wird dabei eine Gruppenstruktur definiert, die den enormen Rechenaufwand zur Bestimmung eines diskreten Logarithmus erhalten soll, während die Länge der verwendeten Schlüssel kürzer und die damit benötigte Speicherkapazität geringer wird. Gravierende Fehler in der Implementierung der ECC-Kryptosysteme wären zwar vermeidbar, sind allerdings keinesfalls immer offensichtlich – oft werden unsichere Algorithmen erst in tiefgreifenden mathematischen oder informatischen Forschungsprojekten aufgedeckt. Ein Beispiel für die Ausnutzung einer unzureichenden Implementierung sind sogenannte *Seitenkanalattacken* (Brumley und Tuveri 2011): Ein_e Angreifer_in kann bei einem ECC-System häufig schon über die Rechenzeit einer Verschlüsselung Informationen über den verwendeten Schlüssel gewinnen. Dies hängt mit dem sich signifikant ändernden Berechnungsaufwand für unterschiedliche Rechenoperationen auf der elliptischen Kurve zusammen. Zwar kann die Gefahr eines solchen Angriffes algorithmisch gebannt werden, doch muss das Problem dazu zunächst von der_dem Anwender_in erkannt werden, was oft erst nach erfolgreichen Angriffen der Fall ist. Ein weiteres Beispiel für eine Schwachstelle in der Implementierung eines ECC-Systems ist die Verwendung von unsicheren elliptischen Kurven, wie sie umfangreich in der Dokumentation der Kryptolog_innen Daniel J. Bernstein und Tanja Lange beschrieben werden (Bernstein und Lange o.Dat.). Diese Form der Angreifbarkeit wurde in der

transnationalen Forschungsgemeinschaft vor allem in Bezug auf Kryptostandards, die maßgeblich von der NSA beeinflusst wurden, diskutiert.

Im Oktober 2015 stellten einige Kryptolog_innen auf der *Conference on Computer and Communications Security* einen Angriff auf eine weit verbreitete Implementierung des Diffie-Hellman-Schlüsselaustauschs (namens *DHE_EXPORT*) vor – die *Logjam-Attacke* (Adrian et al. 2015). Es gelang ihnen, durch Vorberechnungen mittels eines Zahlkörpersiebs für eine in den Implementierungen wiederholt und viel verwendete zyklische Gruppe mit der Ordnung einer 512-Bit Primzahl, das diskrete Logarithmusproblem weitgehend zu beseitigen. Damit konnten einige verschlüsselte Verbindungen kompromittiert werden, die das *Transport Layer Security* (kurz: TLS) Protokoll nutzen. Diese Vorberechnungen für eine viel verwendete 512-Bit Primzahl ermöglichten es bereits die Kommunikation mit 7% der eine Million meist besuchten HTTPS-Homepages offen zu legen. Im Sinne einer weiteren Folgenabschätzung sprechen die Autor_innen des Papers auch von Logjam-Attacken auf die zwei am häufigsten genutzten 1024-Bit Primzahlen. Aufgrund des erheblichen Rechenaufwands mit einem Zahlkörpersieb für diese Größenordnung kommen für solcherlei Angriffe nur staatliche und geheimdienstliche Institutionen in Frage. Die Analyse geleakter NSA-Dokumente legt nahe, dass der amerikanische Geheimdienst diese Aufgabe bereits bewältigt hat, was bedeuten würde, dass die NSA Zugriff auf die verschlüsselte Kommunikation via 66% aller IPsec-VPNs und 26% der SSH-Server hätte. Aus diesem Grund empfehlen die Forscher_innen die Nutzung von 2048-Bit Primzahlen oder den Übergang zu einem Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch auf der Basis von elliptischen Kurven (kurz: ECDH).⁹

Insgesamt zeichnet sich also eine erhebliche militärische und geheimdienstliche Relevanz einer Studie zur Berechenbarkeit des diskreten Logarithmus ab. Die vom BMVg verwendbaren Informationen sind dabei vielseitig:

1. Eine sichere Verschlüsselung unter Verwendung der diskreten Exponentialfunktion als Einwegfunktion ist möglich, solange Schwachstellen in der Implementierung der Kryptosysteme vermieden werden.
2. Angriffe von deutscher Seite auf zivile und militärische Verschlüsselung sind bei ausreichender Rechenleistung möglich und damit militärisch, geheimdienstlich oder anderweitig polizeilich nutzbar. Ein für die moderne Kriegsführung oft äußerst wichtiger Informationsvorsprung gegenüber feindlichen Kriegsparteien scheint damit realistisch.

9. Wobei bei der Nutzung von elliptischen Kurven ebenso auf eine fehlerfreie Implementierung zu achten ist, wie die obenstehenden Ergebnisse zeigen.

3. Andere nationalstaatliche Akteure, wie beispielsweise die NSA, nutzen diese Angriffsmöglichkeiten mit hoher Wahrscheinlichkeit bereits.
4. Eine Kooperation mit Wissenschaftler_innen an deutschen Universitäten verspricht oft einen großen Erkenntnisgewinn. Die Geheimhaltung der Forschungsergebnisse ist dabei aus einem nationalstaatlichen Blickwinkel sinnvoll.

2.3 Kampffjets, Spionagesatelliten und die Numerische Optimierung

Die Optimierung ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik, welches sich mit der Suche nach optimalen Parametern einer gegebenen Zielfunktion befasst. Eine Optimierung von Parametern bedeutet, die Variablen der Funktion so zu wählen, dass sie – je nach Problemstellung – minimiert oder maximiert wird. Oft existieren in einem Optimierungsproblem auch Nebenbedingungen, das heißt Einschränkungen für die Wahl der Parameter, die eine zulässige Menge von Variablenwerten definieren, über denen der Funktionswert optimiert werden soll. Meist wird das Optimierungsproblem samt der Zielfunktion und der Nebenbedingungen von einer realen Fragestellung abgeleitet und damit steht dem Schritt der mathematischen Optimierung die Modellierung eines konkreten Problems voran. Optimierungsmethoden finden in diesem Zuge beispielsweise Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften, den Ingenieurwissenschaften und der Physik.

Die Anfänge der Optimierung liegen größtenteils in der Variationsrechnung, wie sie maßgeblich von Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange gegen Ende des 18. Jahrhunderts mitbegründet wurde (Tichatschke 2008, S. 1 - 5). Zwar lässt sich auch in der analytischen Diskussion von Kurven und der Suche nach Extrempunkten ein Aspekt der Optimierung erkennen, doch waren Euler und Lagrange zwei der ersten Mathematiker_innen, die in ihren Theorien zur Wertmaximierung auch Restriktionen für die verwendeten Parameter zuließen. Viele Jahre wurden die mathematischen Grundsteine für die bis dato noch weitgehend unbeforschte Optimierung gelegt, bis sich in den 1940er Jahren schließlich eine Anwendungsmöglichkeit für die ersten linearen Optimierungsprobleme eröffnete (Tichatschke 2008, S. 10 - 19). Die Mathematiker Kantorovich, Dantzig und Koopmans erkannten, dass sich viele Fragestellungen zur optimalen Ressourcen- und Produktionsplanung in eine Optimierungsaufgabe mit einer linearen Zielfunktion und ein System von Nebenbedingungen aus linearen Ungleichungen überführen ließen. Als eine im zweiten Weltkrieg beteiligte Armee stand auch die US-Army großen Aufgaben der Ressourcenplanung gegenüber. Staatstreue Mathematiker_innen wie Dantzig traten

deshalb in den Dienst der US-amerikanischen Armee und standen mit den neuesten Erkenntnissen aus der Optimierung beratend zur Verfügung. Zu dieser Zeit gelang es Mathematiker_innen Methoden der Optimierung mit passenden Ideen der Spieltheorie zum Operations Research zu vereinen, was regen militärischen Anklang fand.¹⁰ In dieser frühen Phase der linearen Optimierung wurde aufgrund der leistungsschwachen Rechenmaschinen noch großteils händisch gerechnet, was erhebliche menschliche Kapazitäten forderte und viele Optimierungsprobleme in der Realität unpraktikabel machte.

Mit dem Aufschwung der Informatik und den Computerwissenschaften in den 1960er Jahren änderte sich das schlagartig (Tichatschke 2008, S. 25-31). Rechenintensive numerische Methoden zur Lösung von Optimierungsproblemen wurden entwickelt und die nichtlineare Optimierung, die auch nichtlineare Nebenbedingungen erlaubt, erlangte mehr und mehr Beachtung. So wurden die Anwendungsbereiche für die mathematische Optimierung sukzessive größer; es entstanden beispielsweise die Fachgebiete der numerischen, der stochastischen und der diskreten Optimierung. Die Ingenieurwissenschaften nahmen in der Regelungstechnik immer stärkeren Bezug auf die Theorien zur optimalen Steuerung und besonders die Luft- und Raumfahrtindustrie greift heute in großem Maßstab auf Optimierungsmethoden zurück.

Wie für diesen industriellen Zweig typisch, geht mit einer zivilen Nutzung der technischen Grundlagen meist auch eine militärische einher. Und so laufen auch die Kooperationsvereinbarungen zwischen zivilen Forscher_innen und der Rüstungsindustrie in der Optimierung größtenteils über Drittmittelprojekte mit sowohl ziviler als auch militärischer Zielsetzung. Analog zu dieser Entwicklung sollen im Folgenden zwei größere Drittmittelprojekte aus der numerischen Optimierung mit Akteur_innen aus der militärisch genutzten Luft- und Raumfahrt analysiert werden.

Die Gewichtoptimierung von Fluggerät ist eine der zentralen Aufgaben von Ingenieur_innen in der Luft- und Raumfahrtindustrie. Dabei kann die Bedeutung einer Gewichtsreduktion von der bloßen Minimierung des Treibstoffverbrauchs bis hin zur Gewährleistung der grundsätzlichen Flugfähigkeit des Endproduktes reichen. Neben der immer weiteren Verschlankeung und Verbesserung von Bauteilen steht für Forscher_innen aktuell ein weiterer Aspekt zur Gewichtsminimierung im Fokus: Die Applikation von Löchern im Produktionsprozess. Die Aufgabe der Wissenschaftler_innen besteht hierbei darin, die reine Masse der verbauten Materialien

10. Nach den großen Konfliktphasen des Zweiten Weltkrieges und des Kalten Krieges verlor dieser Fachbereich allerdings für das Militär zunehmend an Bedeutung und wird bis heute eher privatwirtschaftlich und in den Wirtschaftswissenschaften genutzt.

durch jene Löcher zu verringern und gleichzeitig die Stabilität und die Sicherheit der Konstruktion zu gewährleisten. Da die Entwicklung von Prototypen mit verschiedenen Aussparungen in den Bauteilen weder kosteneffizient wäre noch eine optimale Konstruktion gewährleisten würde, greift die Industrie zunehmend auf Methoden zur computergestützten Simulation zurück. Das Problem der optimalen Oberfläche von Bauteilen für Fluggeräte geht dabei von einem augenscheinlich rein ingenieurwissenschaftlichen in ein mathematisches über. Die Methoden, derer sich Forscher_innen für diese Form der Gewichtminimierung bedienen, stammen meist aus der hierfür entwickelten *Topologieoptimierung* – einem Teilgebiet der mathematischen Optimierung.

Als Forschungsprojekt dient zu diesem Zweck beispielsweise das in den Jahren 2006 bis 2009 beforschte EU-Projekt *PLATO-N*, welches in einem Verbund ziviler Wissenschaftler_innen sowie eurozentrisch orientierten Konzernen der zivilen und militärischen Luft- und Raumfahrt ein Softwarepaket zur computerbasierten Strukturoptimierung hervorbrachte (*About PLATO-N* o.Dat. und *Die Mathematik fliegt mit* 2009). Die mathematischen Komponenten der Topologieoptimierung wurden dabei größtenteils von Forscher_innen der Universitäten Erlangen, Würzburg und Bayreuth bearbeitet (*PLATO-N – Work Packages* o.Dat. und Europäische Kommission 2011).

Das Projekt *PLATO-N* wurde in mehrere Schritte unterteilt, die der Vermittlung zwischen den Industriepartner_innen und den universitären Forscher_innen dienen sollten. Die im Einzelnen behandelten Themen waren:

1. Anforderungen der Industrie an ein Programm der Strukturoptimierung (z. B. grafische Benutzer_innenoberfläche, Stufen des Designprozesses, Spezifizierung und Priorisierung der Aufgaben von Ingenieur_innen während des Prozesses)
2. Stand der mathematischen Forschung und nützliche Methoden für die Strukturoptimierung (z. B. Optimierung mit einer sehr großen Anzahl an Variablen, Techniken der Materialoptimierung)
3. Grenzen der bekannten Methoden und Implementierung problemspezifischer Lösungen (z. B. Verwendung der Topologieoptimierung, Behandlung von Teilproblemen, numerische Approximation der Lösungen)
4. Zusammengefasste Softwareentwicklung, Auswertung und Tests (z. B. Zusammenführung der mathematischen Einzelkonzepte, Programmierung der Rechenkomponenten, Überprüfung der initial formulierten Voraussetzungen)

Die beteiligten Industriepartner_innen – *EADS*, *Airbus UK* und *Eurocopter* – sind alle Luft- und Raumfahrtunternehmen mit einer stark vertretenen Rüstungssparte.¹¹ Sie formulierten die Vorgaben des Projektes in Schritt 1 und stellten so den Anwendungsbezug des Vorhabens sicher. Die übrigen Projektschritte bedurften aktueller Methoden aus der numerischen Optimierung sowie der Topologieoptimierung und behandelten die Implementierung dieser Konzepte. Sie wurden am Institut für angewandte Mathematik der Universität Erlangen, dem Institut für Mathematik der Universität Würzburg und dem Insitut für Informatik der Universität Bayreuth bearbeitet.

Das Projekt PLATO-N steht somit exemplarisch für industriell orientierte Auftragsforschung an mathematischen und informatischen Instituten deutscher Universitäten, deren Fragestellung genau auf die beteiligten Unternehmen zugeschnitten wird. Finanziell gefördert wurde das Projekt allerdings nicht durch die davon profitierenden Konzerne selbst, sondern durch Drittmittel der Europäischen Union. Die Forschungsergebnisse stehen den beteiligten Unternehmen schließlich frei zur Verfügung. Sie können dann zwar zivil genutzt werden, die äußerst starken Rüstungssparten der Industriepartner_innen implizieren jedoch eine mindestens ebenso präesente militärische Verwendung des PLATO-N-Systems.

Eine weitere populäre Optimierungsaufgabe in der Luft- und Raumfahrt betrifft die Abdeckung von Zielgebieten durch Aufklärungssatelliten. Im Rahmen der Umweltbeobachtung und der militärischen Überwachung aus dem Weltraum soll sichergestellt werden, dass die eingesetzten Satelliten möglichst große Bereiche der Erdoberfläche ohne allzu hohe Redundanz beobachten können. Meist werden Aufklärungssysteme in einer Kombination mehrerer Einzelsatelliten realisiert, die Bildmaterial bestimmter Teile der Erdoberfläche akquirieren und anschließend zu einem möglichst lückenlosen Ganzen zusammensetzen sollen. Zusätzlich soll oft – je nach Priorität und unter Berücksichtigung zeitkritischer Faktoren der Beobachtungen – ein gewisser Anteil des Gebietes in festgelegten Zeitintervallen mehrmals überflogen werden. Dabei ergeben sich verschiedene Einzelprobleme auf der Makro- und Mikroebene, die sich zu einem komplexen Gesamtproblem fügen. Zunächst muss sichergestellt werden, dass die Einzelsatelliten in Umlaufbahnen fliegen, die eine gewünschte Beobachtung des Zielgebietes überhaupt ermöglichen – es wird also an erster Stelle nach einer optimalen Konstellation der Raumflugkörper gesucht. Ist dies geschehen, diktieren zusätzlich die Ressourcen der Einzelsatelliten Einschränkungen der Bildgebung: Begrenzter Speicherplatz für Bilddaten, Stromausfälle bei Sonnenschatten und Totzeiten der Aufnahme während des Kontakts

11. Genauer sind alle drei Unternehmen inzwischen eingegliedert in den weltweit zweitgrößten Rüstungskonzern *Airbus SE*.

mit Bodenstationen erschweren eine kontinuierliche und lückenlose Erdüberwachung erheblich.

Mit dieser Problematik beschäftigten sich in den Jahren 2007 bis 2008 auch Mathematiker_innen an der Universität Bremen (*Optimierung von Satellitenkonstellationen* o.Dat. und *Optimierung von Beobachtungszeitplänen für optische Satelliten* o.Dat.). Der Konzern OHB (kurz für: *Orbitale Hochtechnologie Bremen*) gab am *Zentrum für Technomathematik* zwei Drittmittelprojekte in Auftrag, die einer Optimierung von Satellitenkonstellationen mehrerer Überwachungssatelliten und den Betriebszeitplänen der eingesetzten Einzelsatelliten zuarbeiten sollten. Die Aufgabe für die beteiligten Mathematiker_innen war daher die Bearbeitung zweier verschiedener Optimierungsprobleme und die entsprechende Implementierung möglichst universell einsetzbarer Software-Tools.

Die erste Problemstellung verlangt nach einem Programm zur Ermittlung einer optimalen Konstellation einer gewissen Anzahl an Satelliten im Sinne der Maximierung des beobachtbaren Bereiches der Erdoberfläche. Dabei ergeben sich als Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe beispielsweise das gewünschte Zielgebiet und die Forderung nach ein- oder mehrfachen Besuchen gewisser Bereiche dessen (Knauer und Büskens 2010). Anschließend soll eine Softwarelösung die optimalen Betriebszeitpläne der einzelnen Satelliten festlegen können. Die Beobachtungs- und Sendezeiträume eines Satelliten sollen so getaktet werden, dass vom überflogenen Bereich der Erdoberfläche ein möglichst großer Teil auch in Bilddaten abgespeichert und an die Bodenstationen geschickt werden kann (Tietjen et al. 2008). Die Aufgabe ist es daher, das beobachtete Gebiet eines einzelnen Satelliten zu maximieren, diesmal allerdings unter weitaus komplexeren Nebenbedingungen: Nicht nur soll ein Ein- oder Mehrfachbesuch bestimmter Teile der Erdoberfläche möglich sein, es müssen auch in gewissen Intervallen Bodenstationen in Sendereichweite des Satelliten sein und die strombedingten Ausschaltzeitpunkte der Sensorik berücksichtigt werden können. Die Forscher_innen mussten zu diesem Zweck zunächst die reale Fragestellung mit den wichtigsten Restriktionen in nichtlineare Optimierungsprobleme überführen und anschließend iterative Verfahren zur Approximation einer optimalen Lösung derselben implementieren. Nach einem knappen Jahr Forschungszeit stellten die beteiligten Bremer Mathematiker_innen die fertigen Programme für OHB vor – sie vereinfachten damit die Verwendung von Aufklärungssatelliten erheblich und nachhaltig (*Technologiepreis für Mathematiker Christof Büskens* 2008).

OHB besitzt neben zivilen Geschäftsfeldern auch eine äußerst präzise Rüstungssparte – so war das Unternehmen beispielsweise leitend für den Bau der Bundeswehr-Spionagesatelliten *SAR-Lupe 1* bis *5* verantwortlich. Es ist dabei offen-

sichtlich, dass die Bremer Forscher_innen mit der Auftragsarbeit für OHB auch der Umsetzung militärischer Projekte zugearbeitet haben: Die Optimierungsprogramme wurden erstmals im SAR-Lupe-System eingesetzt (*OHB-System AG mit Technologiepreis geehrt* 2008).

3 Annäherungen an die Wissenschaftsverantwortung: innerhalb der Mathematik und aus der Philosophie

Dass Mathematiker_innen also grundsätzlich nicht erkennen können, wofür ihre Forschung letztendlich genutzt wird, ist schon aufgrund der bis hier dargestellten historischen Entwicklung und der Beispiele zu militärrelevanten Projekten unvorstellbar. Und dabei ist der militärische ja nur einer von vielen Anwendungsbereichen der Mathematik: Seien es zivile Ingenieurstechnik, die Risikoabschätzung in Versicherungs- und Bankgeschäften oder die geheimdienstliche, privatwirtschaftliche und staatliche Auseinandersetzung mit modernen Kryptosystemen – aktuelle mathematische Forschung hat erhebliche Auswirkungen auf Alltag und Gesellschaft. Grund genug also, sich gesamtgesellschaftlich mit den Auswirkungen mathematischer Forschung auseinanderzusetzen, offen die positiven und negativen Konsequenzen zu diskutieren. Dieser Diskurs kann sicherlich auch interdisziplinär stattfinden – wie etwa auf philosophischer oder sozialwissenschaftlicher Ebene. Doch wie sieht es mit einer wissenschaftsethischen Auseinandersetzung innerhalb der Mathematik aus?

Es scheint absurd, über die Folgen mathematischer Forschung zu sprechen, ohne Mathematiker_innen selbst einzubinden und ohne sie in die Pflicht einer ethischen Selbstreflexion zu nehmen. Denn ihr Wirken ist es, das viele der bis hier genannten Technologien und Methoden in der militärischen und der privatwirtschaftlichen Anwendung erst ermöglicht und ihre Forschung ist es auch, die – falls sie als schädigend für ein friedliches und achtsames Miteinander wahrgenommen wird – eingeschränkt werden kann¹². Gleichzeitig werden für einen umfassenden Diskurs über Forschungsfolgen aber auch der fachliche Weitblick und das Wissen der beteiligten Forscher_innen benötigt. Denn die Wissenschaftler_innen können selbst am besten erkennen, für welchen Zweck ihre Forschungsergebnisse verwendet werden, können als Expert_innen auch am wirksamsten Öffentlichkeit erzeugen und der missbräuchlichen Verwendung ihrer Arbeit vorbeugen.

12. wie beispielsweise militärrelevante Forschung bereits an einigen deutschen Hochschulen durch sogenannte Zivillklauseln eingeschränkt wird

Ausreichend Motivation für einen wissenschaftsethischen Diskurs innerhalb der Mathematik gäbe es also. Wie kann eine solche Auseinandersetzung allerdings aussehen? Welche Form der Reflexion findet in der Forschung bereits statt?

3.1 Bisherige wissenschaftsethische und gesellschaftspolitische Überlegungen innerhalb der Mathematik

Auch wenn ein Diskurs über die Verbindungen zwischen Mathematik und moderner Kriegsführung weder innerhalb der Forschungsgemeinde noch gesamtgesellschaftlich sehr präsent ist, gibt und gab es dennoch einzelne Mathematiker_innen, die sich mit der Thematik auseinandergesetzt haben. Dabei sprechen die Wissenschaftler_innen konkrete Missstände an oder versuchen eine Diskussion über die Folgen der mathematischen Forschung anzuregen. Ein sehr berühmtes Beispiel hierfür ist etwa der deutsch-französische Mathematiker Alexander Grothendieck: Der geniale Algebraiker setzte sich immer wieder vehement gegen die militärische Nutzung der Mathematik ein. Er kündigte seine Stelle am Forschungsinstitut IHES¹³, unter anderem weil die Einrichtung Fördergelder des französischen Verteidigungsministeriums erhielt, kritisierte öffentlich auf mathematischen Kongressen die engen Bindungen zwischen Forschung und Militär und wandte sich schließlich gänzlich von der Mathematik ab¹⁴. Und noch 2014 beschrieb beispielsweise der Numeriker Peter Deuffhard, Gründer des Zuse-Instituts Berlin, wie er sich persönlich der Rüstungsforschung in den 1970er Jahren verwehrt (Deuffhard 2014).

Heute ist die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit den Verbindungen zwischen Mathematik und Krieg vor allem interdisziplinär geprägt. So vereint beispielsweise die von Boß-Bavnbeek und Høyrup organisierte Konferenz zu *Mathematics and War* mathematische, historische und ethische Sichtweisen. In der *Arbeitsgruppe Funktionalanalysis und Philosophie der Mathematik* der Universität Siegen forscht der Mathematiker Gregor Nickel unter anderem zu ethischen Implikationen der Mathematik¹⁵. Und der Wissenschaftshistoriker Volker Remmert befasst sich eingehend mit der Rolle von Mathematiker_innen während der Nazi-herrschaft in Deutschland¹⁶.

Die Rolle von Mathematiker_innen unter den Nazis und ihre Zuarbeit zur schrecklichen deutschen Kriegspolitik sprach 1946 auch der spätere Vorsitzende der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (kurz: DMV), Erich Kamke, an. Auf sein Betreiben hin wurde in Tübingen die erste deutsche Tagung von Mathematiker_innen

13. Institute des Hautes Études Scientifiques

14. vgl. z. B. Scharlau 2007 und Scharlau 2010

15. vgl. z. B. Nickel 2014, Nickel 2012 und Nickel 2006

16. vgl. z. B. Remmert 2004b und Remmert 2004a

nach dem Zweiten Weltkrieg abgehalten und schließlich auch die stark von alten Nazis durchgesetzte DMV wiederaufgebaut. Kamkes damaliger Appell an seine Kolleg_innen (Mathematisches Institut Tübingen, Ohne Jahresangabe) bleibt auch heute als wissenschaftsethischer Diskursansatz über die Verquickung zwischen der mathematischen Forschung und dem militärischen Wirken aktuell:

„Wie zum Arzt neben der medizinisch-technischen Ausbildung auch eine charakterliche Erziehung gehört die ihn selbst die gefährlichsten Hilfsmittel – Messer, Narkotika, Gifte – nur zum Wohle des Kranken verwenden lässt, so ist es unerlässlich, dass auch die Wissenschaftler ihre ungeheure Macht, die sie zum Herrn über Leben und Tod ganzer Völker, ja der ganzen Menschheit machen kann, nur zu deren Wohle verwenden. Während früher die Eignung für die eigentliche wissenschaftliche Forschung das hervorstechendste Merkmal des Forschers bildete, wird in Zukunft noch etwas anderes hinzukommen müssen: ein besonders hohes Berufsethos, ein auf das feinste ausgeprägtes Verantwortungsbewusstsein gegenüber den Folgen der Forschung für die Menschheit. Es wird zu erwägen sein, ob zu diesen auf moralischem Gebiet liegenden Ansprüchen an die Forscherpersönlichkeit noch organisatorische Massnahmen hinzukommen müssen, etwa als mildeste Massnahme die Einrichtung eines internationalen Informationsbüros, bei dem ohne Beschränkung der Freiheit des Forschens, alle Forschungen bestimmter Wissenschaftsgebiete anzumelden sind.

Diese Probleme sind von solcher Bedeutung, dass sie überall wo Wissenschaftler zusammentreffen, diskutiert werden sollten. Wir alle müssen uns mit aller unserer Kraft, mit unserer ganzen Person dafür einsetzen, dass die Wissenschaft niemals mehr einem Werk der Zerstörung, sondern nur noch dem Wohle der Menschheit dient.“

Doch obwohl auch innerhalb der Mathematik von verschiedenen Forscher_innen wiederholt auf die Relevanz eines wissenschaftsethischen Diskurses hingewiesen wurde, bleiben diese Positionen vereinzelte Statements. Die Ursachen hierfür reichen von einer langen Zurückhaltung individueller politischer Positionen wie bei Peter Deuffhard über staatliche Repression politischer Gegner_innen, wie im Falle von Bernhelm Booß-Bavnbek, der wegen seiner Mitgliedschaft in der DKP in Deutschland Berufsverbot bekam, bis hin zu mehr oder minder ausgeprägtem Desinteresse der Forschungsgemeinde wie bei Erich Kamke, das bei Alexander Grothendieck sogar zu (Selbst)Isolierung führte.

3.2 Die Wissenschaftsverantwortung nach Hannah Arendt

Eine ethische Auseinandersetzung innerhalb eines gewissen Fachgebietes stützt sich immer auf Grundüberlegungen aus der Philosophie. Im Falle einer Wissenschaftsethik sind dies diverse Fragen nach Verantwortung und Verantwortlichkeit. Denn was bei konkreten Taten und Handlungen noch vergleichsweise geradlinig erscheint, wird in der Wissenschaft erheblich erschwert: Forscher_innen selbst formulieren zunächst nur Überlegungen und geben Ideen, ihre Arbeit steht noch einige Schritte vor der eigentlichen Anwendung oder Tat. Beispielsweise sind Mathematiker_innen an der Theorie zur Flugstabilisierung einer Drohne beteiligt oder den Grundlagen eines Algorithmus zur Risikoberechnung, nicht aber an der tatsächlichen Tötung von Zivilist_innen in Pakistan oder der existenzbedrohenden Ablehnung eines Privatkredites. Inwieweit sind also Wissenschaftler_innen für die Formulierung ihrer Ideen und Überlegungen überhaupt verantwortlich? Direkt darauf aufbauend stellt sich die Frage, wie jene Verantwortung wahrgenommen werden kann. Kann abgesehen von gründlicher Selbstreflexion etwas aus der Verantwortlichkeit für wissenschaftliche Ideen und Überlegungen folgen? Denn nur weil ein Forschungsansatz irgendwann einmal schädliche Auswirkungen auf die Gesellschaft haben könnte, sollte er nicht automatisch unterbunden werden. Das hätte äußerst weitreichende Forschungsverbote zur Folge und würde große Teile der Wissenschaft lahmlegen. Die Mathematik träfe dies genauso hart wie den restlichen MINT-Bereich, denn ingenieurwissenschaftlich relevante Fragestellungen müssten dann beispielsweise ebenso fallen gelassen werden wie rein theoretische Überlegungen in der Zahlentheorie, die für kryptologische Konzepte genutzt werden. Beinahe alles was sich auch nur im entferntesten mit einer Anwendung in Bezug bringen lässt kann auch für schädigende Zwecke missbraucht werden.

Einige äußerst bereichernde Aspekte zur Auseinandersetzung mit Ethik in der Wissenschaft bietet beispielsweise Hannah Arendts Werk *Vita activa* (Arendt 2013), das erstmals 1958 in den USA mit dem Titel *The Human Condition* erschien. Das Buch befasst sich weniger mit einer konkreten Formulierung von Wissenschaftsverantwortung, als vielmehr mit sehr grundlegenden Gedanken über die gesellschaftliche Einbettung menschlicher Tätigkeit – in Arendts Worten „was wir eigentlich tun, wenn wir tätig sind“ (Arendt 2013, S. 12). Damit ist allerdings wissenschaftliches Wirken durchaus mit in ihre Überlegungen eingeschlossen und die Ausführungen über „Das Handeln“ (Arendt 2013, S. 239-306) gehen auf wichtige Problemfelder bei wissenschaftsethischer Reflexion ein. Zunächst erkennt Arendt an, dass kein Individuum „die Folgen der eigenen Tat je voll übersehen kann“ (Arendt 2013, S. 239). Gleichzeitig existieren Grenzen für individuelle Handlungen, die von der Gesellschaft und Gemeinschaft, in der sich einzelne Personen bewegen, festgelegt

oder – durchaus dynamisch – definiert werden. Die Grundsätze der Verantwortung, wie sie Hannah Arendt beschreibt, sind also immer in Wechselwirkungen zu sehen, zwischen dem handelnden Individuum und der Gemeinschaft. Ihr Verantwortungsbegriff baut dabei auf zwei zentralen Punkten auf: der Fähigkeit des handelnden Individuums zu versprechen sowie der Fähigkeit der Gesellschaft dem Individuum zu verzeihen. Genauer heißt das: Wegen der Unabsehbarkeit der eigenen Taten gibt die _der Handelnde der Gesellschaft ein Versprechen über die bestmögliche Wahrung der Intention ihrer _seiner Handlung. Sollte die Handlung also nicht intendierte Konsequenzen haben, wird das Individuum, das die Handlung vollzogen hat, versuchen, die negativen Folgen seiner Handlung zu bekämpfen und sie gemäß seines Versprechens gegenüber der Gesellschaft zu wenden. Dabei sind die durch die Handlung begonnenen Prozesse allerdings unwiderruflich und ein irreversibler negativer Ausgang für die Gesellschaft ist auch bei reichhaltig überdachten Aktionen möglich. Um dem handelnden Individuum dennoch die Freiheit zu geben, wohlüberlegte Handlungen durchzuführen und im Falle negativer Konsequenzen frei und handlungsfähig zu bleiben, muss die Gesellschaft der _dem Handelnden verzeihen können. Für Arendt reicht damit nicht reine Selbstreflexion, denn „niemand kann sich selbst verzeihen, und niemand kann sich durch ein Versprechen gebunden fühlen, das er nur sich selbst gegeben hat“ (Arendt 2013, S. 302). Die Wechselwirkung des Individuums mit der Gemeinschaft ist von höchster Bedeutung.

Für die Verantwortung von Wissenschaftler_innen lässt sich die Arendtsche Idee also analog ihrer Tatenverantwortung formulieren: Die _der Wissenschaftler_in entscheidet sich nach eingehender Reflexion und Abschätzung eines Forschungsvorhabens für ein Projekt und gibt gleichzeitig der Gesellschaft ein Versprechen über die wohlgemeinten Absichten desselben. Sollte das Forschungsprojekt ungewünschte negative Konsequenzen haben – die beurteilende Instanz ist dabei die Gesellschaft –, liegt es an den verantwortlichen Wissenschaftler_innen, gemäß ihres Versprechens gegenüber der Gemeinschaft und als fähige Expert_innen für dieses Thema, den Konsequenzen bestmöglich im Sinne ihrer initialen Intention entgegen zu wirken. Gleichzeitig muss die Gesellschaft den Wissenschaftler_innen die schadhafte Folgen ihrer Forschung verzeihen und ihnen damit den Handlungsspielraum für die Wiedergutmachung – im Sinne ihres anfänglichen Versprechens – geben. In der Mathematik würde dies bedeuten, dass sowohl die Forscher_innen selbst, als auch die Gemeinschaft in der sie leben und arbeiten, sich zunächst einmal mit den Folgen des wissenschaftlichen Wirkens auseinandersetzen sollten. Dabei müssten die Absicht ebenso wie die Auswirkungen der Forschung allerdings öffentlich zugänglich und transparent gemacht werden, da sonst keine gesellschaftliche Beteiligung am ethischen Diskurs möglich ist.

4 Fazit und Ausblick

In vielen Fächern gibt es bereits eine intra- und interdisziplinäre wissenschaftsethische Auseinandersetzung. Besonders rege werden Forschungsfolgen in der Medizin, der Biologie, der Chemie und der Physik abgewägt und diskutiert – alles Fächer, von denen eine konkrete Gefahr ausgeht für die Menschen in den sogenannten Industrienationen bzw. noch allgemeiner den Ländern der nördlichen Hemisphäre. Bedrohungsszenarien bezüglich neuer CBRN¹⁷-Waffen sowie Normsetzungen in der Medizin werden weitgehend ernst genommen und führen nach ausreichender Diskussion zu erheblichen Einschränkungen in Wissenschaft und Forschung¹⁸. Im Vergleich dazu bleibt ein ethischer Diskurs innerhalb der Mathematik, der Informatik und der technischen Wissenschaften quasi fast vollständig aus. Die teilweise auch destruktive und freiheitsgefährdende Wirkung jener Fächer entfaltet sich nicht vor der eigenen Haustür (z. B. hochtechnisierte Kriegsführung oder die gewaltsame Bekämpfung illegalisierter Migration) oder ist nur sehr schwer sichtbar zu machen (z. B. umfassende Überwachung oder Cyberattacken). Drastische Auswirkungen hat diese Forschung also allemal, nur eben vorwiegend auf die Menschen in den Ländern des globalen Südens oder in gesellschaftlichen Randgruppen (z. B. migrierend und mit Migrationshintergrund, politische Aktivist_innen, von Armut Bedrohte usw.).

Der kategorische Imperativ von Hans Jonas, den er in seinem Hauptwerk *Das Prinzip Verantwortung* (Jonas 1984) für eine „technologische Zivilisation“ formuliert, kommt sehr gut ohne eine Unterscheidung zwischen Ländern und gesellschaftlichen Gruppen aus: „Handle so, daß die Wirkungen deiner Handlung verträglich sind mit der Permanenz echten menschlichen Lebens auf Erden“(Jonas 1984, S. 36). Er eignet sich damit als Ansporn dafür, dass wir uns als Forscher_innen auch innerhalb der Mathematik, der Informatik und der technischen Wissenschaften mit wissenschaftsethischen Fragestellungen befassen sollten. Es ist schlicht absurd sich auf die Gesellschaft zu stützen wann immer sie gebraucht wird (z. B. staatliche Grundmittelfinanzierung oder Begründung des Nutzens eines Forschungsvorhabens), sie dagegen fallen zu lassen, wenn eine kritische, diskursive Auseinandersetzung mit dem eigenen Wirken angebracht wäre (z. B. die Unbescholtenheit der „reinen“ Mathematik und die Abgabe von Verantwortung an die Anwender_innen von Forschungsergebnissen).

Die in diesem Aufsatz angestellten Beobachtungen zur Verquickung zwischen Mathematik und Krieg stellen eine Facette dieser Idee dar. In der chronologischen

17. Chemisch, Biologisch, Radiologisch und Nuklear

18. wie beispielsweise im Falle des Embryonenschutzgesetzes, der Bio- oder der Chemiewaffenkonvention

Einführung 2.1 sowie den zwei tiefergehenden anschließenden Beispielen 2.2 und 2.3 wurde umrissen, wie die aktuelle mathematische Forschung in die moderne Kriegsführung hinein wirkt. Dabei können die dargestellten Forschungsergebnisse von großer Bedeutung in den oben genannten problematischen Anwendungsfeldern sein – wie beispielsweise die Ergebnisse zum diskreten Logarithmus für offensive Aktionen der neuen Cybertruppe der Bundeswehr¹⁹ und die Optimierung der Satellitenüberwachung in internationalen Kriegseinsätzen sowie der Migrationsbekämpfung im Mittelmeer²⁰. Darauf aufbauend wurde in 3.2 die Arendtsche Auffassung von Verantwortung und dem Wahrnehmen von Verantwortung mit einer Wissenschaftsethik in der Mathematik in Verbindung gesetzt. Gerade der konstruktive, sehr achtsame Ansatz, den Hannah Arendt mit der Formulierung ihres Verantwortungsbegriffes verfolgt, scheint gut geeignet für die Idee der Wissenschaftsverantwortung. Denn sie misst einerseits der Unabsehbarkeit der Folgen unserer Taten große Wichtigkeit bei, andererseits spricht sie mit ihren Ideen zum „Vergeben“ und „Verzeihen“ von einer praktikablen gemeinschaftstauglichen Lösungsmöglichkeit. Die Mathematik hat noch einen weiten Weg bis zu einer wirklich reflektierten Forschungspraxis vor sich. Und der Einfluss mathematischer Forschung auf die moderne Kriegsführung ist dabei nur ein Teilaspekt. Weitere interessante Fragestellungen wären zum Beispiel: Welche zusätzlichen gesellschaftlichen Auswirkungen hat mathematische Forschung? Welchen Einfluss haben Anwendungsbereiche auf die mathematische Forschung und Lehre? Welche Transformationen haben innerhalb der Mathematik bereits stattgefunden? Und welche Rolle spielt dabei der allgemeine Trend einer Ökonomisierung des Forschungssektors?

Literaturverzeichnis

- Adrian, David, Karthikeyan Bhargavan, Zakir Durumeric, Pierrick Gaudry, Matthew Green, J. Alex Halderman, Nadia Heninger et al. 2015. Imperfect Forward Secrecy: How Diffie-Hellman Fails in Practice. In *22nd ACM Conference on Computer and Communications Security*.
- Arendt, Hannah. 2013. *Vita activa oder Vom tätigen Leben*. Piper Verlag.
- Babovsky, Hans. 1998. *Die Boltzmann-Gleichung: Modellbildung – Numerik – Anwendungen*. Springer.

19. vgl. z. B. Bundesministerium der Verteidigung 2016

20. vgl. z. B. *Einsatz der Bundeswehr beim Kampf gegen den „IS“ über Syrien / Irak und in See o.Dat. und Gegen Schleusernetzwerke - Der Einsatz im Mittelmeer o.Dat.*

- Bauer, Craig. 2013. *Secret History: The Story of Cryptology*. Chapman & Hall / CRC.
- Booß-Bavnbek, Bernhelm, und Jens Høyrup, Hrsg. 2003. *Mathematics and War*. Birkhäuser Verlag.
- Brumley, Billy Bob, und Nicola Tuveri. 2011. Remote Timing Attacks Are Still Practical. In *Computer Security – ESORICS 2011: Proceedings of the 16th European Symposium on Research in Computer Security*, herausgegeben von Vijay Atluri und Claudia Diaz, 355–371. Springer.
- Bundesministerium der Verteidigung. 2016. *Abschlussbericht Aufbaustab Cyber- und Informationsraum*.
- Deuffhard, Peter. 2014. Mathematik und Rüstungsforschung – anekdotisch. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 22 (1): 8.
- Dorf, Richard C., und Robert H. Bishop. 2011. *Modern Control Systems*. Prentice Hall.
- Edwards, Paul N. 1996. *The Closed World: Computers and the Politics of Discourse in Cold War America*. The MIT Press.
- Europäische Kommission. 2011. *PLATO-N – Final Publishable Activity Report*.
- Gamkrelidze, Revaz. 2003. Discovery of the Maximum Principle in Optimal Control. *Mathematics and War*.
- Gruber, Thomas. 2018. *Verquickung der mathematischen und informatischen Forschung an zivilen deutschen Hochschulen mit der modernen Kriegsführung*. Dissertation. Noch nicht veröffentlicht.
- Jonas, Hans. 1984. *Das Prinzip Verantwortung: Versuch einer Ethik für die technologische Zivilisation*. Suhrkamp Verlag.
- Jungnickel, Dieter. 1993. *Finite fields: Structure and Arithmetics*. BI-Wissenschaftsverlag.
- Kahn, David. 1996. *The Codebreakers: The Story of Secret Writing*. Simon & Schuster.
- Kjeldsen, Tinne Hoff. 2003. New Mathematical Disciplines and Research in the Wake of World War II. *Mathematics and War*.
- Knauer, Matthias, und Christof Büskens. 2010. Optimization of Satellite Constellations. In *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2008*, 919–924. Springer.

- Lenstra, Arjen K., und Hendrik W. Lenstra Jr., Hrsg. 1993. *The Development of the Number Field Sieve*. Springer.
- Lidl, Rudolf, und Harald Niederreiter. 1997. *Finite Fields*. Cambridge University Press.
- Mathematisches Institut Tübingen. Ohne Jahresangabe. *Rede Kamkes im Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen vom 23. bis 27. September 1946*.
- Nickel, Gregor. 2006. Ethik und Mathematik - Randbemerkungen zu einem prekären Verhältnis. *Neue Zeitschrift für Systematische Theologie und Religionsphilosophie* 47:412–429.
- . 2012. „Stör mir meine Kreise nicht!“ Mathematik und die Tübinger Zivilklausel. In *Zivilklauseln für Forschung, Lehre und Studium*, herausgegeben von Thomas Nielebock, Simon Meisch und Volker Harms, 225–236. Nomos.
- . 2014. Finanzmathematik – Prinzipien und Grundlagen? Nachruf auf einen Zwischenruf. *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* 4:97–105.
- Bernstein, Daniel J., und Tanja Lange. o.Dat. *SafeCurves: choosing safe curves for elliptic-curve cryptography*. <http://safecurves.cr.yt.to>.
- About PLATO-N*. o.Dat. http://www.plato-n.org/about_plato_n.
- PLATO-N – Work Packages*. o.Dat. http://www.plato-n.org/about_plato_n/Work-Packages.
- Optimierung von Satellitenkonstellationen*. o.Dat. <http://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/detail.php?id=7907>.
- Optimierung von Beobachtungszeitplänen für optische Satelliten*. o.Dat. <http://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/detail.php?id=5552>.
- Einsatz der Bundeswehr beim Kampf gegen den „IS“ über Syrien / Irak und in See*. o.Dat. <https://tinyurl.com/mo5j3wm>.
- Gegen Schleusernetzwerke - Der Einsatz im Mittelmeer*. o.Dat. <https://tinyurl.com/y7bgqacl>.
- Die Mathematik fliegt mit*. 2009. <https://eam.fau.de/de/news-events/pr-public-outreach/einzelne-pressemitteilungen/article/die-mathematik-fliegt-mit/>.
- Technologiepreis für Mathematiker Christof Büskens*. 2008. <https://tinyurl.com/yd5bt8t8>.

- OHB-System AG mit Technologiepreis geehrt*. 2008. http://www.ohb.de/media-relations/pressemitteilungen-detail/ohb-pm_loehn-preis.html.
- Remmert, Volker R. 2004a. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im "Dritten Reich": Fach- und Parteipolitik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12 (4): 223–245.
- . 2004b. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im "Dritten Reich": Krisenjahre und Konsolidierung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12 (3): 159–177.
- Sächsische Staatsregierung. 2013. *Militärische und sicherheitstechnische Forschung in Sachsen seit 2009*. Antwort der Staatsregierung auf die Kleine Anfrage des Abgeordneten Karl-Heinz Gerstenberg (GRÜNE). Drucksache 5/12635.
- Scharlau, Winfried. 2007. *Wer ist Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität - Eine Biographie: Teil 1: Anarchie*. Books on Demand.
- . 2010. *Wer ist Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität - Eine Biographie: Teil 3: Spiritualität*. Books on Demand.
- Segal, Sanford L. 2003. *Mathematicians under the Nazis*. Princeton University Press.
- Siegmund-Schultze, Reinhard. 2003. Military Work in Mathematics 1914 - 1945: An Attempt at an International Perspective. *Mathematics and War*.
- Stinson, Douglas R. 2006. *Cryptography: Theory and Practice, Third Edition*. Chapman & Hall/CRC.
- Swenson, Christopher. 2008. *Modern Cryptanalysis: Techniques for Advanced Code Breaking*. John Wiley & Sons.
- Tichatschke, Rainer. 2008. *"Auf den Schultern von Giganten" – Zur Geschichte der Mathematischen Optimierung*. Forschungsbericht.
- Tietjen, Jan, Christof Büskens und Matthias Knauer. 2008. Time Schedule Optimization of Satellites. In *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 8:10805–10806. WILEY-VCH.

„Die Logik ist in der That nichts
als bloßer Formalismus. . . “

Zu einer Episode in der Geschichte
des Begriffs ‚formale Logik‘

Anna-Sophie Heinemann

1 Was heißt hier ‚formale Logik‘ ?

Was ist formale Logik? Ist formale Logik *per se* symbolische Logik? Ist formale Logik zugleich mathematische Logik? Fragen dieser Art sind keineswegs einfach zu beantworten. Denn die Ausdrücke ‚formale Logik‘, ‚symbolische Logik‘ und ‚mathematische Logik‘ sind zwar in diversen Kontexten so geläufig, dass sie häufig zur Charakterisierung oder gar Rechtfertigung bestimmter Verfahrensweisen und Ergebnisse wissenschaftlichen Schließens herangezogen werden. Ihre jeweilige Bedeutung jedoch wird dabei selten eigens expliziert; vielmehr zeigt sich ihre zweckgemäße Interpretation im Normalfall anhand der Sprachspiele ihrer Verwendung. Dabei gilt insbesondere für den Terminus ‚formale Logik‘: Die Kennzeichnung ‚formal‘ wird auf die Logik in einer ganzen Reihe unterschiedlicher Sinngebungen angewandt, die zwar allem Anschein nach in unterschiedlichen Gradabstufungen miteinander verwandt sind, jedoch nicht grundsätzlich in eins gesetzt werden können.

Catarina Dutilh Novaes etwa macht in einem Beitrag aus dem Jahre 2011 den Vorschlag, im Allgemeinen mindestens das folgende Kriterium zur Gruppierung von Bedeutungen des Terminus ‚formal‘ in Anschlag zu bringen: Einige seiner Verwendungsweisen beziehen sich in gewisser Weise darauf, *was* etwas *ist*; andere wiederum sind eher als Charakterisierung dessen zu verstehen, was oder *wie* etwas oder jemand etwas *tut*.

- (I) Der erste Aspekt (hier unter (I) zusammengefasst) leitet sich Dutilh Novaes zufolge von der aristotelischen Unterscheidung zwischen ‚Form‘ und ‚Materie‘ her. Der Gegenbegriff zu ‚formal‘ ist in diesem Fall ‚material‘.¹ ‚Form‘ ergibt sich aus der Abstraktion von ‚Materie‘.² Dem so charakterisierten Cluster von Bedeutungen lässt sich unter anderem die Interpretation von ‚formal‘ im Sinne einer „de-semantification“ zuordnen.³
- (II) Dem gegenüber steht die maßgebliche Gemeinsamkeit von Bedeutungsnuancen des zweiten Interpretationsrahmens (hier unter (II) zusammengefasst). In diesem Fall steht ein normativer oder präskriptiver Aspekt im Vordergrund; es geht um Operationen oder Tätigkeiten, die gewissen (zumeist explizit formulierten) Regeln oder Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Als Gegenbegriff zu ‚formal‘ ließe sich hier ‚informal‘ (oder gar ‚informell‘) anführen.⁴ In diesen Bereich fällt laut Dutilh Novaes unter anderem die Interpretation von ‚formal‘ als „computable“.⁵

Zwischen beiden Interpretationsrahmen gibt es offensichtlich auch Affinitäten: Eine „computable“ Logik kann wohl am besten dann ‚mathematisch‘ betrieben werden, wenn sie unter syntaktischen Gesichtspunkten betrachtet wird und „de-semantifizierte“ Inskriptionen von Zeichen ‚symbolisch‘ prozessiert. Eine in diesem Sinne ‚formale‘ Logik dürfte wohl sowohl als ‚symbolisch‘ als auch als ‚mathematisch‘ gelten. Doch insbesondere in diesem Fall ist die Historizität der Logik als Disziplin in Rechnung zu stellen. So ist wohl eine „de-semantification“ erst möglich, seitdem man über eine klare Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik verfügt; und wie Dutilh Novaes selbst bemerkt, wird die Logik erst „computable“ im engeren Sinne, seitdem sie eine Definition von Rekursivität in Anschlag bringt.⁶ Als ‚formale Logik‘ rubriziert werden nun allerdings auch viele Beiträge von historischen Autoren, die weder zwischen Syntax und Semantik unterscheiden noch über die Definition von Rekursivität verfügen. Lassen sich auch hier die Interpretationsrahmen (I) und (II) anwenden, und gibt es Affinitäten zwischen beiden?

Im Sinne einer Detailstudie zur Beantwortung von Fragen wie der eben formu-

1. Dutilh Novaes (2011), 304.

2. Dutilh Novaes (2011), 306.

3. Dutilh Novaes (2011), 303.

4. Dutilh Novaes (2011), 304. Zu (II) gehören bei Dutilh Novaes (unter Rekurs auf Searle’sche Terminologie) Bezüge sowohl auf Regeln regulativer als auch auf Regeln konstitutiver Art. Dementsprechend müssten nicht nur Bedeutungen einbezogen werden, die Tätigkeiten zu gewissen Zwecken regulieren oder reglementieren, sondern auch solche Regeln oder Gesetzmäßigkeiten, die eine Tätigkeit oder ein Verfahren überhaupt erst als eben diese Tätigkeit definieren. Im Rahmen des vorliegenden Beitrags wird diese letztgenannte Bedeutung von ‚formal‘ aus (II) ausgeschlossen. Der Grund hierfür wird am Ende des obigen Einleitungsabschnitts dargelegt.

5. Dutilh Novaes (2011), 303.

6. Dutilh Novaes (2011), 321.

lierten schlägt der vorliegende Beitrag ein wenig gelesenes Kapitel der Geschichte des Begriffs ‚formale Logik‘ im 19. Jahrhundert auf. Dessen Inhaltsangabe lautet folgendermaßen: Vorherrschend sind auf den ersten Blick Bedeutungen der Kennzeichnung der Logik als formal, die sich im Interpretationsrahmen der ‚substanziellen‘ Gegenüberstellung von Form und Materie, also anhand von (I), erschließen lassen. Doch ein zweiter Aspekt tritt zunehmend klarer hervor: Die Kennzeichnung der Logik als formal ist auch im Sinne der ‚operationalen‘ Interpretation mit Blick auf Tätigkeiten oder Prozesse und deren Reglementierung, also im Sinne von (II), zu verstehen. Allerdings wird eine Logik in diesem Sinne historisch betrachtet nicht etwa als Gegenprogramm zur vorher benannten Konzeption präsentiert. Vielmehr überlagern sich die beiden Interpretationsweisen als Aspekte ein- und derselben Logikkonzeption. Interessant ist deshalb vor allem, aus welchen Gründen und vor welchen Hintergründen die operationale Auffassung die substanzielle ergänzt.

Um Gründen und Hintergründen der eben skizzierten Entwicklung auf die Spur zu kommen, ist es hilfreich, eine weitere Klassifikation von Bedeutungen des Terminus ‚formal‘ zu berücksichtigen: John G. Macfarlane unterscheidet in seiner Dissertation mit dem Titel *What Does it Mean to Say That Logic is Formal?* aus dem Jahr 2000 zwischen drei unterschiedlichen Bedeutungen von ‚formal‘. Er nennt sie ‚1-formal‘, ‚2-formal‘ und ‚3-formal‘. Diese drei Begriffe unterscheiden sich voneinander folgendermaßen:

- (1) Die Logik als 1-formal zu bezeichnen, bedeutet nach Macfarlane, dass die Logik „constitutive norms for thought as such“ bereit stellt.⁷ Macfarlanes Verwendung des Ausdrucks ‚konstitutiv‘ legt eine Interpretation der Bestimmung der ersten Bedeutung von ‚formal‘ nahe, der zufolge was auch immer als Denken gilt, eben nur aufgrund der angeführten Normen als Denken gelten kann. Dies aber bedeutet, dass das Denken gegen diese Normen überhaupt nicht verstoßen kann. Sie sind konstitutiv, d. h. Bedingungen der Möglichkeit von Denken.
- (2) Die Logik als 2-formal zu bezeichnen, bedeutet Macfarlane zufolge, dass sie „indifferent to distinguishing features of different objects“ ist.⁸ Diese Formulierung legt nahe, dass es für die Logik unerheblich ist, auf welche Gegenstände sie bezogen wird, d. h. welche Themen oder Gegenstandsbereiche logisch geordnet werden sollen. Die Bestimmung der zweiten Bedeutung von ‚formal‘ kann daher auch dahingehend interpretiert werden, dass eine Beziehung zwischen Sätzen, sofern sie eben logischer Art ist, sich nicht unterscheidet von gleichartigen Beziehung zwischen anderen Sätzen. Mit anderen Worten: Für

7. Macfarlane (2000), 27.

8. Macfarlane (2000), 27.

ihre logischen Beziehungen ist es unerheblich, von welchen jeweils bestimmten Objekten oder Sachverhalten Sätze sprechen.

- (3) Die Logik als 3-formal zu bezeichnen schließlich bedeutet bei Macfarlane: Sie „abstracts entirely from the semantic *content* of thought“.⁹ Diese letzte Begriffsbestimmung scheint sich als naheliegende Weiterführung der zweiten darstellen zu lassen: Wenn es für logische Beziehungen unerheblich ist, von welchen jeweils bestimmten Objekten oder Sachverhalten Sätze sprechen, dann kann man letztlich darauf verzichten, den Inhalten der Sätze überhaupt irgendeine Bestimmtheit zu geben. Logische Beziehungen zwischen Sätzen brauchen also keine Spezifikation der Referenz der Sätze, und sie sind unabhängig von den Bedeutungen der in den Sätzen eingesetzten Wörter. (Die dritte Bedeutung spezifiziert demnach die zweite unter Bezug auf die Unterscheidung von Syntax und Semantik. Da die im Folgenden zu besprechenden Ansätze über diese Unterscheidung nicht explizit verfügen, wird diese dritte Bedeutung zunächst eingeklammert.)

Im Folgenden wird die Hypothese motiviert, dass sich im 19. Jahrhundert Bedeutungen aus Dutilh Novaes' Interpretationsrahmen (I) mit Bedeutungen aus dem Interpretationsrahmen (II) koppeln lassen, weil die Logik nicht mehr in Macfarlanes Sinne als 1-formal begriffen wird. Eine 1-formale Logik ist als Wissenschaft der notwendigen Gesetze oder gar der Bedingungen der Möglichkeit des Denkens zu verstehen. Die Verabschiedung dieses konstitutiven Aspekts zugunsten eines präskriptiven Logikverständnisses jedoch erweist sich als maßgeblich für manche Versuche, die Regeln der Logik zwar ihrem Ursprung nach in Macfarlanes Sinne als 2-formal und folglich im Interpretationsrahmen (I) zu konzipieren, sie aber durchaus zugleich im Sinne des Interpretationsrahmens (II) als Instrumente zur Lösung logischer Probleme und als Analoga zu mathematischen Regeln zu begreifen, die unterschiedliche symbolische Darstellungsweisen erlauben.

Die Angemessenheit der eben formulierten Hypothese wird im vorliegenden Beitrag exemplifiziert anhand eines spezifischen Diskursbeitrages – vorgelegt vom Leipziger Mathematiker und Philosophen Moritz Wilhelm Drobisch im Jahre 1836. In einem ersten Teil wird die begriffsgeschichtliche Ausgangsposition des Konzepts ‚formaler Logik‘ unter Rekurs auf Dutilh Novaes' und Macfarlanes Differenzierungen skizziert. Nach einem Zwischenfazit wird Drobischs Beitrag im Detail besprochen. Die Einordnung anhand des mit Dutilh Novaes und Macfarlane eingeführten Beschreibungsvokabulars wird im anschließenden Fazit geleistet.

9. Macfarlane (2000), 27; Hervorh. i. Orig. Alle Hervorhebungen, die aus zitierten Originaltexten übernommen werden, werden im Folgenden nicht zusätzlich dahingehend gekennzeichnet.

2 ‚Formale Logik‘: zur begriffsgeschichtlichen Kontextualisierung

In seiner im vorangehenden Abschnitt zitierten Dissertation vertritt Macfarlane die These, dass die von ihm differenzieren Interpretationen des Ausdrucks ‚formal‘ nicht äquivalent sind.¹⁰ Macfarlane ist des Weiteren der Meinung, dass sie durchaus unabhängig voneinander vertreten werden können. Dennoch gibt es laut Macfarlane Fälle, in denen die drei (oder zumindest zwei) Bedeutungen zusammenfallen; als paradigmatisch nennt Macfarlane hier Kant.¹¹

Macfarlane ist der Meinung, dass Kant die Logik im Wesentlichen als 3-formal versteht.¹² (Wie bereits in der Einleitung angedeutet, wird die Bedeutung des Ausdrucks ‚3-formal‘ im Rahmen des vorliegenden Beitrags zunächst auf diejenige des Ausdrucks ‚2-formal‘ reduziert, da die Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik nicht zur Verfügung steht. Macfarlanes These müsste dann dahingehend gelesen werden, dass Kant die Logik als 2-formal versteht – also dahingehend, dass die Logik unabhängig von jeglicher Bestimmtheit der thematisierten Gegenstände ist.) Wenn Kant aber von allgemeiner Logik spricht, spricht er Macfarlane zufolge von einer Logik, die 1-formal ist.¹³ Kants allgemeine Logik bezöge sich demnach auf konstitutive Normen als Bedingungen der Möglichkeit des Denkens. Die Koinzidenz der beiden Bedeutung von ‚formal‘ will Macfarlane hierbei in (oder aufgrund) der Kantischen Transzendentalphilosophie erkennen: „Kant believes that general logic must be formal because, in the context of his transcendental philosophy, 1-formality *implies* 3-formality“.¹⁴

Die von Macfarlane nahegelegte Kant-Interpretation lässt sich nun folgendermaßen zusammenfassen: In transzendentaler Hinsicht thematisiert Kant Formen des Denkens *qua* Bedingungen der Möglichkeit des Denkens; Denkformen sind die konstitutiven Normen, ohne welche Denken überhaupt nicht möglich – oder eben gar kein Denken wäre. Kants allgemeine Logik hingegen zeichnet sich aus durch ihre (mit Dutilh Novaes gesprochen) „indifference to particulars“. Macfarlane glaubt, dass der Grund hierfür in Kants transzendentalen Überlegungen liegt: Insofern die Logik von Formen des Denkens als konstitutiven Faktoren der Materie des Denkens abhängt, ist es letztlich unerheblich, auf welche Gegenstände (bzw. mittels welcher Semantik) sie angewandt wird.

10. Macfarlane (2000), 27.

11. Macfarlane (2000), 27.

12. Macfarlane (2000), 28.

13. Macfarlane (2000), 28.

14. Macfarlane (2000), 28. Von der Bedeutung ‚2-formal‘ ist hier übrigens keine Rede mehr.

Macfarlanes Interpretation der Kantischen Position erklärt nun allerdings nicht, weshalb und inwiefern in diversen Logikbüchern *nach* Kant zwar sowohl von Denkformen die Rede ist, die von aller Materie des Denkens abstrahiert werden, d. h. die 2-formal im Rahmen (I) sind, sich aber zugleich eine Tendenz dahin erkennen lässt, zum Ausdruck der Denkformen (ggf. sogar alternative) Formalismen zu erfinden, für die bestimmte Umformungs- und Rechenregeln gelten, die also im Rahmen (II) zu interpretieren sind. Da die letzteren Regeln nun allerdings ‚richtig‘ oder ‚verkehrt‘ eingesetzt werden können, sind sie offensichtlich nicht 1-formal, d. h. nicht konstitutiv für das Denken im Allgemeinen.

Um sich möglichen Erklärungen für derartige Entwicklungen zu nähern, bedarf Macfarlanes Deutung von Kants Logik zunächst einiger Qualifikationen, anhand derer ersichtlich wird, in welche Richtungen der an Kant anschließende historische Diskurs um die Bestimmung des Begriffs der Logik verlief. Diese Qualifikationen sollen im Folgenden vorgenommen werden.

2.1 Kantische Reminiszenzen

Kant begreift die Logik grundsätzlich als die „Wissenschaft der Verstandesregeln überhaupt“.¹⁵ Die Bestimmung der allgemeinen Logik, auf die Macfarlane referiert, ergibt sich aus Kants Unterscheidung des „allgemeinen“ vom „besondern Verstandesgebrauch[]“.¹⁶ Da sich der besondere Verstandesgebrauch darauf richtet, über bestimmte Sorten „von Gegenständen richtig zu denken“,¹⁷ sind seine Regeln offensichtlich nicht 2-formal (bzw. 3-formal) in Macfarlanes Sinne. Vielmehr sind sie abhängig davon, worauf sie angewandt werden. Vermutlich sind sie auch nicht 1-formal oder konstitutiv, denn über die je relevanten Gegenstände „richtig“ nachgedacht werden kann, dann muss wohl grundsätzlich auch die Möglichkeit, ‚verkehrt‘ darüber nachzudenken – also gegen die betreffenden Regeln zu verstößen.

Kants Logik des „allgemeinen Verstandesgebrauchs“ hingegen „enthält die notwendigen Regeln des Denkens, ohne welche gar kein Gebrauch des Verstandes stattfindet“.¹⁸ Sie ist also allem Anschein nach in der Tat 1-formal. Auch ist sie wohl 2-formal (bzw. 3-formal), denn die konstitutiven Regeln des Denkens enthält sie „unangesehen der Verschiedenheit der Gegenstände, auf welche er [d. h. der Verstand bzw. der Verstandesgebrauch] gerichtet seyn mag“.¹⁹ Die allgemeine Logik

15. Kant (1787), 76.

16. Kant (1787), 76.

17. Kant (1787), 76.

18. Kant (1787), 76.

19. Kant (1787), 76.

konstituiert und reglementiert demnach das Denken mittels „des Verstandes und der Vernunft“ – aber eben „nur in Ansehung des Formalen ihres Gebrauchs, der Inhalt mag seyn welcher er wolle“.²⁰

Was hat die Logik nun aber mit Kants Transzendentalphilosophie zu tun? Die allgemeine Logik betrachtet „die logische Form im Verhältnisse der Erkenntnisse auf einander“.²¹ Nun gibt es für Kant aber unterscheidbare Arten von Erkenntnissen. Eine transzendente Erkenntnis nennt Kant eine Erkenntnis, „dadurch wir erkennen, daß und wie gewisse Vorstellungen [...] lediglich a priori angewandt werden, oder möglich seyn“.²² Transzendente Erkenntnisse haben also keine Gegenstände in der Empirie. Nichtsdestoweniger *haben* sie Gegenstände, und zwar Bedingungen der Möglichkeit von Vorstellungen oder Begriffen, sofern diese wiederum auf Gegenstände angewandt werden. Der spezifische Gegenstand transzendentalen Erkenntnisbestrebens ist also der „Ursprung unserer Erkenntnisse von Gegenständen“, und zwar „so fern er nicht den Gegenständen zugeschrieben werden kann“.²³ Um nun aber zu transzendentalen Erkenntnissen zu gelangen, bedarf es gewisser Regeln, über eben *diesen* spezifischen Gegenstand *richtig* nachzudenken. Die Bemühung um transzendente Erkenntnis ist daher ein Fall von *besonderem* Verstandesgebrauch. Die Regeln dafür müssen sich dementsprechend in einer Logik des besonderen Verstandesgebrauchs finden. Eben diese Logik ist Kants transzendente Logik. Gerade die transzendente Logik zählt also zu denjenigen Wissenschaften, „in der man *nicht* von allem Inhalt der Erkenntniß abstrahirt[]“.²⁴ Die transzendente Logik ist demnach nicht 2-formal (bzw. 3-formal) in Macfarlanes Sinne: Sie ist nicht unabhängig von den Gegenständen ihrer Anwendung. Die transzendente Logik selbst ist aber offensichtlich auch nicht 1-formal: Sie *thematisiert* zwar die Frage, wie konstitutive Bedingungen des Denkens über Gegenstände oder Denkformen erkannt werden können, aber sie *liefert* nicht diese Denkformen. Vielmehr setzt sie sie bereits voraus – wie jede Logik des besonderen Verstandesgebrauchs die Denkformen des allgemeinen Verstandesgebrauchs als Minimalbedingungen notwendig voraussetzt.

Es ergibt sich folgender Befund: Kants allgemeine Logik ist sowohl 1-formal als auch 2-formal (bzw. 3-formal). Sie enthält die konstitutiven Bedingungen des Verstandesgebrauchs, und sie ist unabhängig von jedweden Anwendungen. Die transzendente Logik aber ist weder 1-formal noch 2-formal (bzw. 3-formal). Sie setzt die konstitutiven Bedingungen des Denkens voraus und ist selbst nicht unabhängig von der Anwendung auf einen spezifischen Gegenstandsbereich. Aus diesem

20. Kant (1787), 79.

21. Kant (1787), 79.

22. Kant (1787), 80.

23. Kant (1787), 80.

24. Kant (1787), 80; Hervorh. ASH.

Befund leitet sich eine problematische Konsequenz mit zwei Facetten ab: Erstens obliegen auch die Regeln der transzendentalen Logik und die Möglichkeit transzendentaler Erkenntnisse den Bedingungen der allgemeinen Logik; andernfalls wäre sie als Logik überhaupt nicht möglich. Mit anderen Worten: Die Logik begründet die Transzendentalphilosophie, nicht umgekehrt. Begreift man nun aber transzendente Fragen als Transformationen von traditionell der Metaphysik zugeordneten Problemstellungen, dann obliegt die Transzendentalphilosophie auch *qua* (transformierte) Metaphysik den Bedingungen der allgemeinen Logik. Die Logik konstituiert also auch die Metaphysik, nicht etwa umgekehrt. Jede Antwort auf Fragen nach Bedingungen des Erkennens und/oder/als Bedingungen des Seins ist folglich eingeschränkt durch die allgemeine Logik.

Die soeben aufgewiesene Konsequenz aus Kants Bestimmungen des Verhältnisses von Logik und Transzendentalphilosophie wurde bereits von Kants Zeitgenossen kontrovers diskutiert und rief im Laufe der Historie Gegenpositionen auf den Plan. Prominente Kritiker des Kantischen Ansatzes hielten tendenziell an der Idee eines konstitutiven Charakters der Logik fest, gaben aber die Annahme auf, sie sei gänzlich unabhängig von Gegenständen. Dieser Schritt erlaubte es, Logik und Metaphysik gleichermaßen als gegenstandsgebunden zu verstehen und beide im Verbund nicht konstitutiv nur fürs Denken, sondern auch fürs Sein zu machen. Die zu Beginn des 19. Jahrhundert wohl prominenteste Position dieser Art war die von Georg Wilhelm Friedrich Hegel. Hegels Ansatz wird im Folgenden knapp skizziert.

