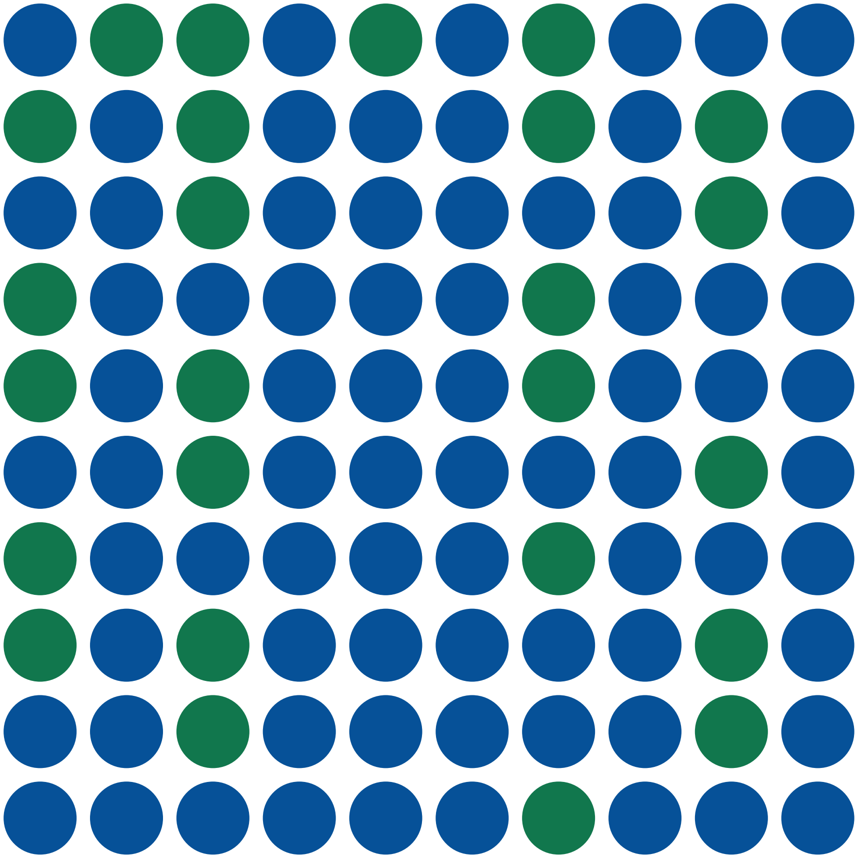
SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 9 • 2018**

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik



Tanja Hamann

Die „Mengenlehre" im Anfangsunterricht

Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Herausgegeben von

Ralf Krömer und Gregor Nickel

Band 9

Tanja Hamann

Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht

Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Tanja Hamann
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Universität Hildesheim
Samelsonplatz 1
31141 Hildesheim

hamann@imai.uni-hildesheim.de

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation zur Erlangung des Grades Dr. phil. vom Fachbereich 4 Mathematik, Naturwissenschaften, Wirtschaft & Informatik der Universität Hildesheim angenommen.
Gutachterinnen: Prof. Dr. Barbara Schmidt-Thieme und Prof. Dr. Johanna Heitzer
Abgabedatum: 20. Juli 2017

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 9 (2018)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2018

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Im Rahmen eines Modells, das Unterrichtsreformen als zweidimensionale Prozesse interpretiert, wird die in den 1970ern in der Bundesrepublik Deutschland stattgefundene Reform des Grundschul-Mathematikunterrichts beschrieben. Die Reform (international: New Math, in Deutschland: „Mengenlehre“) war durch die Aufnahme neuer Inhalte wie Mengen und Gruppen gekennzeichnet. Ziel der Arbeit ist es, durch die Beschreibung von Rekontextualisierungsprozessen zwischen den verschiedenen Ebenen des Bildungssystems eine Grundlage für Aussagen über Verlauf und historische Bedeutsamkeit der Reform zu schaffen. Der Schwerpunkt liegt auf der Frage nach der Umsetzung grundlegender wissenschaftlich-theoretischer Ideen in unterrichtstheoretische Konzepte auf Seiten der Fachdidaktik. Dazu werden mit *alef* von Bauersfeld, *Wir lernen Mathematik* von Neunzig & Sorger und *Mathematik in der Grundschule* von Fricke & Besuden, jeweils in den Ausgaben für das 1. Schuljahr, drei exemplarische Unterrichtswerke aus der Zeit der „Mengenlehre“ auf Inhalte, didaktisch-methodische Prinzipien und curriculares Gesamtkonzept untersucht.

Im Hinblick auf die methodische Umsetzung der Lehrgänge besteht ein weitgehender Konsens über die Forderung nach Handlungsorientierung, materialbasierter Selbsttätigkeit der Kinder und Gruppenarbeit, der auf lernpsychologischen Erkenntnissen von Piaget und Dienes gründet. Die Lehrwerke unterscheiden sich bezüglich der didaktischen, curricularen Gesamtkonzeption, was trotz vergleichbarer Inhalte und der Gemeinsamkeit eines pränumerischen Vorkurses unterschiedliche Schwerpunkte zur Folge hat: Bauersfeld baut seinen Lehrgang – im Sinne eines von Bruner geforderten Spiralcurriculums – gleichmäßig auf exemplarischen fachlichen Grundbegriffen auf, die geeignet scheinen, die vorrangig pädagogisch-sozialen Ziele zu erreichen. Fricke und Besuden ordnen die Inhalte der auf Piagets Theorien basierenden operativen Methode und dem dabei zentralen Relationsbegriff unter; sie lehnen dagegen eine übermäßige Betonung der Mengenlehre ab, wie sie sich bei Neunzig und Sorger findet, die dem Rechnen einen zahlfreien Mengenkurs vorschalten, ein Vorgehen, dass als typische Herangehensweise gelten muss. In allen Fällen dienen Erkenntnisse aus der Lernpsychologie – nicht aus der Fachwissenschaft – als hauptsächliche Bezugspunkte; die Theorien werden jedoch in unterschiedlichem

Maße übernommen und somit im Zuge der Rekontextualisierung verkürzt. Die Reform muss in dieser Hinsicht bereits im Ansatz als gescheitert gelten, ein Befund, der mutmaßlich auf Unterrichtsreformen im Allgemeinen übertragbar ist, was die „Mengenlehre“ zumindest in dieser Hinsicht zu einer beispielhaften Reform macht, deren Kernideen sich – da nicht vollständig umgesetzt – der Möglichkeit einer Bewertung entziehen.

Abstract

Based on a theoretical framework modelling an educational reform as a two-dimensional process, the reform of German primary maths education in the 1970s is described. Up to nowadays the reform, which has been known internationally as *New Math* and which was characterised by taking up new contents as set theory and algebraic groups into the classroom, goes best under the name „Mengenlehre“ within Germany. The thesis' aim is to form a basis for working out the process and historical significance of the reform by description of the processes of recontextualization taking place from one part of the educational system to another. Major emphasis is on the question how math educationalists transferred basic ideas and theories that emerged from scientific institutions into theoretical classroom concepts. To that end, three textbook series from the "Mengenlehre" era, each of them reduced to books, work sheets and classroom material for 1st grade, are chosen as exemplary sources and analysed regarding content, didactical and methodical principles as well as curricular concepts. These are *alef* by Bauersfeld, *Wir lernen Mathematik* by Neunzig & Sorger and *Mathematik in der Grundschule* by Fricke & Besuden.

Regarding methodical suggestions there is a broad consent about the necessity of childrens' activity, the use of manipulative materials and group work, all based on psychological findings by Piaget and Dienes. Though all three text book series more or less cover the same contents and notions and open with a pre-numerical course, they differ regarding their overall curricular concepts, which results in a shift of focus: Bauersfeld builds his course evenly on several fundamental mathematical concepts, apt to reach his primarily social and pedagogical aims, thus implementing Bruner's idea of a spiral curriculum. Fricke und Besuden's concept is based on Piaget and subordinates all content to the operative method with emphasis on relations. They oppose an excessive treatment of set theory as it can be found in other textbooks, for example in the one by Neunzig and Sorger, who use a course in non-numerical set theory as a pretext for numeracy, thus setting an example for a seemingly typical approach. In any case, findings from the psychology of learning rather than from mathematics as scientific discipline serve as major points of reference. The extent to which the basic theories are adopted differ,

though, and in each case they are shortened and get constrained in the course of recontextualization, a finding presumably transferable to all educational reforms. In regard to this aspect, „Mengenlehre“ must be declared a failure, establishing just as well an example for failure of other reforms within the educational system. Due to this circumstance, an appraisal of the basic ideas that led to reform seems impossible as they were never fully implemented, at all.

Vorwort

Über diese Arbeit – Ein persönlicher Einblick

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis eines Prozesses, eines langwierigen Prozesses zumal, der zu weiten Teilen geprägt war von einer Mischung aus Ratlosigkeit und Erstaunen. Meine (vermeintlich, s. u.) erste Begegnung mit der Neuen Mathematik[1] war eher zufälliger Natur, und der Bericht suggerierte, man hätte vor gar nicht allzu langer Zeit versucht, die euklidische Methode wieder in der Breite in den Mathematikunterricht einzuführen – erstes Erstaunen. In anderer Literatur dagegen schlug man vor, Kinder an bunten Materialien in Gruppen und spielerisch selbsttätig Begriffe erarbeiten zu lassen. Das Erstaunen wuchs und paarte sich erstmals mit Ratlosigkeit. Wie passte das zusammen? Beides blieb, sowohl Erstaunen als auch Ratlosigkeit, angesichts widersprüchlicher Quellen, in denen die auf einer Seite im wahrsten Sinne „modernen" didaktisch-methodischen Unterrichtsvorschläge auf vernichtende Kritik und unerbittliche Ablehnung trafen. Wie konnte es sein, dass eine Reform, die von so offenkundigem Elan getragen war, so kläglich scheiterte? Ratlosigkeit resultierte aber auch aus der Frage, wie man ein so komplexes Thema – zu dem sich nach und nach immer mehr Aspekte und Einflussfaktoren auftaten – in der gebotenen Objektivität „in den Griff" bekommen sollte. Ein anderes Thema zu bearbeiten, war dennoch nie eine Option, zu groß war die mit diesem hier verbundene Faszination und zu groß außerdem die Überzeugung, dass hier dringend etwas seiner Aufarbeitung harrte.

Im Laufe des langwierigen Prozesses hat sich also der nun hier vorliegende Zugang zur Auseinandersetzung mit den Reformgeschehnissen im Mathematikunterricht der 1970er-Jahre herauskristallisiert. Manch einer mag dabei etwas vermissen, doch mit der Arbeit wird selbstverständlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

Wie jede hermeneutische Arbeit enthält auch diese subjektive Elemente. Wenngleich also die historische Perspektive mit der Zeit den Blick auf die Reform in

1. Sie fand statt mit Schuberth, Ernst: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Ihre Geschichte und Probleme; unter besonderer Berücksichtigung von Felix Klein, Martin Wagenschein und Alexander I. Wittenberg, Stuttgart: Verl. Freies Geistesleben, 1971.

ihren Zusammenhängen stark objektiviert hat, so mögen Erstaunen und Ratlosigkeit doch hier und da durchscheinen. Vielleicht wird auch der Leser bzw. die Leserin sich an diversen Stellen wundern oder ärgern, staunen, mit dem Kopf schütteln, zustimmen oder nicht einverstanden sein. Damit wäre dann in jedem Fall etwas gewonnen.

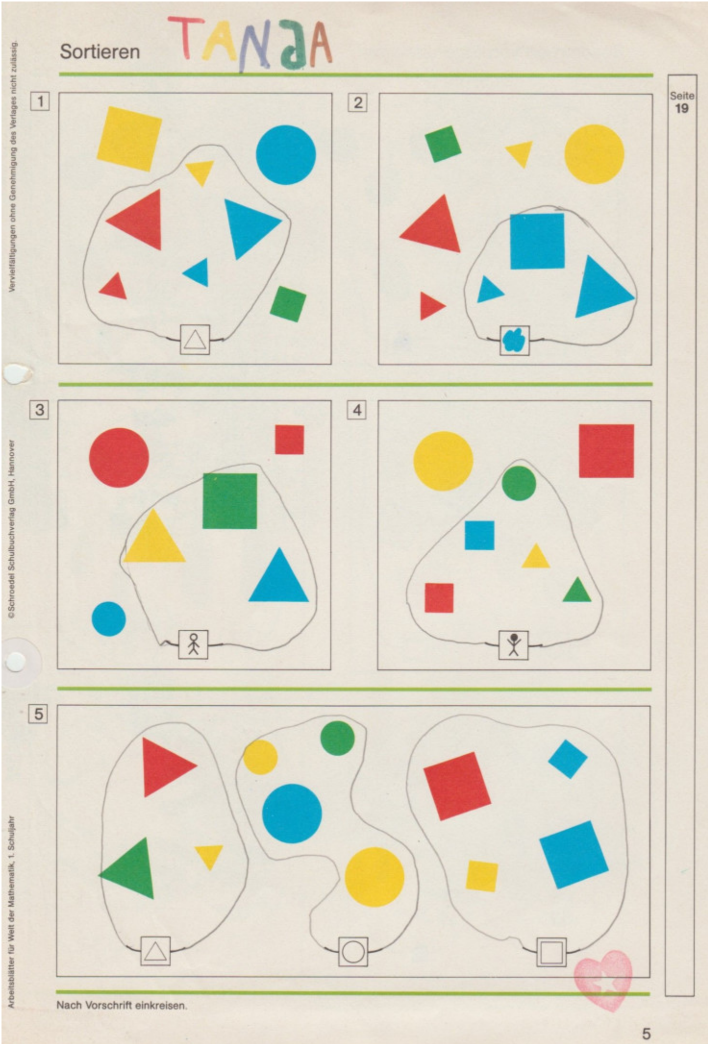
Danksagungen

Ich danke allen, die diese Arbeit mit der erforderlichen Geduld begleitet haben, die mich durch ihr ehrliches Interesse immer wieder überzeugt haben, dass es sich lohnt dabei zu bleiben, die sich mit meinem Vorhaben auseinandergesetzt, mich motiviert und mir praktische Hinweise gegeben haben. Mein Dank gilt meiner Mutter für die Korrekturen, allen, die an meiner Umfrage teilgenommen haben (auch wenn ich die Antworten nicht systematisch ausgewertet habe, sie waren dennoch wertvoll), und den diversen Zeitzeugen, die sich im informellen Rahmen mit mir über mein Thema unterhalten haben; auch da habe ich viel draus gewonnen.

Überhaupt Namen zu nennen, birgt natürlich die Gefahr, wichtige Namen zu vergessen. Ich kann dennoch nicht völlig darauf verzichten. Zunächst gilt mein Dank meiner Betreuerin Barbara Schmidt-Thieme für die Übernahme dieses Projekts, die Überzeugung, mit der sie es immer wieder vertreten hat, und vor allem für das Vertrauen in mich und meine Arbeit (ich bin trotzdem nicht sicher, wer von uns beiden mehr überrascht davon ist, dass hier nun eine fertige Arbeit vorliegt). Mein herzlichster Dank gilt Johanna Heitzer für die kurzfristige Übernahme der Zweitbetreuung, das Engagement und die ausführlichen Hinweise. Ich danke dem IMAI – gerade auf den letzten Metern besonders Jürgen Sander – für jede Form von Rückmeldung, Anregung, Anteilnahme und dafür, dass es immer einen Platz für mich gab. Nennen muss ich auch Thomas Bedürftig und Knut Rickmeyer, denen ich wichtige Startimpulse verdanke, außerdem Bernold Picker für die zur Verfügung gestellte Literatur. Besonderer Dank geht außerdem an Henrike Allmendinger (auch wenn ich das Angebot nicht angenommen habe, ich weiß, es war da!) und Jennifer Postupa sowie den weiteren Mitgliedern der Doktorandenkooperation; darüber hinaus danke ich allen denen, die viele Tagungen über die Jahre hinweg zu so wunderbaren Erlebnissen gemacht haben.

Mein größter Dank gilt aber denjenigen, die mich überhaupt erst in die Lage versetzt haben, eine solche Arbeit schreiben zu können: meinen Eltern, die meinen Bildungsweg immer sehr unaufgeregt begleitet haben, und meinen Lehrern, hier besonders Elma Dettmer für die tragfähigen Grundlagen, Michael Weinert für die Freude am Fach sowie ein umfassendes formales wie strukturelles Rüstzeug und Katharina Colberg für ihren unermüdlichen Einsatz bei meinem Einstieg in die Wissenschaft.

Nicht zuletzt danke ich all den lieben Menschen in meinem privaten Umfeld, ihr wisst hoffentlich, wer ihr seid, es ist so schön, dass ihr da seid.



P. S.: Meine Überraschung war groß, als mir eines Tages dieses, im Schuljahr 1985/86 in einer Grundschule in der Region Hannover bearbeitete Arbeitsblatt (wieder) in die Hände fiel. Die Tatsache, dass es sich bei Tanja um eine gute Schülerin im Fach Mathematik gehandelt hat, mag dazu beigetragen haben, dass die Lehrerin nicht ganz so genau hingesehen und den einen – vermutlich der Flüchtigkeit geschuldeten – Fehler nicht angestrichen hat.

0 Einleitung

0.1 Motivation, Fragestellung und methodischer Rahmen

Motivation und übergeordnete Fragestellungen

Es war der 25.03.1974, als *Der Spiegel* auf seinem Titel die in jeder Hinsicht bemerkenswerte Frage stellte, ob Mengenlehre krank mache. Die Gesundheitswarnung galt jedoch weniger der Beschäftigung mit dem Unendlichen oder der Verwirrung durch etwaige Antinomien der Cantorschen Grundlagenforschung, sondern einer umfassenden Reform des Mathematikunterrichts, die international üblicherweise als New Math bezeichnet wurde, in Deutschland entsprechend als Neue oder Moderne Mathematik. Einer breiten Öffentlichkeit begegnete die Neue Mathematik in der Gestalt einer Reform des Grundschulunterrichts unter der Bezeichnung „Mengenlehre", und es ist dieser Terminus, der bis heute fest mit jener Reform der 1970er Jahre verbunden, im kollektiven Gedächtnis der Bundesrepublik verankert ist und aus diesem Grund im Folgenden als Name für die Reform des Mathematikunterrichts der Grundschule verwendet wird.[2] Diese Verankerung wiederum ist häufig assoziiert mit einer bestimmten wertenden Haltung der Reform gegenüber: Sie gilt im Allgemeinen als gescheitert[3], als Schreckgespenst, geradezu als Sündenfall in der Geschichte des Mathematikunterrichts wie der Mathematikdidaktik – wobei die negative Konnotation von ehemaligen Schülerinnen und Schülern eher nicht geteilt wird[4] – , zumindest jedoch erscheint sie als besondere, singuläre, bes-

2. Zur Verdeutlichung, dass es sich hier um einen in der Öffentlichkeit verwandten, aber gewissermaßen nicht offiziellen (auch nur eingeschränkt angemessenen) Namen handelt und um eine Verwechslung mit dem wissenschaftlichen Teilgebiet der Mengenlehre zu vermeiden, wird der Terminus in dieser Bedeutung die ganze Arbeit hindurch in Anführungsstriche gesetzt.

3. vgl. z. B. Hasemann, Klaus & Gasteiger, Hedwig: Anfangsunterricht Mathematik, Berlin [u. a.]: Springer Spektrum, [3]2014, S. 78 und 80; ebenso Vohns, Andreas: Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts, in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 100 (2016), S. 38.

4. Erfahrungen aus persönlichen Gesprächen der Verfasserin sowie Ergebnisse aus einer nicht systematisch ausgewerteten Umfrage, vgl. auch beispielhaft die Kommentare auf www.youtube.com/watch?v=yzxmXxJOXq4.

tenfalls kuriose Episode, die bei Zeitgenossen nach wie vor unmittelbare, häufig emotionale Reaktionen hervorruft.

Es existieren zahlreiche kritische Auseinandersetzungen mit der Reform des mathematischen Grundschulunterrichts, welche die zugrunde liegenden theoretischen wie praktischen Konzepte z. T. recht kleinteilig analysieren. Überblicksartige Gesamtwerke, die historisch einordnen, dabei dennoch tiefer in Details gehen als in vielen aktuelleren Werken üblich[5], sind dagegen eher rar: Auf nationaler Ebene haben vor allem Damerow[6] und Keitel[7] hierzu gearbeitet, beide mit dem Schwerpunkt auf dem Unterricht der Sekundarstufen und stark aus der curricularen Perspektive heraus. Die Reform des Grundschulunterrichts hat Zumpe[8] aufgearbeitet; es handelt sich hier vor allem um eine Kritik der formulierten Ziele sowie deren inhaltlicher Umsetzung. Diese Abhandlungen eint indessen, dass sie aus einer Zeit stammen, in der Inhalte der Mengenlehre – zumindest in Teilen oder Resten – noch Bestandteil der Lehrpläne und Lehrwerke waren, bei den genannten Autorinnen und Autoren handelt es sich also um in irgendeiner Form unmittelbar Betroffene. Eine stärker historische Auseinandersetzung mit der Reform in der Bundesrepublik, die durch zeitliche wie persönliche Distanz eine breitere und einordnende Perspektive einnimmt, fehlt bisher. Es kann dabei kaum darum gehen, Konzept und Inhalt der Reform wertend zu kritisieren – eine solche Bewertung müsste aufgrund der geringen Zahl zeitgenössischer empirischer Untersuchungen[9] auf theoretischen Überlegungen beruhen, und eine Betrachtung auf der Folie heutiger didaktischer Erkenntnisse und Maßstäbe wäre anachronistisch und somit unhistorisch –, sondern Ziel muss vielmehr eine Einordnung in größere Zusammenhänge sein.

Der Wert solcher Überlegungen liegt auf der Hand. Die historische Betrachtung eines Faches, die die Identifikation von Wendepunkten und Brüchen einschließt,

5. vgl. z. B. Hasemann & Gasteiger, a. a. O., S. 78-81 sowie Padberg, Friedhelm: Didaktik der Arithmetik, Heidelberg [u. a.]: Spektrum Akad. Verl., ^{2}1996 = 2002, S. 23-40.

6. Damerow, Peter: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Eine Fallstudie zum Einfluß gesellschaftlicher Rahmenbedingungen auf den Prozeß der Curriculum-Reform; Band 1. Reformziele, Reform der Lehrpläne, Stuttgart: Klett-Cotta, 1977.

7. Keitel, Christine: Entwicklungen im Mathematikunterricht, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 447-500 [im Folgenden: Keitel, Entwicklungen]; Keitel, Christine: Réformes et développements de l'enseignement mathématique en R.F.A. depuis 1950, in: Belhoste, Bruno et. al. [Hrsg.]: Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger, Paris: Librairie Vuiber [u. a.], 1996, S. 303-310 [im Folgenden: Keitel, Réformes].

8. Zumpe, Sybille: Der neue Mathematikunterricht in der Grundschule. Eine kritische Analyse auf dem Hintergrund bildungspolitischer Zielsetzungen Anfang der 70er Jahre, Berlin: FU Berlin, Zentralinstitut für Unterrichtswissenschaften und Curriculumentwicklung, 1984; da die Arbeit nicht im regulären Buchhandel erschienen ist, ist davon auszugehen, dass sie nicht allzu weit verbreitet wurde.

9. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 449.

bildet die Grundlage für die Einordnung aktueller Entwicklungen, die wiederum notwendige Voraussetzung ist für Reflexionen derselben sowie für Selbstverortung innerhalb der Tradition seines Faches. Einen großen Teil ihrer Relevanz beziehen historische Fragen aber ebenso aus ihrer Bedeutung für die Gegenwart. Längsschnittartige und vergleichende Betrachtungen sind geeignet, Kontinuitäten offenzulegen, derer sich die Entwickler zukünftiger Konzepte bewusst sein sollten. Die Analyse vorhergehender Reformen – zumal, wenn diese als gescheitert gelten – im Hinblick darauf, welche Bedingungs- und Einflussfaktoren bestimmend für deren Verlauf waren, sollte jeder zukünftigen Reform vorausgehen, um die Wiederholung von Fehlern – was auch immer darunter zu verstehen sein mag – zu vermeiden, aber auch um mögliche konzeptimmanente Schwierigkeiten von äußeren Bedingungen abzugrenzen, die außerhalb des Einflussbereichs der beteiligten Akteure liegen. Es ergeben sich daraus folgende, für eine historische Wertung wichtige Fragen zur „Mengenlehre“:

1) Welchen (äußeren) Bedingungen war die Reform unterworfen, und wie entscheidend waren diese für ihren Verlauf und Erfolg?

2) Welche Bedeutung hat die Reform für die Geschichte des Mathematikunterrichts bzw. welche Rolle in der Entwicklung kommt ihr zu (zeitlich begrenzte und überwundene Episode, nachhaltiger Wendepunkt. . .)?

3) Handelt es sich tatsächlich um ein singuläres Ereignis, ein Einzelphänomen, eine „besondere“ Reform oder finden sich zumindest gewisse Aspekte, die als prototypisch für Reformen des Mathematikunterrichts bzw. für Bildungsreformen im Allgemeinen gelten können?

4) Wie fügt sich die „Mengenlehre“ ein in die deutsche Tradition des mathematischen Elementarunterrichts? Wo sind Brüche, wo Kontinuitäten?

Es handelt sich hierbei um Fragen von beträchtlicher Komplexität, deren Beantwortung nicht unmittelbar möglich ist.

Zu 1) In welchem Maße ein mutmaßliches Scheitern der Reform in ihrer konzeptuellen Anlage bedingt war oder inwieweit hierfür äußere Einflüsse maßgeblich waren, sollte Grundlage für den weiteren Umgang innerhalb der mathematikdidaktischen Community mit den Inhalten der Reform sein und gleichzeitig Hinweise auf Grenzen und Möglichkeiten zukünftiger Reformen liefern. Das Problem erscheint jedoch für den Moment zu komplex für eine umfassende Bearbeitung. Die äußeren Einflüsse auf Unterricht sind so vielfältig und betreffen Traditionen ebenso wie Entwicklungen auf sämtlichen Ebenen der Gesellschaft – politisch, wirtschaftlich, geistesgeschichtlich, kulturell etc. –, dass sie in einem solchen Rahmen kaum in ausreichender Genauigkeit dargestellt werden können. Das Herausarbeiten konzeptimmanenter Schwierigkeiten, das zur Abgrenzung notwendig wäre, bedürfte empirischer Untersuchungen, die nicht in ausreichender Zahl vorliegen. Dort, wo von Problemen in der Praxis berichtet wird, ist häufig unklar, inwiefern diese in der didaktischen Anlage oder eher in der schulpraktischen Umsetzung bedingt waren; dort, wo die Konzepte theoretisch kritisiert werden, bleibt oft unklar, ob die beschriebenen Aspekte in der Praxis relevant waren.

Als mindestens so grundlegend erweist sich die Frage, ob es sich überhaupt um eine „gescheiterte" Reform handelt, wofür zunächst einmal der Begriff des „Scheiterns" definiert werden müsste. Es gibt allein hierfür zahlreiche Möglichkeiten (Inhalte wieder aus Lehrplänen gestrichen, gewünschter Erfolg bleibt aus bzw. die Ziele wurden nicht erfüllt, Kinder haben Schwierigkeiten und/oder Ängste...), aus denen auszuwählen wäre. Unabhängig von der genauen Definition liegt jedoch die Vermutung nahe, dass äußere Bedingungen in der Tat einen nicht unwesentlichen Einfluss auf den Verlauf genommen haben.

Zu 2) und 4) Die Bearbeitung dieser Fragestellungen bedarf einer Einordnung in größere zeitliche Zusammenhänge sowie – zumindest für Frage 4 – eines Vergleichs der „Mengenlehre" mit weiteren Reformen und Entwicklungen. Damit dies geleistet werden kann, sind jedoch zunächst eine Beschreibung der Reform und eine Herausstellung ihrer wesentlichen Aspekte und ihrer Kernideen unabdingbar.

Zu 3) Sofern die „Mengenlehre" tatsächlich als ein singuläres Ereignis gewertet werden kann, das in völligem Bruch mit der Tradition ein paradigmatisches Negativbeispiel für eine Reform darstellt, müssten ihre Besonderheiten sowie deren Ursachen für eine zukünftige Abgrenzung klar herausgearbeitet werden. Finden sich hingegen für Unterrichtsreformen prototypische Verläufe, Hürden und Fehleinschätzungen, so verdienen auch diese für künftige Neuerungen Berücksichtigung im Hinblick auf grundsätzliche Möglichkeiten und Grenzen solcher Reformen.[10] In jedem Fall erfordert auch diese Frage einen Vergleich mit weiteren Reformen bzw. Unterrichtskonzepten aus dem Verlauf der Geschichte und entsprechend zunächst eine beschreibende Darstellung.

Diese Arbeit folgt damit einer doppelten Zielsetzung: Vorrangig möchte sie eine solche Beschreibung der Reform liefern, die als Grundlage weiterführender Arbeiten dienen kann; gleichzeitig bleiben die übergeordneten Fragen im Hintergrund von Interesse. Es hat sich im Laufe der Arbeit gezeigt, dass die verwendeten Quellen Hinweise zu deren Beantwortung enthalten. Sie werden an entsprechender Stelle

10. vgl. D'Ambrosio, Beatriz Silva: The Modern Mathematics Reform Movement in Brazil and Its Consequences for Brazilian Mathematics Education, in: Educational Studies in Mathematics 22 (1991), 1, S. 71.

wiedergegeben und am Ende der Arbeit wieder aufgegriffen. Dies schließt die Frage nach den Gründen für ein Scheitern der Reform ein.

Für die zunächst jedoch im Vordergrund stehende Beschreibung soll im Folgenden ein deskriptives Modell als theoretischer Rahmen entwickelt werden.

Theoretischer Bezugsrahmen und Konkretisierung der Fragestellung

Reformen sind bestimmt durch ihre inhaltlichen Ideen und ihre grundlegenden Konzepte, aber genauso auch durch ihre Umsetzung und ihren Verlauf. Insbesondere Bildungsreformen sind – mehrdimensionale – Prozesse und müssen als solche beschrieben und miteinander verglichen werden. Dabei liegt die Prozesshaftigkeit nicht nur im zeitlichen Verlauf begründet, sondern sie ist in hohem Maße mit dadurch bedingt, dass es sich bei Bildung um ein komplexes Konstrukt handelt, das auf verschiedenen Ebenen, in verschiedensten Institutionen mit jeweils unterschiedlichen handelnden Akteuren stattfindet, wie Fend im Rahmen seines Konzepts der „Rekontextualisierung“ festhält.[11] Fend betrachtet das Bildungssystem hier als Ganzes, dessen institutionelle Bestandteile sich gegenseitig bedingen, aber gleichzeitig dadurch gekennzeichnet sind, dass die Akteure auf jeder der Ebenen die Vorgaben der anderen für sich interpretieren und an ihre jeweiligen Voraussetzungen und Bedarfe, Möglichkeiten und Grenzen anpassen. Naturgemäß ergeben sich dabei inhaltliche Veränderungen, gehen Teile verloren, werden Ideen umgedeutet, ersetzt oder ergänzt, je nach Machbarkeit im jeweiligen Kontext. Es ist dieser Anpassungsprozess, den Fend als Rekontextualisierung bezeichnet, und aufgrund dessen nicht davon auszugehen ist, „dass alles, was vom Gemeinwesen auf bildungspolitischer Ebene gewollt ist, auf unverfälschte Weise bei Lehrern und Schülern ankommt. Viele Menschen sind an der Umsetzung beteiligt und sie alle interpretieren die Vorgaben wieder auf ihre Weise.“[12] Gerade bei der Beschreibung umfassender Reformen muss der Verlauf der Rekontextualisierungen als weitere Prozessdimension neben der zeitlichen berücksichtigt werden.

Fend wählt für sein Modell vier Ebenen des Bildungswesens[13]:

a) die **kulturelle Ebene**, auf der ein Gemeinwesen ein spezifisches Bildungsideal konstruiert und aus diesem entsprechende Bildungsziele generiert

b) die **curriculare Ebene**, auf der aus den Bildungszielen geeignete Unterrichtsinhalte abgeleitet werden; hierzu zählen neben Lehrplänen aller Art auch Lehrmittel

11. Fend, Helmut: Schule gestalten. Systemsteuerung, Schulentwicklung und Unterrichtsqualität, Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften, 2008, S. 13 [im Folgenden: Fend, Gestalten].

12. Fend, Gestalten, S. 26; vgl. auch D’Ambrosio, a. a. O., für die entsprechende Diagnose für die Reform in Brasilien.

13. vgl. Fend, Gestalten, S. 30-33.

c) die **schulpraktische Ebene** der „operative[n] Akteure“, auf der Lehrpersonen die curricularen Vorgaben im Hinblick auf die Umsetzbarkeit in speziellen Lerngruppen konkretisieren

d) die **rezeptive Ebene**, auf der Schülerinnen und Schüler sowie deren Eltern den Unterrichtsstoff aufnehmen, verarbeiten und ihm individuelle Bedeutung beimessen

Es handelt sich hier um ein bildungssoziologisches, fächerübergreifendes Modell, in dem den Fächern und ihren Didaktiken keine spezifische Position innerhalb des Systems zugewiesen wird. Die Bildungsforschung wird zwar als ein Element der curricularen Ebene aufgeführt, allerdings weitgehend beschränkt auf ihre deskriptive Funktion; die normative Rolle der Fachdidaktik als Entwicklerin von Konzepten wird vernachlässigt und bleibt unklar. Das Modell von Fend bietet einen geeigneten Ausgangspunkt zur Beschreibung von Bildungsprozessen im Allgemeinen wie Unterrichtsreformen im Besonderen, muss allerdings der fachdidaktischen Perspektive angepasst werden.

Gerade bei New Math handelt es sich um eine Reform, die in besonderem Maße wissenschaftlich begründet wurde und bestimmt war, und zwar in mehrfacher Hinsicht. Grundlage waren neben der Mathematikdidaktik vor allem die Bezugswissenschaften, insbesondere die Fachmathematik in ihrer Entwicklung hin zu Axiomatik und Strukturmathematik („Bourbakismus“) sowie die Psychologie, deren neuartige experimentelle Methodik neue Entwicklungsmodelle hervorbrachte (vgl. Kap. I. 2).

Dieser Bereich der Wissenschaft, aus dem theoretische Anstöße für die Aufnahme der Reform hervorgingen, kann als Element der kulturellen Ebene in Fends Modell eingeordnet werden, ist dann allerdings auf Grund der Allgemeingültigkeit von Wissenschaft nicht mehr durch die äußeren Grenzen eines Gemeinwesens bestimmt. Die Ebene wird somit über einen begrenzten Kulturraum hinaus erweitert, was im konkreten Fall auch sinnvoll, sogar notwendig ist, da es sich bei New Math um eine internationale, nahezu weltweite Reform gehandelt hat. Die internationalen Einflüsse dürfen also keinesfalls vernachlässigt werden. Die Frage, inwiefern die Rekontextualisierung der internationalen Konzepte auf nationaler Ebene durch spezifische kulturelle Werte bedingt ist, ist für die historische Perspektive von großem Interesse, sie unterliegt allerdings den gleichen Schwierigkeiten, wie sie weiter oben in den Anmerkungen zur Frage 1 beschrieben werden: Die Fülle der außerschulischen und außermathematischen Traditionen und Grundsätze, die Bildungsziele bedingen, zu identifizieren und darzustellen ist nur in Ansätzen möglich. Eine Verschiebung hin zu den internationalen Einflüssen aus der Wissenschaft ist daher funktional.

Die Rolle der Mathematikdidaktik war hingegen eine andere, und sie muss dementsprechend anders verortet werden. Den Didaktikerinnen und Didaktikern kam v. a. die Aufgabe zu, unterrichtspraktische Konzepte zu entwerfen, die zu einem erheblichen Teil in Lehrwerken konkretisiert wurden.[14] Wenngleich es auch hier zu – z. T. personellen – Überschneidungen mit der curricularen Ebene kam[15], so erhalten die Lehrmittel doch eine Bedeutung, die über die eines weiteren Instruments auf der politischen Ebene hinausweist. Als Umsetzung fachdidaktischer Theorien und curricularer Vorgaben für die Praxis erhalten sie ein Gewicht, das es rechtfertigt, sie aus der curricularen Ebene hervorzuheben und ihnen einen eigenen Ort, die unterrichtskonzeptionelle Ebene, zuzuweisen, deren Instrumente Unterrichtsmaterialen und Lehrwerke aller Art (Schulbücher, Übungshefte, aber auch didaktische Materialien, Spiele etc.) sind. Diese Ebene ist zwischen die curriculare und die operative unterrichtliche Ebene einzuordnen.

Auch Keitel geht von mehreren Ebenen des Bildungssystems aus, die zur (historischen) Betrachtung der Entwicklung von Unterricht – hier mit starkem Bezug auf die Entwicklungen in der BRD nach dem 2. Weltkrieg und damit auch auf die Neue Mathematik – relevant sind. Sie nennt derer drei, die Ebene der Fachdidaktik bzw. ihrer Theorien, die Ebene der Administration und diejenige der Lehrpläne und Lehrbücher als Konkretisierungen der Theorien. Die Fachdidaktik erhält hier einen deutlich höheren Stellenwert als bei Fend, jedoch eher im Hinblick auf die Theorie als die Praxis, was ebenso wie die Überschneidung bei den Akteuren mit dazu geführt haben mag, dass Curricula und Lehrwerke auch von Keitel der gleichen Ebene zugeordnet werden[16]. Für eine Beschreibung der „Mengenlehre“ müssen diese Ebenen dennoch klar getrennt werden. Die curriculare Ebene hat nicht nur schulformspezifische Lehrpläne produziert, sondern den Ausgang nahm die Reform von den schulformübergreifenden Empfehlungen der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968. Diese Empfehlungen sahen zwar eine Reform auch in der Grundschule vor, machten hierzu jedoch kaum spezifische Angaben, noch war die Grundschuldidaktik an diesen Richtlinien beteiligt. Für die Grundschule waren mithin nicht nur die Akteure, die hier produktiv tätig waren, andere; da didaktische und methodische Vorgaben in den Empfehlungen fehlen und zu Reformbeginn 1972 in vielen Ländern noch keine neuen Lehrpläne existierten, war eine weitreichende Rekontextualisierung von Seiten der Unterrichtsmaterialien produzierenden Fachdidaktikerinnen und -didaktiker unumgänglich, und aus historischer Perspektive

14. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 462.

15. Keitel, Christine, Otte, Michael & Seeger, Falk: Text, Wissen, Tätigkeit. Das Schulbuch im Mathematikunterricht, Königstein/ Ts.: Scriptor, 1980, S. 19; Glatfeld, Martin [Hrsg.]: Das Schulbuch im Mathematikunterricht, Braunschweig [u. a.]: Vieweg, 1981, S. 4 [im Folgenden: Glatfeld, Schulbuch]; ein Beispiel ist H. Besuden, der an der Erstellung curricularer Dokumente in Niedersachsen beteiligt war.

16. Keitel, Entwicklungen, S. 449.

(vgl. Frage 4) ist es von großem Interesse, inwieweit diese Lücken durch neue Konzepte gefüllt wurden oder inwieweit auf traditionelle Elemente zurückgegriffen wurde.

Die unterrichtliche Ebene fehlt bei Keitel völlig, obwohl die unterrichtspraktische Umsetzung einen wesentlichen Teil jedes Reformprozesses darstellt. Bei Fend dagegen wird sie sogar noch durch die rezeptive Ebene ergänzt, der aus bildungssoziologischer Perspektive sicher ein ganz eigener Wert zukommt. Obgleich die Frage nach der weiteren Rekontextualisierung durch die Rezipienten gerade vor dem Hintergrund der Frage nach Machbarkeit zukünftiger Reformen von Interesse ist, kann sie im Rahmen einer Beschreibung von Bildungsprozessen, die den Fokus auf die fachdidaktische Perspektive legt, nicht in ausreichendem Maße bearbeitet werden; die äußeren Bedingungen, die hier Berücksichtigung verdienen, sind zu vielfältig, liegen häufig außerhalb des Einflussbereiches der Fachdidaktik (vgl. Ausführungen zu Frage 1), und es ist „kaum möglich, die vielfältigen Strömungen und Erscheinungen jeweils im historischen Kontext zu betrachten“[17]. In einem entsprechenden Modell wird die Rezipientenebene daher in die Ebene der Unterrichts- bzw. Schulpraxis integriert.

Für die nicht-zeitliche Prozessdimension fachlicher Unterrichtsreformen ergeben sich aus dem bis hierhin Gesagten vier Ebenen des Bildungssystems:

a. die **wissenschaftlich-theoretische Ebene**; Institutionen/Akteure: Fachdidaktik, Bezugswissenschaften (Psychologie, Pädagogik, jeweilige Fachwissenschaft); Produkte: fachliche Grundlagen, entwicklungspsychologische Theorien, theoretische Unterrichtskonzepte usw.

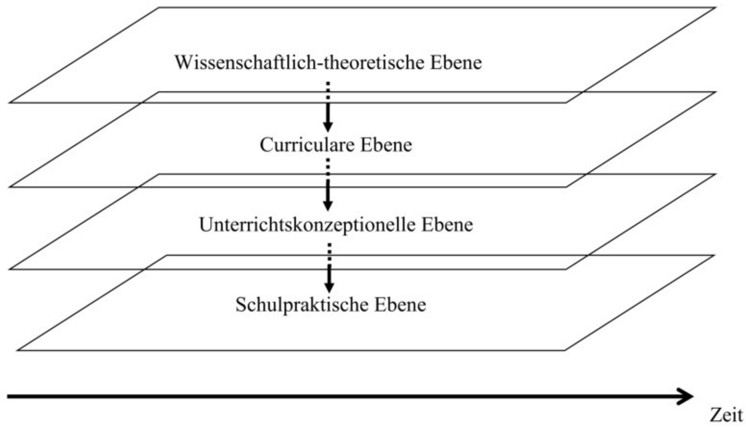
b. die **curriculare Ebene**; Institutionen/Akteure: Politik (z. B. Kultusministerien), Administration (z. B. Schulbehörden), auch Fachdidaktik (sofern direkte Mitarbeit an politischen Entscheidungen); Produkte: Lehrpläne, Richtlinien, Erlasse usw.

c. die **unterrichtskonzeptionelle Ebene**; Institutionen/Akteure: Fachdidaktik, Lehrkräfte (z. B. durch Mitarbeit an Schulbüchern), auch Schulbuchverlage; Produkte: Schulbücher, Arbeitshefte, Unterrichtsmaterialien, Unterrichtsvorschläge/-beispiele (z. B. in Zeitschriften) usw.

d. die **schulpraktische Ebene**; Institutionen/Akteure: Schule, Lehrpersonal, Schülerinnen und Schüler, Eltern; Produkte: gehaltene Unterrichtsstunde, Lernfortschritt, Klassenarbeiten, Hefte, Mappen, individuelle Bedeutungskonstruktionen usw.

17. Keitel, Entwicklungen, S. 449.

Der Terminus *Ebene* als Bezeichnung für die Abschnitte des Bildungssystems ist der Literatur entnommen, er wird hier übernommen, da er sich als angemessen erweist; die jeweiligen Institutionen, Akteure und Produkte der einzelnen Ebenen stehen nicht in rein linearem Zusammenhang, sondern vielmehr nebeneinander und in wechselseitigen Beziehungen zueinander. Auf jeder dieser Ebenen kommt nun an den verschiedenen Stellen die andere Prozessdimension – der zeitliche Verlauf – zum Tragen, so dass sich ein mehrdimensionales deskriptives Modell ergibt, wobei die vertikalen Pfeile hier zu verstehen sind als „wird rekontextualisiert durch“:



Eine Beschreibung der „Mengenlehre“ nach diesem Modell impliziert vor allem drei Fragestellungen:

1. Welches sind die zentralen Reformideen (Inhalte, didaktische Prinzipien, Methodik, Gesamtkonzept) auf den verschiedenen Ebenen?

2. Wie werden die Ideen auf den unterschiedlichen Ebenen jeweils rekontextualisiert?

3. Wie entwickeln sich Gesamtkonzept und Ideen im Verlauf der Zeit?

Diese Fragen dienen im Folgenden als Grundlage für die Beschreibung der Quellen.

0.2 Quellenbasis und Vorgehen

Einschränkung der Quellenbasis

Trotz der Eingrenzungen und Vereinfachungen, denen das obige Modell bereits unterliegt, bedarf es für eine überblicksartige Untersuchung zum einen der Auswahl geeigneter exemplarischer Quellen und zum anderen einer Schwerpunktsetzung bezüglich der Ebenen.

Der bundesrepublikanische Bildungsföderalismus bedingt eine Fülle und Vielfalt an curricularen Dokumenten, die eine auch nur annähernd vollständige Darstellung in diesem Rahmen unmöglich macht; eine Aufarbeitung der Lehrpläne für die Grundschule in der Art, wie es Damerow für die Sekundarstufe I getan hat, steht aus. Eine Beschreibung der curricularen Ebene der Modernen Mathematik muss in jedem Fall die auf Bundesebene maßgeblichen Dokumente berücksichtigen, nämlich die Empfehlungen und Richtlinien der Kultusministerkonferenz (KMK), zumal die Empfehlungen in der Version vom Oktober 1968 den Ausgangspunkt der Reform in der Grundschule darstellen. In den Zeitraum der Reform fallen außerdem die für die Grundschule spezifizierten Empfehlungen und Richtlinien, die 1976 von der KMK erlassen wurden. Die vergleichende Betrachtung ist an dieser Stelle für die zeitliche Dimension relevant, zudem hat hierbei in der Anpassung für die Grundschule gewissermaßen eine Rekontextualisierung im Kleinen, innerhalb der curricularen Ebene stattgefunden. Die Länderebene wird exemplarisch anhand der Lehrpläne des Landes Niedersachsen dargestellt, beginnend mit den Handreichungen von 1972, bis zu den Rahmenrichtlinien von 1984. Die Auswahl erfolgt nicht aus inhaltlichen Gründen, sondern aufgrund der durch die regionale Nähe bedingten Verfügbarkeit der Quellen.

Während hier die Fülle an Dokumenten die Beschränkung notwendig macht, ist es auf der schulpraktischen Ebene gerade das Fehlen geeigneter Quellen. Die Rekonstruktion alltäglicher Unterrichtspraxis – sofern sie überhaupt möglich ist[18] – erfordert umfangreiche Vorarbeiten, z. B. in Form von Interviews mit früheren Schülerinnen und Schülern und Lehrkräften oder der Sammlung und Auswertung übriggebliebener Unterrichtsaufzeichnungen, z. B. in Schulheften. Im Rahmen dieser Arbeit können solche Untersuchungen nicht geleistet werden, die schulpraktische Ebene wird daher nur insoweit behandelt, wie sie sich in Hinweisen aus den übrigen Quellen darstellt.

18. vgl. Müller, Walter & Thyen, Hermann: Rechentüchtigkeit und mathematische Bildung. Vergleichende Untersuchung von Rechenbüchern für das 5. bis 8. Schuljahr der Hauptschulen, Realschulen und Gymnasien, Darmstadt: Winter, 1967, S. 8.

Es bleiben mit der wissenschaftlichen und der unterrichtskonzeptionellen die beiden Ebenen, die am stärksten durch die Fachdidaktik sowie ihre Bezugswissenschaften geprägt sind. Auf diesen soll im Folgenden der Schwerpunkt liegen. Hier sind die Quellen wiederum zahlreich, so dass eine exemplarische Auswahl vonnöten ist. Auf der theoretischen Ebene ist die Auswahl durch die vorhandene Literatur bestimmt; es werden diejenigen theoretischen Grundlagen beschrieben, die in der Primär- wie Sekundärliteratur wiederholt als die wesentlichsten Einflüsse genannt werden.

Die Fachmathematik, die als ein entscheidender Anstoß für die Reform des Mathematikunterrichts gilt, war in weiten Teilen des 20. Jahrhunderts geprägt durch eine Neustrukturierung in Folge bahnbrechender Fortschritte in der Grundlagenforschung. Der Übergang in der Algebra von der klassischen Suche nach Lösungsformeln zur modernen Erforschung algebraischer Strukturen seit E. Galois sowie die Entwicklung der Mengenlehre durch G. Cantor seit den 1870ern lieferten ein Gerüst aus grundlegenden Begriffen und eine Sprache, die es erlaubten, bisher voneinander getrennte mathematische Teilgebiete durch die Identifikation analoger Strukturen zu verbinden und mit einer einheitlichen Terminologie zu beschreiben. Die Antinomien, die die Cantorsche Mengenlehre mit sich brachte, und die nachfolgende Grundlagenkrise gaben einen starken Impuls zur Ausdehnung der Ende des 19. Jahrhunderts begonnenen Axiomatisierung einzelner Teilgebiete, die schließlich in der (Neu-)Axiomatisierung der gesamten Mathematik durch die Bourbaki-Gruppe seit 1939 ihren Höhepunkt und mutmaßlichen Abschluss fand.[19] Es ist klar, dass Fachwissenschaft für den Unterricht stets erheblicher didaktischer Reduktion unterworfen ist. Die Impulse hierzu kamen indes nicht aus der fachmathematischen Forschung; dort, wo Hochschulmathematiker an der Reform beteiligt waren, geschah dies im Rahmen anderer Institutionen, z. B. der OEEC, oder auf Initiative einzelner, didaktisch interessierter Persönlichkeiten (z. B. J. Dieudonné, selbst Gründungsmitglied von N. Bourbaki, oder G. Papy), die damit zu Vertretern der Fachdidaktik werden.[20] Einige der bekanntesten an Unterrichtsfragen interessierten Mathematiker trafen auf Initiative der OEEC im Jahr 1959 in Royaumont aufeinander, um sich über Reformansätze, vorwiegend in Form inhaltlicher Fragen, auszutauschen. Das Royaumont-Seminar gilt als einer der wichtigsten Ausgangspunkte von New Math in Europa, und der Bericht, der wesentliche Inhalte und

19. für eine detailliertere Darstellung der fachmathematischen Entwicklung vgl. Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise, Berlin [u. a.]: Springer. Bd. 2. Von Euler bis zur Gegenwart, 2009.

20. Personale Überschneidungen zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik sind bis heute keine Seltenheit; gerade in der Anfangszeit der Reform in den 1960/70er-Jahren hatte sich die Mathematikdidaktik noch gar nicht als eigenständige Wissenschaft etabliert, so dass eine klare Trennung hier ohnehin nicht möglich ist.

Ergebnisse des Treffens versammelt, ist somit eine zentrale Quelle für unterrichtstheoretische Überlegungen aus den Reihen der Fachmathematik.

Auf zeitgenössische pädagogische Konzepte wird von den Protagonisten der „Mengenlehre“ praktisch kein Bezug genommen. Ausgesprochen groß war dagegen der Einfluss der Psychologie, v. a. der Entwicklungspsychologie. Der Name, der hierbei am häufigsten fällt und – wenn auch in unterschiedlichem Maße – in praktisch jedem Unterrichtskonzept als Argumentationsgrundlage herangezogen wird, ist der von J. Piaget. Dessen für den Mathematikunterricht relevanteste Erkenntnisse werden daher wiedergegeben. Ein weiterer Name aus der Psychologie, der in der Literatur regelmäßig erwähnt wird und der nicht nur für entwicklungspsychologische Fragen, sondern darüber hinaus für curriculare Konzeptionen wichtig ist, ist J. S. Bruner, dessen am stärksten verbreitete Konzepte ebenfalls dargestellt werden. Eine Sonderrolle innerhalb der Psychologie nimmt Z. P. Dienes ein. Dienes war auch Psychologe, sein Werk geht aber weit über seine lernpsychologischen Untersuchungen hinaus. Bekannt geworden ist er auch in Deutschland besonders durch seine mathematischen Unterrichtsvorschläge, die er in zahlreichen Schriften beschrieben und auch beispielhaft vorgeführt hat. Es handelt sich trotz dieser konkreten Beispiele bei Dienes nicht um einen Vertreter der unterrichtspraktischen Ebene, wie sie hier zu verstehen ist. Seine Reformideen sind überwiegend grundlegender, theoretisch-konzeptioneller Art, er hat „keinen Plan zur systematischen Behandlung des Stoffes vorgelegt“[21], die Praxisbeispiele sind einzelne, eher illustrierende Konkretisierungen. Dienes‘ Konzept von Mathematikunterricht wird in seinen wesentlichen Aspekten aus einer Auswahl seiner Schriften herausgearbeitet.

Die Akteure der unterrichtskonzeptionellen Ebene haben zahlreiche Quellen hinterlassen, die die Umsetzung der Reform in unterschiedlichem Maße bestimmt haben. Sehr ausführlich und umfassend sind die unterrichtspraktischen Konzepte in Verbindung mit ihren theoretischen Grundlagen in Lehrermaterialien dokumentiert, wie den Lehrerhandbüchern, die zur damaligen Zeit integraler Bestandteil jedes Grundschullehrwerks waren; da seinerzeit zudem „[f]ast alle führenden deutschen Mathematikdidaktiker [. . .] an der Herausgabe von Lehrbuchwerken beteiligt [waren]“[22], handelt es sich hierbei um ein repräsentatives Abbild der westdeutschen Mathematikdidaktik. Lehrwerke als zentrales Produkt dieser Ebene sind somit aussagekräftige Quellen über Grundlagen, Ziele,Inhalte und didaktisch-methodische

21. Neunzig, Walter: Entwurf für die systematische Gestaltung des Erstrechenunterrichts auf der Grundlage der Prinzipien von Dienes, in: BzMU 1968, S. 133 [im Folgenden: Neunzig, Entwurf].
22. Griesel, Heinz: Tradition und Fortschritt im Mathematikunterricht der Grundschule, in: Grundschule 9 (1977), 2, S. 53 [im Folgenden: Griesel, Tradition].

Prinzipien, und sie erhalten darüber hinaus einen besonderen Wert dadurch, dass sie als Bindeglied zur schulpraktischen Ebene fungieren.