2.2 Hegelsche Reminiszenzen

Hegel war von der Möglichkeit einer Logik überzeugt, welche etwaige Antworten auf (ehemals) metaphysische Fragen nicht einschränkt, sondern vielmehr eine Erweiterung ermöglicht, indem sie als Bindeglied zwischen Verstandesgebrauch und Sein fungiert. So kritisiert Hegel in der Vorrede zum ersten Band der *Wissenschaft der Logik* die aktuelle Vernachlässigung der „logische[n] Wissenschaft“, insofern sie „die eigentliche Metaphysik oder reine speculative Philosophie ausmacht“ und behauptet die „Nothwendigkeit, mit dieser Wissenschaft wieder einmal von vorne anzufangen“.²⁵ Hegels Überlegungen zur Logik gehen dabei aus von einer gewissen Vorläufigkeit von Regeln des Verstandesgebrauchs. Hegel ist der Meinung, dass die Vernunft dialektisch über die Verstandesregeln hinauszugehen imstande ist, weil sie die positiv gesetzten „Bestimmungen des Verstands in Nichts auflöst“.²⁶ Somit

25. Hegel (1812), VII.

26. Hegel (1812), VIII.

ist die Vernunft für Hegel „höher als beydes, der [sic!] verständige Vernunft oder vernünftige Verstand“.²⁷

Aufgrund der eben referierten Überlegung befindet Hegel: „[I]n ihrer Wahrheit ist die Vernunft *Geist*“.²⁸ Der Geist aber reicht weiter als solche Erkenntnisweisen, die durch Bedingungen des verstandesgemäßen und vernünftigen Denkens eingeschränkt sind – vielmehr begreift er diese in sich ein und generiert sie. Bereits in dieser Hinsicht verläuft die „geistige Bewegung“ in gewissem Sinne auf einem „sich selbst konstruierenden Wege“.²⁹ Der Weg der geistigen Bewegung konstruiert dabei aber nicht nur das Sein des Verstandes selbst, sondern zugleich das Sein seiner Objekte. Deshalb beruht sowohl „die Entwicklung alles natürlichen“ als auch alles „geistigen Lebens“ gleichermaßen auf der Fortbewegung des Geistes.³⁰ Und die „Fortbewegung“ des Geistes selbst „beruht“, so Hegel, „allein [...] auf der *Natur der reinen Wesenheiten*“.³¹

Vor dem Hintergrund der eben referierten Annahmen ist die Fortbewegung des Geistes für Hegel letztlich auch nichts anderes als „die absolute Methode des Erkennens, und zugleich die immanente Seele des Inhaltes selbst“.³² In diesem Sinne stiftet Hegel die Einheit des Denkens mit dem Sein durch Fortbewegung des Geistes; mit anderen Worten: die ‚Form‘ der Fortbewegung des Geistes und ihr Inhalt, ihre ‚Materie‘, bestimmen sich in gewisser Weise gegenseitig.

Der Verbund von Logik und Metaphysik fungiert hier als konstitutiv oder 1-formal, aber nicht nur für den Verstandesgebrauch, sondern auch für seine Gegenstände – also just weil sie nicht als 2-formal (bzw. 3-formal) begriffen wird. Im Folgenden soll nun allerdings gezeigt werden, dass sich auch andere Tendenzen ausmachen lassen.

2.3 Die „logische Frage“

Kant zufolge ist die Logik in Macfarlanes Sinne 2-formal, weil sie 1-formal ist. Ausgehend von Hegel kann die Logik als 1-formal gelten, weil sie nicht als 2-formal gelten kann. Ein anderer Ansatz jedoch besteht darin, die Logik weiterhin als 2-formal (bzw. 3-formal), aber nicht mehr als 1-formal zu verstehen. Die Logik bleibt dann unabhängig von den Gegenständen ihrer Anwendung durch das Denken. Aber sie wird tendenziell nicht mehr im starken Sinne als *konstitutiv* für das Denken

27. Hegel (1812), VIII.

28. Hegel (1812), VIII.

29. Hegel (1812), IX.

30. Hegel (1812), IX.

31. Hegel (1812), IX.

32. Hegel (1812), IX.

begriffen; vielmehr wird die Ausrichtung des Denkens an logischen Regeln zu einer nachdrücklichen *Forderung*.

Die eben aufgezeigte Inversion des Hegelschen Ansatzes lässt sich historisch gesehen ausgehend von einer Stellungnahme rekonstruieren, die Friedrich Harms aus Kiel zur Mitte der 1840er Jahre machte:

„Wenn der Kantische Criticismus getadelt worden ist, weil er die Metaphysik logisirte, so kann in Wahrheit diese nachkantische Philosophie nicht gelobt werden, weil sie die Logik ontologisirte und mit dieser ontologischen Logik alle Wissenschaften behandelte.“³³

Die Kantische Logisierung der Metaphysik mag zwar von manchen angefochten werden; schließlich bedeutet sie ja eine Einschränkung. Die Alternative aber, eine Hegelsche „ontologische [] Logik“, ist für Harms nicht nur nicht lobenswert, sondern sogar höchst problematisch. Als Grund hierfür führt Harms an, dass sie darauf beruht, „[d]ie logischen Formen des Denkens als die realen Bestimmungen der Dinge an sich zu betrachten“.³⁴ Doch „die behauptete Identität von Denken und Sein“ kann nicht „bewiesen“ oder auch nur begründet werden „von einem Standpunkte, der diese Identität des Denkens mit dem Sein zu seinem Fundamente hat“.³⁵ Anders formuliert: Um die Möglichkeit einer „ontologischen Logik“ nachzuweisen, müsste vorausgesetzt gesetzt werden, dass das Denken mit dem Sein als seinem Gegenstand „übereinstimmen oder von demselben abweichen kann“.³⁶ Wenn nun das Denken aber vom Sein abweichen kann, dann ist es selbstverständlich nicht *per se* mit diesem identisch.

Harms' Kritik an der „ontologischen Logik“ Hegelscher Prägung lässt sich als ein Beitrag zur sogenannten „logischen Frage“ verstehen, die Friedrich Adolf Trendelenburg zu Beginn der 1840er Jahre der wissenschaftlichen Öffentlichkeit stellte.³⁷ Es handelt sich hierbei um die Frage nach Möglichkeit und Legitimität des Weiterbestands „alle[r] Consequenzen, die sich aus Hegel entwickelt haben“,³⁸ sofern sie das Problem betreffen, ob sich die Logik als fundierte Einheitsmethode für alle Wissenschaften anwenden lässt.

Auf die „logische Frage“ wurde in den folgenden Jahren und Jahrzehnten mit unterschiedlichen Antworten reagiert. Auf der einen Seite geht beispielsweise der

33. Harms (1845), 40.

34. Harms (1845), 15-16.

35. Harms (1845), 16.

36. Harms (1845), 16.

37. Eine Auswahlbibliographie von auf die „logische Frage“ bezogenen Stellungnahmen sowie von Beiträgen der Forschung zu ihrer wissenschaftlichen Aufarbeitung wird dem Literaturverzeichnis des vorliegenden Aufsatzes angefügt.

38. Trendelenburg (1843), 26.

Leipziger Philosophie-Professor Conrad Hermann davon aus, dass es durchaus ein „im selbstständigen inneren Denken gegründete[s] Erkennen[]“ des Seins gebe; „unter der logischen Frage“ versteht Hermann dementsprechend „diejenige nach der Methode oder dem formalen Prinzip“ eben dieses Erkennens.³⁹ Das „System der sogenannten gemeinen oder formalen Logik“ ist für Hermann dabei die gemeinhin akzeptierte „Vertretung“ des „methodische[n] Prinzip[s] des wissenschaftlichen Denkens überhaupt“.⁴⁰ Von der Position Hegels unterscheidet sich diese Auffassung nun bloß insofern, als sich Hegel darum bemüht habe, nicht bei „diese[m] gewöhnlichen oder allgemeinen Denkprinzip[] der Logik“ stehen zu bleiben, sondern „ein vollkommen anderes und abweichendes Gesetz oder methodisches Prinzip des Denkens in die Philosophie einzuführen“.⁴¹ Hermann stellt sich die Frage, ob eine Weiterentwicklung der Logik im Hegelschen Sinne zu leisten ist: Er möchte den „ganzen Begriff der logischen Frage der Philosophie in der Gegenwart“ nun „dahin präzisieren“,

„ob das Denkgesetz der gemeinen Logik in der That die höchste, absolute und für sich allein ausreichende Form aller wissenschaftlichen Wahrheit sei oder ob dieses Gesetz insbesondere in seiner Anwendung und Geltung für das Denken der Philosophie in irgend welcher Weise fortgebildet, verändert oder umgestaltet werden müsse“.⁴²

Die bereits von Trendelenburg geforderte Bewertung „alle[r] Konsequenzen, die sich aus Hegel entwickelt haben“, ist für Hermann demnach noch nicht abgeschlossen. Vielmehr scheint Hermann sogar der Ansicht zu sein, dass eben diese Konsequenzen auch die Potenziale zu einer sinnvollen Weiterentwicklung bergen. Hermann argumentiert demnach für eine Stärkung der konstitutiven Funktion der Logik über das bloße Denken hinaus. Aufgrund ihrer Ausdehnung in den Bereich des Seins soll sich grundsätzlich die Möglichkeit ausloten lassen, inwieweit die Logik dem Denken zum Erkennen des Seins verhilft. Da die Logik dann aber nicht nur die Form von Sein und Denken liefert, sondern das Sein auch als Materie des Denkens thematisiert, ist Hermanns Auffassung von Logik offenkundig nicht mehr 2-formal (bzw. 3-formal).

Für eine anders geartete Bewertung der Prinzipien der Logik argumentiert Hermann Ulrici aus Halle. Wie für Harms gilt für ihn der Versuch, in Anlehnung an Hegel mit einer „ontologischen Logik“ alle Wissenschaften zu behandeln, als gescheitert. Dieses Scheitern habe in der wissenschaftlichen Gemeinschaft eine Abkehr von den Hegelschen Anliegen nach sich gezogen; mit dieser Abkehr wiederum

39. Hermann (1878), 2.

40. Hermann (1878), 2.

41. Hermann (1878), 2.

42. Hermann (1878), 3.

sei eine erneute Hinwendung zu erkenntnistheoretischen Problemstellungen einher gegangen, die sich aus der Kantischen Position ergeben.⁴³ Unter diesen Prämissen ist die „logische Frage“ für Ulrici nichts als „die Frage nach Stellung, Fassung und Behandlung der Logik“,⁴⁴ und zwar in erster Linie hinsichtlich ihrer „engsten Beziehung zur Erkenntnistheorie“. ⁴⁵ In der „logische[n] Frage“ als Frage nach der Bestimmung von Möglichkeiten und Grenzen der Fruchtbarmachung der (,formalen‘) Logik für Zwecke der Methodologie des (,materialen‘) wissenschaftlichen Erkenntnisgewinns vertritt Ulrici entsprechend den Standpunkt, dass die Logik nur im Verbund mit einer tiefen Erkenntniskritik⁴⁶ „als erste Grundlegende Disziplin an die Spitze des Systems der Wissenschaften zu stellen“ ist.⁴⁷

Ulricis erkenntniskritischer Ansatz verbietet die Annahme, dass Denken und Sein identisch sind; eine solche These lässt sich von innerhalb der Reichweite des Erkennens oder Denkens aus nicht aufstellen. Somit bezieht Ulrici Position gegen eine Hegelsche „ontologische[] Logik“. Allerdings verweist eine strenge Erkenntniskritik in letzter Konsequenz auch den Versuch in seine Grenzen, „die Metaphysik [zu] logisir[en]“. Ob Metaphysik als Logik betrieben werden kann, lässt sich von innerhalb der Reichweite des Erkennens oder Denkens aus schließlich ebenso wenig endgültig behaupten wie die Übereinstimmung von Sein und Denken. Gerade deswegen aber beansprucht Ulrici, „das Recht der *formalen* Logik“ zu verteidigen.⁴⁸ Doch inwiefern?

Anders als der oben zitierte Conrad Hermann akzeptiert Ulrici nicht die Annahme, die formale Logik sei nur die „Vertretung“ des „methodische[n] Prinzip[s] des wissenschaftlichen Denkens überhaupt“. ⁴⁹ Vielmehr ist die formale Logik aus Ulricis Perspektive allen etwaigen ontologischen, transzendentalen oder methodologischen Nutzbarmachungen vorgeordnet. Jeden „Versuch, die Logik ihres formalen Charakters zu entkleiden und sie mit der Methaphysik [sic!], der Erkenntnistheorie oder Wissenschaftslehre zu identificiren“, hält Ulrici für „ein verfehltes Unternehmen“. ⁵⁰ Schließlich sei die formale Logik auch vorauszusetzen, um selbst anderslautende Behauptungen zu begründen. Ähnlich wie Harms weist Ulrici darauf hin, dass die These, dass „Logik mit der Metaphysik“ zu identifizieren sei, ihrerseits erst zu „beweisen“ ist.⁵¹ „Alles Beweisverfahren aber“, so Ulrici weiter, „gründet sich auf die

43. Ulrici (1869), 1.

44. Ulrici (1869), 1.

45. Ulrici (1869), 1.

46. Ulrici (1869), 3; 5-6; 7.

47. Ulrici (1869), 7.

48. Ulrici (1869), 2.

49. Hermann (1878), 2.

50. Ulrici (1869), 1-2.

51. Ulrici (1869), 6.

Logik“.⁵² Selbst wenn es also eine ontologisch-metaphysische Logik gäbe, müsste ihr „doch eine den Begriff des Beweises und das Beweisverfahren feststellende Logik nothwendig [...] vorausgeschickt werden“⁵³ – und diese selbst wäre eben nicht mit der Metaphysik identisch oder nach deren Inhalten gerichtet.

Doch was macht den „formalen Charakter[]“⁵⁴ dieser Logik aus? Ulricis Antwort fällt folgendermaßen aus: Die Logik ist formal, insofern ihre Regeln „als Formen den verschiedenartigsten, objectiven wie subjectiven, reellen wie ideellen, nothwendigen wie willkürlichen, wahren wie falschen Inhalt befassen“.⁵⁵ Diese Denkvorschriften sind „schlechthin *allgemeiner* Natur“ und betreffen „als Gesetze *jeden* Denkinhalt“.⁵⁶ Zu bedenken gibt Ulrici allerdings, dass „die logischen Denkformen nicht schlechthin isolirt“ auftreten; *contra* Kant lassen sie sich nicht als solche „deduciren noch fassen und erörtern“.⁵⁷ Wenn Ulrici also von formaler Logik spricht, dann meint er offenkundig eine im Kantischen Sinne allgemeine Logik, die allerdings von der Frage nach ihrer konstitutiven Rolle für jede besondere – insbesondere auch die transzendente – Logik abgekoppelt wird. Bei Ulrici ist die Logik also formal, insofern sie 2-formal (bzw. 3-formal) ist; sie wird aber (zumindest tendenziell) nicht mehr als 1-formal begriffen.

Die Positionen Hermanns und Ulricis exemplifizieren folglich die beiden konträren Ansätze zur Auflösung der „logischen Frage“ durch Außerkraftsetzung je einer der laut Macfarlane in Kants allgemeiner Logik zusammenfallenden Bedeutungen von ‚formal‘: Hermann hält die Logik für 1-formal, aber nicht für 2-formal (bzw. 3-formal). Ulrici dagegen konzipiert die Logik als 2-formal (bzw. 3-formal), aber als unabhängig von der Frage, ob sie als 1-formal zu gelten hat.

3 Zwischenfazit

Die anschließende Präsentation von historischem Material zu weiteren Begriffsverschiebungen geht von folgender Hypothese aus: Die Frage nach der 1-Formalität der Logik auszuklammern, ist genau der Schritt, der für den weiteren Verlauf der Geschichte des Begriffs ‚formale Logik‘ maßgeblich ist. Denn während die Logik nicht mehr als 1-formal deklariert wird, hält man an ihrem bestimmenden Charakter fürs Denken fest – aber eben nur, insofern das Denken auf *korrekte* oder

52. Ulrici (1869), 6.

53. Ulrici (1869), 7.

54. Ulrici (1869), 1.

55. Ulrici (1869), 4.

56. Ulrici (1869), 4.

57. Ulrici (1869), 4.

richtige Weise betrieben werden soll. Doch dieser Zug führt dahin, dass an die Stelle von Bedingungen der Möglichkeit des Denkens solche Gesetze oder Regeln rücken, die vom Denken weniger vorausgesetzt denn dem Denken im engeren Sinne vorgeschrieben werden. Die logischen Regeln sind insofern *präskriptiver* statt *konstitutiver* Art.

Dabei muss vorausgesetzt werden, dass es sich bei logischen Regeln eben um solche handelt, gegen die verstoßen werden *kann*; eben deshalb werden sie ja als Vorschriften für richtiges Denken aufgefasst. Wenn gegen logische Regeln aber verstoßen werden kann, dann liegt der Gedanke nahe, dass man *einige* befolgen kann und andere nicht – mit anderen Worten: es wird einer Tendenz zur Pluralisierung der Logik in *unterschiedliche* Regelsysteme Vorschub geleistet. Im 19. Jahrhundert zeigt sich diese Tendenz zur Pluralisierung zunächst in den Darstellungsformen der Logik. Verschiedene Autoren entwickeln unterschiedliche Notationssysteme; manche Autoren wenden mehrere Darstellungsformen an. Auf diesem Wege wird wiederum auch konzeptuell eine Disziplin für die Logik fruchtbar gemacht, die seit jeher mit symbolischen und diagrammatischen Notationssystemen operiert: die Mathematik.

Im Zuge solcher Entwicklungen wird der operationale oder operative Aspekt der Befolgung von logischen Regeln ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt. Die Anwendung logischer Regeln ist leitend für die Tätigkeiten des Denkens und des Schließens. Die Logik ist nicht nur befasst mit allgemeinen *Strukturen* des Denkens, sondern auch mit deren Anwendung in logischen *Operationen*. Logische Operationen werden analog zu mathematischen Operationen aufgefasst. Mit anderen Worten: Da die Logik in Macfarlanes Sinne 2-formal (bzw. 3-formal), aber nicht 1-formal ist, kann ihre Kennzeichnung als formal nicht mehr ausschließlich im Interpretationsrahmen (I) verortet werden, sondern lässt sich auch im Interpretationsrahmen (II) verstehen.

4 ‚Formale Logik‘ bei Drobisch

Um das soeben vorgestellte Narrativ der Entwicklung des Begriffs ‚formale Logik‘ als passend auszuweisen und dabei weiter auszudifferenzieren, wird im Folgenden eine Position zum Problem der Bestimmung der Logik besprochen, die derjenigen Ulricis in manchen Hinsichten nahesteht, jedoch viel früher formuliert wurde. Sie hebt den präskriptiven Aspekt von logischen Regeln gegenüber dem konstitutiven hervor, und zwar zugunsten ihrer operativen Anwendbarkeit; darüber hinaus stellt

sie explizite Analogien zwischen Logik und Algebra her.⁵⁸ Nichtsdestoweniger hält sie an der Auffassung fest, dass die Formen der Logik mittels Abstraktion von ihrer Materie gewonnen werden. Es handelt sich hierbei um die Position von Moritz Wilhelm Drobisch – *nota bene*: einem Kollegen Hermanns in Leipzig.

Im Jahre 1836 bemerkt Drobisch:

„Die Logik ist in der That nichts als bloßer Formalismus, sie will und soll, nichts andres seyn; aber wer sein Denken vollständig auszubilden beabsichtigt, der kann eine exacte Kenntniß dieser Formen nicht entbehren“.⁵⁹

Diese Bemerkung lässt sich als Stellungnahme gegen eine Hegelsche Auffassung von Logik lesen; allerdings legt sie offenkundig zugleich eine Abkehr von Kants Idee der Möglichkeit einer transzendentalen Logik nahe; kennenlernen und ausbilden lassen sich konstitutive Bedingungen der Möglichkeit des Denkens schließlich nicht. Doch darüber hinaus exemplifiziert sie eine Überlagerung mehrerer Bedeutungen von ‚formal‘: Während im zweiten Teilsatz die Rede von „Formen“ ist, die sich allem Anschein nach erkennen, kennen und studieren lassen, scheint der erste Teilsatz zugleich ein Charakteristikum dessen anzugeben, wie Logik optimalerweise funktioniert. Ihr „Formalismus“ setzt also möglicherweise „Formen“ des Denkens voraus; der „Formalismus“ selbst jedoch scheint dieselben ‚Formen‘ zwecks korrekter Anwendung in ‚Formeln‘ zu operationalisieren.

Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, inwieweit sich eine derartige Differenzierung der Bedeutung von ‚formal‘ innerhalb von Drobischs Logikbegriff erkennen lässt. Der Diskussion von Drobischs Logikbegriff wird eine Übersicht seiner akademischen Biographie vorausgeschickt; diese liefert bereits Anhaltspunkte zur Findung unterschiedlicher Faktoren, welche mit Blick auf Drobischs logische Schriften Berücksichtigung finden können.

4.1 Drobisch als Mathematiker und Logiker im Kontext

Moritz Wilhelm Drobisch (1802-1896) gehörte über den langen Zeitraum zwischen 1820 und 1886 hinweg der Universität Leipzig an. Nach seinem Studium der Mathematik und der Philosophie unterrichtete er zunächst als Privatdozent und später als Professor in den fachlichen Kontexten beider seiner ehemaligen Studienfächer.

⁵⁸. Dieser Ansatz wurde von Drobisch offenbar vertreten noch bevor (insbesondere in Großbritannien) die ersten größeren Versuche einer Algebraisierung der Logik erschienen.

⁵⁹. Drobisch (1836), VI.

Dem biographischen Eintrag im Professorenkatalog⁶⁰ der Universität Leipzig zufolge promovierte Drobisch 1824 in Mathematik und habilitierte sich im selben Jahre für Philosophie. Für die folgenden zwei Jahre wird Drobisch als Privatdozent der Philosophie geführt. Vermerken im historischen Vorlesungsverzeichnis⁶¹ nach zu urteilen fungierte er im Wintersemester 1826 als außerplanmäßiger und ab dem Sommersemester 1827 als ordentlicher Professor. Laut Leipziger Professorenkatalog wurde ihm 1826 das Amt eines ordentlichen Professors für Mathematik übertragen; zugleich ernannte man ihn aber zum außerordentlichen Professor für Philosophie. 1842 schließlich wurde er jedoch auch für das Fach Philosophie als ordentlicher Professor berufen; seine Professur für Mathematik gab er letztlich im Jahre 1867 auf.

Seine lange Karriere im universitären Lehrbetrieb begann Drobisch im Wintersemester 1824 mit drei Lehrveranstaltungen. Zwei davon hatten die Geometrie zum Gegenstand, die dritte hingegen behandelte die „Physische“ oder (ab dem Wintersemester 1826) „mathematische“ Geographie. In den folgenden sechs Jahren hielt Drobisch in der Regel drei bis fünf Lehrveranstaltungen pro Semester ab. Er erweiterte sein Lehrangebot im Bereich der angewandten Mathematik um Trigonometrie und Kegelschnitte, um Astronomie, um Mechanik und Statik, um „juristische Arithmetik“ und um Kombinatorik. Je einmal bot er sogar „mathematische Vorbereitungen zur Chemie“ (im Wintersemester 1829) sowie eine Veranstaltung zur „Theorie der Land- und See-Charten“ (im Sommersemester 1831) an. Doch Drobisch unterrichtete auch „reine Mathematik“. In diesem Bereich verbreiterte sich sein Angebot ab 1826 um Differentialrechnung und Integralrechnung sowie um Analytische Geometrie, aber auch um Algebra und die „Theorie der höhern Gleichungen“ (ab dem Wintersemester 1831).

Im Sommersemester 1832 allerdings unterrichtete Drobisch erstmalig „allgemeine Logik“. Im nächsten und übernächsten Sommersemester gab er jeweils eine Einführungsveranstaltung zu Philosophie und Logik. Ab dem Sommersemester 1835

60. Der Professorenkatalog der Universität Leipzig (catalogus professorum lipsiensium) kann als Datenbank online durchsucht werden. Die Startseite ist erreichbar unter: research.uni-leipzig.de/catalogus-professorum-lipsiensium/. Die obigen Angaben sind dem Eintrag zu Drobisch entnommen: research.uni-leipzig.de/catalogus-professorum-lipsiensium/leipzig/Drobisch_1057/ <22.5.2017>.

61. Die historischen Vorlesungsverzeichnisse der Universität Leipzig können online chronologisch oder nach Dozenten geordnet durchsucht werden. Die Startseite der Datenbank findet sich unter der Adresse: histvv.uni-leipzig.de. Drobischs Lehrveranstaltungen sind gelistet unter: histvv.uni-leipzig.de/dozenten/drobisch_mw.html <22.5.2017>. Alle Zitate in der obigen Darstellung von Drobischs Lehrtätigkeit beziehen sich auf Titel von Lehrveranstaltungen in dieser Liste. Den Titeln sind teilweise Angaben zu den Textgrundlagen beigeordnet; da sich solche Angaben hauptsächlich bei Ankündigungen mathematischer Themen finden, werden diese hier vorläufig vernachlässigt.

entkoppelte Drobisch die „Encyklopädie und Methodologie der Philosophie“ für einige Jahre⁶² von seinem Unterricht der Logik. Für die nächsten 50 Jahre (!) bot er Lehrveranstaltungen zu beiden Themen fast durchgehend regelmäßig im Sommersemester an. Doch nicht nur in den Sommersemestern entfielen ab 1832 zumeist eine oder gar zwei von Drobischs Lehrveranstaltungen auf philosophische statt auf mathematische Themen, obgleich er noch seine ordentliche Professur für Mathematik inne hatte und in der Philosophie nur außerplanmäßig beschäftigt war. In den Wintersemestern las er zunächst Psychologie und Metaphysik nach Johann Friedrich Herbart. In etwa ab dem Zeitpunkt seiner Berufung zum ordentlichen Professor der Philosophie zu Beginn der 1840er Jahre unterrichtete er auch die „Theorie der menschlichen Erkenntniß“. In den 1860er Jahren spezifizierte er die Inhalte seiner Lehre unter Bezug insbesondere auf Ansätze von Locke und Leibniz sowie von Hume und Kant.⁶³

In der Mathematik fokussierte Drobisch sein Lehrangebot zwischen 1832 und 1844 zunehmend auf Analytische Geometrie sowie Integral- und Differentialrechnung. Ab Beginn der 1860er Jahre schließlich stellte er seine Lehre im Bereich der Mathematik allmählich ein. Nachdem er seine Professur für Mathematik 1867 niederlegte, bot er ab dem Sommersemester 1868 nurmehr zwei bis drei Lehrveranstaltungen zu philosophischen Themen an.

Sowohl in Anbetracht des Gesamtzeitraums als auch aufgrund der Regelmäßigkeit seiner Bemühungen um den akademischen Unterricht der Logik darf Drobisch als Mathematiker und Philosoph – möglicherweise auch als Mathematikphilosoph, denn im Wintersemester 1841 unterrichtete er einmalig „Zur Philosophie der Mathematik“ – wohl als wichtige Figur der Logikausbildung im Leipzig des 19. Jahrhunderts gelten. Doch die Vorlesungsverzeichnisse lassen erkennen, dass Drobisch nicht der alleinige Verantwortliche für die Lehre in der Logik war. Lehrveranstaltungen zur Logik wurden auch von weiteren Kollegen angeboten, denen jedoch allem Anschein nach Drobischs mathematischer Hintergrund fehlte. So teilte sich Drobisch die Zuständigkeiten für den Unterricht der Logik bereits ab 1833 mit Gustav Hartenstein,⁶⁴ der nach seinem Studium der Theologie, Philologie und Philosophie an der Universität Leipzig im Jahre 1831 promoviert worden war und sich 1833 für Philosophie habilitiert hatte. Nach zwei Jahren als außerplanmäßiger

62. Ab dem Sommersemester 1860 wurden die Themen wieder zur „Einleitung in die Philosophie und Logik“ zusammengelegt.

63. Bereits ab 1838 las Drobisch aber gelegentlich auch Religionsphilosophie. Im Sommersemester 1844 hielt er einmalig „Philosophische Uebungen über Spinoza’s Ethik“ ab. Ab 1859 las er über Ethik und Religionsphilosophie. Sowohl im Sommersemester als auch im Wintersemester 1844 beschäftigte er sich mit Teleologie. Während des letzten Jahres seiner Universitätskarriere schließlich gab Drobisch auch eine Veranstaltung „Ueber die menschliche Willensfreiheit“.

64. Dies lässt sich der Liste von Hartensteins Lehrveranstaltungen entnehmen: histvv.uni-leipzig.de/dozenten/hartenstein_g.html <22.5.2017>.

Professor wurde Hartenstein schließlich im Jahre 1836 als ordentlicher Professor für Philosophie berufen; dieses Amt sollte er im Jahre 1859 niederlegen.⁶⁵ Ab dem Sommersemester 1850 wurde die grundständige Ausbildung in der Logik auch durch einen weiteren Verantwortlichen unterstützt: durch den weiter oben zitierten Conrad Hermann.⁶⁶ Hermann, der Philologie und Philosophie in Leipzig und Berlin studiert hatte, wurde 1846 promoviert. Im Jahre 1849 habilitierte er sich in Leipzig für Philosophie und war anschließend über 10 Jahre als Privatdozent beschäftigt, bis er im Jahre 1860 als außerplanmäßiger Professor für Philosophie eingestellt wurde. 1881 schließlich wurde er zum Honorarprofessor ernannt; dieses Amt behielt er bis zu seinem Lebensende.⁶⁷

Die drei Protagonisten Drobisch, Hartenstein und Hermann scheinen sich um eine durchgängige Abdeckung des Lehrbedarfs im Bereich der Logik bemüht zu haben: Drobischs Debüt im Unterricht der Logik erfolgte im Sommersemester 1832. Im darauf folgenden Sommer lasen sowohl Drobisch als auch Hartenstein über Logik. Ab dem Wintersemester 1833 bis ins Jahr 1848 wechselten sich beide turnusweise ab: Drobisch unterrichtete im Sommersemester, Hartenstein im Winter. Von 1848 bis 1852 suspendierte sich Hartenstein vom Unterricht der Logik; doch wurde der Bedarf ab dem Sommersemester 1850 durch Hermann gedeckt. Dementsprechend überschritten sich im Sommer 1850 Logik-Veranstaltungen von Drobisch und von Hermann. Anschließend übernahm Hermann die Lehre für das Wintersemester, während Drobisch weiterhin im Sommer las. Als Drobisch im Sommersemester 1853 einmalig nicht die Logik unterrichtete, ersetzte ihn wiederum Hartenstein, der – während Hermann von 1854 bis 1855 pausierte – in den folgenden vier Jahren wieder die Winter-Kurse übernahm. Im Sommersemester 1856 kam es nochmals zu einem Parallelangebot von Veranstaltungen Drobischs und Hermanns. Im Wintersemester 1856 unterrichtete erneut Hartenstein. Erst ab dem Wintersemester 1857 las auch Hermann wieder regelmäßig über Logik. Während Drobisch weiterhin in den Sommersemestern unterrichtete, boten in den Wintersemestern 1857 und 1858 sowohl Hartenstein als auch Hermann Logik-Veranstaltungen an. Nachdem Hartenstein im Jahre 1859 auf eigenen Wunsch aus der Universität Leipzig ausschied, las Drobisch die Logik weiter im Sommer und Hermann im Winter.

Unterschiede zwischen den Lehrveranstaltungen insbesondere Drobischs und Her-

65. Die obigen Informationen sind dem Eintrag zu Hartenstein im Professorenkatalog der Universität Leipzig entnommen: research.uni-leipzig.de/catalogus-professorum-lipsiensium/leipzig/Hartenstein_1237/ <22.5.2017>.

66. Dies geht aus der Liste von Hermanns Lehrveranstaltungen hervor: histvv.uni-leipzig.de/dozenten/hermann_c.html <22.5.2017>.

67. Diese Angaben stammen wiederum aus dem Professorenkatalog der Universität Leipzig: research.uni-leipzig.de/catalogus-professorum-lipsiensium/leipzig/Hermann_1245/ <22.5.2017>.

manns lassen sich aufgrund ihrer jeweiligen Publikationen erahnen: Hermann setzte sich in diversen Artikeln mit der Frage nach der Legitimität der Hegelschen Logik auseinander.⁶⁸ Die Ankündigungen von Drobischs Logik-Kursen dagegen enthalten ab 1836 sporadisch den Verweis auf ein eigenes Logik-Lehrbuch. Es handelt sich hierbei um Drobischs *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen. Nebst einem logisch-mathematischen Anhang*, die erstmals 1836 in Leipzig bei Leopold Voß erschien. Bereits dem Titel nach legt die *Neue Darstellung* eine systematische Kopplung der Logik mit der Mathematik nahe – welche Drobisch ja zumindest unter biographischen Gesichtspunkten bereits verkörperte. Die in Drobischs *Neuer Darstellung* entwickelten charakteristischen Züge seiner Logikauffassung und ihre Berührungspunkte mit der Mathematik werden im Folgenden thematisiert.⁶⁹

4.2 Drobischs Neue Darstellung der Logik

Drobischs *Neue Darstellung der Logik* wurde erstmals im Jahre 1836 veröffentlicht. Sie erlebte mehrere Auflagen, die nicht zuletzt in Anbetracht der Debatten um die „logische Frage“ teils maßgebliche Umgestaltungen mit sich zogen. Markante Unterschiede bestehen insbesondere zwischen der ersten Auflage und der zweiten aus dem Jahre 1851.⁷⁰ Als Anlass für die Überarbeitung der *Neuen Darstellung* nennt Drobisch gewisse „Einwürfe“ seitens Trendelenburg „gegen die Zulässigkeit der formalen Logik“ (1851, III). Doch Drobisch betont nachdrücklich, dass die in der zweiten Auflage vorgenommenen Revisionen in erster Linie die „Ausführungen einzelner Partien“ betreffen (1851, III). Was „die ganze Idee der formalen Logik“ (1851, III) selbst betrifft, behauptet er seiner ursprünglichen Auffassung treu geblieben zu sein: „Geist und Charakter“ des Buches „sind sich gleich geblieben“ (1851, III); an der Möglichkeit und Zulässigkeit der formalen Logik bestehe für ihn weiterhin kein Zweifel (1851, III). Dass Drobisch eine bestimmte „Idee

68. So z. B. in Hermann (1878); siehe des Weiteren die Auswahlbibliographie zur logischen Frage. Hermann publizierte des Weiteren auch zur Ästhetik, etwa den *Grundriß einer allgemeinen Aesthetik* (Leipzig 1857) und *Die Aesthetik in ihrer Geschichte und als wissenschaftliches System* (Leipzig 1876). Lambert Wiesing verdanke ich den Hinweis, dass Hermann hier den Begriff einer formalen Ästhetik einzuführen beansprucht. Dieser Verwendungsweise des Ausdrucks ‚formal‘ ist in Anschlussuntersuchungen nachzugehen, um Unterschiede und Gemeinsamkeiten seiner Anwendung auf die Ästhetik und die Logik zu beleuchten.

69. Ein weiteres Postulat für Anschlussuntersuchungen ist es, Drobischs Verständnis von Mathematik im Detail zu rekonstruieren, um es mit seinem Konzept von Logik abzugleichen. Für diesen Zweck sollten nicht nur Drobischs mathematische Schriften ausgewertet, sondern auch den Literaturangaben nachgegangen werden, die Drobisch in diversen Ankündigungen seiner mathematischen Lehrveranstaltungen macht.

70. Alle Referenzen auf Drobischs *Neue Darstellung der Logik* werden im Folgenden unter Angabe des Erscheinungsjahrs der zitierten Auflage und der zitierten Seite in den Fließtext integriert.

der formalen Logik“ offenbar tatsächlich nie aufgegeben hat, wird auch durch eine Buchbesprechung zur 1863 erschienenen dritten Auflage der *Neuen Darstellung* belegt: Hier lobt Friedrich Heinrich Theodor Allihn Drobischs „reinliche und consequente Durchführung des wahren Charakters der Logik als formale Wissenschaft“ gegenüber der „falschen Strömung idealistischer Modephilosophie“ und den entsprechenden „falschen Verbesserungsversuchen“. ⁷¹ Doch wie lässt sich Drobischs Positionierung in der Logik näher charakterisieren? Zur partiellen Beantwortung dieser Frage wird im nächsten Abschnitt eine aufschlussreiche Rezension der *Neuen Darstellung* zusammengefasst.

4.2.1 Herbart über Drobisch

Im Jahr der Erstveröffentlichung der *Neuen Darstellung* veröffentlichte Johann Friedrich Herbart – Drobischs bevorzugter Autor für seinen Unterricht der Psychologie und Metaphysik – eine verhältnismäßig ausführliche Rezension zu Drobischs Werk in den *Göttingischen gelehrten Anzeigen*. ⁷² Die grundlegende Ausrichtung von Drobischs Projekt ist für Herbart insbesondere anhand des logisch-mathematischen Anhangs der *Neuen Darstellung* ersichtlich. Dessen bloßes Vorhandensein deutet Herbart zufolge darauf hin, dass Drobisch eine Position vertritt, welche die bekanntlich noch von Kant vertretene Meinung grundsätzlich in Frage stellt, „die Logik habe seit Aristoteles keinen Schritt rückwärts gethan, aber auch keinen vorwärts thun können“. ⁷³ Dass sich Drobisch um eine Fruchtbarmachung der Mathematik für die Logik bemüht, legt laut Herbart vielmehr die Vermutung nahe, „die Logik müsse doch wohl nicht so ganz abgeschlossen und isoliert dastehen, als ob sie keiner Verbindungen fähig sey, wodurch sie selbst einen Zuwachs erlangen würde“. ⁷⁴

Die erste Auflage von Drobischs *Neuer Darstellung* umfasst knapp 170 Seiten und unterscheidet sich mit Blick auf die indizierten Inhalte zunächst kaum von anderen Lehrbüchern. In der Einleitung von Drobischs *Neuer Darstellung* werden die Beziehungen zwischen Logik und Philosophie geklärt. Es folgen ein Abschnitt zur Begriffslehre, ein Abschnitt zur Urteilslehre, ein Abschnitt zur Schlusslehre sowie ein vierter Abschnitt, der sich Definitions- und Beweisformen sowie einigen methodologischen Fragen widmet. So merkt auch Herbart in seiner Rezension an: „Die

71. Allihn (1863), 207.

72. Ein detaillierter Vergleich zwischen Herbarts und Drobischs Positionen zur Logik steht noch aus.

73. Herbart (1836), Sp. 1267.

74. Herbart (1836), Sp. 1267-1268.

Einrichtung des Buchs ist [...] im Ganzen die gewöhnliche“.⁷⁵ Dennoch behauptet Herbart, dass in Drobischs *Neuer Darstellung* die Logik

„von den scharfen Augen eines Mathematikers eine solche Musterung sich [hat] müssen gefallen lassen, daß schwerlich ein Fleckchen in ihrem Bezirke übrig geblieben ist, welches nicht wäre von neuem besichtigt worden“.⁷⁶

Doch worin zeigt sich die von Drobisch betriebene mathematische Zugangsweise zur Logik? In seiner Rezension nennt Herbart mehrere Analogien zwischen Drobischs Aufbereitung des Lehrstoffes und aus der Mathematik bekannten Verfahrensweisen: Zunächst bezieht sich Herbart auf Drobischs „Unterscheidung von Aggregation, Separation, Determination und Abstraction (welche mit Addition, Subtraction, Multiplication und Division verglichen werden)“ im Rahmen der Begriffslehre.⁷⁷ Dieser Aspekt von Drobischs Logik wird weiter unten eingehend besprochen. Diese Analogie zu arithmetisch-algebraischen Operationen betrachtet Herbart als kompatibel mit seiner eigenen Annahme, dass sich „Reihen von Merkmalen“, also „Begriffsreihen“, bilden lassen müssten, auf die sich dann mit Hilfe von Anleihen bei der „Combinationslehre“ wiederum solche „Operationen“ anwenden lassen dürften, „welche man Variieren mehrerer Reihen nennt“.⁷⁸ Wählt man nun für unterschiedliche Einzelwissenschaften eine gewisse endliche Anzahl relevanter Begriffe aus und erstellt auf Grundlage ihrer Analyse „eine mäßige Anzahl genau bestimmter Begriffsreihen“,⁷⁹ dann, so Herbart weiter, sollte sich durch systematische Variation ein Grundbestand alternativer, aber jeweils klar festgelegter Klassifikationssysteme für die Untersuchungsgegenstände ergeben.⁸⁰ Auch dieser kombinatorische Gesichtspunkt findet sich bei Drobisch tatsächlich wieder; dies wird ebenso weiter unten gezeigt.

Betreffend Drobischs Behandlung der Urteilsformen macht Herbart auf eine weitere arithmetisch-algebraische Analogie aufmerksam und äußert sich im Sinne konstruktiver Kritik zu deren Einsatz. Drobisch mache Gebrauch „der Formel $A = A$ “ zur Darstellung von Sätzen.⁸¹ In $A = A$ liege allerdings eine „volle Beschränkung des Prädicats auf das ihm gleiche Subject“ vor.⁸² Nun sei es aber möglich, dass der Subjektbegriff hinsichtlich seines Inhalts „vermindert“ wird.⁸³ Daraus wiederum er-

75. Herbart (1836), Sp. 1268

76. Herbart (1836), Sp. 1268

77. Herbart (1836), Sp. 1269.

78. Herbart (1836), Sp. 1272.

79. Herbart (1836), Sp. 1272.

80. Herbart (1836), Sp. 1272.

81. Herbart (1836), Sp. 1271.

82. Herbart (1836), Sp. 1271.

83. Herbart (1836), Sp. 1271.

gebe sich, dass „eine Quantitätsbeschränkung in die Form des Urtheils eintritt“⁸⁴ – und zwar eine Quantitätsbeschränkung, welche der „Begriff des Subjects, für sich genommen [...] nicht mehr so auszuüben vermag, wie verlangt wird“.⁸⁵ Die zuletzt referierten Bemerkungen Herbarts lassen sich wohl als kritische Beurteilung von Drobischs Verwendung des Zeichens = interpretieren, auf die weiter unten eingegangen wird.

Mit Blick auf die oben referierten Überlegungen zur Begriffslehre verweist Herbart anerkennend auf Drobischs „Rechnungen“ im Ausgang von der „Vorfrage: wie vielfach kann ein Begriff unter seine logisch höheren subsumiert werden?“⁸⁶ Die anschließend zusammengefassten Reflexionen über Formalisierungen hingen beziehen sich auf Drobischs „Algebraische Construction der einfachsten Urtheilsformen und Ableitungen der Schlüsse“.⁸⁷ Die hier angesprochenen ‚Begriffs-Rechnungen‘ und die ‚Urteils-Algebra‘ werden nun allerdings in Drobischs Lehrbuch nicht schwerpunktmäßig im Rahmen der Hauptabschnitte besprochen. Sie finden sich vielmehr im fünften Bestandteil der *Neuen Darstellung*: ihrem „Logisch-mathematische[n] Anhang“.

Insbesondere mit Blick auf den Anhang nimmt Drobisch bereits in der Einleitung einen gewichtigen Einwand vorweg, von dem er glaubt, dass er gegen den Ansatz der *Neuen Darstellung* gemacht werden könnte. Die Vermischung von Logik und Psychologie mag in der *Neuen Darstellung* vermieden werden. „Aber“, so könnte der Kritiker Drobisch zufolge fragen, „trägt nicht die vorliegende Darstellung [...] die Schuld einer neuen unerlaubten Amalgamation der Logik, nämlich der mit Mathematik?“ (1836, VIII). Bereits die „äußere Stellung ihres Verfassers“ – eines ordentlichen Professors der Mathematik zu Leipzig, der die „Vorliebe der Herbart’schen Philosophie für exacte Wissenschaften“ teilt (1836, VIII) – spreche wohl in gewissem Maße „zum Voraus für diese Beschuldigung“ (1836, VIII). Durch den Anhang schließlich scheint sich diese „vollständig zu bestätigen“ (1836, VIII). Als Prophylaxe zur Abwendung eines derartigen Einwands behauptet Drobisch nun zwar einerseits, dass in seiner *Neuen Darstellung*

„nur dasjenige von mathematischer Vorstellungsweise, was in den logischen Formen unabweislich liegt, gebührend ans Licht gezogen, nirgends aber mit Willkür Mathematik in die Logik hineingetragen wurde“ (1836, VIII).

Doch andererseits scheint für Drobisch die Vorstellung durchaus einen gewissen

84. Herbart (1836), Sp. 1271.

85. Herbart (1836), Sp. 1271.

86. Herbart (1836), Sp. 1273.

87. Herbart (1836), Sp. 1273.

Reiz zu haben, die „Logik als eine Art von Mathematik, gleichsam als eine qualitative Arithmetik, darzustellen“ (1836, IX). Zumindest behauptet er, dass es zu diesem Zweck „nicht an reichlichem, dem Verfasser leicht zugänglichen Stoffe“ fehle und deutet an, es könnte durchaus „der Mühe werth seyn künftigt noch einmal genauer zu erörtern, wie weit man darin gehen kann“ (1836, IX).

Bevor auf Drobischs logisch-mathematischen Anhang näher eingegangen werden kann, ist im Folgenden zunächst zu erörtern, vor welchem konzeptionellen Hintergrund Drobisch die Meinung vertritt, dass eine quasi-arithmetische oder algebraische Behandlung logischer Probleme möglich sei. Aufgewiesen werden dabei zugleich die Charakteristika von Drobischs Interpretation des Terminus ‚formal‘. Anschließend wird Drobischs Ansatz zur Anwendung einer mathematisch inspirierten Logik in den soeben mit Herbart angesprochenen ‚Begriffs-Rechnungen‘ und der ‚Urteils-Algebra‘ illustriert.

4.2.2 Die Logik und der Formalismus

Wie weiter oben bereits festgehalten, behauptet Drobisch in der Vorrede zur ersten Auflage seiner *Neuen Darstellung*:

Die Logik ist in der That nichts als bloßer Formalismus, sie will und soll, nichts andres seyn; aber wer sein Denken vollständig auszubilden beabsichtigt, der kann eine exacte Kenntniß dieser Formen nicht entbehren“ (1836, VI).

Unklar bleibt in dieser programmatischen Stellungnahme allerdings, in welchen Hinsichten Drobisch der Logik einen formalen Charakter zuzuschreiben beabsichtigt. Wie weiter oben im Sinne einer hermeneutischen Heuristik festgehalten, scheint „Formalismus“ einerseits zu insinuieren, dass die Logik es mit Formeln zu tun hat: mit komplexen Termini oder Zeichensätzen, die für Operationen in einem bestimmten Regelsystem zur Verfügung stehen, vielleicht auch mit Regeln zur Generation und Transformation derselben. Doch von welchen *Formen* ist die „exacte Kenntniß“ nötig, um mit etwaigen *Formeln* zu arbeiten?

Eine eingehendere Lektüre der *Neuen Darstellung* zeigt, dass sich Drobisch im Gebrauch des Ausdrucks ‚Form‘ nicht festlegt. Dies mag Anlass zu der Vermutung geben, dass der Autor sich gar nicht darüber im Klaren war, dass zwischen einer ‚substanzialen‘ und einer ‚operationalen‘ Interpretation von ‚Form‘ ein Unterschied gemacht werden kann. Doch dabei bringt er – bewusst oder unbewusst – ‚Formen‘ und ‚Formeln‘ in ein Verhältnis der ein- oder wechselseitigen Determination.

In der Einleitung zur ersten Auflage der *Neuen Darstellung* lassen sich entsprechend zweierlei Gesichtspunkte ausmachen: Drobisch folgt hier zunächst der nicht zuletzt von Kant geteilten Auffassung, dass die (allgemeine) Logik formal ist, weil ihre Formen unabhängig von ihren Inhalten sind, genauer: insofern sie sich der „Betrachtung der Materie der Begriffe enthält“ (1836, 3). Doch im selben Zuge behauptet Drobisch, dass die Logik, eben weil sie sich der „Betrachtung der Materie der Begriffe enthält“, grundsätzlich „nur auf die formalen *Unterschiede* derselben angewiesen“ ist (1836, 3; Hervorh. ASH). Die Logik beschäftigt sich Drobisch zufolge im Wesentlichen mit Verhältnissen zwischen Begriffen (1836, 3). Werden nun aber Verhältnisse zwischen Begriffen auf deren „formale[] Unterschiede“ reduziert, so müssen diese letztlich als Ordnungsrelationen gelten, in die Begriffe ganz unabhängig von semantischem oder materialem Gehalt treten können.

Den zweiten der eben aufgeführten Gesichtspunkte betont Drobisch in der ersten Auflage der *Neuen Darstellung*, wenn er die „Logik als Formalphilosophie“ bestimmt (1836, 3). Ein ganzer Paragraph im Einleitungsabschnitt trägt diesen Titel (1836, 3). Zwar bemerkt Drobisch just in diesem Paragraphen, dass die Logik durchaus über ihren „Stoff“, ihre Materie, ihren Gegenstandsbereich, bestimmt werden kann. Aber der „Stoff der Logik“ sind eben die „allgemeinen Begriffsverhältnisse“ (1836, 3). Die Logik befasst sich mit Verhältnissen zwischen Begriffen, und zwar mit denen, die nicht „auf gewisse *Classen* von Begriffen beschränkt sind“; ihr Thema sind vielmehr solche Verhältnisse, die „mithin *allen* Begriffen zukommen“ (1836, 3). Maßgeblich für Drobischs Bestimmung der „Logik als Formalphilosophie“ ist also die Bezugnahme auf *Formen von Verhältnissen*, nicht auf die Formen, mittels derer Gegenstände gedacht werden können.⁸⁸ Und, so die hier in Anschlag gebrachte Hypothese, Formen von Verhältnissen können *qua* Ordnungsrelationen sowohl als *Strukturen* als auch als Prinzipien oder Regeln für gewisse *Operationen* verstanden werden.

Neben der eben zitierten Wortschöpfung „Formalphilosophie“ bietet Drobisch allerdings auch eine Bestimmung der Logik an, die sich zumindest terminologisch in der Nähe vertrauerer Formulierungen bewegt. Vier Paragraphen später bringt Drobisch die Worte „Lehre“ und „Denken“ an. Aber er spricht nicht etwa von der Logik als Denklehre. Vielmehr ist er der Meinung, dass „die Logik auch als die *Lehre von den Bedingungen des gesetzlichen Denkens* erklärt werden“ kann (1836,

⁸⁸ Interessanterweise wird der Terminus „Formalphilosophie“ zwar nicht in die zweite Auflage der *Neuen Darstellung* von 1851 übernommen; im selben Jahr jedoch kündigt Hermann eine Lehrveranstaltung unter just diesem Rubrum an. Sofern es sich nicht um einen Druckfehler handelt (Hermann las anschließend nie wieder über „Formalphilosophie“, aber des Öfteren über „Fundamentalphilosophie“), sollte den Gründen hierfür in Anschlussuntersuchungen nachgegangen werden.

5). Anzunehmen ist, dass es sich bei diesen „Bedingungen“ eben nicht um transzendente, sondern um die „formalen Unterschiede“ zwischen Begriffen handelt, die Drobisch weiter oben thematisiert. Denn die „formalen Unterschiede“ ermöglichen es nicht nur, Verhältnisse zwischen Begriffen festzustellen, sondern sind zugleich die Bedingungen dafür, Begriffe in weitere Beziehungen zu bringen. Nichts anderes als diese Tätigkeit aber bedeutet für Drobisch der Ausdruck ‚Denken‘: ‚Denken‘ ist ein Name für „Begriffe verknüpfen“ (1836, 5).

Vor dem Hintergrund seiner tätigkeitsorientierten Definition von Denken wird auch Drobischs Analogie zur Mathematik verständlicher, die er in der Vorrede bemüht um darzulegen, weshalb Logik keineswegs in Abhängigkeit von der Psychologie zu betrachten sei: „Daß die Logik vom Denken und von Denkopoperationen redet, streitet wider die behauptete Unabhängigkeit von der Psychologie so wenig als wie wenn der Mathematiker von Rechnungsoperationen spricht“ (1836, VIII). Gemeint sei dort schließlich auch „nur eine gewisse Art, Zahlen zu verknüpfen“ (1836, VIII). Und ebenso „meint der Logiker mit seinen Denkopoperationen nur gewisse Verknüpfungsarten der Begriffe“ (1836, VIII).

4.2.3 Die Logik und die Mathematik

Zu Analogien zwischen Logik und Mathematik äußert sich Drobisch in der zweiten Auflage der *Neuen Darstellung* ausführlicher. So stellt er hier die These auf, dass es mit der „reinen Logik“ eine „ähnliche Bewandnis“ habe „wie mit der reinen Mathematik“ (1851, VIII), und zwar insofern, als sie „ganz gewiss eine demonstrative Wissenschaft“ zu nennen sei, „aber gleichwohl ihre ersten Anfänge aus Erfahrungsthatfachen schöpfen“ müsse (1851, VIII). Mit anderen Worten: Sie ist darauf angewiesen, „ehe sie progressiv zu Begriffsverknüpfungen schreiten kann, erst regressiv die zu verknüpfenden Elemente aus jenen Thatfachen [zu] abstrahiren“ (1851, VIII) – und dabei, so ließe sich ergänzen, die Verknüpfungsweisen zwischen den Elementen eigenständig festzulegen.

So bemerkt Drobisch etwa, dass die „Grundformen des Denkens“ prinzipiell „auf ähnliche Weise gewonnen [werden] wie die Grundformen der Geometrie“ (1851, IV). Denn auch bei diesen letzteren handele es sich eben nur um „Reste“, „welche die Abstraction von den physikalischen und chemischen Eigenschaften der sinnlich wahrgenommenen Körper übrig lässt“ (1851, IV). Als springenden Punkt dieser Analogie weist Drobisch jedoch aus, dass sich die Geometrie „weder mit der Auffindung der Grundformen begnügt, noch mit der Classification der erfahrungsmässigen Körperformen beschäftigt“ (1851, V). Vielmehr gelange sie „durch

Combination der ersteren zu ideellen Constructionen“ – und durch diese Konstruktionen werde eben nur „zum Theil das Wirkliche, Gegebene reconstruirt“ (1851, V). Vielmehr ist nach Drobisch nicht zu leugnen, dass sie dabei auch „auf Gestaltungen kommt, die in der uns bekannten sinnlichen Welt wie Fremdlinge erscheinen“ (1851, V). In „ganz ähnlicher Weise“ aber verfare „die Logik in den Lehren von den Urtheilen und Schlüssen, den Eintheilungen und Beweisen mit den Grundformen der Begriffe“ (1851, V).

Vor dem Hintergrund der eben referierten Annahmen kann Drobisch behaupten: „Formen *ohne* Inhalt kennt sie [d. h. die Logik] nicht, sondern nur solche, die von dem *besonderen* Inhalt, der sie erfüllen mag, *unabhängig* sind“ (1851, IV). Doch sind die durch Abstraktion gewonnenen logischen Ordnungsstrukturen bei Drobisch in ihrer Anwendung ganz frei von Restriktionen, die der Zweck materialer Erkenntnis erfordern könnte. Hat die Logik nämlich einmal „ihre Grundformen durch Abstraction“ (1851, IV) gewonnen, dann „verknüpft“ sie eben diese „nach Gesetzen, die sich aus der Betrachtung ihrer Verhältnisse ergeben“ und gelangt allein dadurch „dadurch zu *abgeleiteten* Formen“ (1851, IV). Maßgeblich hierbei ist für Drobisch, „dass eben diese *Verknüpfung* von der Erfahrung unabhängig ist“ (1851, VI). Insofern lässt sich die Logik „nur von der Uebereinstimmung der Gedankenformen unter einander“ leiten (1851, V), nicht etwa von der Frage nach der Übereinstimmung der Gedankenformen mit „Erfahrungsthatsachen“ (1851, VIII).

Dementsprechend sind logische Ordnungsrelationen für Drobisch offenbar hinsichtlich der aus ihnen ableitbaren Verknüpfungsoperationen – aber eben auch nur hinsichtlich derselben – im (zugegebenermaßen anachronistisch aufgeladenen Sinne) ‚formalistisch‘ zu behandeln: Aus den abstrahierten ‚Formen‘ des Denkens lassen sich ‚Formeln‘ generieren, die Verknüpfungsoperationen instanzieren, welche nicht nur vom tatsächlichen Denken unabhängig ausgedrückt werden können, sondern die sich im tatsächlichen Denken möglicherweise auch gar nicht widerspiegeln. Diese Interpretation bestätigt sich in Drobischs Charakterisierung seines eigenen Ansatzes zur begrifflichen Bestimmung der Aufgabe der Logik: Selbstverständlich ist die Logik „zunächst nur ein *Kanon* für das Denken, dem dieses in seinen Formen entsprechen muss, um in sich wahr zu seyn“ – aber eben auch bloß „zunächst“. Denn darüber hinaus wird die Logik auch „zum *Organon der mittelbaren Erkenntniss*“ (1851, 8). Dies bedeutet: Für das Denken *per se* ist die Logik „kein Organon“, „sondern nur ein Regulativ“; „wohl aber“ ist die Logik „ein Werkzeug des mittelbaren Erkennens“ – eben weil sie es erlaubt, ‚Formeln‘ zu bilden und Operationen anzuwenden, die kein Pendant im natürlichen Denken haben, aber zur Ableitung von bislang nicht erkannten Implikationen gegebener Wissens Elemente verhelfen können. In diesem Sinne ist laut Drobisch „die Logik, ohne die selbst die Mathematik nicht möglich wäre“, „für jede Art der Erkenntniss“ das, was „die

Mathematik speziell für die Naturerkenntnis“ ist (1851, 9).

4.2.4 Logische oder formale Wahrheit

Nennt man in Drobischs Worten „Begriffe verknüpfen *denken*“ (1836, 5), dann ist Denken eine Abfolge von Verknüpfungsoperationen. Wenn eine solche Abfolge aber richtig ausgeführt werden soll, muss es sich bei den Verknüpfungsoperationen um „gesetzliche[]“ handeln. Die Logik ist für Drobisch deshalb „keine Beschreibung des Denkens, wie es wirklich ist, sondern eine Vorschrift, wie es seyn *soll*“ (1836, 5f.). Mit anderen Worten: Die Logik stellt „keine Naturgeschichte des Denkens“ dar, „sondern ein Gesetzbuch für dasselbe“ (1836, 6). Wie Drobisch in der Einleitung zur zweiten Auflage der *Neuen Darstellung* ergänzt, ist die Logik nicht mit den „*Naturgesetze[n]*“, sondern mit den „*Normalgesetze[n]*“ des Denkens befasst, d. h. mit „*Vorschriften* (Normen), nach denen es sich zu *richten* hat, um zu *wahren* Ergebnissen zu führen“ (1851, 2).

Den letztgenannten Aspekt scheint Drobisch in der zweiten Auflage der *Neuen Darstellung* hervorheben zu wollen, in der er im Einleitungsteil explizit die Unterscheidung zwischen „[f]ormale[r] und materiale[r] Wahrheit“ (1851, 6) einführt. Das „richtige oder logische Denken“ dient nämlich der „Erwerbung wahrer Erkenntnisse nur in *formaler* Hinsicht“ (1851, 6). Dies bedeutet:

„Die Anwendung richtiger Formen des Denkens auf irgend welche gegebene Materie giebt immer formal wahre Resultate, die aber deshalb doch in materieller Hinsicht falsch seyn können. [. . .]. [Die Logik] kann für nichts weiter eintreten, als dass, wenn das Gegebene materielle Wahrheit hat, auch das daraus Abgeleitete wahr seyn muss“ (1851, 7).

Die Frage, worin denn nun aber die formale Wahrheit bestehe, nimmt Drobisch bereits in der Vorrede auf: Im Unterschied zur „*metaphysischen* oder *transcendentalen*“ Wahrheit ist die „*logische*“ oder „*formale*[] Wahrheit“ ganz unabhängig von der „Übereinstimmung des Gedankens mit dem Gegenstande“; sie ergibt sich vielmehr aus der „Übereinstimmung der Gedankenformen untereinander“ (1851, V). Wenn nun diese Übereinstimmung eine „*durchgängige*“ ist, so Drobisch in der Einleitung, dann „lässt sich an der Wahrheit der erhaltenen Resultate nicht zweifeln; denn es giebt überhaupt kein anderes Kennzeichen der logischen Wahrheit als diese durchgängige Übereinstimmung“ (1851, 4).

Logische Wahrheit funktioniert für Drobisch in der letztgenannten Hinsicht ähnlich wie geometrische Konstruktionen (1851, V). Allerdings hat die Logik Drobisch zufolge im Allgemeinen grundsätzlich auch Gemeinsamkeiten mit dem „Rechnen“:

Hier wie dort können sich faktisch im Zuge des Verfahrens Fehler einschleichen, und es ist möglich, dass zufälligerweise „durch unrichtiges Denken zuweilen auch richtige Resultate erhalten werden können“ (1851, 4). Die Prüfung auf logische Wahrheit im Sinne durchgängiger Konsistenz der einzelnen Schritte aber kann in solchen Fällen den „Widerstreit nachweisen und zur Verbesserung führen“ (1851, 4). Problematisch hingegen bleibt die Beurteilung von Ergebnissen „der Anwendung des Denkens auf die Erkenntniss des Zusammenhangs der Phänomene der Natur und unseres Geistes“ (1851, 8) anhand von Geltungsstandards der Logik. Will man nämlich daraus, dass wir etwas „als eine logischnothwendige Folge einer Thatsache erkennen“, die Berechtigung für die Annahme ziehen, dass dies „auch in der Natur und unserem Geiste wirklich seyn oder geschehen muss“, dann wäre nämlich schlicht vorauszusetzen, „dass die formalen Gesetze unseres logischen Denkens nicht bloß subjective, sondern auch objective Gültigkeit haben“ (1851, 8). Ob diese Voraussetzung als haltbar gelten darf, ist eine Frage der Metaphysik; die „exacte Forschung“ allerdings darf sich, so Drobisch, zunächst damit begnügen, sie „hypothetisch anzunehmen“ (1851, 8).

Festhalten lässt sich, dass Drobischs Definition der „formalen Wahrheit“ durchaus in die Richtung späterer Konzeptionen der logischen Gültigkeit von Schlüssen weist.⁸⁹ Die totale Reduktion von Generation und Prüfung gültiger Schlüsse auf im engeren Sinne mathematische Kalküle nimmt Drobisch jedoch selbstverständlich schon aufgrund seiner Verhaftung in der Syllogistik nicht vor; er führt keine Funktionsausdrücke oder explizite Quantoren ein.

4.2.5 Der logisch mathematische Anhang

Zum Abschluss der Darlegung charakteristischer Züge der von Drobisch vertretenen Logikauffassung sei an dieser Stelle ein Einblick in den logisch-mathematischen Anhang der ersten Auflage der *Neuen Darstellung* gegeben. Diese Illustration⁹⁰ von Drobischs logischem „Formalismus“ greift dabei zwei Gesichtspunkte auf, die

89. In der zweiten Auflage der *Neuen Darstellung* diskutiert Drobisch im Abschnitt zur Urteilslehre die „formalen Bedingungen der Gültigkeit“ (1851, 60) in einem gesonderten Teilkapitel. Allerdings findet sich im Abschnitt zur Schlusslehre kein vergleichbares Kapitel zur Explikation formaler Bedingungen ihrer Gültigkeit.

90. Die Darstellung kann in diesem Rahmen tatsächlich nur der Illustration dienen. Drobischs logisch-mathematische Darlegungen bedürfen einer ausführlichen Analyse und Diskussion, und zwar mit Hinblick insbesondere auf die Fragen, inwieweit Drobisch sein Konzept logischer Wahrheit als Gültigkeit von Schlüssen darin zum Tragen bringt und ob ihn dieser Ansatz in die Lage versetzt, partiell über die syllogistische Logik seiner Zeit hinauszugehen. Hierfür ist ein minutiöser Vergleich der ersten und der zweiten Auflage von Nöten, in der das Konzept der Wahrheit als Gültigkeit erstmals explizit formuliert wird.

bereits Herbart in seiner Rezension von 1836 anspricht: Drobischs ‚Begriffs-Rechnungen‘ und seine ‚Urteils-Algebra‘.

Im logisch-mathematischen Anhang zur *Neuen Darstellung* manifestiert sich augenscheinlich Drobischs Expertise im Unterricht der Mathematik: Der Anhang wird präsentiert als ein Hybrid von Aufgabenteil mit Musterlösungen und Formelsammlung. Geordnet nach den Themen der Abschnitte des Haupttextes finden sich zu den dort diskutierten Problemkreisen jeweils entweder Fragestellungen bzw. Beispiele oder aber Abschnitte zur Motivation des Einsatzes einer quasi-algebraischen Notationsweise. So enthält der erste Abschnitt des Anhangs „Zur Lehre von der Unterordnung der Begriffe“ (1836, 127) vier Aufgaben samt Lösungen. Der vierte Abschnitt „Zur Theorie der Eintheilungen und Classificationen“ (1836, 151) verweist zunächst zurück auf wesentliche Ordnungsprinzipien aus der Begriffslehre und auf die Methode, „sich zur Bezeichnung dieser logischen Operationen der Zeichen ihrer analogen arithmetischen [zu] bedienen“ (1836, 151-152). Anschließend werden im vierten Abschnitt Anwendungsbeispiele in „arithmetische[r]“ Darstellung besprochen. Anders angelegt sind jedoch der zweite und der dritte Abschnitt. Der zweite Abschnitt des Anhangs liefert eine Ergänzung des Hauptteils, nämlich die „Algebraische Construction der einfachsten Urtheilsformen“ sowie eine „darauf gegründete Ableitung der Schlüsse“ (1836, 132). Mit diesen Mitteln beansprucht Drobisch, „[d]urch einen höchst einfachen Rechnungsmechanismus“ die Zulässigkeit von Syllogismen anhand des quasi-mathematischen Ausdrucks von Quantität und Qualität ihrer „Prämissenverbindungen“ prüfen zu können (1836, 134). Diese Art der Geltungsprüfung wird zu dem Zweck angewandt, all diejenigen syllogistischen Schlussfiguren zu systematisieren, die eine Konklusion erlauben. (Drobisch akzeptiert in Übereinstimmung mit der Tradition insgesamt 19 Syllogismen.) Im dritten Abschnitt „Zur Theorie der Schlußketten“ (1836, 136) wird derselbe Ansatz auf Kettenschlüsse ausgedehnt. Erarbeitet wird eine Aufstellung sämtlicher Reihungen von Schlussfiguren und -modi, die gemäß den Prinzipien der vorher besprochenen Geltungsprüfung ihrerseits akzeptabel sind.

Im Folgenden wird Drobischs Behandlung der im ersten und im zweiten Abschnitt des Anhangs aufgenommenen Punkte erläutert. Es handelt sich hierbei um die Instrumente, die auch in den übrigen Abschnitten zur Anwendung kommen, nämlich um die ‚Begriffs-Kombinatorik‘ und die ‚Urteils-Algebra‘, die in Herbarts Rezension von Drobischs *Neuer Darstellung* angesprochen werden.

4.2.5.1 Drobischs ‚Begriffs-Kombinatorik‘

Betreffend die „Lehre von der Unterordnung der Begriffe“ (1836, 127) gibt Drobisch im logisch-mathematischen Anhang folgende Aufgabenstellungen zu bedenken:

„Die Anzahl der Begriffe zu bestimmen, denen ein aus m Merkmalen zusammengesetzter Begriff untergeordnet werden kann“ (1836, 127).

„Die Anzahl der zwischen einem gegebenen Begriffe von m Merkmalen und irgend einem dieser Merkmale möglichen Reihen einander untergeordneter Begriffe zu bestimmen“ (1836, 128).

„Die Anzahl der zwischen dem gegebenen und einem bestimmten höheren Begriffe der n ten Ordnung möglichen Reihen aufzufinden“ (1836, 130).

„Unter übrigens gleicher Voraussetzung wie in den vorigen Aufgaben, die Anzahl der Uebergänge von irgend einer Ordnung höherer Begriffe zur nächst höheren, so wie die Summe sämtlicher Uebergänge von jeder Ordnung zur nächst höheren zu finden“ (1836, 130).

Die Lösungsansätze für diese Aufgaben erschließen sich aus Drobischs Ausführungen zu „den allgemeinen Verhältnissen der Begriffe“ (1836, 9) im Haupttext. Hier argumentiert Drobisch im Anschluss an seine weiter oben diskutierte Annahme, dass die Logik in erster Linie mit der strukturellen Betrachtung von Verhältnissen zwischen Begriffen befasst sein soll. So stellt er zunächst fest, dass eben diese Konzeption von Logik „die *Unterscheidbarkeit* der Begriffe, die *Verschiedenheit* ihres Inhalts“ zur Voraussetzung hat (1836, 10). Eine strukturelle Betrachtung von Verhältnissen zwischen Begriffen muss demnach inhaltliche Aspekte abbilden, aber die Allgemeinheit der Betrachtung gewährleisten, indem nicht auf die jeweiligen spezifischen Bedeutungen von Begriffen rekurriert wird. Um beiden Anforderungen gerecht zu werden, knüpft Drobisch an die Unterscheidung zwischen einfachen und zusammengesetzten Begriffen an: Ist ein Begriff zusammengesetzt, dann lässt er sich in einfachere als seine „Theile“ zergliedern; diese, so Drobisch im Einklang mit der Tradition, „heißen Merkmale“ (1836, 10).