Schulbücher haben großen Einfluss auf die Planung von Unterricht und können daher als vergleichsweise gute Quellen für dessen Durchführung herangezogen werden[23]. Neben dieser grundsätzlichen Bedeutung erhielten die Lehrwerke im Rahmen der Modernen Mathematik nochmals besonderes Gewicht. Bedingt durch die besonderen Umstände der Reform in der Grundschule, die u. a. gekennzeichnet war durch die Kürze der Zeit zwischen offizieller Ankündigung und gefordertem Umsetzungsbeginn, unzureichende Lehrerfortbildungen und erst nach und nach entstehende Lehrpläne, kam diesen häufig die Funktion zu, die Lehrkräfte überhaupt erst mit den Inhalten der Reform bekannt zu machen. Das Schulbuch wurde damit zum zentralen „Fortbildungsinstrument“, somit zum „eigentlichen Instrument[] der Innovation“ und „Träger der Reform“, gleichzeitig zu einem „Abbild des neuen Unterrichts“[24]. Die Auswahl von Lehrwerken als Hauptquelle für die fachdidaktische, unterrichtskonzeptionelle Ebene erweist sich noch in anderer Hinsicht als der Fragestellung angemessen; sie sind jeweils in mehreren Auflagen erschienen, dies lässt nicht nur Rückschlüsse auf die Verbreitung eines Werks zu, sondern erlaubt eine Beschreibung in Richtung der zeitlichen Prozessdimension.[25] Keitel, Otte und Seeger konstatieren wesentliche Unterschiede zwischen denjenigen Büchern, die um 1970, und denen, die nach 1975 erschienen sind, es ist also davon auszugehen, dass ein Auflagenvergleich inhaltsreiche Aussagen über Anpassungen und Veränderungen im zeitlichen Verlauf erlaubt.[26]

Der Umfang der Neuerungen durch die „Mengenlehre“, der Bedarf an entsprechenden Informationen und Materialien in der Lehrerschaft sowie nicht zuletzt das kommerzielle Interesse der Verlage führten zu einer Fülle neuer bzw. neugestalteter Schulbücher; um das Feld bearbeitbar zu halten, unterliegt diese Quellenbasis weiteren Einschränkungen. Zum einen werden drei Titel ausgewählt, die jeweils in ihren verschiedenen Auflagen betrachtet und verglichen werden, zum anderen erfolgt die Begrenzung auf die Bände nur des 1. Schuljahrs. Reaktionen, Kritik und Rezeption lassen darauf schließen, dass die Neuerungen in der 1. Klasse besonders gravierend waren, es ist also davon auszugehen, dass es sich hierbei um

23. vgl. Müller & Thyen, a. a. O., S. 8; vgl. Keitel, Otte & Seeger, a. a. O., S. 15 f.; vgl. Schubring, Gert: On the Methodology of Analysing Historical Textbooks. Lacroix as Textbook Author, in: For the Learning of Mathematics 7 (1987), 3, S. 41 [im Folgenden: Schubring, Methodology].

24. Keitel, Entwicklungen, S. 478 und 488; Keitel, Otte & Seeger, a. a. O., S. 19, 73 und 75; vgl. Glatfeld, Schulbuch, S. 3 f.; Gosztonyi, Katalin: Tradition and reform in mathematics education during the “New Math” period. A comparative study of the case of Hungary and France, 2015, www.math.u-szeged.hu/phd/dreposit/phdtheses/gosztonyi-katalin-a.pdf, S. [5], konstatiert das gleiche für Ungarn, D’Ambrosio, a. a. O., S. 74, für Brasilien.

25. vgl. Schubring, Methodology, S. 44 f.

26. vgl. Keitel, Otte & Seeger, a. a. O., S. 76 f.

sehr aussagekräftige Quellen im Hinblick auf die zentralen Reformideen handelt. Die Auswahl der drei Schulbuchwerke, die exemplarisch betrachtet werden, erfolgt aus unterschiedlichen Gründen.

Der erste Titel ist *alef* von H. Bauersfeld et. al. Es ist davon auszugehen, dass *alef* nicht besonders weit verbreitet war, das Werk ist dennoch von besonderem Interesse, da es aus dem einzigen groß angelegten Unterrichtsprojekt der fraglichen Zeit, dem *Frankfurter Projekt*, hervorgegangen ist, in dem bereits vor 1968 in erheblichem Umfang ein völlig neues Unterrichtskonzept in der Praxis umgesetzt und auf der Basis von Erfahrungen sowie empirischer Evaluation mehrmals überarbeitet wurde. Es ist daher zu erwarten, dass das Lehrwerk im Besonderen Aussagen erlaubt über Grundlagen, Ziele und Inhalte, die zunächst direkt aus der wissenschaftlich-theoretischen Ebene rekontextualisiert worden sind, über den nachrangigen Einfluss der Curricula und über die Umsetzbarkeit der neuen Konzepte. Das zweite hier behandelte Lehrwerk ist *Wir lernen Mathematik* von W. Neunzig & P. Sorger. Hier handelt es sich nun nicht nur um das erste in der BRD erschienene Schulbuch zur „Mengenlehre“, sondern zudem um eines der am weitesten verbreiteten und daher mutmaßlich einflussreichsten. An dritter Stelle wird *Mathematik in der Grundschule* von A. Fricke & H. Besuden ausgewählt. Abgesehen davon, dass es sich hierbei vermutlich um ein recht verbreitetes Schulbuch handelt, ist dieser Titel vor allem dadurch von besonderem Interesse, dass es sich nicht um ein völlig neues Werk handelt, sondern um die Neuauflage eines Schulbuchs für den Rechenunterricht der Volksschule. Dies ist vor allem im Hinblick auf eine längerfristig zu leistende Einordnung der „Mengenlehre“ in größere Traditionsstränge von erheblicher Relevanz. Da die Autoren sich zudem stets sehr kritisch gegenüber der „Mengenlehre“ geäußert und ihr sehr eigenes methodisches Konzept, die operative Methode, verfolgt haben, stellt sich in besonderem Maße die Frage, inwiefern sie vor diesem Hintergrund die neuen Vorgaben rekontextualisiert haben.

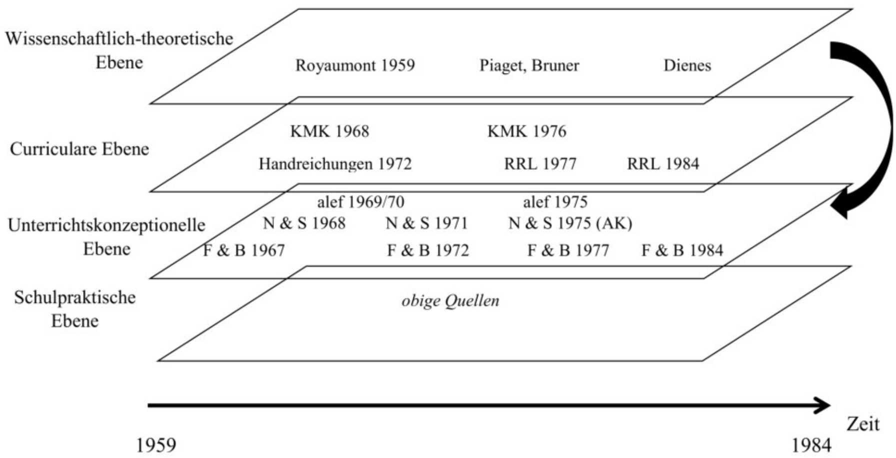
Die Kommentare zu den Schulbüchern enthalten Hinweise zur schulpraktischen Umsetzbarkeit der Lehrgänge, ebenso wie Aussagen, die Rückschlüsse auf die schulische Ausgangssituation ermöglichen. Beides ist relevant für die schulpraktische Ebene, die hier nur insoweit beschrieben wird, wie sie sich darin darstellt.

Eine Umfrage unter Zeitzeugen der Reform wurde durchgeführt, aber nicht systematisch ausgewertet. Vereinzelt werden die Antworten aus dieser Umfrage trotzdem herangezogen, sofern sie von besonderem Interesse sind; es wird dann in den Fußnoten darauf verwiesen. Das Gleiche gilt für Erkenntnisse und Informationen, die im Laufe der Zeit aus einer Vielzahl persönlicher Gespräche mit an der Reform Beteiligten gewonnen wurden.

Die betrachteten Quellen stehen in unterschiedlichen Zusammenhängen zueinander und bedingen sich auf verschiedenste Weise gegenseitig. Sofern sich hier Zusammenhänge ergeben, die im Hinblick auf die weiterführenden Fragen von Interesse sind, werden sie herausgearbeitet. Der Schwerpunkt auf den beiden didaktischen Ebenen erlaubt aber die weitgehende Fokussierung auf eine zentrale Fragestellung:

Welches waren die der „Mengenlehre" zugrunde liegenden theoretischen Reformideen und wie wurden die Konzepte auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene rekontextualisiert?

Die Einordnung der gewählten Quellen in das oben aufgestellte Modell in Zusammenhang mit diesem Schwerpunkt ergibt nun folgende Übersicht:



Gliederung und Vorgehen

Die Gliederung der folgenden Arbeit ergibt sich aus diesem Rahmen, wobei das mehrdimensionale Modell in eine lineare Darstellung übertragen werden muss. Die Kapitel orientieren sich an den Ebenen der nicht-zeitlichen Prozessdimension, der zeitliche Verlauf wird dem untergeordnet und innerhalb der Kapitel anhand der jeweiligen Quellen-Gruppen dargestellt.

Es ist ein Spezifikum der New Math-Bewegung, dass die grundlegenden Ideen den Bezugswissenschaften auf internationaler Ebene entstammen und ein wesentlicher Teil des Übertragungsprozesses in unterrichtspraktische Konzepte daher in der Anpassung an die Begebenheiten der Bundesrepublik Deutschland bestand.

Dieser Sachverhalt erlaubt, die wissenschaftlich-theoretische Ebene mit den internationalen Einflüssen zu identifizieren und diese als unabhängig von nationalen Entwicklungen darzustellen. Da die Fortschritte auf der internationalen Ebene dem deutschen Reformbeginn zudem zeitlich und ideengeschichtlich vorgelagert waren, werden diese hier zu Anfang, in Kapitel I, erläutert. Die Zusammenfassung der Ergebnisse dient gleichzeitig als Bezugspunkt und Vergleichsfolie für die weiteren Kapitel.

Eine Darstellung des Ablaufs der Reform in Deutschland mit seinen wichtigen Eckdaten und Ereignissen ist für den Überblick und zur Einordnung notwendig. Die zentralen Reformdokumente und Richtlinien sind wesentlicher Teil des Ablaufs; der Vergleich der curricularen Dokumente zum Mathematikunterricht in der Grundschule ist deshalb an die Beschreibung des Reformverlaufs angeschlossen und beides zu Kapitel II, in dem die Reform auf der nationalen Ebene der Bundesrepublik Deutschland dargestellt wird, zusammengefasst. Zu den Eckdaten zählen auch nicht fachspezifische curriculare Dokumente, von denen sich im Laufe der Arbeit gezeigt hat, dass sie offenbar Einfluss auf die Umsetzung der „Mengenlehre“ genommen haben. Diese Dokumente – wie z. B. der *Strukturplan des Bildungsrats* – werden im Rahmen der Beschreibung des Reformverlaufs näher betrachtet.

Kapitel III ist der unterrichtskonzeptionellen Ebene gewidmet und beschreibt sowie vergleicht Lehrwerke als zentrale Produkte der Akteure aus der Mathematikdidaktik. Es wird hier bewusst die Bezeichnung Lehrwerke statt Schulbücher verwendet, da es sich bei dem Material aus der Zeit der „Mengenlehre“ um gesamte Programme handelt, die aus Lehrerhandbüchern, Arbeitsblättern oder -heften und zugehörigen didaktischen Materialien bestehen; Schülerbücher dagegen sind nicht in jedem Fall Teil dieser Programme. Sofern es doch welche gibt, sind die hier betrachteten Schulbücher nur solche für das 1. Schuljahr, sie enthalten mithin noch keine für Lehrbücher späterer Jahrgänge typischen Elemente wie Merkkästen oder erläuternde Texte. In der Fachdidaktik existierende Methoden und Fragenkataloge zur Analyse von Schulbüchern[27] erweisen sich daher hier als nur sehr eingeschränkt anwendbar, zumal diese im Allgemeinen eher auf eine Analyse der Bücher an sich, weniger jedoch in ihrem historischen Zusammenhang ausgerichtet sind. Stattdessen leiten sich die Kategorien, auf die hin die Unterrichtswerke hier untersucht werden, aus den Ergebnissen des ersten Kapitels sowie den eingangs formulierten Fragestellungen ab. Die Lehrerinformationen enthalten in vielen Fällen explizit die Ziele und didaktisch-methodischen Prinzipien, die den einzelnen Lehrgängen zugrunde gelegt werden; dennoch ist klar, dass deren Wiedergabe, Umformulierung,

27. vgl. hierzu etwa Rezat, Sebastian: Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen, Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009; Keitel, Otte & Seeger, a. a. O., S. 213-218; Glatfeld, Schulbuch, S. 150-153.

Zusammenfassung und Vergleich eine Interpretationsleistung darstellt, die durch das subjektive Vorverständnis der Autorin bestimmt sind. Die zentrale angewandte Methode in dieser Arbeit ist somit die hermeneutische.[28] Dies schlägt sich unter anderem darin nieder, dass in den Quellen genannte Prinzipien z. T. mit moderner Terminologie belegt werden, sofern die Begriffe dahinter als gleichwertig gedeutet werden.

Die Ergebnisse zu den drei Lehrwerken werden jeweils nach den Kategorien geordnet, die sich aus Kapitel I ergeben, und dann entsprechend mit diesen verglichen. Zudem erfolgen ein Vergleich der Werke untereinander nach den gleichen Kriterien und ein Vergleich der jeweils verschiedenen Auflagen. Für Letzteres wird bei jedem der Unterrichtswerke von der ersten Auflage seit 1968 – dem Jahr der KMK-Empfehlungen – ausgegangen, diese werden jeweils ausführlich beschrieben, die weiteren Auflagen dann nur noch im Hinblick auf Unterschiede dazu betrachtet.

Schulbücher bzw. Lehrwerke sind kein reines Abbild der Intentionen, die die Verfasserinnen und Verfasser verfolgen. Sie unterliegen äußeren Bedingungen von Seiten weiterer an der Herausgabe beteiligter Einrichtungen, v. a. den ökonomischen Interessen der Verlage und den Forderungen, die von politischer Seite an die Genehmigung von Schulbüchern geknüpft sind[29], die mithin bedeutsam für die Frage nach Bedingungen für Rekontextualisierung sind. Wo derartige Einflüsse direkt an den Quellen belegbar sind, wird darauf eingegangen, für weitergehende Interpretationen in diese Richtung ist der deskriptive Teil nicht der Ort, sie sind Teil der zentralen Fragestellung, die unter den Ergebnissen in Kapitel IV ebenso aufgegriffen wird wie Folgerungen zu den übergeordneten Fragen. Auf die schulpraktische Ebene, der kein eigenes Kapitel gewidmet ist, wird ebenfalls in diesem Zusammenhang eingegangen.

Wiewohl ein historisches Interesse und historische Fragestellungen im Vordergrund stehen, so handelt es sich doch um eine mathematikdidaktische Arbeit, die verschiedenste mathematische wie didaktische Theorien und Begriffe einbezieht. Sie richtet sich vorrangig an ein mathematikdidaktisches Publikum, die verwendeten

28. Die Arbeit folgt dabei methodisch neueren Abhandlungen zur Geschichte des deutschen Mathematikunterrichts, vgl. Allmendinger, Henrike: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“. Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht, Siegen: universi, 2014, S. 4 f.; Krüger, Katja: Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips, Berlin: Logos Verl., 2000, S. 9; vgl. auch Wagemann, Elmar B.: Überlegungen und Anregungen zum nicht-quantitativen Vergleichen von mathematischen Schulbüchen, in: Glatfeld, Schulbuch, S. 159 f.

29. vgl. beispielhaft KMK: Richtlinien für die Genehmigung von Schulbüchern. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 29.6.1972. Verfügbar unter: www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_06_29_Schulbuecher_Genehmigung.pdf; vgl. darüber hinaus zu den äußeren Bedingungen Schubring, Methodology, S. 45 f. sowie Glatfeld, Schulbuch, S. 3 und 7 f.

Fachtermini werden daher nicht erklärt. Da auch die fachmathematischen Inhalte nicht über absolute Grundlagen wie Begriffe der naiven Mengenlehre hinausgehen, wird ihre Kenntnis bei einem entsprechenden Fachpublikum ebenso vorausgesetzt.

I Die wissenschaftlich theoretische Ebene: Internationale Reformeinflüsse

New Math war eine internationale bzw. weltweite Reform[30]. Ihren Ausgang nahm sie dabei in den USA und – entgegen der allgemeinen Annahme, sie wäre von dort über den Atlantik geschwappt – parallel und zunächst weitgehend unabhängig ebenso in Europa. Zur Überschätzung des US-amerikanischen Einflusses zumindest auf die bundesrepublikanischen Reformbemühungen mag die hiesige Verbreitung und Popularität des Buchs „Warum kann Hänschen nicht rechnen¿‘ (*Why Johnny Can't Add*, 1973) von Morris Kline (dt. Übers. von 1974) beigetragen haben, die wohl daher rührt, dass die Gegner der Reform sich durch die Argumente in ihrer Ablehnung bestätigt sehen konnten, ohne ihren polemischen Charakter allzu kritisch zu hinterfragen und ohne der Warnung Heinrich Bauersfelds vor der Gefahr „einer unkritischen Übertragung auf unsere Situation“ ob der „gravierenden Unterschiede[]“[31] zwischen Deutschland und den USA im Vorwort zu viel Beachtung zu schenken.

Es wird häufig kolportiert, der sogenannte Sputnik-Schock im Jahr 1957 sei der entscheidende Anstoß für die Aufnahme weitreichender Neuerungen gewesen. Es mag wohl sein, dass das Ereignis den Bemühungen um Veränderungen im althergebrachten Mathematikunterricht eine zusätzliche Motivation gegeben hat – auch

30. vgl. Kilpatrick, Jeremy: The new math as an international phenomenon, in: ZDM 44 (2012), 4, besonders S. 566.

31. Bauersfeld in Kline, Morris: Warum kann Hänschen nicht rechnen? Das Versagen der Neuen Mathematik, Weinheim [u. a.]: Beltz, 1974, S. 7 und 8 [im Folgenden: Kline, Hänschen]; vgl. dazu auch Picker, Bernold: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule, in: Der Grundschulunterricht. 1968-1978; eine Literaturübersicht, Duisburg: Verl. für Pädagogische Dokumentation. Bd. 2. Lernbereich Mathematik, 1979, S. 29 [im Folgenden: Picker, Reform], wo Picker feststellt, dass von den Reformgegnern regelmäßig und gerne Kline zitiert wurde; vgl. dazu auch die Hinweise auf Kline in Kapitel II. 1 b); vgl. darüber hinaus Damerow, a. a. O., S. 53 und 55 sowie Lauter, Josef: Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Didaktisch-methodische Hilfen für die Unterrichtspraxis, Donauwörth: Auer, ²1977, S. 16, zu Unterschieden zwischen den USA und Deutschland.

im finanziellen Sinne –, der ihm zugeschriebenen Bedeutung steht allerdings entgegen, dass der Beginn der Bewegung auf beiden Seiten des Atlantiks bereits mehrere Jahre zuvor nachweisbar ist.[32]

Da sich sowohl Ausgangssituation als auch Umsetzung in den USA deutlich von denen in Europa unterschieden, soll an dieser Stelle nicht weiter auf die amerikanische Reform eingegangen werden – zumal es sich bei dieser keinesfalls um einen Konsens, sondern um viele, teils völlig unterschiedliche Reformbemühungen gehandelt hat.[33]

Die europäischen Länder haben selbstredend ihre jeweils eigene Geschichte der New Math, ihre eigenen Projekte, ihren eigenen Verlauf, ihre eigene Wertung und Namen, die mit der modernen Mathematik assoziiert sind. Genannt seien hier exemplarisch für die Reform auch der Primarbildung die Nuffield Foundation in England und Wales, wo erste Reformbemühungen bereits zu Beginn der 1950er Jahre sichtbar sind[34], Tamás Varga in Ungarn[35], Willy Servais in Belgien[36] und Nicole

32. So zumindest De Bock, Dirk & Vanpaemel, Geert: Modern mathematics at the 1959 OEEC Seminar at Royaumont, in: Bjarnadóttir, Kristín [Ed.]: "Dig where you stand" 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education; September 25-28, 2013, at Department of Education, Uppsala University, Sweden, Uppsala: Uppsala Universitet, 2015, S. 152 [im Folgenden: De Bock & Vanpaemel, Royaumont]; ebenso Kline, Hänschen, S. 31; dagegen z. B. Keitel-Kreidt, Christine: Reformen des Mathematikunterrichts in den USA. Geschichte, Reformkonzeption und Curriculumentwicklung, Bielefeld: Univ. Bielefeld, 1981, S. 8; Schubring, Gert: The Road Not Taken – The Failure of Experimental Pedagogy at the Royaumont Seminar 1959, in: JMD 35 (2014), 1, S. 160. [im Folgenden: Schubring, Royaumont]; Damerow, a. a. O., S. 41; Moon, Bob: The ‚New Maths' Curriculum Controversy. An International Story, London [u. a.]: The Falmer Press, 1986, S. 45; Müller, Gerhard & Wittmann, Erich: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele, Braunschweig: Vieweg, 1977, S. 142 [im Folgenden: Müller & Wittmann, 1977]; differenzierter Robinsohn, Saul B.: Bildungsreform als Revision des Curriculum und Ein Strukturkonzept für Curriculumentwicklung, Neuwied am Rhein [u. a.]: Luchterhand, $^{3}1971 = {}^{4}1972$, S. 32; zur Frage der Finanzierung vgl. z. B. Picker, Reform, S. 2, und Zumpe, a. a. O., S. 12; vgl. auch die Hinweise in Bruner, Jerome S[eymour]: Der Prozeß der Erziehung, Düsseldorf: Schwann = Berlin: Berlin Verl., 1970, S. 82 f. [im Folgenden: Bruner, Prozeß].

33. Bei Keitel-Kreidt, a. a. O., S. 16, ist die Rede von „Adaptionen [...] von Fragmenten der amerikanischen Reformentwicklung in der Bundesrepublik Deutschland", für einen detaillierten Einblick in die US-amerikanischen Reformprojekte vgl. ebenda; für eine stärker überblicksartige Darstellung vgl. Kline, Hänschen, S. 30-39, Lenné, Helge: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart: Klett, 1969, S. 103-108, Damerow, a. a. O., S. 42 f., Picker, Reform, S. 2 f. und Kilpatrick, a. a. O.

34. vgl. Moon, a. a. O., S. 121-160; vgl. Rogers, Leo: Epistemology, methodology, and the building of meaning in a new community of mathematics educators in England, 1950-1980, in: Bjarnadóttir, Kristín [Ed.]: "Dig where you stand" 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education; September 25-28, 2013, at Department of Education, Uppsala University, Sweden, Uppsala: Uppsala Universitet, 2015, S. 345-360.

35. Varga, Tamás: Benachteiligte Kinder lernen moderne Mathematik, in: BzMU 1971, S. 9-17, zeigt, dass Varga seine Ideen auch in den deutschsprachigen Ländern präsentierte.

36. vgl. De Bock, Dirk & Vanpaemel, Geert: Early experiments with Modern Mathematics in Belgium, paper at ICME13 2016.

Picard in Frankreich[37]. Der Einfluss, den die spezifischen Konzepte aus anderen europäischen Ländern auf die bundesdeutsche Grundschulmathematik hatten, kann an dieser Stelle nicht näher untersucht werden. Er war mutmaßlich verhältnismäßig gering, da die Protagonisten der Reform in der Bundesrepublik nur in Einzelfällen (z. B. Bauersfeld) längerfristige internationale Kontakte pflegten. Die größte Rolle spielten sie wohl in der Hinsicht, dass die internationalen europäischen Aktivitäten häufig als Argument für die Notwendigkeit einer Reform auch in Deutschland herangezogen wurden, u. a. mit dem Zusatz, dass die Bundesrepublik nicht den Anschluss an die Entwicklungen benachbarter Länder verlieren darf.[38]

Ein gewisser Einfluss muss jedoch der *International Study Group for Mathematics Learning* (ISGML) zugestanden werden, einer von Zóltan Dienes 1958 gegründeten Gruppe, der neben einigen der oben Genannten weitere mit dem Lernen von Mathematik Beschäftigte aus allen Teilen der Welt angehörten, die in regelmäßigem Austausch untereinander standen. Die ISGML verfügte im Laufe der Zeit über Studienzentren in den verschiedenen Erdteilen, von denen aus die Arbeit vor Ort koordiniert wurde; ein wesentlicher Teil der Arbeit bestand in der Weiterverbreitung bereits entwickelter Konzepte über Unterrichtsversuche, Workshops für Lehrende und Tagungen. Eine solche Tagung, welche von der ISGML in Zusammenarbeit mit der UNESCO, die ab 1960 ebenfalls auf internationaler Ebene die Bemühungen um eine Reform des Mathematikunterrichts durch verschiedenen Initiativen unterstützte, ausgerichtet wurde, fand 1966 in Hamburg statt, die Ideen der ISGML verbreiteten sich also auch in Deutschland.[39]

---

37. Für die internationale Perspektive vgl. z. B. Moon, a. a. O., für einen exemplarischen Überblick; Prytz, Johan: New Math for big education, old math for small education. A study of different way to reform school mathematics, paper at ICME13, Hamburg, 2016, für Schweden; Bjarnadóttir, Kristín: The Implementation of the 'New Math' in Iceland. Comparison with Neighbouring Countries, in: The International Journal for the History of Mathematics Education 8 (2013), 1, S. 1-18, für Island; Gosztonyi, a. a. O., für Ungarn bzw. Frankreich.

38. vgl. exemplarisch für solche Bezüge auf internationale Entwicklungen Deutscher Bildungsrat: Strukturplan für das Bildungswesen. Verabschiedet auf der 27. Sitzung der Bildungskommission am 13. Februar 1970, Bonn: Dt. Bildungsrat, 1970, S. 21, und Schulz-Hardt, Joachim & Fränz, Peter: Zur Geschichte der Kultusministerkonferenz 1948-1998, in: Sekretariat der Kultusministerkonferenz: Einheit in der Vielfalt. 50 Jahre Kultusministerkonferenz 1948-1998, Neuwied [u. a.]: Luchterhand, 1998, S. 177-227. Verfügbar unter: https://www.kmk.org/kmk/aufgaben/geschichte-der-kmk.html; vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 470, zu der geringen Zahl internationaler Kontakte.

39. vgl. zur UNESCO Moon, a. a. O., S. 47 f. und 100 f.; vgl. Lauter, a. a. O., S. 16; Näheres zu der Hamburger Tagung in II.1 b); vgl. International Study Group for Mathematics Learning [ISGML]: Mathematics in Primary Education. Learning of mathematics by young children / compiled by Z. P. Dienes, Hamburg: UNESCO Institute for Education, 1966, Verfügbar unter: http://unesdoc.unesco.org/images/0001/000184/018427eo.pdf; vgl. Dallmann, Gerhard & Heyer, Peter [Hrsg.]: Mathematikunterricht in der Grundschule. Beiträge zum Symposion „Mathematikunterricht in der Grundschule" vom 21. bis 25. November 1966 in Berlin, Weinheim [u. a.]: Beltz, 1970; zur ISGML allgemein vgl. Dienes, Zoltan Paul: Memoirs of a maverick mathematician, 2nd ed., Leicestershire: Upfront Publishing, 2003, S. 7, 348, 392 und 417 [im Folgenden:

I.1 Impulse aus der Fachmathematik: Das Royaumont-Seminar

Das OEEC-Seminar von 1959 in Royaumont gilt als Wendepunkt in der Geschichte des Mathematikunterrichts, indem es so etwas wie den offiziellen Startpunkt für die internationale New Math-Bewegung markiert.[40] Dabei handelt es sich bei dem Treffen keineswegs um eine so isolierte Veranstaltung, wie es später den Anschein hatte und wie es dieser ihm zugeschriebenen Bedeutung entsprechen würde. Tatsächlich gab es vergleichbare Treffen, z. T. mit den gleichen Teilnehmern, bereits davor und auch danach, und es ist wohl vorwiegend dem Bericht des Seminars, der unter dem Titel „New Thinking in School Mathematics" im Jahr 1961 erschienen ist, zu verdanken, dass ihm diese besondere Stellung zukommt. Die Schrift, die noch im selben Jahr bereits in der 2. Aufl. erschien, also offenbar weitere Verbreitung gefunden hat als zunächst angenommen, enthält keine Hinweise auf vorhergehende Aktivitäten, stattdessen förderte die OEEC selbst im Nachgang die Mythenbildung durch gezielte finanzielle Förderung vor allem derjenigen curricularen Ideen, die aus dem Treffen hervorgegangen sind. Dass der Report des Seminars infolgedessen die Rolle einer „dogmatischen ‚Bibel' der modernen Mathematik."[41] einnahm und der Arbeit der OEEC/OECD auch für Deutschland eine „„katalytische" Wirkung auf die nationale Bildungspolitik"[42] bescheinigt wurde, rechtfertigt an dieser Stelle, ihn als eine der Hauptquellen für die ursprünglichen Konzepte und Ideen heranzuziehen, und es legitimiert darüber hinaus die Vernachlässigung der Tatsache, dass das Buch mitnichten die Gesamtheit der im Seminar diskutierten Themen widerspiegelt, sondern eine Auswahl, die Howard Fehr[43] nach unklaren Kriterien vorgenommen hat und die wesentliche Diskussionspunkte unter den Tisch fallen lässt.[44]

In Europa tritt, nach den ersten Bemühungen der UNESCO, mit der OEEC (*Organisation for European Economic Co-operation*) – der Vorgängerorganisation der

Dienes, Memoirs]; Gründungsjahr nach Zumpe, a. a. O., S. 16.

40. vgl. De Bock & Vanpaemel, Royaumont, S. 151.

41. De Bock & Vanpaemel, Royaumont, S. 166, übers. T.H.

42. Robinsohn, a. a. O., S. 41.

43. Howard Fehr (1901-1982) war Professor und Head am Department of Teaching of Mathematics des Teachers' College an der Columbia University und als Chairman der Section II des Seminars mit der Erstellung des Berichts betraut.

44. De Bock & Vanpaemel, Royaumont, S. 164; Schubring, Royaumont, S. 162. Letzterer zeigt ebenda, dass vor allem ein erhebliches Gewicht auf der Forderung nach einer Ausweitung empirischer Unterrichtsforschung lag, ein Aspekt, der als wesentlich für Verlauf, Rücknahme und mutmaßliches „Scheitern" der Reform gesehen werden muss, der zudem ein Schlaglicht auf die Bedeutung der OEEC für die Richtung wirft, die die Reform eingeschlagen hat, und somit wichtig für eine historische Wertung der Gesamtreform ist. Für die Frage nach unterrichtspraktischen Konzepten, die hier im Vordergrund steht, ist diese Perspektive jedoch weniger relevant.

OECD – also schließlich eine Institution als entscheidende treibende Kraft auf den Plan, die vorwiegend wirtschaftliche Ziele verfolgte und die die Ansätze, die spätestens seit 1952 bzw. schon ab 1950 u. a. von Seiten der CIEAEM (*International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*) existierten, aufnahm und in Verbindung mit der ICMI das Seminar in Royaumont plante.[45] Verantwortlich für die Organisation des Seminars war das 1958 mit dem Ziel, die Mathematikausbildung effizienter zu gestalten, gegründete *Office for Scientific and Technical Personnel*, das seine Existenzberechtigung – wie schon der Name vermuten lässt – der notwendigen Verhinderung eines drohenden Fachkräftemangels auf technischem Gebiet verdankte.[46]

Das Royaumont-Seminar fand statt vom 23.11. - 4.12.1959 – und damit einen Tag kürzer als ursprünglich geplant.[47] Die 46 Teilnehmerinnen und Teilnehmer setzten sich zusammen aus Universitätsdozenten, Sekundarstufenlehrern, Regierungsangehörigen sowie vereinzelten Didaktikern aus den Mitgliederländern, darunter für die internationale Seite der New Math so bekannte Namen wie Jean Dieudonné, Emma Castelnuovo, Lucienne Felix, Howard Fehr etc.; deutsche Vertreter waren Heinrich Schöne, Mitglied des Rheinland-Pfälzischen Kultusministeriums, und mit Hermann Athen und dem als Redner eingeladenen Otto Botsch zwei Gymnasiallehrer und Schulbuchautoren.[48] Details zum Ablauf sind für die hier betrachtete Fragestellung weniger von Bedeutung[49]. Von erheblicher Relevanz ist jedoch, dass – obgleich Royaumont stark mit Dieudonnés „À bas Euclide“ assoziiert ist und der Schwerpunkt des Seminars auf Fragen der Sekundarstufen-Mathematik lag – der Bericht belegt, dass auch bereits vor 1960 Fragen des Primarstufenunterrichts Berücksichtigung fanden. Besonders Marshall Stone, Professor am *Department of Mathematics* der Universität Chicago und Chairman der ICMI, dem in seiner Rolle als *President of the Seminar* die Aufgabe zuteil war, das Einführungs-Referat zu halten, formuliert in eben diesem deutlich entsprechende Forderungen. Die Beiträge, die sich ausschließlich mit Fragen der weiterführenden Schulen befassen[50],

45. De Bock & Vanpaemel, Royaumont, S. 153 und 165 f.; Bjarnadóttir, Kristín: Royaumont – proposals on arithmetic and algebra teaching for lower-secondary school level, paper at ICME13, Hamburg, 2016, S. 1, sieht die Ursprünge, die in Royaumont kumulierten, in mindestens drei Reformbewegungen: der New Math in den USA, den Bemühungen der CIEAEM v. a. in Frankreich, und den Reformen, die in Großbritannien bereits seit 1950 im Gange waren, vgl. dazu Rogers, a. a. O.

46. De Bock & Vanpaemel, Royaumont, S. 152; Schubring, Royaumont, S. 160.

47. Organisation for European Economic Co-operation [OEEC]: New thinking in school mathematics, Paris: OEEC, 1961, S. 7; De Bock & Vanpaemel, Royaumont, S. 151 und 162.

48. vgl. die vollständige Teilnehmerliste in OEEC, a. a. O., S. 213-219.

49. für Weiteres über das Seminar selbst vgl. De Bock & Vanpaemel, Royaumont, und Schubring, Royaumont.

50. Dazu zählt auch die im Anschluss an das Seminar, 1960 in Dubrovnik, von einer „kleine[n] Gruppe von Fachleuten“ (Zumpe, a. a. O., S. 10) zusammengestellte Stoffsammlung mit dem Titel „Synopsis für die moderne Schulmathematik“, zumal diese für die leistungsmäßig oberen 50

werden im Folgenden nur insofern berücksichtigt und wiedergegeben, als sie allgemeine Aussagen über den Mathematikunterricht als Ganzes enthalten oder solche, die sich auf den Elementarunterricht übertragen lassen.

Über die Notwendigkeit einer Reform des mathematischen Unterrichts herrscht bei den Teilnehmenden des Royaumont-Seminars erwartungsgemäß Einigkeit. Ausgangspunkt hierfür sind immer wieder und vorrangig ökonomische Gründe, die darauf beruhen, dass es in sämtlichen Bereichen einer veränderten Arbeitswelt technisch verständiger Arbeitender bedürfe, und zwar universell, d. h. über soziale Grenzen hinweg. Es handelt sich also vor allem um eine utilitaristische Argumentation, die den Nutzen der Mathematik – für die Berufswelt, aber auch für Studium und Alltag – betont.[51] Stone verweist zudem darauf, dass die enorme Weiterentwicklung der Mathematik in den zurückliegenden 100 Jahren in den traditionellen Lehrplänen keinen Niederschlag findet, ein Umstand, der die erreichten Fortschritte ausblendet, ein altes, nicht mehr angemessenes Bild des Faches vermittelt und dadurch eine inhaltliche Lücke zwischen schulischer und universitärer Lehre entstehen lässt, die den Einstieg in ein Studium erschwert.[52] Es liegt darin sicher eine weitere Gefahr für das Vorhaben, den Bedarf an Fachkräften zu decken.

Die ökonomischen **Ziele** werden klar als dominant hervorgehoben, es sind jedoch nicht die einzigen, die in dem Bericht Erwähnung finden. Die soziale Komponente, die eine moderne Mathematik für alle Berufsgruppen impliziert, ist bereits angeklungen und wird verstärkt, wenn der ökonomische als integraler Bestandteil des gesamtgesellschaftlichen Fortschritts gesehen wird und wenn die Teilnehmer zusammenfassend eine für alle verpflichtende Allgemeinbildung als Ziel nennen, die in Form einer allgemeinen liberalen Geisteshaltung über unmittelbar anwendbares Wissen hinausgeht.[53]

Das Seminar selbst – zumindest soweit es in dem Report wiedergegeben ist – konzentriert sich über die Formulierung der Reformziele hinaus vor allem auf die Frage, welche **curricularen Inhalte** zukünftig mit welchen Methoden unterrichtet werden sollten.[54] Neben der Grundlegung allgemeiner Fähigkeiten und mathematischer Methoden für die weiterführenden Schulen, wie Abstraktionsfähigkeit, Problemlösekompetenz und Kenntnis der mathematischen Sprache, schlägt Stone

% der Schülerschaft gedacht ist; vgl. [OECD]: Synopsis für die moderne Schulmathematik / hrsg. vom Delegierten der Ständigen Konferenz der Kultusminister bei der OECD, Frankfurt a. M. [u. a.]: Diesterweg, 1966; im Original bereits 1961 herausgegeben; vgl. OEEC, a. a. O., S. 122.

51. vgl. OEEC, a. a. O., S. 11, 17, 19, 62 und 125.

52. vgl. OEEC, a. a. O., S. 14-16.

53. „Mathematics as liberal education. (Freedom of mind)“ als eines von drei Erziehungszielen in der Zusammenfassung, S. 62; “the aim [...] of making [...] education free, universal and compulsory“ bei Stone in OEEC, a. a. O., S. 18; vgl. auch ebenda, S. 27.

54. vgl. OEEC, a. a. O., S. 12.

vor, in der Primarschule die inhaltlichen Teilgebiete Arithmetik, Algebra und Geometrie in elementarer Form zu behandeln.[55] Die Idee, geometrische Inhalte bereits in der Grundschule zu behandeln, hat in Royaumont rege Diskussionen hervorgerufen, vor allem in Hinblick auf die Frage, wie sich das Verhältnis von induktiver Herangehensweise und deduktiver Methode gestalten soll. Klar ist unterdessen, dass im Anfangsunterricht keine deduktive euklidische Geometrie betrieben werden soll, vielmehr schlägt O. Botsch vor, z. B. Symmetrie mit Tätigkeiten wie Falten, Schneiden und Zeichnen einzuführen.[56] Kapazitäten für die neuen, zusätzlichen Inhalte können frei werden, wenn der Arithmetikunterricht so verbessert wird, dass er zukünftig weniger Zeit beansprucht. Die Rolle der Arithmetik verändert sich dabei, denn auch wenn dem Rechnen weiterhin erheblicher Wert zugesprochen wird, so darf sie doch nicht länger nur in der Vermittlung einer Sammlung von Rechenkalkülen bestehen, sondern muss als Basis der weiteren Mathematik betrachtet und daher mit deren Begriffen – z. B. Klasse und Äquivalenz – vernetzt werden. Exemplarisch geht G. Choquet darauf ein, wie die ganzen Zahlen als Beispiel für eine algebraische Struktur unter entsprechenden mathematischen Gesichtspunkten untersucht werden können.[57]

Generell scheint ein gewisser Konsens darüber bestanden zu haben, dass die Rolle der Algebra nicht primär in einer Erweiterung des Stoffs um ihre Begriffe besteht, sondern ihre Strukturen der ***Vernetzung*** der einzelnen mathematischen Inhalte untereinander dienen sollen. Die Mathematik wird als „Gebäude aus mathematischen Begriffen“[58] aufgefasst und die algebraischen Strukturen als die verbindenden Elemente. Grundlegend für diese Begriffe ist wiederum das Konzept der Menge, dessen Aufnahme in den Unterrichtsstoff Servais aus mehreren Gründen fordert. Auf Mengen basieren nicht nur die Algebra und die Logik, sondern letztlich die gesamte (moderne) Mathematik; zudem umgeben sie uns im Alltag, und – hier nimmt Servais Bezug auf methodische und lerntheoretische Überlegungen – sie können aus konkreten Handlungen abstrahiert werden und sind daher ein geeigneter Stoff für den Anfangsunterricht.[59]

Mit dem bisher Gesagten geht fast zwangsläufig einher, dass die Mathematik nicht nur in der Horizontalen durch die grundlegenden Strukturen vernetzt ist, sondern auch über die Schuljahre hinweg als Einheit erscheint und als solche zu vermitteln ist. Es folgt daraus die Notwendigkeit eines übergeordneten strukturorientierten curricularen Konzepts, das sowohl die Grundschule als auch die Universität mit

55. vgl. OEEC, a. a. O., S. 20 f.
56. vgl. Botsch in OEEC, a. a. O., S. 76-79.
57. vgl. Choquet in OEEC, a. a. O., S. 63 f.
58. OEEC, a. a. O., S. 124, übers. T. H.
59. Servais in OEEC, a. a. O., S. 68 f.

einschließt. Gerade der Primarunterricht ist dabei von „fundamentaler Wichtigkeit“, denn jedes höhere Lernen ist „gegründet auf und begrenzt durch das, was in der Grundschule erreicht worden ist“.[60] Die Teilnehmer in Royaumont sind sich bewusst, dass eine solche inhaltliche Umstrukturierung drastische Veränderungen nach sich zieht und nicht weniger als einer „Revision des gesamten Mathematik-Curriculums von Grund auf“[61] und damit einer curricularen Revolution gleichkommt, wie sie Servais wohl am eindrücklichsten beschreibt: „The teaching of algebra and mathematics cannot be modernised simply by bringing in new topics at the last minute and tacking them on to the traditional subject matter. The whole edifice must be rebuilt from the foundations and erected in accordance with modern ideas.”[62] Diese Forderung nach einer Reform von dieser Konsequenz ist nicht ohne Widerspruch geblieben, und so mahnt der Bericht schließlich, die zweifellos notwendigen Veränderungen dennoch maßvoll umzusetzen, „by evolution (not revolution)“[63].

Dass die neuen Inhalte in den ersten Schuljahren besonderer, kindgerechter **Methoden** bedürfen, wird von Stone so formuliert. Mit Hinweis auf Untersuchungen von Piaget fordert er neue Unterrichtsmaterialien ebenso wie neue Schulbücher.[64] Servais wird konkreter, wenn er betont, dass die neuen Begriffe nicht von theoretischer Seite her eingeführt werden, sondern zunächst experimentell und aktiv-handelnd entdeckt, erst nach und nach abstrahiert, definiert und schließlich angewendet werden sollen.[65] Dennoch bestand zumindest über den Einsatz strukturierten Materials kein Konsens im Seminar: „Among these areas of disagreement were: [...] the excessive use of blocks, rods and color.“[66]

Ein Aspekt, der an mehreren Stellen Erwähnung findet und einen relativ breiten Platz in den Ergebnissen des Seminars einnimmt, ist die Frage der Lehrerbildung bzw. -fortbildung, die als essentieller Faktor für den Erfolg der Reform gesehen wird und bezüglich der zu ergreifenden Maßnahmen ein offenes Problem darstellt.[67] Es ist jedoch unzweifelhaft, dass eine curriculare Reform wie die beschriebene zum Scheitern verurteilt ist, wenn die umsetzenden Lehrkräfte nicht über eine ausreichend fundierte fachliche Ausbildung verfügen.

Didaktische Prinzipien, die über curriculare Überlegungen hinausgehen und ausgehend von den Inhalten die Methoden theoretisch fundieren, werden nicht weiter

60. Stone in OEEC, a. a. O., S. 22, übers. T. H., vgl. ebenda, S. 20-22.
61. Stone in OEEC, a. a. O., S. 24, übers. T. H.
62. Servais in OEEC, a. a. O., S. 68.
63. OEEC, a. a. O., S. 124.
64. vgl. Stone in OEEC, a. a. O., S. 20 und 23-25.
65. vgl. Servais in OEEC, a. a. O., S. 69.
66. OEEC, a. a. O., S. 110.
67. vgl. OEEC, a. a. O., S. 25, 118, 120 f. und 123.

angesprochen. Die Basis für deren Formulierung zu legen, obliegt der Psychologie.

Zusammenfassung

Für die Frage nach der Umsetzung in Lehrgängen für den Mathematikunterricht in der Grundschule ergeben sich aus dem Vorhergehenden – trotz der Unterschiede zwischen den einzelnen Beiträgen – zusammengenommen folgende relevante Punkte:

Die im Seminarbericht festgehaltenen **Ziele** sind:

- ökonomischer Art: Nutzen der Mathematik, vorwiegend für Beruf (Schwerpunkt)
- sozialer Art: Allgemein- und Persönlichkeitsbildung

Bedingt durch die Dominanz des curricularen Aspekts gibt der Bericht in großem Umfang inhaltliche Diskussionen wieder, die jedoch zu einem großen Teil nur auf die Sekundarstufe bezogen sind. Für die Primarstufe werden dennoch folgende **Inhalte** genannt:

- Arithmetik (als ein mathematisches Teilgebiet, Fundament der sowie Beispiel für die Mathematik)
- Algebraische Strukturen (als Leitideen, nicht näher ausgeführt)
- Mengen (Klassen, Äquivalenz, Mengenalgebra)
- Geometrie (Symmetrie)

Bedeutsamer scheint jedoch in curricularer Hinsicht das inhaltliche Gesamtkonzept einer Mathematik, die als Einheit betrachtet wird und als eine solche dargestellt werden soll, als ein Netz aus Begriffen, aufgespannt von einem Gerüst aus algebraischen Strukturen, die nicht nur in der Horizontalen die unterschiedlichen Teilgebiete verbinden, sondern über verschiedene Jahrgangsstufen und Niveaus die gesamte mathematische Laufbahn der Lernenden durchziehen. Es folgen daraus als ***curriculumbezogene didaktische Prinzipien***:

- die Orientierung an fundamentalen Ideen
- das Prinzip eines Spiralcurriculums

Die **methodischen Hinweise** für den Elementarunterricht enthalten in all ihrer Kürze Forderungen nach:

- Handlungsorientierung und Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler
- Materialeinsatz
- experimentellem Vorgehen

I.2 Impulse aus der Psychologie: Neue Methoden und Lerntheorien

I.2.a Jean Piaget: Operationen und die Entwicklung des Zahlbegriffs

Der Schweizer Psychologe Jean Piaget (1896-1980) ist sicher bis heute einer der einflussreichsten Wegbereiter der modernen Entwicklungspsychologie. Da die Verbreitung seiner Erkenntnisse zudem mit dem Beginn der Reformbemühungen für den mathematischen Unterricht zusammenfällt, überrascht es nicht, dass sein Name von den Protagonisten der Neuen Mathematik für die Grundschule regelmäßig als zentraler Bezugspunkt genannt wird. Auch wenn Piaget selbst kein Didaktiker war und dementsprechend kaum Konsequenzen für den Unterricht formuliert hat, so hat zum einen sein Schüler Hans Aebli diese Aufgabe in Teilen übernommen, zum anderen lassen sich darüber hinaus weitere didaktische Folgerungen, v. a. inhaltlicher Art, aus den Ergebnissen ableiten.

Piaget[68] verfolgte zeitlebens einen interdisziplinären Ansatz. Ursprünglich in der Biologie beheimatet, in der er bereits als Jugendlicher seine wissenschaftliche Laufbahn begann und schließlich auch promovierte, zählte er zu seinen weiteren Arbeitsgebieten u. a. Philosophie, Soziologie und Erkenntnistheorie. In Psychologie belegte er einige universitäre Veranstaltungen, absolvierte aber niemals eine Prüfung, was ihn nicht daran hinderte, gerade auf diesem Gebiet großes Interesse zu entwickeln und in der Folge einer außergewöhnlich regen Forschungstätigkeit nachzugehen. Der wesentliche Teil dieser – unter Mitwirkung einer erheblichen Anzahl an Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern geleisteten – Forschung fand am erziehungswissenschaftlichen *Institut Jean-Jacques Rousseau* der Universität Genf statt, wo er 1921 als *chef de travaux* bei Edouard Claparède tätig war, ab 1929 dann als Professor der Psychologie und 1940 schließlich Claparèdes Lehrstuhl übernahm. Er erhielt darüber hinaus 1952 einen Ruf an die Sorbonne, war Mitglied des Exekutivrats der UNESCO und Gründer des interdisziplinären *Centre internationale*

68. zu den biographischen Angaben im Folgenden und darüber hinaus vgl. Kesselring, Thomas: Jean Piaget, München: Beck, 1988, S. 15-65.

d'épistémologique génétique in Genf. Es fügt sich in Piagets fächerübergreifenden Ansatz, dass er sich für die Beschreibung der Gesetze sowie der Entwicklung der geistigen Strukturen intelligenten Denkens bei der Sprache der mathematischen Logik bediente, auf deren Gebiet ihn besonders die Arbeiten der Bourbaki-Gruppe inspiriert hatten.

Entsprechend seiner Tätigkeit ist das Werk Piagets und seiner Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter umfangreich, und ein großer Teil der Werke ist für den mathematischen Unterricht von Interesse. An dieser Stelle muss dennoch eine Beschränkung erfolgen, weshalb nur eine Auswahl aus der wichtigsten für die hiesige Fragestellung relevanten Theorie zusammengefasst wird.

Piagets experimentelle Methode besteht darin, dass dem Kind in einer Laborsituation von einem Versuchsleiter ein Problem gestellt wird, dessen Bearbeitung analysiert und in logische Denkschritte eingeteilt wird. Es zählt, wie bereits erwähnt, zu den Besonderheiten der Piagetschen Theorie, dass er sich auf „die logischen und mathematischen Beziehungen als nicht weiter zurückführbare Elemente"[69] stützt und seine Ergebnisse dementsprechend mit logischen Begriffen in der formalen Sprache der Mathematik beschreibt und erklärt.[70] Die Logik scheint ihm hierfür besonders geeignet, nicht nur aufgrund ihres Grundlagencharakters, sondern auch in ihrer Eigenschaft als „Axiomatik der Gleichgewichtszustände des menschlichen Denkens"[71], und damit eben jener Zustände, nach denen der menschliche Geist beim Lernen fortwährend strebt und die ein entscheidendes Merkmal in seiner Definition der Intelligenz darstellen. Der permanente Wunsch nach Ausgleich zwischen dem Individuum und den Objekten seiner Umwelt ist es demnach, der das Handeln und die Aktivität des Menschen bestimmt, nicht nur äußerlich, physisch-motorisch, sondern auch innerlich, geistig.[72]

Die Instrumente des Ausgleichs und der gegenseitigen Anpassung sieht Piaget als zwei sich gegenseitig beeinflussende Handlungstypen, die er „Assimilation" und „Akkomodation" nennt. **Akkomodation** bezeichnet dabei die Anpassung des Subjekts bzw. seines Verhaltens an das Objekt, das ihm in seiner Umwelt entgegentritt. Von größerem Interesse für Fragen der Intelligenz, die Begriffsbildung einschließt, sind die Assimilation und die ihr zugrundeliegenden Handlungsschemata. **Assimilation** meint nach Piaget die zunächst aktive Einwirkung auf ein Objekt mit dem Ziel, sich dieses anzueignen und in bereits bestehende geistige Schemata einzuord-

69. Piaget, Jean: Psychologie der Intelligenz, Zürich: Rascher, 1948, S. 9 [im Folgenden: Piaget, Intelligenz].
70. vgl. auch das Vorwort von Aebli in Piaget, Jean & Szeminska, Alina: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart: Klett, 1965, S. 7; vgl. Aebli, Entwicklung, S. 20.
71. Piaget, Intelligenz, S. 9 f.
72. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 10.

nen. Dies geschieht unter Anwendung bereits erworbener Assimilationsschemata, also solcher Begriffe und Kompetenzen, die Handlungsmöglichkeiten zur Erforschung noch nicht verinnerlichter Objekte bereithalten. Dabei ist auch hier der Begriff der Handlung nicht auf physisch-motorische Aktivität beschränkt, sondern er schließt ebenso psychisch-gedankliche Tätigkeiten ein, genauso, wie die Objekte, auf die die Assimilationsschemata angewandt werden, nicht nur dinglicher, sondern auch mentaler Art sein können. Im Laufe dieses Prozesses, in dem das neue Objekt in ständiger Wechselwirkung mit der Anpassung des Subjekts solange an vorhandene Schemata assimiliert wird, bis sich ein gewisses Gleichgewicht sowohl zwischen Subjekt und Objekt als auch zwischen Akkomodation und Assimilation eingestellt hat, bildet sich der neue Begriff[73]. Eine solche Theorie des Lernens impliziert offenbar, dass der Aufbau von Begriffen und Schemata von den verfügbaren Assimilationsschemata abhängt, die zuvor auf gleiche Weise aufgebaut worden sind. Die Bildung von Begriffen ist somit ein für das jeweilige Individuum spezifischer genetischer Prozess; jedes Subjekt assimiliert Objekte auf seine eigene Weise, Begriffe werden vom Menschen individuell konstruiert. Werden diese Begriffe und die sie konstituierenden Beziehungen, die zwischen ihnen, dem Subjekt und seiner Umwelt bestehen, in einem Gleichgewicht koordiniert und strukturiert, so entsteht gemäß Piaget Erkenntnis.[74]

Einer der zentralen Begriffe in der psychologischen Theorie Piagets ist der der **Operation**. Piaget versteht darunter eine „auf der Ebene der Vorstellung rekonstruiert[e]“[75] und infolgedessen verinnerlichte Handlung, die jedoch bestimmten Eigenschaften genügt und sich darin wesentlich von einer nur mechanisch automatisierten und isolierten Gewohnheit abgrenzt. Kennzeichnend für Operationen ist eine generelle Beweglichkeit, die in der Fähigkeit resultiert, die Handlung in der Vorstellung – und somit von jeder konkreten Wahrnehmung gelöst – fortzusetzen, umzukehren und zu variieren. Die konkrete Durchführung einer Handlung ist in jedem Fall Voraussetzung für ihre operative Verinnerlichung.[76] Da Operationen zudem maßgeblich durch die Beziehungen untereinander bestimmt sind, können sie nicht als isolierte Objekte existieren, sondern nur in einem Gesamtsystem. Ein solches operatives Gesamtsystem, das sich in einem „gleichzeitig bewegliche[n] und

73. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 16 f.; vgl. Aebli, Hans: Psychologische Didaktik. Didaktische Auswertung der Psychologie von Jean Piaget, Stuttgart: Klett, 1963 = 1976, S. 81 f., 83 und 86 [im Folgenden: Aebli, Didaktik].

74. Piaget, Intelligenz, S. 13; vgl. auch das Vorwort von Aebli in Piaget, Jean & Inhelder, Bärbel: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart: Klett, 1971, S. 12.