Zu berücksichtigen ist Drobisch zufolge dabei aber unbedingt, dass „die Art *der Verbindung der Merkmale im Begriffe* [...] keineswegs ein bloßes Nebeneinanderstellen“ ist (1836, 13). Vielmehr handelt es sich nämlich um eine „Bestimmung des einen Merkmals oder [eines] bereits gebildeten Complexes von Merkmalen durch das noch hinzukommende“ (1836, 13). Eben diese Bestimmung nennt Drobisch

„*Determination*“; die analoge arithmetische Operation ist nicht die Addition, sondern die Multiplikation (1836, 13). Wenn sich Merkmale nun aber bei der *Determination* eines Begriffes im Sinne der Multiplikation miteinander verbinden, dann sollten sich derart zusammengesetzte Begriffe auch in Faktoren zerlegen lassen. In diesem Sinne hält Drobisch fest, dass man „in jedem zusammengesetzten Begriffe“ jeweils „jedes einzelne Merkmal hinweg denken“ kann (1836, 11); diese Betrachtung setzt ja die Isolation der einzelnen Merkmale als Faktoren voraus. Genau diese Operation definiert Drobisch als „*Abstraction*“ (1836, 12). Ergo: „*Determination* und *Abstraction* sind entgegengesetzte logische Operationen, wie es *Multiplication* und *Division* als arithmetische sind“ (1836, 13).

Wird nun die *Abstraction* eines einzelnen Merkmals aus einem Produkt von Merkmalen durchgeführt, dann heißt „der Begriff, der dann noch übrig bleibt, [...] in Beziehung auf den, aus welchem er durch *Abstraction* eines Merkmals entstand, der *nächsthöhere*“ (1836, 11). Demnach gilt: „Jeder Begriff hat also so viel nächsthöhere Begriffe als Merkmale“ (1836, 11). Doch um einen Begriff zu bestimmen, ist nicht nur die Anzahl nächsthöherer Begriffe relevant, sondern vielmehr die ganze „durch *Abstraction* entstandene Reihe einander untergeordneter Begriffe“ (1836, 12), die sich ergibt, wenn von den jeweils nächsthöheren Begriffen wiederum zu deren nächsthöheren fortgeschritten wird usw. Die Schritte der *Abstraction* folgen dabei der „*Ordnung*, in der die Merkmale des Begriffs verbunden sind“ (1836, 12). Aufgrund eben dieser *Ordnung* lässt sich Drobisch zufolge grundsätzlich jede *Abstraktionsreihe* auch in umgekehrter Richtung durchlaufen, „wenn man, vom höchsten Begriffe ausgehend, die zuvor abstrahierten Merkmale allmählig wieder hinzufügt“ (1836, 12). So bestätigt sich die Analogie zur Operationen der *Multiplikation* und *Division*: Die Umkehrung der *divisiven Abstraktion* ergibt wiederum die *Determination* eines Begriffs durch Bildung des Produktes seiner Merkmalsfaktoren.

Neben der Analogie zwischen den „logische[n] Operationen“ (1836, 13) der *Determination* und *Abstraktion* zum einen und den arithmetischen Operationen der *Multiplikation* und *Division* zum anderen macht Drobisch noch auf eine weitere *Affinität* begriffslogischer und arithmetischer Verfahren aufmerksam. Ein Produkt von vielen Merkmalen determiniert einen Begriff. Jedoch lässt sich umgekehrt auch fragen, wie vielen Begriffen ein einziges bestimmtes Merkmal zukommt.⁹¹ In diesem Falle hat man es laut Drobisch mit einer Aufzählung der betreffenden Begriffe zu tun, welche die „*Summe* aller Begriffe“ (1836, 15) angibt, denen das Merkmal zukommt. Als „logische Verbindungsweise“ nennt Drobisch dieses Verfahren „*Aggregation*“ (1836, 15); ihr Pendant ist die „arithmetische[] *Addition*“ (1836, 15).

91. Es bleibt unklar, ob Drobisch der Meinung ist, dass sich diese Frage abschließend beantworten lässt.

Sollen umgekehrt bestimmte Begriffe aus dem Aggregat ausgeschlossen werden, ist von „*Separation*“ die Rede (1836, 15). Daher hält Drobisch fest: „Aggregation und Separation stehen also einander entgegen wie Addition und Subtraction“ (1836, 15).⁹²

Doch zurück zu den Aufgabenstellungen im Anhang. Wie lässt sich etwa die „Anzahl der Begriffe [...] bestimmen, denen ein aus m Merkmalen zusammengesetzter Begriff untergeordnet werden kann“ (1836, 127)? Die Lösung dieses Problems gibt Drobisch folgendermaßen an: Man berücksichtige zunächst, dass „1) die Anzahl der nächsthöheren Begriffe = m “ (1836, 127). Schließlich hat ein Begriff just so viele nächsthöhere Begriffe wie Merkmale, die einzeln von ihm abstrahiert werden können. Man erwäge des Weiteren, dass „2) [d]ie Zahl der höheren Begriffe 2ter Ordnung“ sich dadurch bestimmt, „auf wievielerlei Art“ sich nicht jeweils ein einzelnes Merkmal, sondern zwei Merkmale (offenkundig ohne Wiederholung) aus einem Begriff abstrahieren lassen. Analoges gilt für die höheren Begriffe „3ter Ordnung“ usw. (1836, 127). Hier kommen demnach Grundsätze der Kombinatorik zum Tragen.

Die Anzahl der höheren Begriffe zweiter Ordnung ist also

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$$

Die Anzahl der höheren Begriffe dritter Ordnung dagegen:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Unter der Voraussetzung, dass

$$n \leq m$$

ergibt sich die allgemeine Lösung „für die höheren Begriffe der n ten Ordnung“:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

92. Ausgehend von der eben referierten konzeptionellen Grundlegung der Begriffslehre diskutiert Drobisch im Hauptteil der *Neuen Darstellung* des Weiteren Verhältnisse des Gegensatzes zwischen Merkmalen. Er unterscheidet vereinbare und unvereinbare sowie affirmative und negative Begriffe oder Merkmale (1836, 19); die Determination der letzteren läuft darauf hinaus, einen anderen Begriff ein- bzw. auszuschließen (1836, 17). Einige Kombinationen von Merkmalen führen zu „disparaten“ und manche zu „disjuncten“ Begriffspaaren. In beiden „kommt jedem Begriffe auch die Bestimmung zu [...], etwas zu seyn, was der andre nicht ist“ (1836, 17). Das „logische] Verhältnis, in dem die Glieder solcher Paare zueinander stehen, ist das des „*contradictorischen Gegensatzes*“ (1836, 17). Davon unterscheidet Drobisch nicht nur den „*conträren Gegensatz]*“, sondern auch den „relative[n]“ (1836, 18). Nur für kontradiktorisch oder konträr entgegengesetzte Begriffe oder Merkmale aber gilt, dass sie „nicht in einem und demselben dritten Begriffe als Merkmale vereinigt werden“ dürfen (1836, 19).

Die Gesamtanzahl der Begriffe, „denen ein aus m Merkmalen zusammengesetzter Begriff untergeordnet werden kann“ ist die Summe aller dieser Zahlen bis hin zu

$$n = m$$

Ihren allgemeinen Ausdruck gibt Drobisch folgendermaßen an:

$$\frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots + \frac{m}{1} + 1 = 2^m - 1$$

(1836, 127).

Im Haupttext der *Neuen Darstellung* fasst Drobisch die wesentlichen Züge seiner Analysen von Begriffsverhältnissen folgendermaßen zusammen. Er behauptet, dass die im ersten Abschnitt seines Buches in struktureller Hinsicht dargestellten Verhältnismäßigkeiten die „Bedingungen“ abgeben, unter denen „irgend welche zwei gegebene“, also beliebige inhaltlich determinierte Begriffe „unmittelbar miteinander verknüpft werden können oder nicht“ (1836, 24). Drobischs vorangehender Explikation nach zu urteilen lassen sich nun zwar auch Determination und Abstraktion einzelner Begriffe oder Merkmale sinnvollerweise als Operationen der Verknüpfung bzw. deren Auflösung interpretieren: Wie weiter oben beschrieben, besteht hier eine Analogie zur Multiplikation von ‚intensionalen‘⁹³ Faktoren in ein gemeinsames Produkt bzw. zur Division. Wenn Drobisch nun aber von den Bedingungen spricht, unter denen zwei einzelne Begriffe „unmittelbar“ miteinander verknüpft werden können, nimmt er offenkundig eine veränderte Sicht auf Verbindungen von Begriffen ein. „[D]iese Verknüpfung“ kann nämlich, so Drobisch,

„in der Einschließung des Theils im Ganzen oder der Vereinigung von Theilen eines Ganzen oder in der bloßen Verbindung gesonderter Begriffe bestehen; oder das Gegentheil der Verknüpfung bloße Trennung oder Unvereinbarkeit oder Widerstreit seyn“ (1836, 24).

Drobisch rekurriert hier auf die Unterscheidung des Umfangs vom Inhalt eines Begriffes; nichtsdestoweniger geht er damit aber nicht zu einer ‚extensionalen‘⁹⁴ Betrachtungsweise über. Das, was durch Determination mittels des Produkts von Merkmalen bestimmt wird, entspricht dem „*Inhalt* (complexus)“ eines Begriffes (1836, 9). Mittels des Verfahrens der Aggregation hingegen lässt sich Drobisch

93. Der Terminus ‚intensional‘ wird hier in einfache Anführungszeichen gesetzt, weil er erstens in seiner heute üblichen Verwendungsweise zu Drobischs Zeiten nicht geläufig war. Zweitens würde seine systematische Übernahme ins eigene Beschreibungsvokabular eine explizite Definition erfordern, welche teils unterschiedliche Bestimmungen der Unterscheidung zwischen ‚Intension‘ und ‚Extension‘ in der jüngeren Literatur in Rechnung zu stellen hätte.

94. Für den Terminus ‚extensional‘ gilt Analoges wie für den Terminus ‚intensional‘ (siehe hierzu die vorangehende Fußnote).

zufolge die „*Summe* aller Begriffe“ (1836, 15) angeben, denen ein gegebener einfacher Begriff als Merkmal zukommt. „Die Gesamtheit dieser Begriffe“ aber, so Drobisch weiter, „heißt der *Umfang* (ambitus, sphaera)“ dieses Merkmals (1836, 14). Der Umfang eines Begriffes umfasst demnach die Gesamtheit der Fälle seiner Anwendbarkeit als Merkmal in anderen Begriffen. Unter Voraussetzung des so eingeführten Begriffes von Umfang macht sich Drobisch im zweiten Abschnitt des logisch-mathematischen Anhangs der *Neuen Darstellung* an die „Algebraische Construction“ der Urteilsformen, die im Folgenden skizziert wird.

4.2.5.2 Drobischs ‚Urteils-Algebra‘

Wie im vorherigen Abschnitt dargelegt, lassen sich Begriffe nach Drobisch einerseits als Merkmale zum Zweck der inhaltlichen Determination eines anderen Begriffes analog zur Multiplikation verknüpfen. Verknüpfungen zwischen Begriffen können aber auch als Teil-Ganzes-Beziehungen betrachtet werden. Des Weiteren besteht aber auch die Möglichkeit, zwei noch nicht derart verknüpfte Begriffe miteinander zu verbinden. „*Die Art und Weise* aber, wie eine solche Verknüpfung ausgedrückt oder geleugnet wird“, so Drobisch, „giebt der logischen Form des *Urtheils* den Ursprung“ (1836, 24). Die Weise der Verbindung von Begriffen also „heißt die *Form* des Urteils“ (1836, 24). Mit Bezug auf die klassische Bestimmung des Begriffes der Form durch seine Opposition zum Begriff der Materie hält Drobisch fest: „[D]ie Begriffe, deren Verknüpfungsverhältniß er [d. h. das Urteil als der logische Ausdruck des Verhältnisses] betrifft, geben die *Materie* desselben“ (1836, 124). Der Begriff des Urteils selbst wiederum erfährt eine Definition im Einklang mit Drobischs Idee der Logik als strukturelle Betrachtung von Verhältnissen: „*Das Urtheil ist daher der logische Ausdruck des Verhältnisses gegebener Begriffe hinsichtlich ihrer Verknüpfungsfähigkeit*“ (1836, 124).

Die Relata von Verhältnissen, deren logischer Ausdruck das Urteil ist, nennt Drobisch traditionell ‚Subjekt-‘ und ‚Prädikatbegriff‘. Inhaltlich betrachtet darf das Prädikat wohl zu denjenigen Merkmalen gerechnet werden, die den Inhalt des Subjektbegriffes determinieren. Werden nun aber sowohl der Subjektbegriff als auch der Prädikatbegriff hinsichtlich ihres Umfangs betrachtet, dann ergibt sich die Möglichkeit, die im Urteil ausgesagten Ein- bzw. Ausschlussverhältnisse zwischen den verknüpften Begriffen mittels Aggregation und Separation quasi quantitativ zu bestimmen und sie als Teil-Ganzes-Verhältnisse zu betrachten: Die Verhältnisse zwischen den Begriffen erschließen sich durch eine Art von Größenvergleich zwischen ihren Umfängen, der durch die jeweiligen Beziehungen der Entgegensetzung zu spezifizieren ist, in denen die Begriffe zueinander stehen. Mit Drobischs Worten: Man begreift „die Urtheile als Darstellungen der Verhältnisse der Begriffe

hinsichtlich der Verknüpfung ihrer *Umfänge*“ (1836, 34).

Sei nun A der Subjektbegriff und B der Prädikatbegriff, und „[v]erstehen wir [...] jetzt unter A nicht mehr den Inhalt des so benannten Begriffs, sondern collectiv die Begriffe seines Umfangs“ (1836, 30), so lassen sich die bejahenden Urteile „*Alle A sind B*“ und „*Einige* (viele, wenige, die meisten etc.) *A sind B*“ dahingehend interpretieren, dass der Umfang von B , verstanden als Merkmal von A , den gesamten oder einen Teil des Umfangs der Fälle der Anwendbarkeit von A umfasst. Verneinende Urteile dagegen drücken vollständige oder partielle Ausschlussverhältnisse aus.⁹⁵ Unter inhaltlichem Gesichtspunkt erlauben sie die Formulierungen „*A ist keine Art von B*“ bzw. „*Eine Art von A ist keine Art von B*“ (1836, 31f.). „Mit Beziehung auf die einzelnen Fälle des Umfangs aber“ lassen sich, so Drobisch, die üblichen Formulierungen anwenden: „*Kein A ist B*“ bzw. „*Einige A sind nicht B*“ (1836, 33).

Unter den soeben zusammengefassten Voraussetzungen schlägt Drobisch im Haupttext der *Neuen Darstellung* vor, die Umfangsverhältnisse „ganz als Größenverhältnisse aufzufassen und ihre qualitativen und quantitativen Unterschiede durch schematische Constructionen zu versinnlichen“ (Drobisch 1836, 36) – indem man „nämlich die Umfänge der Begriffe durch Kreisflächen dar[stellt], deren verhältnißmäßige Größe derjenigen der Umfänge entspricht“ (1836, 36; die entsprechenden Kreisdiagramme finden sich auf der Folgeseite in Drobischs Buch).⁹⁶

Im logisch-mathematischen Anhang der *Neuen Darstellung* allerdings wählt Drobisch eine andere Repräsentationsweise: Er vertritt die Auffassung, dass „sich die einfachsten Urtheile als Umfangsverhältnisse auch *symbolisch* durch algebraische Gleichungen und Ungleichungen darstellen“ lassen (1836, 132; Hervorh. ASH). Zu diesem Zweck wählt Drobisch die folgenden Mittel:

Seien A und B „die *Umfänge* des Subjects und des Prädicats“ (1836, 132).

Seien a und b „Theile dieser Umfänge“ (1836, 132).

Sei X der „Umfang eines unbekannt bleibenden Begriffs, der jedoch größer als $A + B$ zu denken ist“ (1836, 132).

95. Sie „gestatten“, so Drobisch, „eine ganz ähnliche Behandlung wie die bejahenden“; doch ihr „Princip ist der Satz des Widerspruchs“ (1836, 31). Verneinende Urteile stellen A und B in eine der folgenden Relationen: „ A hat B nicht als Merkmal, oder Eigenschaft“; „ A hat das Gegentheil von B oder einem Merkmale desselben zum Merkmale“; „ A und B sind disparat“; „ A und B sind widerstreitend“ (1836, 31-32).

96. Verbindungen zwischen Drobischs diagrammatischer Notation für Umfangsverhältnisse und seiner Positionierung im Bereich der Geometrie sowie Vergleiche derselben mit früheren und späteren Ansätzen (etwa bei Euler und Venn) sind ein weiteres vielversprechendes Untersuchungsthema.

Unter Verwendung der üblichen arithmetisch-algebraischen Symbole für Gleichheitsbeziehungen bzw. Größenverhältnisse ergibt sich folgende Notation:

„1) $A = b$ das allgemein bejahende Urtheil“ (1836, 132).

„2) $A = B$ dasselbe, wenn das Prädicat dem Subjecte ausschließlich zukommt (also das Urtheil reciprocabel ist)“ (1836, 132).

„3) $a = b$ das besonders bejahende Urtheil“ (1836, 132).

„5) $A < X - B$ das allgemein verneinende Urtheil“ (1836, 132).

„7) $a < X - B$ das besonders verneinende Urtheil“ (1836, 132).⁹⁷⁹⁸

Drobischs Notation für bejahende Urteile auf Basis des Gleichheitszeichen erschließt sich schnell:

- $A = b$: A ist gleich b . Der Umfang des Begriffs A steht in der Relation der „Identität“ (1836, 132; möglicherweise ließe sich auch von einer Äquivalenz sprechen) zu einem Teil des Umfangs des Begriffs B .
- $A = B$: A ist gleich B . Der Umfang des Begriffs A ist identisch (oder äquivalent) mit dem Umfang des Begriffs B und umgekehrt.
- $a = b$: a ist gleich b . Ein Teil des Umfangs des Begriffs A ist identisch (oder äquivalent) mit einem Teil des Umfangs des Begriffs B .

Nun ist Drobisch allerdings der Meinung, dass sich 1) und 3) „auch durch das Zeichen $<$ construiren“ lassen, „ohne daß in den daraus zu ziehenden Schlüssen sich etwas wesentliches ändert“ (1836, 133) – und zwar unter der Voraussetzung, dass man bejahende Urteile „blos als Subsumtionen des Subjects unter das Prädicat“ betrachtet (1836, 133). Wird der Subjektbegriff dem Prädikatbegriff in diesem Sinne untergeordnet, dann sind die Ausdrücke $A < b$ und $a < b$ sinnvoll: Hinsichtlich

97. Drobisch differenziert die Urteilsformen weiterhin danach, ob sie „analytischen Ursprungs“ oder „synthetischen Ursprungs“ sind (1836, 132). Ihre quasi-algebraischen Strukturformeln sind: „4) $a = B$ “, „6) $A = c < C < X - B$, wo c den Theil des Umfangs C eines dritten Begriffs bedeutet“ und „8) $a < A - B$ “ (1836, 132). Drobischs Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Urteilen muss an dieser Stelle vernachlässigt werden. Ihre Einführung in der ersten Auflage und ihre Ausarbeitung in späteren Auflagen der *Neuen Darstellung* geben Anlass zu Anschlussuntersuchungen.

98. Drobisch hat den Anspruch, dass die Liste seiner acht Urteilsformen vollständig ist. Er ist der Meinung, „daß außer den hier aufgeführten Gleichungen und Ungleichungen alle andre, die man etwa noch bilden mag, keine Urteilsformen bestimmt ausdrücken können“ (1836, 133).

seines Umfangs sind entweder A oder ein Teil von A hier jeweils kleiner als ein Teil von B .⁹⁹

Wenn gilt $X > A + B$ (1836, 133), dann lassen sich die negativen Urteilsformen folgendermaßen interpretieren:

- $A < X - B$: Der Umfang von A ist kleiner als der Umfang eines unbestimmt großen,¹⁰⁰ den Umfang von A sowie den Umfang des Begriffs B enthaltenden Begriffs X , wenn der Umfang von B von X abgezogen wird.
- $a < X - B$: Ein Teil des Umfangs des Begriffs A ist kleiner als der Umfang eines unbestimmt großen, den Umfang von A sowie den Umfang des Begriffs B enthaltenden Begriffs X , wenn der Umfang von B von X abgezogen wird.¹⁰¹

Die „zunächst liegende Anwendung von diesen Formeln ist“, so Drobisch, „die Ableitung der Umkehrungsregeln“ (1836, 133), welche im Haupttext der Neuen Darstellung eingeführt werden. Drobisch gibt die folgenden Ergebnisse an:

„von $A = b$, die Umkehrung $b = A$ “ (1836, 133).

„von $A = B$, die Umkehrung $B = A$ “ (1836, 133).

„von $a = b$, die Umkehrung $b = a$ “ (1836, 133).

„von $A < X - B$, die Umkehrung $B < X - A$ “ (1836, 133).

„von $a < X - B$, die Umkehrung $B < X - a$ “ (1836, 133).

Von hier aus geht Drobisch schließlich zu seinem bereits erwähnten Vorhaben über, „[d]urch einen höchst einfachen Rechnungsmechanismus“ zu „prüfen“, welche möglichen „Prämissenverbindungen zu Schlüssen führen können“ (1836, 134). Der zweite Abschnitt des Anhangs wird zu diesem Zweck damit abgeschlossen, die üblicherweise als gültig anerkannten Schlussmodi „durch Rechnung von Neuem zu beweisen“ (1836, 134). Die Ausdehnung der „Rechnung“ auf die Erfassung aller gültigen

99. Sinnvoll ist auch der Ausdruck $a < B$, der sich aus Drobischs analytischem partikulär bejahenden Urteil $a = B$ ergibt. Den Ausdruck $A < B$ an die Stelle von $A = B$ zu setzen, hält Drobisch für unzulässig (1836, 133). Nun würde $A < B$ selbstverständlich in der Tat nicht dasselbe Verhältnis ausdrücken wie $A = B$. Aber warum $A < B$ nicht als Sonderform von $A < b$ in Frage kommt, erläutert Drobisch nicht.

100. Aufgrund der Voraussetzung $X > A + B$ behauptet Drobisch, dass X in negativen Urteilen „sogar unbegrenzt gedacht werden“ kann (1836, 133).

101. Die Ähnlichkeit mit der Darstellungsweise George Booles, der mit Differenzen zwischen einem bestimmt oder unbestimmt großen Universum und einzelnen Begriffsumfängen arbeitet, ist frappierend. Während Drobisch aber im Sinne einer ‚intensionalen‘ Logik argumentiert, betrachtet Boole vielmehr ‚extensional‘ Klassen von Gegenständen. Booles Notation wurde mit hoher Wahrscheinlichkeit ohne Kenntnis von Beiträgen kontinentaler Autoren wie Drobisch entwickelt. Die Spurensuche nach möglichen Transferlinien von Gedankengut aufzunehmen, ist ein weiteres Desiderat für vertiefende Untersuchungen.

Schlussverbindungen in Schlussketten schließlich beansprucht die gesamten knapp 15 Seiten des dritten Abschnitts.¹⁰²

In jedem Falle lassen Drobischs ‚Urteils-Rechnungen‘ eine Annäherung von Logik und Mathematik in folgenden Hinsichten erkennen: Logische Probleme lassen sich im Sinne von Kalkülen oder Algorithmen betreiben. Dies erfordert gewisse Regelsätze. Der Zweck der Befolgung dieser Regeln ist die Ableitung logischer oder formaler Wahrheit. Demnach sind sie zu vergleichen mit den Regeln in einem Lehrbuch der Mathematik: Man kann gegen sie verstoßen und zur falschen (also eigentlich zu keiner) Lösung einer Aufgabe kommen. Aber man muss ihnen folgen, wenn man zu erwiesenermaßen korrekten Ergebnissen gelangen will. Genau dies macht nun allerdings auch den „disziplinarische[n] Charakter der Logik“ aus, „dem gemäß sie eine Zucht fürs Denken ist“ (1836, VI), nicht die Bedingung der Möglichkeit des Denkens überhaupt.

5 Fazit

Inwiefern ist nun Drobischs Logik ‚formal‘? Um Drobischs Ansatz zur „symbolisch[en]“ (1836, 132) Behandlung von strukturellen Verhältnissen zwischen Begriffen sowie Urteilen auf die eingangs gestellte Frage hin zu perspektivieren, lässt sich nun Folgendes resümieren:

- Wie insbesondere anhand seiner Diskussion des Konzepts des Urteils ersichtlich, gewinnt Drobisch sein Konzept der logischen Form anhand der Gegenüberstellung von Form und Materie. Drobisch argumentiert in dieser Hinsicht durchaus auf Grundlage einer ‚substanziellen‘ Charakterisierung von Formen, insofern sie von den Gegenständen ihrer Anwendbarkeit abstrahiert werden.
- Drobischs strenge Abtrennung der Form von der Materie steht im Einklang mit der Kantischen Position. Sie verbietet Weiterentwicklungen in die Richtung des Hegelschen Projekts der Vereinigung von Logik und Metaphysik durch Kopplung von Form und Materie. In dieser Hinsicht steht Drobischs Positionierung hinsichtlich der „logischen Frage“ auch eher derjenigen von Hermann Ulrici nahe als derjenigen seines Leipziger Kollegen Conrad Hermann.

102. Ihre eingehende Prüfung sowie Studien zu ihren Weiterführungen im Kontext von Problemen der Definition, Klassifikation und Methodologischen Problemen im vierten Abschnitt des Anhangs stehen noch aus.

- Doch während Kant logische Formen als konstitutive Bedingungen der Möglichkeit des Denkens begreift, versteht Drobisch logische Regeln als Gesetzmäßigkeiten, denen zum Zweck logischer oder formaler Wahrheit im Denken Folge geleistet werden soll – aber keineswegs notwendigerweise muss. Einen weiteren Unterschied zu Kant markiert Herbarts Befund, dass Drobischs *Neue Darstellung* von Kants Logikverständnis auch dahingehend abweicht, dass sie die Logik eben nicht als abgeschlossen begreift. Tatsächlich macht Drobischs Abkehr von der konstitutiven Interpretation des Konzepts der Denkformen eine solche Erweiterbarkeit der Logik überhaupt erst möglich: Die konstitutive Interpretation zugunsten einer präskriptiven aufzugeben, erlaubt grundsätzlich eine Pluralisierung oder Weiterentwicklung sowohl von Denk- oder Schlussformen als auch von ihren Darstellungsweisen.
- Die Möglichkeit zur Pluralisierung der Darstellungsweisen wird bei Drobisch dadurch in Anspruch genommen, dass er für Umfungsverhältnisse zwischen Begriffen, sofern sie in Urteilen ausgesagt werden, sowohl diagrammatische oder geometrische als auch „symbolische“ oder quasi-algebraische Notationen zulässt.
- Speziell anhand von Drobischs „Algebraische[r] Construction der einfachsten Urtheilsformen“ wird allerdings auch augenfällig, dass der „Formalismus“, als welchen Drobisch die Logik bezeichnet, charakteristische Züge entwickelt, die sich in der für seine Idee der logischen Form ursprünglich maßgeblichen Opposition von Form und Materie nicht (oder zumindest nicht prominent) spiegeln: Insofern die Urteilskonstruktionen als logische Ausdrücke von Verhältnissen zwischen Begriffen „symbolisch“ sind, lässt sich ihre äußere Gestalt als ihre logische Form begreifen. Darüber hinaus erlauben die symbolischen Urteilskonstruktionen Anwendungen, die auf Grundlage von Regeln als „Rechnungsmechanismus“ durchgeführt werden können. Analog zu Algebra und Arithmetik erlaubt (oder erfordert) die Logik insofern algorithmische Verfahren. Drobischs „Formalismus“ ist in diesem Sinne (auch) ein Instrument zur Operationalisierung von Symbolen.

Somit belegt der Fall Drobisch in der Tat die Annahme, dass sich im 19. Jahrhundert ‚substanzielle‘ und ‚operationale‘ Bedeutungen des Terminus ‚formal‘ überlagern. Bei Drobisch spielen einerseits Bedeutungsnuancen von ‚formal‘ eine Rolle, die sich im Interpretationsrahmen der Opposition von Form und Materie erschließen lassen. Andererseits macht Drobisch Gebrauch von solchen Bedeutungsnuancen von ‚formal‘, die im Sinne der Reglementierung von (ggf. symbolisch oder quasi-mathematisch modellierten) Operationen zu verstehen sind. Die Kompatibilität der beiden Aspekte ergibt sich bei Drobisch daraus, dass er die Logik nicht

als Wissenschaft der Bedingungen der Möglichkeit, der konstitutiven Regeln des Denkens begreift. Vielmehr betont Drobisch den ‚regulativen‘ (oder ‚disziplinari-schen‘) Charakter der Logik.

Kurz: Drobischs Logik ist in Macfarlanes Sinne 2-formal (sowie tendenziell 3-formal, und zwar im engeren Sinne). In dieser Hinsicht ist ihre Kennzeichnung als ‚formale Logik‘ im Sinne von Dutilh Novaes’ Bedeutungscluster (I) zu verstehen. Drobischs Logik ist aber nicht in Macfarlanes Sinne 1-formal. Just weil sie aber nicht in Macfarlanes Sinne 1-formal ist, ist sie auch in Dutilh Novaes’ Interpretationsrahmen (II) zu interpretieren.¹⁰³

Literatur

- Allihn, Friedrich Heinrich Theodor (1864): Recension. Drobisch, M. W., Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft. 3. Auflage. In: *Zeitschrift für exacte Philosophie im Sinne des neuern philosophischen Realismus* (4), 207–208.
- Drobisch, Moritz Wilhelm (1836): *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen. Nebst einem logisch-mathematischen Anhang*. Leipzig: Voß.
- Drobisch, Moritz Wilhelm (1851): *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen. Mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaften*. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Leipzig: Voß.
- Drobisch, Moritz Wilhelm (1863): *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen. Mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft*. Dritte, neu bearbeitete Auflage. Leipzig: Voß.
- Dutilh Novaes, Catarina (2011): The Different Ways In Which Logic is (said to be) Formal. In: *History and Philosophy of Logic* (32:4), 303–332.
- Harms, Friedrich (1845): Über die Möglichkeit und die Bedingungen einer für alle Wissenschaften gleichen Methode. Ein Beitrag zur Logik (Schluß). In: *Zeitschrift für Philosophie und spekulative Theologie* (14:1), 1–49.
- Hegel, Georg Wilhelm Friedrich (1812): *Wissenschaft der Logik*. Erster Band. Die objective Logik. Nürnberg: Schrag.

103. Wie im Einleitungsabschnitt ausgewiesen, gilt hier die von Dutilh Novaes abweichende Voraussetzung, dass konstitutive Regeln nicht *per se* zu (II), also zur Gruppe der regel- oder handlungsbasierten Bedeutungen gehört.

- Herbart, Johann Friedrich (1836): [Rezension] Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen. Nebst einem logisch-mathematischen Anhang. Von M. W. Drobisch. In: *Göttingische gelehrte Anzeigen* (10), Sp. 1267–1274.
- Hermann, Conrad (1878): *Hegel und die Logische Frage der Philosophie in der Gegenwart*. Leipzig: Schäfer.
- Kant, Immanuel (1787): *Kritik der reinen Vernunft*. Zweyte hin und wieder verbesserte Auflage. 2. Aufl. Riga: Hartknoch.
- Ulrici, Hermann (1869): Zur logischen Frage. (Mit Beziehung auf die Schriften von A. Trendelenburg, L. George, Kuno Fischer und F. Ueberweg). I. Formale oder materiale Logik? Verhältniß der Logik zur Metaphysik. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 55), 1–63.

Auswahlbibliographie zur „logischen Frage“

Historische Stellungnahmen

- Biedermann, Gustav (1869): *Kant's Kritik der Reinen Vernunft und die Hegel'sche Logik in ihrer Bedeutung für die Begriffswissenschaft*. Prag: Tempsky.
- Biedermann, Gustav (1870): *Zur logischen Frage*. Prag: Tempsky.
- Bratuschek, Ernst (1875): Besprechung zur Logik: Die Reform der Logik von F. Harms. In: *Philosophische Monatshefte* (11), 230–234.
- Fichte, Immanuel Hermann (1843): Die logische Frage zwischen Trendelenburg und Gabler. Der gegenwärtige Zustand der Hegel'schen Schule. Kampf des ‚absoluten Wissens‘ gegen den ‚Empirismus‘. In: *Zeitschrift für Philosophie und spekulative Theologie* (11:1), 43–128.
- Fischer, Kuno (1870): *Anti-Trendelenburg. Eine Gegenschrift*. Zweite Auflage. Jena: Dabis.
- Gabler, Georg Andreas (1841): Trendlenburg [sic!], logische Untersuchungen (Erster Artikel). In: *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*, Bd. II, no. 65, Sp. 513–520.
- Gabler, Georg Andreas (1841): Logische Untersuchungen von Adolf Trendelenburg (Fortsetzung). In: *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*, Bd. II, no. 66, Sp. 522–528.

- Gabler, Georg Andreas (1842): Gabler veröffentlichte in der zweiten Jahreshälfte 1842 in den Heftnummern 81 und 82 sowie 114 und 115 der *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik* (1842, Bd. II) weitere Auseinandersetzungen mit Trendelenburg. Diese konnten von der Autorin bislang noch nicht zur Überprüfung verfügbar gemacht werden.
- Gabler, Georg Andreas (1843): *Die Hegel'sche Philosophie. Beiträge zu ihrer richtigern Beurtheilung und Würdigung. Das Absolute und die Grundfrage aller Philosophie bei Hegel im Unterschiede von der Fassung anderer Philosophen.* Berlin: Duncker.
- George, Leopold (1868): *Die Logik als Wissenschaftslehre.* Berlin: Georg Reimer.
- George, Leopold (1870): Sendschreiben an Herrn Prof. Dr. Ulrici betreffend seine Stellung zur logischen Frage. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 57), 85–108.
- Harms, Friedrich (1844): Über die Möglichkeit und die Bedingungen einer für alle Wissenschaften gleichen Methode. Ein Beitrag zur Logik. In: *Zeitschrift für Philosophie und spekulative Theologie* (13:2), 249–257.
- Harms, Friedrich (1845): Über die Möglichkeit und die Bedingungen einer für alle Wissenschaften gleichen Methode. Ein Beitrag zur Logik (Schluß). In: *Zeitschrift für Philosophie und spekulative Theologie* (14:1), 1–49.
- Harms, Friedrich (1846): Über die Möglichkeit und die Bedingungen einer für alle Wissenschaften gleichen Methode. Ein Beitrag zur Logik. Zweiter Artikel In: *Zeitschrift für Philosophie und spekulative Theologie* (15:1), 1–31.
- Harms, Friedrich (1846): Über die Möglichkeit und die Bedingungen einer für alle Wissenschaften gleichen Methode. Ein Beitrag zur Logik (Schluß). In: *Zeitschrift für Philosophie und spekulative Theologie* (15:2), 147–191.
- Harms, Friedrich (1846): Von der Reform der Logik und dem Criticismus Kants, Ein Entwurf. In: *Jahrbücher für speculative Philosophie und die philosophische Bearbeitung der empirischen Wissenschaften* (4), 128–164.
- Harms, Friedrich (1874): *Die Reform der Logik.* Berlin: Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften (G. Vogt). In Commission bei F. Dümmler.
- Hermann, Conrad (1863): *Die Theorie der Denkvermögen.* Dresden: Kuntze.
- Hermann, Conrad (1872): Die logische Frage der Philosophie in der Gegenwart. In: *Philosophische Monatshefte* (8:1), 15–22.
- Hermann, Conrad (1872): Zur Kritik der Hegelschen Logik. In: *Philosophische*

Monatshefte (8:10), 511–518.

- Hermann, Conrad (1878): *Hegel und die Logische Frage der Philosophie in der Gegenwart*. Leipzig: Schäfer.
- Lindner, Gustav Adolph (1864): Rezension. Logische Untersuchungen von Adolf Trendelenburg. Zweite ergänzte Auflage I. und II. Band. In: *Zeitschrift für exacte Philosophie im Sinne des neuern philosophischen Realismus* (4), 270–296.
- Lott, Franz Carl (1844): *Construction und Kritik der Hegel’schen Logik*. Wiesbaden: Friedrich.
- Michelet, Karl L. (1861): Die dialektische Methode und der Empirismus. In Sachen Trendelenburgs gegen Hegel. In: *Der Gedanke* (1), 111-126, 187-201.
- Rabus, Georg Leonhard (1873/1874): Zur logischen Frage. I. Anschauung und Denken. In: *Philosophische Monatshefte* (9), 17-26, 57-65.
- Rabus, Georg Leonhard (1873/1874): Zur logischen Frage. II. Die Vorstellung. In: *Philosophische Monatshefte* (9), 305–317.
- Rabus, Georg Leonhard (1873/1874): Zur logischen Frage. III. Die logischen Gesetze. In: *Philosophische Monatshefte* (9), 409–423.
- Rabus, Georg Leonhard (1874): Zur logischen Frage. IV: Urtheil und Begriff. In: *Philosophische Monatshefte* (19 [= 10]), 433–447.
- Rabus, Georg Leonhard (1880): *Die neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete der Logik bei den Deutschen und Die logische Frage*. Erlangen: Deichert.
- Rabus, Georg Leonhard (1880): *Die Ursachen der modernen Reformversuche auf dem Gebiete der Logik*. Speier: Kranzbühler.
- Rosenkranz, Karl (1872): Trendelenburg [sic!] und Hegel. In: *Die Gegenwart* (2:28), 72–74.
- Schmid, Leopold (1864): Recensionen. Der Standpunkt Trendelenburg’s, dargestellt und beleuchtet von Prof. Dr. Leopold Schmid. Historische Beiträge zur Philosophie, Bde. 1 & II.; Logische Untersuchungen, Bde I & II., 2. Aufl.; Naturrecht; Philos. Abhandlungen der Berliner Acad. d. W. a.d. J. 1856; Auszug aus d. Monatsbericht d. Acad. z. Berlin, 1860, 5. Juli. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (44), 123–147.
- Trendelenburg, Friedrich Adolf (1842): Zur Geschichte von Hegel’s Logik und dialektischer Methode. Die logische Frage in Hegel’s Systeme. Eine Aufforderung zu ihrer wissenschaftlichen Erledigung. In: *Neue Jenaische Allgemeine Literatur-Zeitung* (1:97-99), 405-408; 409-412; 413-414.

- Trendelenburg, Friedrich Adolf (1843): *Die logische Frage in Hegel's System. Zwei Streitschriften*. Leipzig: Brockhaus.
- Trendelenburg, Friedrich Adolf (1840): *Logische Untersuchungen*. 2 Bände. Berlin: Bethge.
- Trendelenburg, Friedrich Adolf (1855): Ueber den letzten Unterschied der philosophischen Systeme. In: Ders.: *Historische Beiträge zur Philosophie. Zweiter Band, vermischte Abhandlungen*. Berlin: Bethge, 1–30.
- Trendelenburg, Friedrich Adolf (1862): *Logische Untersuchungen*. 2., ergänzte Auflage. 2 Bände. Leipzig: Hirzel.
- Ulrici, Hermann (1841): *Ueber Princip und Methode der Hegelschen Philosophie. Ein Beitrag zur Kritik derselben*. Halle: Lippert.
- Ulrici, Hermann (1869): Zur logischen Frage. (Mit Beziehung auf die Schriften von A. Trendelenburg, L. George, Kuno Fischer und F. Ueberweg.). I. Formale oder materiale Logik? Verhältniß der Logik zur Metaphysik. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 55), 1–63.
- Ulrici, Hermann (1869): Zur logischen Frage. (Mit Beziehung auf die Schriften von A. Trendelenburg, L. George, Kuno Fischer und F. Ueberweg.). II. Die logischen Gesetze. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 55), 185–237.
- Ulrici, Hermann (1870): Zur logischen Frage. (Mit Beziehung auf die Schriften von A. Trendelenburg, L. George, Kuno Fischer und F. Ueberweg.). IV. Begriff, Urtheil, Schluß. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 56), 193–250.
- Ulrici, Hermann (1870): Zur logischen Frage. (Mit Beziehung auf die Schriften von A. Trendelenburg, L. George, Kuno Fischer und F. Ueberweg.). III. Die Kategorien. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 56), 1–46.
- Ulrici, Hermann (1870): Antwort. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (N. F. 57), 108–120.
- Ulrici, Hermann (1870): *Zur logischen Frage*. Halle: Pfeffer.

Beiträge zur wissenschaftlichen Aufarbeitung

- Frank, Hartwig (1991): Reform efforts of logic at mid-nineteenth century in Germany. In: William R. Woodward und Robert S. Cohen (Hg.): *World Views and*

- Scientific Discipline Formation. Science Studies in the German Democratic Republic.* Papers from a German-American Summer Institute, 1988. Boston, Dordrecht, London: Springer (Boston Studies in the Philosophy of Science, 134), 247–258.
- Gabriel, Gottfried (2008): Wie formal ist die formale Logik? Friedrich Adolf Trendelenburg und Gottlob Frege. In: Peter Bernhard und Volker Peckhaus (Hg.): *Methodisches Denken im Kontext. Festschrift für Christian Thiel.* Mit einem unveröffentlichten Brief Gottlob Freges. Paderborn: Mentis, 115–132.
- Gerhard, Myriam (2013): *Hegel und die logische Frage.* In: Hegel-Jahrbuch (19:1), 145–155.
- Gerhard, Myriam (2015): *Hegel und die logische Frage.* Berlin, Boston: de Gruyter (Hegel-Jahrbuch Sonderband, 6).
- Peckhaus, Volker (1995): *Hermann Ulrici (1806-1884). Der Hallesche Philosoph und die englische Algebra der Logik.* Mit einer Auswahl von Texten Ulricis und einer Bibliographie seiner Schriften. Halle: Hallescher Verlag.
- Peckhaus, Volker (2005): Gegen ‚neue unerlaubte Amalgamationen der Logik‘. Die nachhegelsche Suche nach einem neuen Paradigma in der Logik. In: Rüdiger Bubner und Gunnar Hindrichs (Hg.): *Von der Logik zur Sprache.* Stuttgarter Hegel-Kongress 2005. Stuttgart: Klett-Cotta, 241–255.
- Peckhaus, Volker (2013): Logik und Metaphysik bei Adolf Trendelenburg. In: Guillaume Lejeune (Hg.): *La question de la logique dans l’Idéalisme allemand.* Actes du colloque de Bruxelles, 7-9 avril 2011. Hildesheim, Zürich, New York: Olms, 283–296.
- Schenk, Günter (2008): Aspekte einer topologischen Logik bei Hermann Ulrici. In: Peter Bernhard und Volker Peckhaus (Hg.): *Methodisches Denken im Kontext. Festschrift für Christian Thiel.* Mit einem unveröffentlichten Brief Gottlob Freges. Paderborn: Mentis, 87–100.
- Schmidt, Josef (1977): *Hegels Wissenschaft der Logik und ihre Kritik durch Adolf Trendelenburg.* Zugl. Univ.-Diss. 1976. München: Berchmann (Pullacher philosophische Forschungen, XIII).
- Vilkko, Risto (1999): Trendelenburg on the Hegelian Side of the Logic Question. In: *Metaphysics in the Post-Metaphysical Age.* Papers of the 22nd International Wittgenstein Symposium. Kirchberg am Wechsel, August 15-21. Austrian Ludwig Wittgenstein Society. Kirchberg am Wechsel. 320–325.
- Vilkko, Risto (2002): *A Hundred Years of Logical Investigations. Reform Efforts*

of Logic in Germany, 1781-1879. Paderborn: Mentis.

Vilkko, Risto (2009): The Logic Question During the First Half of the Nineteenth Century. In: Leila Haaparanta (Hg.): *The Development of Modern Logic.* Oxford, New York: Oxford University Press, 203–221.

Die Idee einer mathematischen Philosophie: Von Descartes bis zur funktionalen Semantik

Edward Kanterian, University of Kent

Abstract

Seit jeher schon hat die Mathematik eine wichtige Orientierungsfunktion für die Philosophie gespielt. Platon sah die Geometrie als eine wichtige Vorstufe der Dialektik an. Leibniz träumte davon, Meinungsverschiedenheiten in der Metaphysik und Moralphilosophie rein rechnerisch schlichten zu können. Frege und Russell mathematisierten die Logik und verbanden damit auch die Hoffnung, dass die neue Logik die traditionellen Probleme der Philosophie lösen helfen könnte. In der Gegenwart erlebt die sogenannte mathematische Philosophie vollends einen Boom, wenn man ihren Anhängern Glauben schenken darf. Doch wie legitim ist eigentlich diese Entwicklung? Ist die Philosophie, oder ein Teil der Philosophie, wirklich ein Teil der Mathematik? Anhand ausgesuchter Episoden bei Descartes, Leibniz, Wolff, Kant, Frege und der gegenwärtigen Sprachphilosophie sollen im Folgenden problematische Aspekte des mathematischen Paradigmas in der Philosophie diskutiert werden.

1 Platon und die Mathematik

ΓΕΩΜΕΤΡΗΤΗΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ – Keiner soll eintreten, der der Geometrie unkundig ist. Bekanntlich soll dieser Spruch über den Eingang von Platons Akademie gestanden haben. Ob dem so ist oder nicht, der Spruch ist durchaus im Sinne

Platons zu verstehen, heißt es doch im 7. Buch der *Politeia*, die Bürger im idealen Platonischen Staat dürften „der Geometrie nicht unkundig“ sein. Denn zum einen ist die Geometrie (und auch die Arithmetik) die „Erkenntnis des immer Seienden“, hat also einen ontologischen Wert, zum anderen nötigt ihr Studium die menschliche Seele, „sich nach jener Gegend hinzuwenden, in der das Seligste von allem Seienden sich befindet“, was das reine Denken befördert und erleichtert.¹

Nach Platon hat die Mathematik also eine wichtige Orientierungsfunktion für die Philosophie. Dennoch bleibt für ihn das Studium der Mathematik nur eine Vorstufe der wahren Philosophie. Im berühmten Liniengleichnis im 6. Buch der *Politeia* steht über der mathematischen Erkenntnisart (*διανοια*) noch die dialektische Erkenntnisart (*νοησις*). Zwar sind beide Vernunftkenntnisse. Doch Platon kritisiert die Mathematiker dafür, dass ihre Beweise mit ungeklärten Begriffen (wie „Gerade“ und „Ungerade“ etc.) operieren. So vermögen die Mathematiker letztlich nicht, zu einer „Vernunftkenntnis über ihre Gegenstände“ zu gelangen (511d). Zu dieser vernünftigen Einsicht kommt es nach Platon erst durch die philosophische Reflektion, die Dialektik, durch die die höchsten Prinzipien des Wissens, auch des mathematischen, aufgeklärt werden.

Platon wäre es daher nicht eingefallen, von einer „mathematischen Philosophie“ zu sprechen und die Philosophie als einen Zweig der Mathematik zu konzipieren. Doch die Versuchung, in der Mathematik eine, oder gar *die* Methode zur Lösung philosophischer Probleme zu suchen, ist zu einem wichtigen Motiv der modernen Ära geworden, erst recht in der analytischen Philosophie. Man denke nur an Leibnizens Wunsch, in der Metaphysik und der Moral so rasonieren zu können wie in der Geometrie und Analysis, oder an Bertrand Russells Hoffnung, die mathematische Logik möge helfen, die traditionellen Probleme der Philosophie zu lösen, wie er in *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) ausführte.² Doch wie berechtigt ist eine solche Hoffnung? Anhand ausgesuchter Episoden von Lullus, über Descartes, Leibniz, Wolff, Kant bis hin zu Frege und der gegenwärtigen Sprachphilosophie, soll diese Frage kritisch erörtert werden.

2 Ein Vordenker: Lullus

Den Versuch, die Philosophie zu mathematisieren, kann man zuerst wohl bei Raymundus Lullus ausmachen. Dieser suchte schon im 13. Jahrhundert durch eine Kombinationskunst (*ars combinatoria/generalis*) die verschiedenen komplexen

1. *Politeia*, 526c-527c, zitiert nach Platon 1990.

2. Russell 1919, S. vi. Ich komme auf Leibnizens Position noch zurück.

Prädikate Gottes aus einem Urprinzip systematisch abzuleiten, wobei das Urprinzip, A, durch neun einfache Prädikate (*dignitates*, Würden) artikuliert wird, z.B. Güte, Größe, Dauer, Macht, Wissen, Tugend. Jedem dieser Prädikate wird jeweils ein Buchstabe B bis K zugewiesen. Durch einfache Kombinationsregeln können diese Buchstaben mechanisch, vermittelt von Scheiben, jeweils zu zweit verbunden werden und ergeben ein Urteil. So bedeutet etwa BC „[Gottes] Güte ist groß“.³ Auf diese Weise sollte schließlich das gesamte menschliche Wissen dargestellt, Gott erfasst und die Ungläubigen bekämpft werden.

Natürlich waren diese Ansprüche weit hergeholt. Die Kombinationskunst von Lullus bestand im Grunde nur aus einem Mechanismus zur *Formung* von einfachen Sätzen aus einem Grundalphabet an Prädikaten und einer bestimmten festgelegten syntaktischen Form (AB und ABC).⁴ Dennoch finden wir bei Lullus schon wichtige Aspekte des *mathematischen Paradigmas* in der Philosophie angedeutet. Erstens kommt hier das Ideal einer symbolischen *Kunstsprache* auf, mit deren Hilfe wir Urteile formen und übersichtlich darstellen. Zweitens setzt die Behauptung, dass diese Kunstsprache alle Urteile menschlichen Wissens ausdrücken kann, voraus, dass alle Urteile auf eine endliche Zahl von Grundkomponenten oder Grundprädikaten zurückgeführt werden kann. Dies ist das Ideal der *zerlegenden Analyse* in letzte logische-semantische Atome. Drittens wird hier die *Kalkulierbarkeit* der Wahrheit dieser Urteile suggeriert. Dabei, so scheint es, sollen auch neue Wahrheiten auf diese Weise gefunden werden können. Das Ideal ist hier daher, viertens, eine synthetische *Erfindungskunst (ars inveniendi)*. Fünftens: Da im Prinzip diese Kombinations- und Erfindungskunst alle Urteile menschlichen Wissens erfasst, nach gewissen Regeln und einem Grundvokabular, werden alle Gegenstandsbereiche, und somit alle Wissenschaften, auf einen Nenner gebracht, einer *Einheitswissenschaft* oder zumindest Grundlagenwissenschaft. Diese fünf Aspekte des mathematischen Paradigmas sollten in den folgenden Jahrhunderten immer wiederkehren, in unterschiedlichen Konstellationen, bis hin zur analytischen Philosophie. Wir wollen dies nun an den Beispielen von Descartes, Leibniz, Frege und der funktionalen Semantik verfolgen.

3. Engfer 1982, S. 177f. Lullus' „Maschine“ konnte auch komplexere Urteile generieren, z.B. relationale Urteile von der Art „[Gottes] Güte ist verschieden von menschlicher [Güte]“ (BBE) ableiten. Siehe Copenhaver und Schmitt 1992, S. 293.

4. Die Wahrheit dieser Sätze ist durch ihre bloße Formulierbarkeit natürlich nicht gewährleistet. Lullus' Kombinationskunst war im Grunde eher eine Art Gedächtnisinstrument und Konversationsmotivator. (Eine aktuelle Analogie wäre vielleicht der Postmodernist Generator; siehe <http://www.elsewhere.org/pomo/>).

3 Descartes' Traum

Die Verheißungen der Lullischen Kombinationskunst wurden in der Folgezeit nicht vergessen, und spätestens im 17. Jahrhundert gewannen sie wieder an Aktualität, in einer Zeit, in der Fortschritte in der Mathematik die philosophische Fantasie ohnehin zu befeuern angingen. Auf Descartes machte die lullische Kombinationskunst als solche zwar keinen Eindruck, da er sie für eine rein mechanische Darstellungsweise hielt, die bloß befähigt „über das, was man nicht weiß, ohne Verstand zu reden“, wie er im *Discours de la méthode* (1637) darlegt.⁵ Der Syllogistik, also der formallogischen Deduktion, steht er aus demselben Grund gegenüber, und sogar der „Analysis der Alten [...] und der Algebra der Neueren“ (AT 6:17).

Doch die letzte Bemerkung ist eher Rhetorik. Descartes sagt auch gleich, dass er eine neue wissenschaftliche Methode aufbauen möchte, die die Vorteile der Logik, Geometrie und Algebra nutzt. Damit meint er eine *mathesis universalis*, eine Wissenschaft, die nicht nur die Teildisziplinen der Mathematik, sondern auch die Astronomie, Musik, Mechanik, Optik unter sich fasst, also alle Teilgebiete, die „Ordnung oder Mass“ untersuchen, wie es in *Regulae ad directionem ingenii* heißt (ca. 1628, AT 10:377). Als Beispiel der Vereinheitlichung zweier dieser Teilgebiete, der Algebra und Geometrie, präsentiert Descartes im „Anhang“ seines *Discours* den Traktat *La Géométrie*, mit dem er bekanntlich die analytische Geometrie begründete. Jedenfalls ist die *mathesis universalis* die Einheitswissenschaft quantifizierbarer Größen – somit nur *eine* Einheitswissenschaft, der Quantitäten, nicht *die* Einheitswissenschaft.

Daneben, und nicht immer genau unterschieden, findet sich aber bei Descartes die umfassendere Vision einer absolut universalen Einheitswissenschaft, zu der auch die Philosophie gehört, und die sich in mehreren Hinsichten am Vorbild der Mathematik orientiert. Die Vermischung der spezielleren *mathesis universalis* mit dieser absolut universalen Einheitswissenschaft findet sich an der schon zitierten Stelle im *Discours*. Dabei gibt Descartes folgende methodische Regeln an: (1) ein Wahrheitskriterium, (2) eine analytische Regel, (3) eine synthetische Regel – zunächst nur für die spezielle *mathesis universalis*. Das Wahrheitskriterium besagt: „niemals eine Sache als wahr anzunehmen, die ich nicht als solche sicher und einleuchtend erkennen kann“, die sich meinem Geist so „klar und deutlich“ darstellt, dass ich gar nicht daran zweifeln kann (AT 6:20). Nach der analytischen Regel soll ich jedes Problem in so viele Teile zerlegen wie möglich und notwendig. Tatsächlich muss ich aber weiter schreiten zu einer analytischen Zerlegung in absolut *einfachste*

5. AT 6:19. Zitiert werden der *Discours*, die *Regulae* und die *Meditationes* nach der deutschen Übersetzung in Descartes 1996.

und epistemisch deutlichste Objekte, weil die synthetische Regel voraussetzt, dass wir von diesen einfachsten und deutlichsten Objekten zur Erkenntnis der kompliziertesten stufenweise aufsteigen (AT 6:18; cf. auch Regel 6 der *Regulae*, 10:381). Hier kann man die Regeln 3 und 5 aus den *Regulae* ergänzen, wo Descartes alle genuine Erkenntnis als Intuition und Deduktion charakterisiert. *Intuition* ist dabei „müheleses und deutlich bestimmtes Begreifen“ allereinfachster Tatsachen und Naturen aus dem Lichte der Vernunft, und Deduktion eine Kette aus Intuitionen (AT 10:368f., 10:383). Dieses analytische-synthetische Verfahren fängt demnach mit „verwickelten und dunklen Propositionen“ an, reduziert sie vermittels Intuition auf das Allereinfachste und beweist daraus alle weiteren Wahrheiten (AT 10:379).

Wie verschiedene Forscher, z.B. Mittelstrass, Engfer, Hintikka und Remes, gezeigt haben, geht dieses Verfahren auf eine bestimmte Auffassung mathematischer, vor allem geometrischer Beweise in der Antike zurück, vor allem bei Pappus (3.-4. Jahrhundert). Descartes' Beispiel in den *Regulae* stammt allerdings aus der Arithmetik. Ich fange mit der „verwickelten“ Tatsache $2 + 2 = 3 + 1$ an. Um diese zu beweisen, muss ich die einfachen Tatsachen $2 + 2 = 4$ und $3 + 1 = 4$ einsehen und zudem einsehen, dass durch Substitution von Gleichem mit Gleichem sich Gleiches ergibt, also $2 + 2 = 4 = 4 = 3 + 1$ (AT 10:369). Die Evidenz des deduktiven Beweises ergibt sich also durch Zurückführung auf intuitiv selbstevidente Gleichungen als Glieder einer lückenlosen Kette. Ein zweites Beispiel für diese Art regressiver Analyse (AT 10:384ff.) wäre die Findung einer mittleren Proportion zwischen zwei gegebenen Proportionen. Wir haben: $\frac{3}{6} = \frac{?}{?} = \frac{12}{24}$. Man sieht relativ schnell, erst recht geometrisch, dass das mittlere Verhältnis $\frac{6}{12}$ sein muss. Doch wenn uns nur die äußeren Glieder 3 und 24 gegeben sind, $\frac{3}{?} = \frac{?}{24}$, sieht man die Lösung nicht ganz so schnell, sondern muss schrittweise mit 2 multiplizieren. Die elegantere und nach Descartes genuinere Methode besteht darin, zu algebraisieren, d.h. „das Unbekannte als bekannt voraussetzen“, indem man algebraische Zeichen/Variablen dafür einsetzt: $\frac{a}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{b}$. Dies ist nach Engfer (1982, S. 140) die analytisch-algebraische Methode von François Vieta (1540-1603). Durch Umformung erhalten wir $A = \sqrt[3]{a^2b}$ und $B = \sqrt[3]{ab^2}$. Für Descartes ist das die genuinere Lösung, weil hier „die Gleichheit zwischen dem gesuchten und irgend etwas Bekanntem klar in die Augen fällt“ (AT 10:440).

Ob Descartes' recht vage Methodenregeln genügen, auch nur mathematische Beweise zu erklären, oder gar eine effektive Methode zur Entdeckung *neuer* mathematischer Wahrheiten ergeben, ist fraglich.⁶ Jedenfalls ist Descartes von solchen

6. Hintikka und Remes verneinen kategorisch, dass es überhaupt eine „analytische“ Erfindungskunst von Beweisen geben kann, da man keine allgemeine Methode angeben kann, mit der wir die Hilfssätze, die für jeden Beweis notwendig sind, generieren können (Hintikka und Remes 1974,

mathematischen Beweisen so sehr beeindruckt, dass er sie zum Paradigma alles wissenschaftlichen Wissens erhebt. Seine mathematische Inspirationsquelle treibt ihn also über den engen Rahmen einer speziellen *mathesis universalis* hinaus. Im *Discours* schreibt er, dass die langen Beweisketten der Geometer ihm suggerieren, „alle Dinge, die menschlicher Erkenntnis zugänglich sind, [könnten] einander auf dieselbe Weise folgen“ (AT 6:20). Und in den *Regulae* ist Descartes noch deutlicher: „wer den richtigen Weg zur Wahrheit sucht, [darf] mit keinem Gegenstand umgehen [...], über den er nicht eine den arithmetischen oder geometrischen Beweisen gleiche Gewissheit gewinnen kann“ (AT 10:366). Das erklärt, warum Descartes mathematische Propositionen wie „Ein Dreieck ist von nur drei Seiten begrenzt“, „Eine Kugel ist nur von einer Fläche begrenzt“ im selben Atemzug nennt mit *philosophisch* relevanten Aussagen wie „Ich denke“, „Ich existiere“.

Wir finden hier eine weitere Komponente des mathematischen Paradigmas in der Philosophie: die Forderung, in der Philosophie die gleiche Art von *Gewissheit* wie in der Mathematik anzustreben. Und so ist Descartes, entgegen seinen eigenen Versicherungen⁷, gar nicht so weit von Lullus entfernt. Auch Descartes hält an der zerlegenden Analyse fest, und glaubt an die Möglichkeit einer Erfindungskunst und der Einheitswissenschaft. Auch die Kombinationskunst scheint für ihn eine mögliches Projekt zu bleiben. Selbst was ihm an Lullus' Kombinationskunst nicht gefiel, war ja das Fehlen evidenter Urteile. Und so schreibt er, dass die Erfindung einer lullischen Symbolsprache, in der man alle Dinge ausdrücken kann, die im menschlichen Geist vorkommen können, von der *wahren Philosophie* abhängt.⁸ Damit meint Descartes, dass diese Sprache erst gebildet werden kann, wenn ihr elementares Vokabular feststeht, das die einfachsten Ideen benennt. Das setzt eine Analyse des Bewusstseins voraus.⁹ Diese einfachsten Ideen sollen durch die Auffindung der einfachsten metaphysischen Propositionen gewonnen werden, d.h. den Propositionen „Ich existiere“, „Ich bin ein denkendes Ding“ und „Gott existiert“. Wie wir wissen, sind diese ja gerade die Kernpropositionen der berühmten *Meditationes de prima philosophia* (1641). Und tatsächlich bezeichnet Descartes die Methode dieses Buches ausdrücklich als *analytisch* (AT 7:355). Wenn wir also erst einmal die elementaren metaphysischen Wahrheiten ausmachten, könnten wir abstrakte Symbole für sie einführen und schließlich nach der von Descartes anvisierten Art der Mathematiker rechnen.

Doch Descartes' Mathematisierung der Philosophie blieb ein utopisches Projekt. Er selbst verwies die Realisierbarkeit einer solcher Sprache „in das Land der Mär-

S. 112f.).

7. Und *pace* Gaukroger 1995, S. 102.

8. An Pierre Mersenne, 20.11.1629 (AT 1:76ff.).

9. Vgl. Mittelstrass 1979, S. 596.

chen“, wie er gegenüber Mersenne bekannte (AT 1:82). Wir können hier kritisch nachfragen: Welches ist überhaupt das Kriterium der Einfachheit einer metaphysischen Wahrheit? Durch welche Methode der analytischen Zerlegung gewinnen wir sie genau? Gibt es in der Philosophie die Erkenntnisquelle der Intuition? Und sind philosophische Schlussfolgerungen Aneinanderreihungen von intuitiven Wahrheiten? Inwiefern ist die Methode der *Meditationes*, d.h. der Schritt von der (Hilfs-)annahme, dass wir eigentlich nichts wissen (in der Ersten Meditation), zur Gewissheit des „Ich denke“ (Zweite Meditation) usw. wirklich vergleichbar mit den erwähnten Beispielen mathematischer Analysen? Bei jenen mathematischen Beispielen handelte es sich ja um Beweise durch Zurückführungen auf Gleichungen, durch arithmetische und algebraische *Umformungen*. Aber Zurückführungen auf Gleichungen, durch Umformungen, sind in der Philosophie kaum zu haben, jedenfalls sind Descartes' metaphysische Kernpropositionen, wie das „Ich denke“, nicht so gewonnen. Allenfalls kann man von einer gewissen Analogie in der Beweisform sprechen; denn so wie es in der Mathematik indirekte Beweise gibt (ein Satz wird bewiesen, indem man aus seinem Gegenteil einen Widerspruch folgert), kann man, *vielleicht*, auch das „Ich denke“ etc. als das Ergebnis einer Art apagogischen Beweises ansehen (nämlich durch die hilfswise Annahme der Falschheit aller meiner bisherigen Überzeugungen)¹⁰.

Descartes sagt uns eigentlich gar nicht, wie wir die oben illustrierten arithmetischen und algebraischen Beweismethoden auf die Philosophie übertragen sollen. Auch ist es unklar, wie man von „Ich denke, also bin ich“ und „Gott existiert“ zu allen anderen philosophischen Wahrheiten, „synthetisch“ oder gar rein rechnerisch schreiten soll. Schließlich: Könnte es nicht sein, dass die mathematische „Gewissheit“ den spezifischen Beweisverfahren der Mathematik geschuldet ist? Es ist fraglich, ob wir uns nach dieser Gewissheit in der Philosophie sehnen sollen, noch *bevor* es ausgemacht ist, dass die Philosophie eine mathematische Disziplin ist.

4 Leibniz und Kant

Solche Fragen wurden im 17. und 18. Jahrhundert durchaus gestellt. Eine ganze Reihe von Denkern wies auf die Unterschiede zwischen Mathematik und Philosophie hin, z.B. Hobbes, Locke, Berkeley, Maupertuis, Crusius. Zu den wichtigsten Besonderheiten der Mathematik gehörten demnach die Willkürlichkeit und Definierbarkeit der mathematischen Begriffe (d.h. ihr konstruktiver Charakter), die

10. Siehe Engfer 1982, S. 152ff.

Beweisbarkeit mathematischer Wahrheiten, der Fokus auf den Begriff der Quantität, der anschauliche Charakter der geometrischen Erkenntnis, die Eindeutigkeit und Einfachheit mathematischer Zeichen, und nicht zuletzt die hohe Gewissheit der Mathematik.¹¹

Dennoch faszinierte das mathematische Ideal weiterhin viele Denker (manchmal die dieselben, die es ablehnten), z.B. Hobbes, Pascal, Malebranche, Spinoza, Locke, Berkeley, Athanasius Kircher, Erhard Weigel, und natürlich Leibniz. Weigel, der Jenaer Lehrer von Leibniz, schrieb 1693 eine Abhandlung mit dem Titel *Von der Vortrefflichkeit der mathematischen Philosophie gegen der Scholastischen und Cartesianischen*. Weigel suchte die aristotelische Metaphysik nach der axiomatischen Methode von Euklids Geometrie darzustellen, also mit Hilfe von Definitionen, Postulaten, Axiomen, Theoremen. Diese axiomatische Methode „nach geometrischer Art“ erfreute sich einiger Beliebtheit in der Philosophie seit dem 17. Jahrhundert. Spinozas *Ethica* (1677) ist das beste Beispiel. Allerdings kommentierte schon der Philosoph und Mathematiker Pierre Louis Maupertuis (1698-1759) diese Methode kritisch: „Car il ne faut pas s’y tromper dans quelques Ouvrages, qui n’ont de mathématique que l’air & la forme, & qui au fond ne sont que de la Metaphysique la plus incertaine & la plus ténébreuse. L’exemple de quelques Philosophes doit avoir appris que les mots de Lemme, de Theoreme & de Corollaire, ne portent pas par tout la certitude mathématique“¹².

Leibniz bemängelte die Vagheit der Cartesianischen „mathematischen“ Methodenregeln, und wollte es besser machen. Von Anfang galt sein Augenmerk der Erschaffung einer Kunstsprache (*characteristica universalis*) und eines Kalküls (*calculus ratiocinator*). Für ihn blieb Lullus’ Kombinationskunst keine bloße Idee, sondern er suchte sie wirklich zu realisieren. Von dieser Kombinationskunst, einer „Kunst der Unfehlbarkeit“ oder „universalen Mathematik“, versprach sich Leibniz enorm viel.¹³ Schon seine *Dissertatio de arte combinatoria* (1666), die er als 20jähriger schrieb, sollte eine „neue philosophische Rechnungsart der universalen Wahrheitsform“ kreieren, mit deren Hilfe wir „ein tiefes Wissen aller Dinge“ erlangen und anderen Völkern die Wahrheiten der natürlichen Religion, auf denen die Wahrheiten der geoffenbarten Religion (also des Christentums) basieren, nahebringen.¹⁴ Auch die Philosophie sollte davon profitieren, denn wenn wir über die universelle Sprache verfügen, die nicht die Wörter, sondern die Gedanken abbildet, so „könnten wir in der Metaphysik und der Moral so rasonieren wie in der Geometrie und

11. Siehe Tonelli 1959.

12. Maupertuis 1746, S. 278.

13. *Nouveaux essais sur l’entendement humain*, IV, 17:§4, Leibniz 1961, S. 549f.

14. Leibniz 1880, S. 73, sowie Brief an Verjus vom 2.12.1697 (Leibniz 1990, S. 59, 61). Fast zeitgleich, im Jahre 1699, unternahm John Craig, ein Freund Newtons, einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis der Wahrheit des Neuen Testaments. Siehe Craig 1964.

Analysis“¹⁵. „Wenn eine Meinungsverschiedenheit [zwischen Philosophen] aufkommen würde, so wäre sie genauso einfach zu schlichten wie ein Streit zwischen zwei Buchhaltern. Denn es würde genügen, den Stift in die Hand zu nehmen, sich an den Schreibtisch zu setzen und sich zu sagen: *Calculemus* (Lasst uns rechnen!)“¹⁶.