75. Aebli in Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 12.

76. Piaget, Jean: Die Genese der Zahl beim Kind, in: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffes und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht; Bericht und Diskussion, mit Beitr. von Jean Piaget…, Braunschweig: Westermann, 1964, S. 72 [im Folgenden: Piaget, Genese].

dauerhafte[n] Gleichgewicht“ befindet, bezeichnet Piaget als Gruppe oder **Gruppierung**, wobei eine Gruppierung in weiten Teilen das qualitative Analogon einer mathematischen und damit quantitativen Gruppe darstellt.[77] Dadurch ist auch festgelegt, über welche Eigenschaften eine vollständig ausgebildete Gruppierung verfügen muss, nämlich über die gemeinsamen Eigenschaften der Operationen wie der mathematischen Gruppe: 1. die Möglichkeit zur Vereinigung und Komposition mehrerer Operationen zu einer; 2. die Umkehrbarkeit bzw. Reversibilität; 3. die Möglichkeit, ein Ziel auf verschiedenen Wegen, auch über Umwege, zu erreichen bzw. die Assoziativität; 4. die Existenz der Identität bzw. eines neutralen Elements in Form einer Operation, deren Anwendung den Ausgangszustand unverändert lässt. Dazu kommt eine Eigenschaft, die die Gruppierung von der Gruppe unterscheidet, und zwar die Tautologie als „besondere, identische Operation“, die ein mit sich selbst verknüpftes Objekt unverändert lässt.[78] Damit es sich wirklich um eine operative Gruppierung handelt, müssen die durch diese Eigenschaften bestimmten Operationen rein mental ausgeführt werden können. Beispiele für grundlegende Gruppierungen, die Piaget in additive und multiplikative Gesamtsysteme einteilt, sind die logischen Operationen wie Klassifizieren, Hierarchisieren, elementare Mengenoperationen sowie Seriation, Substitution und die Reziprozität, die sich u. a. in der Fähigkeit ausdrückt, verschiedene Standpunkte und Sichtweisen einer Sache einzunehmen.[79] Der für die Entwicklung operativer Gruppierungen grundsätzlich als günstig geltende kooperative Austausch Lernender untereinander stellt für die Operation der Reziprozität demnach geradezu eine notwendige Voraussetzung dar.[80] Es sind diese Operationen allesamt Grundstrukturen des menschlichen Denkens und Handelns[81], und es sind „die operativen Gruppierungen, welche den höchsten Gleichgewichtszustand in der Entwicklung der Intelligenz charakterisieren“; Intelligenz lässt sich damit als der Komplexitätsgrad der jeweils erreichten Denkstrukturen definieren[82]. In Analogie zu den Gruppierungen wird hier die mathematische Gruppe zu einem logischen Modell intelligenten Denkens überhaupt.

Dank der Flexibilität der Gruppierungen ist es möglich, im Falle eines auftretenden Problems jederzeit über die oben beschriebenen Anpassungsprozesse ein neues Gleichgewicht herzustellen; neue Operationen können also in das bestehende System eingegliedert werden, ohne dass dieses von Grund auf neu konstituiert werden

77. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 57 f., 62, 73 und 168 (Zitat: S. 73); vgl. Aebli, Didaktik, S. 68 und 70; vgl. Aebli, Hans: Über die geistige Entwicklung des Kindes, Stuttgart: Klett, 1963, S. 20 f. und 24 [im Folgenden: Aebli, Entwicklung].
78. Piaget, Intelligenz, S. 63 und 65.
79. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 66-70; Aebli, Didaktik, S. 73.
80. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 232.
81. vgl. Aebli, Didaktik, S. 70.
82. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 18; Zitat: Piaget, Intelligenz, S. 77.

muss. Die Gesamtsysteme sind damit dauerhaft, differenzieren sich im Laufe der Entwicklung durch eine Vielzahl solcher Assimilations- und Akkommodationsprozesse aber immer weiter aus.[83] Ausdrucksmittel dieser inneren Denksysteme ist nach Piaget in jedem Fall die Aussagenlogik.[84]

Die reine sensu-motorische Wahrnehmung kann dabei nicht operativ sein. Die auf der Grundlage spezifisch wahrnehmender Tätigkeiten, „die aus tatsächlichen oder virtuellen Bewegungen des Blicks oder der interessierten Organe bestehen", sich herausbildenden „Wahrnehmungskonstanzen" sind unbeweglich und nicht reversibel[85], da ein Wahrnehmungseindruck „nur Augenblicksbilder der operatorischen Umgestaltungen festhält"[86]. Als Beleg hierfür zieht Aebli beispielhaft ein Ergebnis eines geometrischen Versuchs von Piaget und Inhelder heran, in dem Kinder aufgefordert wurden, das Netz eines vor ihnen stehenden Körpers zu zeichnen. Junge Kinder, die sich noch in der sensu-motorischen Phase befinden, sind dazu nicht in der Lage, obgleich sie den Körper genauso sehen wie Erwachsene; die reine Wahrnehmung der einzelnen Teile ist mithin noch lange keine hinreichende Voraussetzung für die notwendige Vorstellung des Abwickelns, die eine innere Handlung voraussetzt.[87] Auch sind ohne Verinnerlichung mehrere Handlungen nicht als gleichzeitig denkbar; das Ziel, dessen Erfüllung eine Handlung dient, ist im konkret Wahrnehmbaren nur über die Abfolge hintereinander durchgeführter Handlungsschritte zu erreichen.[88] Piaget selbst weist an anderer Stelle im Hinblick auf den Mathematikunterricht entsprechend darauf hin, dass die reine Anschauung – weder der konkreten Dinge selbst noch bildlicher Darstellungen – oder Vorstellung für den Erwerb der Operationen unzureichende Mittel sind.[89] Wahrnehmung ist also keinesfalls mit operativer Intelligenz zu verwechseln, sie spielt dennoch eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Operationen und Gruppierungen, indem sie mit zunehmender Beweglichkeit die Grundlage für das operative Denken legt.[90] Darüber hinaus dient das wahrgenommene Bild, wenn erst einmal Operationen aufgebaut sind, als „eine Art Stütze des Denkens, welche[] durch die symbolische Vertretung der Operationen ihre innerliche Vorstellung ermöglicht"[91].

83. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 60 f. und 73; Aebli, Didaktik, S. 70.
84. Piaget, Intelligenz, S. 72.
85. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 118 f. und 122 f. (Zitat: S. 118 f.).
86. Aebli, Didaktik, S. 57.
87. Aebli, Didaktik, S. 54 f.; vgl. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 319-334.
88. Piaget, Intelligenz, S. 170 f.
89. vgl. Piaget, Jean: Erziehung und Unterricht seit 1935, in: Piaget, Jean: Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Wien [u. a.]: Molden, 1972, S. 13-137, S. 56 [im Folgenden: Piaget, Erziehung, S. 56].
90. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 123 f.
91. Aebli, Didaktik, S. 56.

Die **Entwicklung des Denkens** vollzieht sich gemäß Piaget in voneinander abgegrenzten Phasen, bis die Kinder im Alter von 11-12 Jahren zum logischen, formalen Denken – und damit zur höchsten Stufe der Intelligenz, die keiner Anschauung mehr bedarf, sondern vollständig operationalisiert ist – fähig werden. Die Phase des Kleinkindes bis 4 Jahre bezeichnet Piaget als Phase des vorbegrifflichen Denkens; sie ist im Rahmen dieser Arbeit von geringerem Interesse. Relevant für die Fokussierung auf das 1. Schuljahr sind die beiden weiteren Entwicklungsphasen, die Phase des anschaulichen Denkens – die etwa die Altersklasse von 4 bis 7/8 Jahren umfasst – und die Phase der konkreten Operationen zwischen 7/8 und 11/12 Jahren.[92] Das anschauliche Denken ist ganz an die, gewissermaßen starre, sensumotorische Wahrnehmung gebunden, noch nicht darüber hinaus verinnerlicht und nicht operativ. Folglich sind die Kinder in dieser Phase nicht fähig, diejenigen logischen Operationen zu vollführen, die Verinnerlichung in dem Maße verlangen, dass Handlungen als gleichzeitig und reversibel vorgestellt werden können, wie z. B. die Bildung und die Einschachtelung von Klassen.[93] Im Laufe der Phase nähert sich das Kind der „Schwelle der Operationen“ an[94], indem es durch „allmähliche Koordinierung der vorstellungsmäßigen Beziehungen“ zu „wachsende[r] Begriffsbildung“ fähig wird[95]. Wirklich möglich wird dies jedoch erst mit Erreichen der nächsten Stufe, wenn das Denken zwar weiterhin durch konkrete Objekte angestoßen wird, die Handlungen an jenen aber in operativen Gruppierungen verinnerlicht werden, in beweglichen Gesamtsystemen, die reversibel, assoziativ und kompositionsfähig sind und deren Komponenten in gegenseitiger Abhängigkeit und Kompensierbarkeit miteinander koordiniert sind. Zu den ersten Operationen, die in dieser Phase beherrscht werden, gehören die Teilmengenbildung und die Reihenbildung und somit logische Handlungen, die sowohl die Verfügbarkeit einer symmetrischen Äquivalenzrelation als auch einer asymmetrischen Ordnungsrelation voraussetzen. Die Einführung von Struktur- und Mengenbegriffen in den Unterricht hält Piaget denn auch für „voll und ganz gerechtfertigt“[96]. Nach Piaget entstehen die operativen Gruppierungen im Alter von 7 oder 8 Jahren – und damit im 1. oder 2. Schuljahr – spontan, dann, wenn die „Erhaltung eines Ganzen“ verstanden wird[97] und das Kind zur Dezentrierung, also zum Verlassen des eigenen, subjektiven Standpunkts fähig wird.[98] Die Entwicklung des operativen Denkens ist dabei mehr als eine reine Fortführung der sensu-motorischen Intelligenz; sie fordert vielmehr einen kompletten Neuaufbau der Denkstrukturen, zwar nach vergleichbarem Muster, aber „auf

92. Piaget, Intelligenz, S. 174.
93. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 184 und 188 f.
94. Piaget, Intelligenz, S. 174.
95. Piaget, Intelligenz, S. 182 f.
96. Piaget, Erziehung, S. 55.
97. Piaget, Intelligenz, S. 198.
98. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 199-203.

einer höheren Stufe, [...] auf einem räumlich viel weiteren und zeitlich viel mobileren Feld bis zur Strukturierung der Operationen“[99].

Von der Stufe des logisch-formalen Denkens ist diese Phase nichtsdestotrotz klar zu unterscheiden. Dies zeigt sich in der Notwendigkeit der Handhabung von konkretem, anschaulichem Material, die daraus resultiert, dass es den Kindern dieses Alters noch nicht möglich ist, auf rein sprachlich-symbolischer und somit wahrnehmungsfreier Ebene logische Schlüsse zu ziehen, wenngleich sie in Wahrnehmungskontexten bereits dazu in der Lage sind.[100] Das bedeutet jedoch nicht, dass die Handhabung von Symbolen und Zeichen generell noch nicht möglich ist. Piaget beschreibt Symbolisierung ganz allgemein als die Handlung, „irgendetwas durch etwas anderes darzustellen“[101], und damit als eine Tätigkeit, die Kindern z. B. aus dem alltäglichen Spiel vertraut ist oder die bei der bildlichen Vorstellung einer Situation vollzogen wird. Ein Symbol – in Abgrenzung von einem Zeichen – ist gekennzeichnet durch eine gewisse Analogie zum Symbolisierten; ein Symbol kann in Abhängigkeit von der jeweiligen Situation für unterschiedliche Objekte stehen und von jedem Individuum für sich festgelegt werden. Der Sinngehalt des Zeichens dagegen ist allgemeingültig und entspringt einer sozialen Konvention. Sprache bildet ein System aus solchen Zeichen, deren Bedeutung nicht aus der akustischen oder visuellen Wahrnehmung des Zeichens geschlossen werden kann und daher gelernt werden muss. Voraussetzung für die verständige Nutzung von Sprache ist die Verfügbarkeit einer „allgemeineren „symbolischen Funktion“ “, die u. a. die Unterscheidung zwischen Zeichen und Bezeichnetem impliziert.[102] Allgemeines Symbolverständnis kann bei Kindern auf der Stufe des operativen Denkens demnach auch vor der vollständigen Formalisierung als bereits erworben vorausgesetzt werden; als Ausgangspunkt für Begriffsbildung taugt die Symbolebene hingegen (noch) nicht.[103]

Für die **Entstehung der quantitativen Operationen** und somit für den mathematischen Anfangsunterricht sind die qualitativen Gruppierungen insofern von besonderem Interesse, als nach Piaget „die gleichzeitige Konstruktion der Gruppierungen der Klassenverschachtelung und der qualitativen Aneinanderreihung [...] das Entstehen des Zahlensystems zur Folge [hat]“[104]. Die Operativwerdung der symmetrischen (Klassenbildung) und der asymmetrischen (Seriation) Relationen erscheint hier als Bedingung für die Entwicklung der numerischen Operationen.

99. Piaget, Intelligenz, S. 173 f., vgl. ebenda, S. 172 f.
100. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 206 f.
101. Piaget, Intelligenz, S. 179.
102. vgl. Piaget, Intelligenz, S. 175-177 (Zitat: S. 175).
103. vgl. Piaget, Erziehung, S. 56.
104. Piaget, Intelligenz, S. 203; vgl. Piaget, Genese, S. 51.

Dies ist jedoch nicht so zu verstehen, dass die nicht-numerischen den numerischen klar vorausgehen oder deren Erwerb gar abgeschlossen sein muss, bevor jene aufgebaut werden können. Vielmehr entstehen die entsprechenden operativen Begriffe weitgehend zeitgleich, so heißt es bei Piaget weiter: „Klassen, Beziehungen und Zahlen bilden also ein logisch und psychologisch untrennbares Ganzes, welches drei Elemente enthält, von denen jedes einzelne die zwei anderen ergänzt.“[105] Mengen, Relationen und Zahlen stellen gleichermaßen logische Grundbegriffe des intelligenten Denkens dar, die eng zusammenhängen, indem ihre Entwicklungen sich gegenseitig bedingen und indem das operative Verständnis jedes von ihnen jeweils das Verständnis der beiden anderen voraussetzt; ohne die logischen Relationen kann also auch der Zahlbegriff nicht gebildet werden. Ein Unterschied liegt lediglich darin, dass die quantitativen, numerischen Gruppierungen nur als verinnerlichte operative Systeme existieren, während die qualitativen bereits auf der Wahrnehmungsebene vorbereitet werden[106]; die qualitativen Operationen können sich also entgegen den quantitativen auf analoge Entsprechungen aus der früheren Entwicklungsstufe stützen, woraus Piaget schließt, dass der mathematische Unterricht vor der Betrachtung quantitativer Zusammenhänge ausreichend Zeit für die Behandlung qualitativer Begriffe aufwenden sollte.[107]

Der Zusammenhang mit den logischen Operationen liefert also eine Bedingung für die Entstehung der arithmetischen Operationen[108], aus der didaktische Folgerungen gezogen werden können. Eine Konsequenz, die sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden ergibt und von hoher didaktischer Relevanz ist, ist die Untrennbarkeit des kardinalen und des ordinalen Aspekts beim Aufbau des Zahlbegriffs bzw. der Zahlenreihe, die beide hier als operative Gesamtsysteme aus Einschachtelung und Seriation interpretiert werden.[109]

Eine weitere Vorbedingung für die Erfassung von (numerischen) Quantitäten liegt im Erfassen der Invarianz einer Menge, die offensichtlich eine Voraussetzung für die arithmetischen Operationen darstellt, aber auch für darüber hinausgehende mathematische Zusammenhänge – denn „überall und immer setzt der Geist die Erhaltung von irgendetwas als notwendige Bedingung für jedes mathematische Verständnis voraus“[110] – bzw. noch weiter gehend „eine notwendige Bedingung jeder verstandesmäßigen Tätigkeit“[111].

105. Piaget, Intelligenz, S. 205; vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 206 und 208; vgl. Piaget, Genese, S. 57, 61 und 63.
106. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 95.
107. Piaget, Genese, S. 72.
108. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 10 und 211.
109. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 11 und 166; vgl. Aebli, Entwicklung, S. 21 f.
110. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 16.
111. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 15.

Die Entwicklung des Zahlbegriffs

In einem seiner hierzulande wohl bekanntesten Werke „Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde“ (*La genèse du nombre chez l'enfant*) von 1941 (erste dt. Ausgabe 1965) beschreibt Piaget – in Zusammenarbeit mit Alina Szeminska – entsprechend zahlreiche Versuche, die sich mit Einzelfragen der Klassenbildung und der Reihenbildung befassen und in denen die Entwicklung der Invarianz eine bedeutende Rolle spielt.

In sämtlichen Versuchen kristallieren sich **drei Stadien der Entwicklung** heraus, ein erstes Stadium, in dem die Kinder weder über operative Gruppierungen noch über den Begriff der Invarianz verfügen, ein drittes, in dem die Handlungen in logischen Gruppierungen operationalisiert und flexibel koordinierbar sind, sowie als zweites ein Übergangsstadium mit beginnender, aber unvollständig vollzogener Operationalisierung der Handlungen.

Im ersten Stadium wird die Invarianz weder bei kontinuierlichen noch bei diskontinuierlichen Quantitäten erfasst, eine einfache Veränderung der Anordnung oder der äußerlichen Beschaffenheit veranlasst sämtliche Kinder dieses Stadiums – die Kinder, die in den Versuchen die entsprechenden Reaktionen zeigen, befinden sich im Vorschulalter –, eine Veränderung der Quantität zu behaupten. Beispielhaft für die Versuche zu kontinuierlichen Quantitäten seien hier die Umschüttexperimente genannt: Das Umfüllen einer Flüssigkeit in ein Gefäß anderer Form, die einen veränderten Wasserstand in eben diesem bedingt, führt dazu, dass die Menge nach einem einzelnen Merkmal, hier i. A. nach der Höhe des Wasserstandes, neu und je nachdem als mehr oder weniger bewertet wird, auch wenn die Flüssigkeit vor den Augen der Kinder umgeschüttet wurde.[112] Typisch für die Auffassung diskontinuierlicher Mengen in diesem Stadium ist die Annahme, eine Veränderung der Lage hätte auch eine Veränderung der Anzahl von Objekten zur Folge, z. B. wenn die Kinder meinen, in einer Reihe von Perlen befänden sich mehr Perlen, nachdem man diese auseinandergezogen hat und weniger, nachdem man sie wieder zusammengeschoben hat. Vermeintliche Hilfsmittel wie konkrete Stück-für-Stück-Zuordnung durch die Hand des Kindes bleiben wirkungslos.[113] Selbst das Abzählen hat bei jungen Kindern keinen Einfluss auf die Beurteilung von Mengen als variante Gebilde; offenbar handelt es sich hier um ein unverstandenes, rein verbales Zählen, dass noch keine quantitative Bedeutung impliziert.[114]

Vor diesem Hintergrund überrascht es nicht, dass auch das Aufteilen von Mengen und Quantitäten nach Meinung der Kinder die Gesamtheit nicht konstant hält.

112. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 17-21.
113. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 63 f. und 166 f.
114. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 46 f., 86 und 97.

Die Teile eines vorherigen Ganzen stellen für die Versuchspersonen offenbar etwas Neues dar, das nicht mit dem zuvor Wahrgenommenen zusammenhängt.[115] Damit ist auch die Einschachtelung von Teilmengen in Grundmengen nicht möglich. Teilmengen können zwar gebildet, aber danach nicht mehr mit der Gesamtmenge in Beziehung gesetzt werden. Der Vergleich erfolgt stattdessen auch bei solchen Aufgabenstellungen, die auf einen Vergleich des Teils mit dem Ganzen zielen, stets mit der Restmenge.[116]

Die Ergebnisse dieser paradigmatischen Beispiele zu Fragen der Kardination lassen sich auf Problemstellungen zur Reihenbildung übertragen. Die Aufgaben zur Seriation können ebenso wenig korrekt gelöst werden wie die zur gemeinsamen Koordination zweier Reihen; die Kinder sind weder in der Lage, Dinge systematisch der Größe nach zu sortieren und so eine ordinale Reihung zu erstellen, noch können sie die sich entsprechenden Elemente bereits vollständig angeordneter Reihen einander zuordnen. Die Entwicklung der ordinalen Kompetenzen verläuft dabei nicht nur in vergleichbaren Stadien wie die der kardinalen, sondern auch zeitlich parallel, was den engen Zusammenhang der beiden Gruppierungen für Piaget bestätigt.[117]

Piaget erklärt seine Befunde damit, dass Kinder dieser Altersstufe (im Schnitt bis zum Alter von etwa 6 Jahren) die notwendigen Aktivitäten noch nicht operationalisiert haben. Die Handlungen sind noch nicht in einem Maße verinnerlicht, dass sie in der Vorstellung durchgeführt und in der Vorstellung auch wieder rückgängig gemacht werden können. Die Wahrnehmung ist das einzige Kriterium, auf dessen Grundlage quantitative wie qualitative Urteile gebildet werden. Die Wahrnehmung ist dabei zunächst rein ganzheitlich, nicht analytisch; die Kinder sind nicht in der Lage, eine Gesamtheit zu zerlegen oder als Menge aus einzelnen Elementen aufzufassen, das Wahrgenommene bleibt ein „unauflösliches Ganzes“. Die einzelnen Aspekte eines Sinneseindrucks können zwar für sich betrachtet werden, mit der fehlenden Koordination untereinander können sie aber nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden. Ein Ausgleich gegensinniger Veränderungen ist nicht möglich, es bleibt jeweils nur ein einzelner, isolierter Aspekt ausschlaggebend für die Urteilsbildung. Die alleinige Bindung an die Wahrnehmung und die dadurch bedingte fehlende Reversibilität einer Handlung haben zur Folge, dass ein einmal veränderter Zustand nicht ohne Weiteres wiederhergestellt werden kann. Es

115. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 27.
116. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 223 f.
117. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 138 f., 151 und 158; die Parallelität der Entwicklung ist weder auf dieses Stadium noch auf die einzelnen Operationen beschränkt, sie kennzeichnet vielmehr die Gesamtentwicklung in allen drei Stadien und ist ebenso auf die Entwicklung der Koordination zwischen Kardination und Ordination übertragbar, vgl. ebenda, S. 195-197 und 202.

ist dies nur in der Vorstellung möglich, auf der Wahrnehmungsebene erfordert die Wiederherstellung eines Ausgangszustandes hingegen eine völlig neue, von der vorherigen unabhängige Handlung. Invarianzurteile sind vor diesem Hintergrund nicht möglich.[118]

Das zweite Stadium, in das Piaget diejenigen Kinder einordnet, die sowohl Merkmale noch des ersten als auch bereits des dritten Stadiums zeigen, ist durch eine beginnende Analysetätigkeit und die Nutzung der Stück-für-Stück-Korrespondenz als Kriterium für die Bewertung von Quantitäten gekennzeichnet. Die in dieser Phase gebildeten logischen Urteile beruhen nun zu einem Teil auf der Koordinierung einzelner Aspekte eines wahrgenommenen Ganzen, zum anderen aber nach wie vor auf der äußeren Wahrnehmung der Gesamtheit, ein Zustand, der kognitive Konfliktsituationen hervorruft, die sich in den Versuchsergebnissen darin zeigen, dass die Kinder ihre Meinung im Laufe des Versuchs mehrmals ändern. Die Koordinierung geschieht noch auf der anschaulichen Ebene, die Wahrnehmung ist noch nicht durch innere Handlungen auf der reinen Vorstellungsebene abgelöst, die ersten im Ansatz vorhandenen Operationen sind noch nicht dauerhaft gruppiert und damit weder reversibel noch flexibel. Es kann hier noch nicht von operativem Denken gesprochen werden; Piaget bezeichnet dieses Stadium daher auch als „halb-operatorisch“.[119]

Erst im dritten Stadium, mit etwa 6 Jahren, verfügen die Kinder über dauerhafte wie flexible operative Strukturen, die in reversiblen Gruppierungen verfügbar sind; wahrgenommene Objekte können analysiert, die einzelnen Elemente wiederum synthetisiert und miteinander koordiniert werden. In dieser Phase sind die Kinder in der Lage aus der Möglichkeit einer Stück-für-Stück-Korrespondenz auf Äquivalenz zu schließen und die Invarianz von Quantitäten zu erfassen. Die Aufgabenstellungen in den Versuchen werden von diesen Kindern korrekt beantwortet und logisch begründet.[120] Es ist nun dieses dritte Stadium, in dem außerdem mit der Koordinierung von Objekten untereinander die additive und multiplikative Verknüpfung von Relationen möglich wird und damit auch die Koordinierung zwischen symmetrischer Äquivalenz und asymmetrischer Reihung, also zwischen Kardination und Ordination, die mit den quantitativen Operationen und der Entstehung des Zahlbegriffs einhergeht. Die additiven und multiplikativen Operationen konstituieren den Zahlbegriff und sind daher ihrerseits in diesem bereits enthalten.[121]

118. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., z. B. S. 78, 118, 227 und 231 f.
119. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 121; vgl. ebenda, S. 47, 50, 109 und 120 f.
120. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., z. B. S. 32 f., 56, 68 und 122.
121. vgl. Piaget & Szeminska, a. a. O., S. 211.

Die Entwicklung des Raumbegriffs

Der Entwicklung geometrischer Grundbegriffe widmet sich Piaget u. a. in dem in Zusammenarbeit mit Bärbel Inhelder u. a. entstandenen Werk „Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde“ (*La représentation de l'espace chez l'enfant*, 1948), das in deutscher Übersetzung erstmals 1971 erschien. Das Werk ist sehr umfangreich, an dieser Stelle können die Ergebnisse daher nur stark verkürzt wiedergegeben werden. Unter dem kindlichen Raumbegriff versteht Piaget hier das „Insgesamt seiner räumlichen Beziehungsvorstellungen“[122]. Die Untersuchungen erstrecken sich über eine Vielzahl geometrischer Begriffe, angefangen mit topologischen Relationen, über Projektionen, Perspektive bis hin zum metrischen euklidischen Raum. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass auch die Entwicklung der Raumbegriffe genetisch-konstruktiv[123] entlang mehrerer Stufen verläuft, die durch fortschreitende Operationalisierung gekennzeichnet sind. Grob werden auch hier drei Stadien unterschieden, die jedoch an vielen Stellen in weitere Unterstadien unterteilt werden. Das 1. Stadium beschreibt die Phase, in der die den geometrischen Begriffen zugrundeliegenden Handlungen noch keinesfalls verinnerlicht sind, z. T. sind nicht einmal die entsprechenden Handlungen hinreichend aufgebaut, da die geeigneten Assimilationsschemata fehlen. Bis zum Alter von 4 Jahren werden z. B. die euklidischen Grundformen tastend nicht identifiziert und zunächst auch gar nicht sorgfältig und schon gar nicht systematisch im Hinblick auf die bestimmenden Eigenschaften exploriert[124]. Ein zweites Stadium zeigt beginnende Koordination und gestaltet sich in Abhängigkeit vom untersuchten Begriff sehr unterschiedlich. Die vollständige Koordinierung von Teilaspekten in operativen Gruppierungen gelingt schließlich in einem dritten Stadium, das je nach Begriff zwischen 6 und 8 Jahren erreicht wird. Die Übernahme unterschiedlicher Perspektiven, wie sie im bekannten „3-Berge-Versuch“ untersucht wird[125], setzt beispielsweise die Fähigkeit zur Gesamtkoordination fremder Blickwinkel mit dem eigenen voraus. Dafür muss das Kind zunächst überhaupt zur Differenzierung des individuellen Standpunkts und zur Dezentrierung fähig sein, es handelt sich also bei der Perspektive um einen Begriff, der komplexe Operationen voraussetzt und der zudem nicht wahrnehmbar ist, sondern selbst nur als verinnerlichte Operation existiert. Die Perspektivübernahme gelingt daher erst im voll operativen dritten Stadium.[126]

Eine zentrale Beobachtung aus den Piagetschen Versuchen, die didaktische Konse-

122. Aebli in Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 11.
123. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 22 f.
124. vgl. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 43 f.
125. vgl. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 251-284.
126. vgl. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 286-288.

quenzen nahelegt, ist der **Vorrang der topologischen Begriffe** und Relationen gegenüber den euklidischen. So sind die ersten Eigenschaften elementarer Formen, die unterschieden werden, topologische, nämlich „offen“ und „geschlossen“ sowie „verschlungen“ und „getrennt“. Diese Unterscheidung zeigt sich darin, dass dieses die ersten Eigenschaften sind, die die Kinder zeichnerisch unterscheiden: Die geschlossenen Formen Kreis, Quadrat, Dreieck werden z. B. gleichermaßen als Kreis, und somit geschlossen, gezeichnet, wohingegen eine offene Form wie das Kreuz als voneinander getrennte Linien dargestellt wird.[127] Generell sind es noch vor der Unterscheidung zwischen grad- und krummlinig sowie der Berücksichtigung des Winkels[128] „elementare Beziehungen – wie „benachbart und getrennt“, „Reihenfolge“, „Umgebung“, „Kontinuum““, die von den Kindern in frühen Darstellungen wiedergegeben werden.[129] Piaget erklärt dieses Phänomen mit der in früher Kindheit noch nicht gegebenen Größenkonstanz, ohne die das Konzept einer Metrik, der die euklidische wie die projektive Geometrie bedürfen, nicht aufgebaut werden kann. Zwar sind auch die topologischen Relationen konstant, aber unabhängig von Abstand und Art der betrachteten Fläche, solange die Objekte in der Wahrnehmung noch einer gewissen Elastizität unterliegen.[130] Piaget geht davon aus, dass die drei Dimensionen des euklidischen Raums „auf dem psychologisch einfachsten Weg“ ausgehend von der Relation „zwischen“ – und somit von einem topologischen Begriff aus – konstruiert werden, der euklidische und der projektive Raum insgesamt entwickeln sich später, unabhängig voneinander, jedoch gleichzeitig und ebenso aus dem topologischen Raum heraus.[131] Entgegen seiner sonstigen Gewohnheit äußert sich Piaget an dieser Stelle aufgrund seiner Beobachtungen im Hinblick auf den mathematischen Unterricht wie folgt: „Es ist gesagt worden, man müßte die Kantorsche Mengenlehre in der Grundschule unterrichten. Unserer Meinung nach gilt beinahe dasselbe für die Elemente der Topologie.“[132]

Aeblis Reaktion auf die Ergebnisse Piagets

Hans Aebli (1923-1990) war ein Schüler Jean Piagets, studierte und promovierte bei ihm in Genf und wertete in seiner Dissertation „Psychologische Didaktik“ (*Didactique psychologique*, 1951), die 1963 erstmalig in deutscher Übersetzung erschien, die psychologischen Ergebnisse seines Lehrers in didaktischer Hinsicht aus[133]. Spätestens mit seiner Habilitation (*Über die geistige Entwicklung des Kindes*, 1960,

127. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 84; vgl. ebenda, S. 49 f.
128. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 53.
129. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 19, vgl. ebenda, S. 25-28.
130. vgl. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 24 und 29.
131. vgl. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 15 und 349.
132. Piaget & Inhelder, a. a. O., S. 15 f.
133. für Weiteres zu Aeblis Lebenslauf vgl. http://www.madipedia.de/wiki/Hans$_A$*ebli*.

veröff. 1963) wurde er jedoch auch zu einem Kritiker Piagets, der einigen Aspekten aus dessen Theorie widersprach und sie daraufhin weiterentwickelte.

Aebli war mitnichten der einzige Kritiker Piagets, aber seine Einwände können als stellvertretend für typische Kritikpunkte an den Piagetschen Interpretationen gelten. Neben der Vorstellung, dass es sich beim Aufbau der operativen Denkstrukturen um eine rein intellektuelle Leistung handelt, die nicht durch beispielsweise affektive Faktoren beeinflusst wird[134], hat vor allem der Verzicht auf Aussagen zum Prozess des Lernens Widerspruch hervorgerufen. Nach Piaget bilden sich die intelligenten Gruppierungen in einer Art Reifungsprozess an einem bestimmten Punkt spontan, ohne dass äußere Einflüsse in seinen Untersuchungen Berücksichtigung finden; die reine Funktion der Versuche besteht damit darin, die derzeitige Entwicklungsstufe aufzuzeigen. Aebli dagegen geht davon aus, dass während eines Versuchs selbst Weiterentwicklung – Elaboration – stattfindet, in Abhängigkeit von den jeweiligen Bedingungen, unter denen das Experiment durchgeführt wird.[135] Bei Piaget führt diese Annahme aus didaktischer Perspektive zu einem kuriosen Dilemma: Wenn die intelligenten, operativen Strukturen von sich aus entstehen, dann müssen sie nicht gelehrt werden bzw. können sie dies auch gar nicht, bevor eine gewisse Reifungsstufe erreicht ist.[136] Es muss als Aeblis Verdienst gelten, die Theorie Piagets in der methodisch-didaktischen Praxis anwendbar gemacht zu haben.

Entsprechend den vorhergehenden Ausführungen lässt sich Aebli in seiner eigenen Durchführung einer Abwandlung des 3-Berge-Versuchs von der Frage nach den Bedingungsfaktoren für die optimale Entwicklung operativer Gruppierungen leiten.[137] Er kommt dabei zu dem Ergebnis, dass es verschiedene Faktoren sowie deren „konstantes Produkt“[138] sind, die die Elaborationshöhe der Strukturen bestimmen. Dieses „Produkt“ ermöglicht einen wechselseitigen Ausgleich der einzelnen Faktoren; die Möglichkeit des Ausgleichs wiederum ermöglicht, dass nicht allen Aspekten die gleiche Aufmerksamkeit zuteilwerden muss, sondern das prägnanteste Merkmal ausgewählt werden kann, nämlich dasjenige, das am geeignetsten scheint, das Ziel mit möglichst geringem Aufwand zu erreichen. Das Streben nach geistiger Ökonomie kennzeichnet nach Aebli die Problemlöseprozesse von Lernenden. Der Aufbau von Strukturen, die bei Wiederholung erneut angewandt werden können, dient stets der Einsparung geistiger Energie, die dann anderweitig aufgewendet werden kann.[139] Zu den Faktoren, die Einfluss auf die Elaboriert-

134. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 10 und 24 f.
135. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 15 f., 38, 41 und 90.
136. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 88.
137. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 9 und 41.
138. Aebli, Entwicklung, S. 80.
139. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 58-60.

heit der Strukturen nehmen, zählen Motivation, Anschaulichkeit, die Komplexität des gegebenen Problems sowie die zur Verfügung stehende Zeit, die wiederum das ebenfalls bedeutende Verhältnis von Sinneswahrnehmung und innerer Vorstellung bestimmt.[140] Entgegen Piagets Theorie sieht Aebli in der Entwicklung des intelligenten Denkens beim Kind keine Aufeinanderfolge einzelner Stufen, sondern eine „kontinuierliche Zunahme seiner geistigen Kraft“[141].

Die didaktischen und methodischen Konsequenzen aus Piagets Werk, die Aebli einige Jahre vorher formuliert hat, büßen nichtsdestotrotz auch vor dem Hintergrund der weitergeführten Theorie nichts an ihrer Gültigkeit ein.[142] Die Theorie der Operationen als verinnerlichte Handlungen, die individuell aktiv konstruiert werden – und nicht über passive Sinneswahrnehmung gelehrt werden können, wie es in der traditionellen Anschauungsdidaktik vorausgesetzt wurde[143] –, erfordert die Bereitstellung einer Lernumgebung, die eine entsprechende genetische Konstruktion ermöglicht. Zentral ist dafür offenkundig das Vorhandensein von Material, mit dem konkrete Handlungen durchgeführt werden können, und zwar muss dies von den Kindern selbst gehandhabt werden. An Vorwissen in Form geeigneter Assimilationsschemata für die Arbeit mit dem Material sollte dabei angeknüpft werden. Neben der selbstständigen Arbeit, die notwendige Voraussetzung für die individuelle Entwicklung operativer Schemata ist, sind andererseits im Hinblick auf die Beweglichkeit der Gruppierungen sowie die Reziprozität Kooperation und Austausch der Kinder untereinander erforderlich, da beides durch Übernahme unterschiedlicher Perspektiven gefördert wird. Dies kann nach Aebli sowohl in Form von Gruppenarbeit als auch in einer offenen Diskussion in der Klassengemeinschaft oder in einer Kombination aus beidem geschehen, je nach Unterrichtsziel, solange es sich bei der Sozialform nur um eine „gemeinschaftliche Form“ handelt.[144]

Der Prozess der Bildung der Operationen und Begriffe sollte durch ein geeignetes Problem ausgelöst werden, das im Zuge eines explorativen Vorgehens gelöst wird. Unter einem Problem versteht Aebli die „schematische Skizze einer noch zu findenden Operation“, also sozusagen eine Leerstelle im Gesamtsystem der vorhandenen Gruppierungen, die auf Basis der bereits erworbenen Schemata gefüllt wird. Die Lösung des Problems besteht dann im Aufbau der neuen Operation sowie ihrer anschließenden Eingliederung in die bereits bestehenden Strukturen. Zu beachten ist dabei zum einen, dass es sich um ein Problem handelt, das in der gegebenen Lernumgebung selbstständig forschend gelöst werden kann, zum anderen, dass die

140. vgl. Aebli, Entwicklung, S. 61-63 und 72 f.
141. Aebli, Entwicklung, S. 80.
142. vgl. Aebli, Didaktik, 6. Auflage von 1976, bei der es sich um keine Überarbeitung, sondern um einen unveränderten Nachdruck der 1. Auflage von 1963 handelt.
143. vgl. den historischen Überblick dazu in Aebli, Didaktik, S. 18-22.
144. vgl. Aebli, Didaktik, S. 74, 88, 96, 106 f. und 109 (Zitat: S. 106).

benötigte Operation ausreichend allgemeiner Natur ist; das Ziel des Unterrichts muss immer im Aufbau des operativen Gesamtsystems liegen, nicht nur in einem isolierten Schema.[145] Es versteht sich von selbst, dass ein solches Vorgehen nur möglich ist, wenn die Lehrperson selbst sowohl ihr Fach als Ganzes als auch den jeweiligen Zusammenhang zwischen Begriff und Operation im Blick hat. Insgesamt ergibt sich aus der geforderten Unterrichtsorganisation eine gegenüber der traditionellen Methodik veränderte Lehrerrolle, in der die Lehrperson nicht länger im Zentrum steht und alleine über den Lauf des Unterrichts bestimmt, sondern den Schülerinnen und Schülern auf dem Weg zur Lösung des nunmehr im Mittelpunkt stehenden und den Ablauf der Stunde bedingenden Problems hilft. Neben allgemeinen Rahmenbedingungen, wie einer entsprechenden Ausstattung der Schulen und überschaubaren Klassengrößen, zählt daher auch eine ausreichend tiefe fachliche Lehrerausbildung zu den Voraussetzungen, um die Ergebnisse Piagets in praktische unterrichtliche Konzepte umsetzen zu können.[146]

Entsprechende Aufgaben sollen so gestellt sein, dass die Kinder von sich aus motiviert sind, das enthaltene Problem zu lösen; ein Realitätsbezug kann sinnvoll sein, um auch diejenigen Kinder zu erreichen, die die innerfachlichen Strukturen bisher nur unvollständig aufgebaut haben, allerdings ist „[d]as Kind [...] nicht so auf den praktischen Nutzen eingestellt, wie es manche Pädagogen wahrhaben wollen; was es vor allem verlangt, ist die Möglichkeit, sich sinnvoll zu betätigen“[147].

Ein wesentlicher Bestandteil des Unterrichts im Sinne Piagets ist das, was Aebli als „operatorische Übung“ bzw. operatives „Durcharbeiten“ bezeichnet hat.[148] Um die neu gewonnenen Begriffe wirklich als Teil eines operativen Gesamtsystems zu verankern, dürfen Übungsaufgaben nicht länger so gestellt werden, dass sie die rein mechanische Anwendung eines Normalverfahrens fördern, sondern sie müssen den Kennzeichen operatorischer Übung genügen, die Aebli folgendermaßen formuliert: Zumindest am Anfang muss die Möglichkeit bestehen, die geforderte Operation als konkrete Handlung auf sensu-motorischer Ebene auszuführen, um die Grundlage für die verinnerlichte Rekonstruktion zu schaffen. Um den Aufbau reversibler Strukturen zu fördern, müssen zum einen Umkehraufgaben gestellt werden und zum anderen zueinander inverse Operationen gemeinsam, unter Betonung des Zusammenhangs eingeführt werden; um die Assoziativität der Gruppierungen zu betonen, darf es kein Normalverfahren geben, sondern muss im Gegenteil die Variation von Lösungswegen ausdrücklich gefordert werden. Schließlich können kohärente Gesamtsysteme nur aufgebaut werden, wenn zusammenhängende Begriffe

145. vgl. Aebli, Didaktik, S. 92 und 94 f.
146. vgl. Aebli, Didaktik, S. 87, 93 und 98.
147. Aebli, Didaktik, S. 98; vgl. ebenda, S. 94 und 97.
148. Aebli, Didaktik, S. 110.

auch gemeinsam eingeführt werden. Die Befürchtung, dass dies zu einer besonders häufigen Verwechslung ähnlicher Begriffe führen könnte, teilt Aebli nicht: „Nicht indem man sie künstlich trennt, gelangt man wirklich zur Unterscheidung der Begriffe; man erreicht dieses Ziel, indem man sie bewußt zueinander in Beziehung setzt."[149]

Für die Abstraktion der Begriffe – hier: die Verinnerlichung der Operationen – nennt Aebli einzelne Stufen, die im Prozess berücksichtigt werden sollen: Auf die konkrete Operation anhand von Lernmaterial folgt zunächst die graphische Darstellung derselben und im Anschluss daran ein neuerliches Durchdenken, im Zuge dessen die bereits innerlich vorgestellte Handlung als „innere Rekonstruktion einer Operation, die sich auf die Wahrnehmung ihres konkreten Ergebnisses stützt" noch durch die anschauliche Darstellung gestützt wird. Ebenfalls noch mit anschaulicher Unterstützung werden in einem weiteren Schritt Operationen vorausgesehen, bevor schließlich auf rein vorstellungsmäßiger Ebene operiert werden kann.[150]

Aebli beschreibt in seinem Werk einen Unterrichtsversuch, den er selbst durchgeführt hat und in dem er einen operativen Unterricht gemäß der von ihm formulierten Kriterien einem methodisch traditionellen Unterricht gegenüberstellt. Die Auswertung der beiden Lehrgänge zeigt eine weit größere Flexibilität im Lösen von Aufgaben bei den Schülerinnen und Schülern der nach dem operativen Prinzip unterrichteten Klasse.

Zusammenfassung

Folgt man Piaget in seiner Theorie der spontan entstehenden Gruppierungen in einer fest gestuften Reihenfolge, lassen sich daraus kaum ohne Weiteres Folgerungen über ein adäquates didaktisch-methodisches Vorgehen in der Unterrichtspraxis ableiten. Es bedarf dafür Aeblis weitergehender Untersuchungen, die belegen, dass der Lernprozess von äußeren Bedingungen abhängt und das Niveau des erworbenen Wissens somit durch die methodische Umsetzung des Unterrichts beeinflussbar ist.

Es ergeben sich auf diese Weise schließlich wie folgt **didaktisch-methodische Prinzipien** und Forderungen für den mathematischen Anfangsunterricht aus den Forschungen Piagets wie Aeblis:

- Handlungsorientierung und Möglichkeit einer hohen Aktivität der Schülerinnen und Schüler (Operation als verinnerlichte Handlung)

149. Aebli, Didaktik, S. 116; vgl. insgesamt zu den Kennzeichen operatorischer Übung ebenda S. 109-116.
150. vgl. Aebli, Didaktik, S. 120 f. (Zitat: S. 121).

- Einsatz von aktiv manipulierbaren Lernmaterialien (Phase des anschaulichen Denkens und der konkreten Operationen im 1. Schuljahr)

- Verfügbarkeit des Materials für jedes Kind zur individuellen Erforschung (individuelle, genetisch-konstruktive Begriffsbildung)

- Operative Übung (spezielle Eigenschaften der Operationen und Gruppierungen)

- Kooperative Arbeitsformen (Bedeutung des Perspektivwechsels für das flexible Denken)

- Problemorientierung (als Motivation für das aktive Erforschen des Materials)

- ein gewisses Maß an symbolischer Darstellung (Voraussetzung für rein vorstellungsmäßiges Handeln)

Daneben findet man bei Piaget selbst an zahlreichen Stellen Bemerkungen zu mathematischen Teilgebieten und Begriffen, was nicht zuletzt daher rührt, dass er die Sprache der mathematischen Logik zur Beschreibung seiner Forschungsergebnisse nutzt. Diese Ausführungen betonen stets die Bedeutung der Begriffe für das logische Denken an sich oder für die Grundlegung weitergehender mathematischer **Inhalte** und legen daher – mal mehr, mal weniger direkt – Überlegungen zu einer Einbeziehung auf inhaltlicher und somit auf curricularer Ebene nahe:

- Logik allgemein, Aussagenlogik im Besonderen (Grundlage für das intelligente Denken)

- die Struktur der Gruppe (quantitative Entsprechung der qualitativen Gruppierung, die intelligentes Denken kennzeichnet)

- Mengenoperationen allgemein (als Beispiel für grundlegende Operationen im menschlichen Denken), Teilmengenbildung im Besonderen (Einschachtelung als eine Bedingung für die Zahlbegriffsentwicklung)

- Zahlbegriff (als grundlegender logischer Begriff, der operative Relationen mit bedingt)

- Äquivalenzrelation (als qualitative symmetrische Relation Voraussetzung für Klassenbildung und somit für Zahlbegriffsentwicklung)

- Ordnungsrelation (als qualitative asymmetrische Relation Voraussetzung für Seriation und somit für Zahlbegriffsentwicklung)

- Eins-zu-eins-Zuordnung (Stück-für-Stück-Korrespondenz als Voraussetzung für die Erfassung von Mengeninvarianz, die nicht von vorneherein gegeben ist)
- Topologie (Grundlage für projektive und euklidische Geometrie)

Besondere Relevanz kommt hier wohl den beiden Typen von Relationen zu, ohne die nach Piaget die Entwicklung des Zahlbegriffs nicht möglich ist. Da die Mengen-, Ordnungs- und Zahlbegriffe sich gleichzeitig bilden und gegenseitig bedingen, bilden sie ein System gleichberechtigter Operationen. Für die Arithmetik folgt daraus wiederum, dass der kardinale und der ordinale Zahlaspekt gleichermaßen Berücksichtigung finden müssen, wohingegen das Zählen für sich allein zunächst einmal keinen direkten Einfluss auf die Erfassung der Invarianz von Mengen und somit auf die arithmetischen Fähigkeiten hat. Neben inhaltlichen Begriffen werden auch mathematische Tätigkeiten wie Klassifizieren, Hierarchisieren und Substituieren als Beispiele für grundlegende logische Denkoperationen genannt. Dass die operativen Gruppierungen als flexible Gesamtsysteme verstanden werden, die dauerhaft erweiterbar sind, spricht gegen eine isolierte Vermittlung einzelner Inhalte im Unterricht, sondern fordert die explizite Vernetzung zusammenhängender Begriffe. Ein entsprechendes ***Curriculum*** sollte also die Mathematik gewissermaßen als Ganzheit verstehen, die durch bestimmte grundlegende Strukturen bzw. allgemeine Begriffe geordnet ist.

I.2.b Jerome S. Bruner: EIS-Prinzip und Spiralcurriculum

Der Name Jerome Seymour Bruners (1915-2016) – ab 1952 Professor für Psychologie in Harvard und dort Direktor des von ihm mitgegründeten *Center for Cognitive Studies*[151] – ist in der heutigen Mathematikdidaktik fest mit zwei didaktischen Prinzipien assoziiert, die auf verschiedene Unterrichtsebenen bezogen sind, die jedoch beide auf Veröffentlichungen im für diese Arbeit relevanten Zeitraum zurückgehen, weshalb sie hier den Schwerpunkt bilden.[152] Bekanntheitsgrad und Bedeutung sowohl des *EIS-Prinzips* wie des *Spiralprinzips* bis heute sind bereits Beleg für den Einfluss, den Bruner auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts genommen hat; die mit der Einführung der sogenannten modernen Mathematik verbundene Reform bezog sich zudem in besonderem Maße auf das

151. Vorwort von W. Loch in Bruner, Prozeß, S. 13 sowie Buchrückseite ebenda.
152. Der Zusammenhang zwischen beiden ist durch die von Bruner festgestellte Kulturbedingtheit kognitiver Entwicklung gegeben, die eng mit sprachlicher Darstellung einerseits, mit einem Wissenskanon andererseits zusammenhängt; vgl. dazu und darüber hinaus Jahnke, Hans Niels & Mies, Thomas: J. S. Bruners Kognitions- und Curriculumtheorie, in: ZfP 21 (1975), 2, S. 239-248.

Brunersche Konzept eines Spiralcurriculums.[153] Zusätzlichen Widerhall fanden die Überlegungen auf dem Gebiet der in der Folge einsetzenden Curriculumforschung, eines neuen Zweigs in der internationalen Bildungsforschung, die vor allem von Saul B. Robinsohn auch nach Deutschland getragen wurde. Die der Curriculumforschung zukommende Aufgabe beschreibt Robinsohn im Wesentlichen als die Identifikation zeitgenössisch typischer Lebenssituationen sowie der für ihre Bewältigung notwendigen Qualifikationen und die Bestimmung curricularer Elemente – inhaltlicher wie ggf. auch didaktisch-methodischer Art – , die geeignet sind, an ihnen ebendiese Qualifikationen zu erwerben.[154] Die von Bruner als relevant propagierte „Struktur der Disziplinen", die „zu einer der gängigsten Parolen der gegenwärtigen Curriculumreform-Bewegung geworden" war, liefert hier einen Rahmen für die Auswahl solcher Curriculumelemente.[155]

Kognitive Entwicklung und die Theorie der Darstellungsformen

Bei den „Studien zur kognitiven Entwicklung" (*Studies in Cognitive Growth*, 1966), die 1971 in deutscher Übersetzung erschienen sind, handelt es sich laut Untertitel um eine „kooperative Untersuchung", das Werk ist ein Kompendium, das eine Auswahl verschiedener entwicklungspsychologischer Studien versammelt, die Bruner und seine Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter in Harvard über mehrere Jahre hinweg durchgeführt haben.[156] Wie zahlreiche andere war auch Bruner am *Centre internationale d'épistémologique génétique* tätig, und die Arbeiten schließen an die Untersuchungen von Jean Piaget und seiner Arbeitsgruppe – insbesondere in Person von Bärbel Inhelder – an, zu denen regelmäßiger persönlicher Kontakt bestand, derart, dass Piaget, dem das Buch gewidmet ist, in der Widmung als „Freund und Mentor"[157] bezeichnet wird. Dass Bruner darüber hinaus davon spricht, in „geistige[r] Schuld"[158] mit der Genfer Schule verbunden zu sein, zeigt den erheblichen Einfluss, den die Arbeiten Piagets auf Bruners Wirken hatten, obgleich die Beziehung zwischen Piaget und Bruner mitnichten spannungsfrei war.[159]

153. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 472 f.; vgl. Damerow, a. a. O., S. 115; vgl. Otte, Michael [Hrsg.]: Mathematiker über Mathematik, Berlin [u. a.]: Springer, 1974, S. 17.
154. vgl. Robinsohn, a. a. O., S. 45 und 79 f.
155. Robinsohn, a. a. O., S. 33 und 69; vgl. ebenda, S. 33 f., 85 und 88 für weitere Bezüge auf die Brunersche Theorie; Robinsohn, S. 69, verweist ferner auf die konzeptuelle Nähe des Konzepts der Orientierung an fachlichen Strukturen zur Idee des „Elementaren", wie es sich etwa bei Klafki findet.
156. Vorwort von Bruner in Bruner, Jerome S[eymour], Olver, Rose R. & Greenfield, Patricia M.: Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am „Center for Cognitive Studies" der Harvard- Universität, Stuttgart: Klett, 1971, S. 11.
157. Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 10.
158. Vorwort von Bruner in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 16; vgl. ebenda, S. 15 f.
159. vgl. Kesselring, a. a. O., 52 f.

Zentral in der Brunerschen Theorie der geistigen Entwicklung sind dennoch nicht die Begriffe der Akkomodation/Assimilation noch die der Operation und der Gruppierungen, sondern stattdessen steht das Konzept der verschiedenen Darstellungssysteme im Mittelpunkt. Nach Bruner „können wir sagen, daß man etwas auf drei verschiedene Weisen kennen kann: dadurch, daß man es tut, dadurch daß man es sich bildlich vorstellt, und dadurch, daß man ein symbolisches Mittel wie z. B. die Sprache verwendet." „Jede dieser drei Darstellungsmethoden, die handlungsmäßige, die bildhafte und die symbolische, hat ihre eigene Art, Vorgänge zu repräsentieren. Jede prägt das geistige Leben des Menschen in verschiedenen Altersstufen, und die Wechselwirkung ihrer Anwendungen bleibt ein Hauptmerkmal des intellektuellen Lebens des Erwachsenen."[160] Dabei sind es die Handlungs- und die Bildebene, die der symbolischen Ebene zeitlich vorausgehen, die Sprache entwickelt sich später, was wenig überrascht, wenn man sich vergegenwärtigt, wie komplex der Prozess ist, der auf dem Weg zur Sprache bewältigt werden muss. Während bildliche Darstellungen stets in gewissem Maß der ganzheitlichen Wahrnehmung analog sind, erfordert die Übersetzung in Sprache eine Übertragung dessen, was dargestellt werden soll, „in diskrete Ausdrücke, die dann zu Äußerungen oder Wortketten oder Sätzen zusammensetzbar sind."[161] Ganzheiten werden also durch eine gewissermaßen zufällige Anzahl einzelner Elemente dargestellt und wiederum zu neuen Gesamtheiten zusammengesetzt (z. B. Buchstaben zu Wörtern und diese dann wiederum zu Sätzen). Dieser Vorgang gestaltet sich vor allem deshalb als komplex, weil es sich bei Sprache um eine vollständig nicht-analoge Darstellungsform handelt, sowohl in ihren einzelnen Elementen als auch in den neu aufgebauten Ganzheiten. Ein Vorrat an Denkstrukturen, die aufgebaut werden, wenn konkret gemachte Erfahrungen innerlich geordnet werden, ist Voraussetzung für den Erwerb sprachlicher Fähigkeiten.[162] Abstrakte Begriffe, die in der Anschauung nicht existieren – wie es besonders für mathematische Begriffe spezifisch ist – können erst gebildet werden, wenn das Kind nicht mehr nur an die Wahrnehmung gebunden ist, sondern die Fähigkeit entwickelt hat, abstrakte Symbole mit Bedeutung zu füllen.[163]

Den Anstoß für den Aufbau neuer Denkstrukturen sieht auch Bruner in einer kognitiven Konfliktsituation, entgegen Piaget besteht der Widerspruch für ihn jedoch nicht zwischen Subjekt und Objekt, sondern zwischen zwei verschiedenen Darstellungsformen, die „nicht übereinstimmen" und daher ein „ernsthaftes Un-

160. Bruner, Über kognitive Entwicklung, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 27 und 21.
161. Bruner, Kognitive Entwicklung, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 21; Zitat: ebenda, S. 27 f.
162. vgl. Bruner, Über die kognitive Entwicklung II, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 74.
163. vgl. Bruner, Kognitive Entwicklung, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 53.

gleichgewicht“ hervorrufen. Das Bedürfnis, den offenbar gewordenen Widerspruch aufzulösen, resultiert darin, „daß das Kind seine Methoden des Problemlösens dann entscheidend revidiert“[164], also seine bisher aufgebauten Schemata anpasst, erweitert und neu strukturiert. Von erheblichem Interesse sind hier noch die Ergebnisse einer weiteren Studie, die Bruner referiert, welche besagen, dass Begriffe von denjenigen Kindern leichter gebildet werden, die weniger anschaulich denken. Es scheint, als wäre die konkrete Anschauung für die Begriffsbildung eher hinderlich als förderlich[165], zumindest ab dem Punkt, an dem – nach Piaget – die Handlung vollständig als Operation verinnerlicht sein muss und – nach Bruner – auf der symbolischen Ebene dargestellt werden kann. Ohne die Übertragung in Sprache kann dies nicht gelingen, denn es ist allein die symbolische Ebene, „die Transformationen erlaubt, bei denen sich die Ordnungen erhalten“.[166] Für die konkrete Lehr-Lern-Situation lässt sich daraus ableiten, dass für eine erfolgreiche Abstraktion als wesentlicher Teil der Bildung von Begriffen nicht auf eine Darstellung auf der symbolischen Ebene verzichtet werden kann.

Bruner hat sich auch der Frage nach dem Erwerb der Invarianz gewidmet, und er erklärt die Entwicklung in Übereinstimmung mit seiner Theorie der Repräsentationsformen in ihrer Funktion als Katalysator für die Bildung von Begriffen. Als grundlegend für die Invarianz sieht er dabei nicht die Fähigkeit der gegenseitigen Kompensation verschiedener Dimensionen einer Operation, sondern das Bewusstsein der Identität, das nach seinen Versuchen eine notwendige – wenn auch noch nicht hinreichende – Bedingung für das Erkennen von Äquivalenz darstellt. Das Konzept der Invarianz entsteht dann, „wenn dieser ursprünglichste Begriff der Identität in neue Formen übersetzt wird – in Formen der Handlung, der Vorstellung und des Symbolismus.“[167] Einen Beleg für die Relevanz des Identitäts-Begriffes sieht Bruner z. B. in den Umschüttversuchen, die er nach dem Muster der Piagetschen Versuche durchgeführt hat. Die zusätzliche Frage danach, ob es sich nach dem Umschütten um dasselbe Wasser handele, führte in vielen Fällen zu einer besseren Feststellung der Invarianz[168]. Damit ist auch impliziert, dass sich die geistigen Strukturen nicht unabhängig von äußerer Einwirkung konstituieren, sondern durch passende Maßnahmen gefördert werden können. Neben der Frage nach der Identität werden als weitere solche Maßnahmen der gezielte Verzicht auf

164. Bruner, Kognitive Entwicklung, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 33.
165. vgl. Bruner, Kognitive Entwicklung, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 50.
166. Bruner & Kenney, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 205.
167. Bruner, Über die Invarianz von Flüssigkeiten, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 227; vgl. ebenda, S. 226 f., 229 und 244.
168. vgl. Bruner, Über die Invarianz von Flüssigkeiten, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 230.

Anschauung genannt[169] sowie ganz allgemein die Übung als eine Maßnahme, die Ergebnisse verbessert.[170]

„Der Prozeß der Erziehung" und das Spiralcurriculum

Die Schrift *The Process of Education* (1960) ist hervorgegangen aus dem zehntägigen Zusammentreffen von Pädagogen, Psychologen und diversen Fachwissenschaftlern – etwa 35 an der Zahl – in Woods Hole, Massachusetts, im Jahr 1959, das unter der schlichten Bezeichnung *Woods Hole Conference* einen festen Platz in der Geschichte der US-amerikanischen Curriculumreform einnimmt.[171] Bruner, unter dessen Leitung die Konferenz stattfand, fasst in dem Buch Ergebnisse und Diskussionsstand zusammen; unter dem Titel „Der Prozeß der Erziehung" erschien das Werk in deutscher Übersetzung erstmals 1970 und damit zu einem Zeitpunkt, als die Reformbemühungen in der BRD schon entscheidend fortgeschritten waren. Auch wenn natürlich keinesfalls ausgeschlossen ist, dass die englische Originalausgabe den Protagonisten der Reform bekannt war, so ist doch eher von einem indirekten Einfluss über die internationale Seite der Bewegung auf die deutsche Reform des Mathematikunterrichts auszugehen. Die *Woods Hole Conference* war eingebettet in eine in den USA breit geführte Curriculumdiskussion bzw. bildete sie sogar den Ausgangspunkt dafür, in Deutschland hat die Perspektive der Curriculumforschung jedoch offenbar nur eine untergeordnete Rolle gespielt.[172]

Bruner macht das Ziel des Fachunterrichts nicht von vorneherein an spezifischen Inhalten oder Fähigkeiten fest, sondern formuliert allgemein, dass jegliches Lernen darauf zielt, in der Zukunft dienlich zu sein, sei es – jetzt konkreter gesprochen – im Hinblick auf eine unmittelbare Anwendung von Fertigkeiten (*skills*) oder in

169. hier in Form der Abschirmung des Umschüttvorgangs, was nach Bruners Interpretation dazu „„„zwingt" [...], sich auf ein Identitätsargument zu stützen.", Bruner, Über die Invarianz von Flüssigkeiten, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 242.

170. Bruner, Über die Invarianz von Flüssigkeiten, in Bruner, Olver & Greenfield, a. a. O., S. 232.

171. s. https://en.wikipedia.org/wiki/Woods_Hole_Conference, die Existenz des Artikels dient als Beleg für die Bedeutung der Konferenz, dort wird New Math als (mehr oder weniger) direkte Folge der Konferenz genannt, allerdings ist der Artikel extrem knapp gehalten und stark vereinfacht; vgl. zu den Informationen über das Treffen das Vorwort von W. Loch in Bruner, Prozeß, S. 13 und 15, und die Buchrückseite ebenda.

172. Dass W. Loch in seinem Vorwort in Bruner, Prozeß, S. 12, schreibt, die deutsche Übersetzung verfolge das Ziel, das Werk „der breiteren pädagogisch interessierten Öffentlichkeit zugänglich zu machen, in der Hoffnung, die bei uns erst in den Anfängen stehende Diskussion um eine systematische Verbesserung und Rationalisierung der Lehrpläne durch einen [solchen] Ansatz zu beleben", spricht zumindest gegen eine Bekanntheit des Werks in der Breite und belegt ebenfalls, dass die Reform in Deutschland nicht schwer-punktmäßig vom Curriculum her gedacht wurde.

Form eines Transfers von fachspezifischen Grundsätzen, Grundbegriffen, allgemeinen Konzepten und Einstellungen auf neue Situationen.[173] Es sind dies die Aspekte eines Faches, die er als *fundamental ideas* bezeichnet und die in ihrer Gesamtheit die dem Fach zugrundeliegende Struktur ausmachen. Beides, **fundamentale Ideen** wie **Struktur**, sind die zentralen Begriffe in der Brunerschen Theorie eines spiralförmig aufgebauten Curriculums.

Vermittlung und Transfer grundlegender Begriffe müssen nach Bruner die vorrangigen Ziele des Unterrichts sein. Aus lerntheoretischer Perspektive helfen Strukturen einen Gegenstand im Gedächtnis zu behalten, indem dieser in einer schematisch vereinfachten, also strukturierten Form gespeichert wird. Die grundlegenden Strukturen sind zudem geeignet, einen innerfachlichen Zusammenhang über das gesamte Curriculum hinweg herzustellen, und zwar sowohl horizontal – indem sie in den verschiedenen inhaltlichen Teilgebieten enthalten sind – als auch vertikal – indem sie auf verschiedenen, komplexer werdenden Niveaus immer wieder auftreten. Die fundamentalen Ideen sind daher geeignet, als eine Art Gerüst ein Curriculum zu strukturieren und transparent zu machen und darüber hinaus auf diese Weise die Kluft zwischen den unterschiedlichen Bildungsinstitutionen zu verringern.[174] Das aber wohl wichtigste Argument für eine Orientierung an grundlegenden Begriffen liegt in ihrer Anwendbarkeit und ihrer Übertragbarkeit: „damit jemand imstande ist, die Anwendbarkeit oder Nichtanwendbarkeit eines Grundbegriffs auf eine neue Situation zu erkennen und dadurch sein Verständnis zu erweitern, muß er von der allgemeinen Beschaffenheit des Phänomens, mit dem er es zu tun hat, eine klare Vorstellung haben. Je fundamentaler der Begriff ist, [. . .] um so weiter ist [. . .] der Bereich seiner Anwendbarkeit auf neue Probleme.“[175]

Die Überzeugung, dass die Orientierung an grundlegenden Strukturen über sämtliche Schuljahre erfolgreich sein kann, basiert auf der Annahme, dass die Methoden als wesentlicher Bestandteil der Fachstruktur gewissermaßen universal sind, was die Altersstufe der Mathematiktreibenden betrifft; Bruner geht davon aus, dass sich wissenschaftliches Denken mit zunehmendem Alter nicht in der Art und Weise verändert, sondern lediglich auf unterschiedlichen Niveaus betrieben wird.[176] Vor diesem Hintergrund ist er in der Lage, die für sein Konzept eines Spiralcurriculums zentrale Hypothese zu formulieren: „Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden“; die Inhalte müssen nur der jeweiligen Altersstufe angepasst auf-

173. Bruner, Prozeß, S. 30.
174. vgl. Bruner, Prozeß, S. 35-38.
175. Bruner, Prozeß, S. 31.
176. Bruner, Prozeß, S. 27.

bereitet werden, und zwar so, dass sie auf einem späteren Niveau anschlussfähig bleiben.[177]

Es ist folgerichtig, dass eine Reform, die auf eine entsprechende Vermittlung der Strukturen ausgerichtet ist, zuallererst von der curricularen Ebene ausgehen und ein Gesamtcurriculum über alle Schuljahre schaffen muss, das entlang den fundamentalen Ideen geordnet ist. Bei der Frage, wie ein solches konkret auszusehen hat, handelt es sich um ein noch offenes Problem, eine Forderung aber, die Bruner aus der Notwendigkeit fachlicher Expertise – denn diese ist Voraussetzung für die Identifikation fundamentaler Ideen – ableitet, ist, dass Fachwissenschaftler an der Curriculumentwicklung beteiligt werden müssen.[178] Ein konkreterer Vorschlag, der von Inhelder in Woods Hole vorgebracht wurde, sieht vor „die ersten beiden Schuljahre für eine Reihe von Übungen im Behandeln, Klassifizieren und Einordnen von Gegenständen zu verwenden, und dabei die grundlegenden Operationen der logischen Addition, Multiplikation, [Inklusion], Reihenbildung und dergleichen zu betonen, denn sicherlich sind diese logischen Operationen die Grundlage für die spezifischeren Operationen und Konzepte der ganzen Mathematik und Naturwissenschaften.“[179]

Neben den bis hierhin weitgehend rein inhaltlichen Fragen des Fachunterrichts geht Bruner doch auch auf solche didaktischen Aspekte ein, die eher die unterrichtsmethodische Ebene betreffen. Während bereits in Woods Hole die Notwendigkeit betont wurde, die individuell-genetische, aktiv-konstruktivistische Begriffsbildung durch Methoden des entdeckenden Lernens zu fördern[180], widmet er in *Der Prozeß der Erziehung* ein Kapitel allein dem, was er intuitives Denken nennt und dessen Entwicklung seiner Ansicht nach ein erstrebenswertes Ziel des Unterrichts sein sollte. Er versteht darunter das Gegenstück zu analytischem Denken, die Fähigkeit gewissermaßen spontan ein Problem zu lösen, ohne diese Lösung systematisch, logisch-deduktiv hergeleitet zu haben. Ein intuitives Vorgehen schließt dabei keinesfalls analytisches Arbeiten aus, im Gegenteil erfordert eine intuitive Problemlösung im Nachhinein eine analytische Überprüfung. Intuitive Arbeit erfordert flexibleres Denken außerhalb starrer formal-logischer Schemata, heuristische Strategien und einen fundierten Einblick in die inhaltliche Struktur eines Gegenstands. Obgleich bis dato praktisch keine psychologische Forschung zu diesem Themenkomplex existiert, kann es nach Bruner keinen Zweifel geben, dass die bewusste Reflexion heuristischer Regeln im Unterricht das intuitive Denken fördert,

177. Bruner, Prozeß, S. 44.
178. Bruner, Prozeß, S. 32.
179. Bruner, Prozeß, S. 55.
180. vgl. Bruner, Jerome S[eymour]: The Process of Education revisited, in: The Phi Delta Kappan 53 (1971), 1, S. 18.

und darüber hinaus Plausibilitätsüberlegungen und die Betonung unterschiedlicher Lösungswege selbstverständlicher Teil des Unterrichts sein sollten.[181]

Eine weitere didaktische Forderung, die Bruners Werk impliziert, wenn er als das primäre Reformziel eine generelle Leistungsverbesserung der Schülerinnen und Schüler – und zwar ALLER – nennt, ist die Notwendigkeit einer Differenzierung, die Lerngelegenheiten für die unterschiedlichen Leistungsniveaus bereithält.[182] Die Forderung nach besseren Leistungen begründet er dabei zum einen mit einem erhöhten Bedarf an naturwissenschaftlich-technisch Ausgebildeten in einer Welt, deren Technologisierung schnell fortschreitet, zum anderen spezieller mit den sicherheits- und weltpolitischen Umständen, die die USA – insbesondere nach dem sogenannten Sputnik-Schock – in konstanter Rivalität und Feindschaft zur Sowjetunion sehen.[183] Abgesehen davon spielen soziale und pädagogische Fragestellungen keine Rolle im *Prozeß der Erziehung*. Es ist diese Einengung auf curriculare und inhaltliche Fragestellungen, die Bruner in seinem Artikel *The Process of Education Revisited* von 1971[184] selbst rückwirkend an seinem Konzept bemängelt, vielmehr fordert er, dass eine über die 1970er Jahre fortgeführte Reform soziale Interaktion in der Klasse sowie Probleme des Alltags zu berücksichtigen habe.

Soll die Reform all den an sie gestellten Forderungen genügen können, so ist es unabdingbar, dass die umsetzende Lehrerschaft über eine entsprechende Ausbildung verfügt. Die Ausbildung muss gewährleisten, dass die Lehrpersonen nicht nur selbst die fachlichen Strukturen durchdringen, sondern vor allem auch in den Primarschullehrkräften das Bewusstsein darüber vorherrscht, dass es ihre Aufgabe ist, die Kinder propädeutisch auf die Mathematik der weiterführenden Schulen vorzubereiten.[185]

Zusammenfassung

Obgleich die curriculare Perspektive bei Bruner stark im Vordergrund steht, geht er weniger auf einzelne konkrete Begriffe ein, die er für relevante Unterrichtsinhalte hält. Es mag dies der Tatsache geschuldet sein, dass es sich bei der *Woods Hole Conference* um eine fächerübergreifende Veranstaltung gehandelt hat und bei *Der Prozeß der Erziehung* entsprechend nicht um eine spezifisch mathematikdidaktische Schrift. Die zentrale Folgerung auf inhaltlicher Ebene besteht darin, das

181. vgl. Bruner, Prozeß, insbesondere S. 64 f. und 72 f.
182. vgl. Bruner, Prozeß, S. 77 f.
183. vgl. Bruner, Prozeß, S. 82 f.
184. Bruner, Jerome S[eymour]: The Process of Education revisited, in: The Phi Delta Kappan 53 (1971), 1, S. 18-21, vgl. vor allem S. 20 f.
185. vgl. Bruner, Prozeß, S. 34 f., 52 und 96.

Curriculum an Grundbegriffen und allgemeinen Strukturen auszurichten bzw. um diese herum anzuordnen. Welches diese fundamentalen Begriffe sind, das bleibt hier zunächst der weiteren, fächereigenen Curriculum-Diskussion überlassen; lediglich das Konzept der Identität wird als grundlegend für jegliche weitere mathematische Begriffsbildung genannt.

Der Schwerpunkt der Theorie liegt also auf den beiden, stets miteinander verknüpften, ***curriculumbezogenen didaktischen Prinzipien***:

- die Orientierung an fundamentalen Ideen (= fachimmanente Strukturen)
- das Spiralprinzip

Methodisch-didaktische Konsequenzen, die das Brunersche Werk darüber hinaus impliziert, sind

- die Berücksichtigung der verschiedenen Darstellungsformen – enaktiv, ikonisch, symbolisch – wobei die enaktive und die ikonische Ebene der symbolischen vorausgehen, auf die symbolische Ebene für die Bildung allgemeiner Begriffe aber auf keinen Fall verzichtet werden kann
- Problemorientierung und explizite Nutzung heuristischer Strategien
- die Bereitstellung von Unterrichtsmaterialien, die Differenzierung ermöglichen

Ergänzt werden diese Forderungen im Nachhinein noch um die Feststellung der Notwendigkeit, soziale Aspekte und Interaktion innerhalb der Klassen zu berücksichtigen und Alltagsprobleme in den Unterricht einzubeziehen.

I.3 Zóltan P. Dienes

Zóltan Pál Dienes (oder in internationaler Schreibweise Zoltan Paul, 1916-2014) ist der wohl weltweit bekannteste Reformer des Mathematikunterrichts, dessen Name bis heute fest mit New Math assoziiert ist, obwohl er seine ersten Ideen eher unabhängig von dieser Bewegung entwickelte. Dienes wurde in Ungarn geboren, wuchs in Österreich, Frankreich, Ungarn und England auf, studierte zunächst Mathematik – worin er auch promovierte –, später Psychologie und arbeitete an zahlreichen Universitäten in Europa, Nordamerika und Australien. Am längsten beschäftigt war er jeweils in Leicester, England, (1950-60) wo er fachmathematische Vorlesungen hielt und im Zuge seines Psychologiestudiums seinen Schwerpunkt zunehmend auf Fragen des Lernens von Mathematik verlagerte, in Adelaide, Australien, (1961-65) wo er in der Psychologie tätig war, und in Sherbrooke, Kanada, (1966-1978) wo er das großzügig mit staatlichen Mitteln geförderte *Centre des Recherches en Pychomathématiques* gründete. Zoltán Dienes war also wohl das, was man einen Weltbürger nennt, er sprach sieben Sprachen und unternahm zahlreiche Reisen in der ganzen Welt, sowohl im Rahmen seiner Arbeit als auch privat. Er liebte seit seiner Jugend die Natur, wanderte gerne auf eigene Faust und bestieg leidenschaftlich gern Berge. Man muss sich also bei der Auseinandersetzung mit seinem Werk vor Augen halten, dass die Ideen einem außergewöhnlich weltoffenen Geist entsprangen, der wohl eher das große Ganze im Blick hatte statt isolierte Details. Dass er einen Teil seiner Kindheit in einer Kommune verbrachte, einen weiteren in einem Montessori-Kinderhaus, mag darüber hinaus zu einer großen Liberalität im Denken beigetragen haben, die er anderen weitergeben wollte.[186]

Obwohl kein ausgebildeter Lehrer arbeitete Dienes als solcher, u. a. fachfremd, wobei er die Inhalte und Methoden eher intuitiv aus seinem eigenen Erfahrungsschatz auswählte bzw. ableitete. Es scheint, dass diese Vorgehensweise gewissermaßen exemplarisch für sein Konzept ist, in das an vielen Stellen eigene Intuition und Kreativität eingeflossen sind. Nichtsdestotrotz bezieht er sich in seinen Schriften auf psychologische Theorien, namentlich u. a. auf die von Bruner – obgleich sich die beiden in dem Dreivierteljahr, das Dienes am *Center for Cognitive Studies* in Harvard mit Bruner zusammengearbeitet hat, nicht in allem einig waren[187] – und Piaget[188] – den er ebenfalls in dessen Institut in Genf besucht hat –, bettet sie in bereits stattfindende, internationale Reformprojekte ein[189] und kontrastiert sie mit dem an den Schulen herrschenden Ist-Zustand. Die Inhalte des herkömmlichen, konventionellen Mathematikunterrichts beschreibt Dienes als Sammlung einzelner, geschlossener Lösungsverfahren und künstliche „Symbolakrobatik", die „in festge-

186. Dienes' Autobiographie gibt einen breiten Einblick in sein Leben, Wirken und seine Persönlichkeit, vgl. Dienes, Memoirs. Wörtlich stellt er ebenda, S. 40, in Bezug auf seine Kindheit selbst fest: „One result of the to-and-froing of the philosophies was [. . .] a development of tolerance of widely differing points of view, beliefs and philosophies."

187. vgl. Dienes, Memoirs, S. 289 und 301.

188. vgl. u. a. Dienes, Z[oltan] P[aul]: Schulmathematik als Bildungsfach. Eine Untersuchung des Übergangs von der konstruktiven zur analytischen Phase im mathematischen Denken bei Schulkindern, Freiburg: Herder, 1967, S. 7 [im Folgenden: Dienes, Bildungsfach]; Dienes, Z[oltan] P[aul]: Aufbau der Mathematik, Freiburg: Herder, 1965, S. 35 und 39 f. [im Folgenden: Dienes, Aufbau]; Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Methodik der modernen Mathematik. Grundlagen für Lernen in Zyklen, Freiburg: Herder, 1970, S. 43 [im Folgenden: Dienes & Golding, Methodik]; Dienes, Z[oltan] P[aul], Gaulin, Claude & Lunkenbein, Dieter: Das Programm des Sherbrooker Mathematik-Projektes, in: Neunzig, Walter [Hrsg.]: Konzeptionen für den Mathematikunterricht. Beiträge aus sechs Ländern, Stuttgart: Klett, 1970, S. 15; zu den persönlichen Kontakten mit Bruner und Piaget vgl. Dienes, Memoirs, S. 290, 301 und 351-353; Piaget bezeichnet in Erziehung, S. 59, die Ideen von Dienes als „bemerkenswert".

189. vgl. u. a. Dienes, Bildungsfach, S. 5; vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 30 f. und 34 f.

legten Schritten" gemäß ihrer logischen Struktur präsentiert würden, ohne dass ein tieferes Verständnis und damit die Fähigkeit des Transfers auf Anwendungen erreicht oder auch nur angestrebt werde[190].

Die Dienes-Konzeption

Einer solchen unterrichtlichen Ausgangssituation steht die im Zuge der stark fortschreitenden Computerisierung der gesamten Umwelt enorm gestiegene **gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik** entgegen, die Dienes sogar zu der – aus späterer Sicht falschen – Annahme verleitet, jedes Individuum müsse zukünftig selbst programmieren können[191]. Besondere Relevanz komme der Mathematik dabei für Wirtschaft und Beruf zu: Dienes beschreibt eine veränderte Arbeitswelt, in der schwerpunktmäßig Entscheidungs- und Problemlösekompetenzen und somit die generelle Fähigkeit zum Denken in Strukturen gefordert sind, wohingegen Rechenroutinen – nicht zuletzt aufgrund der Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechenmaschinen – kaum noch benötigt werden[192]. Die Beherrschung arithmetischer Verfahren kann dementsprechend nicht länger Hauptziel des mathematischen Unterrichts sein; vielmehr müssen Schülerinnen und Schüler zukünftig verstärkt auf ein wie oben beschriebenes Berufsleben vorbereitet werden, indem sie lernen, Phänomene zu ordnen, zu systematisieren, zu strukturieren und gemeinsame Strukturen in unterschiedlichen Situationen zu identifizieren, um auf dieser Basis – auch unter Zuhilfenahme der mathematischen Sprache – Vorhersagen ableiten zu können[193].

Dienes begründet den Reformbedarf also vorrangig mit „ökonomische[r] Notwendigkeit"[194], daneben argumentiert er aber ebenfalls mit der Relevanz systematischen Denkens für den Alltag sowie der kulturellen Bedeutung der Mathematik und ihrer Anwendungen[195]. Auf pädagogischer Ebene sieht er darüber hinaus den

190. vgl. Dienes, Z[oltan] P[aul] & Jeeves, M. A.: Struktur und Transfer. Die Rolle der mathematischen Struktur im Lernprozeß, Freiburg: Herder, 1972, S. 126 [im Folgenden: Dienes & Jeeves, Transfer]; Dienes & Golding, Methodik, S. 58 und Dienes, Aufbau, S. 10 f., 15 f., 17 und 22 f.
191. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 19-22.
192. vgl. Dienes, Aufbau, S. 21; Dienes & Golding, Methodik, S. 15 f.
193. Dienes & Jeeves, Transfer, S. 126; Dienes, Bildungsfach, S. 115.
194. wörtlich Dienes & Golding, Methodik, S. 15; ebenso Dienes, Bildungsfach, S. 5; Dienes, Aufbau, S. 14 f.
195. Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Mathematisches Denken und logische Spiele. Erlernen der Logik im Spiel, 2., durchges. Aufl., Freiburg: Herder, 1968, S. 9 [im Folgenden: Dienes & Golding, Logische Spiele]; bezogen auf das Klassifizieren heißt es bei Dienes & Jeeves, Transfer, S. 126, dass die Schülerinnen und Schüler „das im Alltag ja auch tun"; es stellt sich hier allerdings die Frage nach der Alltagsrelevanz eines entsprechenden Unterrichts, wenn diese Fähigkeit im Alltag offenbar bereits vorhanden ist.

mathematischen Unterricht als geeignete Umgebung, um die Persönlichkeit zu fördern und Glücksempfinden zu ermöglichen[196].

Es scheint folgerichtig, dass Dienes aus den so erweiterten Zielen die Notwendigkeit erweiterter **Inhalte** ableitet, die mit der Forderung, dass die „Einführung in die „Arithmetik“ dem Studium der „Mathematik“ weichen muß“[197], einhergeht. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass entgegen dem möglichen ersten Eindruck dieses Zitat nicht so zu verstehen ist, dass die gesamte Arithmetik durch andere Inhalte *ersetzt* werden soll – zumal das Interesse der Kinder an Zahlen betont wird[198] –, auch wenn die inhaltliche Ausrichtung der Dienesschen Veröffentlichungen diese Vermutung stützen könnte. Der Verfasser weist jedoch an mehreren Stellen darauf hin, dass für die Vermittlung von Rechenverfahren ebenso wie fürs Sachrechnen seit Langem bewährte methodische Vorgehensweisen existieren, die beibehalten werden sollten bzw. an anderer Stelle, dass die Ausführung von Algorithmen durch eine stärkere Betonung begrifflicher Zusammenhänge sogar einfacher wird[199]. Es lässt sich hieraus folgern, dass nicht pauschal alles Alte abgelehnt wird; der Schwerpunkt in den Schriften liegt auf den neuen Inhalten, weil an diesen Stellen weit höherer Bedarf an praxistauglichen Konkretisierungen besteht[200]. Nichtsdestotrotz erfolgt im Rahmen der inhaltlichen Neuorientierung eine Neubewertung der arithmetischen Inhalte, die in einer veränderten Bedeutung des Rechnens für den elementaren mathematischen Unterricht resultiert. Die Arithmetik tritt in der Konzeption vom praktisch alleinigen Inhalt zu *einer* inhaltlichen Säule *neben* anderen zurück.[201]

Zu den Inhalten, deren Neuaufnahme in den Unterricht Dienes auf Basis der von ihm formulierten Ziele für unabdingbar hält, zählen grundlegende Strukturbegriffe, die die Klassifizierung von Situationen ermöglichen, für die Statistik notwendige Begriffe der Linearen Algebra (z. B. der des Vektors), die für die Funktionsweise von Computern relevanten Themen Logik und Binärsystem sowie ***Mengen***. Letztere erfüllen dabei eine doppelte Funktion: Zum einen liefern sie gemeinsam mit den Mengenoperationen ein Beispiel für eine elementare logische Struktur, zum anderen sind sie grundlegend für den (kardinalen) Zahlbegriff, vor allem, wenn

196. Dienes, Aufbau, S. 14 und 25.
197. Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 9.
198. Dienes & Golding, Methodik, S. 133.
199. Dienes, Aufbau, S. 67 und 117; Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 10; Dienes & Golding, Methodik, S. 17; Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 9.
200. vgl. hierzu auch Dienes, Z[oltan] P[aul]: Moderne Mathematik in der Grundschule, Freiburg: Herder, 1965, S. 9 [im Folgenden: Dienes, Moderne], wo die Bereitstellung ebensolcher Hilfen für Lehrkräfte als Ziel der Veröffentlichung genannt wird.
201. Vgl. etwa die inhaltliche Aufteilung im Rahmen des Sherbrooker Mathematik-Projekts in Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 12-15, in der Arithmetik neben Logik, Geometrie, Algebra und Stochastik steht.

die Zahlen stärker als bisher unter strukturellen Aspekten betrachtet werden sollen[202]. Die durch seine zweifache Rolle sich ergebende Wichtigkeit des Mengenbegriffs führt dazu, dass dieser im Werk von Dienes einen breiten Raum einnimmt. Dies gilt insbesondere für die Veröffentlichungen zum Elementarunterricht, in dem die Mengen aufgrund ihrer grundlegenden Eigenschaften bereits vor den Zahlen thematisiert werden sollen. Im Einzelnen schlägt Dienes vor, nach der Durchführung von Übungen zur Mengeninvarianz nach Piaget[203] als Mengenoperationen die Bildung von Teil-, Schnitt- und Vereinigungsmengen sowie des Komplements zu behandeln und über Eins-zu-eins-Zuordnung Mächtigkeitsvergleiche anstellen zu lassen[204]. All dies dient unmittelbar der Vorbereitung der Zahlen und des Rechnens. Eine formalere Beschreibung von Mengen bzw. von Klassen als speziellen Mengen soll hingegen erst *nach* der Einführung des Zahlbegriffs erfolgen[205]. Zwar werden die Zahlen aus (Äquivalenz-)Klassen gleichmächtiger Mengen abgeleitet, dennoch geht die Bedeutung des Begriffs der Klasse weit über die der Grundlage der Arithmetik hinaus: Das Klassifizieren von Objekten und die Feststellung von Beziehungen zwischen diesen sind nicht nur zentrale mathematische Tätigkeiten, sondern finden auch bei der Bildung von Alltagsbegriffen permanent Anwendung, ebenso wie in der alltäglichen Kommunikation. Dienes geht sogar so weit, dass er unlogisches Argumentieren als Folge falsch genutzter Relationen zwischen Klassen bezeichnet. Es zeigt sich hier der Modellcharakter der Mengensprache für die Beschreibung von Alltagssituationen, Sprachnutzung und sogar Sprachentwicklung.[206]

Dazu, dass es explizit nicht Ziel ist, mit einem formalen, gar abstrakten Mengenbegriff in den Primarunterricht einzusteigen, passt, dass mehrfach betont wird, dass zunächst an Mengen aus konkreten Elementen aus der Umwelt – darunter auch den Kindern selbst – gearbeitet werden soll und dass hier keinesfalls ein bloßes Kalkül „eingepaukt werden“ darf[207], Letzteres ein erneuter Hinweis auf den methodischen Ist-Zustand an den Schulen der westlichen Welt und gleichzeitig bereits eine Andeutung möglicher Probleme in der Umsetzung. Dass die entsprechenden Inhalte dagegen für junge Kinder zu schwer sein könnten, wird weitgehend ausgeschlossen; ganz im Gegensatz weiß Dienes aus persönlichen Beobachtungen zu berichten, dass bereits Vierjährige fähig sind, Schnittmengen aus drei Mengen zu

202. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 18; Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Menge, Zahl, Potenz, Freiburg: Herder, [4]1971, S. 9 [im Folgenden: Dienes & Golding, Potenz].
203. Dienes & Golding, Potenz, S. 36 f., die Übernahme von Piaget ist an dieser Stelle eindeutig, auch wenn dieser hier nicht namentlich genannt wird.
204. vgl. Dienes & Golding, Potenz, S. 32-37 und Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 17-20.
205. Dienes, Aufbau, S. 109.
206. vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 17-19; vgl. Dienes Z[oltan] P[aul]: Relationen. Lehreranleitung zu den Arbeitskarten, Freiburg: Herder, 1970, S. 5.
207. Dienes & Golding, Potenz, S. 28.

bilden, sofern das in konkreter Darstellung geschieht; dies fällt ihnen somit leichter als vielen Erwachsenen.[208] Auch die leere Menge als Grundlage der Zahl 0 birgt seiner Erfahrung nach keine Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schüler zeigen sogar Freude daran, solche zu bilden, indem sie unmögliche Kombinationen von Eigenschaften erfinden[209].

Zahlen definiert Dienes kardinal, als Eigenschaft von Mengen, explizit nicht als Eigenschaft von Dingen, und bezeichnet stattdessen die „Welt der Mengen“ als „Zwischenwelt zwischen der Welt der Gegenstände und der der Zahlen“[210]. Auch wenn, bedingt durch die Gesamtkonzeption und die damit einhergehende Rolle der Mengen, der Schwerpunkt des Zahlbegriffs zunächst auf dem kardinalen Aspekt liegt, so wird dennoch der ordinale Aspekt nicht übergangen. Die Einführung von Ordnungsrelationen dient der Vorbereitung der Vorgänger- und Nachfolger-Relation, und es wird Wert darauf gelegt, diese beiden Zahlaspekte miteinander zu verknüpfen[211]. Der Maßzahlaspekt findet implizit Beachtung, wenn das Zählen als Spezialfall des Messens betrachtet wird[212]. Dem Zählen wird insgesamt wenig Aufmerksamkeit zuteil, es findet an einigen Stellen eher beiläufig Erwähnung[213].Ob das daher rührt, dass Dienes eine herausragende Rolle des Zählens als eines Elements der konventionellen Methodik ablehnt oder es zu jenen traditionellen Inhalten zählt, für die er schlicht keinen Bedarf an methodischer Ergänzung sieht, geht aus der hier zugrunde gelegten Literatur nicht hervor.

Erhebliches Gewicht in Bezug auf die arithmetischen Inhalte liegt derweil auf der Einführung in die Zahldarstellung im ***Stellenwertsystem*** und den dafür vorauszusetzenden Potenzbegriff. Dabei findet keine Einschränkung auf das Dezimalsystem statt, es wird stattdessen größter Wert darauf gelegt, den allgemeinen Begriff an verschiedensten Basen zu entwickeln, indem konkrete Gegenstände in unterschiedlichen Basen gezählt werden. Beobachtungen belegen, dass es sich dabei um eine Tätigkeit handelt, an der die Kinder große Freude haben.[214]

208. Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 50; die Schnittmengenbildung geschieht hier in Form sogenannter Reifenspiele, in denen Reifen als enaktive Darstellungsform von Venn-Diagrammen dienen; vgl. auch Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 10-12, zum Gruppenbegriff in der Grundschule.

209. Dienes, Moderne, S. 13; dagegen Padberg, Friedhelm & Benz, Christiane: Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Heidelberg: Spektrum Akad. Verl, [4]2011, S. 28.

210. Dienes, Moderne, S. 9.

211. vgl. Dienes, Z[oltan] P[aul]: Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozeß, Freiburg: Herder, 1971, S. 73 [im Folgenden: Dienes, Sechs Stufen]; vgl. Dienes & Golding, Potenz, S. II/35-II/37.

212. Dienes & Golding, Potenz, S. 40.

213. z. B. in dem Vorschlag, Klötze mit vorgegebenen Eigenschaften bereits zu einem frühen Zeitpunkt zu zählen, Dienes & Golding, Logische Spiele, S. I/13.

214. vgl. Dienes & Golding, Potenz, S. 62-64 und 68; angesichts der Bedeutung, die Dienes dem Binärsystem zuschreibt, scheint es – unabhängig von den lernpsychologischen Hintergründen (s. S.

Die ***Grundrechenarten*** werden durch entsprechende Mengenoperationen grundgelegt und in Analogie zu diesen eingeführt (z. B. die Multiplikation über Mengen von Mengen[215]). Im Folgenden werden sie dann stark unter operatorischem Aspekt behandelt, indem u. a. die operativen Eigenschaften wie Reversibilität und Assoziativität herausgestellt und Operatormaschinen als anschauliche Modelle verwendet werden. Klar wird, dass es sich beim Operator um ein Modell handelt, mit dem sich allgemeine Zustandsänderungen und damit Alltagssituationen qualitativ beschreiben lassen.[216]

Der unterrichtlichen Behandlung von Anwendungen wird keine weitere Aufmerksamkeit gewidmet, obgleich Dienes Anwendungen als einen wichtigen Teil der Mathematik nennt[217]. Das ***Sachrechnen*** findet nur am Rande Erwähnung[218]; benannte Zahlen und Einheiten finden sich im Rahmen des Messens in der Geometrie.

Die ***Algebra*** findet sowohl in ihrer klassischen als auch in ihrer modernen Ausprägung Eingang in den Unterricht, klassisch in Form von Gleichungen, modern in Form algebraischer Strukturen. Algebra wird dabei nicht als ein höherer, isolierter Inhalt verstanden, der im Anschluss an eine vollständig durchdrungene Arithmetik gelernt wird; sie soll im Gegenteil als eine allgemeine Darstellung arithmetischer Sachverhalte behandelt werden, deren Verständnis sogar Voraussetzung für die Einsicht in arithmetische Beziehungen ist. Entsprechend muss die Algebra parallel zur Arithmetik und mit dieser verknüpft erarbeitet werden.[219] Die Bedeutung algebraischer Strukturen geht jedoch weit über die als Fundament einer verständigen Arithmetik hinaus. Die Mathematik als System aus Begriffen, ihren Eigenschaften

---

71f.) – folgerichtig, sich hier nicht auf zwei Spezialfälle zu beschränken, sondern den allgemeinen Begriff zu behandeln; als konkret anschauliches Material dienen die Mehrsystemblöcke (s. S. 75), spezielles Material sei nötig, da nach Dienes der Alltag keine für das Konzept äquivalenten Situationen bietet, Dienes, Aufbau, S. 54.

215. Dies wird als gängiger Weg genannt, es findet sich außerdem der Vorschlag, die Multiplikation über das cartesische Produkt einzuführen, dies wird aber ausdrücklich nur „als mögliche zusätzliche Methode“ bezeichnet, Dienes & Golding in Potenz, S. 44, sind sich der Künstlichkeit dieses hier recht ausführlich geschilderten Vorgehens vollends bewusst und bezeichnen es als „etwas gewollt“, vgl. ebenda, S. 42-44.

216. vgl. Dienes & Golding, Potenz, S. 48-50, 52-59 und II/45-II/64; vgl. darüber hinaus die von Dienes erstellten Arbeitskarten unter dem Gesamttitel „Operatoren“, die in Aufgaben und Darstellung ganz bewusst den Schwerpunkt auf diesen Aspekt legen, z. B. Dienes, Z[oltan] P[aul]: Operatoren. Additive Operatoren; Arbeitskarten, Freiburg: Herder, 1972.

217. Dienes, Aufbau, S. 32.

218. vgl. Dienes, Moderne, S. 61-63, wo methodische Vorschläge zur Vorbereitung des Rechnens mit Geld gemacht werden, sowie Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Die Entdeckung des Raumes und praktische Meßübungen, Freiburg: Herder, 1967, S. III/46 [im Folgenden: Dienes & Golding, Raum], wo im Hinblick auf die Uhrzeit erneut darauf hingewiesen wird, dass bereits gute Verfahren existieren.

219. Dienes, Aufbau, S. 75; vgl. auch ebenda, S. 77 und 84.

und wechselseitigen Beziehungen baut praktisch vollständig auf diesen auf. Darüber hinaus fungieren sie als potentielle Knotenpunkte bei der Vernetzung von auf den ersten Blick unterschiedlichen Inhalten und sind damit geeignet, statt des bisherigen „Nebeneinander[s]“ einzelner Teilgebiete Mathematik in ihrer „Einheitlichkeit“ zu vermitteln.[220] Dabei sind die Strukturen nicht nur prägend für das Fach, sondern auch für das Zurechtfinden im Alltag, in dem die Kinder „die Anpassung an die Umwelt durch Sortieren nach regelmäßigen Mustern [lernen]“[221]. Ungeachtet dieser indirekten Anwendbarkeit im Alltag stoßen nach Dienes‘ Beobachtungen gerade die „vollkommen abstrakten Strukturen“ bei Kindern auf erhebliches Interesse.[222] Beispiele für solche im Unterricht zu behandelnden Strukturen sind die Gruppe und der Vektorraum, wobei auch hier wieder deren Modellcharakter für die Beschreibung von Phänomenen aus der Umwelt deutlich wird[223].

Die ***Geometrie*** ist ein weiteres Teilgebiet, das von Beginn an Eingang in den Mathematikunterricht finden soll. Der Anfang soll mit elementaren Eigenschaften der Grundformen und einfachen Raumbeziehungen gemacht werden[224]. Insbesondere sind die topologischen Raumbegriffe wie offen, geschlossen, Rückseite etc. zu thematisieren und sollen dem Messen zeitlich vorgelagert werden. Dienes berichtet, dass diese Begriffe für junge Kinder von deutlich größerem Interesse sind, was vermutlich u. a. in ihrer höheren Alltagsrelevanz begründet liegt.[225] In den konkreten methodischen Vorschlägen, die Dienes und Golding machen, wird auch die Symmetrie als weiterer geometrischer Inhalt mit der Topologie verknüpft. Der Hinweis auf den engen Zusammenhang zwischen Spiegelung und Drehung ist dabei wohl so zu verstehen, dass beide Abbildungen zeitlich nah beieinander eingeführt und inhaltlich verbunden werden sollen[226].

Verständiges ***Messen*** wiederum setzt bereits Erfahrungen mit dem Ordnen und Vergleichen sowie Grundkenntnis der Zahlen voraus, weshalb hiermit erst begonnen werden darf, wenn die Schülerinnen und Schüler auf entsprechende Vorkennt-

220. Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 11 f.
221. Dienes & Golding, Methodik, S. 133.
222. Dienes & Jeeves, Transfer, S. 131; vgl. Dienes, Aufbau, S. 31; vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 29.
223. vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 61 f.; Gruppenstrukturen werden am Beispiel der Hintereinanderausführung von Bewegungen im Raum veranschaulicht (vgl. auch Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 62-71), Vektoren allgemein mit Zustandsänderungen bzw. noch allgemeiner als „Menge unabhängiger Variablen“ identifiziert (Dienes, Bildungsfach, S. 77 und 119 f.).
224. vgl. Dienes & Golding, Raum, S. III/1-III/4.
225. Dienes & Golding, Raum, S. 9 f.; vgl. Beispiele zur unterrichtlichen Umsetzung ebenda, S. 12-14 und III/4-III/14; überdies werden Probleme aus der Graphentheorie zu den topologischen Inhalten gezählt, die bereits frühzeitig aufgeworfen werden können, hier der Vier-Farben-Satz als Beispiel für Färbungsprobleme, ebenda, S. 14 f. und III/14-III/16.
226. Dienes & Golding, Raum, S. 20 f.; vgl. ebenda, S. 16-20, 22-24 und III/16-III/27.

nisse zurückgreifen können.[227] Längen, Gewichte und auch Zeit sollen parallel behandelt und jedes für sich gleichermaßen zunächst mit willkürlichen Einheiten gemessen werden. Das Messen allgemein wird über das Schätzen, die Einführung der Standardeinheiten schließlich über die Frage der Vergleichbarkeit motiviert.[228]

Das spezifische Wesen der Mathematik bedingt wesentliche **didaktisch-methodische Grundsätze**, Ziele und Prinzipien, auf denen Dienes sein Konzept aufbaut. Zum einen erfordert die Abstraktheit der reinen Begriffe die Bereitstellung spezieller Lernumgebungen, die sowohl Handlungserfahrungen als auch Abstraktionen ermöglichen, dabei aber – im Vergleich zum Alltag – in gewissem Maße künstlich bleiben. Zum anderen wird aus der „Ganzheit des mathematischen Gebäudes“ gefolgert, dass Mathematik als Einheit dargestellt werden muss und damit nicht als Aneinanderreihung unverbundener Teilgebiete unterrichtet werden darf.[229]

Lernen und Verstehen definiert Dienes ganz allgemein als mit intermodalem Transfer einhergehende Anpassung an die Umwelt. Versteht man Mathematik nicht als Sammlung von Lösungsverfahren für arithmetische Probleme, sondern als Geflecht aus Begriffen unterschiedlicher Allgemeinheit, die jeweils in bestimmten Relationen zueinander stehen, wobei diese wiederum aufgrund ihrer gemeinsamen Eigenschaften die Identifikation wiederkehrender Strukturen ermöglichen, dann muss mathematisches Lernen im Kern in der Einordung von Objekten und Begriffen in ebendiese Strukturen bestehen. Voraussetzung dafür sind zunächst einmal die Entwicklung von Begriffen, das Auffinden von Beziehungen und die Abstraktion der Strukturen bzw. die Suche nach und Analyse der entsprechenden Schemata sowie deren Anwendung, ein Vorgehen, das nicht zuletzt bei den Kindern selbst auf größeres Interesse stößt als die bloße Anwendung von Regeln. Die mathematische Sprache stellt dabei ein nützliches, wenn nicht notwendiges Instrumentarium bereit.[230] Es ergibt sich von selbst, dass ein entsprechender Unterricht nicht mit konventionellen, behavioristischen Methoden wie Auswendiglernen, mechanischem

227. vgl. Dienes & Golding, Raum, S. 43 f., 56, III/29-III/31 und III/35 f.
228. Dienes & Golding, Raum, S. 32 f., 35 f. und III/29; vgl. ebenda, S. III/33-III/35 und III/44 f.
229. vgl. Dienes, Aufbau, S. 29, 34 und 50; die Künstlichkeit wird anhand der konkreten methodischen Vorschläge immer wieder betont, vgl. Dienes, Sechs Stufen, S. 9; Dienes, Bildungsfach, S. 116 f.; Dienes & Golding, Methodik, S. 116 f; als Hilfsmittel für die Darstellung von Mathematik als Einheit dient die geforderte Strukturorientierung, vgl. Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 11 f.
230. vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 5 und 89 f.; Dienes, Sechs Stufen, S. 8; Dienes, Aufbau, S. 32 f.; Dienes, Z[oltan] P[aul] & Jeeves, M. A.: Denken in Strukturen. Ein Versuchsmodell zur Untersuchung mathematischer Lernprozesse, Freiburg: Herder, ²1970, S. 105 f. [im Folgenden: Dienes & Jeeves, Denken]; es sei erwähnt, dass der Autor in Dienes, Sechs Stufen, S. 7, darauf hinweist, dass es sich hier nicht um streng wissenschaftliche Definitionen für „Lernen“ und „Verstehen“ handelt, da solche nicht existieren.

Drill, klassischer Konditionierung, aber ebenso wenig mit euklidischer Deduktion vereinbar ist.[231]

Dementsprechend ist es auch keinesfalls Teil des Konzepts den mathematischen Primarunterricht axiomatisch zu beginnen oder logisch aufzubauen. Stattdessen wird Dienes von der Überzeugung geleitet, dass Begriffe nicht von außen gelehrt, sondern nur im genetischen Sinne von den Kindern individuell ***konstruiert*** werden können. Er begründet diese Annahme aus fachlicher Perspektive (Mathematiker forschen induktiv), historisch-genetisch (logische Strenge hat selbst erst spät Einzug in die Mathematik gehalten) sowie auf der Basis empirisch-psychologischer Untersuchungen, die gezeigt haben, dass die Fähigkeit zum konstruktiven, synthetischen Denken bei Kindern dem analytischen zeitlich weit vorausgeht. Ein verfrühter Versuch der Analyse muss demnach erfolglos bleiben und mangels Alternative zur Strategie des Auswendiglernens führen; „[e]in konstruktiver Umweg ist die einzig mögliche Lösung, wenn mechanisches Lernen vermieden werden soll".[232] Analog dazu wird eine verfrühte Symbolik abgelehnt, zumindest in Form „fertiger" vorgegebener Formulierungen. Der mathematischen ***Symbolsprache*** wird große Bedeutung zugesprochen, aber erst, wenn ein ausreichendes vorsprachliches Begriffsverständnis die ökonomische Benennung notwendig macht, zu Zwecken der Kommunikation oder als Voraussetzung dafür, dass die fachlichen Konzepte auf einer höheren Ebene weiter untersucht werden können. Andernfalls könne sie „lähmen" und Abneigung hervorrufen. Dass Sprache keine unmittelbare Voraussetzung für die Bildung noch den Transfer von Begriffen ist, hat sich in entsprechenden Untersuchungen gezeigt.[233] Andererseits ergibt sich eine ambivalente Rolle der Symbole aus Forschungsresultaten, die dafür sprechen, dass ihre Nutzung das Verständnis für Zusammenhänge sogar fördern kann.[234]

Es ist kein Widerspruch zur Theorie vom konstruktivistischen Lernen, dass sich Dienes in aller Deutlichkeit dafür ausspricht, eine „gewisse Anzahl spezieller Aus-

231. vgl. Dienes, Aufbau, S. 32; Dienes & Golding, Raum, S. 38; Dienes, Bildungsfach, S. 119.
232. Dienes, Aufbau, S. 99; vgl. ebenda, S. 42 f., 117 und 122; vgl. Dienes & Golding, Raum, S. 9.
233. Dienes & Golding, Methodik, S. 51; Picker in Picker, Bernold: Moderne Mathematik im ersten Schuljahr. Ergebnisse eines Schulversuchs mit Unterrichtsplanung und Auswertung durch Protokolle und psychologische Tests, Freiburg [u. a.]: Herder, ²1971, S. 82 [im Folgenden: Picker, Schulversuch], sieht Dienes durch seine eigenen Beobachtungen bestätigt; dem *Leicestershire Mathematics Project* in England kommt das Verdienst zu, bereits seit 1958 einen Schwerpunkt auf die Erforschung der vorsprachlichen Begriffsentwicklung gelegt zu haben, vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 6; in Memoirs, S. 248, berichtet Dienes, dass er die Überzeugung, dass sprachfreies Mathematiklernen möglich ist, zunächst gegen andere Vertreter der New Math verteidigen musste; zur expliziten Unterscheidung zwischen Begriff und Bezeichnung bzw. Darstellung s. Dienes, Aufbau, S. 52; vgl. Dienes, Moderne, S. 12.
234. Dienes, Bildungsfach, S. 6; Dienes, Moderne, S. 8; vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 120; Dienes & Jeeves, Denken, S. 107; Dienes & Golding, Logische Spiele, S. I/26.

formungen eines Prinzips zu beobachten, und dann durch einen Akt der Verallgemeinerung das [allgemeine, T. H.] Prinzip zu gewinnen“[235], also zuerst allgemeine und dann spezielle Begriffe einzuführen. Er stützt sich auf ausführliche empirische Untersuchungen, deren Resultate eindeutig gezeigt hätten, dass es Kindern – im Gegensatz zu Erwachsenen – leichter fällt zu partikularisieren, also Spezialfälle als Beispiele einer bereits erlernten allgemeinen Struktur zu identifizieren, als zu generalisieren, d. h. aus speziellen Begriffen den allgemeinen zu abstrahieren. Anstatt z. B. das Dezimalsystem an den Anfang zu stellen, um darauf die allgemeine Darstellung im positionsgebundenen Stellenwertsystem aufzubauen, wird dieses von vorneherein als allgemeine Darstellungsmöglichkeit eingeführt, für die das Dezimalsystem schließlich ein besonderes Beispiel liefert.[236] Es ist denkbar, dass dieses Prinzip – da nach ihm Begriffe gewissermaßen von oben nach unten eingeführt werden – leicht mit einer deduktiven Herangehensweise verwechselt wurde.