Worauf gründete Leibniz solche Hoffnungen? Auf symboltheoretischen, theologischen, metaphysischen, erkenntnistheoretischen und logischen Annahmen. Ihnen allen liegt jedoch die Mathematik als Strukturprinzip zugrunde, wie von Engfer nachgewiesen.¹⁷ Ich will das kurz zeigen.

Leibniz wollte, dass seine *lingua characteristica* das Wesen der Dinge erfassen soll. Sie solle nicht „das Sprechen, sondern die Gedanken abbilden, so wie die Algebra“¹⁸. Und weiter: „Die Zeichen dienen dann am besten der Kunst des Erfindens, wenn sie das innere Wesen des Dinges ausdrücken und gleichsam malen. So sind die Zeichen in meinem Kalkül. [...] Sie führen ins Innere der Dinge selbst“¹⁹. Leibnizens Charakteristik basiert also auf einer behaupteten Isomorphie zwischen unserer Sprache, unseren Gedanken und der Struktur der Wirklichkeit. Eine kritische Frage stellt sich sofort: ist schon das Zeichensystem der Algebra überhaupt eine *Sprache*, d.h. drückt es Gedanken aus? Nur dann kann man von einer Isomorphie zwischen Gedanken, Symbolen und der Welt sprechen, die als etwaiges Modell für die formale Sprache der Philosophie dienen kann. Nehmen wir das linksdistributive Gesetz der Algebra, $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$. Hier scheinen wir eine Umformungsregel von schematischen Buchstaben zu haben, die zur Festlegung der Bedeutung der arithmetischen Operationszeichen beiträgt, ohne dass ein wahrer Gedanke damit ausgedrückt wird (wir nennen die Algebra deswegen auch „Buchstabenrechnung“). Damit würde eine aus der algebraischen Symbolik inspirierte Isomorphie zwischen Sprache, Gedanke und Wirklichkeit für eine Mathematisierung der Philosophie schon im Ansatz suspekt sein.

Leibniz schrieb: „Wenn Gott rechnet und sein Denken in die Tat umsetzt, entsteht die Welt“ (Fragment „Dialogus“, 1677).²⁰ Die Welt ist also die Schöpfung eines rechnenden Gottes und ist mathematisch geordnet (das denken heute auch mathematische Philosophen, nur lassen sie Gott aus dem Spiel). Denken, Urteilen

15. Brief an Gallois von 1677, Leibniz 1849, S. 181. Siehe auch Kanterian 2012, S. 7ff.

16. „Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: calculemus“ (aus den „Vorarbeiten zur allgemeinen Charakteristik“, Leibniz 1890, S. 200).

17. Engfer 1982, S. 168ff.

18. „Peindre non pas la parole, mais les pensees comme fait l'Algebre dans les mathematiques“ (an Bouvet, 15.2.1701, Leibniz 2006, S. 316).

19. Brief an von Tschirnhaus von 1678, Leibniz 1859, S. 455, 461.

20. „Cum Deus calculat et cogitationem exercet, fit mundus“ (Leibniz 1890, S. 191).

und Schließen, ist Rechnen mit Begriffen, und daher lässt sich die Wahrheit eines Urteils berechnen. Dabei ist jede Wahrheit für Leibniz immer auf eine Identität zurück zu führen, durch fortgesetzte Substitution.²¹ Ein einfaches Beispiel: In dem analytischen Urteil „Menschen sind Lebewesen“ steckt der Begriff „Mensch“, der aus den Begriffen „vernünftig“ und „Lebewesen“ besteht. Also formalisieren wir nach Leibnizens Identitätskalkül für Begriffe (intensional gedeutet)²²:

$A = \text{Mensch}$	
$B = \text{Lebewesen}$	
$C = \text{vernünftig}$	(Definitionen)
„ A ist B “ bedeutet formal „ $A = A + B$ “	(Axiom; Begriff A enthält Begriff B)
$A = \text{vernünftig} + \text{Lebewesen}$	(durch Begriffszerlegung)
$A = C + B$	(per Definition)
$A = A + B$	(ursprüngliche Aussage)
$C + B = C + B + B$	(Elimination von A in $A = A + B$ durch $C + B$)
$B + B = B$	(Axiom)
$C + B = C + B$	Volle Identität. QED.

Die Aussage „Menschen sind Lebewesen“ ist so bewiesen, durch Begriffszerlegung, Umformung und Zurückführung auf eine schlichte Identität (Gleichung). Eine solche Identität ist eine an sich selbst klare Wahrheit, d.h. wir haben hier vollkommene Evidenz, wie in der Mathematik.²³ Für formale Beweise dieser und komplizierter Art formuliert Leibniz, in immer neuen Anläufen, bemerkenswerte Kalküle²⁴.

Doch nicht alle Urteile sind so leicht zu beweisen, vor allem nicht die nicht-analytischen, etwa „Sokrates schläft jeden Mittwochnachmittag“. Dennoch glaubt Leibniz, dass auch kontingente Urteile sich im Prinzip auf Identitäten zurückführen lassen müssen, denn Wahrheit besteht ja für ihn in der (partiellen oder vollen) Identität von Subjekt und Prädikat. Dafür müssten wir alle Attribute von Sokrates kennen (seinen „Individualbegriff“). Für Gott ist das vielleicht leicht zu bewerkstelligen, doch für uns Menschen lassen sich Individualbegriffe nur in unendlicher Annäherung, sozusagen infinitesimal, erreichen. Leibniz erklärt also den Unterschied zwischen analytischen und kontingenten Wahrheiten in ausdrücklicher Parallele zur Mathematik. Analytische Wahrheiten unterscheiden sich von

21. Vgl. Leibniz 1966, S. 45f. Hobbes dachte ganz ähnlich, nämlich dass das Schlussfolgern eine Form des Rechnens ist (Hobbes 1656, I.I.2).

22. Ich folge hier Lenzen 2004.

23. Siehe Leibniz 1966, S. 34, 46.

24. Leistungsfähiger als Aristoteles' Syllogistik, dabei die moderne Quantifikationstheorie und sogar Logik zweiter Stufe antizipierend, wie Lenzen betont (Lenzen 2004, S. 4).

kontingenten so wie kommensurable von nicht-kommensurablen Zahlen.²⁵

Auch Allgemeinbegriffe lassen sich nicht immer so einfach wie der Begriff „Mensch“ zerlegen. Wir brauchen also eine Methode der Realdefinition, mit der wir jeden gegebenen Begriff in seine letzten Bestandteile zerlegen können. Und diese letzten Bestandteile *muss* es nach Leibnizens Erkenntnistheorie geben. Denn allem Erkennen muss etwas zugrunde liegen, dass durch sich selbst erkannt ist, und das daher einfach sein muss.²⁶ Nun erkennen wir, wenn auch nicht durch sich selbst, dass Sokrates mittwochs schläft, also muss dieses kontingente Urteil in einfachste Bestandteile auflösbar sein. Also muss es einfachste Begriffe geben.²⁷ Haben wir diese Bestandteile, diese einfachsten Begriffe einmal, so besitzen wir die Bausteine zur Kombination aller möglichen Urteile, die wir dann mit dem Kalkül beweisen oder widerlegen können. Das ergäbe die langersehnte metaphysische Erfindungskunst.

Spätestens hier, bei der Gewinnung der einfachsten Begriffe, des Grundvokabulars der *characteristica universalis*, gelangen wir an die Grenzen von Leibnizens Vision. Ich möchte kurz ein paar Probleme nennen. Zum einen finden wir hier, wie bei Descartes, die Idee, in der Philosophie könne man durch bloße quasi-algebraische Umformungen zu substantziellen Wahrheiten gelangen. Diese Idee setzt voraus, dass wir unsere Begriffe genau definieren können, wie in der Mathematik. Leibniz vermochte aber nie ein Kriterium dessen anzugeben, was als einfachster Begriff gelten soll und wie wir diesen gewinnen können.²⁸ Zudem widerspricht die unendliche Analyse kontingenter Urteile der Existenz einfachster Begriffe, es sei denn, wir wollen, in Analogie zur Infinitesimalrechnung, von unendlich „kleinen“ oder einfachen Begriffen sprechen. Aber das macht keinen Sinn. Es ist vollkommen unplausibel, dass ein banales Urteil wie „Sokrates schläft jeden Mittwochnachmittag“ aus unendlich vielen Begriffen bestehen soll. So wie es auch unverständlich ist, was ein Beweis aus „unendlich vielen Schritten“ überhaupt sein soll. Leibnizens mathematische Herangehensweise intellektualisiert hier bestimmte logisch-semantische Tatsachen bis zur Unkenntlichkeit. Ein ähnliches Problem gibt es für jene semantische Theorien der Gegenwart, die behaupten, die Bedeutung eines Satzes sei eine Proposition, und diese sei eine Funktion von möglichen Welten zu Wahrheitswerten.²⁹ Das Verständnis auch nur einfachster Sätze wird so zu etwas ziemlich Obskurem. Ich komme darauf zurück.

25. Siehe Engfer 1982, S. 187.

26. Vgl. Liske 2000, S. 171.

27. Dieses Argument basiert auf unerwiesenen philosophischen Forderungen der Form „X kann nur durch Y erklärt werden, also muss Y existieren“, die man mit Wittgenstein als dogmatisch-metaphysisch klassifizieren kann. Siehe Wittgenstein 2003, §§66, 81, 101, 131, 437.

28. Engfer 1982, S. 181.

29. Siehe Baker und Hacker 1984b, S. 150, über Lewis.

Leibniz war lange Zeit davon überzeugt, wir könnten die einfachsten Begriffe finden. Indem wir ihnen ihre jeweils „charakteristischen Zahlen“ (Primzahlen) zuordnen, könnten wir dann mit ihnen rechnen.³⁰ Hier wird klar, dass die Bestimmung des Vokabulars der *lingua characteristica* schon eine vorgängige Analyse voraussetzt, die die zu repräsentierenden elementaren Strukturen des Denkens/der Welt identifiziert. Doch wie ist diese Analyse auszuführen? Wie bilde ich das Vokabular der Kunstsprache? Ich schreibe: „A“ steht für Begriff B. In meiner Metasprache habe ich also schon ein Symbol, B, für die zu charakterisierende Sache, um die isomorphe Beziehung per Konvention überhaupt herstellen zu können. Wir setzen also entweder eine vorgängige, nicht-formale Analyse des zu formalisierenden Begriffs schon voraus, oder die Formalisierung ist zirkulär.³¹ Genau dies stellte auch Adolf Trendelenburg 150 Jahre nach Leibniz fest (1867).³² Da Leibniz schließlich keine apriorische Methode der Begriffszerlegung einfiel, versuchte er sich dadurch zu helfen, dass er die Enzyklopädien seiner Zeit studierte³³ und daraus Listen von Definitionen einfacher Begriffe kompilierte – ein hoffnungsloses Unterfangen. Und so wurde Leibniz gegen Ende seines Lebens immer skeptischer hinsichtlich der Mathematisierung der Philosophie.

Doch andere versuchten seine Vision zumindest zum Teil weiterzuführen. Sein einflussreichster Anhänger, Christian Wolff, setzte in seinem *Discursus preliminaris* (1728) die Methode der Philosophie ausdrücklich mit der Methode der Mathematik gleich (§139). Denn was beide Disziplinen charakterisiert, so Wolff, ist eine genaue Definition ihrer Ausdrücke (§116), sowie Wahrheit als strenge Beweisbarkeit aus gewissen und unerschütterlichen Grundsätzen (§30).³⁴ Aus diesem Grund könne die Philosophie denselben Grad an Gewissheit erreichen wie die Mathematik. Denn die Mathematik „gibt uns ein Muster der vollkommensten Manier, eins aus dem andern zu schließen, zu welcher der menschliche Verstand gelangen kann, wenn er den höchsten Gipfel der Vollkommenheit erstiegen hat“³⁵.

Diese Parallele zwischen Mathematik und Philosophie hat den Einspruch mancher Zeitgenossen Wolffs provoziert, so z.B. seines Gegners Christian Crusius, der in seinem *Weg zur Gewißheit und Zuverlässigkeit der menschlichen Vernunft* (1747) gleich neun Differenzen zwischen der Philosophie und der Mathematik skizziert (§10). Hier seien fünf dieser Differenzen erwähnt. (1). Die Mathematik hat es nur

30. Leibniz 1966, 34ff.

31. Vgl. Liske 2000, S. 180.

32. Siehe Trendelenburg 1867, einen Artikel, den Frege las und der schon einige gute Kritikpunkte gegen die Mathematisierung der Philosophie enthält.

33. Z.B. Dalgarno's *Lexicon grammatico-philosophicum*, in Dalgarno 1661. Siehe Mittelstrass 1979, S. 607.

34. Siehe Wolff 2006 für eine neuere deutsche Übersetzung.

35. *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (1710), zitiert nach Engfer 1982, S. 221.

mit wesentlichen, keinen akzidentellen Eigenschaften zu tun, weil sie bloß Quantitäten als solche betrachtet. (2) in der Mathematik sind Definitionen sehr genau und werden durch Konstruktionen („Entstehungsart“) direkt gegeben. (3) Die Mathematik besteht aus Herleitungen aus Definitionen, die Philosophie dagegen nicht. (4) Die Mathematik geht nur syllogistisch vor, während es in der Philosophie auch induktive und analogische Schlüsse gibt. (5) Nur die Philosophie hat es mit der „moralischen Betrachtungsweise des Endzwecks“ zu tun, nicht aber die Mathematik.³⁶

Vielleicht von Crusius inspiriert, erhob auch der junge Kant Einspruch gegen die Leibnizsche-Wolffsche Parallele zwischen Philosophie und Mathematik (in der *Untersuchung über die Deutlichkeit und Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*, 1764). In der Mathematik kann man tatsächlich von Definitionen ausgehen, weil diese „synthetisch“ sind, d.h. ihren Gegenstand gleichsam erschaffen. Der „Begriff des Erklärten entspringt allererst durch die Erklärung und hat weiter gar keine Bedeutung als die, so ihm die Definition gibt“ (Ak 2:291). In der Philosophie sind dagegen die Begriffe schon vor ihren Definitionen gegeben und wir übersehen sehr leicht manche ihrer Merkmale, wodurch wir häufig falsche Definitionen angeben. Kant sagt auch, dass wir in der Mathematik direkte Erkenntnismittel ihrer Gegenstände haben, nämlich sinnliche Symbole. Die Zeichen der philosophischen Erkenntnis sind dagegen bloß die Worte unseres *Redegebrauchs*, deren Bedeutung, d.h. die zugrundeliegenden Begriffsmerkmale, uns nicht immer sofort ersichtlich sind. Im obigen Beispiel eines Leibnizschen Beweises wurde das Wichtigste schon am Anfang vorausgesetzt, nämlich die Begriffszerlegung von *Mensch als vernünftig+Lebewesen*. Um wieviel schwerer sei es, so Kant, eine solche Zerlegung im Falle von philosophisch problematischen Begriffen wie *Vorstellung, Raum, Zeit, Erhabenheit, Schönheit, Begierde* etc. (Ak 2:281) durchzuführen.

Nach Kant neigt unsere Rede oberflächlich zudem zur Gleichmacherei. Wir sagen sowohl „Der Mensch unterscheidet das Gold vom Messing“ als auch „Die Kuh unterscheidet Gras von Heu“. Doch „unterscheiden“ bedeutet im ersten Fall „den Unterschied erkennen, welches niemals geschehen kann ohne zu urteilen“, während im zweiten Fall (der Kuh) „unterscheiden“ soviel bedeutet wie „bei unterschiedlichen Vorstellungen unterschiedlich handeln“ (Ak 2:285). Die Moral von Kants Kritik ist, dass es nutzlos, ja gefährlich sein kann, schematische, quasi-mathematische Buchstaben in die Philosophie einzuführen, ohne sich über den vielfältigen Gebrauch eines Ausdrucks bewusst zu sein.³⁷ Jedenfalls warnte Kant noch in der *Kritik der*

36. Siehe Tonelli 1959, S. 56f.

37. Für eine ausführlichere Diskussion siehe Kanterian 2017, S.285ff. Es sei angemerkt, dass auch Wittgenstein im *The Big Typescript* ähnlich argumentieren sollte, als er sich selbst und Russell vorwarf, die Analyse der Allgemeinheit, d.h. der Quantifikation, in das viel zu enge Schema der neueren Prädikatenlogik ($\forall x, \exists x$) gepresst zu haben, und dadurch die vielfältigen

reinen Vernunft vor den „eitelen Anmassungen“ der Philosophen, „sich mit den Titeln und Bändern der Mathematik auszuschmücken“ (B763).

Allerdings gibt es schon bei Kant eine gewisse Ambivalenz bezüglich des mathematischen Paradigmas, da er bekanntlich die synthetische Apriorität und Gewissheit mathematischer Wahrheiten zum Vorbild der noch zu begründenden wahren Metaphysik annimmt. Was die Übertragung des mathematischen Gewissheitsideals auf die Philosophie angeht, steht Kant also in einer Reihe mit Descartes und Leibniz. Erwähnt sei auch die Überzeugung Kants, dass es in bestimmten Bereichen zu einer engen Kooperation zwischen Philosophie und Mathematik kommen muss. Genauer noch: die Mathematik liefert der Philosophie den Stoff in bestimmten Gegenstandsbereichen. So argumentiert er in der Abhandlung *Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen* (1763), dass die Mathematik „Data“ über die Natur des Raumes liefert, z.B. „dass der Raum gar nicht aus einfachen Teilen bestehe“ (Ak 2:168). Die Metaphysik sei gut beraten, diese Data zu übernehmen, anstatt mit einem erkünstelten Begriff des Raums ins Leere zu spekulieren. Dass die Mathematik mit *dem* Begriff des Raumes operiert, scheint für Kant von vornherein ausgemacht. Es entgeht ihm dabei, dass eine Aufgabe der Philosophie gerade darin besteht, Projektionen technischer Begriffe aus den Einzelwissenschaften auf unsere vorgängigen Begriffe und Weltverständnisse kritisch zu beleuchten.³⁸

5 Freges funktionale Analyse

Man könnte nun einwenden, dass Leibniz scheitern musste, weil ihm ein entscheidendes Instrument fehlte: die Prädikatenlogik. Erst die Prädikatenlogik erlaubt es uns, so könnte man meinen, die innere Struktur der Urteile und Gedanken zu erschließen und ihre elementaren Bausteine zu identifizieren. Die Prädikatenlogik erfand Gottlob Frege 1879. Frege war allerdings vorsichtiger als Descartes und Leibniz. Er wollte seine Begriffsschrift, zu der auch ein leistungsfähiger Kalkül gehörte, nicht als eine universale Symbolsprache und philosophische Erfindungskunst verstanden wissen, sondern bloß als „eine *lingua characterica* zunächst für die Mathematik“³⁹. Mit ihrer Hilfe sollten (1) arithmetische Beweise auf strengste Weise (ohne Anschauung) auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden (*ars iudicandi*),

Redeweisen über Allgemeinheit in der natürlichen Sprache zu verfälschen (siehe Wittgenstein 2002, S. 221ff.).

38. So wie das später u.a. von Husserl, Wittgenstein und der Erlanger Schule unternommen wurde. Vgl. Stekeler-Weithofer 2008.

39. Frege 1983a, S. 13.

(2) arithmetische Sätze und Gesetze auf rein logische und selbstevidente Prinzipien (Axiome) zurückgeführt (Logizismus: Arithmetik ist Teil der Logik), (3) die Struktur arithmetischer Sätze durch logische Analyse (Zerlegung) aufgedeckt, und uns gezeigt werden, von welchen Gegenständen sie handeln (was also Zahlen sind), (4) neue und fruchtbare Begriffe aus schon bekannten (und daher vielleicht neue Wahrheiten, als Fernziel) erfunden werden.

Wir finden hier also viele der schon angetroffenen Elemente des mathematischen Paradigmas: Kunstsprache, zerlegende Analyse, Kalkulierbarkeit, Gewissheitsideal, ja sogar eine Erfindungskunst (wenn auch auf die Mathematik beschränkt). Nur von einem Streben nach einer mathematisierten Einheitswissenschaft, unter die auch die Philosophie zu subsumieren ist, kann man hier wohl nicht sprechen. Frege sagt es ja deutlich: das Verhältnis zwischen der Begriffsschrift und der „Sprache des Lebens“ ist das des Auges zum Mikroskop. Wie das Mikroskop ist auch die Begriffsschrift bloß ein Instrument, für ganz bestimmte Zwecke, nämlich den begrifflichen oder inferenziellen Inhalt von arithmetischen Urteilen zu artikulieren. Daraus scheint zu folgen, dass man die Begriffsschrift nicht verwenden kann, um die Sprache des Lebens und die darin artikulierten Begriffe, aus der ja die Philosophie erwächst, zu erfassen. Daher mag man zuerst stutzen, wenn man bei Michael Dummett liest, Frege hätte eine genauso überwältigende philosophische Revolution losgetreten wie Descartes, und Frege sei ein genauso großer Denker wie Aristoteles und Kant.⁴⁰

Und doch ist die Begriffsschrift kein bloßes Instrument. Frege scheint ja zu glauben, dass „eine langsame, schrittweise Annäherung“ an Leibnizens „hohem Ziel“ möglich ist. So könne man die Begriffsschrift auf die Formelsprachen der Geometrie, Dynamik, Mechanik, Chemie ausdehnen und diese miteinander verbinden, da sie, die Begriffsschrift, ein Gebiet erschließt, das in der Mitte dieser Wissenschaften liegt (Frege 1879a, S. XII). Das hört sich also doch nach der Vision der Einheitswissenschaft an. Jedenfalls soll laut Frege auch die Philosophie von der Begriffsschrift profitieren: „Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die [begrifflichen] Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch [...] entstehen, [...] so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können“ (Frege 1879a, S. XIII). Frege nennt auch gleich ein Beispiel für den begrifflichen-logischen Fortschritt, den seine Begriffsschrift bringen soll – die Ersetzung von Subjekt und Prädikat durch *Argument und Funktion*.

Damit sind wir beim Kern von Freges Logik angelangt, seiner Analyse von Ur-

40. Dummett 1973, S. 665f.

teilen, die explizit auf der Importierung eines mathematischen Begriffs basiert, dem Begriff der *Funktion*.⁴¹ Die Theorie der Funktionen war ein wichtiges Thema mathematischer Forschung im 18. und 19. Jahrhundert. Eine mathematische Funktion kann, grob gesagt, als eine Korrelation zwischen Zahlen angesehen werden, nach dem Prinzip Input-Output. Den Input nennen wir das Argument, den Output den Wert. Da das Argument variieren kann, bezeichnen wir seine Stelle mit einer Variablen. Ein Wert ist immer der Wert einer Funktion für ein bestimmtes Argument. Zu jedem Argument kann es nur genau einen Wert geben (aber nicht umgekehrt; mehrere Argumente können zum selben Wert führen – Funktionen sind rechtseindeutige Relationen). Nehmen wir als Beispiel die Funktion x^2 . Für die Argumente 1, 2, 3 erhalten wir jeweils die Werte 1, 4, 9 etc. Die Funktion x^2 hat also für bestimmte Argumente einen bestimmten Wertverlauf, und *nur genau diesen Wertverlauf*. Die Korrelation zwischen bestimmten Argumenten und einem Wertverlauf definiert geradezu die „Identität“ der Funktion⁴² und unterscheidet sie von anderen Funktionen. Wenn eine Funktion für die Argumente 1, 2, 3 nicht die Werte 1, 4, 9 ergibt, sondern etwa 3, 4, 5, dann muss das eine andere Funktion sein (nämlich $2 + x$: 3, 4, 5). Das Umgekehrte gilt nicht: ein Wert kann als der Wert verschiedener Funktionen für verschiedene Argumente analysiert werden. Beispiel: 9 kann als Wert der Funktion x^2 für das Argument 3, oder als Wert der Funktion $7 + x$ für das Argument 2 angesehen werden, usw., *ad infinitum*.

Traditionelle Logiker, auch Leibniz, fassten ein Urteil wie „(Alle) Menschen sind Lebewesen“ nach dem grammatikalischen Schema von Subjekt und Prädikat (S-P) auf. Nun sind aber nicht alle Urteile dieser Art, schon gar nicht in der Mathematik. Beispiele wären „Es gibt keine größte natürliche Zahl“ (hat kein Subjekt) und „Wenn $x > y$ und $y > z$, dann ist $x > z$ “. Frege macht nun Folgendes: er presst das zu analysierende Urteil nicht in das Subjekt-Prädikat-Schema, sondern *liest* die viel flexiblere Argument-Funktion-Struktur in das Urteil *hinein*. Er tut dies, indem er singuläre Termini (zuerst erster Stufe) durch *Variablen* ersetzt. Nehmen wir als einfaches Beispiel das Urteil: Fido ist ein Hund. Daraus wird die Funktion, oder wie Frege auch sagt, der *Begriff*: x ist ein Hund. Ein relationales Beispiel: Fido verfolgt Fifi. Daraus gewinnen wir die zweistellige Funktion: x verfolgt Fifi (aber auch: Fido verfolgt y , x verfolgt y , xV Fifi etc.). Funktionen/Begriffe sind unvollständig oder „ungesättigt“. Man „sättigt“ sie, indem man sie mit einem Argument „füttert“ (Fido etc.) oder die Argumentstelle mit einem Quantor bindet.

Freges funktionale Analyse ergibt so für „Alle Menschen sind Lebewesen“: Für alle

41. Siehe Frege 1879a, §129, 1879b, 1983b, S. 125ff.

42. Frege drückt sich vorsichtiger aus, aus Gründen, die hier nicht relevant sind. Siehe Frege 1983a, S. 132f.

x , wenn x ein Mensch ist, dann ist x ein Lebewesen.⁴³ D.h. was als ein einfaches Subjekt-Prädikat-Urteil aussah, stellt sich nun als ein komplexes Bedingungsurteil heraus, das vier Funktionen/Begriffe enthält (nämlich Quantifikation als Funktion zweiter Stufe, die Funktion der Implikation, sowie die Funktionen x ist ein Mensch und x ist ein Lebewesen). Wir scheinen also mit Hilfe der funktionalen Analyse eine tiefere Struktur des Urteils gefunden zu haben, die dem alltagssprachlichen, grammatikalischen „Auge“ entgeht. Da Freges Begriffsschrift zudem zweidimensional ist, können ihre Formeln beinahe wie Piktogramme der tieferen Struktur von Urteilen und Begriffen wirken (was auch seinen ästhetischen Reiz hat).

Außerdem hat die funktionale Analyse noch andere, allseits bekannte Vorteile. Sie kann Urteile höherer Stufe und beliebiger Komplexität erfassen, ob sie mehrfach, einfach oder gar nicht quantifiziert sind. Vor allem aber zeigt uns Freges Identifizierung von Begriffen mit Funktionen scheinbar etwas völlig Neues über das Wesen der Begriffe: sie sind „ungesättigte Gegenstände“. Eine solche Aussage („Begriffe sind ungesättigte Gegenstände“) kann man beinahe schon als synthetisch und *a priori* bezeichnen. Können wir nicht hier also tatsächlich von einer fundamentalen philosophischen Entdeckung sprechen, bewirkt durch die Einführung einer mathematischen Methode in die Philosophie? Haben wir in dieser mathematischen Methode endlich das Fundament für die Philosophie als strenge Wissenschaft gefunden? Ist Dummetts Enthusiasmus über Freges historische Bedeutung somit gerechtfertigt?

Betrachten wir Freges Prozedur genauer unter dem philosophischen Mikroskop. Ich möchte nur einige Problempunkte nennen.⁴⁴

1. Es heißt manchmal, dass Frege die jahrhundertealte grammatikalische Unterscheidung zwischen Subjekt und Prädikat durch jene zwischen *Argument und Funktion* ersetzt oder obsolet gemacht hat, und dabei die wahre Tiefengrammatik der Sprache offenlegte. Doch stimmt das? In Freges Begriffsschrift sind alle Urteile durch einen Urteilsstrich angezeigt, $\vdash A$. Dabei wird der Urteilsstrich *ungefähr* gelesen als „... ist eine Tatsache“, während A der Name des begrifflichen oder propositionalen Inhalts ist, der als wahr beurteilt wird.⁴⁵ So wird ein Urteil von Subjekt-Prädikat-Struktur wie

„Archimedes starb bei Syrakus eines gewaltsames Todes“

umgewandelt in

43. Aus „Es gibt keine größte natürliche Zahl“ wird: Für alle x , es gibt kein y , so dass wenn x eine natürliche Zahl ist und y eine natürliche Zahl ist, dann $y > x$.

44. Für weitere Probleme, siehe Kanterian 2012.

45. Siehe Frege 1879a, §3. Für die zahlreichen Probleme mit Freges Urteilsstrich, siehe Kanterian 2012, S. 58-75.

„Der gewaltsame Tod des Archimedes bei Syrakus ist eine Tatsache“.

Ist die ursprüngliche Subjekt-Prädikat-Struktur hier nicht tatsächlich verschwunden? Keineswegs! Frege sagt ja selbst, dass der Ausdruck „ist eine Tatsache“ weiterhin ein Prädikat ist, wenn auch das einzige seiner Begriffsschrift (Frege 1879a, §3). Die gewöhnliche Subjekt-Prädikat-Unterscheidung ist also bloß in eine neue kanonische Form sublimiert worden. Wir könnten eine solche Sublimation nicht vornehmen, wenn wir nicht schon längst gelernt hätten, mit der Subjekt-Prädikat-Struktur in der Alltagssprache umzugehen. Außerdem ist „der gewaltsame Tod des Archimedes bei Syrakus“ eine Nominalisierung der ursprünglichen Behauptung „Archimedes starb bei Syrakus eines gewaltsamen Todes“. Diese Nominalisierung ist eine bestimmte Kennzeichnung. Nun können aber nicht alle bestimmten Kennzeichnungen zu Subjekt-Termini von „ist eine Tatsache“ gemacht werden, sondern nur ganz bestimmte. („Die Hauptstadt von Bayern ist eine Tatsache“ ist Unsinn.) Welche? Eben *Nominalisierungen von Behauptungen* – d.h. nur von solchen bestimmten Kennzeichnungen, die die ursprüngliche grammatikalische Form noch verraten, und das bedeutet, die noch das ursprüngliche Verb enthalten (die vielgescholtene Kopula!) und somit die alltagssprachliche Subjekt-Prädikat-Form. Mit anderen Worten: nicht nur ist es nicht der Fall, dass Freges formale Sprache die wahre Tiefengrammatik der Sprache offenlegt, sondern seine formale Sprache setzt voraus, für die *Möglichkeit* ihre Konstruktion, die Alltagssprache voraus.

2. Frege behauptet, dass Begriffe Funktionen sind. Nun ergeben Funktionen, wie gesehen, Werte für Argumente. Also müssen auch Begriffe Werte für Argumente ergeben. Frege sagt genauer: Begriffe ergeben *Wahrheitswerte* für ihre Argumente. Begriffe sind also Funktionen deren Werte Wahrheitswerte sind. Ein Beispiel sei der Begriff: $3 = 2 \cdot y$. Für das Argument $y = 1.5$ erhalten wir den Wahrheitswert *das Wahre*. Für das Argument $y = 5$ erhalten wir den Wahrheitswert *das Falsche*. Usf. Nehmen wir nun einen anderen Fregeschen Begriff: x schläft jeden Mittwochnachmittag. Nehmen wir an, dass an jedem Mittwochnachmittag Sokrates tatsächlich schläft, während Platon wach bleibt. Dann ist der Wert von x schläft jeden Mittwochnachmittag für das Argument Sokrates das Wahre, und für das Argument Platon das Falsche. Nun ist es aber eine *kontingente* Tatsache, dass Sokrates jeden Mittwochnachmittag schläft. Er hätte genauso einen anderen Schlafrythmus haben können. Der Satz „Sokrates schläft jeden Mittwochnachmittag“ hat einen Sinn gleichgültig ob Sokrates jeden Mittwochnachmittag schläft oder wach ist. Tatsächlich hat dieser Satz *denselben* Sinn, denselben Gedanken, sowohl in einer Situation (oder „möglicher Welt“), in der Sokrates schläft, als auch in einer, in der er nicht schläft.⁴⁶ Der Sinn oder Gedanke von „Sokrates schläft

46. Frege sagt das selbst (1983b, S.148f.). Siehe auch Kanterian 2012, S. 199.

jeden Mittwochnachmittag“ ist also stabil über mögliche Situationen hinweg. Das erkennt man auch daran, dass wir den Satz völlig unabhängig davon verstehen, ob wir schon wissen, was Sokrates tut. Also muss auch der Wahrheitswert des Gedankens „Sokrates schläft jeden Mittwochnachmittag“ ein und derselbe sein, denn ein Gedanke ist nach Frege die Gegebenheitsweise des Wertes einer Funktion für ein bestimmtes Argument.⁴⁷ Ein Gegenstand kann auf verschiedene Weisen gegeben sein, aber *eine* Gegebenheitsweise kann nicht zwei *verschiedene* Gegenstände präsentieren. Hätte der Begriff x schläft jeden Mittwochnachmittag in einer möglichen Situation für das Argument Sokrates *einen* Wert, das Wahre, und in einer anderen möglichen Situation für dasselbe Argument Sokrates einen *anderen* Wert, nämlich das Falsche, dann würde dies der erwähnten fundamentalen Eigenschaft von Funktionen widersprechen, dass nämlich eine Funktion für ein Argument genau einen Wert, und nur diesen, hat. Wenn wir in den zwei verschiedenen möglichen Situationen dieselbe Funktion und dasselbe Argument haben, dürfen wir auf gar keinen Fall verschiedene Werte erhalten. Das ist aber der Fall bei kontingenten Sätzen wie „Sokrates schläft jeden Mittwochnachmittag“.

Demgemäß kann Freges *allgemeine* Charakterisierung von Begriffen als Funktionen nicht richtig sein. Denn sie kann nicht mit kontingenten Sätzen oder Urteilen umgehen, die einen äußerst wichtigen Bestandteil unserer Erkenntnis ausmachen. Genau dieses Problem begegnete uns auch bei Leibniz. Da Frege uns aber von Anfang an erzählt hat, dass er primär nur an der Analyse von mathematischen Aussagen interessiert ist, sollte uns dieses Ergebnis nicht wundern. Frege gibt eigentlich auch nirgends in seinem Werk einen *Beweis* dafür, dass Begriffe „eigentlich“ Funktionen sind. Er sagt zwar, dass ein Begriff „eine Funktion ist, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist (1983b, S.133)“. Hierbei handelt es sich keineswegs um eine semantische oder ontologische *Entdeckung* über das wahre Wesen von Begriffen, sondern bloß um eine definitorische Normierung, die in bestimmten Kontexten, für bestimmte Zwecke vielleicht Sinn macht, aber nicht verallgemeinert werden darf. Auch wenn er selbst nie eine Semantik der natürlichen Sprache entwickeln wollte, kann man Frege dieser falschen Verallgemeinerung zumindest im Ansatz bezichtigen, da seine auch der Alltagssprache entnommenen Beispiele den Anschein erwecken, die funktionale Analyse gelte prinzipiell für alle Aussagesätze unserer Sprache.

Freges Vorgehensweise ist genau jene, die Kant an seinen mathematisierenden philosophischen Zeitgenossen in der *Untersuchung* von 1764 bemängelte. Anstatt sich einen Überblick über die vielfältigen Gebrauchskontexten eines Begriffsworts (bei Frege: des Begriffsworts „Begriff“!) zu verschaffen, um so erst auf den Begriff zu

47. Siehe Frege 1976, S. 96, Frege 1990, S. 133.

kommen, stipuliert Frege einfach, was er mit einem bestimmten Wort („Begriff“) meinen will (vgl. Frege 1983a, S.125). Doch nach Kant besteht die Aufgabe der Philosophie darin, verworrene Begriffe „zu zergliedern, ausführlich und bestimmt zu machen“ (Ak 2:278). „Denn dazu gehört gar nicht Philosophie, um zu sagen, was für einen Namen ich einem willkürlichen Begriffe will beigelegt wissen“ (Ak 2:277). Kant schreibt weiter: „Leibniz dachte sich eine einfache Substanz, die nichts als dunkle Vorstellungen hätte, und nannte sie eine *schlummernde Monade*“. Auf Frege übertragen, könnte man sagen, dass dieser eine einstellige Funktion erfand, die für jedes Argument einen Wahrheitswert gibt, und sie *Begriff* nannte. In beiden Fällen ist ein gegebener Begriff nicht erklärt, sondern erfunden worden. Das mag als Spiel der logischen Fantasie kreative Kräfte freisetzen. Wenn aber der erfundene Begriff in alle möglichen Kontexte zurück importiert wird, weil wir angeblich jetzt erst seine Natur verstehen, so haben wir es hier nicht unbedingt mit neuen Einsichten zu tun, sondern mitunter nur mit einem Schein der Einsicht, einem *Schein der Synthetizität*. Bei Leibniz wäre dies der Fall mit der Aussage „Die Elementarteilchen der Materie haben als schlummernde Monaden dunkle Vorstellungen“, und bei Frege mit der Aussage „Der Begriff *Pferd* ist kein Begriff“⁴⁸. Um bei dieser letzten Aussage zu verbleiben: diese ist ganz gewiss falsch, denn natürlich ist der Begriff *Pferd* ein Begriff. Wir haben in unserer Sprache überhaupt keine Probleme, über Begriffe zu sprechen und zu reflektieren. Dass Frege überhaupt zu so einer seltsamen Behauptung kommt, basiert auf (1) einer gewissen Analogie zwischen mathematischen Funktionen und *mathematischen* Begriffen, (2) der willkürlichen Festsetzung, dass diese mathematische Begriffe (ungesättigte Wahrheits-)Funktionen *sind*, (3) der Verallgemeinerung dieser Festsetzung für *alle* Begriffe, und (4) der Verwechslung solcher Festsetzungen mit genuinen Entdeckungen.⁴⁹

6 Ein aktueller Anwendungsfall

Dass dies keineswegs nur eine Frage der Frege-Auslegung ist, möchte ich anhand eines aktuellen Beispiels belegen. So behaupten manche Theoretiker heute, dass Freges funktionale Analyse die Grundlage der *formalen Semantik* bilden kann, einer Grunddisziplin der Linguistik und Sprachphilosophie. So heisst es in *Semantics in Generative Grammar* (1998), einem angesehenen Semantik-Lehrbuch von Irene Heim und Angelika Kratzer: „Frege was interested in the semantic composition of sentences“⁵⁰. Und: „[his] treatment of semantic composition was that of

48. Frege 1983b, S. 170f.

49. Vgl. Kanterian 2012, S. 202ff.

50. Heim und Kratzer 1998, S. 3.

functional application“⁵¹. Demgemäß seien das, was Sätze allgemein ausdrücken, „ungesättigte Bedeutungen“ („unsaturated meanings“)⁵². Diese Fregesche funktionale Auffassung der Kompositionalität von Aussagesätzen legen die Autorinnen ausdrücklich ihrem Buch zugrunde. Nach ihrer Ansicht hilft uns die funktionale Analyse zu verstehen, wie Sätze und ihre Bedeutungen *zusammengesetzt* sind und wie wir sie wieder *zerlegen* können. Die Autorinnen glauben sogar, dass wir die Bedeutungen von Sätzen streng formal aus den Bedeutungen der Bestandteile der Sätze *ableiten* können. Und das selbst bei komplexeren Sätzen, nämlich bei intensionalen oder opaken Kontexten („Mary glaubt, dass Tom hinterlistig ist“).⁵³ Dazu brauchen wir allerdings ein paar weitere Dinge, vor allem Funktionen von möglichen Welten zu Begriffsumfängen, etc.⁵⁴

Haben wir hier nicht endlich eine streng mathematische Methode der zerlegenden Analyse und Kalkulierbarkeit zumindest in einem Teilbereich der Philosophie gefunden? Kehren wir noch einmal zu Frege zurück. Der Wert der Funktion x^2 für das Argument 3 ist 9. Man *kann* also die Zahl 9 „zerlegen“ als den Wert der Funktion x^2 für das Argument 3. Aber man kann 9 *auch* „zerlegen“ als den Wert der Funktion $x + 91$ für das Argument -82 , oder als den Wert der Funktion $x - 0.1$ für das Argument 9.1. Ad infinitum. Daraus folgt aber keineswegs, dass die Zahl 9 aus allen diesen Zahlen *besteht*, unendlich vielen, -82 , 3, 9.1, usf. Die Zahl 9 besteht nicht aus x^2 und 3, sondern ergibt sich aus der *Berechnung* von $x^2|_3$ (d.h. aus der Funktion x^2 für das Argument 3) etc. Mit anderen Worten: Die funktionale Analyse ergibt schon in der Mathematik überhaupt keine mereologische oder ontologische Zerlegung in elementare Bestandteile. Die funktionale Analyse erlaubt *alternative Analysen* eines gegebenen Gegenstands durch Berechnung.⁵⁵ Die ontologische Zerlegung soll dagegen die *letzten* Bestandteile eines Gegenstands liefern, und lässt daher keine Alternativen zu.

Diesen Sachverhalt können wir direkt auf die funktionale Analyse von Urteilen oder Sätzen übertragen. Nach Frege steht „Fido verfolgt Fifi“ für den Gegenstand das Wahre (wenn Fido tatsächlich Fifi verfolgt). Nach der funktionalen Analyse kann dieser Gegenstand nun als der (Wahrheits-)Wert der Funktion x verfolgt Fifi für das Argument Fido angesehen werden. Daraus folgt aber überhaupt nicht, dass *der Wahrheitswert* das Wahre aus dem Hund Fido und dem Begriff x verfolgt Fifi

51. Heim und Kratzer 1998, S. 13.

52. Heim und Kratzer 1998, S. 3.

53. Heim und Kratzer 1998, S. 308.

54. Heim und Kratzer übernehmen hier Auffassungen der „kalifornischen Semantik“ von Lewis und Kaplan, die letztlich auf Carnap zurückgeht. Demnach ist die Bedeutung eines Begriffsworts seine „Intension“, d.h. eine Funktion von möglichen Welten zu Mengen. Das führt zu weiteren Problemen, die ich hier nicht behandeln kann.

55. Siehe z.B. Frege 1983b, S. 173.

zusammengesetzt ist. Denn den Wahrheitswert das Wahre können wir auch als den Wert der Funktion Fido verfolgt *y*, oder gar als der Wert der Funktion *x ist tot* für das Argument Aristoteles funktional analysieren. Wir haben auch zum einen das Problem, dass die funktionale Analyse eines und desselben Satzes völlig unterschiedliche, gleichberechtigte Argument-Funktion-Strukturen unterschiebt (nach Frege unendlich viele!)⁵⁶. Zum anderen ist der Wahrheitswert das Wahre nicht zusammengesetzt aus Fido, Fifi, Aristoteles – *und all den unzähligen anderen Dingen, über die wir wahre Urteile treffen können*. Selbst wenn wir Frege schenken, dass es den logischen Gegenstand das Wahre gibt, ist es schwer zu begreifen, wie ein so quicklebendes Ding wie unser Dackel Fido Bestandteil eines solchen Gegenstandes sein kann. Die Hintergrundproblematik, die ich hier nur erwähnen kann, ist die Verquickung unterschiedlicher Modelle der Analyse, nämlich der funktionalen mit der mereologischen Analyse.⁵⁷

Das suggeriert, dass Freges funktionale Analyse nicht die Grundlage der kompositionalen Semantik sein kann, auch wenn es heroische Versuche von Dummett, Peter Sullivan und anderen Fregeanern gegeben hat, die zerlegende/kompositionale Analyse von Sätzen mit der funktionalen Analyse zu versöhnen. Wenn also Autorinnen wie Heim und Kratzer ihre formale Semantik auf Freges funktionaler Analyse als Instrument der semantischen Zerlegung gründen, als würde es sich hier um die Verwendung einer vollkommen gesicherten, anderweitig beglaubigten wissenschaftlichen Prozedur handeln (so wie bei der Spaltung des Atoms), sollten wir unseren philosophischen Mythendetektor einschalten.⁵⁸

7 Schluss

Ich habe die Spielarten des mathematischen Paradigmas bei in der Philosophie anhand einiger prominenter Beispiele kritisch diskutiert. Und doch soll damit nicht ausgeschlossen werden, dass die Philosophie von der Mathematik profitieren kann. Nur gibt es hier aber keinen Automatismus.

Nehmen wir an, wir haben es mit einem philosophischen Problem zu tun (z.B. ob Wissen eine Form der Überzeugung ist – *is knowledge a form of belief?*), und uns „präsentiert sich eine mathematische Struktur“⁵⁹ eines Aspekts dieses Problems. Wir nehmen beispielweise an, wie das in der formalen Epistemologie üblich

56. Siehe Kanterian 2012, S. 134ff.

57. Siehe Kanterian 2012, S., für weitere Diskussion.

58. Eine eingehende Untersuchung der funktionalen Semantik fehlt noch. Für wichtige kritische Impulse siehe Baker und Hacker 1984a, 1984b, Ben-Yami 2004, Kambartel und Stekeler-Weithofer 2005, S. 224ff.

59. Siehe Illari 2010, S. 52.

ist, dass Überzeugungen (*beliefs*) Fregesche Funktionen sind. Wir gewinnen so einen bestimmten mathematischen Begriff der Überzeugung, mit dem wir dann bestimmte *formale* Resultate erzielen können. Um aber sagen zu können, ob diese Resultate *sachhaltig* sind, d.h. wirklich das Verhältnis zwischen dem ursprünglichen Begriff der Überzeugung und weiteren epistemischen Begriffen, wie z.B. dem des Wissens, aufklären, müssen wir noch zwei Dinge tun: abwägen ob (1) die Aussage „Jede Überzeugung ist eine Fregesche Funktion“ buchstäblich wahr ist, und, wenn dem so ist, nach einer Rechtfertigung fragen (einer apriorischen oder aposteriorischen?), oder ob (2) die Aussage bloß eine Analogie formuliert (zwischen zwei Grammatiken, Begriffsschemata oder Sprachen), und wenn dem so ist, dann uns daran erinnern, dass jede Analogie irgendwo hinkt und Aussagen über das Analogon nicht ohne Verzerrungen auf den ursprünglichen Redebereich übertragbar sind.

Wie sinnvoll die Mathematisierung eines philosophischen Problems ist, entscheidet also der Augenschein, von Fall zu Fall. Diese Entscheidung kann selbst keine mathematische sein. Daher sollten wir uns an Platon halten, den ich anfangs erwähnte: Über die höchsten Prinzipien menschlichen Wissens, auch des mathematischen und mathematisierten Wissens, kann doch nur die philosophische Reflektion aufklären. Und wir sollten achten auf Kants Warnung vor der „Methodensucht“ in der „Nachahmung des Mathematikers“, die „auf dem schlüpfrigen Boden der Metaphysik [...] eine Menge Fehlritte veranlaßt“ hat.⁶⁰ Wer aber Platon und Kant für alte Hüte hält, und nur auf zeitgenössische Logiker hört, der sei an Saul Kripkes Diktum erinnert: „There is no mathematical substitute for philosophy“⁶¹.

Literatur

- Baker, G. and Hacker, P. (1984a), *Frege: Logical Excavations*, Oxford: Oxford University Press
- Baker, G., Hacker, P. (1984b), *Language, Sense and Nonsense: A Critical Investigation into Modern Theories of Language*, Oxford: Blackwell
- Ben-Yami, H. (2004), *Logic & Natural Language: On Plural Reference and Its Semantic and Logical Significance*, Aldershot: Ashgate
- Copenhagen, B. C., Schmitt, C. B. (1992), *Renaissance Philosophy*, Oxford: Oxford University Press

60. Kant 1763, Ak 2:71.

61. Kripke 1976, S. 416.

- Craig, J. (1964), *Theologiae Christianae Principia Mathematica*, in *History and Theory*, 4:4, 1-31
- Crusius, C. (1747), *Weg zur Gewißheit und Zuverlässigkeit der menschlichen Erkenntnis*, Leipzig: Johann Friedrich Gleditsch
- Dalgarno, G. (1661), *Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica*, London: F. Hayes
- Descartes, R. (1996), *Philosophische Schriften in einem Band*, Hamburg: Felix Meiner Verlag
- Descartes, R. (1897–1913), *Oeuvres de Descartes*, hrsg. von C. Adam & P. Tannery, Paris: Léopold Cerf [zitiert als AT, gefolgt von Band und Seitenzahl]
- Dummett, M. (1981), *Frege: Philosophy of Language*, London: Duckworth
- Engfer, H.-J. (1982), *Philosophie als Analysis. Studien zur Entwicklung philosophischer Analysiskonzeptionen unter dem Einfluss mathematischer Methodenmodelle im 17. und frühen 18. Jahrhundert*, Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog
- Frege, G. (1879a), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle: Verlag von Louis Nebert
- Frege, G. (1879b), “Anwendungen der Begriffsschrift”, *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1879*, Jena: Verlag von G. Fischer
- Frege, G. (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hrsg. von G. Gabriel et al., Hamburg: Felix Meiner
- Frege, G. (1983a), *Nachgelassene Schriften*, hrsg. von H. Hermes et al., Hamburg: Felix Meiner
- Frege, G. (1983b), *Kleine Schriften*, hrsg. von I. Angelelli, Hildesheim: Olms
- Gaukroger, S. (1995), *Descartes: An Intellectual Biography*, Oxford: Oxford University Press
- Heim, I., Kratzer, A. (1998), *Semantics in Generative Grammar*, Oxford: Blackwell
- Hintikka, J. , Remes, U. (1974), *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance*, Dordrecht: Reidel
- Hobbes, T. (1656), *Elements of Philosophy. The First Section, Concerning Body [De corpore]*, London: R. & W. Leybourn

- Illari, P. (2010), „Interview with Hannes Leitgeb“, *The Reasoner*, 4:4
- Kambartel F., Stekeler-Weithofer, P. (2005), *Sprachphilosophie. Probleme und Methoden*, Stuttgart: Philipp Reclam
- Kant, I. (1900ff.), *Gesammelte Schriften*. Hrsg.: Bd. 1-22 Preussische Akademie der Wissenschaften, Bd. 23 Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, ab Bd. 24 Akademie der Wissenschaften zu Göttingen [zitiert als Ak, gefolgt von Band und Seitenzahl]
- Kanterian, E. (2012), *Frege: A Guide for the Perplexed*, London: Continuum
- Kanterian, E. (2017), *Kant, God and Metaphysics. The Secret Thorn*, Abingdon and New York: Routledge
- Kripke, S. (1976), „Is There a Problem About Substitutional Quantification?“, in G. Evans, J. McDowell (Hrsg.), *Truth and Meaning: Essays in Semantics*, Oxford: Oxford University Press, 1976
- Leibniz, G. W. (1849), *Leibnizens mathematische Schriften. Erste Abtheilung. Band I*, hrsg. von C. I. Gerhardt, Halle: H W Schmidt
- Leibniz, G. W. (1859), *Leibnizens mathematische Schriften. Erste Abtheilung. Band IV*, hrsg. von C. I. Gerhardt, Halle: H W Schmidt
- Leibniz, G. W. (1880), *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Vierter Band*, hrsg. von C. I. Gerhardt, Berlin: Weidmannsche Buchhandlung
- Leibniz, G. W. (1890), *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Siebenter Band*, hrsg. von C. I. Gerhardt, Berlin: Weidmannsche Buchhandlung
- Leibniz, G. W. (1961), *Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand/Nouveaux essais sur l'entendement humain*, 2. Band, hrsg. und übers. von W. v. Engelhardt, H. H. Holz, Frankfurt a. M.: Insel-Verlag
- Leibniz, G. W. (1966), *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, Band I, hrsg. von E. Cassirer, übers. von A. Buchenau, Hamburg: Verlag von Felix Meiner
- Leibniz, G. W. (1990), *Briefe von besonderem philosophischen Interesse/Lettres d'importance pour la philosophie*, hrsg. und übers. von W. Wiater, Frankfurt: Insel Verlag
- Leibniz, G. W. (1990), *Der Briefwechsel mit den Jesuiten in China (1689-1714)*, hrsg. von R. Widmaier, Hamburg: Meiner

- Lenzen, W. (2004), "Leibniz's Logic", in D. M. Gabbay, J. Woods, *Handbook of the History of Logic, volume 3: The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, Amsterdam et al.: Elsevier-North-Holland, 2004
- Liske, M.-Th. (2000), *Gottfried Wilhelm Leibniz*, München: C. H. Beck
- Maupertuis, P.-L. M. de (1746), *Les Loix du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique*, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin*, Année MDCCXLVI
- Mittelstrass, J. (1979), „The Philosopher's Conception of Mathesis Universalis from Descartes to Leibniz“, *Annals of Science*, 36:6
- Platon (1990), *Politeia*, übers. von F. Schleiermacher, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft
- Russell, B. (1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, London: Allen & Unwin
- Stekeler-Weithofer, P. (2008), *Formen der Anschauung. Eine Philosophie der Mathematik*, Berlin & New York: de Gruyter
- Tonelli, G. (1959), "Der Streit über die mathematische Methode in der Philosophie in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts und die Entstehung von Kants Schrift über die 'Deutlichkeit'", *Archiv für Philosophie*, 9
- Trendelenburg, A. (1867), "Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik", in A. Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie*, Berlin: G. Bethge, 1867
- Weigel, E. (1693), *Von der Vortrefflichkeit und Nutzbarkeit der mathematischen Philosophie gegen der Scholastischen und Cartesianischen*, Jena: Ehrlich
- Wittgenstein, L. (2000), *Wiener Ausgabe: 'The Big Typescript'*, Vienna: Springer Verlag
- Wittgenstein, L. (2003), *Philosophische Untersuchungen*, Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag
- Wolff, C. (2006), *Discursus praeliminaris de philosophia in genere. Einleitende Abhandlung über Philosophie im allgemeinen*, übers. von G. Gawlick & L. Kreimendahl, Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog

Raumproblem und Erkenntnisproblem

– Ernst Cassirers Rezeption der Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien

Daniel Koenig

Der Philosoph Ernst Cassirer galt zu Beginn des 20. Jahrhunderts als einer der bekanntesten, systematisch orientierten Historiker des Erkenntnisproblems – er war auch als „Erkenntnis-Cassirer“¹ bekannt. Seine vierbändige Studie *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit* – erschienen 1906, 1907, 1920 und postum 1950² – befasst sich mit der Entwicklung der Geistesgeschichte und Naturwissenschaft seit der Renaissance bis zur Gegenwart (d.h. ca. 1932). Insbesondere die Geschichte der Mathematik sowie ihre Deutung durch Philosophen spielt in seinen Untersuchungen eine entscheidende Rolle – vor allem unter dem Gesichtspunkt der Entwicklung der Frage, was unter *Erkenntnis* verstanden werden kann. So heißt es im ersten Band:

Hier dürfen uns die einzelnen mathematischen Begriffe nur das Paradigma bilden, an dem wir uns den Weg und die Wandlung des allgemeinen Erkenntnisproblems zur Anschauung bringen können. (Cassirer 1994a, S. 420)

0. Der vorliegende Beitrag entspricht dem Manuskript eines Vortrags, den der Autor im Oberseminar *Geschichte der Mathematik* an der Universität Wuppertal am 25.01.2018 gehalten hat.

1. Vgl. Paetzold (1995), S. 22

2. Das Manuskript zum vierten Band hatte Cassirer in seiner Zeit in Schweden zwischen 1935 und 1941 auf deutsch fertig gestellt. Erschienen ist der Band 1950 zunächst auf Englisch und 1957 erstmals auf Deutsch. Vgl. Paetzold (1995), S. 185.

So bildet gerade die Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert ein solches Paradigma. Die Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien schien mit der kantischen Erkenntnislehre im Widerspruch zu stehen und veranlasste daher Philosophen über das Verhältnis von mathematischer und philosophischer Erkenntnis neu nachzudenken. Die philosophische Strömung des Neukantianismus, in deren Tradition Cassirer steht, machte es sich zur Aufgabe, die neuen Ergebnisse der exakten Wissenschaften mit der kantischen Philosophie zu vermitteln. Eine der Grundthesen des Marburger Neukantianismus ist gerade, dass die Philosophie von den exakten Wissenschaften als Faktum auszugehen habe und ihre Aufgabe nicht darin bestehen könne, deren Ergebnisse in Frage zu stellen. Dieses Philosophieverständnis verlangt also hinreichend gute Kenntnisse in den behandelten Wissenschaften und gerade in den Schriften Cassirers ist zu bemerken, wie gut er sich etwa in der Mathematik seiner Zeit auskennt.

Im Folgenden möchte ich Cassirers Rezeption der Entwicklung der Geometrie und des Raumproblems im 19. Jahrhundert darstellen. Dabei werde ich versuchen aufzuzeigen, an welchen Punkten sich einige seiner fundamentalen mathematikphilosophischen Positionen zeigen – insbesondere seine Bestimmung des Gegenstandes der Mathematik und die Rolle seiner Begriffstheorie. Bei meiner Rekonstruktion der Cassirerischen Darstellung wird es mir jedoch *nicht* um eine Überprüfung ihrer historischen Adäquatheit gehen. Vielmehr geht es mir darum, in welcher Weise Cassirer die oben angedeuteten Entwicklungen philosophisch in die Geschichte des Erkenntnisproblems einordnet. Bevor ich mit dieser Rekonstruktion beginne, möchte ich zunächst unabhängig von Cassirers Darstellung mit einer kurzen Einführung in das Raumproblem einsteigen.

1 Was ist der *Raum*?³

Als „Raumproblem“ möchte ich im Folgenden die grundsätzliche Frage nach der Beschaffenheit bzw. dem Wesen des uns umgebenden einheitlichen Raumes verstehen, die das Denken seit der griechischen Antike beschäftigt hat. Im Hinblick auf die Rolle der Mathematik ist insbesondere das Zeitalter des Rationalismus von Descartes bis Kant von herausragender Bedeutung. Hier erfuhr die Raumtheorie laut Alexander Gosztonyi „eine äußerst große Bereicherung und Differenzierung“ und die Geometrie wurde „mehr und mehr als das Modell einer idealen Wissenschaft“ (Gosztonyi 1976, S. 457) in das Zentrum der Wirklichkeitsbetrachtung gerückt. Roberto Torretti (1978) formuliert dies so, dass „Raum“ zu dieser Zeit gleichsam

3. Eine ausführlichere Fassung dieses Kapitels findet sich in Koenig und Koenig (2018)

ein immaterielles Medium bezeichnete, in dem die Punkte der Geometrie existieren oder zumindest potenziell erkennbar sind. Der Raum wird hier insofern „zum Problem“, als dass zur Disposition steht, welcher *ontologische Status* diesem Medium zukommt.⁴ Die Diskussionen des 17. Jahrhunderts waren maßgeblich durch zwei einander diametral gegenüberstehende Lösungen dieses Problems geprägt: In der Newton'schen Mechanik wird der Raum als Absolutum, das heißt als durch sich selbst existierend bestimmt. Im Gegensatz dazu wird er durch die Leibniz'sche relativistische Doktrin als eine in den Dingen verkörperte Struktur bestimmt und ist somit wesentlich abhängig von der materiellen Wirklichkeit.⁵ Gegenüber diesen wirkungsmächtigen Positionen trat mit Immanuel Kants Erkenntniskritik eine radikal neue Raumtheorie auf den Plan. Raum wird hier nicht mehr als unabhängig vom Erkenntnissubjekt angenommen, sondern im Rahmen der *transzendentalen Ästhetik als eine* „reine Form sinnlicher Anschauung“ und damit als „notwendige Vorstellung a priori“ (KrV, B36) bestimmt. Die *euklidische Geometrie* wird dann bei Kant dezidiert als *die* Wissenschaft vom Raum als Form unserer äußeren Anschauung ausgewiesen, insofern sie die „Wissenschaft [ist], welche die Eigenschaften des Raums synthetisch und doch a priori bestimmt.“ (KrV, B 40)⁶

Vor dem Hintergrund dieser Skizze, die gleichwohl auch die mathematische Diskussion beeinflusste, eröffnet ein Blick in neuere mathematische Lexika und damit aus moderner *mathematischer* Perspektive ein radikal verändertes Bild. So findet sich beispielsweise im *Mathematischen Wörterbuch* aus dem Jahr 1961 keine allgemeine Bestimmung des Raums, sondern es wird auf eine Vielzahl von Einzuleinträgen zu spezifischen Raumbegriffen verwiesen. Diese stehen dann unabhängig voneinander im Zentrum eigenständiger mathematischer Teildisziplinen (z.B. Vektorräume in der Linearen Algebra, topologische Räume in der Topologie, Hilbert-Räume in der Funktionalanalysis etc.).⁷ Genauso verfährt das aktuelle *Lexikon der Mathematik*, welches Raum als einen „in den einzelnen Teilgebieten der Mathematik unterschiedlich interpretierten Begriff“ (Walz 2017, S. 355) ausweist. Mit Blick auf die heutige mathematische Praxis scheint also schon allein die Rede von *dem* Raum problematisch zu sein – geschweige denn, dass er ein *ausgezeichneter* Gegenstand von nur einer Teildisziplin wäre – beispielsweise der Geometrie. Somit scheint es aus moderner mathematischer Perspektive ‚natürlich‘, von Räumen im Plural zu sprechen – wie wir es auch in unserem alltäglichen Sprachgebrauch gewohnt sind. Im mathematisch-physikalischen sowie im philosophischen Kontext war dies jedoch über lange Zeit unüblich und ist eher ein modernes Phänomen. Dies galt

4. Vgl. Torretti 1978, S. 25.

5. Vgl. Torretti 1978, S. 28f.

6. Vgl. Torretti 1978, S. 29: „Kant's ontology of space is, at the same time, an epistemology of geometry.“

7. Vgl. Naas und Schmidt 1972, S. 455.

insbesondere noch in der Erkenntniskritik Kants: Insofern Raum als transzendente Bedingung der Möglichkeit von Erfahrung bestimmt wird, muss er „*homogen*“ (Gosztanyi 1976, S. 431) sein, weil „die Einheit wirklicher Erfahrung die Koexistenz unterschiedlicher Raumesarten ausschließt.“ (Thiel 1995, S. 282)⁸ Wenn auch nicht mehr im Sinne eines absoluten (Newton) oder Materie-relativen (Leibniz) gegebenen Raums, sondern des vom Erkenntnissubjekt abhängigen „Anschauungsraums“, bleibt es also bei der Rede von *dem* einen einheitlichen Raum. So Kant: Man „kann sich nur einen einzigen Raum vorstellen, und wenn man von vielen Räumen redet, so versteht man darunter nur Teile eines und desselben Raums.“ (KrV, B39)

Was nun das Zugrundeliegende und Zusammenhängende der heutigen, spezifischen Raumdefinitionen darstellt, das die jeweilige Verwendung des Wortes *Raum* rechtfertigt, scheint hingegen zunächst unklar.⁹ Entsprechend bemerkt beispielsweise der Mathematikhistoriker Herbert Mehrtens:

»Raum« ist [...] kein wohldefinierter Fachbegriff, sondern ein unscharf verwendeter Name für eine Klasse von Gegenständen der Mathematik, die gewisse Familienähnlichkeit haben. Diese Ähnlichkeit ist eine heuristische Perspektive, die an die Traditionen der Geometrie anknüpft, ohne daß Mathematiker sich darüber Rechenschaft ablegen. »Raum« gehört gewissermaßen zum Unbewußten der modernen Mathematik. (Mehrtens 1990, S. 44.)

Wir haben es also in der modernen Mathematik gleichsam mit einer *Pluralität* von Räumen zu tun, deren gemeinsame begriffliche Grundlage im Rahmen mathematischer Praxis nicht mehr zwingend mitreflektiert wird. Die Voraussetzungen für eine solche Wendung werden laut Mehrtens erst mit Blick auf einen bedeutsamen Einschnitt in der Mathematikgeschichte verständlich, der sogar als „Revolution“ bezeichnet werden könne: Die Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien im 19. Jahrhundert. Mit diesen wurden nun „ungeahnte andere, merkwürdige Räume mathematisch exakt denkbar“ (Ebd., S. 44). In Konsequenz habe sich das ursprüngliche „Raumproblem: Wie ist der natürliche Raum mathematisch zu beschreiben? [...] für die Mathematik aufgelöst. [Die mathematische Moderne] hat den Begriff [Raum] um seine Bedeutungen gebracht. In ihr ist er zu einer (fast) leeren Metapher geworden.“ (Ebd., S. 44)

8. In seiner „vorkritischen“ Phase hat Kant jedoch durchaus bereits von verschiedenen Räumen im Sinne unterschiedlicher Strukturen räumlicher Verhältnisse gesprochen; GSK, AA 01: 24f. Vgl. dazu auch Thiel (1995, S. 281f.) und Torretti (1978, S. 30ff).

9. Hier sei aber angemerkt, dass sich die Mathematik nicht im gleichen Maße als Begriffswissenschaft versteht, wie es beispielsweise die Philosophie tut. Als Indiz hierfür können wiederum Lexika-Einträge herangezogen werden: Im mehrbändigen *Historischen Wörterbuch der Philosophie* hat der Eintrag zum Begriff *Philosophie* Buchlänge, während es im bereits zitierten *Mathematischen Wörterbuch* noch nicht einmal einen Eintrag zu *Mathematik* gibt.

Bemerkenswert im Falle Ernst Cassirers ist nun, dass er in seinen philosophisch-historischen Schriften explizit Stellung zu der von Mehrtens angesprochenen Entwicklung der Geometrie und des Raumproblems im 19. Jahrhundert genommen hat – und dies mit einer, wie bereits angedeutet, herausragenden Kenntnis der Diskurse der Mathematiker. Hier zeigt sich deutlich Cassirers Anspruch, der Entwicklung der Mathematik im ausgehenden 19. und beginnenden 20. Jahrhundert in seiner philosophischen Auswertung auch tatsächlich gerecht zu werden. Speziell seine Darstellung der Nicht-Euklidische Geometrie und seine Versuche, diese mit Kants Auffassung vom Raum als Form der reinen, von der Erfahrung unabhängigen Anschauung zu vermitteln, verdienen eine intensive Auseinandersetzung. Hierbei wird sich herausstellen, dass sich mit Cassirer auch in der modernen Mathematik noch eine veränderte begriffliche Grundlage für den Raum finden lässt. Daher möchte ich mich im nächsten Teil genau dieser Darstellung widmen und hierbei den Fokus darauf richten, inwiefern sich in dieser Darstellung grundlegende Ansichten Cassirers zur Philosophie der Mathematik und der Entwicklung des Erkenntnisproblems zeigen.

2 Cassirers Rezeption und Deutung der Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien

Cassirer beginnt seine Auseinandersetzung im vierten Band seiner Studie zum Erkenntnisproblem mit der folgenden Feststellung:

In der gesamten Geschichte der Mathematik gibt es wenig Ereignisse, die für die Gestaltung des Erkenntnisproblems und für seine Weiterentwicklung von so unmittelbarer und tief einschneidender Bedeutung gewesen sind, wie die Entdeckung der verschiedenen Formen der Nicht-Euklidischen Geometrie. (Cassirer 1994b, S. 29)

Im Folgenden möchte ich entwickeln, was genau Cassirer unter dieser einschneidenden Bedeutung versteht. Hierbei werde ich vor allem auf die Frage eingehen, inwiefern Cassirer mit der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrien einen Wandel im *Inhalt* und *Ursprung* der Axiome der Geometrie begründet sieht. Entscheidend wird dabei ein verändertes Raumverständnis sein und die Frage nach der Rolle der Erfahrung. Auf Cassirers anschließende Bestimmung, dass die Mathematik als Wissenschaft von den messbaren Größen unzureichend ist, und sie vielmehr von den reinen Ordnungsbeziehungen handelt, werde ich leider nicht mehr eingehen können.