Aus seinen Beobachtungen in Kombination mit der Theorie von Piaget stellt Dienes ein ***Stufenmodell der konstruktiven Begriffsbildung*** auf, das er über die Jahre weiter entwickelt. Ein wesentlicher Aspekt des Modells besteht darin, dass sämtliche Begriffsbildung stets vom mathematischen Spiel ausgeht, das seinerseits wieder einem bestimmten gestuften Ablauf folgt: Nach einer ersten Phase des freien, noch weitgehend ungerichteten Umgangs mit Material in einer passenden Lernumgebung folgt eine Phase des strukturierten Spiels nach Regeln mit dem – hier für die Schülerinnen und Schüler noch nicht erkennbaren – Ziel, Regelmäßigkeiten und Zusammenhänge sichtbar zu machen, die dem Material innewohnen. Im Anschluss werden die so entdeckten Strukturen vernetzt und angewendet.[237] Diese dritte Stufe erfährt mit der Zeit erhebliche Präzisierung und wird zu vier weiteren Phasen ausgearbeitet. Zunächst wird in einer zusätzlichen Stufe die tiefere Abstraktion der neu gewonnenen Begriffe gefördert, indem mehrere unterschiedliche, aber strukturgleiche Sachverhalte und Darstellungen auf Gemeinsamkeiten untersucht, diese herausgestellt und gegen die im Hinblick auf die Suche nach Isomorphien irrelevanten Merkmale abgegrenzt werden. Als eine methodische Hilfe für diese Stufe schlägt Dienes die von ihm so genannten „Wörterbücher“ vor, in denen die gemeinsamen Eigenschaften in den verschiedenen Beispielen jeweils gegenübergestellt (also wie in einem Vokabelheft gewissermaßen übersetzt) werden. Auf der 4. und der 5. Stufe wird das so Abstrahierte dargestellt, auf der 4. ikonisch, auf der 5. symbolisch. An dieser Stelle ist der Begriff weit genug synthetisch gebildet, um im Anschluss der Analyse zur Verfügung zu stehen und auf Stufe 6

235. Dienes & Golding, Methodik, S. 29.
236. vgl. Dienes & Jeeves, Denken, insbesondere S. 107-110; vgl. Dienes & Jeeves, Transfer, insbesondere S. 100, 120 f. und 127; ebenso Dienes, Moderne, S. 37; vgl. ebenda, S. 55; vgl. Dienes & Golding, Potenz.
237. Dienes, Aufbau, S. 40; Dienes, Moderne, S. 7 f.

als Teil eines Axiomensystems behandelt zu werden. Es ist dabei nicht unbedingt vorgesehen, dass ein vollständiges System aufgebaut wird, „vom pädagogischen Standpunkt aus“ müssen auch Ansätze dazu als sinnvoll gelten, vielmehr geht es im Kern darum, Erkenntnisse als Sätze festzuhalten, aus denen Vorhersagen über strukturgleiche Begriffe getroffen werden können.[238] Dienes und Golding bezeichnen den Durchlauf dieser Stufenfolge darüber hinaus als „Lernzyklus“, der sich in seinem Ablauf auch auf die Bildung von Alltagsbegriffen übertragen lässt. Als zyklisch ist die Abfolge insofern zu bezeichnen, als die neu gebildeten Konzepte (Beziehungen, Eigenschaften, Klassen, Regeln...) nun ihrerseits zu Objekten neuerlicher Spielhandlungen werden und ein weiterer Begriffsbildungsprozess auf höherer Ebene in Gang gesetzt wird.[239]

Dienes formuliert mehrere **didaktische Prinzipien**, die seiner methodischen Herangehensweise zugrunde liegen und die sich in seinem Stufenmodell bereits wiederfinden. Auch diese Zusammenstellung ist über die Jahre einigen Veränderungen unterworfen, im Kern handelt es sich um die folgenden Grundsätze. Die Nutzung neu gelernter Strukturbegriffe als Ausgangspunkt für eine neue, höhere Begriffsbildung, die wiederum von einem dreistufigen Spiel ausgeht, wie zuletzt im Rahmen des Modells der Lernzyklen beschrieben, bezeichnet er als ***dynamisches Prinzip***. Im ***Aufbauprinzip*** kondensiert sich der gesamte Prozess der induktiven Begriffskonstruktion, der darauf beruht, dass das konstruktive dem analytischen Denken vorauszugehen hat. Die ***Variation der Veranschaulichung*** beschreibt Dienes als Kern der dritten seiner sechs Stufen: Jeder mathematische Gegenstand ist in „möglichst vielen, äquivalenten Veranschaulichungen“ darzustellen, nur so wird das „Erfassen des mathematischen Kerns“ und damit eine echte Abstraktion ermöglicht, die ihrerseits schließlich auch wieder eine notwendige Voraussetzung für die Symbolisierung von Begriffen darstellt.[240] Das ***Prinzip der mathematischen Variabilität*** wiederum bezieht sich nicht auf eine Variation der Darstellung an sich, sondern besagt, dass jede Darstellung eine gewisse Anzahl an Veränderlichen enthalten muss, die im experimentellen Prozess von den Kindern variiert werden können, um auf diese Weise die gleichbleibenden Merkmale einer Struktur herauszustellen. Das Prinzip, zunächst einen möglichst allgemeinen Begriff einzuführen und Spezialfälle im Anschluss in diesen einzuordnen, wird als die ***Theorie vom tiefen Ende*** bezeichnet: Die Schülerinnen und Schüler haben hierbei nicht die Möglichkeit, sich in Kleinstschritten tastend vorwärts zu bewegen, sie brauchen stattdessen gewisse Strategien, um sich den komplexen Begriff zu eigen zu ma-

238. vgl. Dienes, Sechs Stufen, besonders S. 7-13, 32 und 46 (Zitat S. 32).
239. Dienes, Bildungsfach, S. 28 f.; vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 85-94.
240. Dienes nennt in seinen Werken diverse ikonische Darstellungen z. B. für Mengen, wie Baum-Diagramme, Tordarstellungen, Schaltkreise oder Straßenkreuzungsspiele, Dienes, Sechs Stufen, S. 19 und 24-28, Dienes & Golding, Logische Spiele, S. I/19-I/21.

chen. Werden sie am tiefen Ende ins Wasser gestoßen, „dann *müssen* sie schwimmen“.[241]

Wie im Rahmen der Ausführungen zum Lernprozess bereits angemerkt, fordert Dienes vor allem auch eine Reform der **Methodik** des Mathematikunterrichts, er hält eine solche für eine unmittelbar notwendige Voraussetzung für einen Erfolg der inhaltlichen Reform und verlangt die Schaffung einer „Lernatmosphäre“ an Stelle einer „Lehratmosphäre“[242]. Neben seiner generellen Ablehnung der konventionellen Methode, im Hinblick auf deren mangelnde Eignung für die Erreichung seiner didaktischen Ziele, begründet er dies u. a. mit dem vergrößerten Stoffumfang, der effektivere Methoden notwendig mache. Die Methodik erhält damit eine eminent wichtige Rolle im Dienesschen Gesamtkonzept, da er ihr erheblichen, wenn nicht entscheidenden, Einfluss auf Lerntempo und Tiefe des Verständnisses bzw. allgemeiner auf Begriffsbildung und Informationsverarbeitung zuspricht, zumal die von ihm formulierten Ziele weit über das routinierte Beherrschen von Verfahren hinausgehen.[243] Die vorgeschlagenen Neuerungen umfassen praktisch sämtliche Aspekte der Unterrichtsorganisation: Sozialform, Medien, Materialien und die Rolle der Lehrperson. Der Frontalunterricht als ***Sozialform*** soll weitgehend durch Gruppenarbeit, ergänzt durch Einzelarbeit, ersetzt werden. Dienes zieht als Begründung lernpsychologische Ergebnisse heran, nach denen Kommunikation der Kinder untereinander ein schnelleres Lernen und tiefere Verankerung des Gelernten sowie höhere Motivation fördert[244]. Wie die Gruppenarbeit erfolgen soll, wird nicht vorgegeben, es sind homogene wie heterogene, freiwillig wie vorgegeben zusammengesetzte Gruppen in einer Größe von 2 bis 8 Schülerinnen und Schülern und damit die gesamte Bandbreite an Lerngruppen möglich; die Entscheidung darüber obliegt der Lehrperson. Innerhalb der Gruppenarbeit wird auch ein arbeitsteiliges Vorgehen vorgeschlagen, z. B. aus der Notwendigkeit heraus, dass Arbeitsmaterial nicht in ausreichender Menge verfügbar ist. Besonders eine arbeitsteilige Organisation erfordert neue Möglichkeiten der Instruktion. Schulbücher sind in dem Konzept nicht vorgesehen[245], würden aber spätestens an dieser Stelle den Anforderungen kaum mehr genügen. Als Alternative schlägt Dienes gestufte Arbeitskarten vor, die flexibel einsetzbar sind, und die auch Lösungen bereithalten. Allein für die Einführung in etwas Neues hält er einen frontalen Klassenunterricht nach wie vor

241. Dienes & Jeeves, Transfer, S. 128, Hervorh. im Original; insgesamt zu den didaktischen Prinzipien Dienes, Aufbau, S. 44; Dienes & Golding, Methodik, S. 46-49; vgl. außerdem Dienes, Bildungsfach, S. 122 f.
242. Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 11.
243. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 16 f.; auch hier wird klar, dass keine Ersetzung, sondern eine Ergänzung der herkömmlichen Inhalte vorgesehen ist.
244. Dienes & Golding, Methodik, S. 49; namentlich wird sich hier auf Gagné und Smith bezogen.
245. nach Neunzig, Entwurf, S. 133, lehnte Dienes ein Lehrbuch ab, weil er fürchtete, ein solches würde leicht zu Fixierung und Dogmatisierung führen.

für sinnvoll. Bei der Fülle der vorgeschlagenen Veränderungen soll nicht unerwähnt bleiben, dass Dienes selbst darauf hinweist, dass die Idee der Gruppenarbeit keine neue ist.[246]

Tatsächlich finden sich Elemente der Methodik von Dienes bereits in Konzepten aus der Reformpädagogik, z. B. ist der Einsatz von Arbeitskarten, die Anweisungen zur Arbeit mit ihren strukturierten Materialien enthalten, heute vor allem aus der Pädagogik von Maria Montessori bekannt.

Den ***Materialien*** kommt bei Dienes eine zentrale Rolle zu. Besonders häufig geht er in seinen Publikationen auf die *Logischen Blöcke* und die *Mehrsystemblöcke* ein. Bei den Logischen Blöcken – die er nicht allein, sondern gemeinsam mit William Hull auf der Basis eines Tests von Vygotsky entwickelt hat[247] – handelt es sich um einen Satz von Holzklötzen oder Plastikplättchen, von denen jeder mittels einer nur einmal vorhandenen Kombination von Eigenschaften eindeutig beschreibbar ist. Diese Eigenschaften sind Form (kreisförmig, dreieckig, quadratisch sowie rechteckig und nicht-quadratisch), Farbe (rot, gelb, blau), Größe (groß, klein) und Stärke (dick, dünn), so dass sich pro Satz eine Anzahl von $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ Klötzen ergibt. Die Blöcke eignen sich aufgrund ihrer Merkmale besonders zur Herstellung und Beschreibung von Mengen, Durchführung von Mengenoperationen und Behandlung der entsprechenden aussagenlogischen Sätze.[248]

Die Mehrsystemblöcke dienen der Einführung in das Stellenwertsystem. Sie umfassen Einheitswürfel und aus diesen zusammengesetzte Stangen, quadratische Platten sowie große Würfel, deren (Seiten- und Kanten-)Längen der jeweils betrachteten Basis entsprechen. Jeder einzelne Block repräsentiert somit jeweils die Basis in einer Potenz zwischen 0 und 3. Es gibt die Blöcke, entsprechend der Vorgabe, Begriffe möglichst allgemein einzuführen, in allen Basen von 2 bis 10.[249] Dienes weist explizit darauf hin, dass das zu verwendende Unterrichtsmaterial nicht auf die Logischen und die Mehrsystemblöcke beschränkt werden soll. Auch soll nicht

246. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 138-140 und 143 f.; Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 15; Dienes, Aufbau, S. 30, 46 und 121 f.; in Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 25, heißt es dagegen ausdrücklich, dass Frontalunterricht oftmals sinnvoller ist als Gruppenarbeit, auch die Wichtigkeit von Einzelarbeit wird dort betont.

247. William Hull war ein befreundeter Lehrer, mit dem Dienes auch zusammen gearbeitet hat, Dienes, Memoirs, S. 292 und 300; vgl. Dienes & Golding, Logische Spiele, S. I/1; nach ISGML, a. a. O., S. 56 f. und 77, galt Hull als einer der Vertreter des *basic-set approach*.

248. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 62-64; vgl. ebenda, S. 64-67, für konkrete Nutzungsbeispiele.

249. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 68-73; vgl. Dienes, Aufbau, S. 52-74, für konkrete Nutzungsbeispiele. Die Struktur des Materials entspricht der des Goldenen Perlenmaterials von M. Montessori, wobei dieses nur für den Spezialfall des Dezimalsystems konzipiert ist, vgl. Montessori, Maria: Psychoarithmetik. Die Arithmetik dargestellt unter Berücksichtigung kinderpsychologischer Erfahrungen während 25 Jahren, Freiburg [u. a.]: Herder, 2012, S. 19 f.

ausschließlich auf strukturiertes Material zurückgegriffen werden, sondern ebenfalls auf Alltagsgegenstände und letztlich – als Elemente von Mengen – auf die Kinder der Klasse selbst.[250] Doch auch wenn vereinzelt auf traditionelle Materialien hingewiesen wird[251], nehmen die Vorschläge zu Dienes' eigenen Materialien sehr breiten Raum ein. Es ist wohl davon auszugehen, dass der Grund hierfür der gleiche ist wie für die Schwerpunktlegung auf die neuen Inhalte – nämlich, dass das Traditionelle als bekannt vorausgesetzt wird –, dennoch entsteht leicht der Eindruck, es ginge Dienes in nicht unerheblichem Maße um Werbung für seine Produkte.[252]

Die Methode, die den Umgang mit dem Material bestimmt, ist das ***Spiel***, zunächst frei, dann mit Regeln, die die enthaltenen Strukturen offenlegen, schließlich – auf einer höheren Stufe – auch das Spiel *mit* den Regeln.[253] Das Spiel erscheint dabei nicht nur als zu den Materialien passend und zielführend, sondern auch als natürliche Methode, die den Kindern vertraut und im Alltag als Übung im Anpassen an spätere Lebenssituationen allgegenwärtig ist[254]. Erwähnt werden muss, dass trotz dieser sehr offenen Organisation des Unterrichts das Auswendiglernen nicht vollends abgelehnt wird, sondern aus gedächtnisökonomischen Gründen für sinnvoll und sogar notwendig gehalten wird[255].

Es ist offensichtlich, dass die methodisch-didaktischen Neuerungen eine veränderte ***Lehrerrolle*** erfordern. Die Lehrperson muss hinter den mathematischen Gegenstand zurücktreten; sie ist nicht länger die Instanz, die entscheidet, ob eine Schüleraussage richtig oder falsch ist. Stattdessen werden die Kinder im Idealfall durch die vorgeschlagene Herangehensweise in die Lage versetzt, selbst darüber zu entscheiden und sich nach Möglichkeit selbst gegenseitig zu korrigieren. Der Lehrer bzw. die Lehrerin ist somit gezwungen, Autorität abzugeben. An deren Stelle tritt allerdings eine Fülle neuer Aufgaben: Die Lehrkraft wird zum „Führer und Ratgeber", benötigt demnach Diagnosekompetenz und einen guten Überblick; der weniger strikt vorgegebene Stundenablauf bietet „Spielraum für ihre eigene schöpferische Initiative", verlangt dafür aber Fähigkeiten, den „Erfordernissen ei-

250. Dienes, Aufbau, S. 119 f.; Dienes & Golding, Potenz, S. II/11; Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 12.
251. etwa auf den Rechenkasten von A. Kern, Dienes, Bildungsfach, S. 121, oder die Rechenwaage, Dienes & Golding, Methodik, S. 122.
252. vgl. vor allem Dienes, Sechs Stufen.
253. Dienes, Bildungsfach, S. 60; vgl. z. B. Dienes & Golding, Methodik, S. 76 f.; Dienes & Golding, Logische Spiele, S. I/1 f. und S. I/5-I/13; neben Spielen, die vorhandenes Material voraussetzen, schlägt er als eine weitere kindgerechte Methode Geschichten vor, die in ihrer speziellen Konstruktion in der Lage sind, mathematische Strukturen offenzulegen, Dienes & Golding, Methodik, S. 74; für Beispiele vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 46-53 und S. 91-114.
254. Dienes, Sechs Stufen, S. 8 f.
255. Dienes & Golding, Methodik, S. 150 f.

ner ständig wechselnden Situation zu entsprechen“[256], was nur dann erfolgreich gelingen kann, wenn der Unterrichtsgegenstand in seiner gesamten Komplexität durchdrungen wurde. Der Aufwand zur Vorbereitung der Lernumgebung vergrößert sich, darüber hinaus müssen Lehrende wahrscheinlich einen erhöhten Lärmpegel ebenso akzeptieren, wie die Tatsache, dass die Kinder Inhalte häufig schneller verstehen als sie selbst.[257] Eine konsequente Umsetzung der Konzeption stellt also hohe Ansprüche an die Lehrerschaft, sowohl fachlich wie auch pädagogisch, vor allem aber, was die Einstellung den Kindern gegenüber und das professionelle Selbstverständnis betrifft. So schwer besonders Letzteres zu erreichen sein dürfte, sieht Dienes letztlich sogar den Kern der gesamten Reform weniger in den inhaltlichen und methodischen Neuerungen, sondern „in einer veränderten Haltung den lernenden Kindern gegenüber“.[258]

Dass es sich bei dem Reformkonzept von Z. P. Dienes nicht nur um eine reine Theorie handelt, sondern ihm eine Vielzahl ***empirischer Forschungen*** und Beobachtungen zugrunde liegt, wird an zahlreichen Stellen deutlich. Darüber hinaus wird wiederholt betont, dass die Konzeption keinesfalls als abgeschlossen zu betrachten ist, vielmehr weist der Autor immer wieder darauf hin, dass weitere empirische Überprüfungen der Vorschläge notwendig sind, mit denen ggf. Revisionen einherzugehen haben.[259] Die empirischen Untersuchungen sind dabei zum einen Grundlage für die Theorie. Zum anderen zeigen sie, dass die Umsetzung der Theorie in die Praxis gelingen kann, dass nämlich die Methode durchführbar ist und mit ihr die aufgestellten didaktischen Prinzipien umgesetzt werden können, dass Kinder Interesse an den neuen Lerninhalten haben, in der Lage sind diese zu verstehen und nicht zuletzt Freude an der mathematischen Arbeit empfinden.

Dienes ist sich der Tragweite und Radikalität seiner Reformideen bewusst, die im Grunde jeden Aspekt des herkömmlichen Unterrichts – zumindest in der von ihm beschriebenen methodischen Ausformung – betreffen, und er ist sich ebenso im Klaren darüber, dass eine derart weitreichende Neukonzeption nicht ohne erhebliche Widerstände und keinesfalls kurzfristig erfolgreich umgesetzt werden kann. Eine weniger tiefgreifende und weniger umfassende Reform kann für ihn jedoch

256. Dienes, Aufbau, S. 30 und 121.
257. Dienes & Jeeves, Transfer, S. 130 f.; diese Erwartung beruht auf Beobachtungen aus der Praxis.
258. Dienes, Aufbau, S. 74; vgl. Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 15; vgl. Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 23 und 25.
259. vgl. exemplarisch Dienes, Bildungsfach, S. 5-9; vgl. Dienes, Aufbau, S. 47; vgl. Dienes, Gaulin & Lunkenbein, a. a. O., S. 8; in Dienes & Golding, Logische Spiele, S. 10 heißt es ausdrücklich, dass manches zu schwer sein könnte; in Dienes & Golding, Methodik, S. 36, wird der Wert der bisherigen Unterrichtsvorschläge ohne weitere Forschung angezweifelt; in Bildungsfach, S. 25, geht Dienes des Weiteren davon aus, dass die Pädagogik von Montessori sich gerade nicht durchgesetzt hat, weil sie eben nicht in ausreichender Breite empirisch fundiert und überprüft worden ist.

keine Alternative sein. Sein Konzept ist nicht die Summe einzeln zu reformierender Bestandteile von Unterricht, sondern der Mathematikunterricht erscheint bei ihm vielmehr als ein komplexes Ganzes, in dem vielfältige Aspekte wie in einem Netz funktional zusammenhängen und sich gegenseitig bedingen; die Veränderung des einen Teils zieht damit notwendigerweise eine Veränderung der anderen Teile nach sich, radikale Neuerungen müssen weitere radikale Neuerungen zur Folge haben. Eine Reform des Lehrplans ist demgemäß ohne methodische Reform für ihn nicht denkbar, ebenso wenig wie andersherum. Neben empirischer Forschung, der er auch eine überzeugende Wirkung auf Skeptiker zuspricht, nennt er als eine weitere Bedingung für den Erfolg einer Unterrichtsreform ebendiesen Zusammenhang von Curriculum- und Methodenreform, außerdem ausreichend Zeit und ein gewisses Maß an Werbung, möglichst durch Experten, die ggf. herumreisen, um persönlich die zentralen Neuerungen einer breiten Öffentlichkeit, insbesondere aber den Eltern betroffener Schulkinder zugänglich zu machen.[260]

Rezeption der Ideen in der Bundesrepublik Deutschland

Den Part des Experten hat in seinem Fall Dienes selbst übernommen und sein Reformkonzept durch ausgedehnte Reisetätigkeit fast weltweit bekannt gemacht, wobei er dies zu einem guten Teil auf Einladung der Verlage getan hat, die seine Werke in den jeweiligen Ländern herausgegeben haben; er war sich dabei völlig dessen bewusst, dass bei den Verlagen hier ökonomische Interessen eine nicht unerhebliche Rolle gespielt haben[261].

Sein Einfluss auf die Mathematikdidaktik wird bis heute als erheblich eingeschätzt, selbst wenn viele seiner Errungenschaften gar nicht mehr in Verbindung mit seinem Namen genannt werden[262]. Auch in Deutschland hat Zoltán Dienes entscheidend zu Einführung und Bekanntwerden der modernen Mathematik beigetragen und war in der Folge ständiger Bezugspunkt in der didaktischen Diskussion.[263] Sein Konzept ist jedoch weniger in der vollen Breite verstanden und übernommen worden, ein erheblicher Teil der Rezeption „beschränkt[e] sich vor allem auf

260. vgl. Dienes & Golding, Methodik, S. 165-182; vgl. Dienes, Bildungsfach, S. 25.
261. vgl. Dienes, Memoirs, S. 410; Zumpe, a. a. O., S. 16, spricht von der weltweiten Verbreitung der Ideen „infolge seiner geschickten Öffentlichkeitsarbeit“.
262. vgl. dazu etwa Hirstein, James: The impact of Zoltan Dienes on mathematics teaching in the United States, in: Sriraman, Bharath: Mathematics Education and the legacy of Zoltan Paul Dienes, Charlotte, NC: Information Age Pub, 2007, S. 169-172; den Vortrag von Mike Thomas auf der ICME13 (Abstract: http://www.icme13.org/files/abstracts/ICME-13-Invited-lectures-Thomas.pdf) oder die Homepage www.zoltandienes.com, dort besonders die Einträge unter http://www.zoltandienes.com/posts/in-memoriam.
263. vgl. Griesel, Heinz: Der Einfluß von Z. P. Dienes auf den Mathematikunterricht in der Grundschule, in: MU 17 (1971), 5, S. 5-17 [im Folgenden: Griesel, Dienes]; Griesel bezeichnet Dienes‘ Einfluß ebenda als „unverkennbar“, S. 5.

die frühzeitige Einführung mengentheoretischer Begriffe"[264] und damit auf eine inhaltliche Reform. Da sein Werk zudem keine „Zusammenschau des Ganzen" bietet, hält Griesel es für „nicht verwunderlich, daß selbst bei bedeutenden Mathematikdidaktikern der Bundesrepublik Mißverständnisse und absolute Fehldeutungen [...] anzutreffen sind"[265]. Mehrmals besuchte Dienes die Bundesrepublik, um an Diskussionen über moderne Mathematik teilzunehmen, so z. B. als Teilnehmer am „Internationalen Mengenlehre-Kongreß" im September 1974 in München[266] oder um seine Konzeption direkt in Form praktischer Unterrichtsversuche vorzuführen, wie im Rahmen von Studienwochen in Heidelberg im Juli 1967 oder in Rinteln im Februar 1969[267]. Ein Teil seiner Ideen hat sich über das Lehrwerk *Wir lernen Mathematik* von W. Neunzig und P. Sorger verbreitet und war auch Grundlage des Unterrichtsversuchs von Picker.[268] Darüber hinaus sind seine Bücher ab 1965, wie das Schulbuch, in der ausgesprochen umfangreichen Reihe *Programm: Moderne Mathematik* im Herder-Verlag[269], in deutscher Übersetzung erschienen, ebenso wie die von ihm entwickelten Arbeitskarten zu den verschiedenen Inhaltsbereichen, die zudem durch Lehreranleitungen ergänzt wurden[270]. Es fällt dabei auf, dass die 1. Auflage eines der ersten dort veröffentlichten Werke, *Moderne Mathematik in*

264. Keitel, Christine & Damerow, Peter: Unvollendete Revolution. Zur Kritik der Dienes-Konzeption mathematischen Unterrichts, in: b:e (1969), 8, S. 12.

265. Griesel, Dienes, S. 5.

266. vgl. Kleinschmidt, Gottfried: Kurzbericht zum Internationalen Mengenlehre-Kongreß in München am 5. September 1974, in: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 2 (1974), S. 614-615.

267. Dienes hat in der Woche in Rinteln jeweils 1 Stunde täglich Unterricht mit je 12 Zweit- und Viertklässlern vor Seminarleitern vorgeführt; die Stunden wurden durch Vorbereitung und Diskussionen im Anschluss begleitet. Da jedoch mit jeder Stunde ein neues Thema unterrichtet wurde, konnten die Dienesschen 6 Stufen in keinem Fall vollständig demonstriert werden, vgl. Hollmann, Erwin: Moderne Mathematik in der Grundschule. Bericht über eine Studienwoche mit Z. P. Dienes in Rinteln/Weser, Freiburg: Herder, 1969; in Heidelberg wurden 5 Tage lang jeweils 8 Kinder unterrichtet, Picker, Schulversuch, S. 5; gerade nach Heidelberg wurde Dienes häufig eingeladen, da dies der Wohnort des damaligen Chefs des Herder-Verlags war, Dienes, Memoirs, S. 393 f.; vgl. weiterhin ebenda, S. 437 f. und Picker, Reform, S. 15.

268. vgl. Picker, Schulversuch; Picker macht in der Schrift deutlich, inwiefern eine Anpassung des Konzepts an die bundesdeutsche Schulpraxis notwendig war, vgl. S. 27 und 33; die Umsetzung stützt sich v. a. auf drei inhaltliche Leitlinien, die aus Dienes abgeleitet werden: 1. Mengenlehre als Grundlage, 2. mathematisiertes Rechnen unter strukturellem Aspekt, 3. Vertiefung des Rechnens durch Anwendung des operativen Prinzips, S. 35.

269. vgl. Verlag Herder [Hrsg.]: Arbeitsbericht für die Schule 1965/66. Mathematik in der Grundschule: Neue Wege im „Rechenunterricht" der Volksschule; Herder stellt vor: „Programm Moderne Mathematik", Freiburg: Herder, o. J.; es handelt sich hierbei wohl vor allem um einen Werbeprospekt, der sich aber durch Titel („Arbeitsbericht") und Inhalt den Anstrich einer wissenschaftlich fundierten Veröffentlichung zu geben versucht; deutlich wird dadurch die Bedeutung, die dem Programm für den Verlag zugekommen ist. Auch war es der Herder-Verlag, auf dessen Einladung hin Dienes seine Workshops und Präsentationen abgehalten hat, Dienes, Memoirs, S. 438.

270. vgl. Dienes Z[oltan] P[aul]: Relationen. Lehreranleitung zu den Arbeitskarten, Freiburg: Herder, 1970 und Lunkenbein, Dieter: Mengen und Logik. Lehrerheft zu den Arbeitskarten „Mengen und Logik", Freiburg: Herder, 1970.

der Grundschule, noch zahlreiche Fehler, ungünstige Formulierungen und formal inkonsequente Schreibweisen enthält, von denen lediglich ein Großteil der gravierendsten Fehler mit der 2. Auflage korrigiert wurde[271]. Denkbar ist, dass es sich hierbei um den Ausdruck einer überhasteten Veröffentlichung handelt, die zulasten der Qualität kommerzielle Interessen des Verlags in den Vordergrund stellte. Bei nicht fachwissenschaftlich ausgebildeten Lehrkräften dürften diese Ausgaben in Teilen kaum verständlich gewesen sein. Nichtsdestotrotz spricht die Existenz mehrerer Auflagen einiger der Bücher dafür, dass diese eine beträchtliche Anzahl an Lesern gefunden haben, zumal sie nach Dienes' eigener Aussage obligatorischer Bestandteil der Lehrerausbildung in Deutschland wurden[272]. Schließlich wurden Z. P. Dienes und sein Konzept der deutschen Öffentlichkeit auch über das Fernsehen bekannt gemacht. Nicht nur, dass es seine Auftritte bei oben genannten Veranstaltungen z. T. bis in die Fernsehnachrichten schafften, darüber hinaus produzierte der Bayerische Rundfunk eine gesamte 13-teilige Sendereihe, in deren Folgen er seinen Unterricht exemplarisch vorführte.[273]

Keitel und Damerow kritisieren u. a., die Ausführungen in Dienes' Schriften gingen häufig „über eine Beschreibung des formalen Ablaufs seiner praktisch Versuche nicht hinaus", die Hintergründe blieben dafür häufig im Dunkeln[274]. Inwiefern es sich hierbei um eine bewusste Entscheidung handelte, im Hinblick darauf, dass möglichst konkrete Unterrichtsvorschläge sicherlich ein probates Mittel darstellen, um eine möglichst weite Verbreitung didaktischer Konzeptionen zu erreichen – zumal in der damaligen besonderen Bedarfssituation der BRD (s. S. 106f) – kann nur vermutet werden. Möglicherweise liegt hierin gerade der Grund dafür, dass Dienes' Ideen insgesamt zunächst ausgesprochen positiv aufgenommen wurden, zumindest von der Mehrheit derjenigen, die mit dem Lehren und Lernen von Mathematik in der Grundschule befasst waren.[275] Ein Beispiel eines offenbar nachhaltig von Dienes' Ideen beeindruckten deutschen Grundschullehrers findet sich unter den Kondolenzen auf Dienes' Homepage: „I used the Logic blocks, the multibase blocks

271. vgl. folgende Beispiele in Dienes, Moderne, und Dienes, Z[oltan] P[aul]: Moderne Mathematik in der Grundschule, Freiburg: Herder, ²1968: korrigiert wurden die offensichtlichen Fehler auf S. 18, 43, 51; nicht korrigiert wurde der Fehler auf S. 48; auf S. 56 wurde der Fehler korrigiert, die nicht korrekte formale Schreibweise dagegen nicht; ebenso wenig wurde die formal inkonsequente Schreibweise der Mengen auf S. 17 angepasst.
272. Dienes, Memoirs, S. 438; Dienes erwähnt diesen Sachverhalt nur im Zusammenhang mit seinen Reisen nach Deutschland, was in der Tat dafür spricht, dass seine Schriften und damit sein Konzept in der BRD noch bekannter waren als in den anderen europäischen Ländern, in denen bereits frühzeitig eigene Vorschläge für einen modernen Mathematikunterricht entwickelt worden waren.
273. Dienes, Memoirs, S. 438 und 406 f.; die Initiative für die Sendereihe ging dabei vom BR aus.
274. Keitel & Damerow, a. a. O., S. 12.
275. vgl. Picker, Reform, S. 17; vgl. Zumpe, a. a. O., S. 19; Müller & Wittmann, 1977, S. 152, sprechen in diesem Zusammenhang von einem vermeintlichen didaktischen „Paradies".

and I studied his books for example „Aufbau der Mathematik“ Professor Dienes gave me so much for my mathematic teaching.“[276] Aus dem Zitat wird deutlich, dass die Ideen nicht nur von Seiten der Didaktik rezipiert wurden, sondern auch Eingang in die unterrichtliche Praxis gefunden haben.

Zusammenfassung

Dienes nennt seine Forderungen, die er an eine Reform des Mathematikunterrichts stellt, explizit, sie sollen hier lediglich noch einmal überblicksmäßig zusammengefasst bzw. im Hinblick auf die 1. Klasse ausgewählt werden.

Die **Ziele**, die Dienes für einen neuen Mathematikunterricht nennt, sind:

- mathematischer Art: logisches, systematisches, problemlösendes Denken (für Beruf und Alltag)
- pädagogischer Art: Persönlichkeitsbildung, Glücksempfinden durch Leistungserfahrung

Diejenigen **Inhalte**, die er für den Anfangsunterricht für geeignet hält, diese Ziele zu erreichen, sind:

- Arithmetik (kardinaler und ordinaler Zahlaspekt)
- präformale (naive) Mengenlehre (im Anfangsunterricht, noch vor der Arithmetik)
- Eins-zu-eins-Zuordnung (als Voraussetzung für Arithmetik)
- Relationen allg. (als grundlegende Struktur alltäglicher Kommunikation), Ordnungsrelation im Besonderen
- topologische Grundbegriffe
- euklidische Grundformen
- Symmetrie

Inwiefern algebraische Strukturbegriffe bereits im ersten Jahr behandelt werden sollten, geht nicht klar aus den Dienesschen Schriften hervor, da es aber heißt, dass sie parallel zur Arithmetik erarbeitet werden sollen, gehören sie auf jeden Fall bereits früh in einen Unterricht, der dem Konzept folgt. Wesentlich ist an dieser Stelle, dass der Algebra die Funktion zugesprochen wird, gleichermaßen Grundlage sowie Modell der gesamten Mathematik zu sein, weshalb ihre Strukturbegriffe

276. Fritz Haugg unter http://www.zoltandienes.com/posts/in-memoriam/#comment-6162 .

in ihrer Allgemeinheit geeignet sind, das gesamte ***Curriculum*** als Leitideen zu ordnen. Der Rechenunterricht wird damit abgelöst durch einen ***Mathematikunterricht***, in dem das Rechnen – in seinem Verhältnis zur Mathematik und unter Einbezug der Mengenlehre – eine neue Rolle einnimmt:

- Arithmetik als ein (im Wesentlichen gleichberechtigter) Inhalt neben anderen
- Mengenlehre als Fundament der Mathematik (inkl. der Arithmetik)

Es ist zudem folgendes ***curriculumbezogenes didaktisches Prinzip*** impliziert:

- die Orientierung an zentralen Leitbegriffen (hier: Strukturbegriffe) und damit das
- Prinzip eines Spiralcurriculums

Die unterrichtliche Aufbereitung der Inhalte erfolgt explizit auf der Grundlage folgender **didaktischer Prinzipien**:

- Aufbauprinzip / Konstruktionsprinzip
- Dynamisches Prinzip (Nutzung neu gebildeter Begriffe als Ausgangspunkt für Begriffsbildung auf der höheren Stufe)
- Variation der Veranschaulichung
- Prinzip der mathematischen Variabilität
- Beachtung der Stufen des Lernzyklus
- Theorie vom tiefen Ende (Betonung der allgemeinen Begriffe bzw. Einführung des allgemeineren Begriffs zuerst und der Spezialfälle später)
- Bewusster Umgang mit der Symbolsprache (nicht zu früh)

Bezüglich der **Methodik** und der Unterrichtsorganisation macht Dienes sehr konkrete Vorschläge. Maßgeblich für eine Unterrichtspraxis in seinem Sinne sind:

- Spiele
- der Einsatz von (strukturierten) Materialien, insbesondere der Logischen Blöcke
- Gruppenarbeit als vorrangige Sozialform
- Arbeitskarten als Medium zur Instruktion
- der Lehrer in einer Rolle als Helfer und Ratgeber.

I.4 Die wissenschaftlich-theoretische Ebene: Zusammenfassung der Kernideen aus den internationalen Einflüssen

So unterschiedlich die persönlichen und fachlichen Hintergründe der Protagonisten, von denen auf internationaler Ebene wesentliche Impulse für die Reform des Mathematikunterrichts in der Bundesrepublik Deutschland ausgingen, auch sein mögen, so finden sich doch zahlreiche Überschneidungen in den formulierten oder implizierten Forderungen.

Die **Ziele** eines zukünftigen, neuen, modernen Mathematikunterrichts in der Grundschule gehen über die reine, mechanische Beherrschung arithmetischer Verfahren und ihrer Anwendung in Sachkontexten klar hinaus und lassen sich zu folgenden – nicht scharf voneinander zu trennenden – Bereichen zusammenfassen:

- ***fachliche Ziele***: logisch-mathematisches (Dienes), bewegliches (Piaget) und begriffliches Denken (Dienes und Piaget)
- ***ökonomische Ziele***: wissenschaftlich-mathematische Bildung als Notwendigkeit für Anwendungen im Beruf (Dienes) und zur Aufrechterhaltung der Wirtschaft (Royaumont)
- ***soziale Ziele***: liberale und demokratische Geisteshaltung durch Persönlichkeitsbildung für alle (Royaumont)
- ***individual-pädagogische Ziele***: Glücksempfinden, Leistungserfahrung, Freude am Lernen (Dienes)

Gemeinsam ist diesen doch sehr unterschiedlichen Zielsetzungen, dass die aus ihnen abgeleiteten Argumentationsstränge auf eine bestimmte Zusammenstellung an **Inhalten** führen, die als geeignet gelten, die Erfüllung dieser Ziele im elementarmathematischen Unterricht anzubahnen:

- Arithmetik (unbestritten nach wie vor wichtiges Teilgebiet in sämtlichen Quellen)
- Mengenlehre (in allen Quellen)
- (Aussagen-)Logik (im Zusammenhang mit Mengen bei Piaget und Dienes)
- Relationen (v. a. Äquivalenz- und Ordnungsrelationen bei Piaget und Dienes)
- Eins-zu-eins-Zuordnung (Piaget, Dienes)

- Geometrie: Symmetrie (Royaumont, Dienes), Grundbegriffe der Topologie (Piaget, Dienes), euklidische Grundformen (Dienes)
- Algebra (Royaumont, Gruppen nach Piaget, weitere Strukturbegriffe bei Dienes, aber noch nicht für den Anfangsunterricht)

Dabei kommen den einzelnen Teilgebieten und Begriffen allerdings unterschiedliche Funktionen zu. Die Arithmetik ist mit der veränderten fachlichen Zielsetzung nicht mehr alleiniger Inhalt und ihre Beherrschung nicht mehr das oberste Ziel des Unterrichts. Stattdessen ist sie ein – wenn auch uneingeschränkt wichtiger – Teil der Mathematik, der Zahlbegriff ein zentraler mathematischer sowie – nach Piaget – grundlegender logischer Begriff. Die Mengenlehre erhält ihre der Arithmetik dienende Funktion durch die Grundlegung des Zahlbegriffs und der Operationen, darüber hinaus erwächst ihre zentrale Rolle jedoch aus ihrer Eigenschaft als Fundament der gesamten modernen Mathematik sowie als Modell für Alltagssituationen und das intelligente und logische Denken schlechthin. Vergleichbares gilt für die Relationsbegriffe. Die algebraischen Strukturen hingegen sind weniger als Inhalte an sich von Interesse, sondern dienen zum einen ebenfalls als Grundlage geistiger Operationen (Gruppen gemäß Piaget), vor allem aber als Knotenpunkte in der Vernetzung verschiedener Begriffe und Themengebiete, Voraussetzung dafür, ein Curriculum zusammenzustellen, in dessen Rahmen es möglich wird, die Mathematik als eine Einheit zu vermitteln, aufgebaut auf wiederkehrenden und stets anschlussfähigen Grundideen. So geht auch die Funktion der genannten geometrischen Themen über die Bereitstellung von Begriffen zur Orientierung in der Umwelt hinaus; besonders die Topologie gilt bei Piaget als propädeutische Voraussetzung für die Behandlung der euklidischen Geometrie, während die Symmetrien als spezielle Abbildung Beispiele für Gruppen und damit algebraische Strukturen abgeben (vgl. Beispiele bei Dienes).

Die vielfältigen Funktionen, Beziehungen, Horizontal- wie Vertikalverbindungen, die sich in den Quellen finden, ergeben ein Gesamtbild, das deutlich macht, dass auf inhaltlicher Ebene weniger eine Reform intendiert ist, die die bisherigen Themengebiete des mathematischen Elementarunterrichts durch zusätzliche ergänzt noch durch neue ablöst, sondern dass als Mittel zur Erreichung der Ziele vor allem eine veränderte ***curriculare Gesamtstruktur*** angestrebt wird, die in der Hauptsache gekennzeichnet ist durch:

- Mathematikunterricht statt Rechenunterricht
- Mathematik als Einheit
- Orientierung an mehreren grundlegenden fachlichen Leitideen

- Prinzip des Spiralcurriculums

Wie sich im Rahmen dieses strukturellen Gesamtkonzepts die ***Beziehung zwischen Mathematik, Rechnen und Mengenlehre*** ausgestaltet, ist dabei nicht eindeutig. Offenbar gelten jedoch:

- Arithmetik als ein Teilgebiet der Mathematik (neben anderen)
- Mengen als Fundament sowie zentraler Begriff der Mathematik (neben anderen)

Neben diesen curriculumbezogenen didaktischen Prinzipien gibt es **methodisch-didaktische Prinzipien**, deren Umsetzung bei der Planung und Durchführung der konkreten Unterrichtsstunden an vielen Stellen als notwendige Voraussetzung für den Erfolg der Reform gesehen wird. Diese methodischen Grundsätze leiten sich z. T. direkt aus den Zielen ab, z. T. aus der Suche nach Möglichkeiten, die neuen Inhalte im Anfangsunterricht zu vermitteln.

Vor allem für die Ebene der Planung und Strukturierung des Unterrichtsgangs sind die folgenden ***didaktischen Prinzipien*** relevant:

- Aufbauprinzip / Konstruktionsprinzip (nach Dienes, Piaget teilt die Auffassung der zugrundeliegenden genetisch-konstruktivistischen Begriffsbildung)
- Dynamisches Prinzip und Lernen in Zyklen (Dienes)
- Theorie vom tiefen Ende (Dienes)
- Prinzip der mathematischen Variabilität (Dienes)
- Prinzip des operativen Übens (nach Piaget bzw. Aebli)
- Variation der Veranschaulichung (Dienes)
- Berücksichtigung der verschiedenen Darstellungsebenen / EIS-Prinzip (Bruner, bei Dienes und Piaget zudem Betonung der sprachlich-symbolischen Ebene, Betonung der enaktiven Ebene in allen Quellen mit Blick auf die unterrichtsmethodische Umsetzung)
- Problemorientierung, heuristisches und experimentelles Vorgehen (Royaumont, Bruner, Piaget / Aebli)

Für die konkrete ***methodische Umsetzung*** sind die folgenden Forderungen diejenigen, die mit dem größten Nachdruck formuliert werden:

- Handlungsorientierung und Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler (Royaumont, Piaget & Aebli, Dienes)

- Materialeinsatz (alle Quellen)
- kooperative Sozialformen, insbesondere Gruppenarbeit (Piaget, Dienes)
- Lernspiele (Dienes)

Besonders im Konzept von Z. P. Dienes – welches von den hier vorgestellten Grundlagen dasjenige ist, das mit Abstand am stärksten konkret an der Unterrichtspraxis ausgerichtet ist – kommt den methodisch-didaktischen Prinzipien ein ebenso großes Gewicht zu wie dem inhaltlichen Teil der Reform, während aus den Erkenntnissen der Psychologie naturgemäß didaktische und methodische Forderungen vorrangig vor den inhaltlichen abgeleitet werden. Im Bericht des Royaumont-Seminars liegt der Schwerpunkt dagegen auf den inhaltlichen Aspekten der Reform, die entsprechenden Beiträge sind aber auch mehrheitlich der Sekundarstufe gewidmet.

II Moderne Mathematik in der Bundesrepublik Deutschland

II.1 Überblick über den Reformverlauf

	Fächerübergreifende Dokumente			**Daten und Dokumente zum MU**		
	Alle Schulformen	**Grundschule**		**Alle Schulformen**	**Grundschule**	
		BRD	Niedersachsen		BRD	Niedersachsen
1965				*Nürnberger Lehrpläne*	Dienes in der BRD	
1968				*Empfehlungen u. Richtlinien der KMK*		
1970	*Strukturplan des Bildungsrats*	*Empfehlungen zur Arbeit in der GS*				
1972				**Reformbeginn**		*Handreichungen für den MU*
1975			*RRL*			
1976					*Empfehlungen u. Richtlinien der KMK*	
1977						*RRL*
1984						*RRL*

II.1.a Fächerübergreifende Aspekte der Reform

Neben den internationalen Entwicklungen gab es verschiedenste Bedingungen auf nationaler Ebene, die Einfluss auf die Reform des Mathematikunterrichts genommen haben. Die 1950er Jahre waren in der Bundesrepublik Deutschland – wie in weiten Teilen Europas – geprägt durch das sogenannte Wirtschaftswunder, ein enormes Wirtschaftswachstum, aus dem u. a. ein gestiegener Bedarf an gut ausgebildeten Fachkräften in den Bereichen Wirtschaft und Technik folgte. Dass es sich hierbei nicht nur um einen „gefühlten“, sondern einen realen Engpass handelte, belegen Gutachten, wie das vom bayerischen Kultusminister in Auftrag gegebene.[277] Auf Bildungsebene resultierte diese Entwicklung in einem neuen Schwerpunkt auf Forschung und Entwicklung im naturwissenschaftlich-technischen Bereich, der sich u. a. 1957 im Beschluss über die Errichtung eines länderübergreifenden Wissenschaftsrats niederschlug. Der starke Anstieg der Geburtenrate in den 1950ern und 1960ern[278] verstärkte die Notwendigkeit qualifizierter Bildungsangebote in entsprechendem Umfang. Ein 1963 von der Kultusministerkonferenz vorgestelltes Gutachten über den Bedarf an Personal in Wissenschaft und Bildung stellt als notwendige Voraussetzung für eine Mindestversorgung mit Lehrkräften auch in der Zukunft die Verdoppelung der entsprechenden Ausgaben bis 1970 fest. Die Stärkung der Ingenieurausbildung durch die Umwandlung der Ingenieurschulen in Fachhochschulen 1968 war eine Folge der vorausgegangenen Entwicklung.[279] Auch die steigende Anzahl von Ausländern, die aufgrund der Anwerbeabkommen ab 1955 als weitere Folge des Wirtschaftswachstums mit ihren Familien in die Bundesrepublik kamen, konnte nicht ohne Folgen für das Bildungssystem bleiben. Bereits 1964 reagierte die Kultusministerkonferenz mit einer eigenen Vereinbarung zum Unterricht ausländischer Kinder.[280]

Spezifisch für die Bundesrepublik gegenüber den anderen europäischen Ländern war jedoch mutmaßlich, dass diese Entwicklungen auf eine Gesellschaft trafen, die nach dem Zweiten Weltkrieg gekennzeichnet war von Verdrängungsmechanismen und restaurativen Tendenzen, z. T. bedingt durch einen „nachwirkende[n] Anti-Intellektualismus der nationalsozialistischen Epoche“, die sich auch oder sogar gerade im Bildungssektor niederschlugen.[281]

Besonders in der ersten Hälfte der 1950er-Jahre kam es in einigen Regionen – vor allem in Süddeutschland – zu einer vorübergehenden Renaissance des christlich-konfessionellen Schulwesens, das geprägt war von „relativ konservative[n] pädago-

277. vgl. Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O.; vgl. Damerow, a. a. O., S. 68.
278. vgl. Bevölkerungsstatistik von Destatis unter https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/Indikatoren/LangeReihen/Bevoelkerung/lrbev04.html?cms_gtp=151956_list%253D2&https=1.
279. vgl. Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O.; für genauere Ergebnisse des Gutachtens vgl. Picht, Georg: Die deutsche Bildungskatastrophe. Analyse und Dokumentation, Olten [u. a.]: Walter, 1964, S. 18-22.
280. vgl. Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O.; nach Naumann, Jens: Entwicklungstendenzen des Bildungswesens der Bundesrepublik Deutschland im Rahmen wirtschaftlicher und demographischer Veränderungen, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 21-102, S. 25, ist besonders ab 1968 ein sprunghafter Anstieg der Zahl ausländischer Arbeitnehmer zu verzeichnen.
281. Winkel, Rainer [Hrsg.]: Pädagogische Epochen. Von der Antike bis zur Gegenwart, Düsseldorf: Schwann, 1988, S. 239 f.; Damerow, a. a. O., S. 19; vgl. Wirsing in Picht, a. a. O., S. 12; Zitat: Picht, S. 66.

gische[n] An-, Ab- und Aussichten“[282]. Für die Gymnasien bedeutete dies eine zeitweilige Rückkehr zum neuhumanistischen Bildungsideal mit seiner stark ausgeprägten Selektivität[283]; für die Volksschule dagegen die Abwesenheit jeglicher wissenschaftlicher oder auch nur fachlicher Fundierung des Unterrichts, der lediglich „heimatnah“ und „religiös einwandfrei“ zu sein hatte und damit „dem kritischen Potential einer rationalen Prüfung weitgehend entzogen“ war.[284] Auch wenn der Stellenwert dieser Art von Schulen relativ schnell sank und sie bis Ende der Sechziger von der Kirche gelöst waren[285], so war die strikte Trennung zwischen Volksschule auf der einen sowie Realschule und Gymnasium auf der anderen Seite – eine Trennung, die schon durch die unterschiedliche Lehrerausbildung vorgezeichnet war – klar darauf ausgerichtet, den „späteren Sozialstatus der Absolventen frühzeitig zu determinieren“.[286] Dass die Kriegsfolgen auf schulorganisatorischer Ebene in Form fehlender Räumlichkeiten, fehlenden Lehrpersonals und dadurch bedingter großer Klassenstärken noch zehn Jahre nach Kriegsende deutlich den Schulalltag bestimmten, und die Aufteilung Westdeutschlands unter den Alliierten eine einheitliche Schulpolitik verhinderte[287], lässt erahnen, wie ungünstig der Boden für umfassende Reformen im Bildungssystem war. Gleichsam wird schon hier deutlich, wie groß der Widerspruch zwischen schulischer Realität und wirtschaftlicher Entwicklung war und wie notwendig es vor diesem Hintergrund war, auf Bildungsebene Erneuerungen vorzunehmen.[288] Auch aufgrund des „offenbar werdenden ideologischen Gehalts traditioneller Formeln“ schien klar, dass diese Neuerungen auf eine rational-wissenschaftliche Basis gestellt werden mussten.[289]

Die restaurative Fortschreibung von Traditionen aus der Zeit vor dem Zweiten, wenn nicht sogar vor dem Ersten Weltkrieg, machte auch vor der Lehrerbildung nicht halt. War die Ausbildung der Volksschullehrerinnen und -lehrer auch in weiten Teilen Deutschlands bereits in den 1920er-Jahren von Seminaren an die neu

282. Winkel, a. a. O., S. 235; nach Picht, a. a. O., S. 33 f. und 39, war die Bildungssituation noch in den 60er-Jahren in den Bundesländern mit katholischem Schulwesen am schlechtesten.
283. Winkel, a. a. O., S. 238 f.
284. Winkel, a. a. O., S. 235.
285. Leschinsky, Achim & Roeder, Peter Martin: Didaktik und Unterricht in der Sekundarstufe I seit 1950, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 329; Winkel, a. a. O., S. 243.
286. Keitel, Entwicklungen, S. 450.
287. Winkel, a. a. O., S. 237; Schichtunterricht aufgrund von Raummangel gab es noch mindestens bis 1964, vgl. Picht, a. a. O., S. 40; nach Soika, Claus-Dieter: Moderne Mathematik in der Schulpraxis. Eine empirische Untersuchung zur Evaluation des modernen Mathematikunterrichts der Grundschule am Beispiel des 2. Schuljahrs im Schulversuch in Nordrhein-Westfalen, Ratingen [u. a.]: Henn, 1974, S. 17 und 103, ergab eine Lehrerumfrage 1970, dass 77 % der befragten Grundschullehrerinnen und -lehrer in Klassen mit 36-52 Kindern unterrichteten.
288. Winkel, a. a. O., S. 235, spricht in diesem Zusammenhang von einem „zunächst [. . .] kaum wahrgenommen[en] [. . .] enormen Problemdruck“.
289. Leschinsky & Roeder, a. a. O., S. 369.

gegründeten Pädagogischen Hochschulen verlegt worden, so änderte sich an der inhaltlichen Ausrichtung zunächst wenig.[290] In anderen Teilen – wiederum vor allem in Süddeutschland – bestanden sogar noch nach 1945 Lehrerseminare fort, die nicht nur in ihrer Organisation, sondern auch in der Art der vermittelten Traditionen denen von 1900 glichen; die PHs konnten mithin erst Ende der Fünfziger als auf höherem Niveau „konsolidiert“ gelten.[291] Dennoch fehlte es auch hier wie in den Schulen lange Zeit an wissenschaftlich ausgebildetem Personal. 1964/65 waren immerhin 61 % der Professorinnen und Professoren sowie Dozierenden an den PHs promoviert; Lehrende aus der Praxis, z. T. ohne eigene Hochschulbildung, waren jedoch die 50er- und 60er-Jahre hindurch keine Ausnahme. Entsprechend gering war der fachliche Anteil des Lehramtsstudiums und mit ihm auch der Anteil fachdidaktischen Gehalts; es dominierte die Vermittlung rein methodischer Inhalte.[292] Trotz einer allmählichen Verbesserung der äußeren Bedingungen, was Schichtunterricht und Schulgebäude anging, blieb die Lage an den Schulen aufgrund der stark steigenden Schülerzahlen bei gleichzeitigem Lehrermangel prekär. Der massive Bedarf an Lehrkräften an den Volksschulen führte schließlich zur Anstellung von nicht oder im Schnellverfahren angelernten Aushilfslehrkräften. Am bekanntesten dürfte hier der Fall der vom nordrhein-westfälischen Kultusminister Paul Mikat (CDU) angestellten und ab 1962 in Einjahreskursen „ausgebildeten“ sogenannten „Mikätzchen“ geworden sein, denen zudem im Anschluss an eine gewisse Dauer der unterrichtlichen Arbeit ein verkürztes Studium mit der Aussicht auf eine dauerhafte Anstellung ermöglicht wurde.[293] Ob diese Maßnahmen geeignet waren, das inhaltliche Niveau der Schulen wesentlich zu verbessern, muss doch zumindest als fragwürdig gelten.