2.1 Der *Raum* und der *Inhalt* der geometrischen Axiome

Cassirer hebt von den vielen Entwicklungsschritten der Geometrie im 19. Jahrhundert Bernhard Riemanns Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* hervor, da erst hier die „volle Bedeutung“ der Nicht-Euklidischen Geometrie „in allgemein-logischer Hinsicht“ entfaltet wird: Denn hier werden die bisher notwendigen Sätze oder „ewige Wahrheiten“ der Geometrie zu hypothetischen Wahrheiten, und „die Entscheidung über deren Geltung erwartet [Riemann] nicht mehr von der Logik oder Mathematik, sondern von der Physik“ (Cassirer 1994b, S. 29). Hiermit sei allerdings ein fundamentaler Wandel der Mathematik begründet. Erwartet nämlich Riemann nun von einer empirischen Wissenschaft die Bestätigung seiner hypothetischen Wahrheiten, scheint damit eine alte Verwandtschaft zwischen geometrischer und philosophischer Wahrheit aufgehoben, die laut Cassirer seit den Anfängen der Philosophie im antiken Griechenland bestand. So waren in Platons Ideenlehre die ewigen und wahren Ideen der Geometrie nachempfunden, während die „Begriffe und Sätze, die Euklid an die Spitze seines geometrischen Systems stellt, [. . . ein] Musterbild für das [sind], was Platon den Prozeß der Ideenschau genannt hatte.“ Am Ende dieses Prozesses der Ideenschau stehen „allgemein notwendige und ewige Wahrheit[en]“ (Cassirer 1994b, S. 30), womit dieser Status auch den euklidischen Sätzen zukommt. Und noch im Rationalismus bei Descartes bleibe – trotz seines methodischen Zweifels an allem, was man sonst für wahr hielt – die geometrische Anschauung ein letztes Wahrheitskriterium. Vor Riemann galt laut Cassirer noch die folgende Auffassung bezüglich der Mathematik und im Besonderen der Geometrie:

Kant hatte noch „die gemeinsame Grundüberzeugung des Rationalismus [beschrieben], wenn er die reine Mathematik als eine Erkenntnis beschreibt, ‚die durch und durch apodiktische Gewißheit d. i. absolute Notwendigkeit bei sich führe, also auf keinen Erfahrungsgründen beruht, mithin ein *reines* Produkt der Vernunft ist‘ (Prolegomena § 6).“ (Cassirer 1994b, S. 31, Hervorhebung vom Autor)

Unter der Voraussetzung eines solchen Verständnisses werde deutlich, warum die Nicht-Euklidischen Geometrien als problematisch erachtet wurden: Wenn die Geometrie ihre Gewissheit und notwendige Wahrheit einer einheitlichen Vernunft verdankt; es aber einander widersprechende, da zu verschiedenen ‚wahren‘ Aussagen kommende Geometrien gibt; scheint die Fähigkeit des Menschen zu wahren Aussagen zu gelangen, in Frage gestellt. Dieses Problem durch einen Rekurs auf eine geometrische Anschauung zu umgehen, wurde im 19. Jahrhundert zunehmend problematisch. Zum Einen sei laut Cassirer durch die „Krise der Anschauung“ klar, „dass man der gewöhnlichen ‚naiven‘ Berufung auf die Anschauung entsag[en]“

(Cassirer 1994b, S. 32) musste. Zum Anderen konnte Felix Klein zeigen, dass sich die Nicht-Euklidischen Geometrien auf die euklidische abbilden lassen. „Diese ‚Abbildung‘ macht [nun] jeden Wertvorzug der einen Form vor der anderen illusorisch.“ (Cassirer 1994b, S. 33)

Cassirer stellt nun fest, dass die Mathematiker diese „neue Auffassung“ schnell akzeptierten, die Philosophen sie jedoch lange vehement als unsinnig abtaten. Als Ursache für diese unterschiedlichen Auffassungen macht Cassirer unterschiedliche Voraussetzungen in den beiden Disziplinen aus. Bei den Mathematikern habe sich die Auffassung durchgesetzt, dass die „Wahrheit und Geltung“ ihrer Sätze allein auf „Verknüpfungsgesetzen“ beruhten und nicht mehr auf spezielle Inhalte bezogen seien:

Die Mathematik ist und bleibt im Grunde eine ‚reine Beziehungslehre‘, und in ihrer modernen Gestalt ist es gerade dieser Grundcharakter, der sich immer schärfer ausgeprägt hat. Wenn sie von irgendwelchen Gebilden spricht und die Natur dieser Gebilde erforscht, so ist es niemals das An-Sich-Sein derselben, [...] wonach sie fragt. (Cassirer 1994b, S. 33f.)

Als Gewährsmann für dieses Mathematikverständnis nennt Cassirer David Hilbert und seine „Lehre von der ‚impliziten Definition‘“ (Cassirer 1994b, S. 34). Ohne hier weitere Argumente für diese Auffassung zu liefern, stellt Cassirer nun fest, dass diese radikale Abstraktion von Inhalten den Philosophen zunächst nicht möglich gewesen sei. Besonders die nachkantischen Systeme im 19. Jahrhundert hätten jede „erkenntniskritische Frage“ in eine „ontologische“ verwandelt. Diese Unterscheidung zwischen *erkenntniskritischen* und *ontologischen* Fragen wird für Cassirer im Folgenden von Bedeutung sein, und er knüpft hiermit an die von Kant vollzogene »Kopernikanische Wende« an. Kant hatte in seiner *Kritik der reinen Vernunft* gefordert, dass die Philosophie auf den »stolzen Namen« einer »Ontologie« verzichten und sich zunächst mit der Frage beschäftigen müsse, wie Erkenntnisse *überhaupt* möglich seien.¹⁰ Daher müsse zwischen erkenntniskritischen und ontologischen Fragen unterschieden werden.

Gerade im Bezug auf das *Raumproblem* sei die Unterscheidung zwischen diesen beiden Ebenen häufig nicht berücksichtigt worden. Beispielsweise hatte Descartes mit seiner analytischen Geometrie den Raum als eine „bestimmte Ordnungsform“ ausgezeichnet und hätte *damit* auf der erkenntniskritischen, logischen Ebene bleiben können. Jedoch sei er in seiner Metaphysik sogleich zu einer Bestimmung des Raumes übergegangen als „in der Art eines absoluten Dinges, in der Art der

10. Vgl. Paetzold (1993), S. 39.

„ausgedehnten *Substanz*“ (Cassirer 1994b, S. 35) Dieser „metaphysischen Hypostasierung“ des Raumes sei Newton mit seiner Bestimmung des absoluten Raumes gefolgt und beeinflusste damit die Physiker und Philosophen im 17. und 18. Jahrhundert. Ebenso hätten noch die ersten Philosophen, die sich an der Diskussion um die Nicht-Euklidischen Geometrien beteiligten, eine solche Auffassung vertreten. So hat beispielsweise Hermann Lotze, einer der führenden Philosophen im ausgehenden 19. Jahrhundert, die neuen Geometrien in seiner ‚Metaphysik‘ und nicht in seiner ‚Logik‘ untersucht. Hierbei habe Lotze danach gefragt, was für Eigenschaften ein „absolutes Ding“ namens Raum habe. Bei einer *solchen* Fragestellung müsse es selbstverständlich als „absoluter Unsinn“ erscheinen, diesem Objekt widersprechende Eigenschaften zuzuordnen. In der Weise wie Lotze hier seine Untersuchung angeht, stellt er seine Frage „nicht im immanenten Sinne der Mathematik, sondern im ‚transienten‘ Sinne“ (Cassirer 1994b, S. 36), d. h. nicht im erkenntniskritischen, sondern im ontologischen Sinne. Diese Unterscheidung ist also insofern von großer Bedeutung für Cassirer, als dass sie es ermöglicht, die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik von ontologischen Fragen zu trennen.

Nichts scheint den ersten Philosophen [. . .] schwerer gefallen zu sein, als einen scharfen Trennungsstrich zwischen der logisch-erkenntniskritischen und der ontologischen Fragestellung zu ziehen. Gab es verschiedene Axiomensysteme der Geometrie, so mußte es verschiedene „Räume“ [im Sinne Lotzes] geben, und diese mußten ihrerseits wieder verschiedene „Welten“ beherbergen. (Cassirer 1994b, S. 35)

Cassirer betont, dass, im Gegensatz zur Philosophie, die mathematische Forschung zu dieser Zeit bereits zwischen diesen beiden Fragen unterschied: So sei Felix Kleins *Erlanger Programm* von 1872 „nicht nur in mathematischer, sondern auch in erkenntniskritischer Hinsicht ein höchst bedeutsamer Schritt.“ Er behandle nämlich die Frage nach den Nicht-Euklidischen Geometrien völlig losgelöst von jeder „ontologischen Betrachtung über die ‚Wirklichkeit‘ des Raumes“ (Cassirer 1994b, S. 36); es gehe ihm hier lediglich um erkenntniskritische Fragen. Hierzu rücke Klein den Gruppenbegriff ins Zentrum der geometrischen Untersuchung und deute den geometrischen Eigenschaftsbegriff um: Geometrische Eigenschaften sind nun Invarianten einer Mannigfaltigkeit bzgl. verschiedener Transformationsgruppen und nicht mehr Beschaffenheiten des Raumes. Die Aufgabe der Geometrie bestehe nun darin, *diese* neuen Eigenschaften zu untersuchen.

Damit ist die ontologische Frage nach der Beschaffenheit *des einen* Raumes nicht mehr Gegenstand der Geometrie und „die Frage, welche von [den Geometrien] die ‚wahrere‘ ist, hat jetzt offenbar jeden Sinn verloren. Alle diese Geometrien sind theoretisch gleich streng und daher theoretisch gleichberechtigt“ (Cassirer 1994b,

S. 39), da sie ja jeweils Invariantentheorien bestimmter Gruppen sind und diese gleichberechtigt nebeneinander stehen. Zudem ist der Begriff der Gruppe völlig von jeder (geometrischen) Anschauung losgelöst; ihm wird nichts durch „die Natur der Gegenstände vorgeschrieben“ (Cassirer 1994b, S. 40). Durch diese Umdeutung des geometrischen Eigenschaftsbegriffs lasse sich nun auch der Konflikt zwischen den Philosophen und Mathematikern lösen: So werde einerseits der „Philosophie als Wirklichkeitswissenschaft“ durch die Mathematik „als reine Formwissenschaft“ nichts mehr vorgegeben. Andererseits könne die Philosophie nun aber auch nicht mehr Ergebnisse der Mathematik anzweifeln, die diese „über die reine Form [bzw.] über die logische Struktur des Raumes lehrt“ (Cassirer 1994b, S. 40).

Mit dieser Verschiebung hin zum Gruppenbegriff werde zwar die Frage nach der Wahrheit der Geometrien sinnlos, jedoch ermögliche sie zugleich eine „Stufenfolge“ innerhalb der Geometrien: Die Transformationsgruppen können nun Untergruppen voneinander sein, und wir erhalten so eine Ordnung für die entsprechenden Geometrien. Damit tritt laut Cassirer an die Stelle der Frage nach der „richtigeren“ Geometrie die Frage nach deren „Allgemeinheit“. Mit diesem neuen Zusammenhang zwischen den Geometrien fallen nun jedoch die Objekte nicht mehr nur unter *eine* Geometrie und ihre Eigenschaften sind nicht mehr von vornherein festgelegt. Laut Cassirer bestimmt vielmehr „die Art und das Prinzip der Zusammenfassung [...] darüber, was wir als ‚dasselbe‘ anzusehen haben.“ (Cassirer 1994b, S. 41) In dieser Äquivalenzsetzung sieht Cassirer „eine der fundamentalen Bestimmungen des mathematischen Denkens überhaupt“ (Cassirer 1994b, S. 41) und nicht erst im Zusammenhang mit den neuen Geometrien. Denn schon bei den ersten und ‚einfachsten‘ Begriffsbildungen der Mathematik, schon beim Übergang der sinnlichen Welt zur Mathematik und nicht erst von der euklidischen zu den Nicht-Euklidischen Geometrien könnten wir diese Art der Begriffsbildung beobachten.

Laut Cassirer ist, durch Kleins Darstellung der Geometrie eine neue „*systematische* Einheit des Raumes“ (Cassirer 1994b, S. 43) geliefert – allerdings eine funktionale und keine substanzielle. Die Unterscheidung von Substanz- und Funktionsbegriffen ist zentral für Cassirers Verständnis von Mathematik überhaupt und steht im *Mittelpunkt* der Entwicklung des Erkenntnisproblems und damit der Frage danach, was es bedeutet, dass wir wahres Wissen bzw. Erkenntnisse haben. Erkenntnisse beziehen sich dabei immer auf Gegenstände, welche durch Begriffe gefasst werden. Cassirers Begriffstheorie besagt nun das Folgende: die Deutung von Begriffen als Substanzbegriffe beruhe darauf, dass sie ihre Bedeutung durch einen Bezug auf etwas Seiendes, eine Substanz erhalten. Ein solches Verständnis hatten wir bei Newton und Lotze gesehen: der Begriff *Raum* entspricht einem Seienden, dem gewisse Eigenschaften zukommen. Wir können versuchen, diese vollständig sowie korrekt in unseren Begriffen abzubilden. Genau diese Auffassung führte aber mit

dem Aufkommen der Nicht-Euklidischen Geometrien zu den oben angesprochenen Widersprüchen, so dass die Einheit des Raumes und damit die der Vernunft in Gefahr war. Cassirers zentrale These seiner Begriffstheorie, die er zuerst in seinem Werk *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (2000) entfaltet, ist nun, dass Begriffe *nicht* durch einen Bezug auf etwas an-sich Gegebenes gebildet werden, sondern vielmehr erst im Ganzen eines Systems von Begriffen ihre Bedeutung erhalten. Damit besteht die Einheit nicht mehr in Bezug auf ein Seiendes, sondern in einer funktionalen, formalen Einheit des Begriffssystems. Dies gilt auch für die Begriffe *Geometrie* und *Raum*:

Die Geometrie ist eine reine ‚Beziehungslehre‘; in ihr handelt es sich nicht um Feststellung von Dingen und Dingmerkmalen, von Substanzen und deren Eigenschaften, sondern um reine Ordnungsbestimmungen. Auch die Frage nach der Einheit des Raumes kann daher in ihr stets nur in diesem Sinne gestellt werden: sie betrifft nicht die substantielle, sondern die formale oder ‚ideelle‘ Einheit. (Cassirer 1994b, S. 42)

Diese ideelle Einheit des Raumes bestehe in der „Form des ‚möglichen Beisammenseins““ (Cassirer 1994b, S. 43), die jeder möglichen Geometrie zu Grunde liege. Eine jede Geometrie differenziert dann diese allgemeine Form auf andere Art und Weise aus und die entsprechenden Axiome haben nicht mehr bestimmte Eigenschaften des Raumes zum Inhalt. Vielmehr drücken sie als Systeme die entsprechende Ausdifferenzierung der allgemeinen Form des Raumes aus.

Laut Cassirer betont Klein, dass bei diesem Prozess der Verfeinerung und Herausbildung der Axiome gleichwohl eine geometrische Anschauung eine wesentliche Rolle spiele; nun allerdings nicht mehr in Form einer unreflektierten, ‚naiven‘ Anschauung. Vielmehr müsse sie durch eine „kritisch-gereinigte Auffassung“ der Anschauung ersetzt werden, die aus dem Prozess der mathematischen „Idealisierung“ bzw. „Äquivalenzsetzung“ entstehe. Wenn für die Mathematik ein solcher Prozess der Idealisierung aber wesentlich ist, stellt sich laut Cassirer die Frage, warum wir von den empirischen Ungenauigkeiten überhaupt auf diese Weise absehen dürfen; „[m]it welchem *Recht* nehmen wir derartige ‚Idealisierungen‘ vor?“ (Cassirer 1994b, S. 44) Hierzu sei es erforderlich, von der „Frage nach dem *Inhalt* der geometrischen Axiome“ zu der Frage nach dem Ursprung der Geometrie überzugehen, der ich mich jetzt widmen möchte.

2.2 Die Rolle der Erfahrung und der *Ursprung* der geometrischen Axiome

Wir hatten bereits gesehen, dass die Nicht-Euklidischen Geometrien in Hinsicht ihrer logischen Strenge auf der gleichen Stufe mit der Euklidischen standen. Dass der letzteren aber dennoch ein besonderer Status zu kam, ist laut Cassirer eine weit verbreitete Grundüberzeugung des 19. Jahrhunderts.¹¹ Man versuchte daher diese Ausnahmestellung durch einen Appell „an eine andere Instanz“ bzw. durch einen nicht-geistigen Ursprung der Axiome zu retten. Hierzu wurde aus zwei verschiedenen Richtungen versucht auf die Erfahrung zu rekurrieren.

Einerseits behauptete Moritz Pasch in seinen *Vorlesungen über die neuere Geometrie*, dass der „*empirische Ursprung der Geometrie* noch nicht mit voller Entschiedenheit zur Geltung gekommen sei.“ (Cassirer 1994b, S. 46) Cassirer sieht als philosophische Autorität hinter Paschs Bestrebungen den Positivismus Auguste Comtes, welcher gefordert hatte, dass jede wahre Erkenntnis auf Tatsachen zurückgehen müsse. Da auch Comte der Mathematik ihre Strenge nicht nehmen wollte, musste sie hiermit ebenso wie jede andere Erkenntnis auf Tatsachen zurückgeführt werden, um diesen Status nicht zu verlieren. Pasch unternimmt laut Cassirer den Versuch, dieses Programm für die Geometrie durchzuführen und zu zeigen, „wie eine empirische Geometrie aussehen müsse“ (Cassirer 1994b, S. 47). Das bedeute für die Bestimmungen der grundlegenden Elemente des Euklid, dass diese auf „materielle Dinge und Vorgänge“ zurückgeführt werden müssen. Damit ist beispielsweise „[e]in Punkt [...] nicht etwas, was keine Teile hat, [sondern] ein materialer Körper, dessen Teilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt.“ (Cassirer 1994b, S. 47f.) Mit solchen Definitionen entstehen nun gewisse „Grenzen“ für die Anwendung der Axiome – unter Umständen sind zwei Punkte sich so nahe, dass sie nicht mehr durch eine Linie verbunden werden können – und zudem ist die Anwendung dieser Grundelemente und Axiome auf die Elemente beschränkt, von denen wir sie ursprünglich entnommen haben.

Cassirer sieht in einer solchen Auffassung das folgende Problem:

Ist die Geometrie Erfahrungswissenschaft, so müßte die ‚Exaktheit‘, deren sie sich rühmt, eben in der Genauigkeit ihrer empirischem Begriffsmittel bestehen; sie müßte sich also in einer ständigen Vermehrung und Verfeinerung der Beobachtungsmittel und in der hieraus erwachsenden immer genaueren Kontrolle der Grundbegriffe und Grundtatsachen durch neue empirische Feststellungen erweisen. Diesen Weg hat

11. Auch im 20. Jahrhunderts ist diese Auffassung noch verbreitet: vgl. beispielsweise Prauss 1997.

indes Paschs System offenbar so wenig wie irgendein früheres geometrisches System beschränkt. (Cassirer 1994b, S. 48)

Ohne an dieser Stelle die wissenschaftstheoretischen Einwände weiter zu erläutern, hält Cassirer fest, dass die *historische* Wirkung von Paschs Geometrie eine völlig andere war, als seine systematische Absicht. Denn dieser habe aus dem empirischen Ursprung seiner Geometrie keine *anderen* Folgerungen gezogen als es die ‚gewöhnliche‘ Geometrie tut: das „wesentliche bleibt auch hier die denkende Bearbeitung“ (Cassirer 1994b, S. 49) der Grundelemente. Damit gilt Pasch für Cassirer vielmehr als Wegbereiter für den *Logizismus* und *Formalismus*, als dass er einen geometrischen Empirismus begründet hätte.

Hermann von Helmholtz hatte laut Cassirer aus einer anderen Richtung versucht, der euklidischen Geometrie mittels der Erfahrung ihre Ausnahmestellung zu sichern. Dabei ging er von dem folgenden Raumbegriff aus:

Der Raum [im Sinne von Helmholtz] in seiner allgemeinsten Form, als ‚Möglichkeit des Beisammen‘ ist ein unableitbarer Grundbegriff, der nicht aus der Erfahrung entspringt, sondern dieser vielmehr zu Grunde liegt. Aber diese Form muß als schlechthin universell gedacht werden, und sie ist es nur, wenn wir sie inhaltsleer und frei genug denken, um jeden Inhalt, der überhaupt in sie eingehen kann, aufzunehmen. (Cassirer 1994b, S. 49)

Hiermit könne Helmholtz die kantische „Apriorität des Raumes“ bewahren und sie mit seiner Grundanschauung als Sinnesphysiologie verbinden. Und zwar indem die einzelnen Geometrien mit ihren Axiomensystemen „Ausdruck bestimmter Grunderfahrungen“ sind und die oben beschriebene „allgemeinsten Form“ lediglich ausgestalten. Diese Grunderfahrungen seien dabei so „allgemein“, dass sie bei der gewöhnlichen Erfahrung nicht wahrgenommen werden und somit ihr „empirische[r] Charakter“ (Cassirer 1994b, S. 50) in den Hintergrund tritt. So gehe beispielsweise beim Vorgang einer jeden Messung die Voraussetzung ein, „dass es ‚starre Körper‘ gibt, die ohne Formveränderung frei im Raume beweglich sind.“ (Cassirer 1994b, S. 50) Dass diese Voraussetzung nicht eine Eigenschaft des Raumes an sich sei, sondern ein der Erfahrung entnommener Satz, sei eine Lehre, die uns die Nicht-Euklidischen Geometrien gelehrt hätten.

Ebenso, wie später für Felix Klein, ist laut Cassirer auch für Helmholtz der *Gruppenbegriff* von großer Bedeutung, wenn auch noch nicht in seiner begrifflich scharfen Form. Damit trete aber neben den Raumbegriff die Untersuchung eines Begriffs, dessen „logischer Charakter [...] kaum zweifelhaft sein“ (Cassirer 1994b, S. 50) kann. Denn im Gruppenbegriff werde von der Betrachtung jedes Inhalts

abgesehen und wir kommen zu einer „Theorie der *Operationen*.“ (Cassirer 1994b, S. 51) Henri Poincaré habe aus dieser Tatsache als erster „erkenntniskritische Folgerungen“ gezogen und jeden Wert von empirischen Betrachtungen für die Geometrie und damit auch die oben angedeuteten Grunderfahrungen von Helmholtz abgelehnt. Sein Argument ist laut Cassirer das folgende: Wie wir bereits erwähnt haben, kann jede Geometrie als Invariantentheorie einer bestimmten Gruppe aufgefasst werden; diese Gruppen werden aber gänzlich ohne Erfahrung bestimmt, womit in die „Begriffsbestimmung der Geometrie ein rein apriorisches Element“ (Cassirer 1994b, S. 51) eingehe. Damit habe auch hier die Frage nach der „wahren“ Geometrie erneut ihren Sinn verloren; diesmal allerdings im Hinblick auf unsere Erfahrung. Und nicht allein aus dem Grund, dass in die Bestimmung der Geometrie ein rein gedankliches Element einfließt, mache es nach Poincaré „keinen *Sinn*, die Erfahrung darüber zu befragen, welche Geometrie die ‚wahrere‘ ist“ (Cassirer 1994b, S. 51). Das Problem bestehe darin, dass sich die „idealen“ Objekte der Mathematik schlicht jedem Experiment entziehen. Punkte, Geraden und Ebenen sind nicht Teil unserer Erfahrungen, so dass wir Aussagen über sie nicht in unserer Erfahrung überprüfen können. Cassirer fasst nun zusammen, dass

[d]amit, gegenüber den Systemen des geometrischen Empirismus, das Verhältnis wesentlich geklärt [ist]. Mit jener Form des Empirismus, der die Axiome der Erfahrung entnehmen und der sie als einfache Abbildungen gegebener beobachtbarer Tatbestände verstehen will, läßt sich, wie Poincaré erklärt, kein vernünftiger Sinn verbinden. Axiome sind in jedem Fall freie Setzungen des mathematischen Denken, die Aussagen enthalten, die über jede Wahrnehmung hinausgehen. (Cassirer 1994b, S. 52)

Nichtsdestotrotz können wir aber, so Poincaré, Geometrien anwenden und fragen, welche besonders gut zu unserer Erfahrung passen. Hierbei sei aber entscheidend, dass zum einen keine Notwendigkeit in der Anwendung einer bestimmten Geometrie bestehe und zum anderen *keine* einzelnen Axiome verifiziert oder falsifiziert, sondern lediglich „bestimmte geometrische Gesamtsysteme mit dem Gesamtsystem der Erfahrung“ (Cassirer 1994b, S. 52) verglichen werden können. Dass die späteren Entdeckungen von Albert Einstein uns dazu zwingen würden, das euklidische System in der Physik abzuwandeln, hatte Poincaré jedoch nicht erwartet: er ging davon aus, dass die Ganzheit der physikalischen Erfahrung nicht zu einer solchen Veränderung führen könne.

Mit Poincarés Ansatz ist laut Cassirer auch endlich die Frage nach der „Anwendbarkeit“ der Mathematik zu lösen; ohne dabei auf eine „prästabilisierte Harmonie“

zu verweisen – wie der Rationalismus – oder die Begriffe der Mathematik der Erfahrung zu entnehmen – wie der Empirismus. Da die Axiome ‚freie Setzungen des mathematischen Denkens sind‘ und ‚nicht mehr inhaltliche Behauptungen von absoluter [– intuitiver oder rationaler –] Gewißheit‘ (Cassirer 1994b, S. 53), stehe es dem Denken frei sie anzuwenden. Wie wir bereits gesehen haben und hier noch einmal deutlich wird, sagen sie auch nichts über die Beschaffenheit eines „transzendenten“ Raumes aus, da sie keine „ontologische Frage“ (Cassirer 1994b, S. 53) beantworten wollen. Ferner konnte ihr *Ursprung* auch nicht in der Erfahrung liegen. Die Systeme von Axiomen sind vielmehr „Modelle“, die lediglich „Entwürfe und Vollzugspläne sind“ (Cassirer 1994b, S. 53) und den Raum als bloße Form des Beisammenseins ausdifferenzieren.

3 Zusammenfassung

Im Zuge von Cassirers Darstellung des Raum- und Erkenntnisproblems hat sich gezeigt, dass die Unterscheidung von erkenntniskritischen und ontologischen Fragen sowie seine damit zusammenhängende Begriffstheorie von fundamentaler Bedeutung ist. Bei einer *substanziellen* Deutung des Raumbegriffes, wie bei Newton oder Leibniz, führte die Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie unweigerlich in Widersprüche. Mit der veränderten Begriffstheorie lösten sich diese Widersprüche allerdings auf: Wenn Begriffe ihre Bedeutung nur innerhalb eines Begriffssystems erhalten, so kann Raum als Form des Beisammenseins gedacht werden. Die Frage nach dem ontologischen Status des Raumes und damit das Raumproblem, löst sich also mit einem angemessenem Verständnis von Begriffen und damit dem Wandel des Erkenntnisproblems auf. Mit diesem Raumbegriff konnte nun auch der Inhalt und Ursprung der Axiome der Geometrie auf angemessene Weise gedeutet werden. Die verschiedenen Axiomensysteme müssen nicht mehr konkrete Beschaffenheiten des Raumes zum Inhalt haben, sondern bestimmen gewisse Ausdifferenzierung der allgemeinen Form. Mit der Einführung des Gruppenbegriffs zur Differenzierung der Geometrien zeigte sich laut Cassirer zudem, dass eine jede Begründung für einen empirischen Ursprung der Axiome scheitern musste. Sie sind vielmehr reine Setzungen des menschlichen Verstandes und die Systeme von Axiomen liefern Modelle, die einem System der Erfahrung entsprechen können oder aber nicht müssen.

Offen müssen an dieser Stelle jedoch noch einige Fragen bleiben: Zentral für Cassirers Betrachtung ist seine Begriffstheorie. Ist diese gerechtfertigt und wird sie tatsächlich von der Entwicklung der Mathematik unterstützt? Ebenso erhebt Cassirer den Anspruch von der tatsächlichen Mathematik auszugehen. Wird er in

seiner Darstellung diesen historischen Quellen gerecht und gibt es unter Umständen andere, parallel verlaufende Entwicklungslinien der Mathematik, die er außen vor lässt? Wie mehrfach betont, ist für Cassirer das Faktum der Wissenschaft von äußerster Wichtigkeit. Ist daher seine Deutung des Raum- und Erkenntnisproblems auch fruchtbar vor dem Hintergrund der Entwicklung der Mathematik im 20. und 21. Jahrhundert oder gab und gibt es mathematische Entwicklungen, die seine Deutung fraglich erscheinen lassen? Ferner muss Cassirers Deutung der Entwicklung der Arithmetik noch in den Fokus einer weiteren Untersuchung rücken. Hier scheint Cassirer ebenso wie im Falle der Geometrie interessante und vielversprechende Positionen vertreten zu haben.

Literaturverzeichnis

- Cassirer, Ernst. 1994a. *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. Erster Band*. Erstveröffentlichung 1906. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- . 1994b. *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. Vierter Band: Von Hegels Tod bis zur Gegenwart (1832-1932)*. Erstveröffentlichung auf Englisch 1950. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- . 2000. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Erstveröffentlichung 1910. Hamburg: Felix Meiner Verlag.
- Gosztonyi, Alexander. 1976. *Der Raum. Geschichte seiner Probleme in Philosophie und Wissenschaften*. 2 Bände. Freiburg und München: Verlag Karl Alber.
- Koenig, Heike, und Daniel Koenig. 2018. Mensch und Raum in der Mathematik – der Mensch als Schöpfer mathematischer Räume? In *Körper und Räume*. Studien zur Interdisziplinären Anthropologie. (Im Erscheinen). SpringerVS.
- Mehrtens, Herbert. 1990. *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*. Frankfurt/M: Suhrkamp Verlag.
- Naas, Josef, und Hermann Ludwig Schmidt, Hrsg. 1972. *Mathematisches Wörterbuch*. Nachdruck von 1961. Berlin: Akademie-Verlag.
- Paetzold, Heinz. 1995. *Ernst Cassirer – Von Marburg nach New York. Eine philosophische Biographie*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

- Prauss, Gerold. 1997. Cassirers Stellungnahme zum Problem der nichteuklidischen Geometrien. In *Von der Philosophie zur Wissenschaft. Cassirers Dialog mit der Naturwissenschaft*. Felix Meiner Verlag.
- Thiel, Christian. 1995. *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Torretti, Roberto. 1978. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Walz, Guido, Hrsg. 2017. *Lexikon der Mathematik*. 2. Aufl. Heidelberg: Springer-Verlag.

Lewis Carroll, die Schildkröte und Achill – Teil II. Ein unendlicher logischer Diskurs auf drei Seiten

Martin Rathgeb

Emelie Linder, dir zur Erinnerung, kleiner Engel

1 Exposition

Der knapp dreisseitige Text „What the Tortoise Said to Achilles“ (WTSA) von Lewis Carroll erschien 1895 in *Mind*. Anders als der 1894 ebenfalls in *Mind* erschienene ebenfalls knapp dreisseitige Text „A Logical Paradox“ blieb WTSA zu Carrolls Lebzeiten ohne Resonanz. Nach einem Jahrhundert jedoch erschien 1995 als Zentenarium ein Reprint von WTSA in *Mind*, begleitet von aktuellen Diskussionsbeiträgen.¹ Weitere zwei Dekaden später erschien 2016 unter dem vielsagenden Titel *‘What the Tortoise Said to Achilles’*. *Lewis Carroll’s Paradox of Inference* eine Doppelausgabe von *The Carrollian*, dem Lewis Carroll Journal. In dieser Monographie sind mit WTSA und der Korrespondenz zwischen Lewis Carroll und G. F. Stout, dem Herausgeber von *Mind*, noch fünf aktuelle Diskussionsbeiträge, eine (selektive) Bibliographie und eine Einführung versammelt.² Mein im Band 7 der *SieB*-Reihe und damit ebenfalls 2016 erschienener Aufsatz zu WTSA, einem mittlerweile 120 Jahre alten Text, an den vorliegender Aufsatz in gewisser Weise anschließt, ist demnach nicht aus der Zeit gefallen. Denn WTSA gilt heutzutage

1. Vgl. (Blackburn 1995; Schueler 1995; Smiley 1995) und weiter <http://www.enterag.ch/hartwig/schildkroete.pdf> für eine Übersetzung von WTSA durch H. Thomas ins Deutsche.

2. Vgl. (Carroll 2016b), (Carroll 2016a), (Moktefi und Abeles 2016b; Marion 2016; Englebretsen 2016; Engel 2016; Woods 2016), (Imholtz und Moktefi 2016) und (Moktefi und Abeles 2016a).

als Klassiker in der Philosophie der Logik und Carrolls Inferenz-Paradoxie noch immer als ungelöst.

In einer der Bewegungsparadoxien von Zenon trat der mythische Held Achilles zu einem fiktiven, mutmaßlich nie endenden sportlichen Wettkampf gegen eine Schildkröte an. In der Inferenz-Paradoxie von Carroll wird Achill in einen fiktiven, mutmaßlich nie endenden intellektuellen Schlagabtausch mit ihr verwickelt, einen unendlichen logischen Diskurs also. Carroll legt diese Paradoxie in Gestalt einer amüsanten und zudem literarisch anspruchsvollen Parabel vor. So weiß sich die Schildkröte zwar im Dialog mit Achilles durchaus einfühlbar, weitsichtig und wortgewandt zu geben, sie verhält sich aber zugleich überraschend und unangepasst. Denn sie widersteht seiner Argumentation, die doch allem Anschein nach – zumindest wird sie zumeist so gelesen – logisch ‚zwingend‘ ist.

Im Kern geht es in der Parabel um das Verhalten der Schildkröte gegenüber bestimmten Sätzen, die in einem mathematischen Kontext stehen: Als wahr akzeptiert sie zunächst die beiden nachfolgend formulierten geometrischen Sätze *A* und *B* und dann sukzessive auch noch die weiteren Sätze, *C*, *D*, *E* etc., die allesamt nach einem offensichtlichen Schema gebildet sind:

A „Things that are equal to the same are equal to each other.“

B „The two sides of this Triangle are things that are equal to the same.“

C „If *A* and *B* are true, *Z* must be true.“

D „If *A* and *B* and *C* are true, *Z* must be true.“

E „If *A* and *B* and *C* and *D* are true, *Z* must be true.“

⋮ ⋮ ⋮

Allerdings akzeptiert die Schildkröte hinsichtlich endlich vieler auf *B* folgender Sätze (*C*, *D*, *E* etc.) den nachfolgend formulierten Schlusssatz *Z* nicht als wahr:

Z „The two sides of this Triangle are equal to each other.“

Die Schildkröte verhält sich diesbetreffend anders als der typische Leser Euklids. Denn ein solcher, darin stimmen zumindest die Schildkröte und Achill überein, würde *Z* bereits im Hinblick auf *A* und *B* als wahr akzeptieren, seiner Lesart gemäß würde *Z* aus *A* und *B* *logisch folgen*. Achill scheitert im Text an seiner bereitwillig übernommenen Aufgabe, die Schildkröte mit den Mitteln der Logik dazu zu zwingen, *Z* als wahr zu akzeptieren. Stattdessen – so bin ich geneigt zu ergänzen – sieht er schauernd ein, dass ihm dies nicht gelingen kann. Denn dem Griff der Logik an ihre Gurgel, von dem Achill zunächst noch triumphierend

sprach, kann sich die Schildkröte durch ihr renitentes Verhalten wiederholt entziehen. Carrolls Paradoxie wirft, um das mindeste zu sagen, verschiedene Fragen auf. Manche fokussieren eher die diskutierte *Inferenz*, manche eher das inszenierte *Verhalten* der Schildkröte. Demgemäß kann die Paradoxie – und das wird sie zu meist – als Carrolls Inferenz-Paradoxie bezeichnet werden, sie kann aber auch als Verhaltens-Paradoxie gelesen werden.

Im vorliegenden Aufsatz geht es mir vordringlich nicht darum, diese Paradoxie – im Detail oder Ganzen – literarisch, logisch, mathematisch oder philosophisch über meine Darstellung in (Rathgeb 2016) hinausgehend auszudeuten oder sie etwa historisch zu diskutieren. Eine solche Forschungsperspektive wird hier nicht eingenommen, sondern eine andere. Diesmal werde ich die Paradoxie im Lichte mathematischer Allgemeinbildung lesen und einige Gedanken zu ihrer Verwendung in der Lehre von Lehramtsstudierenden der Mathematik skizzieren und diesbezüglich auch einen kleinen und zukünftig noch weiter zu systematisierenden Erfahrungsbericht geben. Es geht mir also diesmal mehr um eine Lehre von Mathematik als um eine Philosophie der Logik, will sagen, um einen kleinen Beitrag zu einer logisch informierten und philosophisch reflektierten Didaktik der Mathematik.

2 Fachliche Klärung

Welches Fach bzw. welche Fächer sind für eine *fachliche Klärung* eigentlich zu Rate zu ziehen? Wie bereits erwähnt (vgl. S. 116) und in (Moktefi und Abeles 2016a) weiter nachzulesen, ist WTSA mittlerweile für die Philosophie der Logik einer ihrer klassischen Texte. Demnach kommen also zunächst Philosophie und Logik (beide mit ihrer – zum Teil auch gemeinsamen – Geschichte), weiters auch Literatur und Mathematik neben Pragmatik und Semiotik als Fächer infrage, von denen ein Beitrag zur fachlichen Klärung zu erwarten ist.

Für WTSA werden in dem Aufsatz „Wie man einer Schildkröte widersteht“ (2012) von Pascal Engel vier Interpretationsansätze ausgewiesen und damit vier Möglichkeiten skizziert, in der Geschichte eine ‚Moral‘ zu suchen oder finden. Ich formuliere sie als Erklärungsansätze für das Verhalten der Schildkröte: (1) Die Schildkröte vermag zwischen Prämissen (die als *wahr* gelten) und Schlussregeln (die als *gültig* gelten) nicht zu unterscheiden sowie im Hinblick auf ein hypothetisches Satzgefüge nicht zu unterscheiden zwischen der Wahrheit des Vordersatzes, der Wahrheit des Hintersatzes und der Gültigkeit der Sequenz; (2) sie vermag zwar die Unterscheidung selbst zu leisten, bekommt aber die Synthese nicht adäquat geleistet, vermag also nicht, den Bedeutungen gemäß zu handeln; (3) sie weiß wohl, wie

regelkonform zu handeln wäre, verlangt aber von Achill eine Rechtfertigung dieses durchaus üblichen Verhaltens; (4) sie zeigt Achilles, eine gewisse Ohnmacht des logischen Zwangs.

In seinem Aufsatz (Engel 2012) behandelt Engel vornehmlich Ansatz (4). Denn er arbeitet an einem Zwei-Stufen-Modell von zunächst kausaler und weiter rationaler Disposition, um damit erklären zu können, weshalb wir ein Mal guten Gründen gemäß handeln können, sie aber ein anderes Mal auch infrage stellen können: Woher kommt diese Form von Freiheit als Wahl zwischen Handlung und Überlegung?

„Es besteht ein himmelweiter Unterschied darin, ob man in der Lage ist über die Regeln, die man befolgt, zu reflektieren oder ob man tatsächlich beim Schlussfolgern an diese denkt. Logisches Schließen ist keine derartige reflektierte Aktivität und benötigt diese auch nicht. Aber um zu verstehen, wie unsere Schlussregeln Gründe sein können, braucht man diese Form der Reflexion. Wir müssen Gründe nicht als Tatsachen auffassen, um diese Objektivität logischer Gründe sicherzustellen.“ (Engel 2012, 1032)

Auf diesen Unterschied zwischen Regelbefolgung und Regelreflexion kommt auch Michael Otte mit mathematik-philosophischem Fokus, nämlich unter der Überschrift „Gegenstand und Methode im Zusammenhang – Mathematik als Beweisen“ zu sprechen (Otte 1994, Kapitel XII). Otte konstatiert:

„Traditionell repräsentiert der Beweis in hervorstechender Weise ein charakterisierendes Merkmal der Mathematik, nämlich die Sicherheit ihrer Erkenntnisse. [...] Der Anspruch des Beweises, sicheres und wahres Wissen zu vermitteln, begegnet der Forderung, zu beweisen, daß dieser Anspruch des Beweises korrekt ist, und dann der Forderung, daß der Beweis des Beweises korrekt ist, usw. ad infinitum.“ (Otte 1994, 307)

Diese Begegnung führt in ein Dilemma. Nach Otte hat Carroll mit WTSA „deutlich gemacht“, dass „die Behauptung der zwingenden Kraft mathematisch-logischer Beweise“ auf einer „Konfusion“ beruht, nämlich der „Verwechslung der Beschreibung einer Sache mit der Sache selbst“ als einem Beispiel für – Otte spricht diesbezüglich mit Quine – die „Verwechslung des Gebrauchs von use und mention“ (Otte 1994, 307 f.). Eine Regel kann einerseits Thema (*mention*), andererseits Rhema (*use*) sein, also bspw. angeführt bzw. reflektiert werden oder befolgt werden. Carroll verdeutlicht dies just am ersten Beweis im klassischsten Mathematikbuch aller Zeiten, nämlich Euklids *Elementen*, das unumstritten als Prototyp und Idealtyp

des hypothetisch-deduktiven Systems antiker Mathematik gilt. Otte pointiert den Dialog folgendermaßen:

„Wer Euklid gelesen hat, wird wohl zugeben, daß Z logisch aus A und B folgt, so daß jeder, der A und B akzeptiert, Z als wahr akzeptieren muß, behauptet Achill. Aber um die Schildkröte zu zwingen, diese Schlußweise zu akzeptieren und insbesondere Z zu akzeptieren, falls sie A und B akzeptiert, bleibt ihm nichts anderes übrig, als genau diese Forderung selbst als neue Regel aufzuschreiben.“ (Otte 1994, 308)

Die Regel, welcher die Schildkröte nicht folgt, welche sie nicht ausführt (*use*), wird von Achill thematisiert, er führt sie an, sie wird reflektiert (*mention*). Dazu ist die Schildkröte im Weiteren jeweils gerne bereit. Sie lässt Regeln anführen, reflektieren und aufschreiben, sie führt sie allerdings nicht aus, folgt ihnen nicht. Otte weist dann weiter darauf hin, dass Logik auf ihrem Wege der Erkenntnissicherung – entgegen herkömmlicher Meinung – letztlich auf Intuition angewiesen ist.

„Hier wird deutlich, daß der infinite Regreß nur zu überwinden ist, wenn der Gedanke identisch mit seinem Inhalt wäre. Gerade diese Lösung beansprucht die Intuition oder das intuitive Denken als Gegner der Logik für sich. [...] Das Wissen und das Meta-Wissen, die Ebene des Wissens und die Ebene der Überprüfung und Sicherung der Objektivität des Wissens sind kurzgeschlossen. Um es anders zu sagen: Ein geistiges Urteil kommt, wie der Dialog zwischen Achill und der Schildkröte zeigt, nur zustande, wenn das Denken einen Gegenstand hat. Diese Gegenständlichkeit wird durch die Intuition repräsentiert.“ (Otte 1994, 308)

Otte führt im Weiteren als zwei Merkmale der Intuition an: „die Augenblicklichkeit des Übergangs vom Nichtwissen zum Wissen“ und die „Unbewußtheit bezüglich ihres Zustandekommens“, dabei bezieht sich „ihres“ auf die ‚intuitive Erkenntnis‘: „Dieses fehlende Bewußtsein macht die Erkenntnis unkommunizierbar, denn ich verstehe mein eigenes Verstehen nicht.“ (Otte 1994, 308 f.). Ein für die Mathematik erhaltenes Ergebnis seiner weiteren Argumentation lautet dann:

„Bewußtsein und Kommunikation greifen zwar nicht ineinander ein, sind aber unabdingbar aufeinander angewiesen, wenn Erkenntnis zustande kommen soll. In diesem Sinne beruht dann die Mathematik auf Intuition und auf Logik zugleich.“ (Otte 1994, 309)

Diese Lesart von WTSA gemäß Ansatz (4) zeigt sich auch in dem Hinweis, den Gregor Nickel gibt, wobei bei ihm wie auch in nachfolgend zitierter Interpretation

nicht mehr von verschiedenen Schlussregeln die Rede ist, sondern nur noch von der einen Schlussregel *modus ponens*, womit verkürzt der *modus ponendo ponens* und nicht der *modus tollendo ponens* bezeichnet ist.

„Dass es keineswegs einfach, ja sogar unmöglich ist, einen intelligenten und gutwilligen, aber ‚formal-störrischen‘ Diskurs-Partner zum Anwenden des *Modus ponens* zu zwingen, zeigt CHARLES LUTWIDGE DODGSON, alias LEWIS CARROLL, in einem ebenso amüsanten wie tief sinnigen und anregenden Aufsatz an Hand eines fiktiven Diskurses zwischen Achill und einer Schildkröte.“ (Nickel 2017, Abschnitt 4)

Das Ausbleiben der Regelanwendung bzw. den Aufschub des Schlussfolgerns weist auch Esther Ramharter als Pointe aus. Sie schlägt dann bzw. damit aber eine ganz andere Richtung ein. Zunächst also gibt sie den trefflichen Hinweis: Formeln mögen logische Relationen darstellen können, nicht aber das Schlussfolgern selbst.

„Die Moral [von WTSA] lautet, wenn ich so langweilig sein darf, sie zu formulieren, daß der tatsächliche Vorgang des Schlußfolgerns, der schließlich das Herz der Logik ist, nicht durch eine logische Formel wiedergegeben werden kann; daß es vielmehr eine hinreichende Rechtfertigung einer aus Prämissen gezogenen Folgerung ist, wenn man sieht, daß sie in der Tat aus ihnen folgt. [...] Wenn man folgern lernt, geht es nicht bloß darum, daß man über explizite logische Relationen zwischen Aussagen unterrichtet wird; man muß vielmehr lernen, etwas zu tun.“ (Ramharter 2008, 46 f.)

An der im Zitat ausgelassenen Stelle wird aber deutlich, wie Ramharter auf das Verhalten der Schildkröte schaut.

„Auf weitere Rechtfertigung bestehen, heißt nicht besonders umsichtig zu sein, sondern zeigt[t], daß man mißverstanden hat, was eine Schlußfolgerung ist.“ (Ramharter 2008, 47)

Sie deutet das Verhalten der Schildkröte also gemäß Ansatz (3) und qualifiziert es deutlich ab. Der Frage nach einer weiteren Rechtfertigung bzw. Rückversicherung muss ihres Erachtens ein Missverständnis vorausgegangen sein. Dieses despektierliche Urteil muss nicht geteilt werden, wie nachfolgend zitierte Interpretation von Pirmin Stekeler-Weithofer zeigt. Sie ist ebenfalls Ansatz (3) zuzurechnen, allerdings mit einer ganz anderen Wertschätzung. Stekeler-Weithofers Hinweis gilt der Sonderrolle des *modus ponendo ponens*, der es nämlich überhaupt erst ermöglicht, eine Regellogik in eine Satzlogik zu transformieren, also Schlussregeln ‚verlustfrei‘ satzartig formulieren zu können. War zwar bei Otte davon die Rede, dass Regeln

angeführt und aufgeschrieben werden, so weist erst Stekeler-Weithofer darauf hin, dass der *modus ponendo ponens* diejenige (Meta-)Regel ist, derentwegen gewisse Satzgefüge³ Schlussregeln überhaupt erst vertreten können.

Lewis Carroll hat in dem Gespräch zwischen Achill und der Schildkröte auf schön vertrackte Weise vorgeführt, daß der betreffende subjunktive Satz die Geltung der Schlußregel nicht *begründet*, sondern bloß *artikuliert*, und zwar unter der Voraussetzung der Anerkennung bzw. der Berechtigung des *modus ponens* in bezug auf alle Subjunktions[sätze...] Kurz, die empraktisch in ihrem Gebrauch als beherrscht unterstellte Regel „*modus ponens*“ macht es allererst möglich, bedingte Schlußregeln in der Form von Subjunktionen satzartig zu artikulieren.“ (Stekeler-Weithofer 2000, 113 f.)

Dieser Interpretation zufolge, könnte die Schildkröte mit ihrem Verhalten in durchaus *sinnvoller* Weise darauf abzielen (wollen), bei Achill das Einsehen zu erwirken, dass er den *modus ponendo ponens* nicht rechtfertigen kann – zumindest nicht auf die bemühte Weise. Gerechtfertigt werden soll demnach – entgegen Ramharters Deutung – nicht das *Schlussfolgern* gemäß einer als gültig bereits anerkannten Schlussregel, sondern gerechtfertigt werden – und überhaupt erst in den Blick kommen – soll die besonders bedeutsame *Schlussregel* *modus ponendo ponens* selbst. Wohlgermerkt kann *A* in dieser Interpretation als eine Instanz der als wahr anerkannten Artikulation dieser (Meta-)Regel gelesen werden, doch wird weder geeignetes *Instantiieren* noch geeignetes *Subsumieren* als logische Regel bzw. epistemologisches Hindernis zwischen Achill und der Schildkröte diskutiert – geschweige denn von ihnen beiden explizit als gültig akzeptiert. Gleichmaßen, und dies wird von Otte nicht erwogen – zumindest nicht formuliert –, könnte es der Fall sein, dass die jeweils aufgeschriebenen Regeln von der Schildkröte und möglicherweise gleichmaßen von Achill nur (noch) als wahre Aussagen und (weiterhin) nicht als gültige Regeln gelesen werden und demgemäß nicht als akzeptiert sind.

In meinem Aufsatz (Rathgeb 2016) ist mir zunächst an den Interpretationsansätzen (1) und (2) gelegen. Diesbezüglich führe ich aus, dass die Schildkröte gute Gründe anführen könnte, weshalb sie tatsächlich von der Logik nicht zum erwarteten Verhalten gezwungen wird. Denn Achills Argumentation baut den logischen Zwang nicht hinreichend auf. Dabei ist zwar diskutabel, wie seine Argumentation adäquat zu formalisieren wäre, aber unstrittig ist, dass er von ihr – und dies ist im üblichen Sinne gemeint – nicht alle Regeln eingefordert hat, welche sie doch ausführen soll. Mit anderen Worten: Ich gebe für eine satzlogische Lesart

3. In (Rathgeb 2016) führe ich aus, dass – und weshalb – nach (Wolff 2009, 2006) die von Stekeler-Weithofer ‚subjunktiv‘ genannten Satzgefüge besser ‚hypothetisch‘ zu nennen wären.

des Dialogs zwischen Achill und der Schildkröte Hinweise auf formale Lücken im zweiten Teil des Beweises, nämlich dem diskursiv-argumentativen (und nicht dem konstruktiven) Teil, und insbesondere darauf, dass hinsichtlich des Dialogs die übliche Rede vom verweigerten Gebrauch des Modus (ponendo) ponens bzw. der Abtrennungsregel etwas vorschnell erfolgt. Dafür beäuge ich zunächst Euklids Beweis insgesamt und skizziere dann ein *Beweissystem*, das der *Beweisanalyse* (des diskursiv-argumentativen Teils) dienen soll, nämlich das von Alexander Prestel in seinem Buch *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie* (1992) verabschiedete Konzept (formaler) Beweise aus einer vorausgesetzten Menge Σ von L -Formeln, die als zusätzliche (nicht-logische) Axiome verwendet werden dürfen; dabei verweist „ L “ auf die vorab vereinbarte (formale) Sprache $L = (\lambda, \mu, K)$, d. h. bestimmte Grundzeichen, Terme, Formeln und Aussagen.

Auf die Ansätze (3) und (4) komme ich nach meiner Analyse gemäß den Ansätzen (1) und (2) zu sprechen – mit Nickel, Otte, Stekeler-Weithofer und anderen. Dabei stimme ich mit diesen drei und anderen Autoren – kontra einige Stellen in (Engel 2012) – insbesondere darin überein, dass der Schildkröte unrecht tut, wer sie für unfähig hält, die Unterscheidung bzw. Synthese zu leisten. Der Text zeigt sie – unseren Interpretationen zufolge – als überaus fähig und damit weiter als dem Achill überlegen. Deswegen gebe ich im Hinblick auf eine Interpretation von WTSA zu bedenken, dass Mathematik und Logik zwar das mehr oder minder offensichtliche *Thema* der Parabel sein mögen, dass aber eine Analyse und Interpretation des Textes der Carrollschen Darstellung dieses Themas erst dann gewachsen ist, wenn sie formale und informale Logik gleichermaßen *methodisch* zu berücksichtigen versteht; andernfalls nimmt sie nämlich unter Umständen eristisches Handeln und schelmische Ironie zu ernst. Dabei genügen die Bezeichnungen ‚formale Logik‘ und ‚informale Logik‘ alias ‚Argumentationstheorie‘ folgenden Definitionen:

„Die *formale Logik* ist die philosophische Disziplin, die die formalen Eigenschaften von Aussagen untersucht, sowie die Beziehungen, die auf Grund der formalen Eigenschaften zwischen Aussagen bestehen. [...] Die *Argumentationstheorie* ist diejenige Disziplin, die die Struktur und rhetorische Wirksamkeit natürlichsprachlichen Argumentierens untersucht, unabhängig von dessen logischer Qualität.“ (Löffler 2008, 38 f.)

WTSA gibt auch nach 120 Jahren und einschlägiger Literatur nicht zuletzt seiner schönen Darstellung wegen noch immer Anlass zu angeregter und anregender Diskussion. In (Rathgeb 2016, 71 f.) erinnere ich diesbezüglich mit einem längeren Zitat an Immanuel Kants Rede von *ästhetischen Ideen*, nämlich gewissen Vorstellungen der Einbildungskraft, die zwar zu denken geben, aber begrifflich nicht voll erfasst werden können (vgl. seine *Kritik der Urteilskraft*, § 49).

Eher kleine Motive interpretativer Überlegungen sind bspw. die folgenden Fragen. Weshalb geht der erste Erzähler, es gibt wohlgermerkt noch einen zweiten, nämlich den, der den Weggang des ersten erzählt, just zur die Bank: „the narrator, having pressing business at the Bank, was obliged to leave the happy pair“ (Carroll 1895, 280).⁴ Gilt Carroll die Bank und Bankgeschäfte als Symbol besonderer Sicherheit oder gewichtiger Realität? Oder gar als Hinweis auf die Arithmetik als diskreten Gegenpart zur Geometrie, also auf Zahlen bzw. Geldwerte? Oder ist es das Kapital, der Mehrwert, den Banken vermeintlich schaffen, dem Carrolls Hinweis gilt? Dass also Z doch – in gewissem Sinne – mehr ist als durch A und B gegeben? Oder war es ein aktueller finanzieller (Miss-)Erfolg, auf den der Autor da anspielt? Erinnert Carroll damit, dass bei Rückkehr des ersten Erzählers Achill gerade den 1001. Schritt aufgeschrieben hat, etwa an die orientalische Märchensammlung, in der Scheherazade ihre Hinrichtung durch ihr Erzählen Nacht um Nacht um einen weiteren Tag aufschiebt?⁵ Wohl ja, also weshalb? Etwa weil die Schildkröte durch ihr Erzählen den Schluss auf Z von Mal zu Mal jeweils neu aufschiebt? Etwa weil sie durch ihr Verhalten den Dialog am Laufen, am Leben hält? Formuliert Lewis Carroll „Thought-Us“ für Tortoise und „A Kill-Ease“ für Achilles mehrere Dekaden vor Jacques Derrida ein Wortspiel, bei welchem ein schriftlicher Unterschied lautlich nicht erscheint? Wohlgermerkt, verwendet Derrida für diese visuelle, aber überhörbare Differenz just das französische Wort für Differenz, nämlich „différance“ für ‚différence‘ (dt. bspw. Differänz für Differenz). Am Wort für Unterschied wird also ein Unterschied gemacht, der im Laut nicht auszumachen ist. Kommt einer symbolischen Logik das Primat gegenüber verbaler Logik zu? Dem Vorschlag der Schildkröte zufolge bekäme Achill mit ‚Thought-Us‘ lautlich denselben Bezeichner wie sie selbst. Die Rede über sie wäre demgemäß ambig. Achill sorgt mit seinem Vorschlag von ‚A Kill-Ease‘ als neuem Bezeichner für die Schildkröte dafür, dass sie weiterhin – wenn auch mit vertauschten Bezeichnern – unterscheidbar sind. Über den Vorschlag der Schildkröte lässt sich aber auch folgendermaßen nachdenken. Carroll erinnert mit der Rede von der „Mock-Turtle“ als substantialisiertes Akzidenz einer ‚mock turtle soup‘ an das gleichermaßen substantialisierte Grinsen der Grinse-Katze. Bringt er zuvor einen zweiten Erzähler ins Spiel, so reduziert er – einer Gegenbewegung gleich – durch den ersten Bezeichnungswechsel (der von Achill wohlgermerkt nur unter einer Hypothese akzeptiert wird) gewissermaßen die Protagonisten. Alle drei Aspekte werfen damit die Frage nach dem Kern, der Substanz auf. Hinter den beiden Erzählern und den beiden Protagonisten steht der eine Autor Carroll, der den „Logicians of the Nineteenth Century“ ein instruktives

4. Und weiter könnte ein dritter Erzähler vom zweiten erzählen, ein vierter vom dritten usw. Oder es erzählte auch ein früherer von einem späteren.

5. Dabei könnte die explizierte Zahl von 1001 Schritten just *ungezählt viele* Schritte bedeuten, insofern in der Rahmenerzählung dieser Märchensammlung weniger als 300 Nächte vergehen.

und gedankenvolles Gespräch verschriftlicht.

3 Allgemeinbildung und Mathematiklehrerbildung

In Siegen gibt es für Studierende des Mathematik-Lehramts an Gymnasien, Gesamtschulen und Berufskollegs eine Pflichtveranstaltung zur Geschichte/Philosophie der Mathematik. Darin es wiederholt im Kontext der Mathematikphilosophie bei Platon und Aristoteles auch um Grundgesetze der Logik ging und mehrfach eine Aufgabe zu WTSA gestellt ward. Ist aber WTSA auch von mathematikdidaktischem Interesse? Wofür (und wie) lässt sich WTSA als – im Hinblick auf mathematische Allgemeinbildung und andere Aufgaben sowie Themen der Mathematikdidaktik – instruktives und gedankenvolles Gespräch in schriftlicher Form nutzen? Auch dafür mag obige fachliche Klärung dem Lehrenden einen ‚Erwartungs‘-Horizont skizzieren.

Die in der Mathematikdidaktik und Allgemeinen Pädagogik geführte Rede von mathematischer Allgemeinbildung wird im Folgenden nicht problematisiert werden. Stattdessen werde ich für den Ausweis eines (weiteren) sinnvollen Ortes von WTSA in der Mathematiklehrerbildung auf einen ‚archimedischen Punkt‘ zurückgreifen bzw. deren mehrere. Im *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2015) schreibt Michael Neumann unter der Überschrift „Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts“:

„Nicht nur die deutschen Bildungsstandards (KMK 2003, 2004, 2005) berufen sich auf die drei von Heinrich Winter genannten „Grunderfahrungen“ als Ausgangspunkt und Ziel. Es ist durchaus überraschend, dass man sich heute in der Mathematikdidaktik, offenbar schnell und über sonst oft scharfe Abgrenzungen hinweg, auf diese Forderungen einigen kann. Sind aber die Konsequenzen, die Winter zieht, wirklich ebenso konsensfähig, geschweige denn in irgendeiner hinreichenden Breite realisiert?“ (Neubrand 2015, 68)

Neubrand spricht damit einen im Hinblick auf mathematische Allgemeinbildung bestehenden Konsens in der Mathematikdidaktik an, nämlich die von Heinrich Winter genannten drei mathematischen *Grunderfahrungen* und nachrangig auch die weniger geschätzten KMK-Bildungsstandards, an denen sich die hier ebenfalls zu nennenden Kernlehrpläne orientierten. Auf die erkenntnistheoretisch unbedarften (Aus-)Bildungsstandards kommen im Handbuch auch noch die Herausgeber zu sprechen, da jene als Stichwortgeber für die Beitragstitel fungieren durften.

„Die Gliederung dieses Kapitels [Teil III. Mathematik als Denkprozesse; MR] folgt den Wortmarken für die in den Bildungsstandards für den Mathematikunterricht fixierten allgemeinen mathematischen Kompetenzen, beginnt jedoch bewusst mit einer Reflexion von Begriffsbildungsprozessen in der Mathematik und im Mathematikunterricht von *Hans-Georg Weigand* als erkenntnistheoretische Fundierung auch für die dann folgenden Kompetenzbereiche. [...] Der Beitrag von *Hans-Nils Jahnke* und *Stefan Ufer* konzentriert und beschränkt sich auf konzeptionelle, das Feld strukturierende Beiträge und empirische Untersuchungen zum Argumentieren und Beweisen.“ (Bruder et al. 2015, 253)

Nach Winter soll schulischer Mathematikunterricht anstreben, (das Lernen von) Mathematik erleben zu lassen und diesbezüglich insbesondere folgende *Grunderfahrungen* zu ermöglichen; hinter diese Forderungen wird ein hochschulisches Mathematiklehramtsstudium de facto nicht zurückfallen.

- (G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.“ (Winter 2003, 6)

Bevor ich auf Winters eigene Ausdeutung der Grunderfahrungen und die beiden mathematikdidaktischen Themen, die Begriffsbildung sowie das Argumentieren und Beweisen, näher eingehe, möchte ich zunächst allein im Hinblick auf Winters Formulierung der Grunderfahrungen antworten. Es erlaubt WTSA jede der drei Grunderfahrungen. Denn für (G3) spricht, dass in WTSA Carrolls Inferenz-Paradoxie seine originale Darstellung hat und zudem eine Bewegungs-Paradoxie von Zenon angesprochen wird. Paradoxien aber sind Probleme, tiefe Probleme sogar, welche die Problemlösefähigkeiten und Heurismen ‚der Menschheit‘ herausfordern und sogar zu Theorieentwicklungen anregen können. Was die beiden konkreten Paradoxien anbetrifft, so sind sie den Themen von (G1) und (G2) zuzurechnen, ersterenfalls mit Bezug zu Naturwissenschaften (die Physik), letzterenfalls mit Bezug zu Geisteswissenschaften (wie bspw. Literatur-, Sprachwissenschaften sowie die

(philosophische) Logik). Eventuell sprechen die Paradoxien also Personen mit verschiedenen Interessen an. Die Zenon-Paradoxie betrifft die adäquate Beschreibung einer Bewegung, allgemeiner vom Werden, und damit die (physikalischen sowie philosophischen) Begriffe Raum, Zeit und Bewegung sowie (Nicht-)Sein; sie soll hier nicht zu einem eigenen Thema werden. Angemerkt aber sei, dass Winter „elementare Bewegungen“ und die „Anwendung der Bewegungslehre auf die Fahrphysik“ (G1) zurechnet, also dem Anwenden von Modellieren mit Mathematik (Kaiser et al. 2015). Wohlgermerkt, gehört nach Winter zu (G3) die kritische Reflexion aufs Modell und die Anwendung, doch bleiben die in der Schule im Hinblick auf Zeit, Raum und Bewegung gestellten Fragen zumeist erkenntnistheoretisch betrachtet naiv. Und weiter sei angemerkt, wer diese Paradoxie zu lösen glaubt, indem er – wie in WTSA angedeutet – von konvergenten (geometrischen) Reihen spricht, der hat sich auf die Paradoxie selbst mathematisch bzw. mathematikphilosophisch noch nicht eingelassen (vgl. Bernays und Hilbert 1968, 16 f.) bzw. den für Zenon wesentlichen Punkt philosophisch noch nicht verstanden (vgl. Stekeler-Weithofer 2006, 170 ff.). Die Carroll-Paradoxie dagegen ist an die klassischste aller Darstellungen der ‚deduktiv geordneten Welt eigener Art‘ angeknüpft, nämlich Euklids *Elemente*, stellt die Möglichkeit deduktiver Ordnung überhaupt und insbesondere die Sicherung der Existenz gleichseitiger Dreiecke infrage; sie ist ganz klar ein Thema von (G2).

„Welche Probleme wären zu lösen und wie wäre der Grund dafür zu legen, dass wir aufhören, das Denken nicht zu mögen?“ (Stekeler-Weithofer 2012, 55)

Die zitierte, zugegebenermaßen etwas freche Anfrage liefert – neben ihrem selbstkritischen Potenzial – zumindest noch den Hinweis, dass eine thematische Passung zu den Grunderfahrungen allein nicht reicht. Will man WTSA zu Lehrzwecken verwenden, so müssen die Leser, also bspw. die Lehramtsstudierenden, damit beginnen zu denken, über WTSA nachzudenken. Und ihnen fehlt es diesbezüglich nicht unbedingt an der Bereitschaft, sondern vielleicht am geeigneten Ansatzpunkt, am spezifischen Augenmerk. Ich versuchte in fachdidaktischen Ergänzungsseminaren und in fachdidaktischen Vertiefungsseminaren das Eis von Mal zu Mal mit etwas anderen, in Arbeitsaufträge eingebetteten Fragen zu brechen und möchte das Spektrum folgendermaßen skizzieren.

Auftrag. Spezifizieren Sie zunächst den Inhalt des Textes in eigenen Worten und nehmen Sie dann dazu Stellung aus der Perspektive einer/mehrerer der folgenden Rollen:

1. als StudentIn der Fachwissenschaft Mathematik,

2. als StudentIn der Fachdidaktik Mathematik,
3. im Hinblick auf Ihr Zweifach/Philosophieverständnis/Alltag etc.
4. als LehrerIn in spe

Anregungen. Klären Sie dabei bspw. einige der folgenden Fragen:

1. Welches (verrückte oder substantielle) Problem wird illustriert?
2. Welche Verbindung besteht zwischen WTSA und den *Elementen*?
3. Und welche zur Subsumtion des Besonderen unter d. Allgemeine?
4. Was sind die zentralen Begriffe? Wie sind sie definiert?
5. Was läuft da schief? Gibt es gute Gründe für den Konflikt?
6. Was hat das Wettrennen mit den Schlussfolgerungen zu tun?
7. Wer war Lewis Carroll, was seine Profession, was seine Passion?⁶
8. Wer bekommt im Dialog Recht? Wer hat Ihres Erachtens Recht?
9. Wer im Dialog ist eigentlich einfältig, listig oder schlau?
10. Geht es ums Verstehen, ums Legitimieren, ums Demonstrieren?
11. Liefße sich zwischen den Gesprächspartnern vermitteln? Ggf.: Wie?
12. Erkennen Sie (Anti-)Parallelen zwischen literarischen und mathematischen Aspekten in WTSA?⁷

Eine kleine Anmerkung möchte ich bzgl. der Rolle ‚LehrerIn in spe‘ und der ‚Vermittlung zwischen den Gesprächspartnern‘ machen. Denn aus welchen Gründen auch immer Carroll die Schildkröte handeln lässt, wie sie handelt, sie verhält sich damit kaum anders als sich Lernende zumal verhalten: wenn sie zwar versuchen zu lernen, aber eine Blockade haben, oder gleich gar nicht lernen wollen bzw. nicht das lernen wollen, ‚was dran ist‘. Diesbezüglich kann also ein pragmatischer Vergleichspunkt sein, dass der genervte Lehrer sich in der Rolle Achills sehen könnte, wobei ihm seine Schüler die renitente Schildkröte zu mimen scheinen. Falls die Schildkröte die aufgeschriebenen Regeln überhaupt noch als Regeln und nicht nur als

6. Lewis Carroll alias Charles Dodgson (1832–1898) ist manchen von den *Alice*-Büchern (oder deren Verfilmungen) her als Literat bekannt, seltener als forschender Logiker oder Mathematiker; er darf auch als ein Pionier der Photographie gelten. Carroll selbst war – wie Achill und die Schildkröte – ein Fan von Euklid und mit den *Elementen* bestens vertraut; vgl. *Euclid, Book 5. Treated Algebraically* (1874) und *Euclid and his Modern Rivals* (1885).

7. Vgl. Sie etwas das Erzählen mit dem Argumentieren, Fiktionen mit Hypothesen und beachten Sie das Dialogische und Selbstreferentielle in Literatur, Logik und Mathematik.

wahre Aussagen erkennt, so könnte ihr, während Achill die Regel notierte, entfallen sein, dass ihr – ihrer vorherigen Einschätzung gemäß – eine Situation vorliegt, in der sie die Regel anwenden darf. Dieses Entfallen, Vergessen oder nicht-(mehr)-Erkennen ist der Situation vergleichbar, in der Lernende die Flächeninhaltsformel für Rechtecke (noch) nicht auf Quadrate anwenden, weil ihnen die entsprechende ‚Erlaubnis‘ entgeht. Die geeignete Subsumtion ist eine Kunst! Doch selbst wenn es die Schildkröte ist, die dieserart von Achill zu lernen hat bzw. hätte, so können wir doch festhalten, dass Achill vielleicht nicht erst nach 1001 ermüdenden und – von den ersten beiden abgesehen – immer analogen Schritten – erschauernd – einsehen sollte, dass er dieserart der Schildkröte allem Anschein nach nicht wird beikommen können. Was uns bei Achill fehlen darf, ist eine kritische Reflexion der verwendeten Methode. Wenn es aber die Schildkröte ist, von der Achill zu lernen hat, so ist auch sie sehr einseitig in der Methode, aber erstaunlich geduldig darin, auf sein Einsehen, sein Entdecken zu warten. Man kann die Gesprächsführung zwar so lesen, dass sie sich Schritt für Schritt auf eine neue Metaebene bewegen, man darf sich aber darüber wundern, dass sie sich nicht bzw. nicht schon vor dem 1001. Schritt aus diesem Muster selbst heraus auf eine darüber gelegene Ebene aufschwingen. Die Schildkröte verdeutlicht also Achill, in welchem Sinne die zwei Schritte A und B – auch nach Hinzunahme von C – nicht genügen, um zu Z zu gelangen; es müssen unendlich viele und jeweils längere Schritte zurückgelegt werden, bevor Z erreicht ist.⁸ Eine andere Frage an die Rolle des Lehrers (in spe) ist: Eignet sich WTSA Ihres Erachtens als Diskussionsgrundlage in einem Fach- oder fächerverbindenden Unterricht? Weshalb (nicht)? In anderem Sinne, nämlich für die typischen Leser Euklids, also die – um mit Ludwig Wittgenstein zu sprechen – *abgerichteten* Mathematiker, die sich dem Zwang der Logik nicht verweigern, gelingt der Schritt von A und B auf Z aber durchaus. Er ist erlaubt. Denen aber, die da nicht mitspielen, die sich also den Erlaubnissen der Logik verwehren, können nur vorhalten: Ihr verhaltet euch widersprüchlich bzw. im Widerspruch zur Logik. Und bekommen darauf vielleicht nur lapidar zur Antwort: Und wenn schon?!