Und so setzte sich zu Beginn der Sechzigerjahre allmählich ein Bewusstsein für die Bedeutung von Bildung für die gesamtgesellschaftliche Entwicklung durch, für Gefahren, die mit Defiziten einhergehen, wie für Möglichkeiten, die ein gutes Bildungssystem bietet, und dies keineswegs nur in akademischen Kreisen. Schlagworte wie „Bildung als Bürgerrecht“ und „Chancengleichheit“ hielten Einzug in die Diskussion[294], und spätestens 1964 geriet das Thema mit Georg Pichts berühmt gewordener Diagnose einer drohenden „Bildungskatastrophe“ in den Fokus der all-

290. Leschinsky & Roeder, a. a. O., S. 292.
291. Leschinsky & Roeder, a. a. O., S. 297.
292. vgl. Leschinsky & Roeder, a. a. O., S. 298-300 und 302-304.
293. Picker, Bernold: Von Osnabrück bis PISA – 40 Jahre Mathematikdidaktik in Deutschland. Mathematikhistorische, schulpolitische und pädagogische Aspekte, Vortrag auf der 40. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 2006. [zitiert als: Picker, 40 Jahre]; es handelt sich hier um den vollen Vortrag, den B. Picker der Verfasserin freundlicherweise zur Verfügung gestellt hat, die Kurzfassung findet sich unter demselben Titel in: BzMU 2006, S. 413-416. Verfügbar unter www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2006/Sektions/picker_bernold.pdf .
294. Naumann, a. a. O., S. 38 f.

gemeinen und politischen Öffentlichkeit.[295]

Was die Verwissenschaftlichung der Lehrerausbildung betrifft, so fiel mit dem Beginn der Eingliederung der Pädagogischen Hochschulen in die Universitäten ein entscheidender Entwicklungsschritt in diese Zeit. Allerdings fanden sich hier erhebliche regionale Unterschiede; in Niedersachsen z. B. erfolgte der Zusammenschluss erst 1978/79.[296] Die Übernahme der Ausbildung durch die Universitäten war nicht von vorneherein gleichbedeutend mit einer Stärkung der Fachausbildung, wohl aber mit einer Ausweitung der pädagogischen Ausbildung. Die mit der Zeit eintretende Verfachlichung wiederum führte z. T. zu einem Verlust des Praxisbezugs. So oder so bleibt es eine offene Frage, „in welchem Maße die fortlaufende Produktion neuer pädagogischer Ideen und die Proklamation der Notwendigkeit inhaltlicher Veränderungen wirklich schon deren Durchsetzung in der Praxis zu garantieren vermögen“.[297]

Ebenfalls 1964 machte sich die, 1948 als länderübergreifende *Konferenz der deutschen Erziehungsminister* gegründete, Kultusministerkonferenz die Forderung nach Chancengleichheit und besserer Durchlässigkeit zu eigen und nahm in ihrer 100. Sitzung Bezug auf die in anderen europäischen Ländern aufgekommenen Reformbewegungen.[298] Im selben Jahr wurde mit dem *Hamburger Abkommen* ein Schritt vollzogen, der die bundesdeutsche Schullandschaft nachhaltig veränderte. Hatte das sogenannte *Düsseldorfer Abkommen*[299] 1955 noch die bis dahin in den Ländern unterschiedlichen äußeren Rahmenbedingungen für weite Teile der bundesweiten Schullandschaft vereinheitlicht, dabei aber die Volksschule ausgespart, so übertrug das *Hamburger Abkommen*[300] die getroffenen Regelungen nun auf die Volksschule. Man ging allerdings noch einen Schritt weiter und trennte diese Schulform – zumindest äußerlich – in die vierjährige Grundschule für alle Kinder sowie die Hauptschule, die dadurch den Status einer dritten Form der weiterführenden Schule neben Gymnasium und Realschule erhielt. Die Schulform Volksschule existierte damit praktisch nicht mehr; das dreigliedrige Schulsystem in seiner – trotz

295. vgl. Picht, a. a. O.; der Band enthält die Artikel, die Picht (u. a. Pädagoge und ehemaliges Mitglied des Deutschen Ausschusses) im selben Jahr in mehreren Ausgaben der Zeitschrift „Christ und Welt“ veröffentlicht hatte sowie eine Dokumentation der folgenden Diskussion; vgl. auch Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O., und Winkel, a. a. O., S. 243.

296. Leschinsky & Roeder, a. a. O., 296 und 305.

297. Leschinsky & Roeder, a. a. O., S. 311; vgl. ebenda, S. 306 f. und 310.

298. vgl. die entsprechende Pressemitteilung der Kultusminister in Picht, a. a. O., S. 182 f.

299. eigentlich „Abkommen zwischen den Ländern der Bundesrepublik zur Vereinheitlichung auf dem Gebiete des Schulwesens“ vom 17.02.1955, in Kraft getreten am 1.04.1957, vgl. Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O.; vgl. auch Winkel, a. a. O., S. 241.

300. eigentlich „Abkommen zwischen den Ländern der Bundesrepublik zur Vereinheitlichung auf dem Gebiete des Schulwesens“, vom 28.10.1964, in der Fassung vom 14.10.1971. Verfügbar unter: www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1964/1964_10_28-Hamburger_Abkommen.pdf .

aller Verschiebungen – bis heute existierenden Form war geboren. Gesamtschulen sind im *Hamburger Abkommen* noch nicht vorgesehen, und es mag dieser Aspekt sein, der zur Beurteilung des Abkommens als Grundlage einer konservativen Reform führte, die den sozialen Ist-Zustand einer „sich über das Bildungssystem [...] selbst reproduzierenden“[301] Gesellschaft festschrieb. Immerhin musste nun für jedes Kind individuell nach der 4. Klasse über den Fortgang des Bildungsweges entschieden werden, was in den Folgejahren zu einem leichten Anstieg der Schülerzahlen an den Realschulen und den Gymnasien führte.[302] Dass die organisatorische Neustrukturierung allein nicht genügen konnte, um eine größere Durchlässigkeit zu gewährleisten, sondern hierfür eine inhaltliche Angleichung der Curricula der verschiedenen Schulformen untereinander zwingend notwendig geworden war, ist offensichtlich.[303]

Für die Hauptschule ergab sich ein völlig neues Problemfeld aus der Forderung nach einem Curriculum, das an die Wissenschaftsorientierung der anderen weiterführenden Schulformen angelehnt war und gleichzeitig die Forderung nach arbeitsweltbezogenen Kontexten bediente. Das Fehlen hierfür grundlegender Konzepte führte daher zunächst zu einer Übernahme gymnasialer Inhalte in die neuen Curricula.[304]

Der Strukturplan des Deutschen Bildungsrats

Die Reform des Grundschulmathematikunterrichts war kein fachlich isoliertes Phänomen, sondern eingebunden in eine allgemeine Grundschulreform.[305] Eine entscheidende Instanz in dieser Reform war der *Deutsche Bildungsrat*, dessen Einrichtung mit dem Ziel einer längerfristigen strukturellen Entwicklungsplanung von Bund und Ländern gemeinsam im Juli 1965 beschlossen wurde. Der Bildungsrat folgte dem *Deutschen Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen* nach, der 1953 als beratendes Gremium gegründet, dessen Mandat aber 1965 nicht verlängert worden war. Was die Volksschule allgemein und die Grundschule[306] im

301. Winkel, a. a. O., S. 242.
302. vgl. Trommer-Krug, Luitgard: Soziale Herkunft und Schulbesuch. Eine Zusammenstellung von Daten aus der amtlichen Statistik und aus empirischen Untersuchungen über die soziale Herkunft, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, Tabelle 9, S. 60.
303. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 455.
304. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 453 und 455; Keitel, Réformes, S. 304 und 308.
305. vgl. Griesel, Heinz: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Versuch einer Bilanz, in: Haarmann, Dieter [Hrsg.]: Lernen und Lehren in der Grundschule. Studienbuch für den Unterricht der Primarstufe, Braunschweig: Westermann, 1977, S. 370 [im Folgenden: Griesel, Bilanz].
306. Die Bezeichnung Grundschule für die ersten vier Volksschuljahre geht zurück auf das Reichsgrundschulgesetz von 1920. Verfügbar unter:

Besonderen betraf, vertrat der Deutsche Ausschuss konservative Ansichten. So erkennt der „Rahmenplan zur Umgestaltung und Vereinheitlichung des allgemeinbildenden öffentlichen Schulwesens“ von 1959[307] zwar die „Pflicht zu sozialer Gerechtigkeit“ sowie den „vermehrte[n] Bedarf der modernen Gesellschaft an höher gebildete[m] Nachwuchs“ an und fordert vorsichtig eine bessere Durchlässigkeit mit „gewisse[n] Angleichungen der Lehrpläne“, allerdings „ohne den Standescharakter des Schulaufbaus grundsätzlich ändern zu wollen“. Für die Grundschule wird sogar postuliert: „[Sie hat] eine pädagogische Haltung und unterrichtliche Verfahren gewonnen, die zwar der weiteren Ausgestaltung und Festigung, aber keiner grundsätzlichen Wandlung mehr bedürfen.“[308] In den „Bemerkungen zur Arbeit in der Grundschule“ von 1962[309] wird eine derartige Auffassung noch weiter bekräftigt: „Eindrucksvoller als andere Stufen unseres Schulwesens hat die Grundschule in der bisherigen Entwicklung ihre eigene Form gefunden.“ Die Sorge darum, dass die Vorbereitung auf eine neu gegründete Förderstufe für die Klassen 5 und 6 zu einer Überforderung der Kinder führen könnte, wird mehr als deutlich, wenn die Schule im Anfangsunterricht als „unentbehrliche Einübungsstätte der sozialen Sittlichkeit“ und als Schonraum beschrieben wird, in dem die Kinder „in Frieden gedeihen“ sollen, und dies fernab einer als feindlich und krank machend beschriebenen zunehmend technisierten Welt. Diese Zitate müssen hier genügen; sie sollten jedoch ausreichen, um einen Eindruck von der Ausgangssituation an den Grundschulen zu gewinnen, gleichzeitig von der Reformbedürftigkeit einer Institution, die im Wesentlichen derjenigen in der Weimarer Republik entsprach[310] und in Teilen offenbar noch Pestalozzischen Traditionen verhaftet war. Der geradezu anachronistische Widerspruch zu den gesellschaftlichen Entwicklungen der fünfziger und sechziger Jahre ist offensichtlich; dass darüber hinaus der Pflege der „Mutterspra-

www.documentarchiv.de/wr/1920/grundschulgesetz.html.

307. in: Deutscher Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen: Empfehlungen und Gutachten des Deutschen Ausschusses für das Erziehungs- und Bildungswesen 1953-1965. Gesamtausgabe, Stuttgart: Klett, 1966, S. 59-116. Nach Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O., hat sich der Rahmenplan nicht durchgesetzt.

308. Zitate: S. 65, 75, 78 und 82; Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Einstieg in die Mathematik. Aufriß eines systematischen Weges für die Grundschule, Freiburg [u. a.]: Herder, ²1969, S. 22 [im Folgenden: Neunzig & Sorger, Einstieg], sowie Soika, a. a. O., S. 11, geben das zuletzt wiedergegebene Zitat ebenfalls wörtlich wieder, um die restaurativen Ansichten des Ausschusses zu demonstrieren. Aus Picht, a. a. O., S. 70, geht allerdings hervor, dass der Ausschuss in Anbetracht der gesellschaftlichen Umstände keine andere Möglichkeit sah, als mit einem vergleichsweise konservativen Plan eine auf der Tradition aufbauende Reform als „Evolution“ in Gang zu setzen und damit einer „Revolution“ entgegenzuwirken. Die von Picht ebenda angedeutete ablehnende Reaktion des Philologenverbandes zeigt exemplarisch das Scheitern dieses Vorhabens und macht gleichzeitig verständlich, weshalb es schließlich zu einer Reform kam, die in der Tat den Charakter einer Revolution hatte.

309. in: Deutscher Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen, a. a. O., S. 253-266 (folgende Zitate: S. 253, 255 und 261).

310. Deutscher Bildungsrat: Strukturplan für das Bildungswesen. Verabschiedet auf der 27. Sitzung der Bildungskommission am 13. Februar 1970, Bonn 1970, S. 123.

che“ besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden soll, wirkt bestenfalls naiv und kurzsichtig zu einem Zeitpunkt, zu dem die Bundesrepublik bereits Anwerbeabkommen mit Italien, Spanien, Griechenland und der Türkei geschlossen hatte.

Der Deutsche Bildungsrat als nachfolgende Gruppierung vertrat praktisch gegenteilige Ansichten; sein „Strukturplan für das Bildungswesen“ von 1970 gilt als „wohl wichtigste[r] Reformplan“[311] der allgemeinen Grundschulreform.

Der *Strukturplan* wurde in diversen Ausschüssen und auf der Basis verschiedener Gutachten erarbeitet und schließlich von der Bildungskommission des Bildungsrats verabschiedet. Zu den am Zustandekommen des Dokuments Beteiligten zählen damit neben zahlreichen anderen so bekannte Namen wie Heinrich Bauersfeld (als Kommissionsmitglied und Gutachter), Hans Aebli (als Mitglied eines Unterausschusses und Gutachter), Herwig Blankertz, Hartmut von Hentig und Saul Robinsohn (alle als Mitglieder in Unterausschüssen).[312] Als Einflüsse werden z. B. die aktuelle „Begabungsforschung“ und die Gesamtschulbewegung genannt.[313] Als ein zentraler Aspekt ergibt sich aus diesen Einflüssen, dass das „Bildungswesen als Einheit“ verstanden wird, und zwar in Bezug auf einheitliche pädagogische und didaktische Grundsätze, ebenso wie auf die äußere Struktur des Schulwesens unter Einbezug auch der vor- und außerschulischen Bildung.[314]

Die formulierten Ziele sind vor allem curricularer sowie pädagogisch-sozialer Natur. Übergeordnet ist das Ziel, eine Grundbildung zu vermitteln, derart, dass sie jeder und jedem Einzelnen die Teilhabe an der freiheitlich-demokratischen Gesellschaft in Form der Wahrnehmung staatsbürgerlicher Rechte und Pflichten ermöglicht.[315] Das erfordert Chancengleichheit und die wiederum zum einen Durchlässigkeit des Bildungssystems, zum anderen einen Ausgleich unterschiedlicher Lernvoraussetzungen zum Schulbeginn durch eine sogenannte kompensatorische Erziehung, die darin besteht, „durch Anregungen umweltbedingte Lerndefizite des Kindes auszugleichen“.[316] Auf unterrichtsmethodischer Ebene ergibt sich hieraus die Notwendigkeit weitreichender Differenzierungsmaßnahmen, und in der Tat handelt es

311. Winkel, a. a. O., S. 243 f.
312. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 347, 357, 359, 361 und 374.
313. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 15.
314. vgl. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 19, 29 und 48, Zitat: S. 27 f.; nichtsdestotrotz sieht auch der Strukturplan „weiterhin“ unterschiedliche Schullaufbahnen vor, S. 29.
315. vgl. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 29.
316. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 110; vgl. z. B. S. 30 und 38; Konzept und Bezeichnung der kompensatorischen Erziehung gehen zurück auf Bernstein, der sich allerdings in der Folge selbst gegen eine Falschauslegung seiner Ideen wendete, vgl. Bernstein, Basil: Der Unfug mit der „kompensatorischen“ Erziehung, in: b:e 3 (1970), 9, S. 15-19; Fend, Helmut: Soziologie der Schule, Weinheim [u. a.]: Beltz. Bd. 4. Sozialisation durch Literatur, 1979, S. 33 [im Folgenden: Fend, Literatur], sieht darin eine erhebliche sozialpolitische Dimension und spricht sogar vom „Abbau sozialer Hierarchien“.

sich bei (innerer) Differenzierung und Individualisierung um Themen, denen im *Strukturplan* immenses Gewicht zukommt. Ein den formulierten Prinzipien entsprechender Unterricht würde aufbauend auf einer kanonischen Grundbildung für jedes Kind eine bestmögliche Förderung bereithalten und damit insgesamt eine Anhebung des Niveaus nach sich ziehen. Es findet sich hierin ein Argument dafür, dass die Reform nur auf der Basis neuer, an Lernzielen orientierter Curricula umgesetzt werden kann.[317]

Ein anderes Argument liefern die „Veränderungen in Wirtschaft und Gesellschaft", angesichts derer die Eindrücke, die den Kindern in ihrer alltäglichen Umwelt begegnen, über den schulischen Stoff weit hinausgehen. Dieser Hintergrund lässt die bisherigen schulischen Inhalte anachronistisch erscheinen und macht eine inhaltliche Anpassung der Lehrpläne notwendig, der auch eine Diskussion darüber vorauszugehen hat, welches Wissen angesichts technischer Hilfsmittel noch in welcher Form beherrscht werden muss.[318] Die „in den Schranken der bestehenden Fächer [...] verhärtet[e]" Curriculumentwicklung soll zwar an die Tradition anknüpfen, dabei dennoch offen sein für Neues.[319] Die Auswahl der Inhalte soll nach dem Prinzip der Wissenschaftsorientierung erfolgen. Dies ist jedoch nicht so zu verstehen, dass die Inhalte aus der Wissenschaft direkt gelehrt werden sollen; es geht eher darum, schulische Inhalte als bedingt durch die entsprechende Fachwissenschaft und ihre Rolle darin aufzufassen und zu vermitteln. Konkreter bedeutet das, dass an den gewählten Inhalten exemplarisch fachtypische Denkweisen, Methoden, Strukturen und Grundprinzipien gelernt werden sollen, die einen Transfer auf weitere Zusammenhänge ermöglichen; die „fachliche[n] Lernziele [...] werden dann zu Prozeßzielen". Unter der offensichtlich auf Bruners *Prozeß der Erziehung* zurückgehenden Annahme, dass sich die Aneignung von Wissen auf den verschiedenen Stufen zwar im Niveau, nicht jedoch im Wesen unterscheidet, kann dieses Prinzip bereits in der Grundschule angewendet werden.[320]

„Neben den fachlich-inhaltlichen und den fachlich-prozessualen Zielen gibt es nichtfachliche, allgemeine Lernziele[, wie z. B.] problemlösendes Denken als allgemeines Denkverfahren"[321], Selbstständigkeit genauso wie Kooperationsfähigkeit, Leistungsbereitschaft oder das Verfügen über Lernstrategien. Diesen überfachlichen Zielen wird sogar die größte Relevanz zugesprochen, und es passt dazu, dass eine Allgemeinbildung angestrebt wird, die im besten Wortsinne allgemein und nicht spezialisiert, mit anderen Worten vorwiegend formal anstatt material zu

317. vgl. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 21, 27, 31, 36 f., 43, 49, 73 und 129.
318. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 79 und 124.
319. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 66.
320. vgl. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 30, 33, 48, 68, 79 und 133 f., Zitat: S. 83. Konkrete Beispiele für entsprechende Inhalte fehlen im Strukturplan, vgl. auch Robinsohn, a. a. O., S. 9.
321. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 83.

sein hat.[322] Eine solche Orientierung an zentralen begrifflichen und methodischen Ideen eines Faches ist selbstredend besser geeignet, eine Einheit und Durchlässigkeit innerhalb des Bildungssystems herzustellen, als eine reine Auflistung von – zumal schulformspezifischen – Inhalten, die jeweils zu unterrichten sind.

Die Empfehlungen zur Arbeit in der Grundschule der KMK

Der Einfluss des Bildungsrats auf die Arbeit der Kultusministerkonferenz[323] wird in den noch im selben Jahr beschlossenen *Empfehlungen zur Arbeit in der Grundschule* deutlich, die dem *Strukturplan* in wesentlichen Punkten folgen und sich klar von den Aussagen des *Deutschen Ausschusses* abgrenzen[324]. Gefordert wird stattdessen eine umfassende Reform der Grundschule, die Neuerungen auf inhaltlicher, aber auch methodischer und insgesamt organisatorischer Ebene einführt. Im Zentrum stehen pädagogische und soziale Ziele. Die *Empfehlungen* betonen die Notwendigkeit frühkindlicher Bildung sowie die Förderung von Chancengleichheit, u. a. durch kompensatorische sprachliche Erziehung[325], um der „bloßen Reproduktion gesellschaftlicher Schichtung“ entgegenzutreten und stattdessen „sozialkulturelle[] Startnachteile“ auszugleichen.[326] Ein besonderes Augenmerk liegt auf der Forderung nach Differenzierung, dem Aspekt wird ein gesamtes Kapitel gewidmet, und auch an anderen Stellen wird immer wieder hierauf Bezug genommen, bis hin zur Aussicht auf einen inklusiven Unterricht im heutigen Sinne.[327] Als konkrete Differenzierungsmaßnahmen werden z. B. die Arbeit an unterschiedlichen bzw. unterschiedlich schwierigen Aufgaben sowie die Aufteilung der Klasse in Niveaugruppen vorgeschlagen. Wie ernst die sozialen Ziele genommen werden, zeigt sich auch darin, dass die Nützlichkeit von Hausaufgaben hinterfragt wird; zumindest sollte die Hilfe der Eltern zur Bearbeitung unnötig sein, um den Bildungsprozess soweit wie möglich von der sozialen Herkunft unabhängig zu machen.[328]

322. vgl. Deutscher Bildungsrat, a. a. O., S. 34 f. und 50; das Prinzip der vorrangig methodischen Bildung erinnert an das heutige Konzept der (prozessbezogenen) Kompetenzen, die jedoch aktuell stärker mit den Fächern verknüpft scheinen.
323. vgl. auch Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O.
324. „Mochte es vor einiger Zeit noch scheinen, als habe die Grundschule ihre feste Form und ihren festen Ort gefunden, so besteht heute darüber Klarheit, daß auch auf der Grundstufe des Schulwesens Veränderungen [notwendig] sind“, KMK: Empfehlungen zur Arbeit in der Grundschule. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 2.7.1970, in: Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland; 130, S. 9 [zitiert als: KMK, Empfehlungen GS].
325. vgl. KMK, Empfehlungen GS, S. 12 f.
326. KMK, Empfehlungen GS, S. 25.
327. „. . . Möglichkeiten, behinderten und benachteiligten Kindern rechtzeitig angemessen zu helfen. Damit steigt die Chance dieser Kinder, im normalen Bildungsgang der Schule zu bleiben.“, KMK, Empfehlungen GS, S. 12; vgl. zur allgemeinen Differenzierung z. B. ebenda, S. 10 und 23.
328. KMK, Empfehlungen GS, S. 35.

Die Unzeitgemäßheit der traditionellen Unterrichtsinhalte, wie sie sich vor allem im bisherigen Fach Heimatkunde gezeigt hat, wird deutlich herausgestellt, wenn die vermeintliche „Lebenswirklichkeit“ als ein aufgrund der „umwälzenden gesellschaftlichen, kulturellen und technischen Veränderungen der Nachkriegszeit“ überkommenes, „einstmals lebendiges Volksgut“ charakterisiert wird, das den Kindern nunmehr „oft genug nur als zeitfremdes ‚Bildungsgut‘ entgegen [tritt]“.[329] Im Gegensatz dazu wird für alle Fächer eine stärkere Fachlichkeit, auch im Anfangsunterricht, angemahnt, wenngleich dieser ausdrücklich nicht nach Fächern getrennt, sondern – weiterhin – in Form eines Gesamtunterrichts stattfinden soll.

Auch wenn es sich bei den *Empfehlungen* um ein nicht fachspezifisches Dokument handelt, enthalten sie Hinweise zum Mathematikunterricht, dessen Inhalt über das reine Rechnen hinausgehen soll. Zahlbegriff und -operationen ebenso wie Sachprobleme sollen nach hinten geschoben und begrifflich, offenbar auf Basis von Mengen, grundgelegt werden. Was genau allerdings unter der „mengentheoretisch-logische[n] Grundlegung begrifflichen Denkens“ [330] zu verstehen ist, bleibt unklar; es ergibt sich der Eindruck, hier seien einfach der aktuellen Diskussion eine Reihe Schlagworte entnommen worden. Denn obgleich neben dem begrifflichen, logischen und relationalen Denken auch Geometrie in Form topologischer Fragestellungen früh behandelt werden soll, so dient dies alles doch letztlich dem Rechnen; der Mathematikunterricht, der gefordert wird, ist ein mathematisierter Rechenunterricht, der den traditionellen Gehalt eher ergänzt, als ein von Grund auf neu strukturiertes Curriculum zu verordnen. Den mathematischen Inhalten wird dabei zusätzlich eine überfachliche Komponente im Hinblick auf Sprachbildung und Symbolverständnis zugesprochen. Die im Unterricht angewandten Methoden sollen den sozialen Zielen entsprechen, indem sie Differenzierungsmöglichkeiten bereithalten sowie die konstruktivistische Begriffsbildung fördern. Empfohlen werden Spiele und Experimente an strukturierten Materialien und kooperative Sozialformen, die die Kommunikation der Kinder untereinander fördern.

Die Kultusminister beschränken sich nicht darauf, Neuerungen innerhalb des Klassenraums zu fordern und somit nahezu die alleinige Reformarbeit den Lehrkräften aufzubürden. Sie machen an verschiedenen Stellen deutlich, dass geeignete äußere Bedingungen geschaffen werden müssen, damit die Vorschläge erfolgreich umgesetzt werden können. Neben einer Raumsituation, die ausreichend Platz für differenziertes Arbeiten in Gruppen und mit Material gewährleisten kann, sowie einer guten Ausstattung mit passenden, an die neuen Inhalte und didaktisch-methodischen Vorschläge angepassten Materialien wird wiederholt eine Verrin-

329. KMK, Empfehlungen GS, S. 28.
330. KMK, Empfehlungen GS, S. 17; vgl. insgesamt zu den Bemerkungen zur Mathematik ebenda, S. 16 f.

gerung der aktuell weit größeren Schulklassen „auf höchstens 25 Kinder“ angemahnt.[331] Auch eine gegenseitige Angleichung der Ausbildungen für Lehrerinnen und Lehrer auf der einen und Sozialpädagoginnen und -pädagogen auf der anderen Seite wird im Hinblick auf die sozialen Ziele vorgeschlagen, ebenso wie deren gemeinsame Arbeit im Anfangsunterricht. Bemerkenswert ist darüber hinaus, dass die Planung klar langfristig ausgelegt ist, gemäß der Eingangsbemerkung, dass „Veränderungen [nicht immer] von heute auf morgen möglich“ sind.[332] Dies verlangt deshalb besondere Erwähnung, weil die Formulierung von Vertretern des gleichen Gremiums stammt, das zwei Jahre zuvor die Implementierung der Reform des Mathematikunterrichts innerhalb von nur vier Jahren auch für die Grundschule angeordnet hat.

Zumindest jegliche Bemühungen zur Verbesserung der äußeren Bedingungen in den Grundschulen erhielten spätestens 1974 einen erheblichen Dämpfer, als die durch die Ölkrise ein Jahr zuvor ausgelöste Wirtschaftskrise einen Rückgang der finanziellen Investitionen auch auf dem Bildungssektor zur Folge hatte.[333]

In Übereinstimmung mit den Bemühungen um eine allgemeine Reform der Grundschule verabschiedete Niedersachsen im Sommer 1970 eine Regierungserklärung, in der die Wichtigkeit einer solchen Reform betont wurde und die 1975 in fächerübergreifenden „Rahmenrichtlinien für die Grundschule“ konkretisiert wurde. Diese Rahmenrichtlinien, die ab 1976 zunächst erprobt werden sollten, mahnten ein „mehr sachbestimmtes, aber dabei durchaus kindgemäßes Lernen“ an. Fachspezifische Ausführungen zur Mathematik fehlen, die methodischen Hinweise sehen freie wie regelgebundene Spiele an strukturierten Materialien, Freiarbeit und als Sozialform bevorzugt Partner- und Gruppenarbeit vor, und zwar „können [diese] allen Fächern und Lernbereichen zugeordnet werden.“ Die Erläuterungen zur Differenzierung umfassen ein gesondertes Kapitel, Hausaufgaben gelten als optional, zumindest „müssen [sie] stets so gestellt sein, daß die Mithilfe der Eltern nicht notwendig ist“.[334]

II.1.b Die Reform des Mathematikunterrichts

Die Situation des Mathematikunterrichts in Westdeutschland nach dem Zweiten Weltkrieg war bestimmt durch die Gesamtsituation des Schulwesens der Nachkriegszeit, wie es in Ansätzen weiter oben beschrieben ist. Zu beobachten ist zu-

331. vgl. KMK, Empfehlungen GS, S. 17, 19, 21 und 27 (Zitat: S. 17).
332. vgl. KMK, Empfehlungen GS, S. 9 und 19 (Zitat: S. 19).
333. Damerow, a. a. O., S. 19 und 53; Naumann, a. a. O., S. 40.
334. vgl. Der Niedersächsische Kultusminister: Rahmenrichtlinien für die Grundschule, Hannover: Schroedel, 1975, Zitate: S. 3, 17 und 26.

nächst ein Anknüpfen an Traditionen der 1920er-Jahre, die auch „Gedankengut[] der Reformpädagogik“ einschlossen.[335] Insbesondere der Mathematikunterricht an den weiterführenden Schulen war dazu traditionell geprägt durch eine spezifische und typische „Aufgabendidaktik“[336]; für den mathematischen Unterricht insgesamt war die durch die strikte Trennung der Volksschule von den weiterführenden Schulen bedingte fundamentale Unterscheidung zwischen den Fächern Rechnen und Mathematik von besonderer Bedeutung. Es handelte sich um zwei unterschiedliche Fächer ohne Berührungspunkte in der Lehrerausbildung oder der Didaktik; streng genommen unterschieden sie sich schon darin, dass es für die Volksschule gar keine Didaktik im wissenschaftlichen Sinne gab, sondern nur eine an der Praxis orientierte Methodik. Selbst außerhalb der Schule dürfte es nur wenig Berührungspunkte sowohl in der Lehrer- wie in der Schülerschaft gegeben haben, sicherte doch gerade der systemimmanente Vorenthalt der Mathematik wie jeglicher Wissenschaftlichkeit in der Volksschule den jeweiligen sozialen Status.[337] Die Grundschule als Teil der Volksschule sah es als oberste Aufgabe an, die Kinder auf den Alltag sowie die spätere Volksschuloberstufe vorzubereiten, ein Grundschulfach Mathematik existierte nicht; dass sich Mathematik mithin beim Übergang auf Gymnasium oder Realschule leicht als entscheidende Hürde erweisen konnte, liegt nahe und ist wesentlich für das Verständnis des Zusammenhangs zwischen inhaltlicher Reform des mathematischen Grundschulunterrichts und der zunächst fachunabhängigen Forderung nach Chancengleichheit und Durchlässigkeit im Bildungswesen für alle.

Der Reform des Grundschulunterrichts ging eine Reform an den Gymnasien voraus. Die Forderung nach Annäherung der schulischen an die universitäre Bildung spielte eine entscheidende Rolle bei den Reformbemühungen, insofern kann Picker und Müller & Wittmann gefolgt werden, die in ihren geschichtlichen Abrissen der Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts die Neue Mathematik an die Meraner Reform der Jahre 1905-1925, für die eben dieses Argument maßgeblich war, anknüpfen.[338] Die angestrebte Brücke zwischen Schule und Studium erforderte vor allem eine inhaltliche Anpassung der Lehrpläne an die moderne mathemati-

335. Keitel, Entwicklungen, S. 464, bezieht sich hierbei vermutlich auf die Vertreter der deutschsprachigen Rechenmethodik, die der Reformpädagogik zugerechnet werden, wie etwa die Vertreter der sogenannten Arbeitsschulbewegung (z. B. Kerschensteiner) oder J. Kühnel; vgl. weiterhin Keitel, Réformes, S. 303.

336. Geprägt wurde dieser Begriff von H. Lenné, vgl. z. B. Lenné, a. a. O., S. 35 und 50 f.; nach Lenné, S. 53 und 77, ging diese Orientierung an einem abzuarbeitenden Aufgabenpensum mit fachstruktureller Abstinenz einher, die letztlich die Neue Mathematik als Gegenbewegung nahezu erzwang.

337. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 460 f.; vgl. Keitel, Réformes, S. 303.

338. vgl. Picker, Reform, S. 9; vgl. Müller, Gerhard & Wittmann, Erich: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele, Braunschweig [u. a.]: Vieweg, [3]1984, S. 148 [im Folgenden: Müller & Wittmann, 1984].

sche Fachwissenschaft, die geprägt war durch Mengenlehre, Strukturmathematik und Axiomatik. Dass die Neuerung an der weiterführenden Schule begann, entspricht den Ursprüngen, von denen die New Math in den USA ihren Ausgang nahm und dem Schwerpunkt, den die OEEC auf die Sekundarstufe legte, wie er sich u. a. in der nach dem Treffen in Royaumont zusammengestellten *Synopsis für die moderne Schulmathematik* widerspiegelt. Erste Reformideen für die deutschen Gymnasien wurden bereits in den fünfziger Jahren diskutiert. So finden sich z. B. im Kasseler Lehrplan von 1953, in Vorschlägen der KMK von 1955 und in den „Richtlinien und Rahmenpläne[n] für den Mathematikunterricht" der gymnasialen Oberstufe von 1958 Themen aus der modernen Mathematik wie Menge und Gruppe.[339] Ab 1962 waren neue, inhaltlich angepasste Schulbücher verfügbar[340], während ein moderner Hamburger Lehrplanentwurf zwar – aufgrund von „Unruhe im Untergrund"[341] – nicht verwirklicht wurde, aber einen wichtigen Anstoß für weitere Diskussionen gab.[342] Dennoch bezeichnet Damerow all diese Bemühungen als „unverbindliche[] Reformdiskussionen" und legt den eigentlichen Reformbeginn auf 1965[343], das Jahr, in dem Mitglieder des *Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* (MNU) die zunächst auf der MNU-Hauptversammlung in Nürnberg vor 1300 Teilnehmern vorgestellten *Nürnberger Lehrpläne* in ihrer Verbandszeitschrift veröffentlichten.

1960 war zunächst die sogenannte *Saarbrücker Rahmenvereinbarung*[344] durch die KMK beschlossen worden, ein Dokument, das stärkere Wahlmöglichkeiten in der gymnasialen Oberstufe einführte und damit – wie bereits der *Tutzinger Maturitätskatalog* zwei Jahre zuvor[345] – eine Kürzung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den Gymnasien nach sich zog, was den restaurativen Tendenzen der Zeit zumindest im Hinblick auf diesen Bereich der Bildung Ausdruck gab.[346] Die Verfasser der *Nürnberger Lehrpläne* kritisieren die *Saarbrücker Rah-*

339. Schuberth, Ernst: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Ihre Geschichte und Probleme; unter besonderer Berücksichtigung von Felix Klein, Martin Wagenschein und Alexander I. Wittenberg, Stuttgart: Verl. Freies Geistesleben, 1971, S. 45 und 49; Keitel, Réformes, S. 304; Keitel, Entwicklungen, S. 451; vgl. Lenné, a. a. O., S. 49; vgl. Picker, Reform, S. 10, für einen weiteren Überblick über frühe Bemühungen auf gymnasialer Ebene; vgl. darüber hinaus MNU: Nürnberger Lehrpläne des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, in: MNU 18 (1965/66), 1/2, S. 1 [im Folgenden: Nürnberger Lehrpläne], wo im Jahr 1965 die Rede von „der begonnenen Reform unserer Gymnasien" ist.
340. Griesel, Bilanz, S. 370.
341. Kommentar von K. Wigand in MNU: Nürnberger Lehrpläne. Kritiken und Erwiderungen; Rahmenplan für Mathematik, in: MNU 18 (1965/66), 12, S. 433 [im Folgenden: Nürnberger Lehrpläne, Kritiken und Erwiderungen].
342. Keitel, Entwicklungen, S. 467; Griesel, Bilanz, S. 370.
343. Damerow, a. a. O., S. 45.
344. eigentlich „Rahmenvereinbarung zur Ordnung des Unterrichts auf der Oberstufe der Gymnasien vom 29.9.1960", nach Schulz-Hardt & Fränz, a. a. O.
345. Damerow, a. a. O., S. 65, vgl. Fend, Gestalten, S. 51 f.
346. Keitel, Entwicklungen, S. 466, spricht in diesem Zusammenhang gar von der „Wiederbe-

menvereinbarung und deren „pädagogisches Leitbild der Vergangenheit“ scharf.[347] Ihr formuliertes Ziel der „Neuausrichtung sowohl der Lehrstoffe als auch der Methode“ begründen sie mit dem Wunsch, den „Graben [. . .] zwischen Gymnasium und Hochschule“ zu schließen.[348] Das Hauptargument für die Notwendigkeit einer Erneuerung insgesamt ist die gestiegene und zukünftig mutmaßlich weiter steigende Bedeutung der Naturwissenschaften. Der Lehrplanvorschlag für Mathematik ist den Vorschlägen für Physik, Chemie und Biologie vorangestellt, und die Mathematik erhält einen wesentlichen Teil ihrer Bedeutung durch ihre Eigenschaft als Hilfswissenschaft für diese Fächer sowie durch die „auf sie gegründeten Zivilisation und Technik“.[349] Die Begründung der Wichtigkeit der Mathematik beschränkt sich nicht auf den rein materialen Aspekt, sondern betont auch die formalen Möglichkeiten, über die sie als „konsequente Ausprägung kontrollierbaren Denkens“ durch „die von ihr geschaffenen begrifflichen Schemata“ für die „Beschreibung [. . .] vieler Bereiche des heutigen Lebens“ verfügt.[350] Während der algorithmische Aspekt als notwendig beibehalten werden soll, wird insgesamt eine Neustrukturierung des Stoffes angestrebt, die mathematische Grundbegriffe als strukturierende Elemente nutzt, mit dem Ziel, „große überschaubare Gedankengänge“ sichtbar zu machen, „fundamentale Einsichten“ zu ermöglichen und dadurch das Fach transparent als eine Einheit zu vermitteln.[351] Die Verfasser nennen hier die internationalen Bemühungen der OECD als Einfluss, die Orientierung an der Brunerschen Theorie eines von fundamentalen Ideen durchzogenen Curriculums wird darüber hinaus deutlich. Die Leitbegriffe, die den Lehrplan strukturieren, sind Objekte, Mengen, (nicht nur algebraische) Strukturen, Abbildungen sowie Begriffe der Logik.[352] Dabei sollen vor allem die Mengen und die Aussagenlogik genutzt werden, um die Eigenschaften der Zahlbereiche grundzulegen.[353] Was die inhaltliche Ausgestaltung des Lehrplans betrifft, so ist abgesehen von der Forderung nach Hinzunahme o. g. allgemeiner Grundbegriffe und einer gewissen Neuanordnung festzustellen, dass der Stoffplan im Wesentlichen traditionelle Inhalte auflistet und somit – entsprechend der Wertung von Damerow – dem von den Verfassern selbst formulierten Anspruch nicht vollends entspricht.[354]

lebung der Bildungstraditionen des 19. Jahrhunderts in den fünfziger Jahren“; vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 451; vgl. Keitel, Réformes, S. 304.

347. Nürnberger Lehrpläne, S. 1.
348. Nürnberger Lehrpläne, S. 2.
349. Nürnberger Lehrpläne, S. 3.
350. ebenda.
351. vgl. ebenda, Zitate: S. 2 und 3.
352. vgl. Nürnberger Lehrpläne, S. 3 f.
353. vgl. Nürnberger Lehrpläne, S. 4.
354. vgl. Damerow, a. a. O., S. 213-215.

Mindestens so aufschlussreich wie der Lehrplan selbst sind die „Kritiken und Erwiderungen“, die ein knappes Jahr später in der MNU-Zeitschrift veröffentlicht wurden und die sich vorwiegend auf einen Vortrag von D. Laugwitz beziehen, den dieser als Reaktion auf die Präsentation des Nürnberger Rahmenplans für Mathematik gehalten hat. Es wird deutlich, dass es sich hierbei um einen polemischen Beitrag, vermutlich um eine bewusst übertreibende und in Teilen schlicht falsche Darstellung gehandelt hat. Vorwürfe wie die „große Einseitigkeit des verkündeten Lehrplanes und der Versuch eines Diktates“[355] entbehren jeglicher Grundlage und werden dementsprechend im Folgenden von H. Athen – offenbar Mitverfasser des Plans – Stück für Stück auf Basis des Textes entkräftet.[356] F. Denk kommentiert an anderer Stelle die Publikumsreaktionen wie folgt: „Der allzu große Beifall gerade bei den negativen Ausführungen des Vortrages, insbesondere auch bei den wenig sachlichen Bemerkungen über die ‚Nürnberger Lehrpläne‘ gab sehr zu denken. Es wäre zu hoffen, daß die Diskussion [. . .] mit tieferer Sachkenntnis weitergeführt würde¡“[357] Es soll hier nicht auf weitere Details eingegangen werden; es zeigt sich jedoch exemplarisch, wie mangelnde Sachlichkeit und mutmaßlich absichtliches Missverstehen eine Debatte bestimmen können, in der Traditionalisten, offenbar bedingt durch eine generelle Abwehrhaltung gegenüber allem Neuen, für negative Argumente besonders empfänglich sind; ein Überprüfen der Argumente scheint dann nicht notwendig, solange diese die eigenen Vorbehalte bedienen.[358] Gleichzeitig dokumentieren die Ausführungen eine gewisse Spaltung der Lehrerschaft in Reformgegner und -befürworter. Es sind dies Umstände, unter denen tiefgreifende Reformen in der Praxis kaum gelingen können, und es ist Damerow zuzustimmen, der in der Rezeption des Nürnberger Rahmenplans ein Exempel dafür sieht, „warum so wenige Lehrplanentwürfe vorgelegt wurden, die nicht den traditionellen Stoffplan zu erweitern trachteten, sondern auch im Gesamtaufbau einer Reformkonzeption folgen“.[359]

Ungeachtet dessen sehen Keitel und Damerow im *Nürnberger Lehrplan* ein für die Gesamtreform bedeutendes Dokument, insofern, dass die *Empfehlungen und Richtlinien*, die die Kultusministerkonferenz 1968 für den Mathematikunterricht erlassen hat, hier anknüpften und in der Folge auch für die anderen Schulfor-

355. Kommentar von K. Wigand in Nürnberger Lehrpläne, Kritiken und Erwiderungen, S. 434.
356. vgl. Erwiderung von H. Athen in Nürnberger Lehrpläne, Kritiken und Erwiderungen, S. 434 f.
357. F. Denk über den Vortrag von Laugwitz in Nürnberger Lehrpläne, Kritiken und Erwiderungen, S. 436.
358. Selbstverständlich handelt es sich hierbei keineswegs um ein Spezifikum von Reformen im Bildungswesen, sondern um ein typisches gesellschaftliches Phänomen, wie die tagesaktuellen Debatten der Jahre 2016-2018 um „postfaktische“ „Fake News“ zeigen.
359. Damerow, a. a. O., S. 212 f.

men die inhaltliche „Anpassung an den gymnasialen Bildungskanon vorgezeichnet" war.[360]

Die Reform des Mathematikunterrichts an den Grundschulen

Auch wenn die internationalen Bemühungen um eine Reform des mathematischen Unterrichts der Primarstufe in der Bundesrepublik Deutschland nicht vollends unbeachtet geblieben sind – z. B. erschien bereits 1962 die deutsche Übersetzung eines Werks von G. Papy, der in Belgien sehr aktiv im Bereich der modernen Mathematik war[361] –, so wird der eigentliche Reformbeginn hier in der Literatur relativ einheitlich auf die Jahre 1965/66 datiert. 1965 markiert das Erscheinungsjahr der ersten ins Deutsche übersetzten Dienes-Schriften im Herder-Verlag.[362] 1966 begann das *Frankfurter Projekt* unter H. Bauersfeld[363], daneben fanden gleich zwei Tagungen in Deutschland statt, die einen Beitrag zur weiteren Verbreitung der in Dienes' Büchern enthaltenen Ideen leisteten. An beiden Tagungen nahm Dienes teil, war jedoch vielmehr zentrale Person als nur Teilnehmer. Dass seine Reformvorschläge in der Folge maßgeblich für die Reform des Grundschulunterrichts wurden, überrascht vor diesem Hintergrund nicht.

Bei der ersten der beiden Veranstaltungen, die vom 10.-13. Januar in Hamburg stattfand, handelte es sich um eine internationale Tagung, ausgerichtet von der ISGML in Zusammenarbeit mit dem *UNESCO Institute for Education*, mit dem Titel „Mathematics Learning". Das Treffen schloss inhaltlich direkt an die zwei Vorgängertagungen, 1964 in Stanford und 1965 in Paris, an; Thema war der Mathematikunterricht für 6-12-Jährige, und als Diskussionsgrundlage diente der Bericht „Mathematics in Primary Education", den Dienes im Auftrag der ISGML erstellt hatte und der auf Basis der Arbeit auf den ersten beiden Tagungen bereits revidiert worden war. Der nicht nochmals veränderte und im Anschluss an das Treffen veröffentlichte Bericht enthält somit Perspektiven aus verschiedenen Ländern, wobei besonders Schweden, Frankreich und England eine hohe Reformaktivität attestiert wird.[364] Als Grund für die Ausweitung der zunächst für die sekundäre Bildung gedachten Reform auf die Primarbildung nennt der Bericht

360. Damerow, a. a. O., S. 210; vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 465.
361. Picker, Reform, S. 8; nach Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 189, handelt es sich um ein Werk mit dem Titel „Die ersten Elemente der modernen Mathematik (I)"; für weitere Informationen über die Arbeit von Papy vgl. De Bock, Dirk & Vanpaemel, Geert: Early experiments with Modern Mathematics in Belgium, paper at ICME13 2016.
362. Griesel, Bilanz, S. 370; Damerow, a. a. O., S. 78; es handelt sich um die Bücher „Aufbau der Mathematik" und „Moderne Mathematik in der Grundschule".
363. vgl. dazu Kapitel III. 1.
364. vgl. Heise in Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 177-179; vgl. Dienes, Memoirs, S. 380; vgl. Picker, Reform, S. 4; vgl. insgesamt ISGML, a. a. O.

die Aufgabe der Grundschule, auf die Sekundarstufe vorzubereiten; eine Reform des Anfangsunterrichts ist damit Voraussetzung für eine erfolgreiche Reform des weiterführenden Unterrichts. Der bisherige Stoffplan soll dabei nicht nur punktuell ergänzt werden, sondern das deutlich weitergefasste Ziel ist „displacing the traditional [...] mechanically-learnt arithmetic“.[365] Dass die curriculare Veränderung mit einer methodischen einherzugehen hat, ergibt sich aus der Verbindung zur Psychologie. Eines der vier Kapitel des Berichts behandelt die theoretischen Grundlagen der Reformvorschläge, es finden sich hier praktisch nur Darstellungen der als am wichtigsten angesehenen zeitgenössischen psychologischen Theorien. Neben Piaget, dem eine herausragende Rolle zugestanden wird[366], Bruner und Dienes selbst werden hier Bartlett, Skemp und Suppes genannt. Der enge Bezug zur Psychologie war offenbar nicht von vorneherein für alle selbstverständlich, da von der Überraschung der Teilnehmer angesichts dieses Aspekts der Diskussion berichtet wird.[367]

Einen wesentlichen Teil des Berichts nimmt die Übersicht über aktuelle Unterrichtsprojekte ein, die hier in sechs verschiedenartige konzeptionelle Zugänge eingeteilt werden: den „basic-set approach“, in dem Mengenlehre[368] als notwendige Basis des Zahlbegriffs gesehen wird, den „arithmetically oriented approach“, in dem die Arithmetik unter algebraischer Perspektive behandelt wird (z. B. in der Arbeit mit Cuisenaire-Stäben oder Mehrsystemblöcken), den „geometrically-oriented approach“, der durch eine räumliche Darstellung arithmetischer Operationen gekennzeichnet ist (z. B. durch Funktionsgraphen im Koordinatensystem oder am Zahlenstrahl), den auf einer gewissen Formalisierung basierenden „Symbol Game-oriented approach“, den „Science-oriented approach“ mit seiner Anknüpfung an physikalisch-mechanische Phänomene und den „object-game oriented“ bzw. „multiple embodiment approach“, in dem sich Dienes‘ Prinzip der Variation der Veranschaulichung wiederfindet.[369] Während Dienes zwar auch als ein Vertreter unter anderen des *basic-set approach* wie des *arithmetically oriented approach* genannt wird, so gilt er doch vorwiegend als Vertreter des *multiple embodiment approach*.[370]

Großes Gewicht legt der Bericht auch auf die Frage der Lehrerbildung, der ebenfalls ein ganzes Kapitel gewidmet ist. Neben einer Verbesserung der Ausbildung,

365. ISGML, a. a. O., S. i.
366. Wörtlich heißt es in ISGML, a. a. O., S. 31: „work of Piaget clearly stands out as the most important piece of work which is going to be relevant to the problems of learning mathematics“
367. ISGML, a. a. O., S. iv.
368. d. h. die Begriffe der Menge, des Elements einer Menge, der Gleichheit von Mengen, der Teilmenge sowie die Mengenoperationen Vereinigung, Schnitt und Differenz, vgl. ISGML, a. a. O., S. 75.
369. vgl. ISGML, a. a. O., S. 22-27 und (detaillierter) 73-103.
370. ISGML, a. a. O., S. 26: „This is the approach advocated by Dienes.“

die mehr fachliche Inhalte, neue Erkenntnisse aus der Psychologie und Kenntnisse über offenere Methoden enthalten sollte[371], werden außerdem eine stärkere Zusammenarbeit von Mathematikern, Psychologen und Lehrern in Fragen des Unterrichts sowie mehr empirische Unterrichtsforschung gefordert.[372]

Interessanterweise werden in einem späteren Bericht als diejenigen inhaltlichen Ziele des Mathematikunterrichts in den Klassen 1-6, auf die sich die Teilnehmer der Tagung mehrheitlich einigen konnten, arithmetische Fähigkeiten, Symmetrien, Messen, der Wahrscheinlichkeitsbegriff, die „[t]abellarische und graphische Beschreibung funktionaler Zusammenhänge“ sowie Modellieren und Problemlösen genannt.[373] Mengen fehlen in dieser Auflistung, stattdessen sind die Parallelen zu heutigen Lehrplänen frappierend.

Bei der zweiten für die Reform wichtigen Veranstaltung im Jahr 1966 handelt es sich um das Symposion „Mathematikunterricht in der Grundschule“ vom 21.-25. November an der Abteilung für Didaktik des Pädagogischen Zentrums Berlin. Um sich ein Bild von den Reformbemühungen und -erfahrungen anderer Länder zu machen, hatte man aus Schweden M. Håstad, aus Frankreich R. Biemel, aus Dänemark B. Christiansen und eben Z. P. Dienes, damals tätig in Kanada, eingeladen. Bis auf einen Wiener Teilnehmer kamen alle weiteren aus Deutschland, die meisten davon aus Berlin; das Teilnehmerfeld war zusammengesetzt aus Senatoren, Fachleitern, Fachdidaktikerinnen und -didaktikern (darunter H. Bauersfeld, W. Neunzig und P. Sorger), Lehrerinnen und Lehrern aller Schulformen sowie Verlagsvertretern von Herder, Schroedel und Klett.[374] Die Tage zwei bis fünf des Symposions begannen jeweils mit einer einstündigen Unterrichtsdemonstration von Dienes mit einer 3. Klasse. Diese Vorführungen müssen beeindruckend gewesen sein, da der Bericht von F. von Cube (PH Berlin) trotz der Diskussion weiterer Konzepte deutlich macht, dass die Methode von Dienes klar im Mittelpunkt gestanden hat; es hat hier fast den Anschein, als wäre dies das einzige präsentierte Konzept gewesen. Dass Biemel ebenfalls Beispiele für die Arbeit mit Logischen Blöcken vorgeführt hat, dürfte dazu beigetragen haben.[375] So überzeugend Dienes‘ Methode und Materialien auch gewesen sein mögen, so bestand doch offenbar noch lange keine Einigkeit über die für die Grundschulreform am besten geeigneten Inhalte. Es heißt, ein gemeinsamer begrifflicher Kanon sei noch zu entwickeln.[376]

371. vgl. ISGML, a. a. O., S. 114-116.
372. vgl. ISGML, a. a. O., S. 104.
373. Heise in Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 180.
374. vgl. Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 5-8.
375. vgl. von Cube in Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 21; Biemel war derjenige, der Dienes‘ Schriften für den französischen Markt herausgab (Dienes, Memoirs, S. 354), dass er mit den Methoden von Dienes vertraut war, war mithin kein Zufall, gleichzeitig dürfte die Verbreitung der Ideen einem gewissen ökonomischen Interesse seinerseits entgegengekommen sein.
376. von Cube in Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 24.

Gemeinsam war damit beiden Tagungen, dass sie von den Reformbemühungen auf internationaler Ebene ausgingen, wobei Dienes die zentrale Person und seine Methode somit die dominante war. Während also über die Notwendigkeit von Handlungserfahrungen und Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler ebenso eine gewisse Einigkeit bestand wie über das Ziel, mechanisches Rechnen durch mathematisches Denken in Begriffen und Beziehungen zu ersetzen, war damit noch keine curriculare Richtung festgelegt. Der *basic-set approach* war nur ein Zugang neben anderen, und auch wenn er u. a. mit Dienes assoziiert war, so galt er nicht als Kern des Dienesschen Konzepts.

Bereits im Oktober 1965 hatten sich einige Fachvertreter auf dem 5. Pädagogischen Hochschultag in Berlin getroffen, ein Ereignis, das von Picker auch als praktisch „nullte" Bundestagung für die Didaktik der Mathematik bezeichnet wird, da man hier erste Planungen für eine gemeinsame 1. Bundestagung für Didaktik der Mathematik aufnahm. Diese fand schließlich vom 4.-7. April 1967 in Osnabrück statt. Eigentlicher Anlass war die Gründung der Hauptschule gewesen und die Notwendigkeit, ein Konzept für den Mathematikunterricht an dieser neuen Schulform zu diskutieren, doch stattdessen eröffnete Heinrich Bauersfeld, dessen erste Unterrichtsversuche im Rahmen des *Frankfurter Projekts* bereits durchgeführt worden waren, die Konferenz mit einem Referat darüber, dass die Reform der Hauptschule zunächst eine Reform der Mathematik in der Grundschule voraussetze, und zwar auf inhaltlicher wie auf methodischer Ebene[377], und so kam es für einen Teil der 51 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zur „erste[n] Begegnung mit dem, was später die „Neue Mathematik" genannt wurde".[378] Der Vortrag führte zu einer schnell einsetzenden Reformaktivität, die zunächst aber natürlich noch auf einzelne Standorte beschränkt war.[379] Entsprechend unvorbereitet war die junge Grundschulmathematikdidaktik, als die *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen* der Kultusministerkonferenz am 3. Oktober 1968, und damit nur eineinhalb Jahre später, auf eine Reform trafen, die gerade erst in den Kinderschuhen steckte.[380] Aus den vielfältigen, doch einzelnen Ideen hatte man in der kurzen Zeit weder grundlegende Theorien noch ein einheitliches Konzept entwickeln können. Die Richtlinien sahen die Umsetzung der Reform von Klasse 1 an ab 1972 und damit innerhalb von nur 4 Jahren vor.[381]

377. vgl. Bauersfeld, Heinrich: Neue Ansätze zur Didaktik der Mathematik in der Grundschule, in: BzMU 1967, S. 5-19 [im Folgenden: Bauersfeld, Neue Ansätze].
378. Picker, 40 Jahre; es ist höchst wahrscheinlich, dass Picker nicht der einzige war, für den dies galt.
379. vgl. Picker, 40 Jahre; er nennt hier neben seinem eigenen (in dem zwei 1. Klassen in Köln das ganze Schuljahr 1967/68 nach einem auf Dienes u. a. basierenden Konzept unterrichtet und im Anschluss getestet wurden, vgl. Picker, Schulversuch) und denen von Bauersfeld noch explizit die Unterrichtsversuche von Neunzig, vgl. Neunzig, Entwurf.
380. vgl. Damerow, a. a. O., S. 79.
381. KMK: Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an

Was folgte, waren ein „Boom der Lehrmittelindustrie und außerordentliche Aktivitäten in der Mathematikdidaktik“[382]; diese waren jedoch aufgrund der Kürze der zur Verfügung stehenden Zeit zwingend darauf ausgerichtet, unterrichtspraktische Konzepte zu entwerfen[383], eine ruhige Koordinierung der vorhandenen Ideen oder die Fortführung der nötigen Grundsatzdiskussion wurde durch diese plötzliche Entwicklung abgeschnitten, „noch ehe sie richtig begonnen hatte“[384]. Eine Ausweitung der Unterrichtsforschung, wie sie der Bericht der Hamburger UNESCO-Tagung gefordert hatte, musste angesichts der Erfordernisse zurückgestellt werden.