Aus Winters eigener Ausdeutung der Grunderfahrungen werden nun zu WTSA passende Stellen aufgegriffen; die mathematikdidaktischen Themen, Begriffsbildung sowie Argumentieren und Beweisen, werden dabei die Perspektive schärfen.

„Mit (G2) ist sozusagen die innere Welt der Mathematik angesprochen. Jeder Schüler sollte erfahren, dass Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen, – oder anders formuliert: dass strenge Wissenschaft möglich ist. [...] Die Geometrie war bekanntlich die erste deduktive Wissenschaft, und diese Leitfunktion

8. Vgl. (Rathgeb 2016, Abschnitt 3) für einen Vergleich zwischen dieser Folge von Schritten und den zwei, drei Schritten in der vollständigen Induktion.

hat sie bis heute erhalten: Etwas *more geometrico* zu begründen, gilt überall als wirklich stichhaltige Argumentation. Deduktive Ordnung zwischen Aussagen zu entdecken und auszudrücken, ist hier das allgemeinbildende Ziel, das sicher nicht dann schon als erreicht angesehen werden kann, wenn in der Klasse Beweisrituale vorgeführt werden.“ (Winter 2003, 8 f.)

Die hier von Winter vertretene Ansicht, nämlich das Bestehen einer deduktiven Ordnung, insbesondere der Geometrie, ist genau jene Ansicht, die gegen WTSA verteidigt werden muss. In WTSA lässt die Schildkröte Achill zwar ein solches Beweisritual durchführen, sie lässt es aber nicht zur Geltung kommen. Trotzdem sind Euklids *Elemente*, von dem die Protagonisten und der Autor von WTSA begeistert sind, das – durchaus mit gewissen Makeln behaftete – Musterbeispiel für strenge Wissenschaft. Und es ist ‚das‘ sog. *Haus der Vierecke* ein in der Mathematikdidaktik und in der Schulmathematik wohlbekanntes Beispiel für Begriffsarchitekturen, ein einschlägiges Beispiel zur Erkundung und Abgrenzung der Begriffe Begriffsinhalt, Begriffsumfang und Begriffsnetz (vgl. Weigand 2015). Erkundet wird es durch erste Konstruktionen, Definitionen, Sätze und Beweise anhand von Kongruenzsätzen oder Kongruenzabbildungen. Bedeutsam ist aber, dass es eben nicht nur *ein* Haus der Vierecke gibt, sondern deren *mehrere*; ihnen liegt eine je andere *Ordnung* bzw. *Vernetzung* zugrunde: Zum Beispiel die Ordnung der Vierecke nach der Anzahl der bestimmenden Stücke (von 5 für ‚allgemeine‘ Vierecke bis zu 1 für Quadrate), dem Aspekt der Symmetrie (Diagonalen halbieren sich, Seitenmittenlinien senkrecht zueinander, Seitenmittenlinien gleich lang) oder der Mengeninklusion; vgl. auch (Bank 2016, 182-186, 228, 232, 245) mit Abbildungen aus drei verschiedenen Schulbüchern. Die einschlägige Arbeit dazu ist allerdings *Das Haus der Vierecke – aber welches?* (1999) von Klaus Volkert, in dem die Vierecke nach verschiedenen Prinzipien und Aspekten geordnet werden. Das Haus der Vierecke ist demnach nicht nur ein Thema schulischer und hochschulischer elementarer Geometrie, sondern eben auch ein mathematikdidaktisches Thema zur Verdeutlichung von Begriffsbildungen zzgl. der Aspekte des Begriffslehrens und -lernens. Für die geometrischen Aspekte selbst ist WTSA nur ein Einstiegstext. Denn in ihm geht es weniger um die geometrischen Begriffe (einschlägig ist lediglich der Begriff des *gleichseitigen Dreiecks*), dafür mehr um logische Begriffe und begriffliche Zusammenhänge, die durchs Folgern expliziert und in Folgen-Relationen artikuliert werden. Just dies ist ein Thema von (G3).

Wir wenden uns dementsprechend nun der dritten der Grunderfahrungen nach Winter zu; sie ist – wie sich gleich zeigen wird – die für WTSA einschlägige.

„Mit (G3) ist angesprochen, was früher der formale Bildungswert der

Mathematik genannt worden ist: Mathematik als Schule des Denkens. [...] Reflexion auf das eigene Denkhandeln muss auch zum Ziel haben, unterschiedliche Argumentationsweisen durchschauen und bewerten zu lernen, ohne dass Logik als Fach auftreten müsste. Immerhin sollte zum eisernen Bestand von Allgemeinbildung die Einsicht gehören, was eine stichhaltige Schlussweise ist.

Wenn A gilt, dann gilt auch B.	Aus A folgt B.
<i>Nun gilt A.</i>	<i>A ist wahr.</i>
Also gilt auch B.	Also ist B wahr.

Dies ist schlüssig gänzlich unabhängig von der inhaltlichen Bedeutung von A und B. Die Inhaltsoffenheit ist gerade das Logische daran. Entsprechend notwendig ist die Einsicht, dass z. B. folgende Argumentationen nicht schlüssig sind:

Wenn A gilt, dann gilt auch B.	Wenn A gilt, dann gilt auch B.
<i>Nun gilt A nicht.</i>	<i>Nun gilt B.</i>
Also gilt auch B nicht.	Also ist auch A.“

(Winter 2003, 10 f.)

Winter merkt demnach an, dass wir Logik nicht als eigenes Schulfach benötigen,⁹ dass wir aber „unterschiedliche Argumentationsweisen durchschauen und bewerten“ lernen sollten. Eine eigenwillige „Reflexion auf das eigene Denkhandeln“ im Beweis der ersten Proposition in Euklids *Elementen* ist nun aber gerade das Thema von WTSA. Dabei können Winters Varianten eines Beispiels für eine stichhaltige Schlussweise als modus ponendo ponens gelesen werden, der oft auch in WTSA hineingelesen wird, obwohl darin bspw. als Ergänzung zu *C* alias „Wenn *A* und *B* wahr sind, dann ist auch *Z* wahr“ ein Schritt „(*A* und *B*) ist wahr“ artikuliert, geschweige denn als akzeptiert vereinbart ist. Dabei formuliert Carroll – anders als Winter – das „folgt“ eigentlich modallogisch durch ein „muss wahr sein“. Winter selbst weist auf kein Theoriekonzept zur Argumentationsanalyse hin, im *Handbuch der Mathematikdidaktik* (vgl. Jahnke und Ufer 2015) dagegen wird die mittlerweile einschlägige Argumentationstheorie von Stefan Toulmin aus *Der Gebrauch von Argumenten* (1975) vorgestellt. Darin weist Toulmin in Argumenten funktionale Einheiten aus, nämlich zunächst eine *Konklusion*, die aus einem *Datum* (Prämisse) bzw. mehreren Daten (Prämissen) mittels einer *Schlussregel* gewonnen ist, und weiter zur Abschwächung der Sicherheit der Konklusion sog. *modale Operatoren* (wie bspw. *vermutlich*) und *Ausnahmebedingungen* (wie bspw. *es sei denn ...*)

9. Ganz anders lautet da noch Mephistos Rat in Goethes *Faust*: „Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum zuerst Collegium logicum.“ Wohlgermerkt hat Carroll selbst daran gearbeitet, der Logik, auf die Mephisto sich noch bezog, ein neues Gewand zu geben.

sowie zur Stärkung der Schlussregel eine *Stütze*. Wohlgermerkt war Carroll daran interessiert, eine Theorie (für die ‚Natur‘) von hypothetischen Satzgefügen (*hypotheticals*) zu entwickeln. Dazu ist nach Carroll und auch nach Toulmin das letzte Wort weder geschrieben noch gesprochen. Im Hinblick auf Toulmins System funktionaler Einheiten in Argument(ation)en haben Studierende WTSA – in etwa – folgendermaßen analysiert. Die Schildkröte nutzt notierte Schlussregeln nur noch als Daten, Achill steht demnach jeweils neu ohne akzeptierte Schlussregel da. Damit ist dann durchaus verständlich, dass die Schildkröte insistiert, der Schluss auf *Z* sei nicht gerechtfertigt; dafür sorgt sie allerdings selbst. Denn die jeweils neue *Schlussregel*, die zunächst als *Stütze* der jüngsten aller älteren Schlussregeln thematisiert wird – ich will sagen: ins Spiel kommt –, wird der Schildkröte zu einem *Datum*, wofür dem Leser die Niederschrift der Schlussregel durch Achill ein (schriftliches) Zeichen sein kann. Die von der Schildkröte jeweils verlangte Niederschrift, das (zusätzliche) Medium der Schrift, mag hier – wie in den Wortspielen Tortoise/Thought-Us und Achilles/A-Kill-Ease – als ein über das Gespräch (zwischen Achill und der Schildkröte) allein hinausgehendes Zeichen gesehen werden. Wohlgermerkt könnte man mit einer symbolisierten statt verbalen Notation der (Beweis-)Schritte noch expliziter werden, doch bliebe(n) die Pointe(n) von WTSA dabei – glücklicherweise – erhalten.

Um es in Anlehnung an Winters Bemerkungen zur Mathematik – und nur noch thesenartig – zu formulieren: WTSA lässt ahnen, wie erstaunlich es ist, „dass strenge Wissenschaft möglich ist“, und zeigt, welche „Schule des Denkens“, welche (abrichtende) Schulung der „Praxis des Denkens“, Sprechens und dann auch Schreibens von Lesern Euklids bzw. mathematisch Agierenden verlangt ist. Eine logisch informierte und philosophisch reflektierte Didaktik der Mathematik sollte anstreben, Mathematiklehramtsstudierenden ein solches Problembewusstsein zu ermöglichen. WTSA kann diesbetreffend Kern einer – selbstverständlich diesbetreffend nicht alternativen – ‚Lernumgebung‘ sein.

4 Anhang. Über Begriffslogik und Satzlogik

Da Mathematiklehramtsstudierende je nach Schulform und Studienort mit mathematischer bzw. philosophischer Logik und deren historischen Formen mal mehr, mal weniger bewusst in Kontakt kommen, stelle ich in diesem Anhang aus *Einführung in die Philosophie* (1973) von Hans Leisegang informative Abschnitte – insbesondere zu Begriffspyramiden (wie den Vierecken in ihren verschiedenen Häusern) und logischen Regeln – aus dem Kapitel „Die Disziplinen der reinen Philoso-

phie“ Unterkapitel „Logik und Dialektik“ bereit und versehe zudem die Zitate mit eigenen Hervorhebungen.

4.1 Begriffslogik

„Die ersten Ansätze zum Aufbau einer Logik finden sich in den Dialogen Platons. [...] Es ist Platons große Entdeckung, daß sich die Begriffe in Gattungen und Arten zerlegen lassen und dadurch ein Begriffssystem entsteht. [...]

Zu der platonischen Entdeckung fügte Aristoteles die Lehre vom logischen Schluß, dem Syllogismus, hinzu. Sie entsprang unmittelbar aus der Praxis der Beweiskunst der Sophisten, die mit falschen Schlüssen arbeiteten, so daß hieraus die Aufgabe erwuchs festzustellen, was ein richtiger Schluß ist und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, um seine Richtigkeit verbürgen und nachprüfen zu können. Aristoteles löste sie durch seine Analytik, in der er den Schluß in Sätze, die Sätze in Begriffe zerlegte. Sie bilden die letzten Elemente des logischen Schlusses, und aus ihrem Verhältnis zueinander ergibt sich die Richtigkeit des Schlusses. Dabei wurden zugleich die Grundsätze oder Prinzipien dieser Begriffslogik und jeder Logik überhaupt gefunden. [...]

Die Begriffe sind dabei so geordnet, daß einem Begriff von größerem Umfang die von nächst kleinerem, diesen wieder die von nächst kleinerem Umfang und so fort eingeordnet sind, wodurch ein System entsteht, das ein Art-Gattungsschema oder eine Begriffspyramide heißen soll.“ (Leisegang 1973, 39 ff.)

Für den Satz der Identität, den Satz vom zu vermeidenden Widerspruch, den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und den Satz vom zureichenden Grund verweise ich auf (Leisegang 1973, 53 f.) und (Wolff 2009; 2006, passim (vgl. Index)).

Beispiel. Alle M sind P. // S ist M. // S ist P. (vgl. Leisegang 1973, 50)

Dabei sind „P, S und M [...] durchaus kein beliebiges Ausgangsmaterial für die mit ihnen vorzunehmende logische Operation, sondern Zeichen für Gegenstände, deren Verhältnis zueinander diese eine festgelegte logische Struktur hat, aus der sich der logische Schluß ergibt, der als eine Selbstverständlichkeit erscheint, wenn man den Einblick in diese logische Struktur der Begriffsverhältnisse gewonnen hat. [...]

Neben [der Begriffspyramide] gibt es eine Fülle von Begriffssystemen anderer Struktur. Das Logische besteht bei allen darin, daß aus Sätzen, in denen Begriffe desselben Systems miteinander sinnvoll verbunden werden, andere Sätze folgen, die sich aus der Einsicht in die logische Struktur des Systems ergeben.“ (Leisegang 1973, 51)

4.2 Satzlogik

„[N]eben dieser Begriffslogik trat fast gleichzeitig und ebenfalls aus der Schule Platons hervorgehend eine Form logischen Denkens und wissenschaftlicher Systematik auf, die von vornherein mit einer Wissenschaft verbunden war, sich aber von ihr ablösen und verallgemeinern läßt. Es war die Wissenschaft der Mathematik, speziell der Geometrie, die von Euklid zu einem System ausgebaut wurde. Eine Menge geometrischer Lehrsätze war zu seiner Zeit bereits gefunden. Sie hingen miteinander irgendwie zusammen; denn um einen Lehrsatz zu beweisen, konnte man andere bereits bewiesene heranziehen. Sie waren offenbar aus der Kombination einzelner weniger Grundsätze entstanden. Diese galt es zu finden, und zwar nicht mehr und nicht weniger als zum Aufbau des Ganzen nötig waren. Sie sind die letzten nicht mehr zerlegbaren Elemente des ganzen Systems und werden Axiome genannt. Aus einer endlichen Zahl solcher Axiome soll sich die unendliche Zahl von Lehrsätzen herleiten lassen. Da die letzten Elemente dieser Logik aus solchen Sätzen bestehen, wird sie eine Satzlogik genannt. [...]

Der Ton, mit dem ein Satz ausgesprochen wird, die Betonung, durch die das eine oder andere Wort des Satzes hervorgehoben wird, die Gefühle, die dadurch erregt werden, der tiefere Sinn, der Nebensinn, der Hintersinn, der sich hinter den Wörtern verbirgt, der ganze Zauber, die Magie der beseelten Sprache, das alles kommt in der Logik nicht vor.“¹⁰ (Leisegang 1973, 41, 49)

Grundregeln der Satzlogik. Substitutionsregel, Schlussregel (Leisegang 1973, 58, 61)

Beispiel. Schlussregel

Version 1. „Wenn A wahr ist und wenn $A \rightarrow B$ wahr ist, so ist auch B wahr. Für A und B können die Formeln eingesetzt werden, die diese Bedingung erfüllen.“ (Leisegang 1973, 58)

Version 2. „Ist der Ausdruck $p \rightarrow q$ als ganzer wahr und ist der Satz p wahr, so ist auch der Satz q als wahr anzuerkennen.“ (Leisegang 1973, 61)

Literaturverzeichnis

Bank, Marie-Christine von der. 2016. Fundamentale Ideen der Mathematik. Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung. Diss., Universität des Saarlandes.

10. Wohl aber kommt es in WTSA und bspw. auch in (Carroll 1885) vor!

- Bernays, Paul, und David Hilbert. 1968. *Grundlagen der Mathematik*. Berlin: Springer.
- Blackburn, Simon. 1995. Practical Tortoise Raising. *Mind* 104 (416): 695–711.
- Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, Hrsg. 2015. *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer.
- Carroll, Lewis. 1874. *Euclid, Book V. Proved Algebraically So Far as it Relates to Commensurable Magnitudes. To which is Prefixed a Summary of All the Necessary Algebraical Operations, Arranged in Order of Difficulty*. Oxford: James Parker & Co.
- . 1885. *Euclid and His Modern Rivals*. London: Macmillan.
- . 1894. A Logical Paradox. *Mind* III (11): 436–438.
- . 1895. What the Tortoise Said to Achilles. *Mind* IV (14): 278–280.
- . 1995. What the Tortoise Said to Achilles. *Mind* 104 (416): 691–693.
- . 2016a. Correspondence with G. F. Stout, the Editor of *Mind*. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 9–13. (ediert von Francine F. Abeles und Amirouche Moktefi). London.
- . 2016b. What the Tortoise Said to Achilles. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 6–8. London.
- Engel, Pascal. 2012. Wie man einer Schildkröte widersteht. In *Welt der Gründe*, herausgegeben von Julian Nida-Rümelin und Elif Özmen, 1014–1034. Meiner.
- . 2016. The Philosophical Significance of Carroll’s Regress. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 84–111. London.
- Englebretsen, George. 2016. What Did Lewis Carroll Think the Tortoise Said to Achilles? In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 76–83. London.
- Imholtz, Clare, und Amirouche Moktefi. 2016. What the Tortoise Said to Achilles: A Selective Bibliography. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 125–136. London.

- Jahnke, Hans-Niels, und Stefan Ufer. 2015. Argumentieren und Beweisen. In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 331–355. Berlin: Springer.
- Kaiser, Gabriele, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri und Gilbert Greefrath. 2015. Anwendungen und Modellieren. In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 357–383. Berlin: Springer.
- Leisegang, Hans. 1973. *Einführung in die Philosophie*. Berlin: de Gruyter.
- Löffler, Winfried. 2008. *Einführung in die Logik*. Stuttgart: Kolhammer.
- Marion, Mathieu. 2016. Lessons from Lewis Carroll’s Paradox of Inference. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 48–75. London.
- Moktefi, Amirouche, und Francine Abeles. 2016a. Introduction. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’. *LEWIS CARROLL’S PARADOX OF INFERENCE*, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 2–5. London.
- . 2016b. The Making of ‘What the Tortoise Said to Achilles’. Lewis Carroll’s Logical Investigations Toward a Workable Theory of Hypotheticals. In ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’, herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 14–47. London.
- , Hrsg. 2016c. ‘*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*’. *LEWIS CARROLL’S PARADOX OF INFERENCE*. The Carrollian. The Lewis Carroll Journal 28. London: The Lewis Carroll Society.
- Neubrand, Michael. 2015. Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts. In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 51–73. Berlin: Springer.
- Nickel, Gregor. 2017. Vorausgesetzt, ein Beweis überzeugt. Aspekte mathematischen Denkens. In *Wie objektiv ist Wissenschaft?*, herausgegeben von Ulrich Lüke und Georg Souvignier, 124–139. Darmstadt: Wiss. Buchges.
- Otte, Michael. 1994. *Das Formale, das Soziale und das Subjektive. Eine Einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Prestel, Alexander. 1992. *Einführung in die mathematische Logik und Beweistheorie*. Braunschweig: Vieweg.

- Ramharter, Esther. 2008. *Gegen das Chaos im Denken? Logik und Schule*. <http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/logikundschule.pdf>. (Fortbildungsvortrag für LehrerInnen im Rahmen der „Philosophischen Akademie“ (Philosophie-Olympiade, in Salzburg), abgerufen am 31.01.2018), April.
- Rathgeb, Martin. 2016. Lewis Carroll, die Schildkröte und Achill. Ein unendlicher logischer Diskurs auf drei Seiten. In *Sieger Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*, herausgegeben von Ralf Krömer und Gregor Nickel, 69–97. Universitätsverlag Siegen.
- Schueler, G. F. 1995. Why Oughts are not Facts (or What the Tortoise and Achilles Taught Mrs. Ganderhoot and Me about Practical Reason). *Mind* 104 (416): 713–723.
- Smiley, Timothy. 1995. A Tale of Two Tortoises. *Mind* 104 (416): 725–736.
- Stekeler-Weithofer, Pirmin. 2000. Schlüsse, Folgen und Begründungen. Eine regellogische Perspektive auf die Grundlagen begrifflicher und empirischer Wahrheit. In *Formen der Argumentation*, herausgegeben von Geert-Lueke Lueken, 107–127. Leipziger Universitätsverlag.
- . 2006. *Philosophiegeschichte*. Berlin: de Gruyter.
- . 2012. *Denken. Wege und Abwege in der Philosophie des Geistes*. Tübingen: Mohr Siebeck.
- Toulmin, Stefan. 1975. *Der Gebrauch von Argumenten*. (Übers. U. Berk). Kronberg: Scriptor.
- Volkert, Klaus. 1999. Das Haus der Vierecke – aber welches? *Der Mathematikunterricht* 45 (5): 17–37.
- Weigand, Hans-Georg. 2015. Begriffsbildung. In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 255–278. Berlin: Springer.
- Winter, Heinrich. 2003. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (ISTRON, Band 8)*, herausgegeben von Hans-Wolfgang Henn und Katja Maaß, 6–15. Hildesheim: Franzbecker.
- Wolff, Michael. 2006. *Einführung in die Logik*. München: Beck.
- . 2009. *Abhandlung über die Prinzipien der Logik. Mit einer Rekonstruktion der aristotelischen Syllogistik*. Frankfurt a. M.: Klostermann.

Woods, John. 2016. Required by Logic. In '*WHAT THE TORTOISE SAID TO ACHILLES*', herausgegeben von Amirouche Moktefi und Francine Abeles, 112–124. London.

Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage⁰

Andreas Vohns

1 Zur Einführung

Zu den Eigenschaften von *Bildung* gehört, dass dieses Wort unterschiedlich, ja widersprüchlich verwendet und verstanden werden kann. Je nach Verständnis mag die Frage, inwiefern Mathematiklehrpersonen *Bildung* brauchen, sich gar nicht stellen, weil mit »Bildung der Mathematiklehrpersonen« eben nichts Anderes gemeint ist, als eine Sammelbezeichnung für eine wie auch immer geartete, zum Mathematiklehrberuf gehörige Aus-, Fort- und Weiterbildung. Bereits für ein solches, *Bildung* nicht kategorisch von *Ausbildung* unterscheidendes Verständnis der beiden Begriffe wird vom »common sense« angefangen bis weit in die Bildungspolitik und die Kreise selbst- oder fremdernannter Bildungsexpert(inn)en hinein immer wieder mit der Idee geliebäugelt, dass

Exzellenz im Lehramtsbereich weniger etwas sein könnte, das sich durch Ausbildung und Ausübung des Berufs einstellt, sondern etwas ist, das zuvor vorhanden (»zum Lehrer geboren«) oder gegen berufliche Bewährung im Allgemeinen austauschbar (»jeder kann Lehrer sein«) sei. (Vohns 2009, S. 6)

Ich möchte es in diesem Beitrag allerdings nicht mit der Ebene der grundsätzlichen Hinterfragung der Qualifizierung bzw. Qualifizierbarkeit zum (Mathematik-)Lehrberuf bewenden lassen, sondern mich der Frage widmen, was es bedeuten könnte,

0. Überarbeitetes und erweitertes Manuskript des gleichnamigen Vortrags gehalten auf der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises *Mathematik und Bildung* am 08.09.2017 an der Universität Rostock.

bewusst anstelle von *Lehrer(innen)ausbildung* von *Lehrer(innen)bildung* zu sprechen.

Im ersten Teil des vorliegenden Beitrags umreißt ich dazu zunächst das Begriffsfeld von *Erziehung, Bildung, Allgemeinbildung* und *Ausbildung*, wobei das klassische Verständnis bei Wilhelm von Humboldt eine herausgehobene Stellung einnimmt, gleichwohl hinsichtlich seiner Aktualität kritisch hinterfragt wird. Dieser Teil dient zunächst der Herausarbeitung einer zu klärenden semantischen Differenz zwischen *Bildung* und *Ausbildung* und geht als solcher noch nicht spezifisch auf den Lehrberuf ein.

Jeder Wunsch, jemanden zu bilden oder sich bilden zu lassen, ist von einem *Bild* einer Person abhängig, also etwa dem von einer Lehrperson. Im zweiten Teil des Beitrags möchte ich daher *idealtypische Bilder von (Mathematik-)Lehrpersonen* betrachten, die unterschiedlichen Epochen der (Aus-)Bildung zu diesem Beruf entstammen. Dies erfolgt nicht im Sinne einer um Vollständigkeit bemühten systematischen Aufarbeitung der Geschichte dieser Berufs(aus-)bildung im deutschsprachigen Raum, sondern in Form subjektiv ausgewählter Schlaglichter, bewusst pointierter Zuspitzungen¹ und wird sich für das 19. Jahrhundert auf Preußen und für die Zeit von 1945 bis 1990 auf Westdeutschland konzentrieren.

2 Bildungsverständnisse

Im Zuge der Übersetzung eigener Überlegungen in eine fremde Sprache bzw. fremdsprachlicher Überlegungen in die eigene Sprache ist es kaum vermeidbar, sich mit den Selbstverständlichkeiten des eigenen Sprachgebrauchs auseinander zu setzen, insbesondere dort, wo es wie beim Bildungsbegriff an einer unmittelbaren Entsprechung in anderen Sprachräumen mangelt. Die folgende Sortierung des Begriffsfelds *Erziehung, Bildung, Allgemeinbildung* und *Ausbildung* entstammt ursprünglich einem englischsprachigen Beitrag von mir, in dem es um Beziehungen zwischen dem deutschsprachigen Konzept *Bildung* und verschiedenen Auffassungen von *mathematical literacy* geht (vgl. Vohns 2017, Abb. 0.1). Den englischsprachigen Begriff

1. »Idealtypisch« ist in diesem Zusammenhang auch nicht im Sinne einer »idealen« weil »optimalen« Lehrperson zu verstehen, sondern im Weberschen Sinne mit Blick auf *Idealtypen sozialer Praktiken* als intentional partiell »wirklichkeitsfremder« Idealisierungen, die den deutlich facettenreicheren, unschärferen real existierenden, regional vielfältigeren tatsächlichen Praktiken der (Aus-)Bildung zum (Mathematik-)Lehrberuf als »Grenzphänomene« gegenüberstehen bzw. -standen, vgl. Weber ([1922] 1982) bzw. spezifisch zur Rechtfertigung eines solchen Vorgehens in der Mathematikdidaktik Bikner-Ahsbahs (2003).

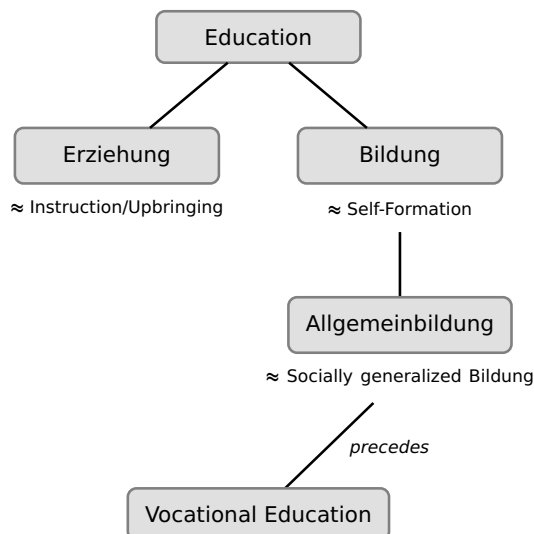


Abbildung 0.1: Begriffsfeld »Erziehung, Bildung, Allgemeinbildung, Ausbildung«

»education« wird man ins Deutsche bisweilen als »Bildung« bisweilen als »Erziehung« übersetzen und manchmal spielt die unterschiedliche Übersetzung kaum eine Rolle, manchmal macht sie einen erheblichen Unterschied.

Dort wo sie einen Unterschied macht, sind mit *Erziehung* üblicherweise äußere Prozesse der Einwirkung, Unterweisung oder »Aufzucht« (»instruction, upbringing«, vgl. Abb. 0.1) gemeint, die sich – mit Dietrich Benner (2014) formuliert – „auf nicht-reziproke Interaktionen“ beziehen, „die zwischen Eltern und Kindern, Erziehern und Zöglingen oder Lehrern und Schülern stattfinden“ (Benner 2014, S. 222) und welche aus erziehungswissenschaftlicher Sicht gleichermaßen darauf abzielen, die „intellektuellen, emotionalen, geistigen, sozialen und physischen Fähigkeiten zu entwickeln (= Personalisation)“ und die Kinder, Zöglinge bzw. Schüler(innen) „zu vollwertigen Mitgliedern der sozial-kulturellen Gemeinschaft“ werden zu lassen, „der sie angehören (= Sozialisation/Enkulturation)“ (Seel und Hanke 2015, S. 14).

Bildung bezieht sich hingegen üblicherweise „auf den in der Person ablaufenden Prozess des Sichherausbildens eines Selbst- und Wertbewusstseins, das auf die Außenwelt gerichtet ist“ (Seel und Hanke 2015, S. 14; »self-formation«, vgl. Abb. 0.1). Durch die Begegnung mit »Kultur« in einem umfassenden Verständnis²,

2. Zum Spezifität des deutschen Kulturbegriffs und seiner Bedeutung für die klassische Bil-

in Wechselwirkung mit einer ihm zunächst fremden Welt entwickelt das Individuum ein Bewusstsein seiner selbst und seiner Stellung in der Welt, wodurch es erst zum »Menschen« im vollen Sinne des Wortes heranwächst. Nach Benner sind dabei zwar Erziehungsprozesse stets in Bildungsprozesse eingebunden, „die durch pädagogische Einwirkungen initiiert werden, Bildungsprozesse finden“ jedoch „auch jenseits der Erziehung statt“ und Bildung ist „weder ein ausschließliches noch ein vorrangiges Resultat von Erziehung“ (Benner 2014, S. 222).

Die so verstandene *Bildung* ist traditionell emphatisch, wenn nicht metaphysisch einigermaßen aufgeladen, ihrem klassischen Bedeutungsgehalt nach, der wohl mit keinem Namen so deutlich verbunden ist wie mit Wilhelm von Humboldt³, geht es dabei um nicht weniger als den „wahren Zweck des Menschen“, nämlich „die höchste und proportionierlichste Bildung seiner Kräfte zu einem Ganzen“ (Humboldt [1792] 1851, S. 9). Bildung ist in diesem Verständnis also einem schon prinzipbedingt nur approximativ erreichbarem Ideal von allgemeiner Menschenbildung verpflichtet, bei dem immer wieder kritisch hinterfragt worden ist, inwiefern es als Zielvorstellung für öffentliche Schulen nicht ein wenig zu hoch hänge – oder drastischer formuliert: ob dieses Bildungsideal nach all den wechselhaften Erfahrungen der letzten 200 Jahre nicht überhaupt „als idealistisch überhöht, als bildungsbürgerlich korrumpiert, als ideologisch abgewirtschaftet, [...] als metaphysisch überlastet, als empirisch nicht einholbar“ (Messner 2003, S. 400) gelten müsse.

Vergessen wird dabei bisweilen, worauf u. a. Lutz Koch (2004) und Hermann Giesecke (2014) hingewiesen haben, dass nämlich neben solch hehren Idealen in der Bildungsdebatte seit jeher auch die Frage aufgehoben war, was *Allgemeinbildung* als Ermöglichung von Bildung *für alle* bedeuten könnte, also welche *sozial verallgemeinerbaren Grundlagen* für je individuelle Bildungsprozesse an öffentlichen Schulen für alle Menschen in realistischer Weise gelegt werden können – und das schon für Wilhelm von Humboldt. Zu den Zielen der von ihm initiierten Bildungsreformen hält er in einem Brief an den preußischen König fest:

Es gibt schlechterdings gewisse Kenntnisse, die allgemein sein müssen, und noch mehr eine gewisse Bildung der Gesinnungen und des Charakters, die keinem fehlen darf. Jeder ist offenbar nur dann ein guter Handwerker, Kaufmann, Soldat und Geschäftsmann, wenn er an sich

dungsdiskussion vgl. Bollenbeck (1994, S. 96ff.).

3. Es bleibt aufgrund der von Anfang an vielschichtigen Entwicklung des klassischen Bildungsverständnisses tendenziell problematisch, wenn hier Wilhelm von Humboldt stellvertretend für dieses herhalten muss, vgl. auch die entsprechenden einleitenden Hinweise in Jahnke (1990, S. 1f.). Eine systematische Aufarbeitung kann im Rahmen dieses kurzen Beitrags nicht erfolgen. Es sei hier auf die Überblicksdarstellungen aus pädagogischer Perspektive von Klafki (1986) sowie betont kritisch und jüngeren Datums Grzesik (2016), aus breiterer kulturwissenschaftlicher Perspektive auf die eingehende Darstellung von Bollenbeck (1994) verwiesen.

und ohne Hinsicht auf seinen besonderen Beruf ein guter, anständiger, seinem Stande nach aufgeklärter Mensch und Bürger ist.

Gibt ihm der Schulunterricht, was hierzu erforderlich ist, so erwirbt er die besondere Fähigkeit seines Berufs nachher sehr leicht und behält immer die Freiheit [...] von einem zum anderen überzugehen. Fängt man aber von dem besonderen Berufe an, so macht man ihn einseitig, und er erlangt nie die Geschicklichkeit und Freiheit, die nothwendig ist, um auch in seinem Berufe allein nicht bloss mechanisch, was Andere vor ihm gethan, nachzuahmen, sondern selbst Erweiterungen und Verbesserungen vorzunehmen. (Humboldt [1809] 1971, S. 144f.)

Eine solche *Allgemeinbildung* kann man mit Heinrich Winter (1995) auch als „Republikanisierung“ (Winter 1995, S. 45) oder mit Hans Werner Heymann (2014) als „Universalisierung“ (Heymann 2014, S. 248) von *Bildung* im Sinne des erstgenannten Ideals betrachten. Im Zuge der „Republikanisierung“ (Winter 1995, S. 45) von *Bildung* zu *Allgemeinbildung* kommt es dann immer wieder zu allerlei Streit, wie nah denn schulische *Allgemeinbildung* dem hehren Ideal der „höchsten und proportionirlichsten Bildung aller Kräfte zum Ganzen“ (Humboldt [1792] 1851, S. 9) überhaupt kommen kann und wie weit das Ziel einer Vergemeinschaftung grundlegender Elemente von Bildung noch ausreichende Spielräume für jene „Freiheit des Handelns und Mannigfaltigkeit des Handelnden“ (Humboldt [1792] 1851, S. 10) lässt, die für von Humboldt Voraussetzung echter *Bildung* sind. Schon in der zitierten Passage aus Humboldt ([1809] 1971) ist dabei mit Norbert Ricken gesagt die ganze „Ambivalenz und Widersprüchlichkeit“ (Ricken 2006, S. 17)⁴ von Allgemeinbildung aufgehoben,

- die zwar den Schulen als Zielsetzung für *alle* Heranwachsenden zugewiesen wird, bei der aber bereits im zweiten Atemzug einräumt wird, dass eben jeder nur „seinem Stande nach aufgeklärter Mensch und Bürger“ (Humboldt [1809] 1971, S. 144) werden könne und solle – womit sich bereits Differenzierungen und somit auch Distinktionsgewinne abzeichnen
- und mit der Behauptung von allgemeiner Bildung als logischer und chronologischer Voraussetzung spezieller, beruflicher Bildung all jene Lügen straft, die einen scharfen Widerspruch sehen wollen zwischen Bildung als „Zweck an sich selbst“ (Ricken 2006, S. 17), als „Humanisierungsversprechen“ (Ricken 2006, S. 17), „Anerkennung, Empathie und Herzensbildung“ (Ricken 2006, 16) einerseits und Bildung als „Mittel zu anderen – meist ökonomischen – Zwe-

4. Hier nun könnte eingewandt werden, dass sich bei anderen zeitgenössischen Autoren weniger ambivalente Bildungskonzeptionen finden ließen. Betrachtet man die klassischen Bildungstheorien als Gesamtheit, so ist allerdings mit Wolfgang Klafki (1986) davon auszugehen, dass sich Ambivalenzen und Widersprüche tendenziell eher verstärken, sicher nicht auflösen.

cken“ (Ricken 2006, S. 16f.) andererseits, vermittelt Erwerbs von „Wissen, Reflexion, Orientierung und Urteilskraft oder allgemein ‚Kompetenz‘“ (Ricken 2006, S. 16).

Dass etwas *auch* der Vorbereitung der späteren Lebens- und Berufspraxis nützlich sein möge, kann insofern *nicht grundsätzlich in Widerspruch* zu den Zielen allgemeiner Bildung gesetzt werden. Für die Frage, inwiefern Allgemeinbildung der *Ausbildung* (»vocational education«, vgl. Abb. 0.1) *vorangehen* sollte und worin die *differentia specifica* beider Begriffe begründet liegen, lohnt dabei ein neuerlicher Rekurs auf Wilhelm von Humboldt:

Beide Bildungen – die allgemeine und die spezielle⁵ – werden durch verschiedene Grundsätze geleitet. Durch die allgemeine sollen die Kräfte, d. h. der Mensch selbst gestärkt, geläutert und geregelt werden; durch die spezielle soll er nur Fertigkeiten zur Anwendung erhalten.

Für jene ist also jede Kenntnis, jede Fertigkeit, die nicht durch vollständige Einsicht der streng aufgezählten Gründe, oder durch Erhebung zu einer allgemeingültigen Anschauung [...] die Denk- und Einbildungskraft, und durch beide das Gemüt erhöht, tot und unfruchtbar.

Für diese muss man sich sehr oft auf in ihren Gründen unverstandene Resultate beschränken, weil die Fertigkeit da sein muss, und Zeit oder Talent zur Einsicht fehlt. [...] Ein Hauptzweck der allgemeinen Bildung ist, so vorzubereiten, dass nur für wenige Gewerbe noch unverstandene, und also nie auf den Menschen zurück wirkende Fertigkeit übrigbleibe. (Humboldt [1809] 2017, S. 134)

Geschieden wird hier also zwischen allgemeiner *Bildung* und *Ausbildung* zunächst entlang der Trennlinie »Aufklärung« („Einsicht der streng aufgezählten Gründe“, Humboldt [1809] 2017, S. 134) und »Anpassung« (an die Qualifikationszwänge beruflicher Praxis), sodann wird erneut durchaus die Zweckmäßigkeit der *Bildung als Vorbildung* für die Berufspraxis hervorgehoben, deren Flexibilisierung und zunehmende *Aufklärung* zu dienen sogar *ein Hauptzweck von Bildung* sei – gleichwohl gebunden an die Vorstellung, stets auch auf den Menschen selbst zurückzuwirken.

Widmet man sich der Frage, wie diese Bildungsverständnisse die letzten gut zweihundert Jahre überstanden haben, so ist zunächst mit Jürgen Oelkers zu konstatieren, dass es einerseits zu Humboldts Zeiten noch kein staatlich reguliertes Berufsbildungswesen gab und de facto daher die »niedere«, nicht-gymnasiale Volksbildung in hohem Maße auch dem Erwerb eher routinemäßig zu beherrschender

5. Mit „spezielle“ ist hier die (Berufs-)Ausbildung gemeint.

Fertigkeiten im ganz unmittelbaren Sinne von Berufsvorbildung diene (vgl. Oelkers 2016, S. 6). Andererseits müsse im Verlauf des 20. Jahrhunderts immer fraglicher werden, inwiefern berufliche Ausbildung sich auf rein an die Bedürfnisse einer abzusehenden Berufspraxis anpassenden Erwerb von Routinefähigkeiten konzentrieren könne und nicht künftige Transformationsprozesse immer schon mitdenken und daher eben weitgehend auch aufklärerisch bezüglich der beruflichen Praxis und ihrer theoretischen Grundlagen wirken müsste und sehr wohl auch auf die Entwicklung der Person als solche ab zu zielen habe (vgl. Oelkers 2016, S. 9).

Es erscheint zudem hinsichtlich des Rechen- und Mathematikunterrichts der letzten 200 Jahre als eher fraglich, inwieweit dieser durchgängig als vom Wunsch geleitet gesehen werden kann, die Heranwachsenden zur vollständigen „Einsicht der streng aufgezählten Gründe“ (Humboldt [1809] 2017, S. 134) ihrer mathematischen Betätigung zu führen⁶. Ohne den Erwerb von, dann vielfach nicht oder schlecht verstandenen, Routinefähigkeiten war es offenbar zu keiner Zeit faktisch zu bewerkstelligen, dass die ihm anvertrauten jungen Menschen „gestärkt, geläutert und geregelt“ (Humboldt [1809] 2017, S. 134) aus ihm hervorgingen. Diese Einschätzung teilt wohl auch Heinrich Winter, wenn er feststellt, dass allgemeinbildender Mathematikunterricht von jeher „dem Dilemma in der Zielprojektion zwischen Anpassung und Aufklärung“ (Winter 1990, S. 134) ausgesetzt gewesen sei und eng damit verbunden dem Spannungsfeld zwischen „mathematischer Systematik und Lebenswirklichkeit“ (Winter 1990, S. 134).

Es ist schließlich auf die jüngeren erziehungswissenschaftlichen Ansätze von Helmut Peukert (2000), Norbert Ricken (2006) und Hans-Christoph Koller (2012) hinzuweisen, deren Konzeptionen *transformatorischer Bildung* sich bewusst der paradoxen Aufgabe der Pädagogik widmen, „die nachwachsende Generation in etwas einführen zu müssen, in das sich entweder nur widersprüchlich oder kritisch einführen lässt, geht es doch immer auch darum, im Erlernen des jeweilig erforderlichen Wissens auch die Fähigkeit zur Transformation der eigenen Lebensweise mit zu erlernen“ (Ricken 2006, S. 16).

Ich will es an dieser Stelle mit den Bildungsverständnissen bewenden lassen und erste Hypothesen zur Frage formulieren, ob und inwiefern Mathematiklehrpersonen Bildung brauchen.

1. Offenkundig brauchen Mathematiklehrpersonen in dem Maße *Allgemeinbildung*, wie unabhängig von seinem Beruf „jeder zunächst ein guter, anständiger“

6. Man vergleiche etwa die Analyse von Lenné (1969) und speziell zur Hinterfragung des universalistisch aufklärenden Anspruchs des Mathematikunterrichts Damerow (1979), sowie jüngeren Datums Kollosche (2015).

ger, [...] aufgeklärter Mensch und Bürger“ (Humboldt [1809] 1971, S. 144) werden soll.

2. Die Formulierung „seinem Stande nach aufgeklärter Mensch und Bürger“ (Humboldt [1809] 1971, S. 144) eröffnet – wie oben bereits erwähnt – Differenzierungen und legt nahe davon auszugehen, dass diejenigen, welche die *Bildung* Heranwachsender unterstützen bzw. diesen jedenfalls zu *Allgemeinbildung* verhelfen sollen, ihrem Stande nach selbst *besonders* aufgeklärte Menschen und Bürger(innen) sein sollten.
3. Diese Sichtweise wird schließlich noch unterstützt durch die Fragen, inwieweit pädagogisches Handeln als etwas Unverstandenes, Routinemäßiges oder bloß Intuitives gedacht wird, oder aber als durch „Einsicht der streng aufgezählten Gründe“ (Humboldt [1809] 2017, S. 134) dieses Handelns lehr- und lernbar erscheint und in welchem Ausmaß der Erwerb des erforderlichen Berufswissens auch die Fähigkeit zur beständigen, der Reflexion bedürftigen Transformation beruflicher Praxis und des Selbstverständnisses als *Lehrperson* mit einschließt.

3 Idealtypische Bilder vom (Mathematik-) Lehrberuf

Es wird sich im Folgenden zeigen, dass unterschiedliche Standpunkte dazu, inwieweit die Ausbildung von (Mathematik-)Lehrpersonen auch *Bildung* im Sinne dieser Hypothesen anstreben kann und soll, in der etwa 200-jährigen Geschichte staatlich beaufsichtigter Lehrer(innen)(aus)bildung in Deutschland von Anfang an virulent und mit Grundproblemen der Pädagogik auf das Engste verknüpft war und ist, wie der Frage nach der Möglichkeit von Erziehung, dem angemessenen Theorie-Praxis-Verhältnis in der Ausbildung, der adäquaten Lernorte für diese, einem angemessenen Verständnis von Professionalität des (Mathematik-)Lehrberufs und nicht zuletzt der idealtypischen Bilder von ebendiesem Beruf. Es zeigt sich zudem, dass Fragen nach konzeptionell stimmiger Bildung oder Ausbildung zum Lehrberuf ebenfalls von Anfang an von Fragen der Statussicherung überlagert werden und beide Ebenen beständig miteinander in Konflikt geraten.

3.1 Vom bodenständigen zum gebildeten Schulmann

Mit dem Übergang vom bodenständigen zum gebildeten Schulmann⁷ soll hier zunächst versucht werden, Idealtypen der (Aus-)Bildung aus der Frühgeschichte des »niedereren«, nicht-gymnasialen Lehramts im 19. und beginnenden 20. Jahrhundert zu erfassen. Diese Periode stellt eine besondere Herausforderung dar, da die Entwicklung der (Aus-)Bildung zum Volksschullehrer im 19. Jahrhundert wechselhaft und regional vielfältig verläuft⁸. Übergreifendes Kennzeichen ist wohl vor allem, dass diese im 19. Jahrhundert im Unterschied zum höheren Lehramt keine akademische ist. Dies ändert sich erst 1926 mit der Gründung der pädagogischen Akademien, die allerdings 1932 bereits wieder abgeschafft wurden.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts ist das Lehramt an niederen Schulen in aller Regel kein eigenständiger Beruf, sondern eine Nebenbeschäftigung für sitzende Handwerker (etwa Schneider), Küster und Gastwirte, sowie Zuflucht gescheiterter Studenten und ehemaliger Soldaten (vgl. Sandfuchs 2004, S. 20). Staatliche Lehrpläne für die Elementar- und Volksschulen gibt es trotz der 1794 in Preußen eingeführten Schulpflicht bis weit ins 19. Jahrhundert hinein nicht, gelehrt wird Lesen, Schreiben, Religion und – so es der Lehrer denn selbst beherrscht – gegebenenfalls auch Rechnen. Die Lehrer sind häufig miserabel für ihre Aufgaben qualifiziert (können selbst nur leidlich lesen, schreiben und rechnen) und die Erträge des Unterrichts lassen in den Elementar- und Volksschulen vor allem im ländlichen Raum häufig zu Wünschen übrig.

Im ausgehenden 18. und der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickeln sich regional unterschiedlich orientierte, zumeist als Internate und konfessionell getrennt geführte, zwei bis dreijährig zu besuchende *Lehrerseminare*⁹. Dem Besuch des Seminars geht üblicherweise eine rein praktische, von Lehrern oder Pfarrern vor Ort privat organisierte und inhaltlich ausgestaltete *Präparandenphase* voran, die bis 1872 keinerlei staatlicher Kontrolle unterliegt (vgl. Schütze 2014, S. 328). Bis weit in das 19. Jahrhundert hinein können die Seminare bei weitem nicht den Bedarf an Lehrpersonen decken, viele Volksschullehrer machen auch weiterhin nur „eine

7. Frauen stellen im 19. Jahrhundert auch im Volksschullehrerberuf eine zahlenmäßige Ausnahmerscheinung dar, so dass es angemessen scheint, den Idealtypus ganz bewusst nicht geschlechtsneutral zu formulieren. Dasselbe gilt erst Recht für die Anfänge des gymnasialen Lehramts im folgenden Abschnitt, zu dem Frauen bis in das beginnende 20. Jahrhundert hinein jeder Zugang verwehrt bleibt.

8. Ich konzentriere mich daher wie angekündigt auf die Entwicklungen in Preußen. Es ist deutlich darauf hinzuweisen, dass die Entwicklungen etwa in Österreich und der Schweiz, teilweise auch in Bayern deutlich verschieden verlaufen und man sich auch durch teilweise ähnliche oder übereinstimmende Bezeichnungen wie »Pädagogische Hochschulen« nicht über deren historisch und bis heute fortbestehend regional sehr unterschiedliche Ausgestaltung täuschen lassen sollte.

9. Bis 1811 gibt es in Preußen 15 Seminare, 1837 bereits 45, 1871 schon 81. Bis 1920 werden im deutschsprachigen Raum knapp über 200 Seminare gegründet (vgl. Sandfuchs 2004, S. 21).

praktische Lehre bei einem erfahrenen Schulmeister“ (Schütze 2014, S. 328) oder arbeiten gänzlich ohne spezifische Ausbildung. Zudem ist ein Volksschullehramt nicht selten weiterhin mit kirchlichen Nebenaufgaben verbunden, mit entsprechenden Rückwirkungen auf die Ausbildungsinhalte (vergleichsweise hohe Anteile von Musik, vor allem Singen und Orgelspiel). Für die Bildungs- bzw. Ausbildungskonzeption der Lehrerseminare kann man mit Monika Fiegert (2005) zuspitzend zwei deutlich divergierende Konzepte unterscheiden:

Das erste geht davon aus, dass es genüge, dass der künftige Lehrer gerade so viel lernt, wie zur Ausübung des Berufs notwendig ist, alles ist auf die praktische Anwendung und einen festen Unterrichtsgang ausgerichtet.

Das zweite zielt auf eine Bildung des ganzen Menschen und fördert deshalb das selbstständige Streben und Urteilen des zukünftigen Lehrers. (Fiegert 2005, S. 40)

Als prototypischer Vertreter des zweiten, ausdrücklichen Lehrer*bildungs*konzepts gilt Friedrich Adolph Wilhelm Diesterweg und die von ihm in Moers und später in Berlin geleiteten Lehrerseminare. In diesen widmet man sich der Aufgabe der »allgemeinen Menschenbildung« neben einer gediegenen Allgemeinbildung als Selbstbildungs-Inhalt der angehenden Lehrpersonen auch insofern, als in enger Verbindung mit praktischen Übungen in der Schule in die Anfänge der „sich gerade erst entwickelnden Disziplinen Pädagogik, Psychologie, Anthropologie, Didaktik und Methodik“ (Schütze 2014, S. 328) eingeführt werden soll. Mit Blick auf die Hypothesen des ersten Teils dieses Aufsatzes wird somit »Bildung für Lehrer« im Sinne aller drei Hypothesen angestrebt: Die Seminare bearbeiten pragmatische Allgemeinbildungsdefizite, die sich aus der ungesicherten schulischen Laufbahn der Seminaristen ergeben¹⁰, sie versuchen darüber hinaus diese Allgemeinbildung mit Blick auf die künftige Bildner-Funktion der Volksschullehrer einerseits in allgemeiner Hinsicht und andererseits spezifisch mit Blick auf die Einsicht in die Grundlagen von Bildung, Lernen und Erziehung zu erweitern.

Für viele Seminare im ländlichen Raum ist hingegen das erste, ausdrückliche Lehrer*ausbildung*konzept eine treffende Kennzeichnung. Am katholischen Lehrerbildungsseminar in Osnabrück beschränkt sich der Unterricht auf „Religion, Katechetik, deutsche Sprache, Rechnen, Schreiben und Musik“ (Fiegert 2005, S. 42), die pädagogische bzw. didaktisch-methodische Ausbildung findet ausschließlich im Rahmen schulpraktischer Übungen als eine Art Meisterlehre bei erfahrenen Kollegen bzw. als »Lernen am Modell« praktikabler, ausgearbeiteter Unterrichtsgänge

10. Ein vorheriger Besuch des Gymnasiums, geschweige denn eine Reifeprüfung ist noch bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts keine Eingangsvoraussetzung des Seminarbesuchs.

statt. Eine solche Ausbildung bearbeitet also im Sinne der Hypothesen des ersten Teils ausschließlich die ganz pragmatischen Allgemeinbildungsdefizite, die sich aus der unsicheren Schullaufbahn der angehenden Lehrer ergeben – man soll jedenfalls selbst beherrschen, was man anderen beibringen soll, darüber hinaus weisende allgemeinbildende oder bildende Inhalte sind überflüssig oder erscheinen hinsichtlich des Ausgangsniveaus der Seminaristen unerreichbar und die Gestaltung von Lern-, Erziehungs- und Bildungsprozessen ist nicht Gegenstand von theoretischer Durchdringung oder theoriegeleiteter Reflexion, sondern soll im Modus »learning by doing« erfolgen.

Mit den Stiehlschen Regulativen von 1854 normiert Preußen dann die Volksschullehrerausbildung weitestgehend im Sinne des ersten Konzepts. Die Obrigkeit reagiert damit auch auf die Revolution von 1848, für die maßgeblich die Volksschullehrerschaft verantwortlich gemacht wurde. Gegenüber fortschrittlichen Seminar-konzeptionen wird »Verbildung« und »Entfremdung« der Volksschullehrer vom gemeinen Volk in Stellung gebracht, es besteht die Sorge, aus einer solchen umfassenden Lehrerbildung würde den Volksschullehrern ein allzu großes Standesbewusstsein erwachsen. Der Seminarunterricht habe sich stattdessen auf das zu beschränken, was „das Schulhalten in der gewöhnlichen [...] Elementarschule von dem Lehrer erfordert“ (Stiehl 1854, S. 6). Die „unbedingte Erreichung“ dieses Zieles dürfe nicht „in Frage gestellt oder behindert werden durch den Versuch einer wissenschaftlichen Behandlung“ (Stiehl 1854, S. 5f.). Dies bedeutet im fachlichen eine Einschränkung auf eine Durchdringung „des Unterrichtsmaterials der Elementarschule“ (Stiehl 1854, S. 6), was konkret etwa bezüglich des Rechnens dazu führt, dass bereits die Schlussrechnung als allenfalls fakultativer Inhalt angesehen wird – auf dem Lehrplan steht m. a. W. praktisches Rechnen, nicht theoretische Mathematik im Sinne des Humboldtschen Ideals.

„Was die Erziehung im Allgemeinen“ betrifft, soll für „die künftigen Elementarlehrer [...] eine Zusammenstellung und Erläuterung der in der heiligen Schrift enthaltenen, hierher gehörigen Grundsätze“ (Stiehl 1854, S. 14) genügen, ergänzt um eine „vor Abstraktionen und vor Definitionswerk sorgfältig zu bewahrende“ (Stiehl 1854, S. 12) pragmatisch verstandene Schulkunde, welche „zum einen die Gesinnung und Haltung der angehenden Volksschullehrer als christliche und obrigkeitsgehorsame Staatsdiener festigen und zum anderen das zum Unterrichten notwendige Wissen und Handwerkszeug vermitteln“ sollte, „während darüber hinausgehende allgemeinpädagogische Kenntnisse für diesen Beruf als eher unnötig erachtet wurden“ (Schütze 2014, S. 330).

Sowohl die zeitgenössische als auch die moderne Bewertung der Regulative ist gespalten, was sich vor allem mit der regional sehr deutlich unterschiedlichen Eta-

blierung der beiden eingangs vorgestellten Konzeptionen im Vorfeld der Regulative erklären lässt. Für gut ausgebauten Lehrerseminare in (groß-)städtischen Milieus kann als Rückschritt gelten, was für viele kleine Seminare in eher ländlichen Gebieten einen erkennbaren Fortschritt gegenüber dem Ist-Zustand dargestellt haben mag. Sylvia Schütze (2014) hebt zudem hervor, dass auch heute noch „Studierende häufig den Erwerb genau solcher Handlungsrountinen“ einfordern, „wie das Regulativ sie versprach; die im Regulativ zu findenden Vorstellungen davon, was Theorie leisten solle und könne, nämlich Anwendungswissen bereitzustellen“ sei „auch heute noch weit verbreitet“ (Schütze 2014, S. 338). Das „unstillbare Verlangen nach Praxisbezug“ (Hedtke 2000) ist unter Studierenden nach wie vor ausgeprägt und die Frage des angemessenen Theorie-Praxis-Verhältnisses gerade mit Blick auf die universitäre Phase der Lehrer(innen)(aus)bildung weiterhin aktuell.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts werden allerdings die Proteste der Volksschullehrer gegen die seminaristische Ausbildung immer lauter, zu Beginn des 20. Jahrhunderts haben wir es – je nach Sichtweise – mit einem neuen Konzeptstreit bzw. einem neuen Statuskampf der Volksschullehrer zu tun, nämlich darüber, in welcher Form eine Akademisierung dieses Berufsstandes erfolgen kann und soll – an eigenständigen pädagogischen bzw. »Bildnerhochschulen« oder nach dem Vorbild der Gymnasiallehrer im Rahmen der Universitäten. Als »Chefideologe« der Bildnerhochschule kann dabei Eduard Spranger gelten¹¹. In seinen „Gedanken zur Lehrerbildung“ (Spranger 1920) entfaltet dieser zunächst in neuhumanistischer Tradition ein Konzept allgemeiner Bildung, welche ihre formalen (Fähigkeiten, Fertigkeiten) und materiellen (Inhalte, Wissen) „Bildungswerte“ gleichermaßen in fünf Bereichen zu suchen habe (vgl. Spranger 1920, S. 7–19):

- dem intellektuellen oder wissenschaftlichen,
- dem technisch-ökonomischen,
- dem ästhetischen,
- dem gesellschaftlichen

11. Hier besteht eine gewisse Parallelität zur Rolle Wilhelm von Humboldts für Idee und Wirklichkeit der »deutschen Universität«. Lange Zeit hat man Spranger als *spiritus rector* der Pädagogischen Hochschulen in seiner Wirkung auf die tatsächliche Entwicklung überschätzt und hinsichtlich der Dignität seiner konzeptionellen Überlegungen in der Erziehungswissenschaft weitgehend unkritisch gesehen (vgl. Sandfuchs 2009, S. 64). Ähnlich wie seit einiger Zeit mit Blick auf die tatsächliche Entwicklung der Universitäten vom „Mythos Humboldt“ (Ash 1999) gesprochen wird, hat sich auch die Einschätzung zu Sprangers Ideen zur Bildnerhochschule zunehmend kritisch gewendet. Da es im vorliegenden Beitrag nicht originär um eine Institutionengeschichte der Hochschulen und Universitäten, sondern um die Herausarbeitung von überdauernd wirkmächtigen Idealtypen der Lehrer(innen)(aus)bildung geht, erscheint eine Beschäftigung mit diesen beiden Personen trotz, wenn nicht gerade wegen ihrer Mythologisierung durchaus zielführend.

– und schließlich dem religiösen Bereich.

Spranger argumentiert dann gegen die universitäre Ausbildung der Volksschullehrer, dass die Universitäten prinzipiell allein den intellektuellen bzw. wissenschaftlichen Bildungswerten verpflichtet seien, Volksschullehrer als Menschenbildner aber in allen fünf Bereichen gebildet sein müssten, wenn man nicht einer „ganz einseitig gelehrten Bildung“ (Spranger 1920, S. 40) das Wort reden wolle. Ebenso wie es für den technisch ökonomischen Bereich die Technischen Hochschulen und für den ästhetischen Bereich Kunst- und Musikakademien gebe, seien daher eigene „Bildnerhochschulen“ einzurichten. Deren wesentliche Aufgabe sei es, dass der „Lehrer des Volkes [...] Kulturträger, oder was dasselbe sagt: Bildungsträger“ (Spranger 1920, S. 40) werde, wozu neuerlich die Vermittlung einer breiten Allgemeinbildung in allen der fünf von Spranger unterschiedenen Bereiche gehört. Hinsichtlich der pädagogischen Ausbildung fällt Spranger – für einen überzeugten Neuhumanisten durchaus nicht untypisch – zum Teil noch hinter die Forderungen Diesterwegs zurück.

Sehr deutlich gegen Sprangers Konzeption hat sich mit einer expliziten Gegenschrift der durch den „Neubau des Rechenunterrichts“ in mathematikdidaktischen Kreisen wohl bekannte Johannes Kühnel (1920) gerichtet (neben ihm auch Wilhelm Flitner und Peter Petersen). Kühnel sieht in Sprangers Vorstellungen eine nur notdürftig verkleidete Fortsetzung der verhassten Seminausbildung und damit im Wesentlichen ein Mittel, die berufsständische Differenz zwischen Volksschullehrern und gymnasialem Lehramt festzuschreiben. Kühnel trifft einen wunden Punkt der Sprangerschen Argumentation, wenn er heraushebt, dass jene „ganz einseitig gelehrte Bildung“ (Spranger 1920, S. 40) zu der die Universitäten allein in der Lage seien zu qualifizieren, ja eben gerade nicht dem Ideal des humboldtschen Gymnasiums entspreche, an das auch Spranger anschließt. Volksbildung und höhere Bildung stehen gleichermaßen unter dem Primat der allgemeinen Menschenbildung, insofern kann Spranger auch letztlich nicht konsequent herleiten, warum mehr als ein gradueller Unterschied im Ziel bestehen sollte, „Kulturträger“ (Spranger 1920, S. 40) bzw. Bildungsträger zu werden.

Ebenso wenig erscheint es konsequent, dass das pädagogisch-erzieherische Handeln im Bereich der Volksbildung trotz Sprangers Forderung nach eigenen pädagogischen Hochschule weiterhin allenfalls zaghaft der theoretischen Durchdringung zugänglich gemacht werden soll, während parallel im Bereich der höheren Bildung wie selbstverständlich davon ausgegangen wird, dass demjenigen, der eine solide fachwissenschaftliche Bildung an der Universität genossen hat, das Lehren, Erziehen und Bilden im Wesentlichen von selbst zufallen werde.

3.2 Mathematiklehrer als mathematische Gelehrte

Wir sind damit beim zweiten idealtypischen Bild von Lehrberuf angelangt, dem »Mathematiklehrer als mathematischem Gelehrten«, welches von Anfang an das »höhere« Lehramt prägt. Im Jahr 1809 erlässt zunächst Bayern, 1810 dann Preußen jeweils erstmalig Lehramtsprüfungsordnungen. Das Lehramt wird damit unabhängig vom Kirchenamt. Bislang hatten als Lehrer an den höheren Schulen in der Regel Geistliche fungiert, als Übergangsstadium, bis ihnen eine eigene Gemeinde zugewiesen wurde (vgl. Führ 1992, S. 420f.).

Mit dem preußischen Edikt von 1810 ändert sich die Rolle der bislang sehr kleinen Gruppe mathematisch Lehrender an den Universitäten nachhaltig. Diese waren bis dato im Bereich der allgemeinen Vorbildung für die klassischen universitären Studien – Theologie, Jura, Medizin – im Rahmen des Quadriviums der Artistenfakultät, später an der philosophischen Fakultät tätig gewesen und nicht selten mit weiteren Fächern betraut. Im Zuge der Säkularisierung des Lehramts übernimmt künftig die philosophische Fakultät das zugehörige Studium und fällt damit auch den Mathematikern zu (Mathematik ist von Anfang an neben alten Sprachen und Geschichte ein Hauptfach) und gleichzeitig wird „die traditionelle Allgemeinbildungsfunktion im Wesentlichen den reformierten Gymnasien übertragen“ (Schubring 1990, S. 266).

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erhöht sich vor diesem Hintergrund die Anzahl der mathematischen Lehrstühle an den Universitäten in Preußen deutlich, es kommt zur Gründung der ersten mathematischen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Seminare. Das Staatsexamen bleibt dabei bis 1942 im Wesentlichen der einzige Qualifikationsweg für angehende Mathematiker. An den Universitäten tätige Mathematiker haben somit faktisch eine Lehramtsstudium durchlaufen und waren vor der Aufnahme einer universitären Lehrtätigkeit nicht selten selbst einige Jahre an höheren Schulen als Lehrer tätig (vgl. Toepell 2003, 178).

Dass dies so möglich war, ist wohl auch dem Umstand zu verdanken, dass die universitäre Lehrerbildung durch und durch als »gelehrte« *allgemeine Bildung* konzeptioniert war, nicht als *spezielle Berufsausbildung* – sie stand unter dem noch heute von der Humboldt-Universität Berlin geführten Motto »Bildung durch Wissenschaft«. Es sei ein letztes Mal Wilhelm von Humboldt zitiert:

Der Universität ist vorbehalten, was nur der Mensch durch und in sich selbst finden kann, die Einsicht in die reine Wissenschaft. Zu diesem Selbst-Actus im eigentlichsten Verstand ist notwendig Freiheit, und hilfreich Einsamkeit, und aus diesen beiden Punkten fließt zugleich die ganze äußere Organisation der Universitäten. Das Kollegienhören ist

nur Nebensache, das Wesentliche, dass man in enger Gemeinschaft mit Gleichgestimmten und Gleichaltrigen, und dem Bewusstsein, dass es am gleichen Ort eine Zahl schon vollendet Gebildeter gebe, die sich nur der Erhöhung und Verbreitung der Wissenschaft widmen, eine Reihe von Jahren sich und der Wissenschaft lebe. (Humboldt [1809] 2017, S. 137f.)

Die Überzeugung, eine solche, ganz der Wissenschaft gewidmete Bildung erzeuge automatisch auch gute Lehrer, ist dabei von Anfang an umstritten, sie führt in Preußen bereits 1926 zur Einführung eines Probejahres, das allerdings erst 1890 im Rahmen einer Lehrerschwemme verbindlich staatlich sanktioniert wird und schließlich 1917 in der Auftrennung in eine wissenschaftliche Prüfung nach dem Studium und in eine pädagogisch praktische Prüfung nach einer zweijährigen praktischen Probezeit mündet (vgl. Führ 1992, S. 434).

Die »Idee der humboldtschen Universität« ist dabei nicht erst seit Bologna in ihrer tatsächlichen Bedeutung für die Entwicklung der Universitäten im 19. Jahrhundert deutlich in Frage gestellt worden. Unbestritten dürfte sein, dass sich die Wissenschaft Mathematik in diesem Zeitraum blühend inhaltlich und institutionell entwickeln konnte, allerdings um den Preis, dass der mangelnde Zusammenhang von Schule und Universität bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts Leitformel der Meraner Reform werden konnte bzw. musste (vgl. ausführlicher Schubring 2007).

Der Bildungssoziologe Uwe Schimank (2010) hat die mit der humboldtschen Universitätsidee identifizierte Formel und »Einheit von Forschung und Lehre« als „Lebenslüge der Professorenschaft“ (Schimank 2010, S. 52) und „bis heute extrem wirkmächtigen Euphemismus“ (Schimank 2010, S. 52) bezeichnet. „Als Professor definiert man“ nach Schimank „den eigenen Wert über die knappere zugeschriebene persönliche Eigenschaft, versteht sich also in erster Linie als Forscher und erst nachrangig als Lehrender; und diese Selbstdefinition hat lange Zeit dafür gesorgt, dass Professoren sich um die Qualität ihrer Lehre nicht gekümmert haben – ja, nicht kümmern durften, weil dies den Kollegen und nicht zuletzt auch ihnen selbst verdächtig erschienen wäre.“ (Schimank 2010, S. 52)

Das hat bis in die 1960er Jahre nach Schimanks Einschätzung nur deshalb irgendwie funktioniert, weil das Studium weitgehend dem Bildungsbürgertum vorbehalten war, für das eine solche „Hochachtung der Wissenschaft“ (Schimank 2010, S. 52) prägend war, dass Sinnfragen nicht nachhaltig Fuß fassen konnten. Schimank spitzt dann die Problematik des Mottos »Bildung durch Wissenschaft« noch für das gymnasiale Lehramt weiter zu: „Einerseits“ sei „Schulunterricht nicht Forschung; keine Suche nach neuen Erkenntnissen, sondern dezidiert Vermittlung des

Forschungsstands von gestern – weil nur der gesichert und damit alltags- und berufstauglich ist. [...] Andererseits legitimiert der Nimbus der Wissenschaftlichkeit erstens das hohe Berufsprestige und zweitens das hohe Gehalt der Gymnasiallehrer [...]. Und Wissenschaftlichkeit sorgt drittens dafür, andere – etwa politische oder wirtschaftliche – Einflüsse aus dem Unterricht rauszuhalten und so die Autonomie der Berufstätigkeit abzusichern.“ (Schimank 2010, S. 51)

Nur so ist vielleicht zu erklären, was der Physik- und Hochschuldidaktiker Gottfried Merzyn (2004) für die fachwissenschaftliche Ausbildung in Mathematik und Naturwissenschaften noch 2004 im „Handbuch Lehrerbildung“ festhält, nämlich dass trotz der schon in den 1920er Jahren u. a. seitens des MNU problematisierten Umstands, dass „fachwissenschaftliche Lehre gleichzeitig wissenschaftlich fundiert und dennoch für den Beruf nur mäßig brauchbar sein könne“ (Merzyn 2004, S. 406), auf Seiten der Fachwissenschaftler bezüglich der Lehrerbildung immer noch weitgehend „Schweigen, Reformscheue und Uninteressiertheit“ (Merzyn 2004, S. 407) vorherrschten und dass man immer wieder auf Fachvertreter treffe, „in deren Auffassung ein guter Lehrer dadurch entsteht, dass zu einem fachwissenschaftlichen Studium ein Quäntchen gesunder Menschenverstand und ein paar methodische Kniffe“ (Merzyn 2004, S. 406f.) hinzukämen.

3.3 Der Mathematiklehrberuf als Profession?

Wir sind damit neuerlich bei der Frage angelangt, inwiefern zu einem Lehramtsstudium auch die auf „Einsicht der streng aufgezählten Gründe“ (Humboldt [1809] 2017, S. 134) des pädagogischen Handelns gerichtete wissenschaftlich-theoretische Durchdringung von Bildung und Erziehung gehört. Dieser Frage wird im Folgenden entlang des idealtypischen Bildes vom »Mathematiklehrberuf als Profession« nachgegangen. Mit *Profession*, *Professionalität* oder *Professionsorientierung* sind dabei erneut Kategorien angesprochen, die je nach theoretischem Hintergrund unterschiedlich aufgefasst werden können:

1. Im *weitesten Sinne* kann man unter Professionalisierung die *Entwicklung einer Tätigkeit zu einem Beruf* verstehen. In diesem Verständnis fiele die Professionalisierung der Lehrberufe mit den in den letzten beiden Abschnitten dargestellten Idealtypen zusammen: Zu Beginn des 20. Jahrhunderts ist die Verberuflichung aller Lehrämter fraglos gegeben, strittig ist allenfalls die Frage der geeigneten Akademisierung des Volksschullehramts.
2. Im Sinne der *klassischen berufssoziologischen Professionstheorien* sind Professionen spezielle Berufe, für die insbesondere eine akademische Ausbildung charakteristisches Attribut ist, darüber hinaus werden weitere Attribute bzw.

Indikatoren des Professionsstatus benannt, etwa die Übernahme gesellschaftlich grundlegender Funktionen, berufsständische Normen und Selbstkontrolle durch die entsprechenden Berufsverbände. Je nachdem, welche dieser Indikatoren man als zwingend für den Status einer Profession annimmt, gilt dann entweder wenigstens der Gymnasiallehrberuf als ebenfalls bereits mit dem Beginn des 20. Jahrhunderts professionalisiert (aufgrund der akademischen Ausbildung und der mit dem Studienrat etablierten berufsständischen Position), wohingegen den übrigen Lehrämtern, bisweilen auch dem gymnasialen Lehramt aufgrund eines oder mehrerer nicht erfüllter Attribute bis heute nur der Status einer „Semiprofession“ zugewiesen wird (vgl. Daheim 1992, S. 26).

3. Professionen im zweiten Sinn zeichnen sich zudem durch eine *wissenschaftliche Begründungspflicht professionellen Handelns* aus. Mit Blick auf die Mathematiklehrberufe stellt sich die Frage, inwiefern bereits im Rahmen der universitären Ausbildungsphase dem Umstand Rechnung zu tragen ist, dass sich das professionelle Handeln einer Mathematiklehrperson vom professionellen Handeln außerhalb des Schulsystems tätiger Mathematiker(innen) unterscheidet und daher neben einer universellen Beschäftigung mit wissenschaftlicher Mathematik auch eigenständige Wissensbestände zu vermitteln hat, deren wissenschaftlicher Begründungspflicht nicht schon mit Rekurs auf universellen mathematische Wissensbestände genügt werden kann (hierunter viele wissenschaftliches pädagogisches *und mathematikdidaktisches* Wissen).
4. *System- und strukturtheoretische Bestimmungsansätze* zur Professionalität fokussieren die Frage nach professionspezifischem Wissen insofern noch einmal deutlicher, als diese Professionalität nicht einfach an gesellschaftlich etablierten Attributen der Berufsstände festmachen, sondern die *Professionalisierungsbedürftigkeit* und *Professionalisierbarkeit* von Berufen aus der Logik des beruflichen Handelns in den entsprechenden Praxisfeldern herzuleiten versuchen, welche hinsichtlich der „Aufgaben und Anforderungen an Lehrer [...] als in sich widersprüchlich“ (Terhart 2011, S. 206) und aus strukturellen Gründen nur begrenzt theoretisch vorwegnehmbar angenommen werden.
5. Auch *kompetenztheoretische Bestimmungsansätze* beziehen sich maßgeblich auf professionspezifisches Wissen, zeichnen sich hinsichtlich dessen empirischer Erfassbarkeit und theoretischer Vorwegnehmbarkeit allerdings durch eine pragmatischere Haltung aus wie die system- und strukturtheoretischen Ansätze. Sie versuchen ausgehend von „möglichst genauen Aufgabenbeschreibungen für den Lehrerberuf [...] Kompetenzbereiche und Wissensdimensionen“ zu definieren und die „beruflichen Fähigkeiten von Lehrern und deren

Voraussetzungen hinsichtlich Wissen, Überzeugungen, Einstellungen, Handlungsroutinen etc. [...] auf ihren empirischen nachzuweisenden Beitrag zum Erreichen des Zwecks der Institution Schule/Unterrichten“ zu beziehen, nämlich „nachweisbare fachliche und überfachliche Lernerfolge bei den Schülern.“ (Terhart 2011, S. 207; Hervorhebung im Original)

Mit Blick auf die Frage, inwiefern für Mathematiklehrpersonen im Rahmen ihrer Ausbildung auch *Bildung* im Sinne der Hypothesen aus Abschnitt 2 anzustreben wäre, erscheint die Frage zentral, inwiefern der Lehrberuf eine Profession im Sinne von 3.-5. darstellt und was daraus für die Ausbildung folgt. Im Folgenden charakterisiere ich zunächst das idealtypische Bild des Lehrberufs als Profession im Sinne des 3. und 4. Punkts entlang soziologischer und erziehungswissenschaftlicher Theorieansätze und wende mich dann dem Mathematiklehrberuf im Besonderen zu. Die Diskussion kompetenztheoretischer Ansätze (5.) bildet dann den Übergang zum nächsten Idealtyp (Abs. 3.4).

Hinter dem Idealtypus des Lehrberufs als Profession im Sinne von 3. und 4. steht übergreifend eine Position, die davon ausgeht, dass man bei pädagogischen Zielsetzungen wie »Erziehung« und »Bildung«

- nicht ausschließlich auf die Vermittlung von Wissen und Normen abzielt,
- sondern die gesamte Person des zu Bildenden bzw. zu Erziehenden adressierende Prozesse im Blick hat,
- die im Rahmen von Unterricht in komplexe soziale Arrangements eingebunden sind, deren theoretischer Durchdringung und Vorwegnahme klare Grenzen gesetzt sind und
- die daher schließlich ein reflexiv-adaptives Lehrerhandeln voraussetzen, das nicht einfach in der ingenieurmäßigen Anwendung zuvor erzielter wissenschaftlicher Ergebnisse besteht.

Eine solche Position rechtfertigte es dann, die Vermittlung von theoretischem, auf Bildungs- und Erziehungsprozesse gerichtetem Wissen i. e. S. als *Bildungsprozesse* zu begreifen, da sie einer auf bloße Anwendung gerichteten Vermittlung beruflicher Routine ausgerichteten Ausbildung ebenso eine Absage erteilt, wie sie hinsichtlich der prinzipiellen Begrenztheit der „Einsicht der streng aufgezählten Gründe“ (Humboldt [1809] 2017, S. 134) von Erziehung und Bildung einen selbst zum Urteil befähigten, wie auch zur eigenständigen, situativen Adaption und Transformation von Praxis befähigten, in diesem Sinne *professionelle* Lehrperson voraussetzt. Eine eingehende theoretische Herleitung dieser Position bedürfte nun eines

eigenen Beitrags, ich kann hier nicht viel mehr leisten, als drei wichtige Theorieansätze kurz zu umreißen, die als prototypisch für diese Position gelten können.

Hier ist erstens die im Umfeld des Beitrags „Das Technologiedefizit der Erziehung und die Pädagogik“ von Niklas Luhmann und Karl Eberhard Schorr (1982) neu entfachte Auseinandersetzung mit der pädagogischen Grundfrage zu nennen, wie Erziehung möglich ist bzw. wie man ein kausales Einwirken auf Freiheit denken kann (mit Kant: „Wie kultiviere ich die Freiheit bei dem Zwange?“ Kant 1803, S. 27). Weil es für soziale Systeme, wie den Unterricht nach Luhmann und Schorr keine ausreichende Kausalgesetzlichkeit gibt, „gibt es auch keine objektiv richtige Technologie, die man nur erkennen und dann anwenden müßte“ (Luhmann und Schorr 1982, S. 19). „Angesichts der Komplexität des Interaktionssystems Unterricht“ könne die Lehrperson „die faktischen Voraussetzungen für zielsicheres Handeln kaum nennen, kaum ermitteln“ (Luhmann und Schorr 1982, S. 19). An die Stelle sicherer Kausalgesetze müssten in Erziehungs- und Bildungsprozessen daher tendenziell unsichere „Kausalpläne“ treten, nach Fromm (2017) „durch empirische Evidenz nur lückenhaft gestützte Mutmaßungen über kausale Zusammenhänge“ (Fromm 2017, S. 87), und nach Luhmann und Schorr notwendig „von der Realität abweichen, auf die man sich aber einlassen muß, um überhaupt eine rasch genug verfügbare und hinreichend eindeutige Grundlage für eigenes Erleben und Handeln zu gewinnen“ (Luhmann und Schorr 1982, S. 18). Wissenschaftliches Wissen über Erziehung und Bildung könnte nach Fromm daher zwar dazu beitragen, „der Lehrperson eine perspektivenreichere und begründetere Handlungsorientierung mit höheren Erfolgsaussichten zu ermöglichen“ (Fromm 2017, S. 87f.), dies allerdings grundsätzlich nur um den Preis, dass wissenschaftliche „Befunde probeweise ‚überdehnt‘ und durch mehr oder weniger geordnetes und reflektiertes Erfahrungswissen ergänzt werden“ (Fromm 2017, S. 88).

In eine ähnliche Richtung argumentieren zweitens Herbert Altrichter und Peter Posch (1998) in „Lehrer erforschen ihren Unterricht“ ausgehend von Ansätzen von Lawrence Stenhouse (1975) und Donald A. Schön (1983). Diesen Ansätzen gemeinsam ist eine Ablehnung eines Modells professioneller Praxis gemäß dem „Modell technischer Rationalität“ (Altrichter und Posch 1998, S. 320): Qualifizierte praktische Handlung bestehe im pädagogischen Bereich nicht einfach „aus geschickter *Anwendung theoretischen Wissens*, mit dessen Hilfe Problemlösung in der Praxis betrieben wird“ (Altrichter und Posch 1998, S. 320), sondern setze „die Kapazität für autonome berufliche Weiterentwicklung durch systematisches Studium der eigenen Arbeit, durch das Studium der Arbeit anderer Lehrer und durch die Überprüfung pädagogischer Ideen durch Forschung im Klassenzimmer“ (Altrichter und Posch 1998, S. 320) voraus.

Es wäre schließlich drittens die Professionalisierungstheorie von Ulrich Oevermann (2016) zu nennen. Für Oevermann ist das kennzeichnende Merkmal professionellen Handelns „stellvertretende Krisenbewältigung“ (Oevermann 2008, S. 56). In jeder Gesellschaft müsse es einen Ort und daher Berufe bzw. Professionen geben, die sich angesichts von Krisenerscheinungen systematisch mit der Erzeugung neuer Problembewältigungsstrategien befassen. Die Professionalisierungsbedürftigkeit des pädagogischen Handelns sieht Oevermann durchaus in Fortsetzung des klassischen Bildungsgedankens nun darin begründet, dass dieses immer die ganze Person des Schülers adressieren müsse und implizit therapeutisches Handeln sei, weil es – jedenfalls bis zur Überwindung der Adoleszenzkrise – „prophylaktisches Handeln im Hinblick auf sein Potential der Weichenstellung der Biographie von Schülern in Richtung auf psychosoziale Normalität oder Pathologie“ (Oevermann 2016, S. 149) sei.

Für therapeutische Professionen sei nun weiters eine doppelte *Professionalisierungsbedürftigkeit* typisch, einerseits „hinsichtlich der Einübung in den wissenschaftlichen Diskurs als solchen“, den sie mit allen akademischen Professionen teilen und andererseits sei mit Blick auf „die Lösung der Probleme einer konkreten Praxis [...] eine zweite, nochmalige Professionalisierung notwendig, die sich wiederum auf das Verhältnis von Wissenschaft zur Praxis bezieht, aber dieses Mal in der konkreten, zugleich personalisierten Beziehung zum Klienten bzw. Patienten“ (Oevermann 2016, S. 124) bzw. im unserem Fall zum/zur Schüler/in. Für die Lehrer(innen)(aus)bildung folgert Oevermann dann, dass deren Mittelpunkt in einer „kunstlehrerartigen Einübung“ (Oevermann 2016, S. 177) in pädagogisches Handeln in einer „Kombination von fallorientierter, fallrekonstruktiver exemplarischer Materialerschließung“ (Oevermann 2016, S. 149) und in „Formen des praktischen »learning by doing« unter Anleitung erfahrener Kollegen“ (Oevermann 2016, S. 149). Hinzukommen müsse sehr wohl auch die „Vermittlung von bewährtem und relevantem methodischen und theoretischen Wissen“ (Oevermann 2016, S. 149), dessen Dominanz und Parzellierung in „sich verselbständigende lizensierende Wissensreviere“ (Oevermann 2016, S. 149) in der hergebrachten universitären Phase der Lehrer(innen)(aus)bildung sieht Oevermann allerdings sehr kritisch. Für die Pädagogik (und implizit die Fachdidaktik) steht nach Oevermann dann die Entscheidung an bzw. noch aus, „ob sie eher eine Erfahrungswissenschaft oder eine Handlungslehre sein will. Beides gleichzeitig und undifferenziert zu sein bedeutet eine wechselseitige Blockade dieser beiden Komponenten“ (Oevermann 2016, S. 149).

Meinem Eindruck nach hat sich die Mathematikdidaktik und die mathematikbezogene Lehrer(innen)(aus)bildungsforschung bislang allenfalls cursorisch mit dem in diesen Theorieansätzen umrissenem Professionsverständnis und dem dort angedeu-

teten differenzierten Theorie-Praxis-Verhältnis auseinandergesetzt¹² – die jüngere Lehrer(innen)(aus)bildungsforschung blendet es m. E. zu Gunsten des ihr genehmeren, oben bereits kurz erwähnten kompetenztheoretischen Professionsansätzen weitgehend aus.

Nehmen wir etwa einmal Erich Chr. Wittmanns breit diskutierte Kennzeichnung von Mathematikdidaktik als „design science“ (Wittmann 1995) oder sogar als „Ingenieurwissenschaft“ (Wittmann 1974) her, erscheint auf den ersten Blick fraglich, inwieweit sich eine solche Position eines »Technologiedefizits der Pädagogik« bewusst ist. Zu Wittmanns Ehrenrettung kann man allerdings anführen, dass er seine Position mit dem ICME-Hauptvortrag von 2004 „Developing Mathematics Education in a Systemic Process“ (Wittmann 2004) unter explizitem Verweis auf Donald A. Schön dahingehend modifiziert hat, dass eine Entwicklung des Mathematikunterrichts nur möglich sei als systemische, prinzipiell gleichberechtigte Zusammenarbeit von wissenschaftlicher Mathematikdidaktik und durch theoretisches mathematikdidaktisches Wissen nicht einfach substituierbare »craft knowledge« einbringende Schulpraktiker(innen).

3.4 Mathematiklehrer(innen) als kompetente Kompetenzerwerbsbegleiter(innen)

Die »wisdom of practice« benennt auch Lee Shulman (1987) als *ein* Element der Wissensbasis der Lehrer(innen)profession. Sein Ansatz ist in national und international vergleichenden Lehrer(innen)(aus)bildungsstudien wie TEDS-M (vgl. Blömeke et al. 2010), TEDS-LT (vgl. Buchholtz und Kaiser 2013b), TEDS-Telekom (vgl. Buchholtz und Kaiser 2013a) oder COACTIV (vgl. Kunter et al. 2011) und sie umgebende Debatten nahezu omnipräsent. Man kann sich aber nicht des Eindrucks erwehren, dass ihm nachfolgende Arbeiten wie etwa Hill et al. (2005) sehr klar darauf abzielen, dieses nicht kodifizierte, oft implizite »Wissen der Praxis« anders als in den Ansätzen von Luhmann u. Schorr, Stenhouse und Schön nicht als notwendige lokal-situative Ergänzung in der konkreten Praxis ansehen, sondern als etwas letztlich doch von der Mathematikdidaktik zu Erhebendes, Kodifizierendes, Systematisierendes und damit letztlich auch wieder der formalen Ausbildung und dem Prüfungswesen unmittelbar zugänglich zu Machendes. Kolbe (1997) sieht in dieser Hinsicht schon den Zugang zur »paedagogical content knowledge« in Schulmans eigenem Projekt insofern als problematisch an, als fraglich sei, inwiefern

12. An Beispielen wären neben dem unten genannten Wittmann-Vortrag für strukturtheoretische Ansätze wohl noch Jungwirth (2004) und die im Umfeld von Peter Posch in Klagenfurt initiierten Professionalisierungsprogramme PFL und fBM zu nennen, vgl. etwa Fischer et al. 1985; Krainer und Müller 2007.

die „durch individuelle Erfahrungen geprägten fachdidaktischen Interpretationsmuster“ (Kolbe 1997, S. 132f.) individueller Lehrpersonen, die diese Wissensart zunächst ausmachen, überhaupt objektivierbar sind, weil „die konkrete inhaltliche Bedeutung des aus Erfahrung erwachsenen Schemas“ (Kolbe 1997, S. 133) einer Lehrperson „durch den forschersichen Versuch ihrer allgemeingültigen, kontextfreien Erfassung eben *nicht für andere Praktiker und Verwendungssituationen handlungsanleitend* vorgestellt werden kann“ (Kolbe 1997, S. 133, Hervorhebung im Original). Bereits für die TEDS-M-Studie, welche auf die Zielgruppe der Referendarinnen und Referendare im letzten Jahr der Seminaarausbildung abzielt, erst Recht für Erweiterungsstudien wie TEDS-LT und TEDS-Telekom, die in der ersten Phase der Lehrer(innen)(aus)bildung angesiedelt sind, läuft der verfolgte Forschungsansatz darauf hinaus, am Ende eines Studiums bzw. einer Ausbildung zu diagnostizieren, inwiefern »professionelle Kompetenzen« bereits ausgebildet wurden. Nimmt man die strukturtheoretischen Professionstheorien und den Einwand von Kolbe ernst, ist das prinzipiell problematisch, da sich professionelles Wissen erst im professionellen Handeln entwickeln kann, aber eben als solches nicht theoretisch vorweggenommen, kodifiziert und unabhängig von der Berufsausübung gelehrt werden. Angesichts der derzeitigen Struktur des Lehramtsstudiums/der ersten Phase der Lehrer(innen)(aus)bildung kann solches Professionswissen schon deshalb realistischerweise nicht systematisch ausgebildet werden, weil für eine „kunstlehreartige Einübung“ (Oevermann 2016, S. 177) in die pädagogische Klientenbeziehung an Universitäten weder das qualifizierte Personal (erfahrene und reflektierte Praktiker(innen)) noch die Klienten (Schüler(innen)) in ausreichendem quantitativen und zeitlichen Rahmen zur Verfügung stehen.

Selbstkritisch müsste man sich als Mathematikdidaktiker(in) zudem wohl fragen, ob solche Studien im Lichte der verwendeten Test-Items nicht i. W. gerade auf präskriptiv konzipierte, theoretische mathematikdidaktische und elementarmathematische „lizensierende Wissensreserviere“ (Oevermann 2016, S. 149) abstellen und diese unter wohl klingenden Labels wie »mathematical content knowledge« und »paedagogical content knowledge« per Dekret zum Professionswissen *erklären* und damit gerade die strukturellen Besonderheiten des pädagogischen Arbeitsbündnisses und die Bedeutung der »craft knowledge/wisdom of practice« der Schulpraktiker(innen) aus dem Blick verlieren, die überhaupt erst den Professionsstatus des Lehrberufs konstituieren könnten. Es wäre an dieser Stelle eigentlich nötig, sich eingehender mit der Frage zu beschäftigen, inwiefern der in den letzten 15–20 Jahren über mehrere Stationen in der Psychologie und den empirischen Bildungswissenschaften allmählich und immer umfassender die Schule, die Mathematikdidaktik, den Mathematikunterricht, die Mathematiklehr(innen)(aus)bildung und im Zuge der Bologna-Reformen überhaupt den gesamten universitären Bereich erfassende

Leitbegriff „Kompetenzorientierung“ (Reusser 2014)¹³ als solcher dem Anspruch von *Lehrpersonenbildung* nicht eher als Gegenbegriff denn als Stütze gegenüber steht.

Ich will es im Rahmen dieses ohnehin schon recht voluminösen Beitrags bisweilen mit der Benennung der in Fußnote 13 genannten Literaturhinweise und einer abschließenden kurzen Kommentierung bewenden lassen. Weitgehend unstrittig erscheint mir, dass mit dem Idealtypus »kompetenter Kompetenzerwerbsbegleiter(innen)« gleich in doppelter Weise die Spannung zwischen Bildung und Ausbildung im Sinne des ersten Teils in ihrer Ambivalenz als Frage nach Allgemeinbildung als „Zweck an sich selbst“ (Ricken 2006, S. 17) oder „Mittel zu anderen – meist ökonomischen – Zwecken“ (Ricken 2006, S. 16f.) sehr deutlich in Richtung der »anderen Zwecke« gelenkt werden soll und jedenfalls bildungspolitisch auch weit überwiegend ökonomisch-technokratisch gerahmt ist – Lehrer(innen) sollen für ihren Beruf *qualifiziert* werden und Mathematikunterricht wird als Anleitung zum rationalen Problembewältigungshandeln im privaten, öffentlichen und beruflichen Leben verstanden – für viel Aufhebens um Persönlichkeitsbildung hier und Technologiedefizit der Pädagogik da, bleibt dann wenig Zeit und Muße.

4 Schlussbemerkungen

Ich könnte es mir jetzt leicht machen und alles, was im Umfeld der Kompetenzorientierung in der Lehrer(innen)(aus)bildung passiert, in Grund und Boden verdammen, mich im Lichte großer Gestalten wie Humboldt, Diesterweg, Spranger und Luhmann sonnen und die Kompetenzorientierung zum Untergang des Bildungsgedankens, wenn nicht des Abendlandes überhaupt erklären, mich auf Seiten der Guten wännen, den aktuellen kompetenzorientierten Mainstream auf der Seite der Bösen und damit klare Fronten schaffen. Ich halte das für wenig produktiv und – was trotz des par force Ritts durch 200 Jahre Bildung und Lehrerausbildung hofentlich klar geworden ist – auch für kaum angemessen. Vielleicht sollten wir uns – mit Hans-Christoph Koller (2012) in Anlehnung an Michel Foucault ([1983] 2010) daran gewöhnen, dass es jeder Epoche notwendig zukommt, Bildung beständig „anders zu denken“ und in der Kompetenzorientierung weder etwas vom Grundsatz her Gutes noch Schlechtes gegeben ist, aber eben etwas potentiell Gefährliches¹⁴

13. Vgl. ergänzend historisch überblickshaft Klieme und Hartig 2008, sowie historisch kritisch Zlatkin-Troitschanskaia und Seidel 2011; Gelhard 2011.

14. „My point is not that everything is bad, but that everything is dangerous, which is not exactly the same as bad. If everything is dangerous, then we always have something to do.“ (Foucault [1983] 2010, S. 343)

– nur teilt es diese Eigenschaft eben letztlich auch mit dem Bildungsdenken vergangener Tage.

Literaturverzeichnis

- Altrichter, Herbert, und Peter Posch. 1998. *Lehrer erforschen ihren Unterricht: Eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung*. 3., durchges. und erw. Aufl. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Ash, Mitchell G., Hrsg. 1999. *Mythos Humboldt: Vergangenheit und Zukunft der deutschen Universitäten*. Wien, Köln und Weimar: Böhlau.
- Benner, Dietrich. 2014. Bildung in pädagogischen und außerpädagogischen Kontexten. *Erwägen, Wissen, Ethik* 25 (2): 220–223.
- Bikner-Ahsbahs, Angelika. 2003. Empirisch begründete Idealtypenbildung. Ein methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *ZDM* 35 (5): 208–223.
- Blömeke, Sigrid, Gabriele Kaiser und Rainer H. Lehmann. 2010. *TEDS-M 2008. 3. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.
- Bollenbeck, Georg. 1994. *Bildung und Kultur: Glanz und Elend eines deutschen Deutungsmusters*. 2. Aufl. Frankfurt am Main: Insel-Verl.
- Buchholtz, Nils, und Gabriele Kaiser. 2013a. Improving Mathematics Teacher Education in Germany: Empirical Results from a Longitudinal Evaluation of Innovative Programs. *International Journal of Science and Mathematics Education* 11 (4): 949–977.
- . 2013b. Professionelles Wissen im Studienverlauf: Lehramt Mathematik. In *Professionelle Kompetenzen im Studienverlauf*, herausgegeben von Sigrid Blömeke, Albert Bremerich-Vos, Gabriele Kaiser, Günther Nold, Helga Haudeck, Jörg-U. Keßler und Knut Schwippert, 107–143. Münster u. a.: Waxmann.
- Daheim, Hansjürgen. 1992. Zum Stand der Professionssoziologie. In *Erziehen als Profession: Zur Logik professionellen Handelns in pädagogischen Feldern*, herausgegeben von Bernd Dewe, Wilfried Ferchhoff und Frank Olaf-Radtke, 21–35. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

- Damerow, Peter. 1979. Ideologie. In *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht*, herausgegeben von Dieter Volk, 114–127. München: Fink.
- Fiegert, Monika. 2005. Zur Geschichte der Lehrer(aus)bildung in Osnabrück. In *Zwischen Lehrerbildung und Lehrerausbildung*, herausgegeben von Monika Fiegert und Ingrid Kunze, 37–56. Münster: LIT-Verl.
- Fischer, Roland, Konrad Krainer, Günther Malle, Peter Posch und Maria Zenkl, Hrsg. 1985. *Pädagogik und Fachdidaktik für Mathematiklehrer: Ergebnisse e. Modellversuchs zur Lehrerfortbildung d. Interuniversitären Forschungsinst. für Fernstudien*. Wien und Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky / Teubner.
- Foucault, Michel. 2010. On the Genealogy of Ethics: An Overview of Work in Progress. In *The Foucault Reader*, herausgegeben von Michel Foucault und Paul Rabinow, 340–372. New York: Vintage Books (Nachdruck, Original 1983).
- Fromm, Martin. 2017. *Lernen und Lehren: Psychologische Grundlagen für Lehramtsstudierende*. Münster: Waxmann.
- Führ, Christoph. 1992. Gelehrter Schulmann – Oberlehrer – Studienrat. Zum sozialen Aufstieg der Philologen. In *Bildungsbürgertum im 19. Jahrhundert*, herausgegeben von Werner Conze und Jürgen Kocka, 417–457. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Gelhard, Andreas. 2011. *Kritik der Kompetenz*. Zürich: Diaphanes.
- Giesecke, Hermann. 2014. Braucht die Pädagogik Bildungsphilosophie? *Erwägen, Wissen, Ethik* 25 (2): 235–237.
- Grzesik, Jürgen. 2016. *Das deutsche Bildungssyndrom: Eine kritische Diagnose der Brauchbarkeit des Bildungsbegriffs*. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.
- Hedtke, Reinhold. 2000. Das unstillbare Verlangen nach Praxisbezug: Zum Theorie-Praxis-Problem der Lehrerbildung am Exempel Schulpraktischer Studien. In *Berufsorientierung und Arbeitsmarkt*, herausgegeben von Hans-Jürgen Schlöser, 67–91. Bergisch Gladbach: Hobein.
- Heymann, Hans Werner. 2014. Stojanovs Rekonstruktion des Bildungsbegriffs kritisch hinterfragt. *Erwägen, Wissen, Ethik* 25 (2): 247–250.
- Hill, H. C., B. Rowan und D. L. Ball. 2005. Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal* 42 (2): 371–406.

- Humboldt, Wilhelm von. 1851. *Ideen zu einem Versuch, die Gränzen der Wirksamkeit des Staats zu bestimmen*. Breslau: Trewendt (Nachdruck, Original 1792). http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/humboldt_grenzen_1851.
- . 1971. Bericht der Sektion des Kultus und Unterrichts. 1. Dezember 1809. In *Wilhelm von Humboldt: Studienausgabe in 3 Bänden*, herausgegeben von Kurt Müller-Vollmer, 142–152. Frankfurt a. M.: Fischer (Nachdruck, Original 1809).
- . 2017. Der Königsberger und der Litauische Schulplan. In *Wilhelm von Humboldt: Schriften zur Bildung*, herausgegeben von Gerhard Lauer, 110–142. Ditzingen: Reclam Verlag (Nachdruck, Original 1809).
- Jahnke, Hans Niels. 1990. *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Jungwirth, Helga. 2004. Veränderung und Reproduktion des Gewöhnlichen: Lehrerpraktiken in Neuerungskontexten. *Journal für Mathematik-Didaktik* 25 (2): 87–111.
- Kant, Immanuel. 1803. *ÜBER PÄDAGOGIK*. Königsberg: Friedrich Nicolovius. http://www.deutschestextarchiv.de/book/show/kant_paedagogik_1803.
- Klafki, Wolfgang. 1986. Die Bedeutung der klassischen Bildungstheorien für ein zeitgemäßes Konzept allgemeiner Bildung. *Zeitschrift für Pädagogik* 32 (4): 455–476.
- Klieme, Eckhard, und Johannes Hartig. 2008. Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs. In *Kompetenzdiagnostik*, herausgegeben von Manfred Prenzel, Ingrid Gogolin und Heinz-Hermann Krüger, 11–29. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Koch, Lutz. 2004. Allgemeinbildung und Grundbildung, Identität oder Alternative? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 7 (2): 183–191.
- Kolbe, Fritz-Ulrich. 1997. Lehrerbildung ohne normative Vorgaben für das praktische Handlungswissen? In *Brennpunkt: Lehrerbildung*, herausgegeben von Manfred Bayer, Ursula Carle und Johannes Wildt, 121–137. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Koller, Hans-Christoph. 2012. *Bildung anders denken: Einführung in die Theorie transformatorischer Bildungsprozesse*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Kollosche, David. 2015. *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Wiesbaden: Springer.

- Krainer, Konrad, und Florian H. Müller. 2007. Fachbezogenes Bildungsmanagement – Konzeption eines Lehrgangs und erste Befunde der Begleitforschung. In *Mathematische Bildung - mathematische Leistung*, herausgegeben von Andrea Peter-Koop und Angelika Bikner-Ahsbals, 79–95. Hildesheim: Franzbecker.
- Kühnel, Johannes. 1920. *Gedanken über Lehrerbildung – Eine Gegenschrift*. Leipzig: Klinkhardt.
- Kunter, Mareike, Jürgen Baumert, Werner Blum und Michael Neubrand, Hrsg. 2011. *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.
- Lenné, Helge. 1969. *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Klett.
- Luhmann, Niklas, und Karl Eberhard Schorr. 1982. Das Technologiedefizit der Erziehung und die Pädagogik. In *Zwischen Technologie und Selbstreferenz*, herausgegeben von Niklas Luhmann und Karl Eberhard Schorr, 11–40. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Merzyn, Gottfried. 2004. Fachwissenschaftliche Ausbildung aus mathematisch-naturwissenschaftlicher Sicht. In *Handbuch Lehrerbildung*, herausgegeben von Sigrid Blömeke, Peter Reinhold, Gerhard Tulodziecki und Johannes Wildt, 397–410. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.
- Messner, Rudolf. 2003. PISA und Allgemeinbildung. *Zeitschrift für Pädagogik* 49 (3): 400–412.
- Oelkers, Jürgen. 2016. *Bildung und Ausbildung: Begriffe, Kontexte und Wandel: Vortrag im Rahmen des 9. Workshop der ARGE Bildung und Ausbildung der österreichischen Forschungsgemeinschaft, Wien 30.05.2016*. http://www.oefg.at/wp-content/uploads/2016/03/Beitrag_Oelkers-2016.pdf.
- Oevermann, Ulrich. 2008. Profession contra Organisation? Strukturtheoretische Perspektiven zum Verhältnis von Organisation und Profession in der Schule. In *Pädagogische Professionalität in Organisationen*, herausgegeben von Werner Helsper, Susann Busse, Merle Hummrich und Rolf-Torsten Kramer, 55–77. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- . 2016. Theoretische Skizze einer revidierten Theorie professionalisierten Handelns. In *Pädagogische Professionalität*, 8. Auflage, herausgegeben von Arno Combe und Werner Helsper, 70–182. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Peukert, Helmut. 2000. Reflexionen über die Zukunft von Bildung. *Zeitschrift für Pädagogik* 46 (4): 507–524.

- Reusser, Kurt. 2014. Kompetenzorientierung als Leitbegriff der Didaktik. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung* 32 (3): 325–339.
- Ricken, Norbert. 2006. *Die Ordnung der Bildung: Beiträge zu einer Genealogie der Bildung*. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwiss.
- Sandfuchs, Uwe. 2004. Geschichte der Lehrerbildung in Deutschland. In *Handbuch Lehrerbildung*, herausgegeben von Sigrid Blömeke, Peter Reinhold, Gerhard Tulodziecki und Johannes Wildt, 14–37. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.
- . 2009. Johannes Kühnel (1869-1928): Ein Seminar- und Reformpädagoge als Klinkhardt-Autor. In *Verlag Julius Klinkhardt 1834 - 2009*, herausgegeben von Uwe Sandfuchs, Jörg-W. Link und Andreas Klinkhardt, 57–80. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Schimank, Uwe. 2010. Humboldt in Bologna – falscher Mann am falschen Ort? In *Perspektive Studienqualität*, herausgegeben von Hochschul-Informationssystem GmbH, 44–62. Bielefeld: Bertelsmann.
- Schön, Donald A. 1983. *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.
- Schubring, Gert. 1990. Zur strukturellen Entwicklung der Mathematik an den deutschen Hochschulen 1800-1945. In *Mathematische Institute in Deutschland 1800-1945*, herausgegeben von Winfried Scharlau, 264–278. Wiesbaden und s.l.: Vieweg+Teubner Verlag.
- . 2007. Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich. *NTM International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine* 15 (1): 1–17.
- Schütze, Sylvia. 2014. Das preußische Regulativ für den Seminarunterricht von 1854 - Standards für die Lehrerbildung? *Die deutsche Schule* 106 (4): 324–343. https://www.iew.phil.uni-hannover.de/fileadmin/erziehungswissenschaft/MitarbeiterInnen/Schuetze/Schuetze_Regulative_Standards.pdf.
- Seel, Norbert M., und Ulrike Hanke. 2015. *Erziehungswissenschaft: Lehrbuch für Bachelor-, Master- und Lehramtsstudierende*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Shulman, Lee. 1987. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review* 57 (1): 1–23.
- Spranger, Eduard. 1920. *Gedanken über Lehrerbildung*. Leipzig: Quelle & Meyer.
- Stenhouse, Lawrence. 1975. *An introduction to curriculum research and development*. London: Heinemann.

- Stiehl, Ferdinand. 1854. *Die drei Preußischen Regulative vom 1., 2. und 3. October 1854 über Einrichtung des evangelischen Seminar-, Präparanden- und Elementarschul-Unterrichts. Im amtlichen Auftrage zusammengestellt und zum Drucke befördert.* Berlin: Hertz. <http://opac.bbf.dipf.de/retro-digibuch/57m1238/57m1238.pdf>.
- Terhart, Ewald. 2011. Lehrerberuf und Professionalität. Gewandeltes Begriffsverständnis – neue Herausforderungen. In *Pädagogische Professionalität*, herausgegeben von Werner Helsper und Rudolf Tippelt, Beiheft. 57:202–224. Zeitschrift für Pädagogik. Weinheim u. a.: Beltz. <http://www.pedocs.de/volltexte/2013/7095>.
- Toepell, Michael. 2003. Rückbezüge des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik in der BRD auf historische Vorausentwicklungen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 35 (4): 177–181. <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm034a9.pdf>.
- Vohns, Andreas. 2009. Lehrer sein das ist nicht schwer, Lehrer werden umso mehr: Eine bilaterale, (nicht nur lehrer-)bildungspolitische Presseschau. *Mitteilungen der GDM*, Nr. 87:4–9. <http://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/download/20/18>.
- . 2017. Bildung, Mathematical Literacy and Civic Education: The (Strange?) Case of Contemporary Austria and Germany. In *Mathematics Education and Life at Times of Crisis*, herausgegeben von Anna Chronaki, 2:968–978. Volos: University of Thessaly Press.
- Weber, Max. 1982. *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*. 5., erneut durchges. Aufl. Tübingen: Mohr (Nachdruck, Original 1922).
- Winter, Heinrich. 1990. Bürger und Mathematik. *ZDM* 22 (4): 131–147.
- . 1995. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM*, Nr. 61:37–46. <http://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/download/69/80>.
- Wittmann, Erich Ch. 1974. Mathematikdidaktik als Ingenieurwissenschaft. *ZDM* 6 (3): 119–121.
- . 1995. Mathematics education as a ‘design science’. *Educational Studies in Mathematics* 29 (4): 355–374.

- . 2004. Developing Mathematics Education in a Systemic Process. In *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education*, herausgegeben von Hiroshi Fujita, Yoshihiko Hashimoto, Bernard R. Hodgson, Peng Yee Lee, Stephen Lerman und Toshio Sawada, 73–90. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Zlatkin-Troitschanskaia, Olga, und Jana Seidel. 2011. Kompetenz und ihre Erfassung – das neue „Theorie-Empirie- Problem“ der empirischen Bildungsforschung? In *Stationen Empirischer Bildungsforschung*, herausgegeben von Olga Zlatkin-Troitschanskaia, 218–233. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

›a labor of love‹ Aus der Geschichte der *Begriffsschrift*-Editionen (1952-2017)

Matthias Wille

Gottlob Freges *Begriffsschrift* (1879) ist inzwischen fast 140 Jahre alt und die Geschichte ihrer Editionen besteht aus drei gänzlich verschiedenen gearteten Kapiteln. Während über die spärlichen Spuren ihres verlegerischen Ursprungs in den *Siegener Beiträgen* bereits berichtet wurde¹, gibt es editionshistorisch über das halbe Jahrhundert ihrer weitgehenden Unverfügbarkeit kaum etwas Gehaltvolles zu dokumentieren. Es passierte schlicht nichts. Umso größer ist die Fülle an Episoden aus der sich daran anschließenden Zeit. In den zurückliegenden 65 Jahren wurde das Werk in verschiedenen Etappen und mannigfachen publizistischen Variationen neu entdeckt. Davon soll nun berichtet werden.²

1 „Sie wird neu herauskommen“

Bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts spielte das Thema „Begriffsschrift“ im Verlagswesen und Buchhandel überhaupt keine Rolle, obgleich der im höchsten Maße engagierte Fregeforscher Heinrich Scholz 1936 in zuversichtlicher Erwartung auf ein nahendes, durch ihn selbst zu induzierendes Ereignis nachdrücklich betonte: „Sie

1. Vgl. Wille (2016a).

2. Von Herzen danke ich Christian Thiel für die Vielzahl der eingebrachten Ergänzungen und Korrekturen.

wird neu herauskommen“.³ Finanziell gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft und tatkräftig unterstützt durch seinen Mitarbeiter Friedrich Bachmann sollte das Werk zusammen mit anderen, gleichermaßen schwer erreichbaren Arbeiten sowie einer Auswahl an Nachlassdokumenten zeitnah publiziert werden. „Wir rechnen damit, dass bis zum Frühjahr 1937 zwei grössere Bände gedruckt vorliegen“.⁴ Doch weder zu diesem Zeitpunkt noch zu einem späteren erfüllte sich die Ankündigung. Aus heute nicht mehr bekannten Gründen blieb diese in Aussicht gestellte zweite Ausgabe der *Begriffsschrift* unveröffentlicht. Doch zu eben dieser Zeit sollten mehrere tausend Kilometer von Münster entfernt die entscheidenden, vor allem institutionellen Weichen für die Entdeckung von Freges Werk gestellt werden.

Auch wenn es noch einmal gut eineinhalb Jahrzehnte brauchte, bis sich der weltweite Durchbruch im publizistischen Alltagsbewusstsein manifestieren konnte⁵, so ändert sich für die *Begriffsschrift* nun alles. Während die ersten 70 Jahre ihres Daseins durch Stagnation gekennzeichnet waren, entwickelt sich in den nachfolgenden sechs Jahrzehnten eine rege verlegerische Tätigkeit. Allein nach Kenntnisstand der vorliegenden Untersuchung erschienen in dieser Zeit mindestens 24 (Teil)Editionen im Gesamtumfang von 46 oder mehr Ausgaben (inkl. neuer Auflagen und Nachdrucke) in nicht weniger als zwölf Sprachen, begleitet durch insgesamt 20 Übersetzungsprojekte.⁶ Während (wahrscheinlich) in den ersten fünf Dekaden des 20. Jahrhunderts überhaupt keine Ausgabe verfügbar war, erschienen statistisch betrachtet ab der zweiten Hälfte des Jahrhunderts alle anderthalb Jahre eine weitere, neue (Teil)Ausgabe. Mit den frühen 1970er Jahren sowie der Zeit um die Jahrtausendwende lassen sich sogar zwei Häufungspunkte auszeichnen, bei denen innerhalb von jeweils gut drei Jahren acht bzw. sechs (Teil)Ausgaben publiziert wurden. Beachtlich ist zudem, dass in den zurückliegenden 20 Jahren insgesamt 20 (Teil)Ausgaben erschienen sind, d.h. seit 1997 wurde durchschnittlich eine (Teil)Ausgabe pro Jahr publiziert. Erstaunlicherweise gab es weder zum 100jährigen Jubiläum 1979 noch hierfür verspätet eine kritische Ausgabe, wie dies etwa für den Fall der *Grundlagen der Arithmetik* Mitte der 1980er Jahre durch die hervorragende Editionsarbeit von Christian Thiel sichergestellt wurde.⁷ Zwar gab es unmittelbar auf das Centenarjahr folgend mit der Veröffentlichung von drei (Teil)Ausgaben eine Singularität. Allerdings war weder die ungarische Überset-

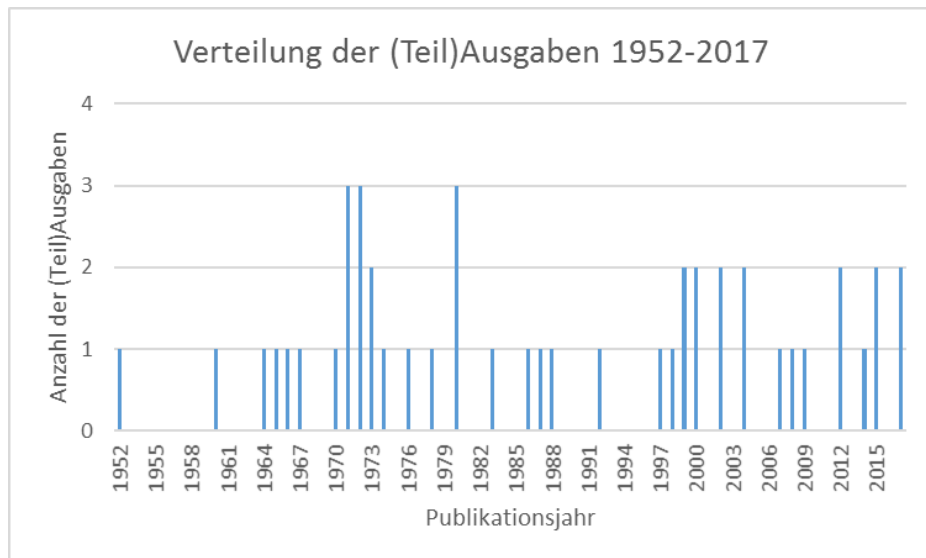
3. Scholz (1936), 256.

4. Scholz/Bachmann (1936), 30.

5. Umfassend hierzu Wille (2016b), passim.

6. Die vollständigen bibliographischen Angaben sämtlicher hier bekannter Editionen findet der Leser im Abschnitt „(Teil)Ausgaben und Übersetzungen der *Begriffsschrift*“ des Quellenverzeichnisses.

7. Vgl. Frege (1986).



zung von Ándrás Máté⁸ noch der von Ion Costescu besorgte Wiederabdruck⁹ oder gar die dritte Auflage des *Translations*-Bandes¹⁰ für die Funktion einer kritischen Jubiläumsausgabe vorgesehen. Doch während die Möglichkeit für einen Centenar-Band irgendwann verstrichen war, gibt es bis heute keine kritische Edition, es gibt für das deutschsprachige Original nicht einmal einen vollständigen tadellosen neuen Satz.

Auch wenn der 100. Geburtstag der Schrift nicht mit einer Jubiläumsausgabe bedacht wurde, so wurde des Ereignisses doch immerhin akademisch gedacht. Schließlich fand vom 7. bis zum 11. Mai 1979 an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, die zugleich der offizielle Gastgeber der Veranstaltung war, eine internationale Frege-Konferenz mit gut 40 Referenten statt, „aus Anlaß des hundertsten Jahrestages des Erscheinens von Gottlob Freges fundamentalem Werk“.¹¹ Folgerichtig zierte der Name der *Begriffsschrift* nicht nur den Konferenztitel, sondern auch den Haupttitel des resultierenden Tagungsbandes.¹² Bedauerlich nur, dass Anlass und Titel der Tagung für kaum einen der Referenten einen thematisch handlungsleitenden Charakter besaß. Es findet sich unter den Konferenzbeiträgen kein einziger Vortrag, der in seiner inhaltlichen Ausrichtung dem Jubilar auch nur annähernd

8. Frege (1980a).

9. Frege (1980b).

10. Frege (1952).

11. Wegner (1979), 1.

12. Vgl. Bolck (ed.).

gerecht werden würde. Eine Besonderheit für die *Begriffsschrift*historie gab es gleichwohl.¹³ Auf Anregung von Rolf Lindner wurde durch die „Vorbereitungsgruppe der 1. Internationalen Jenaer Frege-Konferenz“ bei dem Berliner Künstler Fritz Schulz eine Frege-Medaille in Auftrag gegeben, die vor Ort an Vortragsredner, Mitglieder des Programmkomitees sowie verdiente Mitarbeiter im Organisationskomitee ausgehändigt wurde.¹⁴ In einem Beratungsprotokoll vom 6. Mai 1978 ist die Rede von einer „Gedenkmedaille für Ehrengäste u. a.“.¹⁵ Die 220,7 Gramm schwere Bronze-Medaille wurde in der Bildgießerei Seiler in Schöneiche bei Berlin in einer Auflage von 200 Stück hergestellt. Während 50 Exemplare für den Staatlichen Kunsthandel der DDR vorgesehen waren, ist auf einem Lieferschein des Staatlichen Kunsthandels vom 31. Mai 1979 vermerkt, dass 120 Bronzeplaketten am Tag der Konferenzeröffnung an die Friedrich-Schiller-Universität Jena geliefert wurden und weitere 30 zur Abholung bereitstünden.¹⁶ 150 Exemplare waren also für die Tagung oder mit ihr im Zusammenhang stehende akademische Belange vorgesehen. Aus Anlass des Centenar-Ereignisses wurde ein echtes numismatisches Liebhaberstück mit Sammlerwert geschaffen.

Die große Jenaer Tagung konnte der Schrift inhaltlich kein Denkmal setzen. Eine Ehrenrettung gelang schließlich durch Lothar Kreiser und Helmut Metzler, die wesentlich zeitgleich zur Konferenz, aber unabhängig von dieser in der *Deutschen Zeitschrift für Philosophie* einen kleinen Aufsatz veröffentlicht bekamen, der geschichtsträchtig mit den Worten anhub „Hundert Jahre sind vergangen“¹⁷ und dessen volle Aufmerksamkeit einzig und allein dem 100jährigen galt. Obgleich Kreiser auch an anderer Stelle an das Ereignis erinnerte¹⁸, hierbei jedoch eine größere Perspektive wählte, blieb es bei der singulären publizistischen Reminiszenz, die im Jubiläumsjahr lediglich ein Promille des Gesamtumfangs des benannten Periodikums ausmachte. Wismar, Jena und Bad Kleinen gehörten 1979 zwar zum Staatsgebiet der Deutschen Demokratischen Republik, doch das ideologieunbelastete Werk der gesamtdeutschen Figur Frege erfuhr selbstverständlich systemübergreifend größte Wertschätzung. Auch im zweiten deutschen Staat gab es Centenaraktivitäten, hier

13. Die nachfolgenden Informationen stammen von Frau Rita Seifert, M.A. vom Universitätsarchiv der FSU Jena sowie von Herrn Dr. Gerhard Lischke. Für ihre zum Teil überaus arbeitsintensiven Recherchen sei ihnen an dieser Stelle ganz herzlich gedankt!

14. Gerhard Lischke an Christian Thiel in einer Mail vom 8. Februar 2017.

15. Rita Seifert an Christian Thiel in einer Mail vom 20. März 2017. Da die im Universitätsarchiv Jena befindlichen und für die Benutzung noch nicht erschlossenen Unterlagen zur Frege-Konferenz teilweise in Ordnern, teilweise in Mappen als Loseblatt-Ablagen vorliegen, könnte nur im Rahmen einer überaus intensiven, blattweisen Durchsicht der Mappen und mit ungewissem Ausgang geprüft werden, ob sich unter den Dokumenten überhaupt noch nähere Auskünfte darüber befinden, wer im Einzelnen eine Frege-Medaille erhalten hat.

16. Rita Seifert an Christian Thiel in einer Mail vom 20. März 2017.

17. Kreiser/Metzler (1979), 571.

18. Kreiser (1979).



Die Gottlob-Frege-Gedenkmedaille aus Anlass von 100 Jahren Begriffsschrift (Der Abdruck erfolgt mit freundlicher Genehmigung von Herrn Christian Thiel)

im Rahmen der Sektion „History of logic, methodology and philosophy of science“ des riesenhaften *Sixth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science* in Hannover (22. bis 29. August). In einem eigens Frege dedizierten Symposium¹⁹ war es im Besonderen Christian Thiel, der einen logikgeschichtlichen Bogen spannte „From Leibniz to Frege“ und mit der Einsicht eröffnete, „Celebrating the centenary of a book is not unusual at all.“²⁰ Es sollte für Thiel, der bereits auf der Jenaer Konferenz referierte, bei Weitem nicht der letzte Centenarvortrag 1979 werden.

Gleichermaßen angemessen gelang die akademische Würdigung an anderer Stelle, denn nicht nur in Freges Mutterland wurde das geschichtsträchtige Jubiläum zum Anlass wissenschaftlicher Reflexionen genommen. Auch in der ersten Wahlheimat des Werkes, den Vereinigten Staaten, erinnerte man sich festlich des Ereignisses der Ersterscheinung. Im Rahmen des 53. jährlichen Treffens der *American Philosophical Association* (Pacific Division) in San Diego wurde immerhin der Eröffnungsvortrag der dreitägigen Veranstaltung dafür vorgesehen. Zwar handelte es sich hierbei nicht um eine ganzwöchige Festveranstaltung, doch diese *Invited Address in Commemoration of the One-Hundredth Anniversary of Frege's Begriffsschrift* wurde vom Dienstältesten unter den Frege-Gelehrten der Welt gehalten, der darüber hinaus durch sein beispielloses Wirken der *Begriffsschrift* Jahrzehnte

19. Vgl. Cohen et al. (1982), X.

20. Thiel (1982), 755.

zuvor den internationalen Durchbruch allererst ermöglicht hatte. Unter der Diskussionsleitung von Wilfrid Sellars hielt niemand anderer als Alonzo Church am 23. März den Centenarvortrag mit dem Titel „How Far Can Frege’s Intensional Logic Be Reproduced within Russell’s Theory of Description?“. ²¹ Hier stand Frege nicht nur drauf, hier war Frege auch drin.

Churchs *Invited Address* mag vielleicht der erste Frege dedizierte Festvortrag im Jubiläumsjahr gewesen sein, es handelte sich hierbei aber keineswegs um die einzige akademische Würdigung im Ausland. Keinen Monat später fand vom 17. bis zum 21. April im italienischen Orbetello das Kolloquium „Un siècle dans la philosophie des mathématiques“ statt, das veranstaltet wurde von der *Académie Internationale de Philosophie des Sciences*. Die Wahl des Themas war motiviert durch die hundertjährige Wiederkehr der Publikation von Freges „fameux livre“ ²² und spiegelte sich neben fünf weiteren, „L’œuvre de Frege“ gewidmeten Beiträgen vor allem im zentralen Vortrag von Corrado Mangione wieder, der über diese „Acte de naissance de la philosophie des mathématiques moderne“ referierte. ²³ Eine wertschätzende Berücksichtigung sollte das Anniversar auch bei der *Österreichischen Ludwig-Wittgenstein-Gesellschaft* finden, die im Rahmen des „4. Internationalen Wittgenstein Symposiums“ in Kirchberg am Wechsel (28. August - 2. September 1979) eine Untersektion „der hundertjährigen Wiederkehr des Erscheinens von Freges *Begriffsschrift*“ ²⁴ zu widmen gedachte. Ob diese dann tatsächlich auch stattfand, muss hier offengelassen werden, da zumindest der resultierende Tagungsband keine eindeutigen Spuren von Centenaraktivitäten aufweist. Vor allem durch spanische sowie mittelamerikanische Referenten getragen fand vom 27. bis zum 29. November in Peñíscola, in der spanischen Provinz Castellón das „Simposio sobre Lógica y Filosofía en Gottlob Frege: Primer Centenario de la publicación de *Begriffsschrift* 1879–1979“ statt. ²⁵ Für die ebenfalls auf diesem Symposium Referierenden Michael Dummett, Peter Geach sowie Christian Thiel sollte es nicht das letzte Wiedersehen in diesem Jahr und aus diesem Anlass sein. Keine drei Wochen später sah man sich wieder, dieses Mal auf der (wahrscheinlich) letzten Centenarveranstaltung im Jubiläumsjahr. Das *Seminar for Austro-German Philosophy* veranstaltete am 15. und 16. Dezember das mit sieben 90-Minuten-Vorträgen bestückte Kolloquium „Grammar and the *Begriffsschrift*: A Centenary Celebration“, das am Bedford College in London stattfand. ²⁶ Belassen wir vorerst ein Fragezeichen hinter der Untersektion in Kirchberg, so gab 1979 also mindestens sechs

21. Vgl. APA (1979), 446.

22. Agazzi (1981), 3.

23. Vgl. Mangione (1981).

24. ZphF (1979), 147.

25. Vgl. Anzeige (1979).

26. Vgl. SFAGP (1979).

international besetzte Veranstaltungen zu Ehren der 100. Wiederkehr der Erstpublikation. Das steht immerhin im Einklang mit einer Auskunft von Michael Dummett, der sich erinnert: „In this year (1979), many universities have had the idea of holding conferences in celebration of the centenary of the publication of Frege’s *Begriffsschrift*; I know of six, and have participated in three, such conferences. The number of individual works of philosophy, or, indeed, of science, of whose publication it would be appropriate to celebrate the centenary is very small indeed. It might be an amusing parlour game to propose membership of this exclusive category; but it is certainly a mark of Frege’s greatness that the *Begriffsschrift* is unquestionably one of them“.²⁷

Die Vielfalt der Tagungsadressen fand in den Publikationen zum Jubiläum immerhin partiell eine Entsprechung. Neben Mangiones bereits erwähneter Abhandlung „Le “Begriffsschrift” de Frege (1879)“ verdienen zumindest einige weitere publizistische Bemühungen der Würdigung. Da treffen wir zum einen auf den 1979 erschienenen Sonderband 33(130) der *Revue Internationale de Philosophie*, der dem Thema „Frege (1879-1979)“ gewidmet war und der vor allem durch Claude Imberts „Le projet idéographique“²⁸ sowie Francis Jacques’ „L’idéographie frégéenne“²⁹ bestach. Den vielleicht würdevollsten Beitrag zum Jubiläum verfasste Eladio Chávarri, der mit seiner umfangreichen Untersuchung „En el primer centenario de *Begriffsschrift*“³⁰ eben nicht nur auf das Centenarereignis aufmerksam machen wollte, sondern der mit seiner Hommage an die *Begriffsschrift* deren überragende geistige Größe unterstreichen und ein Plädoyer für die selbstständige Lektüre Fregescher Schriften formulieren wollte. Erwähnt sei schließlich noch die ganz individuelle Wertschätzung, die durch Ion Costescu zum Ausdruck gebracht wurde. Sein umfangreiches Werk *Die kosmische Erkenntnis und der menschliche Computer* erinnert nicht nur durch den Untertitel 100 Jahre seit Freges „*Begriffsschrift*“ an das Jubiläum, sondern die Veröffentlichung der fast 400 Seiten starken Untersuchung in der deutschen Sprache „hat als Begründungen: - die Würdigung die wir Freges “Begriffsschrift” schulden, seit dessen Erscheinen hundert Jahre vergangen sind“.³¹ Diesen huldvollen Worten ließ Costescu literarische Taten folgen, denn neben einem mit Kommentaren versehenen Neudruck der Teile I und II (bis Formel 64)³² erfuhr auch Freges *Begriffsschrift* im Licht des eigenen, unkonventionellen Theorieansatzes eine Untersuchung, nachdem im umfangreichen ersten Teil der Arbeit „die Eingangsgrößen und die Ausgangsgrößen der Syllogismen in

27. Dummett (1981), ix.

28. Imbert (1979).

29. Jacques (1979).

30. Chávarri (1979).

31. Costescu (1980a).

32. Frege (1980b).

der kosmischen Erkenntnis und dem menschlichen Computer“³³ festgestellt wurden. Damit „wird der wirkliche Wert der Ideographie Freges erfassbar in ihrem Mechanismus“³⁴, belegt unter anderem durch eine begriffsschriftliche Analyse von Syllogismen.³⁵

Damit konnten die publizistischen Centenaraktivitäten auch quantitativ ein kleines Ausrufezeichen setzen, denn in der Gesamtstatistik zu den *Begriffsschrift*-Veröffentlichungen³⁶ lag in zwei aufeinanderfolgenden Jahren (1979/1980) die Anzahl erstmals bei insgesamt 15 Beiträgen. Dieser Wert sollte erst wieder ab der Mitte der 1990er Jahre erreicht werden, doch ab dieser Zeit beginnt für die Rezeption des Werkes sowieso ein neues Kapitel, denn die zurückliegenden 20 Jahre beeindrucken nochmals deutlich gegenüber der bereits beachtlichen Rezeption ab den 1960er Jahren. Die Gesamtverteilung der *Begriffsschrift*-Publikationen in den vergangenen fast 140 Jahren spricht eine deutliche Sprache, denn gut neun von zehn Beiträgen wurden erst in den letzten 55 Jahren veröffentlicht, immerhin noch über 70 Prozent nach dem Centenarjahr. Die regen akademischen Jubiläumsveranstaltungen erwiesen sich rückblickend als ein vielversprechender Auftakt für umfassendere Forschungsaktivitäten. Etwas Besseres konnte den Bemühungen um einen solchen Anlass nicht widerfahren. Es fügt sich daher harmonisch in das Bild der kontinuierlichen Editionstätigkeiten der vergangenen zwei Jahrzehnte, dass im selben Zeitraum die Hälfte der bis heute publizierten Untersuchungen zur Schrift anzutreffen sind. Seit 20 Jahren und damit gut 120 Jahre nach der Erstveröffentlichung ist die Forschung zur *Begriffsschrift* auch numerisch endlich auf einem respektablem Niveau angekommen.

2 „Unfortunately, this little book has never been reprinted“

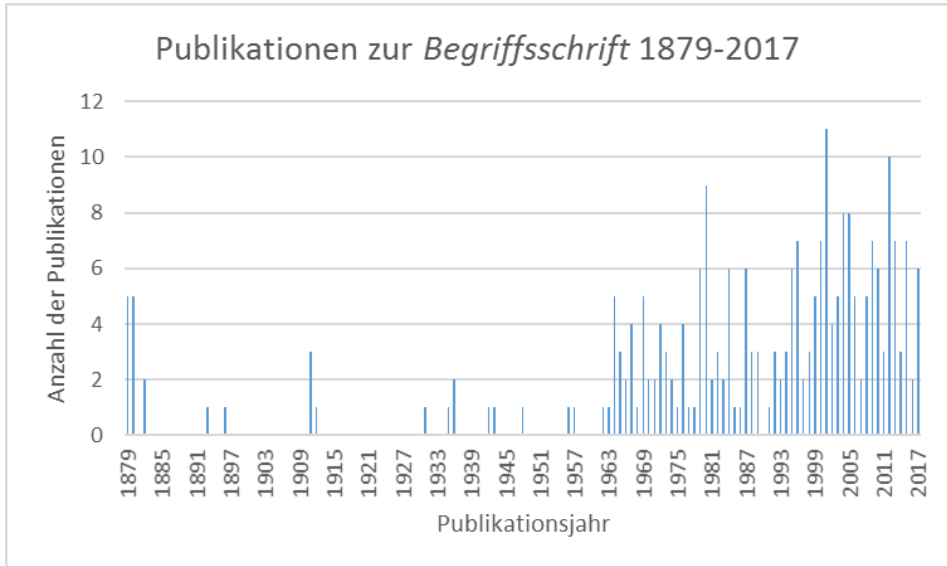
Das wiedererstarbte publizistische Leben der *Begriffsschrift* setzt 1952 ein mit dem Neudruck des von Peter Geach übersetzten ersten Teiles der Schrift, ohne „Vorwort“ und ohne abschließendes Logisches Quadrat. Die Übersetzung erscheint an erster Stelle des weltweit viel beachteten und hoch gelobten Bandes *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, mit dem Geach und Max Black einen entscheidenden Beitrag zur internationalen Rezeption des gesamten Werkes

33. Costescu (1980a).

34. Costescu (1980b), 178.

35. Costescu (1980c).

36. Dem zugrunde, im Ganzen ca. 250 Datensätze, liegen die Einträge aus der „Bibliographie zur *Begriffsschrift* (1879-2016)“, die in Wille (2018) erscheint.



liefern.³⁷ Der Band erscheint im Oxforder Verlag Basil Blackwell, bei dem bereits zwei Jahre zuvor die ebenfalls weltweit gefeierte bilinguale Ausgabe *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* in der Erstübersetzung von John Langshaw Austin erschienen war.³⁸ Der große Erfolg der Austin-Edition sowie der in der Zwischenzeit an verschiedenen Stellen vorgetragene Wunsch „we may at least look forward to a volume of selections which will include some of the articles he contributed to obscure periodicals“³⁹, ließen das Projekt des *Translations*-Bandes zu einer akademischen Notwendigkeit werden.

Für einen Großteil der inzwischen beachtlich gewachsenen Gemeinschaft der Logiker bot sich hier erstmals die Gelegenheit für eine selbstständige Lektüre eines ganzen Hauptteiles der *Begriffsschrift*. Im Umfang von immerhin knapp 20 Druckseiten konnte nun ein Werk studiert werden, das bis dato für die meisten sprachlich und für so gut wie alle physisch unzugänglich gewesen war. Obwohl das Werk damit nach fast einem Dreivierteljahrhundert überhaupt erstmalig eine auszugswise editorische Berücksichtigung fand, wurde sogleich mit großem Bedauern festgestellt, dass es nicht im Ganzen aufgenommen werden konnte. „The reviewer regrets especially that the whole of the *Begriffsschrift* could not have been included (ninety-four pages). But the translators were no doubt influenced against this, not

37. Ausführlich hierzu Wille (2016b), 45-54.

38. Ausführlich hierzu Wille (2016b), 33-45.

39. Kneale (1950), 397.

only by the semi-popular aim, but also by the typographical difficulty of setting Frege's two-dimensional formulas".⁴⁰ Mit der Bereitstellung des ersten Teils der *Begriffsschrift* sollte in Teilen der Mangel ihrer vormaligen Unverfügbarkeit behoben werden, doch verstärkt wurde vor allem der Wunsch nach einer vollständigen Ausgabe. Es sollte noch mehr als ein ganzes Jahrzehnt vergehen, bis dieses intellektuelle Bedürfnis befriedigt werden konnte. Bis dahin musste man sich mit dem Angebot des *Translations*-Bandes begnügen. 1960 erschien die zweite und 1980 die dritte Auflage.

Freges Mutterland hängt in dieser Entwicklung hinterher. Während die Neuerungen der symbolischen Logik an den führenden US-amerikanischen Universitäten bereits in den späten 1930er Jahre zum akademischen Standard gehören, kämpft sie hierzulande selbst ein Jahrzehnt später immer noch um die elementare Anerkennung. Damit verzögert sich nicht nur die deutschsprachige Rezeption von Freges gesamtem Werk, sondern auch die damit einhergehenden Editionsbemühungen. Noch in der Mitte der 1950er Jahre bedauert der große Logikhistoriker William Kneale an der exponierten Stelle eines Gesprächs im Dritten Programm der *British Broadcasting Corporation*: „Unfortunately, this little book has never been reprinted, so far as I know, and it is very scarce“.⁴¹ Doch mehr als die 20 Seiten im *Translations*-Band wollte man sich für den Augenblick nicht zutrauen, die Kosten für einen Neusatz der gesamten Schrift wären erheblich gewesen. Dabei hatte Alonzo Church bereits 1948 in seiner Besprechung der Geymonat-Edition *Aritmetica e logica* nicht nur die fehlende Verfügbarkeit der *Begriffsschrift* sowie der *Grundgesetze I & II* bemängelt, sondern auch zugleich darauf aufmerksam gemacht, dass aufgrund der bestechenden Satzqualität der Originalschriften ein erneutes Setzen gar nicht zwingend erforderlich ist. „Their reproduction by a photographic process would be not difficult, and very valuable“.⁴²

1964 ist es schließlich soweit, das Werk ist erstmals seit mehr als einem halben Jahrhundert wieder regulär im Buchhandel erhältlich. Alles begann 1960/61⁴³, als im Schweizer Fribourg der junge Nachwuchswissenschaftler Ignacio Angelelli gerade über den Anfängen seiner Dissertation sitzt, mit der Zusammenhänge zwischen Freges Werk und der Geschichte der klassischen Philosophie aufgezeigt werden sollen.⁴⁴ Sein Doktorvater, der namhafte Logikhistoriker Joseph Maria Bocheński, der bereits Jahre zuvor zu dem unmissverständlichen Urteil kam, dass „Frege

40. Church (1953), 92.

41. Kneale (1956), 32.

42. Church (1948).

43. Einen Teil der nachfolgenden Informationen verdanke ich Herrn Prof. Ignacio Angelelli (Austin/Texas), der sie mir in einer Mail vom 5. August 2016 mitgeteilt hat.

44. Vgl. Angelelli (1967b).

von allen Denkern der mathematischen Logik zweifellos der bedeutendste“⁴⁵ ist, tritt an ihn mit dem Anliegen einer Edition der *Begriffsschrift* heran. Angelelli, damals noch ohne jede Editionserfahrung, zögert in Anbetracht der gleichermaßen anspruchs- wie verantwortungsvollen Aufgabe, doch als Bocheńskis Doktorand kann er ihm diese Bitte nicht abschlagen. Er nimmt an und arbeitet anhand eines Mikrofilms, für dessen Erstellung das private Exemplar von Heinrich Scholz, mit all seinen persönlichen Anmerkungen und handschriftlichen Korrekturen zugrunde gelegt wurde. Parallel zur Arbeit an seiner Promotion über Frege bereitet Angelelli nunmehr einen kleinen Themenband mit weiteren Texten Freges zur *Begriffsschrift* vor, wobei die zentrale Schrift im reprographischen Nachdruck der abgefilmten Originalausgabe (allerdings und erstaunlicherweise mit neuen Zeichenfehlern, s.u.) publiziert wird.