Für die Wissenschaftswerdung der Mathematikdidaktik spielte die Reform dennoch eine entscheidende Rolle. Die hohe Aktivität im Fach und die Vielzahl der auf der Basis der neueren psychologischen Theorien entworfenen Unterrichtsideen sowie die damit zusammenhängenden teils sehr kontroversen Diskussionen fanden zeitgleich mit der Aufwertung der Lehrerausbildung durch die Eingliederung der Pädagogischen Hochschulen in die Universitäten statt. Sie gingen daher mit einer starken Zunahme entsprechender Stellen an den Universitäten einher, ein Umstand, der sich förderlich darauf auswirkte, dass die Mathematikdidaktik überhaupt eine eigenständige Disziplin werden konnte.[385] Bis diese sich als vollwertige Wissenschaft mit fest definierten Aufgaben etabliert hatte, dauerte es allerdings noch.[386]

Die Frage der Lehrerbildung

An mehreren Stellen ist bereits auf die Wichtigkeit bzw. Notwendigkeit einer Verbesserung der Lehrerbildung hingewiesen worden, die praktisch sämtliche Quellen betonen und fordern. Die Ausgangssituation der Ausbildung für angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer entsprach derjenigen der Volksschullehrkräfte im Allgemeinen und war gekennzeichnet durch die Abstinenz von Fachlichkeit wie Wissenschaftlichkeit. An den Pädagogischen Hochschulen lehrte man die Me-

den allgemeinbildenden Schulen. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968, in: Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland; 611 [im Folgenden: KMK 1968]; in Nordrhein-Westfalen begann die Umsetzung ein Jahr später, vgl. Müller & Wittmann, 1977, S. 141.

382. Keitel, Entwicklungen, S. 455; vgl. Keitel, Beiträge, S. 127.

383. Keitel bezeichnet in Entwicklungen, S. 462, die Didaktik in ihrer speziellen Rolle als Mittlerin zwischen der Reform von außen und der praktischen Umsetzung „in enger Verbindung mit der Lehrmittelindustrie“ auch als „Neue Mathematikdidaktik“.

384. Damerow, a. a. O., S. 81; vgl. Keitel, Christine: Beiträge zum Mathematikunterricht 1967-1973, in: ZfP 21 (1975), S. 128 f.

385. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 457.

386. vgl. Zumpe, a. a. O., S. 147 und 168.

thodik des Rechen- und Raumlehreunterrichts[387], eine Mathematikdidaktik für die Grundschule gab es nicht, nicht einmal ein Grundschulfach mit dem Namen Mathematik. Zusammen mit einer erheblichen Anzahl fachfremd unterrichtender Lehrkräfte ergibt sich, dass am Anfang der Reform etwa 70 % derjenigen, die Mathematikunterricht gaben, dies ohne tiefere fachliche Kenntnisse taten. Obwohl der Übergang zum Fachlehrersystem auch für die Grundschulen sicherlich eine Stärkung der Fachlichkeit zum Ziel hatte, verschärfte sich die Situation bis 1980 durch diese Maßnahme im Gegenteil noch, und der Anteil der nicht fachwissenschaftlich ausgebildeten Mathematiklehrkräfte stieg auf bis zu 80 %.[388] Der Lehrermangel machte es zum einen unmöglich, Lehrpersonen aus der Praxis für Fortbildungen abzustellen, und zum anderen auf fachfremd Unterrichtende zu verzichten; die oben beschriebene Anwerbung von Aushilfslehrerinnen und -lehrern führte nun noch zusätzlich dazu, dass ein Teil derjenigen, die fachfremd unterrichteten, nicht einmal über eine volle Lehramtsausbildung verfügten. Dies also war der Hintergrund, vor dem eine Reform umgesetzt werden sollte, die fachlich einen erheblich höheren Anspruch stellte, als dies für den Rechen- und Raumlehreunterricht der Fall gewesen war.[389] Dazu kommt, dass neben der inhaltlichen auch die methodische Seite einen integralen Aspekt der Reform darstellte. Es folgt daraus nicht nur die Notwendigkeit, die Lehrer*aus*bildung zu reformieren, sondern für den Moment stellte sich noch dringender die Aufgabe, die im Beruf stehenden Lehrerinnen und Lehrer *fort*zubilden. Dieser Notwendigkeit waren sich zwar alle Beteiligten im Prinzip bewusst, Anspruch und Aufwand der organisatorischen Umsetzung angesichts von etwa 100.000 fortzubildenden Volksschullehrkräften hingegen waren von politischer Seite offenbar unterschätzt worden. Auf organisatorischer Ebene scheint ein einheitliches Konzept gefehlt zu haben[390], Einigkeit besteht in den Berichten lediglich darüber, dass die inhaltliche Ausrichtung zunächst auf eine rein fachwissenschaftliche Fortbildung beschränkt blieb, während der methodische Aspekt vernachlässigt wurde. Folge dieser – zumindest in der Anfangszeit – „insgesamt gesehen unzureichend[en]" Lehrerfortbildung waren zahlreiche Missverständnisse bezüglich Sinn und Ziel der Reform sowie „unbegreifliche Übertreibungen", „methodische Mängel" und „sachliche Fehler" in der Umsetzung[391], nicht zuletzt dadurch bedingt, dass sich unabhängig von den offenbaren Fehleinschätzungen von staatlicher Seite auch die grundlegenden Inhalte z. T. als zu schwierig für die fortzubildenden Lehrerin-

387. Picker, 40 Jahre, berichtet aus seinen eigenen Erfahrungen aus dem Jahr 1963, die allgemeine Situation der Lehrerausbildung lässt darauf schließen, dass dies für alle Bundesländer noch mehrere Jahre länger galt.
388. vgl. Picker, 40 Jahre; vgl. Zumpe, a. a. O., S. 33.
389. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 456; vgl. Damerow, a. a. O., S. 92.
390. vgl. Der Spiegel 28 (1974), 13, S. 78 [im Folgenden: Der Spiegel], hier wird davon berichtet, dass die Kurse zu verschiedenen Zeiten, in verschiedenen Organisationsformen, z. T. auch in einem Schneeballsystem stattgefunden haben.
391. Griesel, Bilanz, S. 371; vgl. Der Spiegel, S. 78; vgl. Lauter, a. a. O., S. 18 f.

nen und Lehrer erwiesen.[392] Dass sich die Einstellung eines Teils der Lehrerschaft gegenüber der Reform in der Folge eher verschlechterte, liegt nahe.

Mangelndes Engagement hingegen konnte den Lehrkräften eher nicht vorgeworfen werden. Sicher traf die Reform bei einigen auf Skepsis, insgesamt jedoch war der Wille zur Weiterbildung in der Lehrerschaft vorhanden und waren die Fortbildungskurse gut besucht, so dass häufig sogar zusätzliche nicht-staatliche Initiativen halfen, die Nachfrage aufzufangen.[393]

Die Reaktionen der Öffentlichkeit

Ende 1973 und damit nach dem ersten abgeschlossenen Schuljahr, in dem die Reform in der Praxis implementiert worden war, ergriff eine wohl beispiellose Protestwelle gegen die Neue Mathematik die Bundesrepublik. Dabei war die Reform des Mathematikunterrichts an den weiterführenden Schulen kein Thema, der Unmut richtete sich allein gegen die „Mengenlehre“ in der Grundschule.[394] Bereits zu Reformbeginn gab es ein Halbjahr lang, von September 1972 bis Februar 1973, eine regelmäßige Sendung im Schulfunk des SRF, in der J. Lauter und E. Röhrl Fragen zur Reform beantworteten. Die später in Buchform veröffentlichte Auswahl aus der Diskussion erweckt trotz des Titels „Kummer mit der Neuen Mathematik“ noch den Anschein einer recht sachlichen Auseinandersetzung.[395] Ein Jahr später waren sämtliche Massenmedien auf eine hysterische Debatte aufgesprungen, an der praktisch die gesamte Bevölkerung der Bundesrepublik Anteil nahm.[396] Einen Eindruck von der Situation vermittelt *Der Spiegel* vom 25. März 1974, der der Reform unter der bemerkenswerten Schlagzeile „Macht Mengenlehre krank¿‘ seine Titelseite widmete. Der zugehörige Artikel macht deutlich, wie weit die öffentliche Aufregung ging – eine Fernsehsendung zum Thema wusste nur von gegnerischen Stimmen zu berichten – und wie sehr sich die Öffentlichkeit teilweise von jedweder sachlichen Auseinandersetzung entfernt hatte.[397] Obwohl sich offenbar auch weite Teile

392. Knut Rickmeyer, einer der am *Frankfurter Projekt* sowie an *alef* beteiligten Mitarbeiter berichtete mir in einem persönlichen Gespräch von den Schwierigkeiten der Lehrkräfte, die logischen Zeichen $\wedge$ und $\vee$ zu verstehen.

393. vgl. Lauter, a. a. O., S. 19; vgl. Soika, a. a. O., S. 17; meine eigene Umfrage hat von Seiten der Lehrerschaft deutlich positive Stimmen zur Reform an sich ergeben.

394. vgl. Bauersfeld in Kline, Hänschen, S. 8; vgl. Neander, Joachim: Mathematik und Ideologie. Zur politischen Ökonomie des Mathematikunterrichts, Starnberg: Raith, 1974, S. 77; vgl. Der Spiegel, S. 63.

395. vgl. Lauter, Josef & Röhrl, Emanuel: Kummer mit der Neuen Mathematik. Eltern und Lehrer fragen, Fachleute helfen, Freiburg: Herder, 1974; Veröffentlichungsjahr der Schrift ist 1974, auf dem Höhepunkt der Proteste ist der Titel vermutlich als Reaktion auf diese zu verstehen und versprach mutmaßlich auch besseren Absatz.

396. vgl. Der Spiegel, S. 62 und 65; vgl. Lauter, a. a. O., S. 13; vgl. Picker, Reform, S. 28 f.

397. vgl. Der Spiegel, S. 62; zitiert werden ein „Zwiebelbauer“, der die Reform als „Blödsinn“ bezeichnet sowie ein Autor eines Buches über Hellseherei, der von „intellektueller Notzucht“ spricht;

der nicht direkt betroffenen Bevölkerung eine Meinung zur „Mengenlehre“ gebildet hatten, waren es doch vor allem die Eltern grundschulpflichtiger Kinder, die protestierten. Neben den Anschaffungskosten für Material und der häufig geäußerten Sorge, eine Kürzung der Arithmetik zugunsten der neuen Inhalte würde unweigerlich zu schwächeren Rechenleistungen führen[398], war ein Argument – vermutlich ausgelöst durch eigenes fehlendes Verständnis der neuen mathematischen Inhalte –, dass Eltern ihren Kindern nicht mehr bei den Hausaufgaben helfen konnten.[399] Ob dies überhaupt in großem Umfang nötig war, bleibt indessen unklar. In dem im *Spiegel* wiedergegebenen Zitat eines „Mengenlehre-Gegner[s]“, „die Kinder [sehen] früh, zu früh, ihre Eltern hilflos und unwissend. Damit schwindet die Achtung, die Kinder können nicht mehr ihre Eltern fragen, deren Vorbild verblaßt“[400] kommen jedoch tieferliegende gesellschaftliche Überzeugungen zum Ausdruck, die sich gegen die emanzipatorischen Ziele der Reform richten und in der öffentlichkeitswirksamen Verteufelung der „Mengenlehre“ ein eher zufälliges Ventil finden. Einer gewissen Zufälligkeit unterlag, je nach Einfluss, auch die Einstellung der Eltern, die sicher nicht einheitlich war.[401] Wie hoch in jedem Fall das Informationsbedürfnis über das, was im Mathematikunterricht geschah, in der Elternschaft war, belegen der Erfolg speziell für Eltern geschriebener Bücher über die Neue Mathematik[402], die Tatsache, dass entsprechende Volkshochschulkurse Anklang fanden und auch die 1974 eigens zum Thema vom niedersächsischen Kultusministerium herausgege-

---

die Aus- und Wortwahl zeigt hier freilich die ironische Distanz der Autoren zu solchen Aussagen und gibt deren Urheber der Lächerlichkeit preis; zur Qualität der Diskussion auch Zumpe, a. a. O., S. 32: „Auf dieser Behauptung- und Gegenbehauptungsebene verblieb die Diskussion [. . .] weitgehend.“

398. vgl. z. B. Der Spiegel, S. 65.

399. vgl. Lauter, a. a. O., S. 24 f.; vgl. Picker, 40 Jahre.

400. Der Spiegel, S. 63; vgl. im Kontrast dazu Sager, Christin: Das aufgeklärte Kind. Zur Geschichte der bundesrepublikanischen Sexualaufklärung (1950-2010), Bielefeld: Transcript-Verl., 2015, S. 130: „In der pädagogischen Praxis wurde versucht, Hierarchien und Herrschaftsstrukturen zwischen den Generationen, aber auch den Geschlechtern, aufzuheben und die Beziehungen stattdessen zu egalisieren.“

401. vgl. Lauter, a. a. O., S. 24 f.; vgl. Müller & Wittmann, 1977, S. 143.

402. vgl. Fuchs, Walter R.: Eltern entdecken die neue Mathematik. Mengen und Zahlen, München [u. a.]: Droemer Knaur, 1974. Hier wird die unbedingte Notwendigkeit der Hilfe bzw. der Mitarbeit durch die Eltern betont, in einem Zitat von W. Loch allerdings vor allem für die höhere Schule, S. 10; im Übrigen vermittelt das Buch gleich zu Beginn, es solle zukünftig im Mathematikunterricht nicht mehr gerechnet werden: „Rechenfertigkeiten sind weithin überflüssig geworden“, S. 1. Die Bücher von W. Fuchs waren wohl die bekanntesten ihrer Art. Vgl. für ein weiteres Beispiel Blöchliger, Rudolf: Revolution im Rechenbuch. Die Mathematik verliert ihre Schrecken, Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, 1970. Der Band basiert auf einer Fernsehsendung des WDR, die Darstellung ist stark am Dienes-Konzept orientiert; bemerkenswert ist, dass es zu Anfang heißt, es würde nicht genügen, den traditionellen Unterricht durch moderne Inhalte zu ergänzen, nötig sei stattdessen „ein völliges Neuüberdenken des gesamten Mathematikunterrichts aller Stufen“, S. 7, dass dabei jedoch vom „Rechen“buch die Rede ist und das Literaturverzeichnis diverse Werke zum „Rechen“unterricht enthält, wirkt dagegen inkonsequent.

benen *Hilfen zur Durchführung von Elternabenden*[403]. Während Erstere sich häufig – wie die frühen Lehrerfortbildungen – auf die Präsentation fachlicher Inhalte beschränken, legen die *Hilfen* des Ministeriums besonderen Wert auf die methodische Seite, indem sie vorsehen, dass die Eltern auf dem Elternabend analog zu ihren Kindern im Unterricht die neuen Begriffe anhand der konkreten Materialien erarbeiten.[404] Darüber hinaus lässt das Dokument Rückschlüsse darauf zu, welches die Fehlannahmen waren, die die Stimmung innerhalb der Elternschaft bestimmten. Als erstes wird hervorgehoben, dass es keine reine „Mengenlehre" im Mathematikunterricht der Grundschule im Sinne eines neuen Schulfachs gibt; außerdem wird besonders betont, dass das Rechnen nach wie vor das Hauptziel des Unterrichts darstellt, die Rechenfertigkeit nicht durch neue Inhalte vernachlässigt wird und die Inhalte nicht rein formal präsentiert werden. Bereits in der Einführung wird darauf hingewiesen, dass Moderne Mathematik häufig mit Mengenlehre gleichgesetzt wird und daher, um diesem Vorurteil entgegenzuwirken, der Elternabend mit einem anderen Thema – vorzugsweise Relationen oder Topologie – begonnen werden soll. Dass die Hilfen selbst allerdings wiederum mit den Mengen beginnen, mag in dieser Hinsicht kontraproduktiv gewesen sein.

Die weit verbreitete Unsicherheit unter den Eltern rührt unterdessen nicht nur von den eigenen fachlichen Defiziten her. Der heute so absurd anmutende *Spiegel*-Titel war weder reine Ironie noch bewusste Provokation, sondern gab wieder, was einige Ärzte tatsächlich öffentlich kolportierten, dass nämlich die mit den neuen Inhalten einhergehende Überforderung – für die es ihrerseits keine Belege gibt – Kinder krank mache.[405] Wie ernst diese Aussagen genommen wurden, wird deutlich angesichts der Tatsache, dass die Frage vermeintlicher Gesundheitsschädigung es bis in die Parlamente schaffte und bei einer Anhörung in Baden-Württemberg 1974 ein eigens eingeladener Kinderpsychologe beschwichtigen musste.[406] Die Elternzeitschrift *Schule*, die bereits Ende 1973 mit der Forderung nach Abschaffung

403. Der Niedersächsische Kultusminister: Hilfen zur Durchführung von Elternabenden zu Inhalten des Modernen Mathematikunterrichts in der Grundschule, Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, 1974.

404. Es wirkt ein bisschen kurios, dass die Eltern nicht nur die Arbeit der Kinder nachvollziehen sollen, sondern zudem jeweils Lernziele für die Eltern angegeben sind. Die Vorgaben für den Ablauf des Elternabends sind auffallend eng, und die Formulierungen der Texte legen z. T. nahe, dass diese abgelesen werden sollen. Man war von Ministeriumsseite offenbar sehr darauf bedacht, ein gewisses Maß an Kontrolle wiederzuerlangen und Irrtümer aufzuklären; gleichzeitig spricht aus dem Dokument möglicherweise ein geringes Vertrauen in die Lehrerschaft.

405. vgl. Der Spiegel, S. 65; vgl. Lauter, a. a. O., S. 23 f.; vgl. Neander, a. a. O., S. 77. Diese Argumentation war übrigens mitnichten neu, bereits 1959 kam die GEW angesichts einer entsprechenden Studie zu dem Ergebnis, Schule an sich würde Kinder krank machen, vgl. Karaschewski, Horst: Irrwege der modernen Rechendidaktik. Eine kritische Analyse, Bonn [u. a.]: Dürr, 1969, S. III [im Folgenden: Karaschewski, Irrwege].

406. vgl. Neander, a. a. O., S. 77; vgl. Lauter, a. a. O., S. 24; vgl. Picker, Reform, S. 26; vgl. Der Spiegel, S. 79.

der „Mengenlehre“ am Beginn der Proteste beteiligt war, berief im Herbst 1974 einen „Mengenlehrekongreß“ ein, an dem mit Dienes und Morris Kline ein überzeugter Befürworter und ein entschiedener Gegner der Neuen Mathematik teilnahmen. Da Letzterer jedoch nur am Telefon zugeschaltet war, kam es auch hier nicht zu einem ernsthaften Austausch von Argumenten. Als wirkungsvoller erwies sich dagegen erneut die Anwesenheit eines Arztes, der eine Gesundheitsschädigung durch fachliche Inhalte in Abrede stellte und andere mögliche Faktoren aufführte, die diverse Stresssymptome zur Folge haben könnten.[407] Etwa zeitgleich belegten Untersuchungen des Berliner wie des Bremer Senats erste positive Wirkungen der Modernen Mathematik, die den Reformzielen entsprachen: höhere Motivation, leichte Leistungssteigerung sowie die Verringerung sozialer Unterschiede.[408] Ende 1974 beruhigte sich die Lage. Es scheint, dass sich die verschiedenen gesellschaftlichen Gruppen in der Hitze der Diskussion regelrecht verausgabt hatten und nun einer rationaleren Auseinandersetzung mit den verschiedenen Argumenten fähig waren.[409] Die Folgen der negativen Berichterstattung waren dennoch erheblich. Bereits der *Spiegel* mutmaßte mit Bezug auf die Schlagzeilen, „daß die Mengenlehre an Deutschlands Schulen daran stirbt.“[410] Dass die Medien anfänglich sogar großen Optimismus verbreitet hatten[411], ließ den Stimmungsumschwung noch schärfer ausfallen. Das „schlechte[] Image“[412], das die Mengenlehre davongetragen hatte, blieb ein Faktor, der die Reform weiterhin belastete. Es hat bis heute Bestand.

Es ist klar, dass die Geschehnisse, die mit der Reform des Mathematikunterrichts zusammenhängen, eingebunden waren in gesamtgesellschaftliche und -historische Prozesse. Es ist dies nicht der Ort, um diese ausführlich darzustellen. Für eine grobe Einordnung muss jedoch daran erinnert werden, dass die Reform in eine Zeit extremer Unruhe und eines tiefgreifenden gesellschaftlichen Umbruchs fiel – besonders assoziiert mit dem Jahr 1968[413], dem Jahr der KMK-Empfehlungen –, in der nach wie vor vorhandener restaurativer Konservatismus auf der einen Seite

407. vgl. Picker, Reform, S. 27-29; vgl. Zumpe, a. a. O., S. 32; vgl. Kleinschmidt, a. a. O.; Matthiesen, Hayo: Kleine Inseln am Horizont, in: Die Zeit 29 (1974), 37; zum Beitrag von Kline vgl. ders.: „Mengenlehre – das ist Zeitverschwendung“, in: Der Spiegel 28 (1974), 36, S. 32-34. Verfügbar unter: www.spiegel.de/spiegel/print/d-41667426.html.
408. vgl. Matthiesen, a. a. O.
409. vgl. Barsig & Berkmüller in Lauter, a. a. O., S. 11.
410. Der Spiegel, S. 65.
411. vgl. ebenda.
412. Griesel, Bilanz, S. 372.
413. vgl. etwa Sager, a. a. O., S. 125 f.: „Mit der Chiffre >1968< werden in der BRD verschiedenste Ideen, Momente und Stichworte verbunden, wie etwa die Studierendenbewegung, Frauenbewegung, Kommunen, >sexuelle Revolution<, Kinderläden, Außerparlamentarische Opposition, anti-autoritäre Erziehung, >>Aufarbeitung der Vergangenheit<< [...] >1968< ging mit einer Westernisierung einher und kann in diesem Sinne auch als Katalysator auf dem Weg in eine moderne Gesellschaft verstanden werden.“

mit teils revolutionären Bestrebungen auf der anderen Seite zusammentraf und nach und nach immer mehr vermeintliche Sicherheiten ins Wanken gerieten. Eine gewisse Skepsis gegenüber allem Neuen, die sich in Teilen der bundesrepublikanischen Bevölkerung zu kompromissloser pauschaler Ablehnung von allem, was auch nur im Verdacht stand, bisher für sicher gehaltene Gegebenheiten und Werte zu verändern, auswuchs, ist sicher eine Ursache des Widerstands, auf den die Neue Mathematik traf. Und die Mathematik war weder das einzige Fach, das von der Bildungsreform betroffen war, noch das einzige, dessen Reform öffentliche Debatten zur Folge hatte. Andere Beispiele sind hier die Frage der Sexualerziehung, die die KMK ebenfalls 1968 zu einer Aufgabe der Schule erklärt hatte, die aber nach Protesten der Elternschaft Ende der 1970er-Jahre in der Praxis nicht mehr erfüllt wurde[414], oder die kontroverse Diskussion um die beste Leselernmethode im Deutschunterricht. Dass die in diesem Zusammenhang umstrittene Ganzwortmethode auch immer wieder in einem Zug mit der Mengenlehre genannt wurde und die beiden Dinge vermischt wurden[415], lässt sich z. B. durch ebensolche Pauschalisierung erklären.

Es verdient hier noch unbedingte Erwähnung, dass die Erwachsenen die Diskussion um die „Mengenlehre“ unter sich ausmachten, während Grundschulkinder – und damit die Hauptabnehmer der Reform – nie systematisch zum Mathematikunterricht befragt wurden.[416] Es finden sich jedoch diverse Quellen, die darauf hinweisen, dass die Kinder mitnichten überfordert waren, die neuen Inhalte viel schneller beherrschten als die Erwachsenen – mithin wohl auch häufig keiner Hausaufgabenhilfe bedurften – und generell Freude an ihrem Mathematikunterricht empfanden. Noch 1973 konstatierten 73 % der betroffenen Eltern in einer Umfrage in Baden-Württemberg, der Unterricht mache ihren Kindern Spaß, während 18 % angaben, ihre Kinder empfänden Widerwillen.[417] Neben Eltern wussten, z. B. in Leserbriefen, auch immer wieder Lehrpersonen von einer positiven Einstellung ihrer Schülerinnen und Schüler gegenüber der Mathematik zu berichten; damalige Schülerinnen und Schüler selbst äußern sich heute vorwiegend positiv oder neutral. Vor diesem Hintergrund ist es denkbar, dass die erhalten gebliebene zeitgenössische Kinderstimme der damals 7-jährigen Zweitklässlerin Gudrun aus Urach auch für ihre Klassenkameraden sprach, als sie sich genötigt fühlte, wie folgt persönlich auf die Provokation des *Spiegel*-Titels zu reagieren: „Lieber Spiegel Was auf deiner Zeitschrift steht stimmt überhaubt nicht. bei Mengenlere werde ich froh.“[418]

414. vgl. Sager, a. a. O., S. 132 f. und 135 f.
415. vgl. Der Spiegel, S. 68 und 71; vgl. Picker, Reform, S. 26.
416. Lauter, a. a. O., S. 26.
417. Lauter, a. a. O., S. 24; diese Daten sagen allerdings ohne einen Vergleich mit entsprechenden Daten aus dem Rechenunterricht oder auch irgendeiner anderen Zeit wenig aus.
418. Brief abgedruckt in Der Spiegel 28 (1974), 15, S. 10; vgl. die weiteren Leserbriefe ebenda, S. 10 und 12; persönliche Gespräche sowie meine Online-Befragung haben stets vergleichbare

Reaktionen aus der Politik und Zurücknahme

Dass die Politik nach der anfänglichen Reformeuphorie die Neue Mathematik, zumindest für die Grundschule, partei- und länderübergreifend zunehmend fast geschlossen ablehnte, überrascht nicht angesichts der Stimmung im Land. Und die Politiker reagierten, nicht mit einer rationalen Diskussion auf sachlicher Ebene, sondern mit einer zügigen Revision der gerade erst begonnenen Reform. Federführend war hierbei Schleswig-Holstein, wo der Kultusminister Braun (CDU) bereits Anfang 1974 eine pauschale Begrenzung des Mengenlehreanteils auf nicht mehr als 15 % verfügte.[419] Eine so geartete „Revision“ – um die es sich im Wortsinne nicht gehandelt hat, bedenkt man, dass eben jener Minister darauf verzichtet hatte, sich einmal den realen Mathematikunterricht anzusehen[420] – ignoriert nicht nur das curriculare Gesamtkonzept, sondern zieht nicht einmal in Erwägung, dass ein solches als Basis der „Mengenlehre“ existieren könnte. Die Reformkonzeption, die Neuerungen auf vielen verschiedenen Ebenen integriert hatte, erfährt hier eine doppelte Verkürzung, zunächst auf die rein inhaltliche Seite und dann auf dieser noch einmal auf die reine Ergänzung der Unterrichtsthemen um die Mengenlehre. Der Trend zu einer Beschränkung der neuen mathematischen Inhalte zugunsten der Arithmetik setzte sich in der Folge fort, in der Revision von Schulbüchern, Lehrplänen und schließlich der KMK-Empfehlungen von 1976.

Die Bewertung des Stands der Reform nach 1976 ist uneinheitlich. Keitel (1996)[421] spricht von deutlicher Abkehr von der Modernisierung und Rückkehr zum traditionellen Unterricht. Ähnlich äußern sich wesentlich früher Müller und Wittmann (1977) mit der Feststellung, dass die „alte Dominanz der Arithmetik wiederhergestellt“ sei.[422] Nach Radatz et. al. (1981) war die Reform in wesentlichen Teilen „kaum noch wiederzuerkennen“[423]; Griesel (1977) spricht von einer „Zurücknahme der eigentlichen Mengenlehre“ in dem Sinne, dass die Dominanz der Mengensymbolik zurückgefahren wurde[424]. Gleichzeitig bezeichnet er jedoch die Reform als „keineswegs abgeschlossen“[425], ebenso wie z. B. Lauter und Zumpe, die davon ausgehen, dass eine Rücknahme der Reform keine ernsthafte Option darstellt;

Bewertungen ergeben.

419. vgl. Der Spiegel, S. 62 f.; vgl. Lauter, a. a. O., S. 27; vgl. allgemeiner Keitel, Entwicklungen, S. 459 und Zumpe, a. a. O., S. 35.
420. Der Spiegel, S. 65.
421. Keitel, Réformes, S. 309.
422. Müller & Wittmann, 1977, S. 148.
423. Radatz, Hendrik, Schipper, Wilhelm, Oltmanns, Katrin & Wille, Ulrike: Zum Mathematikunterricht an Grundschulen. Ergebnisse einer Lehrerbefragung, Göttingen: Univ. Göttingen, 1981, S. 1.
424. Griesel, Bilanz, S. 375.
425. Griesel, Bilanz, S. 380.

die Lehrpläne sahen nach wie vor einen pränumerischen Teil und die „mengentheoretische Grundlegung der Zahlen“[426] vor, außerdem seien „[d]ie ursprünglichen Begründungen und Zielsetzungen [...] nicht grundsätzlich in Frage gestellt worden.“[427] In jedem Fall war in der zweiten Hälfte der Siebziger eine gewisse Ruhe eingekehrt; man hatte sich mit der „Mengenlehre“ bzw. dem, was davon übrig geblieben war, arrangiert. In der Öffentlichkeit spielte das Thema keine Rolle mehr[428], Eltern hatten sich beruhigt, Lehrkräfte sich inzwischen mit den Ideen identifiziert[429], Didaktiker das Interesse verloren[430]. Widrige Anfangsbedingungen hatten sich gebessert, etwa die großen Schulklassen durch den starken Geburtenrückgang und das Problem der Lehrerbildung aufgrund der Anpassung der Ausbildung, die mit der Zeit Früchte trug[431], ferner durch die Überarbeitung von Schulbüchern auch auf der Basis von Unterrichtserfahrungen. Alles sprach für eine Konsolidierung der Situation[432], und bereits 1975 hatten die Mitglieder der GDM auf der Bundestagung geäußert, dass die Reform „an vielen Stellen erfreulich verläuft“.[433] Sicher war der Unterricht nicht frei von Schwierigkeiten – wann wäre er das jemals gewesen? –, dennoch wies zu diesem Zeitpunkt nichts mehr darauf hin, dass der Mathematikunterricht der Grundschule mit außergewöhnlichen oder besonders gravierenden Problemen zu kämpfen gehabt hätte.[434]

426. Zumpe, a. a. O., S. 87; vgl. Lauter, a. a. O., S. 23 und 26; vgl. Barsig & Berkmüller in Lauter, a. a. O., S. 11; vgl. darüber hinaus Neander, a. a. O., S. 78.

427. Zumpe, a. a. O., S. 2.

428. vgl. Randow, Thomas von: Ende für die Klötzchen, in: Die Zeit 39 (1984), 49.

429. Lauter, a. a. O., S. 27.

430. vgl. Radatz et. al., a. a. O., S. 1, wo als ein wesentlicher internationaler Einfluss die *back to basics*-Bewegung genannt wird, ebenso von H. Besuden in meiner Umfrage; Picker berichtet in Reform, S. 36, und 40 Jahre von einer Ablösung durch neue Trends, hier genannt werden die „angewandte Mathematik“ (nach H. Winter) und das operative Prinzip in seiner Reformulierung von E. C. Wittmann.

431. nach Radatz et. al., a. a. O., S. 7, hatten 1981 in Niedersachsen noch über 20 % der Mathematik unterrichtenden Lehrkräfte keine fachwissenschaftlichen Kenntnisse; nach Picker, 40 Jahre, betrug dieser Anteil bei Absolventen der Universität Köln 1980 gar 80 %, wurde nach einer neuerlichen Reform der Lehramtsausbildung aber geringer.

432. Lauter, a. a. O., S. 13 und Barsig & Berkmüller in Lauter, a. a. O., S. 11; vgl. ebenfalls Der Spiegel, S. 79.

433. Röhrl, Emanuel: Gegenwärtiger Stand der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Tendenzen und Initiativen, in: BzMU 1975, S. 252.

434. Die von Radatz et. al., a. a. O., 1981 durchgeführte Lehrerbefragung zu den verwendeten Schulbüchern liefert hier in mehrerlei Hinsicht eine aufschlussreiche Quelle. Als größter Mangel der Lehrwerke wird relativ übereinstimmend das zu geringe Angebot an Übungsaufgaben genannt (S. 12). Ansonsten ergibt sich naturgemäß kein einheitliches Bild. Eine Überforderung der SuS wird nur sehr vereinzelt als Problem gesehen (ebenda); als schwierigste Inhalte werden allgemein das symbolische Rechnen mit 55 % und die Subtraktion mit 38 % und somit traditionelle Inhalte genannt, demgegenüber werden die Mengen nur von 15 % als schwierig eingeschätzt (S. 17). Der größte Kritikpunkt im Hinblick auf die Arithmetik ist die Nichtberücksichtigung des Zählens (S. 17-19), der Zeitpunkt der Zahleinführung wird dagegen von über der Hälfte als genau richtig gewertet (S. 16). Zwar sind 37 % dafür, die Mengenlehre einzuschränken, allerdings sagen 30 % dies auch über die Geometrie und immerhin knapp 14 % über das Sachrechnen (S. 19). Insge-

Im Juli 1982 nahm Gerhard Mayer-Vorfelder – seinerzeit Kultusminister Baden-Württembergs – die Mengenlehre per Dekret zurück. Dies geschah im Rahmen eines Erlasses zum „Erwerb gesicherter Kenntnisse und Einüben von Grundfertigkeiten im Grundschulunterricht“[435], der alle Fächer der Grundschule betraf. Für das Fach Mathematik heißt es hier: „Es ist Aufgabe des Grundschulunterrichts, eine möglichst sichere Beherrschung der Grundrechenarten zu gewährleisten. [...] Um Verfrühungen und Überforderungen zu vermeiden, wird auf mengentheoretische Elemente der Mathematik in der Grundschule verzichtet.“ In den Erläuterungen wird dies offiziell begründet mit den „vielfach vorgebrachten Klagen von Eltern, Lehrern, Meistern bis hin zu Professoren über mangelnde Kenntnisse der Schüler i[m] Rechnen“. Freilich fehlen Belege für die angeblichen Überforderungen; mangelnde Rechenkenntnisse waren hingegen auch schon als ein Argument für die Reformbedürftigkeit des alten Rechenunterrichts hervorgebracht worden.[436] Andere Bundesländer folgten dem Beispiel. Es handelte sich hier offensichtlich nicht um eine auf der Basis sachlicher, gar wissenschaftlicher Auseinandersetzung getroffene Entscheidung, sondern eher um die auf Außenwirkung und Wählergunst zielende Abschaffung einer nach wie vor unpopulären Maßnahme. Wie schlecht das Image der Reform bis heute tatsächlich ist, zeigt exemplarisch der Artikel von Behr und Horeni, die 2004 in der FAZ zahlreiche Verfehlungen Mayer-Vorfelders aufzählen und ihm dagegen fast als einziges zugutehalten, dass er „die unselige Mengenlehre in der Grundschule als erster Kultusminister abgeschafft hat“.[437]

samt wird eher eine Leistungsverschlechterung im Rechnen festgestellt, diese wird aber weniger den modernen Inhalten als dem Mangel an Übungsaufgaben sowie generellen gesellschaftlichen Veränderungen zugeschrieben; das Verständnis des Zahlbegriffs wird dagegen besser bewertet, was den Zielen der Reform entspricht (S. 28 f.). Besonders interessant – wenn auch nicht wirklich überraschend – ist es, dass die Wertungen durchweg von der Ausbildung wie vom Alter der Lehrperson abhängen: je besser die Ausbildung und je jünger die Lehrkraft, desto besser wird das verwendete Schulbuch in der Regel bewertet (S. 11 f.).

435. Der Erlass ist abgedruckt in: Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg: Schulintern. Informationen für Lehrer in Baden-Württemberg, 1982, S. 2, und weiter erläutert auf S. 1 und 3.

436. vgl. Der Spiegel, S. 75, und Karaschewski, Irrwege, S. XII, zu Ergebnissen einer entsprechenden Untersuchung der IHK von 1966; vgl. Fricke, Arnold: Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget, in: Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik, Stuttgart: Klett, 1970, S. 73, [im Folgenden: Fricke, Operatives Denken bzw. Fricke & Besuden, Mathematik]; vgl. auch Müller & Wittmann, 1984, S. 151, die u. a. mit dieser Begründung deutlich vor einer „Rückorientierung zum alten Rechenunterricht“, als die der Erlass verstanden werden kann, warnen.

437. Behr, Alfred & Horeni, Michael: Nerven wie Bandnudeln, in: FAZ, 08.07.2004. Verfügbar unter: www.faz.net/aktuell/politik/gerhard-mayer-vorfelder-nerven-wie-bandnudeln-1175328.html?printPagedArticle=true#pageIndex_2.

II.2 Die curriculare Ebene

II.2.a Die Empfehlungen und Richtlinien der KMK vom 3. Oktober 1968

Anschließend an eine gemeinsame Pressemitteilung aus dem März 1964, in der die Kultusminister die Absicht formulieren, „die Modernisierung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts entsprechend den Vorschlägen der OECD [zu] fördern“[438], war ab 1965, verstärkt ab 1967, ein Ausschuss der KMK mit der Erstellung von Richtlinien für die Modernisierung des Mathematikunterrichts befasst. Beigetragen haben zwar Lehrkräfte aller Bundesländer, dem Anschein nach aber nur solche für die Gymnasien. Didaktiker waren keine beteiligt. Gegenüber dem Nürnberger Rahmenplan, an den die Richtlinien inhaltlich anknüpften, war vor allem die Ausweitung der offiziellen Reform auf die Grundschule neu, eine Entscheidung, die offenbar relativ spontan getroffen wurde, und die – da es sich um „[kein] sorgfältig geplantes Reformvorhaben“ handelte – die Grundschuldidaktik umso überraschender traf und ihr die konkrete Umsetzung überließ.[439] Die am 3.10.1968 verabschiedeten „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen“ gelten als Wendepunkt in der Geschichte des bundesdeutschen Mathematikunterrichts, indem sie „einschneidende Veränderungen“ nach sich zogen[440] und trotz der hier bereits angedeuteten Schwächen großen Einfluss auf die im Folgenden neu geschriebenen Lehrpläne ausübten, ebenso wie auf das in der schulischen Praxis verwendete Material.[441] Letzteres war bedingt dadurch, dass die *Empfehlungen und Richtlinien* mit ihrer Betonung der Mengenlehre letztlich aus den verschiedenen vorhandenen Reformkonzepten eines auswählten, verbindlich machten und damit für die Bundesrepublik auch „bestimmte methodische Prinzipien festschrieben“, nämlich diejenigen, die Dienes im Rahmen des *basic-set approach* ausgiebig propagiert hatte.[442]

438. Pressemitteilung der Ständigen Konferenz der Kultusminister in Picht, a. a. O., S. 183.
439. vgl. Keitel, Entwicklungen, S. 454 und 470, Damerow, a. a. O., S. 144, 221 und 235, Zumpe, a. a. O., S. 22; Zitat: Damerow, S. 235.
440. Müller & Wittmann, 1977, S. 143; Keitel spricht in Entwicklungen, S. 454, ebenfalls von einem „einschneidenden [. . .] Schritt“.
441. vgl. Damerow, a. a. O., S. 235.
442. dies zumindest die Meinung von Zumpe, a. a. O., S. 22 f.; vgl. dazu auch Keitel & Damerow, a. a. O., S. 12.

Der Inhalt des Dokuments

Die Notwendigkeit der Reform wird vor allem wirtschaftlich und gesellschaftlich begründet. Zur Aufrechterhaltung des Wirtschaftswachstums wird naturwissenschaftlich-technisch ausgebildetes Personal benötigt, auch für die Lehre, daher muss die „Kluft“ zwischen Schulstoff und universitären Inhalten geschlossen werden, indem die Schul- an die Hochschulmathematik angenähert wird. Über den wirtschaftlichen Bereich hinaus hat der „Fortschritt der Mathematik“ mathematisch-naturwissenschaftliche Denkweisen hervorgebracht, die generell im Alltag „für das Begreifen der Bedingungen unseres modernen Lebens“ relevant sind. Ziel des Unterrichts ist der Erwerb einer „Grundbildung“, die darauf ausgerichtet ist, Urteilsfähigkeit und Problemlösekompetenz zu erwerben, um sich „in der modernen, rationalisierten Welt“ zurechtzufinden, der Unterricht soll „auf ein mathematisches Erfassen unserer Wirklichkeit gerichtet“ sein sowie auf mathematisches Denken im Allgemeinen.[443] Als weiteres Ziel wird „größere[] Durchlässigkeit“[444], zwar genannt, aber nicht weiter begründet. Es muss also davon ausgegangen werden, dass die Durchlässigkeit in den Dienst wirtschaftlicher Ziele – als Voraussetzung für mehr studiertes Personal – gestellt wird, ohne dass weitergehende soziale Aspekte berücksichtigt werden.

Die Forderung nach der Vermittlung mathematischer Denkweisen und Strukturen determiniert inhaltliche Neuerungen, so soll der Unterricht an „[t]ragende[n] Grundbegriffe[n] wie Menge, Abbildung und Struktur (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum)“ orientiert sein. Diese Leitbegriffe durchziehen das Curriculum, und ihre Betonung erlaubt eine Transparenz, die es zudem ermöglicht, durch „eine Zusammenschau der verschiedenen Teilgebiete“ die Mathematik als eine Einheit zu vermitteln.[445] Eine Ablösung bisheriger Inhalte ist dabei nicht intendiert, im Gegenteil sollen vielmehr die neuen Strukturbegriffe auf bisherige Inhalte angewandt, sollen die modernen „Betrachtungs- und Denkformen [. . .] möglichst auch an traditionellen Stoffgebieten“ geübt werden.[446] Konkretisiert werden die inhaltlichen Vorgaben in den angehängten „Richtlinien und Rahmenpläne[n] für den Mathematikunterricht“ für die Klassen 1-13. Der Stoff für die Klassen 1-6 ist in 7 Themenkreise unterteilt: 1. „Mengen und ihre Verknüpfungen“, 2. „Menge der natürlichen Zahlen und ihre Verknüpfungen“, 3. „Größen“, 4. „Geometrische Grundbegriffe“, 5. „Ziffern und Stellenwertsysteme“, 6. „Teilbarkeit und Teilermengen“, 7. „Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen und ihre Verknüpfungen“. Themenkreis 1 ist dabei sowohl die Grundlage, auf der andere Themen aufbauen, als auch „allen

443. KMK 1968, S. 1.
444. KMK 1968, S. 2, vgl. S. 3.
445. KMK 1968, S. 2.
446. KMK 1968, S. 1, vgl. S. 2.

anderen übergeordnet“, insofern, als die zugehörigen Begrifflichkeiten die Sprache zur Beschreibung weiterer Inhalte bereitstellen. Im Sinne des oben bereits angedeuteten Spiralcurriculums sollen die damit zusammenhängenden fundamentalen Denkweisen „immer wieder“, also an verschiedenen Stellen und auf verschiedenen Niveaus expliziert werden.[447] Die im Einzelnen unter dem Themenkreis genannten Begriffe sind Menge, Element, Grund- und Teilmenge sowie die Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Ergänzung von Mengen; zudem sollen die Verknüpfungseigenschaften der Operationen thematisiert und durch den Gebrauch von Platzhaltern der Variablenbegriff angebahnt werden. Die ikonische und die symbolische Darstellungsform werden als weitere Inhalte aufgeführt. Die weiter oben im Dokument genannten fundamentalen Begriffe Abbildung und Struktur finden hier hingegen keine Erwähnung.

Die Richtlinien weisen zwar darauf hin, den Mengenbegriff „im Zusammenhang mit“ den anderen Inhalten, und damit nicht isoliert im Vorfeld zu erarbeiten[448], da jedoch gleichzeitig wiederholt sein Grundlagencharakter betont wird und der Themenkreis den anderen im Plan vorangestellt ist, wird eine Behandlung zu Anfang implizit nahegelegt.[449]

Bezüge zum Mengenbegriff finden sich weiterhin in den Themenkreisen 2, 6 und 7, in Ersterem einmal in der Betonung der Mengeneigenschaft der natürlichen Zahlen und ein weiteres Mal in der Schwerpunktlegung auf den kardinalen Zahlaspekt. Der Ordnungsaspekt wird in Form der Größer- und der Kleiner-Relation thematisiert. Gemeinsam mit der Gleichheit, die in der Forderung nach korrekter Nutzung des Gleichheitszeichens impliziert ist, sind dies die einzigen Spezialfälle von Relationen, die hier Erwähnung finden, das Wort selbst fällt erst im Zusammenhang mit den Inhalten für die höheren Jahrgangsstufen. Die Behandlung der Teilbarkeit, der immerhin ein eigener Themenkreis gewidmet ist, ist nur als „Zahleigenschaft“ vorgesehen[450], nicht aus relationaler Perspektive. Außer dem Themenkreis zur Geometrie sind auch die übrigen Kreise der Arithmetik zuzurechnen. Themenkreis 7 enthält im Wesentlichen die Bruchrechnung – wobei auch hier von der „Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen“ die Rede ist und die natürlichen Zahlen als Teilmenge der rationalen Zahlen verstanden werden sollen. Themenkreis 3 umfasst das Sachrechnen, Ansätze stärker struktureller Betrachtung arithmetischer Zusammenhänge finden sich in den Themenkreisen 5 und 6. Zur Vertiefung des Stellenwertprinzips ist das zusätzliche Rechnen im Binärsystem

447. KMK 1968, S. 4.
448. vgl. KMK 1968, S. 4: Die Reihenfolge der Themenkreise soll nicht die Reihenfolge der Themen im Unterricht vorgeben.
449. so auch Lauter, a. a. O., S. 17.
450. KMK 1968, S. 6.

vorgesehen, im Zusammenhang mit der Teilbarkeit finden zahlentheoretische Begriffe wie die Primfaktorzerlegung, der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache Erwähnung. Die Geometrie umfasst die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie (Linien, Flächen, Körper) sowie Kongruenzabbildungen. Hier findet sich nun der Begriff der Abbildung, er bleibt aber auf den Themenkreis beschränkt und durchzieht nicht als allgemeine Idee das gesamte Curriculum. Dies setzt sich in den höheren Klassenstufen fort. Die algebraischen Strukturen bilden in den Klassen 7/8 und 11-13 eigene Themenkreise, in 9/10 nicht, darüber hinaus werden sie noch im Zusammenhang mit geometrischen Abbildungen aufgeführt.

Methodische Hinweise finden sich in den Richtlinien nur marginal. Der Hinweis, dass „Didaktik und Methodik dieses Faches neu orientiert werden“ sollen, bleibt pauschal, im Zusammenhang mit der Frage der Lehrerbildung heißt es entsprechend, „daß die Richtlinien [. . .] methodisch und didaktisch offen sind.“[451] Für die Mengenbegriffe gilt, dass sie „in kindgemäßer Weise experimentell erarbeitet“ und für die Abbildungen, dass sie „an konkreten Gegenständen“ gewonnen werden sollen.[452] Zudem wird davor gewarnt, „allzu früh in einen mathematischen Formalismus zu verfallen“[453]. Langfristiges Ziel ist es zwar, „an die axiomatisierende Methode heran[zu]führen“[454], für die Primarstufe scheint das aber noch nicht vorgesehen, und so findet auch die Logik hier noch keine Erwähnung.

Insgesamt lässt sich also über die Vorgaben für die Grundschule Folgendes feststellen:

- Die Richtlinien berücksichtigen nur den inhaltlichen Teil der Reform, der methodische wird angedeutet, aber nicht ausgeführt.[455]
- Damit entsprechen die Empfehlungen – auch in der vornehmlich ökonomischen Begründung – wie angekündigt zunächst einmal „den Vorschlägen der OECD“ aus dem Bericht des Royaumont-Seminars.
- Neu ist der Themenkreis „Mengen“, dessen Begriffe alle Themen ähnlich Leitmotiven durchziehen sollen.
- Neu ist der Themenkreis „Geometrie“, der euklidische Geometrie und Abbildungen enthält (aber keine Topologie, wie es etwa Piaget vorgeschlagen hat).

451. KMK 1968, S. 2 und 3.
452. KMK 1968, S. 4 und 6.
453. KMK 1968, S. 4.
454. KMK 1968, S. 2.
455. so auch z. B. Keitel, Entwicklungen, S. 492 und Lauter, a. a. O., S. 17.

- Die Arithmetik erfährt weitere punktuelle Ergänzungen wie das Rechnen im Binärsystem. Eine vollständige Verallgemeinerung des Stellenwert-Begriffs, wie sie Dienes vorgeschlagen hat, ist nicht vorgesehen.
- Der selbst formulierte Anspruch, ein Spiralcurriculum entworfen zu haben, wird nicht eingelöst. Die Inhalte sind *zum Teil* an *einem* Leitbegriff ausgerichtet, dem der Menge.

→ Die unterschiedlichen grundlegenden Reformideen und -vorschläge finden sich in den *Empfehlungen und Richtlinien* nur in Auswahl. Dominant ist die inhaltliche Ergänzung des Stoffes durch die Begriffe der naiven Mengenlehre.

Keitel und Damerow sehen in den Richtlinien beide einen eklektizistischen, dabei im Grunde traditionellen Lehrplan, im Wesentlichen gekennzeichnet durch eine „Neugliederung der traditionellen Stoffgebiete Rechnen und Raumlehre, deren Einzelstoffe unter den neuen Überschriften der Themenkreise wieder erscheinen". Diese Diagnose trifft besonders die Vorgaben für die höheren Jahrgänge, zumal ein Teil der „Rahmenpläne mit dem traditionellen Stoffplan des Gymnasiums identisch" ist, sie kann jedoch in mancher Hinsicht auch auf die Grundschule übertragen werden.[456] Es handelt sich hier in jedem Fall um ein Dokument, dass die reformatorischen Grundideen nur eingeschränkt aufnimmt und dabei vor allem die Erkenntnisse aus der Lernpsychologie vernachlässigt, was angesichts der Tatsache, dass die kurzfristige Ausweitung der Reform auf die Grundschule eine tiefere Auseinandersetzung mit diesem Bereich nicht zugelassen hat, leicht erklärbar ist.

Die Erlanger Stellungnahme

Eine beispielhafte – wenngleich damit nicht notwendigerweise repräsentative – Reaktion auf die *Empfehlungen und Richtlinien* der KMK liegt in Form der *Erlanger Stellungnahme*[457] vor, die aus Diskussionen im Rahmen eines mathematikdidaktischen Kolloquiums am Pädagogischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg entstanden ist. Kritisiert werden in der Stellungnahme nicht die Reform bzw. eine Modernisierung an sich, sondern die Auseinandersetzung bezieht sich klar auf das KMK-Dokument, besonders auf die formulierten Begründungen für die Reform und auf das darin enthaltene Verständnis des Modernen. Als Alternativkonzept wird eines vorgeschlagen, das stärker auf das Ziel der Axiomatisierung fokussiert

456. Damerow, a. a. O., S. 228 und 230; vgl. Keitel, Réformes, S. 306; nach D'Ambrosio, a. a. O., S. 71, ist dies kein exklusiv deutsches Phänomen, sondern zumindest auch in Brasilien der Fall gewesen.
457. Erlanger Stellungnahme zu den „Empfehlungen und Richtlinien der Kultusminister-Konferenz zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" vom 3. Oktober 1968, in: b:e (1969), 11, S. 34-35.

ist, und zwar indem „von der ersten Klasse an“ Wert auf „das disziplinierte Reden“ gelegt wird und die natürlichen Zahlen nicht kardinal, sondern in Anlehnung an die Peano-Axiome eingeführt werden. Obwohl die Stellungnahme also aus der Pädagogik heraus formuliert wurde, wird in ihr ein fachlich radikaleres Vorgehen angeraten. Nach Zumpe blieb die *Erlanger Stellungnahme* „ohne Einfluß“.[458]

Die Neufassung der KMK-Empfehlungen für die Grundschule von 1976

Mit Beschluss vom 3.12.1976 verabschiedete die Kultusministerkonferenz für den Mathematikunterricht der Grundschule neue Empfehlungen und Richtlinien[459], mit dem Ziel, die Richtlinien von 1968 zu präzisieren und dadurch eine Basis für einheitlichere Lehrpläne zu schaffen. Die Kultusminister geben dabei zu, dass die bisherigen Pläne zu vage formuliert sind und Anlass zu Fehlinterpretationen bieten. Auch darauf, welcher Art diese Missverständnisse in der Praxis waren, lässt sich aus dem Text rückschließen. Offenbar bestand ein wesentliches Problem in einer häufig zu frühen Formalisierung der Begriffe, die mit der Verwendung fest vorgegebener und dann leicht unverstandener Sprachmuster einherging. Auf die Notwendigkeit einer „fachgerechte[n] Sprechweise“ wird verwiesen, diese sollte jedoch von der Alltagssprache ausgehen und dann „behutsam entwickelt“ werden. Auf die Möglichkeit sprachfreien Arbeitens wird daneben ausdrücklich hingewiesen. Unterrichtsmethodisch soll eigentätiges Handeln der Kinder an „Arbeitsmaterialien und Spiele[n]“ in wechselnden Sozialformen im Vordergrund stehen, um die Begriffsbildung von konkreten Erfahrungen ausgehen zu lassen.