„In diesem Band erscheint Freges „Begriffsschrift“ (1. Aufl. Halle 1879) erstmalig zusammen mit vier kleineren Aufsätzen, die systematisch oder chronologisch eng damit verbunden sind“.⁴⁶

Neben einem Besuch bei Hans Hermes in Münster ca. 1961, um im Nachlass von Scholz die bereits erfassten Anmerkungen verifizieren und gegebenenfalls weiteres Material sichten zu können, konsultierte Angelelli zudem den Nachlass von Edmund Husserl im Löwener Archiv, damit dessen persönliche Anmerkungen zur *Begriffsschrift* ebenfalls eine editorische Berücksichtigung im neuen Themenband finden. Der junge Doktorand ist sichtlich beeindruckt davon, wie gründlich Husserl dieses Werk bereits vor Jahrzehnten studiert hat. Aufbereitet als „Anhang I“⁴⁷ bzw. „Anhang II“⁴⁸ finden Scholz’ und Husserls Anmerkungen Eingang in den kritischen Apparat der Edition. Vervollständigt wird dieser Teil des Bandes durch „Textkritische Bemerkungen“⁴⁹, die im Besonderen jene Stellen der Schrift kenntlich machen, welche durch den Herausgeber „in verbesserter Form wiedergegeben“⁵⁰ wurden. Als erste vollständige deutschsprachige Ausgabe nach 1879 kommt *Begriffsschrift und andere Aufsätze* damit das offizielle Prädikat der Zweiten Auflage zu. Es ist Angelellis erste Publikation. Verlegt von der Georg Olms Verlagsbuchhandlung, erscheint zugleich eine Parallelausgabe bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft. Der photomechanische Nachdruck von Freges großen Monographien fand damit einen Abschluss, denn bereits drei Jahre zuvor war ebendort Freges *Die Grundlagen der Arithmetik* sowie 1962 die *Grundgesetze der Arithmetik* publiziert worden.

45. Bocheński (1956), 314.

46. Angelelli (1964a).

47. Scholz (1964).

48. Husserl (1964).

49. Angelelli (1964b).

50. Angelelli (1964b), 122.

Bis zum heutigen Tag wurde die *Begriffsschrift*-Ausgabe sieben Mal unverändert nachgedruckt: 1971, 1973, 1974, 1988, 1998, 2007 und 2014.

Diese ersten Erfahrungen Angelellis als Herausgeber der *Begriffsschrift* wurden sogleich in den weiteren Dienst der übergeordneten Editionsbestrebungen gestellt, denn nachdem nun alle drei großen Monographien Freges innerhalb von gerade einmal drei Jahren durch Nachdrucke wieder verfügbar gemacht wurden, wandte man sich umgehend den kleineren Veröffentlichungen zu. Im Auftrag der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft edierte Angelelli aufwendig die zu Freges Lebzeiten publizierten Aufsätze, inklusive der mathematischen Qualifikationsarbeiten sowie den seinerzeit selbstständig erschienenen Texten *Function und Begriff* und *Ueber die Zahlen des Herrn H. Schubert*. Mit der Veröffentlichung der *Kleinen Schriften* 1967⁵¹, die nicht zuletzt durch ihren professionellen Neusatz besticht, gelang es innerhalb von nur fünf Jahren, „das Programm eines Neudrucks aller Werke Freges – mit Ausnahme des unveröffentlichten Nachlasses – [zu] vervollständigen“.⁵² Der inzwischen promovierte Angelelli hatte damit innerhalb von wenigen Jahren einen entscheidenden Anteil daran, Freges Publikationen in seinem Mutterland wieder vollständig und im Fall der *Kleinen Schriften* in einer vorzüglichen Qualität zugänglich zu machen. Letzteres galt leider nicht für die Edition der *Begriffsschrift*.

Wie die zum Teil sinnentstellenden Zeichenfehler durch ein reprographisches Nachdruckverfahren zustande kommen konnten, ist bis heute nicht geklärt. Angelelli, der in der Herstellung einer geeigneten Druckvorlage dem erfahrenen Verlag schlicht vertraut hatte und keine nochmalige Prüfung vorsah, wurde in diesem Punkt vom Resultat erheblich enttäuscht. Noch Jahre danach bewegte und belastete ihn dieser Makel. Terrell Ward Bynum, der später selbst eine maßgebliche Ausgabe veröffentlichen sollte (s.u.) und der 1964 zu den wenigen Experten weltweit zählte, die über eine umfassende und philologisch präzise Textkenntnis verfügten, erstellte umgehend eine Errata-Liste, die in Zusammenarbeit mit Angelelli am exponierten Ort des *Notre Dame Journal of Formal Logic* veröffentlicht wurde. „Unfortunately, in the “reprographischer Nachdruck” some signs of the original edition (1879) have disappeared. The editor is grateful to Mr. T. W. Bynum for having pointed out these and other misprints which will be listed here“.⁵³ Freilich bestand die Hoffnung darin, bis zu einer Überarbeitung der Ausgabe durch den Verlag dem Leser ein Werkzeug an die Hand zu geben, damit die Corrigenda schnell, einfach und selbstständig übertragen werden konnten. Die in „Note on Frege’s *Begriffsschrift*“ systematisch erfassten Fehler, die umgehend als wichtiger

51. Frege (1967).

52. Angelelli (1967a), VII.

53. Angelelli/Bynum (1966), 369.

Hinweis zudem in den *Kleinen Schriften* einen erneuten Abdruck fanden⁵⁴ und die durch Benson Mates' unabhängige Errata-Liste im *Journal of Symbolic Logic*⁵⁵ bestätigt wurden, „should be corrected in a new edition“.⁵⁶ Dazu kam es nicht. In Anbetracht der Vielzahl der bisherigen Nachdrucke ist es ein bescheidenes Zeugnis für den Verlag, das Faktum selbst verschuldeter und durch Dritte umgehend kenntlich gemachter Fehler konsequent zu ignorieren.

3 „a permanent place in the logician's library“

Obwohl die weltweite Frege-Rezeption von Beginn an eine vornehmlich angelsächsische Angelegenheit war und die ersten literarisch manifesten Übersetzungsbemühungen von Geach zu den frühesten Editionsbemühungen der *Begriffsschrift* überhaupt gehören, überrascht es ein wenig, dass die erste vollständige nichtdeutsche Fassung des Werkes nun gerade nicht in englischer Sprache erschien. Bereits ein Jahr nach der Angelelli-Ausgabe und damit zwei Jahre vor der ersten englischen wurde unter dem Titel *Ideografia. Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico* eine italienische Übersetzung publiziert, angefertigt und mit Anmerkungen versehen von Corrado Mangione. Diese erste vollständige Übersetzung erschien unselbstständig in den von Mangione herausgegebenen und in ihrer Anlage von Ludovico Geymonat inspirierten Gesammelten Schriften Freges *Logica e aritmetica*, die bei Paolo Boringhieri in Turin verlegt wurden. Die Vorgeschichte dieser Ausgabe reicht mehr als zwei Jahrzehnte zurück, wenngleich Geymonats erster Editionsversuch für eine Frege-Textsammlung 1942/43 noch nicht zum Erfolg führte.⁵⁷ 1948 war ihm endlich Glück beschieden. In diesem Jahr verlegte er unter dem Titel *Aritmetica e logica* bei Giulio Einaudi in Turin eine kleine Werkauswahl von Frege in italienischer Übersetzung, wobei er bei der Auswahl der Texte und Textauszüge strikt darauf geachtet hat, dass sie weitgehend frei von formalen Darstellungen sind. Das erklärt, weshalb diese erste Frege-Edition überhaupt(!), die zeitlich deutlich vor den englischen und deutschen Anthologien erschien, vor allem *Die Grundlagen der Arithmetik*, „Über Sinn und Bedeutung“, Abschnitte aus „Ueber Begriff und Gegenstand“, einen Teil des „Vorwortes“ der Grundgesetze I sowie einen Auszug aus „Über das Trägheitsgesetz“ enthält. Dominant in dieser Ausgabe sind selbstverständlich Freges *Grundlagen*, weshalb *Aritmetica e logica* auch nicht als Frege-Anthologie im strengen Sinne

54. Angelelli (1967a), VII.

55. Mates (1967), 241f.

56. Angelelli/Bynum (1966), 369.

57. Vgl. Geymonat (1948), 12f.; ders. (1965), 9.

verstanden werden sollte, sondern eher als eine italienische Ausgabe der *Grundlagen*, die im Stile eines kleinen, aber durchaus erlesenen literarischen Streifzuges durch Auszüge aus Aufsätzen editorisch abgerundet wurde. An der Bedeutsamkeit dieser kleinen Edition, die zum Vorbild der späteren *Scritti raccolti* werden sollte, ändert das überhaupt nichts. Obgleich international kaum beachtet, zählt Geymonats Ausgabe auch heute noch zu den frühen Glanzlichtern der international einsetzenden Fregeforschung. „In reviving and making available these works of Frege, and in his explanatory notes on them, Geymonat has performed an important service, which—in spite of language barriers—may by no means be confined to Italy.“⁵⁸ Besonderen Erfolg hatte der Band gleichwohl in Italien, wo er zu einer Quelle der Inspiration für andere wurde, mit der die italienische Fregeforschung ihren Anfang nahm.⁵⁹

Warum Geymonat seinerzeit auf die Aufnahme von wesentlich formalen Schriften verzichtet hatte, erfahren wir schließlich in seinem „Vorwort“ zum Mangione-Band 1965.⁶⁰ Während in den späten 1940er Jahren der Logikunterricht an den italienischen Universitäten noch nicht über den technischen Standard verfügte, um die zeitgenössischen Klassiker der modernen formalen Logik auch im akademischen Studium problemlos behandeln zu können, änderte sich dies grundlegend in den nachfolgenden eineinhalb Jahrzehnten. Die umfangreichere Berücksichtigung technisch anspruchsvoller Texte Freges war nunmehr möglich geworden, „because of the completely changed situation among Italian students since 1948, who have become familiar with modern publications in logic and no longer have difficulty (even the philosophers) with varied technical symbolisms“⁶¹ Mangione nutzte diese neuen Möglichkeiten umfassend und konnte damit auch Alonzo Churchs 17 Jahre zuvor geäußertem Wunsch entsprechen, die *Begriffsschrift* im Rahmen einer Turiner Werkauswahl thematisch zu erfassen.⁶²

Auf mehr als 600 Seiten vereint *Logica e aritmetica* nicht nur den gesamten (revidierten) Bestand der Ausgabe seines Lehrers, sondern umfasst darüber hinaus elf weitere Arbeiten Freges in italienischer Übersetzung, wobei zwei der veröffentlichten Werke sogar aus dem bis dahin unveröffentlichten Nachlass stammen. Auch wenn der Leser an anderer Stelle „must be on guard against typographical errors“⁶³, so repräsentiert die editorische Berücksichtigung der *Ideografia* zweifelsohne die bedeutsamste Erweiterung dieses Bandes. Mit dem Abdruck der Übersetzung verfügt die Edition neben den *I fondamenti dell'aritmetica. Una ricerca logico-matematica*

58. Church (1948).

59. Vgl. Vinassa de Regny (1985), 135.

60. Geymonat (1965), 9.

61. Geymonat zit. n. Church (1973), 533.

62. Church (1948).

63. Church (1973), 534.

sul concetto di numero nicht nur über eine weitere große Monographie Freges, sondern über die weltweit erste vollständige Übersetzung der *Begriffsschrift*. „The most valuable additions for Italian readers are the complete translation of Frege’s *Begriffsschrift* and of the famous Nachwort to the second volume of *Grundgesetze*“.⁶⁴ Neben *Aritmetica e logica* sichert sich damit auch *Logica e aritmetica* einen besonderen Platz unter den Editionen in der Fregeforschung.

1967 liegt die erste vollständige englische Fassung in der Übersetzung von Stefan Bauer-Mengelberg vor, die vom Frege-Experten Alonzo Church als exzellent beurteilt wird.⁶⁵ Sie erscheint in Jean van Heijenoorts Anthologie *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, deren Potenzial als Klassiker umgehend erkannt wurde⁶⁶ und die für die mathematische Grundlagenforschung zu dem Quellenbuch schlechthin avancierte. „It is difficult to describe this book without praising it“.⁶⁷ Die Geschichte des Bandes⁶⁸ reicht bis in die späten 1950er Jahre zurück, als die Harvard University Press an Willard Van Orman Quine herantrat mit der Bitte, jemanden für die Edition eines Quellenbandes zur Logik für die „History of Science Series“ zu empfehlen. Über die Vermittlung von Burton Dreben wurde van Heijenoort ins Spiel gebracht, der seit 1957 mit leidenschaftlichem Eifer die Literatur zur modernen formalen Logik systematisch erfasste und sichtete. Unmittelbar nachdem sich Quine und van Heijenoort 1959 am Harvard getroffen hatten, um über das Projekt zu sprechen, arrangierte Quine ein Treffen mit dem Verlag und der Band wurde in Angriff genommen.

Es sollten für den Herausgeber arbeitsintensive sieben Jahre vergehen, bis das Manuskript allen editorischen Wünschen entsprach. Allein die, in ihrer Sorgfalt umgehend wertgeschätzte⁶⁹ Übersetzung der in sieben verschiedenen Sprachen (Deutsch, Englisch, Französisch, Niederländisch, Italienisch, Latein, Russisch) vorliegenden 46 Dokumente in ein einheitliches Englisch, die zu einem großen Teil ebenfalls von Bauer-Mengelberg vollzogen wurde, nahm einen unglaublich großen Raum ein. Die herausragende Stellung der *Begriffsschrift* zeigt der Herausgeber sowohl über den Haupt- (*Frege*) wie auch den Untertitel (*1879*) an. Ein Quellenbuch solchen Zuschnitts zur mathematischen Logik kann nur sinnvoll mit eben diesem Werk eröffnet werden, denn „A great epoch in the history of logic did open in 1879, when Gottlob Frege’s *Begriffsschrift* was published“.⁷⁰ Zweifelsohne hatte das 19. Jahrhundert eine Vielzahl exzellenter moderner Logiker hervorgebracht,

64. Church (1973), 533.

65. Church (1972). Ausgenommen hiervon ist die Übersetzung des Untertitels, s.u.

66. Resnik (1968).

67. H. P. K. (1967), 168.

68. Siehe hierzu Feferman (1993), 274-282.

69. Etwa Bernays (1970), 109.

70. van Heijenoort (1967b), vi.

„aber keiner von ihnen wußte so viele, oft bahnbrechende Neuheiten in so vollkommener Form auf einmal hervorzubringen“.⁷¹ Im Fall der *Begriffsschrift* sprechen wir eben nicht über ein singuläres bedeutsames Novum, sondern über eine brillante Komposition bestehend aus vielen verschiedenen Neuerungen, von denen jede für sich „would suffice to secure the book a permanent place in the logician’s library“.⁷² Unterstrichen wurde diese besondere Form der Wertschätzung durch die editorische Entscheidung, trotz der Vielzahl der abgedruckten Quellen sowie dem ungleich größeren Fundus potentieller Textkandidaten mit der *Begriffsschrift* lediglich ein einziges Buch und dies auch noch vollständig aufzunehmen. Dass damit bereits 1/8 des Gesamtumfangs des Bandes für Frege vorgesehen werden musste, war für van Heijenoort kaum der Rede wert, denn für ihn ist die *Begriffsschrift*

„perhaps the most important single work ever written in logic“.⁷³

Für die beiden Entscheidungen, den Band mit der *Begriffsschrift* zu eröffnen und diese in Übersetzung vollständig abzudrucken, gab es nicht nur begeisterten Zuspruch. Einzelne wenige kritisierten den Zuschnitt und die Gewichtung der Auswahl⁷⁴, fehlte ihnen doch vor allem die englische Algebra der Logik. Diese Kritik verkannte jedoch den zugrundeliegenden Begriff von „mathematischer Logik“, dessen semantische Normierung von der algebraischen Logik schlicht nicht erfüllt wurde. Durch die Architektur von van Heijenoorts Band wurde erstmals publizistisch zementiert, was problemgeschichtlich inzwischen sowieso anerkannt war: die moderne formale Logik beginnt mit Frege im Jahr 1879. Unter sukzessiver Berücksichtigung von Fehlerkorrekturen wurde *From Frege to Gödel* mehrfach nachgedruckt, u.a. 1971, 1976, 2000 und 2002. Um die Bedeutsamkeit nochmals zu unterstreichen, wird 1970 die Bauer-Mengelberg-Übersetzung in einer leicht revidierten Fassung erneut von Jean van Heijenoort ediert, dieses Mal in einem, einzig zwei epochale Werke umfassenden Band mit dem Titel *Frege and Gödel. Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*.

Während *From Frege to Gödel* den Standard für eine internationale Anthologie repräsentiert, erschien 1971 erstmals ein deutschsprachiges Pendant, das sich gleichermaßen als ein unverzichtbares Werkzeug erweisen sollte. Die von Karel Berka und Lothar Kreiser ausgewählten sowie edierten *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik* wurden als kommentierter Quellenband nicht nur für die Forschung, sondern auch für den akademischen Unterricht entworfen und bieten „eine echte Möglichkeit der historischen Ergänzung und sachlichen

71. Bocheński (1956), 313f.

72. van Heijenoort (1967a), 1.

73. van Heijenoort (1967a), 1.

74. Z. B. Moore (1977), 469.

Vertiefung des ein- oder mehrjährigen Logikstudiums“.⁷⁵ Der Band berücksichtigt selbstverständlich auch Frege. Während die erste sowie die zweite Auflage von 1973 im Kapitel „III Klassische Logik“ einen lediglich um den Teil III gekürzten Neudruck der *Begriffsschrift* enthält (neben einem Nachdruck von *Function und Begriff* sowie „Anwendungen der Begriffsschrift“), wurde in der dritten sowie vierten Auflage der *Logik-Texte* aus dem Jahr 1983 bzw. 1986 zudem auf den Wiederabdruck des Teils II verzichtet. Dafür wurde für das Kapitel „XII Syntax – Semantik“ zusätzlich Freges „Über Sinn und Bedeutung“ aufgenommen, womit dem Anspruch einer differenzierteren Werkauswahl entsprochen werden sollte.

1972 erschien schließlich mit *Conceptual Notation and Related Articles* der bis heute umfangreichste Themenband zur *Begriffsschrift*. Die Ursprünge dieses Bandes reichen bis in das Jahr 1962 und damit in die Zeit vor der van Heijenoort-Ausgabe zurück, als Bynum an der Universität von Delaware über die Vermittlung von Bernard Baumrin erstmals mit Freges Philosophie in Kontakt kam.⁷⁶ Erstaunt über das Fehlen einer vollständigen englischsprachigen Ausgabe in Anbetracht des revolutionären Charakters der Schrift⁷⁷ arbeitete Terrell Ward Bynum bis zur Mitte der 1960er Jahre an einer ersten Fassung der Übersetzung sowie der Begleittexte, nachdem er sich die *Begriffsschrift* auf Mikrofilm organisiert hatte.⁷⁸ Da es ihm von Anfang an nicht nur um die Übersetzung der zentralen Texte ging, sondern auch um deren angemessene Einbettung in Freges akademische Biographie, reiste er mit einem Forschungsstipendium im Sommer 1965 nach Europa, um im Frege Archiv (Münster) bei Hans Hermes, bei Ignacio Angelelli in Fribourg (Schweiz), bei Rudolf Carnap in London sowie bei Bertrand Russell eine Vielzahl von Informationen zusammenzutragen, die zu dieser Zeit so gut wie unbekannt waren.⁷⁹ Das war wahrhaft „a labor of love“.⁸⁰

Da Anspruch und Ausrichtung des Projektes auch nach Veröffentlichung der Übersetzung von Stefan Bauer-Mengelberg nicht überholt waren, wenngleich sich Bynum darüber enttäuscht zeigte, nicht die erste englischsprachige Übersetzung auf den Markt gebracht zu haben⁸¹, legte er schließlich Anfang der 1970er Jahre eine eigene Übersetzung des gesamten Werkes vor, die vervollständigt wurde unter anderem durch die mit abgedruckten Übersetzungen diverser kleiner Begleittexte Freges sowie einzelner Rezensionen zur *Begriffsschrift*. Eine erlesene kleine Materialsammlung, die jedoch nicht durchweg wertgeschätzt wurde. Manch vereinzelte

75. Berka/Kreiser (1971), XI.

76. Vgl. Bynum (1972a), vii/viii.

77. Vgl. Bynum (1972a), vii.

78. Vgl. Bynum (1972a), vii.

79. Vgl. Bynum (1972a), vii.

80. Corcoran/Levin (1973), 455.

81. Vgl. Bynum (1972a), viif.

Stimme zweifelte am Erfordernis des Bandes mit Verweis auf die prinzipielle englischsprachige Verfügbarkeit aller abgedruckten Schriften an anderer Stelle. „Bynum’s editorial contributions are not really sufficient to justify this costly enterprise“.⁸² Bei Beurteilungen dieser Form wurden indes diverse Qualitätsmerkmale außer Acht gelassen, die dem Band einen distinguierten Charakter verliehen. So besticht Bynums Übersetzungstätigkeit durch ihren dezidiert kritischen Charakter. Die Publikationsfassung umfasst einen kritischen Fußnotenapparat, der die terminologisch neuralgischen Stellen begleitet und unter Rückgriff auf die bereits vorliegenden Übersetzungsvorschläge sowie zum Teil unter Anführung des deutschsprachigen Originals Auskunft über die erfolgte Ausdruckswahl erteilt.

Aus zwei weiteren Gründen wird mit dem Erscheinen der *Conceptual Notation* ein neuer Standard in der Fregeforschung gesetzt. Bynum eröffnet den Band mit einer bereits mehr als 50 Seiten umfassenden intellektuellen Biographie zu Frege⁸³ – der weltweit ersten überhaupt. Diese erste umfassendere Spurensuche führte freilich noch nicht zur feinsten biographischen Auslese, die erst in den nachfolgenden Jahrzehnten Stück für Stück gewonnen werden sollte. Doch die Kritik, Frege würde in Bynums Darstellung „not begin to come alive“⁸⁴, ist fehl am Platz, galt es doch überhaupt erst einmal, die verstreut liegenden biographischen Informationen zusammenzutragen. Beschlossen wird der Band indes mit einem weiteren Novum, der ersten umfassenden, bis in das Jahr 1966 reichenden Frege-Bibliographie⁸⁵, die Bynum zusammen mit seiner Frau Aline W. Bynum erstellt hat und die nicht zuletzt zum Begriffsschrift-Thema einen beeindruckenden Detailreichtum birgt. „All this comprises an important, exciting and fresh contribution to the field“.⁸⁶ Ursprünglich als wertschätzende Bewertung zum Publikationszeitpunkt gedacht, erwies sich im Besonderen ein Urteil als von besonderer Beständigkeit: „This volume is the most comprehensive assemblage of material on Frege’s *Begriffsschrift* in existence“.⁸⁷ Daran hat sich nicht nur seit viereinhalb Jahrzehnten nichts geändert, sondern dies wird auch noch auf absehbare Zeit so bleiben. 2002 erschien das Buch in einem unveränderten Nachdruck.

82. Haack (1976), 63.

83. Bynum (1972b).

84. Dudman (1974).

85. Bynum/Bynum (1972).

86. Corcoran/Levin (1973), 454.

87. Corcoran/Levin (1973), 454.

4 „left untranslated throughout“

In den frühen 1970ern konnte also bereits auf eine beachtliche editorische Betriebsamkeit im Umgang mit dem Werk zurückgeblickt werden, die innerhalb weniger Jahre nicht nur beeindruckende Übersetzungen hervorgebracht hatte, sondern zudem eine umfassende, geradewegs exklusive Berücksichtigung in den beiden wegweisenden Anthologien sicherstellte. Name und Programm der *Begriffsschrift* hatten sich als prominenter Topos der Logik international etabliert. In dem, zu eben dieser Zeit fertiggestellten Lexikon *Логические словарь*, dem ab 1978 auch auf Deutsch verfügbaren *Wörterbuch der Logik* des sowjetischen Logikers Nikolaj Ivanovič Kondakov, sucht man einen gleichnamigen Eintrag dennoch vergeblich. Das mit ca. 1500 Artikeln überaus umfangreiche Lexikon hat den Titel wahrscheinlich schlicht vergessen und nicht einfach aus Platzgründen ausgespart. So kam es, dass Joseph Maria Bocheński in einer Besprechung des Werks mit der Verwunderung einer gleichermaßen selbstverständlichen wie unerfüllt gebliebenen Erwartung feststellen konnte, dass der Leser „may still wonder why there is no entry for the *Principia Mathematica* or for the *Begriffsschrift* [sic]“. ⁸⁸ Immerhin war die Gründungsschrift damit in guter Gesellschaft. Bocheńskis sanfter Tadel verfehlte seine Wirkung dennoch nicht, zumindest bemühten sich die Übersetzer um eine behutsame Nachbesserung. Zwar war es ausgeschlossen, im Rahmen einer reinen Übersetzungstätigkeit das Textkorpus substantiell zu erweitern, doch die kurze Erwähnung des Werkes im umfänglichen Artikel „математическая логика“ eröffnete immerhin die Möglichkeit, einen internen Verweis zu platzieren. So behalf man sich stillschweigend mit der konservativen Erweiterung, die deutsche Ausgabe um das Stichwort „Begriffsschrift“ zu erweitern, um sogleich und einzig auf die Ausführungen im Eintrag „Logik, mathematische“ zu verweisen. ⁸⁹ Inhaltlich mehr stand nicht geschrieben, aber für einen Eintrag war nunmehr gesorgt.

Michael Beaney legte schließlich für *The Frege Reader* 1997 eine weitere englischsprachige Variation für das „Vorwort“ sowie den Teil I (mit dem abschließenden Logischen Quadrat) auf. Damit erschienen innerhalb von viereinhalb Jahrzehnten vier nicht deckungsgleiche englischsprachige Übersetzungen. Hierin drückt sich aus, was in der Fregeforschung allgemein gilt. Einen gemeinhin geteilten englischsprachigen Kanon für Freges Terminologie gibt es nicht. Das gilt zwar vor allem für die Kernbegriffe von Freges Semantik, doch auch im Falle der *Begriffsschrift* verzichteten (bis auf Bynum) alle anderen Übersetzer auf eine Wiedergabe des Haupttitels in der englischen Sprache. In den Glossaren zu Freges Terminologie lautet es häufiger:

88. Bocheński (1974), 138.

89. Kondakov (1971), 87.

„Begriffsschrift [left untranslated throughout]“.⁹⁰ Dies sollte nicht überraschen. Die Terminologiegeschichte des Ausdrucks gleicht nicht gerade der Historie eines seit seinen Anfängen streng normierten wissenschaftlichen Begriffes.⁹¹ Wahrscheinlich als unmittelbare Übersetzung von „Ideographie“ im Kontext der frühen Leibniz-Literatur wurde der Ausdruck wohl erstmals von Wilhelm von Humboldt 1824 für eine Begriffe bezeichnende Figurenschrift gebraucht. Schließlich ist es Adolf Trendelenburgs Verwendung des Ausdrucks für den Leibniz-Terminus *lingua characteristic* (1856, 1867 resp.), die Frege zur Adaption inspiriert.

Von der kohärenten semantischen Biographie eines Begriffs sollte also besser nicht gesprochen werden, was jedoch die mannigfaltigen Bestrebungen in den Übersetzungsversuchen verständlich werden lässt. Philip Jourdain traf jedenfalls eine umsichtige Entscheidung, als er 1912 und damit als einer der ersten überhaupt den Eigennamen unübersetzt ließ und einzig den prädikativen Gebrauch mit „ideography“⁹² wiedergab. Seitdem hat sich eine wahre Vielfalt von Vorschlägen eingestellt. Während John Langshaw Austin aus Anlass seiner Erstübersetzung der *Grundlagen der Arithmetik* die Bezeichnung „concept writing“⁹³ wählt, sieht Peter Geach zwei Jahre später im Rahmen der Übersetzung des ersten Teils der *Begriffsschrift* „symbolic language“⁹⁴ für den prädikativen Gebrauch vor. Dieser Übersetzungsvorschlag scheint ihn selbst nicht dauerhaft zufriedengestellt zu haben, denn ein reichliches Jahrzehnt später spricht er sich unmissverständlich für „ideography“ aus, während er zugleich bedauert⁹⁵, dass sich David Pears und Brian McGuinness in ihrer Neuübersetzung des *Tractatus* für „conceptual notation“⁹⁶ entschieden haben. Im *Cambridge Dictionary of Philosophy* findet sich der Eigenname frei übersetzt mit *Concept-notation* wieder⁹⁷ und in der Übersetzung der *Nachgelassenen Schriften* treffen wir auf den Ausdruck „concept-script“.⁹⁸ Der Übersetzer des *Wissenschaftlichen Briefwechsels* entschied sich indes, Bynum folgend, für „conceptual notation“.⁹⁹ Während es vor allem die beiden letztgenannten Vorschläge zu einer respektablen Verbreitung geschafft haben, sollte der Ausdruck „Begriffsschrift“ indes nicht mit „Idea-Writing“¹⁰⁰ wiedergegeben werden. Der philosophisch hoch kontaminierte lateinische Ausdruck „idea“ hatte vor allem in der englischen

90. Beaney (1997), xiii.

91. Die nachfolgenden Punkte aus der Terminologiegeschichte stammen von Thiel (1995), 20; (2005²), 391.

92. Jourdain (1912), 275 u.a.

93. Frege (1950), § 91.

94. Frege (1952), 3/4.

95. Geach (1963), 264.

96. Wittgenstein (1961), 3.325 u.a.

97. Ricketts (1995), 282.

98. Long/White (1979), VII.

99. Kaal (1980).

100. Nidditch (1962), 62.

Philosophie der Neuzeit für ordentlich Verwirrung gesorgt, weil sein angelsächsisches Pendant sprachlich ambig nicht sauber zwischen „Vorstellungen“ im Sinne mentaler Repräsentationen und „Ideen“ im Sinne semantisch normierter Begriffe zu unterscheiden gestattet. Es hatte Generationen gebraucht, bis für „Begriff“ nicht mehr „idea“, sondern „concept“ die standardisierte Bezeichnung darstellte. Peter Nidditchs Übersetzungsvorschlag, der zudem für den Eigennamen vorgesehen war, fällt hinter das Erreichte zurück. Die meisten Übersetzer des Werkes waren also gut beraten, den Haupttitel in Anbetracht der nicht zuletzt durch Zufälle geprägten Terminologiegeschichte im deutschen Original zu belassen.

Dafür beeindruckten die Variationen des Untertitels umso mehr. Während die *Begriffsschrift* bei Geach „a formalized Language of pure Thought modelled upon the Language of Arithmetic“ ist, übersetzt dies Bauer-Mengelberg durch „a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought“, während Bynum die Erläuterung des Haupttitels mit „A Formula Language of Pure Thought Modelled upon the Formula Language of Arithmetic“ wiedergibt. Beaney entscheidet sich schließlich für „A formula language of pure thought modelled on that of arithmetic“. Um die üppige Vielfalt der Untertitelvariationen vollends unübersichtlich zu gestalten, sei zudem an Nidditchs Versuch erinnert, der keineswegs trivialen grammatischen Konstruktion durch den wenig überzeugenden Vorschlag „a sign language, copying arithmetic, of thought as such“¹⁰¹ Herr zu werden. In der Sache meldete sich schließlich auch Alonzo Church zu Wort, der sich bereits in den frühen 1940er Jahren als einer der ersten überhaupt mit Fragen einer kritischen Übersetzung Fregescher Termini befasst hat und der in der Auseinandersetzung mit Bauer-Mengelbergs Version zu dem Ergebnis gelangt: „The translation of the subtitle of Frege’s *Begriffsschrift* is obviously awkward. Indeed the German is not easy to translate into idiomatic English if both ambiguity and prolixity are to be avoided. But the reviewer suggests ‘A formula language for pure thought, modeled upon that for arithmetic.’“¹⁰²

Neben dem Englischen gibt es wahrscheinlich lediglich eine weitere Sprache, die mit mehr als einer vollständigen Übersetzung aufwarten kann: das Russische. Obgleich Freges Werk von jeglichem Ideologieverdacht freizusprechen ist, so war er doch weder Materialist noch ein dialektischer Logiker, dafür aber ein bürgerlicher Philosoph im deutschen Kaiserreich, was ihn nicht gerade für einen curricularen Standard in der sowjetischen Philosophie qualifizierte. Es überrascht daher kaum, dass umfängliche Übersetzungsbemühungen oder editorische Bestrebungen im russischen Sprachraum lange haben auf sich warten lassen. Publizistisch wirksam setzen sie im Fall der *Begriffsschrift* erst 1987 ein und vielleicht ist es ein

101. Nidditch (1962), 62.

102. Church (1972).

hoffnungsvoller akademischer Ausdruck von Glasnost und Perestroika, dass die erste¹⁰³ russische Übersetzung des Werkes noch zu Zeiten der Sowjetunion erscheint. Allerdings entstand sie nicht im intellektuellen Zentrum des Riesenreiches, sondern gut 2.000 Kilometer von diesem entfernt in Tiflis, der Hauptstadt der damaligen Georgischen Sozialistischen Sowjetrepublik. Der von Z. N. Mikeladze herausgegebene Band *Методы логических исследований (Metody logičeskich issledovanij)* ist eigentlich eine georgische Gemeinschaftsproduktion, denn neun der zehn abgedruckten Texte stammen von georgischen Wissenschaftlern, die sich in ihren Beiträgen mit aktuellen semantischen und algebraischen Problemen der zeitgenössischen formalen Logik sowie ihrer Geschichte befassen.

Beschlossen wird die Textsammlung allerdings durch ein beeindruckendes Bekenntnis. Als zehnten Text findet der Leser die *Шрифт понятия (Schrift ponjatij)* vor, die erste russische und sogleich vollständige Übersetzung der *Begriffsschrift*, angefertigt von G. K. Dzhaparidze und L. I. Mtschedlischwili, die mit dem ersten Nachdruck der zweiten Auflage von 1971 in der Ausgabe der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft gearbeitet haben.¹⁰⁴ Obgleich die Formelbestände der Teile II und III sowohl handschriftlich als auch (wahrscheinlich aus Umfangsgründen sowie der besseren Lesbarkeit) in moderner Notation eingetragen wurden und damit – nüchtern erwogen – mehr als nur eine editorische Unzulänglichkeit vorliegt, weil darüber hinaus im Vollzug der Umschrift manche Fehler im Original stillschweigend ausgebessert wurden, so besitzt doch gerade diese Ausgabe eine überaus rührende Note. Die georgischen Wissenschaftler müssen erheblich improvisieren, aber sie setzen alles daran, um den Text im Russischen zugänglich zu machen, denn es ist die überragende Bedeutsamkeit der Schrift, die für sie ein nicht verhandelbares Übersetzungs- und Publikationserfordernis darstellt. Dass das Resultat dabei nicht die Krone der editorischen Schöpfung darstellt, ist zugestanden, aber in Anbetracht des sozio-akademischen Kontextes gradewegs zu vernachlässigen. Bedenkt man zudem, dass die Übersetzer auf keinen terminologischen Kanon zurückgreifen konnten, den es in Ermangelung einer publizistisch nachweisbaren *Begriffsschrift*-Rezeption schlicht nicht gab, so muss die Achtung gegenüber ihrer Leistung nur wachsen. Ohne die Substanz einer Übersetzungstradition, dafür aber konfrontiert mit den Übertragungsherausforderungen ins Kyrillische gelang einer kleinen, semi-professionellen und keineswegs institutionalisierten Fregeforschung mit der *Шрифт понятия* des Готтлоб Фреге etwas ganz Besonderes. Dafür verdienen Mikeladze, Dzhaparidze und Mtschedlischwili auch heute noch unsere große Anerkennung.

Es ist daher äußerst bedauerlich, dass Boris Birjukov in den, zusammen mit Zi-

103. Mikeladze (ed.), [Titel].

104. Vgl. Bezhanschwili/Mtschedlischwili (1987a), 86.

naida Kuzitschewa verfassten Erläuterungen zu seiner 2000 erschienenen Neuübersetzung *Исчисленные понятия* (*Istschislenie ponjatij*) bei lediglich einer, zudem äußerst randständigen Gelegenheit auf die 13 Jahre ältere Arbeit der Georgier verweist. Die Erstübersetzung findet dabei sogar nur eine knappe, parasitäre Erwähnung, denn kritisiert wird ein marginales Interpretationsdetail aus den von M. N. Bezhanischwili und Mtschedlischwili angefertigten Anmerkungen.¹⁰⁵ Dzhaparidzes und Mtschedlischwilis Übersetzung wird damit degradiert zu einem bloßen bibliographischen Anhängsel, das man nur all zu leicht überliest. In dem wesentlichen Eröffnungsabschnitt des neuen Kommentars, in dem die Wahl der favorisierten Übersetzungskonvention *Исчисленные понятия* stattfindet¹⁰⁶, sucht man kritische Anmerkungen zum bereits bestehenden Vorschlag *Шрифт понятия* ebenso vergebens, wie auch der gesamte Band keine Silbe darüber verliert, weshalb eine erneute Übersetzung – deren Zweckmäßigkeit hier gar nicht in Zweifel gezogen wird – erforderlich wurde. Birjukov kannte also die Arbeit der Georgier, aber sie fand dennoch keine gebührende Berücksichtigung. In einer ansonsten editionskritisch tadellosen Arbeit der einzige Makel, der jedoch später leider nochmals unterstrichen wurde durch seinen Artikel „Исчисленные понятия“ für I. T. Kasavins Enzyklopädie der epistemologischen und philosophischen Begriffe. Dieser Eintrag zur Begriffsschrift weist im Textverlauf zwar umgehend auf die eigene Übersetzung hin¹⁰⁷, die Arbeit der Georgier findet indes nicht einmal im bibliographischen Anhang zum Enzyklopädieartikel Erwähnung. Die Gründe hierfür bleiben auch in diesem Fall im Dunklen.

Birjukovs Ausgabe der *Begriffsschrift*, die zweite vollständige russische, ist Bestandteil der von ihm herausgegebenen voluminösen Anthologie *Готтлоб Фреге. Логика и логическая семантика* (*Gottlob Frege. Logika i logičeskaja semantika*), die Werke Freges zur Logik und Semantik enthält und die editorisch freilich auf einem ganz anderen Niveau als ihr Vorgänger operiert. Nach Auskunft Birjukovs sollte diese Textsammlung den ersten Band einer umfangreicheren russischen Ausgabe von Freges Werken darstellen. Dessen Beiträge zur mathematischen Grundlagenforschung und Mathematikphilosophie, einzelne nachgelassene Schriften sowie ausgewählte Teile des Briefwechsels sollten indes in weiteren, jedoch nie fertiggestellten Bänden publiziert werden.¹⁰⁸ Birjukov erstellte seine Übersetzung auf der Grundlage des 1977 bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft erschienenen Nachdrucks der zweiten Auflage¹⁰⁹, einer Ausgabe, die von der Übersetzunggrundlage Dzhaparidzes und Mtschedlischwilis ununterscheidbar ist.

105. Vgl. Birjukov/Kuzitschewa (2000), 387.

106. Birjukov/Kuzitschewa (2000), 379f.

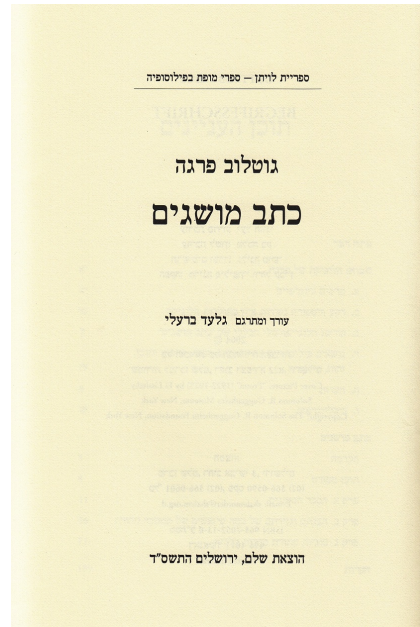
107. Vgl. Birjukov (2009), 343.

108. Vgl. Birjukov (2000), 5.

109. Vgl. Birjukov/Kuzitschewa (2000), 379.

In den 40 Jahren seit den frühen 1970er Jahren erschienen darüber hinaus mindestens 12 weitere (Teil)Übersetzungen. 1972 legt Hugo Padilla eine spanische Fassung vor. Im selben Jahr erscheint zudem eine von Arata Ishimoto angefertigte japanische Übersetzung der ersten Teile der Schrift. Es folgt Ándrás Máté 1980 mit einer um den Teil III gekürzten und mit moderner Notation versehenen Übersetzung ins Ungarische. Im Rahmen einer Anthologie zur Logik und den Grundlagen der Mathematik erschien 1992 immerhin das „Vorwort“ sowie der erste Teil des Werkes in französischer Übersetzung durch Mohammed Allal Sinaceur. 1999 legt sowohl Tatsuo Fujimura eine vollständige japanische wie auch Corine Besson eine vollständige französische Ausgabe vor. Vor allem die *Idéographie*, die als Übersetzungsprojekt aus einem gleichnamigen, von Jonathan Barnes veranstalteten Seminar an der Universität Genf im akademischen Jahr 1994/95 hervorging¹¹⁰, „is a fine piece of work“.¹¹¹ Die angesprochene seminaristische Konstellation mag auch verstehen helfen, weshalb in der französischen Edition ein fast 90seitiges Nachwort von Barnes zu finden ist¹¹², welches sich als Begleitlektüre bestens eignet.

2004 erschien neben einer mazedonischen Fassung von Jiří Fiala zudem eine hebräische Übersetzung von Gilead Bar-Elli.¹¹³ Schließlich folgte 2012 eine tschechische Version von Iva Fidančeva. Für die große Gemeinde der brasilianischen Logiker und Philosophen erschien immerhin 1978 im Rahmen einer kleinen Werkauswahl eine von Paulo Alcoforado angefertigte portugiesische Übersetzung des „Vorwortes“, die 30 Jahre später abgelöst bzw. ergänzt wurde durch eine von Fernando Raul Neto bilingual edierte Neuübersetzung desselben inklusive des Inhaltsverzeichnisses mit dem Ziel „to bring to the brazilians the translation of the preface“.¹¹⁴ Mit *L'alfabeto del pensiero* erschien 2015 sogar noch eine von Nicola Vassallo edierte Kompilation von drei Begriffsschrift-Texten, die sich am Vorbild der Olms-Ausgabe orientiert, um in einer



110. Vgl. Besson (1999a), VIII.

111. Engel (2002), 410.

112. Barnes (1999).

113. Die Abbildung zeigt das Titelblatt dieser Ausgabe.

114. Neto (2008), 123.

durch Nicola Zippel angefertigten Neuübersetzung die in italienischer Sprache schwer zugänglichen Texte wieder verfügbar zu machen.¹¹⁵ „Vorwort“ sowie der erste Teil der *Begriffsschrift* gehören dazu. Es scheint fast so, als ob ihre große Zeit nunmehr gekommen ist. Endlich.

Literatur

(Teil)Ausgaben und Übersetzungen der *Begriffsschrift*

- Frege, Gottlob (BS): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle ^A/S. 1879.
- (1952): *BEGRIFFSSCHRIFT, a formalized Language of pure Thought modeled upon the Language of Arithmetic* (Engl. Übers. v. P. T. Geach), Neudruck von Teil I ohne „Vorwort“ und ohne das abschließende Logische Quadrat in P. T. Geach/M. Black (ed.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Basil Blackwell, Oxford; Parallelausgabe Philosophical Library, New York, 1-20; zwei weitere Auflagen: 1960² (rep. 1966), 1980³.
- (1964): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Reprographischer Nachdruck in ders., *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen ed. v. I. Angelelli), Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim; Parallelausgabe bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft, Darmstadt; verschiedene Nachdrucke bei Georg Olms Verlag, Hildesheim/Zürich/New York: 1971, 1973, 1974, 1988, 1998, 2007, 2014.
- (1965): *Ideografia. Un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico* (It. Übers. v. C. Mangione), Neudruck ohne „Inhalt“ und mit Anmerkungen versehen in C. Mangione (ed.), *Gottlob Frege. Logica e aritmetica*, Paolo Boringhieri, Turin, 103-206.
- (1967): *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought* (Engl. Übers. v. S. Bauer-Mengelberg), in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard UP, Cambridge (Mass.), 5-82; verschiedene Nachdrucke ebendort: u.a. 1971, 1976, 2000, 2002.
- (1970): *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought* (Engl. Übers. v. S. Bauer-Mengelberg), in J. van Heijenoort

115. Vgl. Vassallo (2015), 5.

- (ed.), *Frege and Gödel. Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Harvard UP, Cambridge (Mass.), 5-82. [Frege (1970) zugl. rev. Ausg. v. Frege (1967)].
- (1971): *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (gekürzter Nachdruck), um Teil III gekürzter Neudruck in K. Berka/L. Kreiser (ed.), *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, Akademie-Verlag, Berlin, 48-106; ebenso 1973²; um Teile II und III gekürzter Neudruck 1983³ sowie 1986⁴ unter dem Titel „*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Auszug)“, 82-107.
- (1972a): *Conceptual Notation. A Formula Language of Pure Thought Modelled upon the Formula Language of Arithmetic* (Engl. Übers. v. T. W. Bynum), in T. W. Bynum (ed.), *Gottlob Frege. Conceptual Notation and Related Articles*, Clarendon Press, Oxford 1972 (rep. 2002), 101-203.
- (1972b): *Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro* (Span. Übers. v. H. Padilla), teilw. Neudruck ohne „Inhalt“ in ders., *Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios Filosóficos*, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., 5-104.
- (1972c): „gainen mozi“ [*Begriffsschrift*] (Jap. Übers. v. Arata Ishimoto), a partial translation of early sections of *Begriffsschrift* in A. Ishimoto (ed.), *ronri shisō kakumei (A Revolution in Logical Thought)*, Tokai University Press, Tokyo, 28-56. [Diese bibliographischen Angaben konnten noch nicht abschließend geprüft werden.]
- (1978): „Conceitografia, “Prefácio” (1879)“ [*Conceitografia, uma Linguagem Formular do Pensamento Puro Modelada sobre a da Aritmética*] (Port. Übers. v. P. Alcoforado), Neudruck von „Vorwort“ in G. Frege, *Lógica e Filosofia da Linguagem* (ausgew., eingel., übers. u. m. Anm. vers. v. P. Alcoforado), Editora da Universidade de São Paulo/Cultrix, São Paulo, 1978; erw. u. überarb. 2009², 43-49.
- (1980a): *Fogalomírás, a tiszta gondolkodás formulanyelve az aritmetika nyelvének mintája szerint* (Ung. Übers. v. Á. Máté), ohne „Inhalt“ sowie um Teil III gekürzter Neudruck in moderner Notation und mit Anmerkungen versehen in ders., *Logika, Szemantika, Matematika. Válogatott tanulmányok* (ed. v. I. Ruzsa), Gondolat Kiadó, Budapest, 17-82.
- (1980b): „BEGRIFFSSCHRIFT, EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGE-

BILDETE FORMELSPRACHE DES REINEN DENKENS“, mit Kommentaren versehener Neudruck der Teile I und II (bis Formel 64) sowie der abschließenden Tafel in I. Costescu, *Die kosmische Erkenntnis und der menschliche Computer. (100 Jahre seit Freges „Begriffsschrift“)*, Tipografia Universității din Timișoara, Timișoara, 197-269.

- (1987): *Шрифт понятия. Скопированный с арифметического формульный язык чистого мышления* (Transkription: *Schrift ponjatij. Skopirovanij s arifmetičeskogo formulnij jazik tšhistogo miščlenija*, Russ. Übers. v. G. K. Dzhaparidze u. L. I. Mtschedlischwili), Neudruck ohne „Inhalt“ mit handschr. Formeln in moderner Notation für die Teile II u. III in Z. N. Mikeladze (ed.), *Методы логических исследований* (Transkription: *Metody logičeskich issledovanij*), Mecniereba, Tbilisi, 87-141.
- (1992): „*Frege (1879): Begriffsschrift*“ (Franz. Teilübers. v. M. A. Sinaceur), Neudruck von „Vorwort“ und Teil I mit dem abschließenden Logischen Quadrat in F. Rivenc/Ph. de Rouilhan (ed.), *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*, Éditions Payot, Paris, 98-129.
- (1997): *Begriffsschrift. A formula language of pure thought modelled on that of arithmetic* (Engl. Teilübers. v. Michael Beaney), Neudruck von „Vorwort“ und Teil I mit dem abschließenden Logischen Quadrat in M. Beaney (ed.), *The Frege Reader*, Blackwell Publishing, Malden u.a., 47-78.
- (1999a): *Ideographie, un Langage Formulaire de la Pensee Pure Construit D’Après Celui de L’Arithmétique* (Franz. Übers. v. C. Besson), in G. Frege, *Idéographie* (ed. v. C. Besson), Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 3-112.
- (1999b): *Furêge Tyosakusyo [Schriften Freges]. Band 1: Gainen mozi [Begriffsschrift]* (ed. v. T. Fujimura), Keiso Syobo, Tokyo.
- (2000): *Исчисления понятия, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического* (Transkription: *Istschislenie ponjatij, jazik formul tšhistogo miščlenija, postrojennij po obrazcu arifmetičeskogo*, Russ. Übers. v. B. V. Birjukov), in Готтлоб Фреге. *Логика и логическая семантика. Сборник трудов* (Transkription: *Gottlob Frege. Logika i logičeskaja semantika. Sbornik trudov*, ed. v. B. V. Birjukov), Aspekt Press, Moskva, 65-142. Korr. zweite Auflage bei Knizhnij dom Librokom, Moskva 2012; Nachdrucke 2015, 2017.
- (2004a): *Поимно писмо. Формален јазик на џистата мисла, моделиран по оглед на аритметиката* (Transkription: *Poimno pismo. Formalen jazik na čistata misla modeliran po ugled na aritmetikata*, Maz. Übers. u. ed. v. I.

- Fidančeva), in ders., *Поимно нисмо*, Magor, Skopje, 5-149.
- (2004b): „הגרפ, 'בתכ מושגים', תרגום ועריכה עם מבוא – ג. ברעלי, הוצאת משל“ (Transkription Haupttitel: *Ketav mušagim*, Hebr. Übers., ed. u. mit Anm. v. G. Bar-Elli), Shalem, Yerushalayim, 1-108.
- (2008): „Prefácio/Conteúdo – Vorwort/Inhalt“ [*Ideografia, uma linguagem por fórmulas do pensamento puro modelada pela da Aritmética*] (Port. Übers. v. F. R. Neto), bilinguale Ausgabe von „Vorwort“ und „Inhalt“ in F. R. Neto, „Prefácio ao *Begriffsschrift* (1879) de Gottlob Frege (1848-1925): tradução e introdução ao texto“, in *Revista Brasileira de História da Matemática* 8(16), 123-141, hier: 131-140.
- (2012): *Pojmopis. Formulový jazyk čistého myšlení po vzoru formulového jazyka aritmetiky* (teilw. tsch. Übers., teilw. bilingual, teilw. reprograph. Nachdr. des Dt. mit tsch. Komm. v. J. Fiala), Oikoymenh, Praha.
- (2015): „Ideografia“ (It. Teilübers. v. N. Zippel), Neudruck von „Vorwort“ und Teil I mit dem abschließenden Logischen Quadrat in G. Frege, *L'alfabeto del pensiero* (ed. v. N. Vassallo), Castelvecchi, Roma, 21-60.
- (2018): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, mit „Textkritischen Anmerkungen“ versehener Nachdruck von Frege (BS), in M. Wille, *Gottlob Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Reihe „Klassische Texte der Wissenschaft“], Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 199-303.

Zudem verwendete Schriften

- Agazzi, Evandro (1981): „Presentation“, in *Epistemologia: rivista italiana di filosofia della scienza* 4(1), 3-4.
- Angelelli, Ignacio (1964a): „Vorbemerkung“, in Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen ed. v. I. Angelelli), Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, [ohne Seitenangabe].
- (1964b): „Textkritische Bemerkungen“, in Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen ed. v. I. Angelelli), Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 122-124.
- (1967a): „Vorbemerkung“, in G. Frege, *Kleine Schriften* (I. Angelelli, ed.), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1967, VII-VIII.
- (1967b): *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, D. Reidel Pu-

- blishing Company, Dordrecht (Holland).
- Angelelli, Ignacio/Bynum, Terrell Ward (1966): „Note on Frege’s *Begriffsschrift*“, in *Notre Dame Journal of Formal Logic* VII(4), 369-370.
- Anzeige (1979): „Simposio sobre Lógica y Filosofía en Gottlob Frege: Primer Centenario de la publicación de *Begriffsschrift* 1879–1979“, in *Teorema: revista internacional de filosofía* 9(2), ohne Paginierung [= 224].
- APA (1979): „American Philosophical Association. Pacific Division: Fifty-Third Annual Meeting“, in *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association* 52(3), 445-467.
- Barnes, Jonathan (1999): „IV. Postface“, in G. Frege, *Idéographie* (ed. v. C. Besson), Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 119-206.
- Beaney, Michael (1997): „Glossary“, in ders. (ed.), *The Frege Reader*, Blackwell Publishing, Malden u.a., xiii-xv.
- Berka, Karel/Kreiser, Lothar (1971): „Einleitung“, in dies. (ed.), *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, Akademie-Verlag, Berlin, IX-XVII.
- Bernays, Paul (1970): „Rez. v. van Heijenoort From Frege to Gödel“, in *The Journal of Philosophy* 67(4), 109-110.
- Besson, Corine (1999a): „I. Préface du traducteur“, in G. Frege, *Idéographie* (ed. v. C. Besson), Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, VII-XIII.
- Bezhanischwili, M. N./Mtschedlischwili, L. I. (1987a): „Предисловие к русскому изданию“ (Transkription: „Predislowie k russkomu izdaniju“), in Z. N. Mikeladze (ed.), *Методы логических исследований* (Transkription: *Metody logičeskich issledovanij*), Mecniereba, Tbilisi, 84-86.
- (1987b): „Примечания“ (Transkription: „Primetschanija“), in Z. N. Mikeladze (ed.), *Методы логических исследований* (Transkription: *Metody logičeskich issledovanij*), Mecniereba, Tbilisi, 142-151.
- Birjukov, Boris V./Kuzitschewa, Zinaida A. (2000): „Комментарии: Часть первая. Запис’ в понятиях“ (Transkription: „Kommentarii: Tschast’ perwaja. Zapis’ w ponjatijach“), in B. Birjukov (ed.), *Готтлоб Фреге. Логика и логическая семантика. Сборник трудов*, Aspekt Press, Moskva, 379-418.
- Bocheński, Joseph Maria (1956): *Formale Logik*, Verlag Karl Alber, Freiburg/München.
- (1974): „Rez. v. N. I. Kondakov *Logičeskij slovar’* [Logical Dictionary]“, in *Studies in Soviet Thought* 14(1/2), 133-138.

- Bolck, Franz (ed.): „*Begriffsschrift*“. *Jenaer FREGE-Konferenz, 7.-11. Mai 1979*, Friedrich-Schiller-Universität Jena 1979.
- Bynum, Terrell Ward (1972a): „Preface“, in ders. (ed.), vii-ix.
- (1972b): „On the Life and Work of Gottlob Frege“, in ders. (ed.), 1-54.
- (1972c): „Editor’s Introduction“, in ders. (ed.), 55-80.
- (ed.): *Gottlob Frege. Conceptual Notation and Related Articles*, Clarendon Press, Oxford 1972 (rep. 2002).
- Bynum, Terrell Ward/Bynum, Aline W. (1972): „A Frege Bibliography, 1873-1966“, in Bynum (ed.), 239-287.
- Chávarri, Eladio (1979): „En el primer centenario de *Begriffsschrift*“, in *Estudios filosóficos XXVIII*(78), 203-255.
- Church, Alonzo (1948): „Rez. v. G. Frege *Aritmetica e logica*“, in *The Journal of Symbolic Logic* 13(3), 153.
- (1953): „Rez. v. Geach/Black *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*“, in *The Journal of Symbolic Logic* 18(1), 92-93.
- (1972): „Rez. v. van Heijenoort *From Frege to Gödel u. Frege and Gödel*“, in *The Journal of Symbolic Logic* 37(2), 405.
- (1973): „Rez. v. Mangione *Logica e aritmetica*“, in *The Journal of Symbolic Logic* 38(3), 532-534.
- Cohen, L. Jonathan et al. (1982): „Preface“, in dies. (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science VI. Proceedings of the Sixth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Hannover, 1979*, North-Holland, Amsterdam u.a., IX-XI.
- Corcoran, John/Levin, David (1973): „Rez. v. T. W. Bynum *Conceptual Notation*“, in *Philosophy of Science* 40(3), 454-455.
- Costescu, Ion (1980a): „Vorwort“, in ders., *Die kosmische Erkenntnis und der menschliche Computer. (100 Jahre seit Freges „Begriffsschrift“)*, Tipografia Universității din Timișoara, Timișoara, [ohne Seitenangabe].
- (1980b): „6.1. FREGES IDEOGRAPHIE, eine Ideographie der starken Fälle in der WELT DER ENDLICHEN DINGE“, Buchkapitel in ders., *Die kosmische Erkenntnis und der menschliche Computer. (100 Jahre seit Freges „Begriffsschrift“)*, Tipografia Universității din Timișoara, Timișoara, 178-189.
- (1980c): „F. ANHANG. Freges Ideographie, benützt als EINGANGSGRÖS-

- SEN und AUSGANGSGRÖSSEN in Syllogismen und Kosyllogismen“, Appendix in ders., *Die kosmische Erkenntnis und der menschliche Computer. (100 Jahre seit Freges „Begriffsschrift“)*, Tipografia Universității din Timișoara, Timișoara, 270-306.
- Dudman, Victor H. (1974): „Rez. v. Frege Conceptual Notation“, in *Australasian Journal of Philosophy* 52(2), 177.
- Dummett, Michael (1981): *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.
- Engel, Pascal (2002): „Rez. v. Frege *Écrits posthumes* u. *Idéographie*“, in *Mind* 111(442), 410-411.
- Feferman, Anita Burdman (1993): *Politics, Logic, and Love. The Life of Jean van Heijenoort*, A K Peters, Wellesley (Mass.).
- Frege, Gottlob (1950): *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (übers. v. J. L. Austin), Basil Blackwell, Oxford.
- (1967): *Kleine Schriften* (ed. v. I. Angelelli), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- (1986): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Centenarausg. m. erg. Texten krit. ed. v. Ch. Thiel), Felix Meiner Verlag, Hamburg.
- Geach, Peter (1963): „Rez. v. Wittgenstein *Tractatus Logico-Philosophicus*“, in *The Philosophical Review* 72(2), 264-265.
- Geymonat, Ludovico (1948): „Prefazione“, in ders. (ed.), *Gottlob Frege. Aritmetica e Logica*, Giulio Einaudi, Turin, 9-13.
- 1965): „Prefazione“, in C. Mangione (ed.), *Gottlob Frege. Logica e aritmetica*, Paolo Boringhieri, Turin, 9-10.
- Haack, Susan (1976): „Recent Publications in Logic“, in *Philosophy* 51(195), 62-79.
- H. P. K. (1967): „Rez. v. van Heijenoort *From Frege to Gödel*“, in *The Review of Metaphysics* 21(1), 168-169.
- Husserl, Edmund (1964): „Anhang II: Husserls Anmerkungen zur „Begriffsschrift““, in Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen ed. v. I. Angelelli), Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 117-121.

- Imbert, Claude (1979): „Le projet idéographique“, in *Revue Internationale de Philosophie* 33(130), 621-665.
- Jacques, Francis (1979): „L'idéographie frégéenne : un langage libéré des contraintes de l'interlocution“, in *Revue Internationale de Philosophie* 33(130), 694-715.
- Jourdain, Philip E. B. (1912): [Kapitel „Gottlob Frege“ aus] „The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics“, wiederabgedruckt in G. Frege, *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel. Zweiter Band: Wissenschaftlicher Briefwechsel* (bearb., eingel., m. Anm. vers. v. G. Gabriel et al., ed.), Meiner, Hamburg 1976, 275-301.
- Kaal, Hans (1980): „List of Abbreviations Used“, in G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Basil Blackwell, Oxford, ix.
- Kneale, William (1950): „Rez. v. Frege *The Foundations of Arithmetic*“, in *Mind* 59(235), 395-397.
- (1956): „Gottlob Frege and Mathematical Logic“, in A. J. Ayer et al., *The Revolution in Philosophy*, MacMillan, London u.a. 1967, 26-40.
- Kondakov, Nikolaj Ivanovič (1971): *Wörterbuch der Logik* (dt. ed. v. E. Albrecht/G. Asser), VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1978.
- Kreiser, Lothar (1979): „Sinn, Gedanke und Bedeutung. 100 Jahre „Begriffsschrift“ von Gottlob Frege“, in *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe XXVIII/6*, 69-78.
- Kreiser, Lothar/Metzler, Helmut (1979): „100 Jahre „Begriffsschrift“ Gottlob Frege“, in *Deutsche Zeitschrift für Philosophie* 27(5), 571-586.
- Long, Peter/White, Roger (1979): „Translators' Preface“, in G. Frege, *Posthumous Writings* (übers. v. P. Long/R. White), Basil Blackwell, Oxford, VI-VIII.
- Mangione, Corrado (1981): „Le “Begriffsschrift” de Frege (1879). Acte de naissance de la philosophie des mathématiques moderne“, in *Epistemologia: rivista italiana di filosofia della scienza* 4(1), 25-52.
- Mates, Benson (1967): „Rez. v. I. Angelelli *Begriffsschrift und andere Aufsätze*“, in *The Journal of Symbolic Logic* 32(2), 240-242.
- Mikeladze, Z. N. (ed.) (1987): *Методы логических исследований* (Transkription: *Metody logičeskich issledovanij*), Mecniereba, Tbilisi.
- Moore, Gregory H. (1977): „Rez. v. van Heijenoort *From Frege to Gödel*“, in *His-*

toria Mathematica 4(4), 468-471.

- Neto, Fernando Raul (2008): „Prefácio ao *Begriffsschrift* (1879) de Gottlob Frege (1848-1925): tradução e introdução ao texto“, in *Revista Brasileira de História da Matemática* 8(16), 123-141.
- Nidditch, Peter Harold (1962): *The Development of Mathematical Logic*, Routledge & Kegan Paul Ltd., London/Boston 1972.
- Resnik, Michael David (1968): „Rez. v. van Heijenoort *From Frege to Gödel*“, in *Philosophy of Science* 35(1), 72.
- Ricketts, Thomas (1995): „Frege, Gottlob“, in R. Audi (ed.), *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge UP, Cambridge u.a. 1999, 282-285.
- Scholz, Heinrich (1936): „Die klassische und die moderne Logik“, in *Blätter für deutsche Philosophie* 10, 254-281.
- (1964): „Anhang I: Die Anmerkungen von H. Scholz zur „Begriffsschrift““, in Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen ed. v. I. Angelelli), Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 115-116.
- Scholz, Heinrich/Bachmann, Friedrich (1936): „Der wissenschaftliche Nachlass von Gottlob Frege“, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Sorbonne Paris 1935. VIII: Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique*, Hermann & Cie, Paris, 24-30.
- SFAGP (1979): „Seminar for Austro-German Philosophy – Grammar and the Begriffsschrift: A Centenary Celebration“ (Programme), URL: <http://ontology.buffalo.edu/79/1979-12-15.pdf> [Zugriff: 9. November 2016], 1 S.
- Thiel, Christian (1982): „From Leibniz to Frege: Mathematical Logic between 1679 and 1879“, in L. J. Cohen et al. (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science VI. Proceedings of the Sixth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Hannover, 1979*, North-Holland, Amsterdam u.a., 755-770.
- (1995): „„Nicht aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht“: Die Begriffsschrift 1879 und 1893“, in I. Max/W. Stelzner (ed.), *Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium Jena 1993*, de Gruyter, Berlin/New York, 20-37.
- (2005²): „Begriffsschrift“, in J. Mittelstraß (ed.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Band 1: A-B*, Verlag J. B. Metzler, Stuttgart/Weimar, 391-392.

- van Heijenoort, Jean (1967a): „Introduction to Frege (1967)“, in ders. (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard UP, Cambridge (Mass.), (rep. 2000), 1-5. Repr. in ders. (ed.), *Frege and Gödel. Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Harvard UP, Cambridge (Mass.) 1970, 1-5.
- (1967b): „Preface“, in ders. (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard UP, Cambridge (Mass.) 2000, vi-viii.
- Vassallo, Nicla (2015): „La fertile complessità della filosofia di Frege“, in G. Frege, *L'alfabeto del pensiero*, Castelvecchi, Roma, 5-18.
- Vinassa de Regny, Emanuele (1985): „Geymonat e l'editoria italiana“, in C. Mangione (ed.), *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat*, Garzanti, Milano, 133-138.
- Wegner, Michael (1979): „Eröffnung der Konferenz“, in Bolck (ed.), 1-5.
- Wille, Matthias (2016a): „Der Mann, der nicht nur die *Begriffsschrift* publizierte. Über den Verlag von Louis Nebert“, in *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* 7, 159-182.
- (2016b): *›Largely unknown‹ Gottlob Frege und der posthume Ruhm*, mentis, Münster.
- (2018): *Gottlob Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Reihe „Klassische Texte der Wissenschaft“], Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Wittgenstein, Ludwig (1961): *Tractatus Logico-Philosophicus* (The German text of Ludwig Wittgenstein's *Logisch-philosophische Abhandlung* with a new translation by D. F. Pears and B. F. McGuinness and with the introduction by Bertrand Russell), Routledge & Kegan Paul, London.
- ZphF (1979): „Aus dem philosophischen Leben“, in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 33(1), 145-148.

Adressen der Autoren

Thomas Gruber

Kentzlerdamm 12
20537 Hamburg
thomas.gruber@riseup.net

Anna-Sophie Heinemann

Universität Paderborn
Fakultät für Kulturwissenschaften
Institut für Humanwissenschaften:
Philosophie
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn
anna.sophie.heinemann@uni-
paderborn.de

Edward Kanterian

Department of Philosophy
School of European Culture and
Languages
University of Kent
Canterbury, CT2 7NF
United Kingdom
E.Kanterian@kent.ac.uk

Daniel Koenig

Universität Siegen
Naturwissenschaftlich-Technische
Fakultät
Department Mathematik
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
koenig@mathematik.uni-siegen.de

Martin Rathgeb

Institut für Mathematikdidaktik
Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät
Universität zu Köln
Gronewaldstr. 2
D-50931 Köln
mrathge1@uni-koeln.de

Andreas Vohns

Institut für Didaktik der Mathematik –
Österreichisches Kompetenzzentrum für
Mathematikdidaktik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Sterneckstraße 15 9010 Klagenfurt
AUSTRIA
Andreas.Vohns@aau.at

Matthias Wille

Institut für Humanwissenschaften:
Philosophie
Fakultät für Kulturwissenschaften
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn
willem@mail.uni-paderborn.de

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.
2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.
3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart., 13,- Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,- Euro

Susanne Spies:

Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,- Euro

Henrike Allmendinger:

Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,- Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Rätz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,- Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,- Euro

Martin Rathgeb:

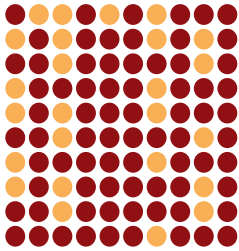
George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,- Euro

Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

ISSN 2197-5590 *universi* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,- Euro (Doppelnummer 22,- Euro)



**SieB – Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik**

Bd. 8 (2017)

Mit Beiträgen von

Thomas Gruber

Im Spannungsfeld von militärischer Anwendung und Wissenschaftsverantwortung? Zur Verquickung der mathematischen Forschung in Deutschland mit der modernen Kriegsführung

Anna-Sophie Heinemann

„Die Logik ist in der That nichts als bloßer Formalismus ...“
Zu einer Episode in der Geschichte des Begriffs ‚formale Logik‘

Edward Kanterian

Die Idee einer mathematischen Philosophie:
Von Descartes bis zur funktionalen Semantik

Daniel Koenig

Raumproblem und Erkenntnisproblem – Ernst Cassirers
Rezeption der Entdeckung Nicht-Euklidischer Geometrien

Martin Rathgeb

Lewis Carroll, die Schildkröte und Achill – Teil II.
Ein unendlicher logischer Diskurs auf drei Seiten

Andreas Vohns

Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung?
Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage

Matthias Wille

>a labor of love< –

Aus der Geschichte der Begriffsschrift-Editionen (1952-2017)