Die Inhalte sind auch hier nach Themenkreisen sortiert, die Reihenfolge der Behandlung ist damit erneut offengelassen, es erfolgt allerdings eine Präzisierung in der Hinsicht, dass die Lernziele jeweils den Doppeljahrgängen 1/2 und 3/4 zugeordnet sind. Die nunmehr noch 4 Themenkreise sind: 2. Arithmetik, 3. Größen, 4. Geometrie (Jahrgänge 3/4) / Geometrische Grunderfahrungen (Jahrgänge 1/2); der 1. Themenkreis zu Mengen und Logik trägt für Klasse 3 und 4 die Bezeichnung „Umgang mit Mengen; logische Übungen“, für die Klassen 1 und 2 „Gegenstände und ihre Merkmale“. Angesichts der obigen Feststellungen ist zu vermuten, dass schon diese Benennungen bewusst so gewählt wurden, dass sie einen präformalen und konkreten Zugang nahelegen.[460] Der Themenbereich „Gegenstände und ihre

458. Zumpe, a. a. O., S. 31.
459. KMK: Empfehlungen und Richtlinien zum Mathematikunterricht in der Grundschule. Beschluß der KMK-Konferenz vom 3.12.1976, abgedruckt in: Müller & Wittmann, 1977, S. 159-164 = 1984, S. 166-170 [im Folgenden: KMK 1976].
460. Es lässt sich darüber hinaus aus der Art der Bezeichnung schließen, dass die verfrühte Formalisierung nicht nur die Mengenlehre, sondern auch die Geometrie betraf, die bis dahin als klassischer Gymnasialstoff fest mit der euklidischen Methode assoziiert war; dass die euklidi-

Merkmale" umfasst die Begriffe Menge, Element, Teilmenge und Grundmenge; inwiefern die entsprechende Terminologie genutzt werden soll, geht nicht eindeutig hervor. Im Wesentlichen sollen Mengen mit einem Merkmal oder zwei Merkmalen beschrieben bzw. nach Vorgabe gebildet werden. Die formal-symbolische Mengenschreibweise („Mengenklammern") in Verbindung mit den aussagenlogischen Konjunktionen („und", „oder", „nicht") ist ab Klasse 3 vorgesehen. Das Themenfeld „Mengen" wird hier zudem durch die Arbeit an Zahlenmengen mit der Arithmetik verknüpft.

Die Ausführungen zur Arithmetik selbst nehmen den größten Raum ein. Mengen dienen dabei der Herleitung der Zahlen und Operationen sowie der Einsicht in diese. Neben dem kardinalen wird der ordinale Zahlaspekt hervorgehoben, der im Zusammenhang mit den Relationen $<, >$ *und* $=$? behandelt werden soll. Der Themenkreis umfasst die klassischen Inhalte des Rechenunterrichts (Zahlen, Grundrechenarten, schriftliche Rechenverfahren, Sachrechnen) und außerdem das Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen. Betont wird die Nutzung der Rechengesetze für das vorteilhafte Rechnen (und damit weniger für allgemeine strukturelle Überlegungen) sowie die Anwendung des operativen Prinzips durch die Berücksichtigung von Umkehraufgaben und die Interpretation von Zahlen als Operatoren beim Rechnen[461], auch unter Verwendung des Zahlenstrahls als Modell. Das Prinzip des Stellenwerts wird gleichzeitig eingeschränkt wie verallgemeinert, indem zwar nur im Dezimalsystem gerechnet wird, die Schülerinnen und Schüler aber zunächst „nach verschiedenen Grundzahlen bündeln" und zwischen den Systemen umrechnen. Der Relationsbegriff bleibt auf Relationen zwischen Zahlen beschränkt, wird aber in den Klassen 3/4 von den Ordnungsrelationen auf weitere Beispiele ausgedehnt. Auf eine korrekte Verwendung der Fachtermini beim Rechnen wird hingewiesen; die Arbeit an Sachaufgaben wird wiederholt gefordert. Die Richtlinien enthalten zudem als Anhang Vorgaben zu den zu verwendenden schriftlichen Normalverfahren.

Der Themenkreis „Größen" umfasst Längen, Zeit (beides Jahrgang 1-4), Geld (nur Jg. 1/2) sowie Gewichte und Rauminhalt (Jg. 3/4). Der Schwerpunkt liegt hier

schen Grundbegriffe nun bereits in der Grundschule thematisiert werden sollten, mag an einigen Stellen auch zu einer Übertragung der Methode geführt haben. Dies spräche wiederum für eine unzureichende Auseinandersetzung der Lehrerschaft mit der Grundschulgeometrie, für die zahlreiche Gründe denkbar, jedoch nicht belegt sind: schlechte Materialien, fehlende Hilfen, vor allem aber generelle Vernachlässigung des Bereichs zugunsten der Mengenlehre. Glatfeld, Martin: Die „Geometrie" in dem KMK-Entwurf, in: Grundschule 9 (1977), 3, S. 136 [im Folgenden: Glatfeld, KMK Geometrie], nennt die betonte Ablehnung einer axiomatischen Herangehensweise hingegen „trivial", dennoch findet er es „erfreulich", dass der Themenkreis nicht durch „ „geometrische Propädeutik" oder eine ähnliche Formulierung" bezeichnet ist, ebenda, S. 133.

461. eine Sichtweise, die u. a. geeignet ist, den Funktionsbegriff vorzubereiten, so auch Glatfeld, Martin: Die „Arithmetik" in dem KMK-Entwurf, in: Grundschule 9 (1977), 3, S. 130 [im Folgenden: Glatfeld, KMK Arithmetik].

auf dem Messen, z. T. zunächst mit selbstgewählten, dann mit Standardeinheiten. Umrechnen von Einheiten und Anwendung in Sachkontexten ergänzen den Inhaltsbereich. Zu den geometrischen Grunderfahrungen zählen elementare Raum- und Orientierungsbegriffe wie Lagebeziehungen, geometrische Muster, Grundformen (Linien, Flächen, Körper) und die Spiegelsymmetrie. Die Geometrie in den Klassen 3 und 4 erweitert die Grunderfahrungen um stärker propädeutische Inhalte wie Netze, Parkettierungen und Deckungsgleichheit, die z. B. Flächeninhalte und Kongruenz vorbereiten. Elementare topologische Begriffe sind nicht vorgesehen.

Im Vorfeld des Beschlusses war ein Entwurf öffentlich geworden, der z. B. von Seiten der GDM recht ausführlich kommentiert worden war.[462] Gelobt werden u. a. die zentrale Rolle der Arithmetik, die Berücksichtigung der methodischen Ebene sowie eine generelle Ausgewogenheit des Entwurfs. Moniert wird dagegen das Fehlen grundlegender didaktischer, pädagogischer wie curricularer Konzepte und Ideen sowie das vorgeschlagene Normalverfahren für die Division.[463] Es wird eine „Verarmung des Sachrechnens“ bemängelt, und allgemein soll nach Auffassung der Mitglieder der GDM der Umweltbezug der Mathematik stärker herausgestellt werden. Sinn und Ziel der Geometrie bleiben unklar; Zahlen sollen ergänzend durch den Maßzahlaspekt fundiert werden; zudem „sollte hervorgehoben werden, daß die Reformkonzeption den traditionellen Rechenunterricht fortentwickelt“.

Die Stellungnahme gibt darüber hinaus Einblick in die Praxis des Mathematikunterrichts an den Grundschulen, wenn sie feststellt, dass aufgrund verschiedener Unklarheiten „offensichtlich viele Grundschullehrer [...] zum „guten alten Rechenunterricht“ zurück[kehren]“.

Die Rückmeldung der GDM ist ohne Wirkung geblieben; die Beschlussfassung entspricht dem Entwurf annähernd vollständig im Wortlaut und lässt damit als eine Frage offen, warum überhaupt ein Entwurf im Vorfeld veröffentlicht wurde.

Im Vergleich zu den *Empfehlungen und Richtlinien* von 1968 lässt sich vor allem festhalten:

- Rein vom Wortlaut her kommt der Arithmetik ein erheblich größeres Gewicht zu, wogegen die Mengenlehre gegenüber 1968 stark eingeschränkt wird. Berücksichtigt man hingegen, dass bereits zuvor fünf der sieben Themenkrei-

462. KMK: Empfehlungen und Richtlinien zum Mathematikunterricht in der Grundschule – Entwurf (1976), in: Grundschule 8 (1976), 8, S. 446-449 = Lindenau, Volkmar & Schindler, Manfred: Neuorientierung des Mathematikunterrichts, Bad Heilbrunn/Obb. 1978, S. 64-70; GDM: Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) zum Entwurf des KMK-Schulausschusses (1976), in: Grundschule 9 (1977), 2, S. 52 = Lindenau & Schindler, S. 70-73; vgl. zur weiteren Diskussion Glatfeld, KMK Arithmetik und ders., KMK Geometrie, sowie die Leserkommentare in Grundschule 9 (1977), 2, S. 63, 82 und 85.
463. vgl. speziell die Diskussionsbeiträge in Grundschule 9 (1977), 2, S. 82 und 85.

se der Arithmetik zugerechnet werden konnten und schließt man sich der Deutung an, dass in den ursprünglichen Richtlinien an zahlreichen Stellen traditionelle Inhalte lediglich unter veränderter Bezeichnung aufgenommen wurden, relativiert sich dieser Eindruck.

- Offensichtliche Neuerungen sind der Einbezug von aus lernpsychologischen Erkenntnissen und daraus entwickelten Prinzipien hervorgegangenen methodisch-didaktischen Vorgaben, die sicherlich ebenso durch die Spezifizierung der Richtlinien für die Grundschule bedingt sind wie diverse inhaltliche Konkretisierungen.

- Geringer geworden ist gleichzeitig der Einfluss der inhaltlichen Vorschläge von Seiten der OECD; vor allem die auf curricularer Ebene 1968 zumindest noch formulierte – wenn auch nicht eingelöste – Forderung nach einer Durchsetzung mit zentralen Begriffen ist nun vollends verschwunden. Strukturbegriffe werden nicht expliziert, Abbildungen auf einen Spezialfall (Spiegelung) beschränkt; das Ziel einer „mengentheoretische[n] Grundlegung des *gesamten* Mathematikunterrichts“ und damit „gewissermaßen das „Markenzeichen“ der Reform“ sind zurückgenommen.[464] Zwar findet sich jetzt der Relationsbegriff in den Richtlinien, aber nur insoweit, wie er einer verständigen Arithmetik dient.[465]

Die Wertungen der neugefassten Richtlinien in der Literatur divergieren ebenso, wie die Bewertung des Reformstands im Anschluss. Entgegen obiger Anmerkungen sieht beispielsweise Zumpe keine Änderungen konzeptioneller Art und stellt fest, dass „grundsätzliche Veränderungen am neuen Mathematikunterricht nicht stattgefunden“ hätten.[466] Erklärbar werden unterschiedliche Deutungen, wenn man davon ausgeht, dass ihnen verschiedene Auffassungen davon zugrunde liegen, was eigentlich den konzeptionellen Kern der Reform ausmacht: Orientierung an der Fachwissenschaft, die die Kluft zwischen Schule und Hochschule schließen soll, ein an fundamentalen Leitbegriffen ausgerichtetes Spiralcurriculum, das die Einheit der Mathematik herausstellt, neue, psychologisch begründete didaktisch-methodische Prinzipien oder die mengentheoretische Grundlegung der Arithmetik, um diese einsichtiger zu machen? In den Richtlinien wie in den Reaktionen darauf spricht vieles dafür, dass Letzteres als wesentlich für die Reformkonzeption angesehen wird. Die Arithmetik ist dann, wie im Rechenunterricht, der alles bestimmende zentrale Teilbereich der Mathematik, dem die weiteren Themengebiete untergeordnet sind.

464. Keitel, Entwicklungen, S. 460, Hervorh. durch T.H.
465. Sicher bieten die Lagebeziehungen in der Geometrie „Erfahrungsmaterial zum Relationsbegriff“ (Glatfeld, KMK Geometrie, S. 133), der Begriff ist hier aber nur implizit.
466. Zumpe, a. a. O., S. 37.

In diesem Zusammenhang aufschlussreich ist die geäußerte Furcht vor einer „Verarmung des Sachrechnens“, die auf der Einschränkung der schriftlichen Division auf das Rechnen mit nur einem Divisor beruht, womit für bestimmte Alltagsprobleme kein passender Algorithmus zur Verfügung steht. Die an einigen Stellen geäußerte Forderung nach Umweltbezug bleibt im Allgemeinen vage und lässt damit Interpretationsspielraum. Dass dabei jedoch ein auf bürgerliches Sachrechnen ausgerichteter Unterricht intendiert war, darauf geben die entsprechenden Quellen keine Hinweise. Bedenkt man, dass die Abschaffung der Volksschule gerade mit einer Abkehr von deren typischen Charakter einherging und das Rechnen vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit technischer Rechenhilfen als alleiniges bzw. schwerpunktmäßiges Lernziel als überholt galt, scheint eine solche Interpretation sogar geradezu anachronistisch. Wir haben es somit hier mit einer Quelle zu tun, die als Beleg dafür gelten kann, dass die Reform z. T. aus der Perspektive des traditionellen Rechenunterrichts betrachtet und bewertet wurde.

II.2.b Die Konkretisierung in Lehrplänen – Das Beispiel Niedersachsen

Der deutsche Bildungsföderalismus führte dazu, dass die Geschichte der Lehrpläne von Bundesland zu Bundesland stark variierte. Während einzelne Länder schon vor 1972 und damit vor dem von der KMK festgelegten Beginn der Reformumsetzung neue Lehrpläne erstellt hatten, waren in anderen noch für längere Zeit danach offiziell alte Pläne in Kraft. Z. T. führten Verzögerungen hier sogar zu einer Verschiebung des Reformbeginns um ein Jahr.[467] Gemeinsam war den konkretisierten Richtlinien der Länder seit 1972 auf formaler Ebene die Formulierung von Lernzielen. Inhaltlich waren sie gekennzeichnet durch eine stärkere Orientierung an der Fachmathematik, die sich im Wesentlichen in der Aufnahme neuer zu unterrichtender Begriffe und Teilgebiete niederschlug: Am prägnantesten ist hier sicher die Aufnahme von Elementen der naiven Mengenlehre in sämtliche Curricula; bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die Mengen in den Grundschulplänen stets den anderen Themengebieten vorangestellt sind, auch wenn dies nicht durch

467. Dies war zumindest für Nordrhein-Westfalen der Fall, obwohl gerade dort bereits ab 1969 neue vorläufige Lehrpläne an 200 Versuchsschulen erprobt und wissenschaftlich ausgewertet wurden, vgl. Soika, a. a. O., S. 9 und 21. Für eine Übersicht über die Grundschullehrpläne der Bundesländer vgl. Zumpe, a. a. O., S. 222-224; vgl. allgemeiner Damerow, a. a. O., S. 145-168; zur ausführlichen Dokumentation der Lehrpläne, auch der weiteren Schulformen, vgl. Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne in der Bundesrepublik Deutschland, Bielefeld: IDM. Bd. I. Stand September 1977 / Gert Schubring, 1977; Bd. II. Allgemeinbildende Schulen. Stand: Juni 1980 / Peter Damerow. . . , 1981; Bd. IV. Allgemeinbildende und berufsbildende Schulen 1980-1985. Stand: Dezember 1985 / Ute Thiede, 1986; Damerow, Peter, Hentschel, Götz & Scholz, Hartmut: Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne Allgemeinbildende Schulen, Bielefeld: IDM, 1981.

die Richtlinien der KMK vorgegeben war. Weitere Aspekte, die sich länderübergreifend finden, sind die Behandlung von Relationen, die Interpretation von Zahlen als Operatoren und damit eine Vorbereitung des Funktionsbegriffs sowie die Tendenz zu einer stärkeren Nutzung der mathematischen Symbolsprache.[468]

Die Handreichungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule

Während ein erster „Erlass des niedersächsischen Kultusministeriums zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" von 1969[469] sich noch darauf beschränkte, die KMK-Empfehlungen von 1968 im Wortlaut wiederzugeben, begann man im Anschluss schnell mit Versuchen zur Umsetzung in der Grundschule. Bereits im Schuljahr 1971/72 erhielten nach Angabe des Kultusministers von Oertzen (SPD) 80 % der ersten Klassen einen modernen Mathematikunterricht, der auf einem Lehrplanentwurf beruhte, der 1972 unter dem Titel „Handreichungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule" veröffentlicht wurde. Die Handreichungen, an deren Erstellung Didaktikerinnen und Didaktiker (darunter H. Besuden und H. Griesel) sowie Lehrerinnen und Lehrer beteiligt waren, waren damit „bereits an der Schulwirklichkeit gemessen" worden, inwiefern sie auf Basis von Unterrichtserfahrungen auch überarbeitet wurden, wird hingegen nicht gesagt. Es ist davon auszugehen, dass es sich um ein Dokument handelt, das als vorübergehende Hilfe bis zur Verabschiedung neuer Rahmenrichtlinien gedacht war. Da mathematikspezifische Richtlinien jedoch nicht vor 1977 erlassen wurden, waren die Handreichungen für fünf Jahre maßgeblich für die Unterrichtspraxis.

Als wesentliche Neuerungen werden neben Inhalten und Methoden – die insofern nicht völlig neu waren, als ihre Elemente „schon lange von Pädagogen gefordert" worden waren – neue Ziele genannt, v. a. der Erwerb logisch-mathematischer Denkweisen und entsprechender Sprache in Verbindung mit verbesserten Analyse- und Argumentationsfähigkeiten; erreicht werden sollten diese Ziele anhand der mathematisch-begrifflichen Betrachtung der Zahlen und Operationen.[470] Die Abkehr vom herkömmlichen Rechenunterricht wird sowohl fachwissenschaftlich und

468. vgl. Lauter, a. a. O., S. 18 und 23; Griesel, Bilanz, S. 373 f.; Zumpe, a. a. O., S. 23 und 28.
469. in: Niedersächsisches Kultusministerium: Schulverwaltungsblatt für Niedersachsen. Amtsblatt des Niedersächsischen Kultusministers für Schule und Schulverwaltung 21 (1969), S. 181-187.
470. Wörtlich ist die Rede von einer „schärferen begrifflichen Klärung der bisherigen Inhalte" sowie der „Verbindung von Mathematik und logischer Schulung"; was genau sich allerdings hinter den „Funktionsziele[n] einer modernen Denkerziehung" verbirgt, bleibt unklar, Der Niedersächsische Kultusminister: Handreichungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule, Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, [1972], S. 1 [im Folgenden: Nds. KM, Handreichungen].

gesellschaftlich als auch pädagogisch, mit den „Lernmöglichkeiten unserer Kinder“, begründet. Die bisherigen pragmatischen Ziele wie der „Umgang mit Zahlen, Größen und Formen“ unter Einbezug „insbesondere der schriftlichen Normalverfahren“ bleiben nichtsdestotrotz erhalten.[471]

Der inhaltliche Teil enthält Lernziele in Form gewünschter Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler sowie eine zusätzliche Spalte mit den zugehörigen Sprechweisen, Symbolen, aber auch ikonischen Darstellungen. Die Themenkreise, in die die Inhalte unterteilt sind, entsprechen denen der KMK-Richtlinien von 1968: 1. „Logische Schulung, Mengen, Relationen“; 2. „Natürliche Zahlen und ihre Verknüpfungen“; 3. „Stellenwertsysteme und schriftliche Rechenverfahren“; 4. „Größen und Sachrechnen“; 5. „Geometrie“; die Verzahnung der Inhalte untereinander wird deutlich angemahnt.[472] Die klar arithmetischen Themenkreise 2 und 3 nehmen mit zusammen 45 Seiten den größten Umfang ein; zählt man noch das Sachrechnen zur Arithmetik, dann ergeben sich in der Summe 58 Seiten, die sich diesem Teilgebiet widmen. Dem gegenüber stehen 19 Seiten für Themenkreis 1 und gerade einmal 11 für die Geometrie. Außer dieser vom Umfang her recht eindeutigen Schwerpunktlegung fällt auf, dass die Themengebiete in ihren Bezeichnungen gegenüber den KMK-Empfehlungen Ergänzungen erfahren haben. Die explizite Aufnahme des schriftlichen Rechnens in TK 3 und die des Sachrechnens in TK 4 verstärken den Eindruck, dass das wesentliche Gewicht auf traditionellen Inhalten liegt. In TK 1 dagegen ist die „Relation“ als weiterer allgemeiner Begriff aufgenommen, der allerdings zunächst nur propädeutisch vorzubereiten ist, ebenso wie die Begriffe der Gruppe und der Abbildung. Die Mengenlehre ist klar dominant; begründet wird sie vorrangig mit ihrer Funktion für die Grundlegung der Zahlen und Operationen, also arithmetisch.

Die mathematische Analyse der Arithmetik konkretisiert sich im TK 2 insgesamt in einer vielfältigeren, aspektreicheren Betrachtung und Übung des Rechnens unter stärkerer Formalisierung und der Beachtung korrekter, präziser Formulierungen. So wird beispielsweise Wert darauf gelegt, Terme als Bezeichnung für Zahlen zu interpretieren und „*nicht* als Aufgaben“[473], also nicht als Aufforderung zum Rechnen, und Gesetzmäßigkeiten wie Rechengesetze werden besonders betont, mit dem Ziel eines verständigen, systematischen und reflektierten Rechnens. Zur Übung dient u. a. das Operator-Maschinen-Modell, was ebenso wie das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen die Algebra vorbereitet. Dass die traditionellen Inhalte unter neuer Perspektive betrachtet werden, zeigt sich wiederum vor allem an der durchgängigen Forderung nach ständigem Rückbezug auf Mengen und Mengenopera-

471. vgl. Nds. KM, Handreichungen, S. [II]-3, Zitate: S. [II], 1 f. und 2.
472. vgl. Nds. KM, Handreichungen, S. 6.
473. Nds. KM, Handreichungen, S. 21b, Hervorh. im Original.

tionen. Dementsprechend dominant ist hier der kardinale Aspekt der natürlichen Zahlen, der ordinale Aspekt nimmt einen relativ kleinen Teil ein[474], der Maßzahlaspekt findet zunächst keine Erwähnung. Die Beziehung zwischen Rechnen und Mathematik wird hier als eine doppelte aufgefasst: Rechnen ist ein Teilgebiet der Mathematik neben anderen, gleichzeitig ist die Mathematik Voraussetzung für verständiges Rechnen. Für die Beschreibung der Umwelt reicht die Arithmetik ausdrücklich nicht aus, dazu sind weitere Strukturbegriffe notwendig.[475] Geht man davon aus, dass die Autoren der *Handreichungen* diesen Aspekt ernstnehmen, dann erhielte die Arithmetik neben ihrer Zweckgebundenheit für den Alltag die Rolle eines exemplarischen Teilgebiets der Mathematik, an dem teilgebietsübergreifende Kompetenzen gelernt werden sollen. Ihre Beherrschung wäre damit trotz ihrer Dominanz im Lehrplan nominell nicht mehr das höchste Ziel, an dem der Unterricht ausgerichtet ist.

Trotz der ausdrücklichen Aufnahme der schriftlichen Rechenverfahren in die Bezeichnung von Themenkreis 3 werden die Erläuterungen dazu eher kurz gefasst. Der Schwerpunkt der Ausführungen liegt hier auf dem Begriff des Stellenwerts, der mithilfe der Arbeit in verschiedenen Systemen vertieft werden soll, dies allerdings vor allem im Hinblick auf eine „vertiefte Einsicht in die schriftlichen Rechenverfahren“[476]. Mechanisiertes Rechnen ist nur im Dezimalsystem gefordert. Unter Themenkreis 4 liegt – trotz der nominellen Ergänzung um das Sachrechnen – der Schwerpunkt auf dem Themengebiet Größen und dabei besonders auf dem Messen; die zu messenden Größen entsprechen dabei denen in den Richtlinien der KMK. Hier findet sich nun auch ein Hinweis auf den Maßzahlaspekt, der im eigentlichen arithmetischen Themenkreis fehlt. Die fortwährende Betonung einer vergleichenden Betrachtung schließt die relationale und damit stärker mathematische Perspektive auf die Größen und Maße ein.

Passend zur oben zitierten Feststellung, dass die arithmetischen Begriffe zur Beschreibung der Umwelt nicht ausreichen, wird die Geometrie in TK 5 vorrangig mit dem Ziel des „Durchdringen[s] und Erfassen[s] der Umwelt mit Hilfe geometrischer Begriffe und Gesetzmäßigkeiten“ begründet. Eine besondere Rolle kommt dabei aus „entwicklungspsychologischen Gründen wie aus fachdidaktischen Erwägungen“ der Topologie zu[477], daneben werden Formen, Parkettierungen und Abbildungen behandelt sowie Flächen- und Körpervergleiche durchgeführt. Vor allem die topologischen Inhalte und die Grundformen werden verstärkt unter relationalen Gesichtspunkten betrachtet.

474. vgl. Nds. KM, Handreichungen, S. 20a f.
475. vgl. Nds. KM, Handreichungen, S. 2.
476. Nds. KM, Handreichungen, S. 37.
477. Nds. KM, Handreichungen, S. 49.

Die *Handreichungen* verfügen im Anhang über ein 14-seitiges Glossar mit den für die Implementierung des Lehrplans benötigten mathematischen Fachausdrücken. Es wird hieran deutlich, wie umfangreich die neue Terminologie ist und welcher hohe Anspruch damit an eine Lehrerschaft gestellt wird, die weder mit den Fachtermini noch mit der zugehörigen Symbolik oder der dahinterstehenden Denkweise vertraut ist. Es ist davon auszugehen, dass diese Ausführungen für ihre Zielgruppe in vielen Fällen nicht ohne Weiteres verständlich waren, gleichzeitig entbehrt es nicht einer gewissen Ironie, dass gerade diese Schwierigkeit ein schwerwiegendes Argument *für* eine Reform darstellt, die bereits frühzeitig die sprachlichen und strukturellen Grundlagen für mathematisches Verständnis legt.

Dass die mit „Symbole, Sprech- und Schreibweisen im Unterricht" überschriebene Spalte in der Tat vor allem symbolische Ausdrücke enthält, mag dem Umstand geschuldet sein, dass hier der größte Bedarf an Erläuterungen bestand. Da sie ebenfalls ikonische (zweidimensionale) Darstellungen umfasst und zu Beginn des Dokuments auf die unbedingte Notwendigkeit der Handlungsebene zur Grundlegung operativer Begriffe hingewiesen wird, werden alle drei Repräsentationsformen angesprochen. Die Hervorhebung der symbolischen Repräsentationen bereits durch die Überschrift birgt unter den gegebenen Umständen sicher dennoch die Gefahr, als Aufforderung zu verstärktem Formalismus missverstanden zu werden, obgleich die formale Mengenschreibweise erst ab dem 3. Schuljahr genutzt werden soll und auch auf die Möglichkeit zunächst nicht-verbaler Lösungen von Arbeitsaufträgen hingewiesen wird.[478] Insgesamt wird eine Didaktik gefordert, die sich zum einen stärker an der Fachwissenschaft, zum anderen aber auch stärker an den Erziehungswissenschaften orientiert. Die Ausrichtung an der Fachmathematik ist jedoch ganz klar nicht als eine „verfrühte Fachspezialisierung" gedacht, sondern soll vor allem in der propädeutischen Vorbereitung mathematischer Begriffe und Denkweisen bestehen. Ein expliziter Schwerpunkt der Berücksichtigung pädagogischer Aspekte ist Differenzierung, die u. a. in Form von Arbeit in heterogenen Gruppen realisiert werden soll, um „sozialkulturelle Unterschiede auszugleichen" und einer „Verfestigung der Unterschiede" entgegenzuwirken.[479]

Die Notwendigkeit „der ständigen kritischen Mitarbeit aller Beteiligten" wird ausdrücklich erwähnt.[480] Der – in Niedersachsen im Übrigen seit 1970 fortgebildeten – Lehrerschaft wird hiermit eine entscheidende Rolle zugesprochen, die im weiteren Reformverlauf über die reine Vermittlung von Inhalten hinausgeht.

Insgesamt lassen sich in den niedersächsischen *Handreichungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule* folgende grundlegende Ideen identifizieren:

478. vgl. Nds. KM, Handreichungen, S. 4.
479. Nds. KM, Handreichungen, S. 5.
480. Nds. KM, Handreichungen, S. [III].

- Auf didaktisch-methodischer Ebene finden verschiedene Impulse aus der Lernpsychologie Berücksichtigung: die unterschiedlichen Darstellungsebenen nach Bruner (wenn auch nur implizit); der Hinweis auf Piagets Theorie der Operationen (ohne namentliche Nennung), wenn selbsttätiges Handeln als „notwendige Voraussetzung für weiterführende Denkprozesse"[481], also für verinnerlichte Handlungen und damit letztlich für individuelle konstruktivistische Begriffsbildung, beschrieben wird; die methodische Forderung nach der Arbeit an Lernspielen in Gruppen, die Nutzung des Maschinenmodells sowie einer gewissen Variation der Darstellungsmodelle gemäß Dienes.

- Weitere methodische Forderungen, besonders die pädagogisch bzw. sozial begründete nach Differenzierung, erscheinen eher fachübergreifend als Aufnahme der Anregungen aus der allgemeinen Grundschulreform, wie sie im *Strukturplan* und in den *Empfehlungen zur Arbeit in der Grundschule* geschildert wird.

- Die formulierten Ziele teilen sich in pädagogische und soziale Ziele, wie sie aus dem *Strukturplan* und den *Empfehlungen zur Arbeit* übernommen werden, und das fachspezifische Ziel, logisch-mathematische Denkweisen statt bzw. neben der reinen Beherrschung von Verfahren zu vermitteln. Letzteres wird – in Übereinstimmung mit diversen Quellen der Reform – mit der Entwicklung der Fachwissenschaft, den Bedürfnissen der modernen Gesellschaft und allgemein neueren lernpsychologischen Erkenntnissen begründet.

- Die Zuordnung der Inhalte zu verschiedenen Themenkreisen, die offensichtlich aus den KMK-Richtlinien übernommen wurde, suggeriert auf den ersten Blick eine Strukturierung, die sich im Sinne eines Spiralcurriculums an zentralen inhaltlichen Ideen orientiert. Der wesentliche Teil der Themen ist jedoch der Arithmetik zuzurechnen, die den hauptsächlichen Inhalt darstellt, ergänzt um Geometrie und Topologie in weit geringerem Umfang sowie die Inhalte des Themenkreises zu Mengen, Logik und Relationen.

- Die Idee des Spiralcurriculums und der fundamentalen Ideen versteckt sich gewissermaßen in Themenkreis 1, denn obgleich der Themenkreis der Form nach gleichberechtigt neben den anderen steht, unterscheidet er sich von diesen insofern, als es hier darum geht, ein Fundament zu legen, auf dem in späteren Jahrgangsstufen „grundlegende Begriffe der Mathematik" aufbauen können. Als Grundbegriffe werden hier genannt: „Relation, Abbildung, Verknüpfung, Gruppe".[482]

481. Nds. KM, Handreichungen, S. 3.
482. Nds. KM, Handreichungen, S. 7.

- Der Menge kommt eine besondere Rolle zu; sie soll den gesamten Mathematikunterricht durchziehen, aufgrund ihrer Bedeutung als Basis für die Arithmetik wird sie aber bereits zu Beginn des 1. Schuljahres als eigener Inhalt gesondert behandelt.

- Der häufige Bezug auf die relationale Betrachtungsweise fällt auf. Der Begriff der Relation, der in den KMK-Empfehlungen zunächst vernachlässigt wird und sich dann nur als ein weiterer Strukturbegriff neben anderen findet, wird hier deutlich hervorgehoben und durchzieht das gesamte Curriculum an verschiedenen Inhalten. Eine denkbare Erklärung für diese Beobachtung ist die Bedeutung für den Zahlbegriff, in dem Fall für den Ordnungsaspekt der natürlichen Zahlen. Denkbar ist ebenso, dass sich in der Betonung des Relationsbegriffs die Rezeption der Piagetschen Theorie der Operationen widerspiegelt, die als ein System aus Begriffen und deren Beziehungen untereinander gekennzeichnet werden; das operative Prinzip beruht daher auf der Beziehungshaltigkeit mathematischer Objekte, auf die mithin in einem entsprechenden Unterricht immer wieder Bezug genommen werden muss.

- Das Lehrplankonzept ist gekennzeichnet durch die Dualität aus der Orientierung an fundamentalen Ideen, die das gesamte Curriculum ähnlich Leitmotiven durchziehen, und der Schwerpunktlegung auf die Arithmetik, der die Auswahl der zu behandelnden Inhalte und Begriffe untergeordnet wird, so dass der neue Mathematikunterricht hier eher in Form eines mathematisierten Rechenunterrichts, in dem mathematische Begriffe am Beispiel der Arithmetik propädeutisch behandelt werden, konkretisiert wird.

- Die geometrischen Inhalte werden gegenüber den KMK-Richtlinien um Grundbegriffe der Topologie erweitert, wie es zwar von Piaget nahegelegt und von Dienes übernommen wird, aber nicht in den Richtlinien der KMK vorgesehen ist. Die Lehrpläne der Länder greifen bei der Inhaltsauswahl hier also offenbar direkt auf die wissenschaftlich-theoretische Ebene oder auf weitere Ebenen zurück.

Die Rahmenrichtlinien von 1977

1977 erließ das Niedersächsische Kultusministerium verbindliche Rahmenrichtlinien für den Mathematikunterricht der Grundschule. Entstanden sind die Richtlinien aus den *Handreichungen* durch Überarbeitung aufgrund „gewonnener Erfahrungen und Einsichten, der neueren Erkenntnisse der Fachdidaktik und der Erziehungswissenschaften sowie unter Einbezug“ der neuen KMK-Richtlinien von 1976.[483] Der Aufbau des Dokuments, an dessen Erarbeitung unter anderen Knut Rickmeyer, einer der Mitarbeiter Heinrich Bauersfelds im *Frankfurter Projekt*, beteiligt war, entspricht weitgehend dem der *Handreichungen* mit zwei Spalten, von denen die erste „Lernziele“ enthält, die zweite jetzt etwas allgemeiner mit „Symbole, Sprech- und Schreibweisen, Beispiele, Darstellungsmöglichkeiten“ überschrieben ist, mutmaßlich, um den Fokus weniger stark auf die Symbolik zu legen. Dazu passen die Forderungen, die „unreflektierte Übernahme vorgegebener Sprachmuster“ ebenso wie „verfrühte Formalisierungen zu vermeiden“ und die präzise Sprache stattdessen „allmählich“ zu entwickeln[484], die – wie bereits in den Richtlinien der Kultusministerkonferenz – als Beleg für eine diesbezügliche Übertreibung in der Unterrichtspraxis gelten kann.

Das Ziel des Mathematikunterrichts ist ein doppeltes. Während als explizite Ziele und Aufgaben vor allem solche eher formaler und überfachlicher Art (z. B. „elementares Denkverhalten“, „Sprechbereitschaft“ und „Ausdrucksfähigkeit“, „Selbständigkeit“) genannt werden[485] und die Arithmetik als ein Fundament der Mathematik in den Dienst derselben gestellt wird, soll sie doch gleichzeitig ein „Instrumentarium zum Erfassen und Bewältigen von Sachsituationen“ bereitstellen[486] und damit materiale Ziele erfüllen.

Die Inhalte sind nach wie vor in Themenkreise geordnet, diese wurden aber leicht verändert. Es gibt nunmehr nur noch vier Themenkreise: 1. „Mengen und Relationen“, 2. „Natürliche Zahlen und ihre Verknüpfungen“, 3. „Größen und Sachrechnen“, 4. „Geometrie“; die Stellenwerte wurden in TK 2 verschoben, so dass dieser nun die gesamte Arithmetik umfasst. Erneut wird die Verzahnung der Themenkreise gefordert, insbesondere des ersten mit den anderen. Mengen und Relationen dienen wie bereits zuvor zum einen der Grundlegung der Arithmetik, zum anderen dem „Entwickeln intellektueller Fähigkeiten“, worunter mathematische Handlungen und Methoden wie Ordnen, Mathematisieren, Problemlösen etc. zu verstehen sind.[487] Gegenüber den Handreichungen ist die Logik aus der Bezeichnung des Themenkreises verschwunden, ebenso wie einige Inhalte aus den Erläuterungen (z. B. die Mengenoperationen), die dementsprechend knapper ausfallen. Ein weiterer Teil der bisherigen Inhalte ist in TK 2 verschoben worden. Dies betrifft den Bereich der Gleichungen und Ungleichungen, sowohl zwischen Mengen als auch zwischen

483. Der Niedersächsische Kultusminister: Rahmenrichtlinien für die Grundschule. Mathematik, Hannover: Schroedel, 1977, S. 3 [im Folgenden: Nds. KM, RRL 1977].
484. Nds. KM, RRL 1977, S. 6 und 9.
485. Nds. KM, RRL 1977, S. 4.
486. Nds. KM, RRL 1977, S. 6.
487. Nds. KM, RRL 1977, S. 8.

Zahlen, die damit – ungeachtet der geforderten Verzahnung – wieder stärker unter rechnerischem und weniger unter strukturellem Aspekt erscheinen.

Die Arithmetik, die erneut den mit Abstand größten Umfang in den Richtlinien einnimmt, wird dann auch ausdrücklich als „der zentrale Themenkreis des Mathematikunterrichts in der Grundschule“ bezeichnet, in dem neben der Einsicht in den Zahlbegriff – neben dem kardinalen und dem ordinalen findet nun auch der Maßzahlaspekt Erwähnung – vor allem rechnerische Fertigkeiten, auch im Sachrechnen, vermittelt werden sollen, die durch die neu aufgenommene Betonung von Rechenroutinen sowie „regelmäßige[r] Übungen und Wiederholungen“ zusätzliches Gewicht erhalten.[488] Das Überschlagsrechnen ist ein weiterer Aspekt, der sich in den *Handreichungen* nicht findet; in dem Lernziel „Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Hilfe bekannter Rechensätze [zu] lösen“ klingt traditionelle Rechendidaktik an, ebenso aber das operative Üben. Nichtsdestotrotz ist der Abschnitt zu TK 2 weiterhin von der Mengenperspektive, ihrer Terminologie und ihren Darstellungen durchzogen, ebenfalls wird der Operatoraspekt an vielen Stellen betont und damit eine mathematisch-propädeutische Perspektive eingenommen. Es hat den Eindruck, dass es sich hier um ein Beispiel für den bereits weiter oben angesprochenen, von Damerow und Keitel diagnostizierten Eklektizismus in den reformierten Lehrplänen handelt[489], der seinen Ausdruck darin findet, dass Versatzstücke verschiedener Konzepte aufgenommen und zusammengefügt wurden.

Die Ausführungen zum Messen und Sachrechen haben keine erwähnenswerten Änderungen erfahren. Die Geometrie hingegen wird wie die Arithmetik stärker im Hinblick auf ihre Rolle zum Lösen von Sachproblemen betrachtet. Größen spielen auch in diesem Themenkreis nun eine größere Rolle, der Anteil der Topologie wurde dagegen verringert; die relationale Perspektive durch den regelmäßigen Einbezug von Lagebeziehungen und anderen Vergleichen wurde beibehalten.

Insgesamt lässt sich zur inhaltlichen Ausgestaltung der Rahmenrichtlinien festhalten, dass Mengen und Relationen weiterhin als zentrale Leitbegriffe fungieren, deren Umfang aber im Vergleich mit den *Handreichungen* reduziert wurde. Die Arithmetik erfährt hingegen insofern eine Aufwertung, als sie ausdrücklich als Schwerpunkt des Unterrichts deklariert wird, nicht wie noch zuvor als ein „Teilgebiet eines anspruchsvolleren Schulfaches Mathematik“[490]. Dieser nominelle Paradigmenwechsel geht zudem mit einer deutlich stärkeren Betonung der Rechenverfahren und -routinen einher. Die Schwierigkeiten in der Bewertung des Reformstands nach 1976 werden exemplarisch anhand des niedersächsischen Lehrplans

488. Nds. KM, RRL 1977, S. 16.
489. vgl. Damerow, a. a. O., S. 228 und 230; vgl. Keitel, Réformes, S. 306.
490. Nds. KM, Handreichungen, S. 2.

nachvollziehbar: Für beide Sichtweisen – sowohl diejenige, dass die Reform im Kern weiterbestand, als auch diejenige, dass die erneuerten KMK-Richtlinien eine Rückkehr zum Arithmetikunterricht implizierten – finden sich Argumente. Die Idee eines an mehreren zentralen fachlichen Grundbegriffen orientierten Curriculums tritt in jedem Fall weiter zurück; der Einfluss der diesbezüglichen Reformquellen ist damit geringer geworden.

Auf methodisch-didaktischer Ebene enthalten die Rahmenrichtlinien im Wesentlichen die gleichen Hinweise wie die *Handreichungen*. Betont werden die Notwendigkeit der Handlungsorientierung in Form von Lernspielen an geeigneten Materialien und damit der konkret-konstruktivistische Zugang zu den mathematischen Begriffen, der der verfrühten Formalisierung und Symbolisierung entgegensteht. Die Rolle der Mathematik für die Sprachbildung und die Argumentationsfähigkeit wird angesprochen, wobei auch hier auf die Möglichkeit sprachfreien Arbeitens hingewiesen wird; Differenzierung soll ausdrücklich berücksichtigt werden; Gruppen- und Partnerarbeit sollen als Sozialformen bevorzugt eingesetzt werden, unter anderem, um die sprachlichen Ziele zu fördern. Deutlich stärker als vorher wird der Umweltbezug der Mathematik und ihre Eigenschaft als Instrument zur Beschreibung und „Erschließung von Sachverhalten der Umwelt" hervorgehoben.[491]

Die Rahmenrichtlinien von 1984

Weitere sieben Jahre später wurden neue Rahmenrichtlinien für die niedersächsischen Grundschulen erlassen, die wiederum durch Überarbeitung „aufgrund zahlreicher Stellungnahmen der Schulen und Schulbehörden" aus den Richtlinien von 1977 hervorgegangen waren.[492] Die genannten Ziele sind unverändert sowohl formaler Art, indem der Aufbau „grundlegende[r] intellektuelle[r] Fähigkeiten" wie Ordnen, Abstrahieren, Analyse und Synthese, Darstellen, Problemlösen oder das Nutzen von Analogien angestrebt wird, als auch materialer Art, wenn die Bedeutung der mathematischen Begriffe und Operationen als „Instrumentarium zum Erfassen und Bewältigen von *Sachsituationen*" verdeutlicht werden soll; weitere fachspezifische Ziele umfassen die Entwicklung der Fachsprache und den „Aufbau arithmetischer Begriffe". Neu gegenüber dem Lehrplan von 1977 ist die explizite Benennung überfachlicher Ziele wie „Gründlichkeit", „Genauigkeit" und „Gedächtnis". [493]

491. Nds. KM, RRL 1977, S. 5.
492. Der Niedersächsische Kultusminister: Rahmenrichtlinien für die Grundschule. Mathematik, Hannover: Schroedel, 1984, S. 2 [im Folgenden: Nds. KM, RRL 1984].
493. Nds. KM, RRL 1984, S. 5 f. und 9, Hervorh. im Original.

Der Aufbau des Dokuments ist nicht wesentlich verändert worden, neben der Spalte mit den Lernzielen gibt es nun zwei weitere, von denen die eine nur noch mit „Beispiele, Darstellungsmöglichkeiten“ überschrieben ist und die dritte weitere „Hinweise“ enthält. Die Spalte mit den Darstellungen enthält nach wie vor auch Sprechweisen und Symbole; diese Repräsentationsebene wird allerdings nicht mehr hervorgehoben. Die Beobachtung lässt mehrere Rückschlüsse zu. So ist es denkbar, dass die explizite Betonung der symbolischen Darstellungen in der Spaltenüberschrift nach wie vor zu einer Überbetonung von Formalismen in der Praxis geführt hat; genauso ist es aber auch möglich, dass im Gegenteil die Symbole im Unterricht ohnehin vernachlässigt wurden und der Lehrplan an die Praxis angepasst wurde. Da an dieser Stelle keine weiteren Quellen zu der Frage herangezogen werden sollen, bleiben diese Überlegungen recht spekulativ und werden hier nicht weiterverfolgt. Als sicher kann lediglich gelten, dass die Frage der symbolischen Repräsentationsebene eine ist, die im Verlauf der Reform von einiger Relevanz war.

Möglicherweise hängt die Zurückstellung der Symbole auch schlicht damit zusammen, dass die Darstellungsmöglichkeiten für Mengen inzwischen bekannt waren. Dazu kommt eine erneute Reduzierung der Themenkreise auf nunmehr drei: 1. „Natürliche Zahlen und Rechenoperationen“, 2. „Sachrechnen und Größen“, 3. „Geometrie“. Mengen und Relationen bilden damit keinen eigenen Themenkreis mehr, was erwartungsgemäß mit einer weiteren Reduzierung der entsprechenden Begriffe einhergeht. Dies ist nicht gleichbedeutend mit einer völligen Abschaffung der Mengenorientierung oder der kardinalen Grundlegung des Zahlbegriffs. Die Ausführungen zum arithmetischen Themenkreis enthalten nach wie vor Mengendarstellungen, und sie beginnen mit Sortierübungen nach der Feststellung von Eigenschaften strukturierter Materialien. Es wird allerdings deutlich, dass die Mengenlehre weder als ein mathematisches Teilgebiet mit eigenem Wert noch als übergeordnete Leitidee betrachtet wird, sondern dass die Mengenvorstellung ihren curricularen Wert nunmehr einzig aus ihrer Bedeutung für die Arithmetik, die „wesentliche Aufgabe[] des Mathematikunterrichts in der Grundschule“[494], zieht. Dass die Begriffe „Teilmenge“ und „Grundmenge“ zwar vorkommen, die Termini aber ausdrücklich nicht genutzt werden müssen[495], kann hier als zusätzlicher Beleg dienen: Die Bezeichnungen haben keinen Wert, wenn das Konzept dahinter keinen eigenen Unterrichtsstoff, sondern nur die Grundlage für den eigentlichen Stoff darstellt. Insofern scheint es konsequent, auf die Ausdrücke zu verzichten. Der Zahlbegriff soll kardinal, ordinal und als Maßzahl grundgelegt werden, das Zählen wird wieder stärker berücksichtigt, und das Rechnen insgesamt gewinnt durch die Betonung

494. Nds. KM, RRL 1984, S. 11.
495. Nds. KM, RRL 1984, S. 17.

schriftlicher Rechenverfahren und des Kopfrechnens noch einmal an Bedeutung. Die Funktion der Rechenroutine geht dabei über die eines Werkzeugs zur Anwendung in Sachsituationen deutlich hinaus; nicht nur dass das operative Prinzip durchweg betont wird, wodurch die Arithmetik Übungsfeld für flexibles und heuristisches Denken wird, die schnelle Verfügbarkeit elementarer Rechentechniken wie des Einmaleins wird darüber hinaus als „Grundvoraussetzung[] für weitere mathematische Inhalte“ bezeichnet. Zahlen und Operationen werden damit als notwendiges Fundament verstanden, auf dem die weiteren Themen des Mathematikunterrichts in höheren Jahrgangsstufen aufbauen.

Die obersten Ziele des Geometrieunterrichts sind die Orientierung in der Umwelt und damit einhergehend räumliches Vorstellungsvermögen. Daraus ergeben sich als schwerpunktmäßige Inhalte die euklidischen Grundformen, topologische Lagebeziehungen und Symmetrie am Beispiel von Achsenspiegelung und Verschiebung, Letzteres in Form von Bandornamenten. Auch wenn die Lagebeziehungen wiederum ein Beispiel für Relationen liefern und der Hinweis erfolgt, dass die Bandornamente den Abbildungsbegriff vorbereiten, steht das begriffliche Denken im Sinne einer mathematischen Propädeutik insgesamt hinter dem Gedanken der Raumorientierung zurück. Dass die Mitarbeiter und Autoren des Lehrplans es noch 1984 offenbar für geboten halten, darauf hinzuweisen, dass der Geometrieunterricht der Grundschule „nicht am fachsystematischen Aufbau auszurichten“ sei[496], kann ein Hinweis dafür sein, dass die Verknüpfung der Geometrie als Schulstoff mit der euklidischen Methode ungebrochen im kollektiven Bewusstsein verankert war. Dass damit womöglich auch der geometrische Anfangsunterricht der Gefahr eines verfrühten Formalismus unterlag, liefert eine schlüssige Erklärung dafür, dass Eigenschaften der Achsenspiegelung ausdrücklich nicht in den ersten beiden Schuljahren zu thematisieren sind.[497] Dafür, dass die Ausführungen zu Themenkreis 3 von wesentlich geringerem Umfang sind als diejenigen zu den anderen Teilgebieten, wodurch der geometrischen Propädeutik gleichzeitig – implizit – geringere Bedeutung zugestanden wird, dient dieser Umstand allerdings nicht als Begründung.

Die weiteren didaktischen und unterrichtsmethodischen Hinweise sind ohne wesentliche Änderungen aus den Rahmenrichtlinien von 1977 übernommen worden. Handlungsorientierung, Materialeinsatz, Lernspiele, Gruppenarbeit, Differenzierung und Sprachbildung sind die grundlegenden Prinzipien, an denen die Unterrichtsplanung auszurichten ist. Die erneute Warnung vor einer „unreflektierte[n] Übernahme vorgegebener Sprachmuster“ sowie die Forderung, dass „[d]ie berechtigten Bemühungen um Sprachförderung [...] nicht zur Blockierung mathematischer Lernprozesse führen [dürfen]“, die beide so auch bereits im Lehrplan von

496. Nds. KM, RRL 1984, S. 59.
497. Nds. KM, RRL 1984, S. 63.

1977 enthalten sind[498], werfen erneut ein Schlaglicht auf die diesbezügliche Praxis des Unterrichts. Gleichzeitig zeigt die zweite Formulierung die über bloße Missverständnisse hinausgehende allgemeine Schwierigkeit auf, ein angemessenes Maß in der Verbindung von kindgemäßer Alltagssprache und zu entwickelnder korrekter Fachsprache zu finden, eine Aufgabe, die zweifellos einen erheblichen Anspruch an die Unterrichtenden stellt.

Insgesamt ist festzuhalten:

- Die niedersächsischen Rahmenrichtlinien von 1984 haben sich von einem erheblichen Teil der der Reform zugrundeliegenden Konzepte entfernt. Dies betrifft vor allem die inhaltliche Seite, die methodischen Ideen waren hingegen offenbar konsensfähig und sind über den betrachteten Zeitraum stabil curricular festgeschrieben.
- Das Konzept eines an zentralen Strukturbegriffen ausgerichteten Curriculums konnte sich nicht durchsetzen, es wurde auch in keinem der betrachteten Lehrpläne konsequent umgesetzt.
- Die Mengenlehre, auf deren Aufnahme die Ausrichtung an allgemeinen Strukturbegriffen weitgehend verkürzt wurde, wurde nach und nach reduziert; ihr Status wandelte sich dabei von dem eines Inhalts eigenen Rechts zu dem eines Instruments zum besseren Verständnis der Arithmetik.
- Geblieben ist die Behandlung geometrischer Inhalte ab der 1. Klasse.
- Ebenfalls beibehalten wurde eine mathematische, begriffliche Perspektive auf die Arithmetik, die Rechnen nicht nur zum Selbstzweck betreibt, sondern den Anspruch verfolgt, durch die Beschäftigung mit Operationen – und der Ausdruck ist hier durchaus im Sinne Piagets zu verstehen – flexibles mathematisches Denken zu fördern und damit mathematische Begriffe propädeutisch grundzulegen. Von den unterschiedlichen Auffassungen der Beziehung zwischen Rechnen und Mathematik, die sich finden lassen – Rechnen als ein mathematisches Teilgebiet neben anderen, Mathematik als Grundlage des Rechnens, Rechnen als exemplarisches Übungsfeld für Mathematik, Rechnen als Fundament der Mathematik – sind die letzten beiden diejenigen, die die Rahmenrichtlinien am Ausgang der Reform kennzeichnen, während die ersten beiden als typisch für die ursprünglichen Reformideen gelten können.

498. Nds. KM, RRL 1984, S. 7 und 8; Nds. KM, RRL 1977, S. 6.

III Drei Lehrwerke als Beispiel für Unterrichtskonzepte aus der Mathematikdidaktik

	Alef / H. Bauersfeld et. al.	**Wir lernen Mathematik / W. Neunzig & P. Sorger**	**Mathematik in der Grundschule / A. Fricke & H. Besuden**
1967			Ausgabe A
1968		1. Auflage	
1969	1. Auflage		
1971		2. Auflage	
1972			Ausgabe B
1975	2. Auflage	Arbeitskarten	
1977			Ausgabe C
1984			Ausgabe D

III.1 *Alef* von H. Bauersfeld u. a.

Angesichts der internationalen Bemühungen und der Reformen an den westdeutschen Gymnasien wurden 1965 von Seiten der Max-Traeger-Stiftung der GEW Mittel für ein Projekt zur Reform des mathematischen Grundschulunterrichts bereitgestellt. Als Leiter eines solchen Projekts wurde unter anderem Heinrich Bauersfeld – seinerzeit Professor an der PH Hannover – angefragt, der großes Interesse hatte und in der Folge weitere Gelder für die Durchführung und Evaluation des „Frankfurter Projekts zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule“ von der Stiftung Volkswagenwerk einwarb. Insgesamt standen für das Projekt so 1,5 Mio. DM zur Verfügung, eine Finanzierung über die Jahre

1966-72 war damit gesichert.[499] Noch 1968 handelte es sich bei dem *Frankfurter Projekt* um das einzige bundesdeutsche Curriculumprojekt, das einen entsprechenden Rahmen umfasste.[500]

Bauersfeld, der sich bereits mit den Entwicklungen im Ausland auseinandergesetzt hatte[501] und darüber hinaus großer Anhänger von Bernsteins Theorie der „kompensatorischen Erziehung“ war, entschied sich bewusst für eine Herangehensweise, die in wesentlichen inhaltlichen Teilen ebenso von den internationalen Vorbildern wie von den späteren Empfehlungen der KMK abwich[502], indem er nicht allein von den fachlichen Inhalten ausging, sondern soziale und sprachliche Ziele an den Anfang seiner Konzeption stellte[503]. Hintergrund ist die Überzeugung, dass die Wirkung des Mathematikunterrichts weit über das Lernen rein fachlicher Inhalte hinausgeht und alltägliche Verhaltensweisen auf unterschiedlichsten Ebenen beeinflusst[504].

Erste, einzelne Unterrichtsversuche nach dem neuen Konzept wurden bereits ab dem Schuljahr 1966/67 in zwei Klassen durchgeführt, die erste Fassung des voll-

499. Bei Moon, a. a. O., S. 161 f., ist zunächst nur die Rede von einem Lehrerverband, der eine Projektleitung suchte, an späterer Stelle (ebenda, S. 165) heißt es dann dort, Bauersfeld habe Gelder von der Volkswagen- und der Max-Traeger-Stiftung eingeworben, während das Geld des – nicht näher benannten – Verbandes die Anschubfinanzierung geleistet hätte; da Weis, Valentin: Das Evaluationskonzept des „Frankfurter Projekts“, in: Die Deutsche Schule. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft und Gestaltung der Schulwirklichkeit 64 (1972), 9, S. 589, schreibt, die Finanzierung sei „anfangs“ durch die Max-Traeger- und später durch die VW-Stiftung geleistet worden, und Bauersfeld in Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Hannover: Schroedel, 1970, S. 7, ausdrücklich von einem „Forschungsauftrag der Max-Traeger-Stiftung“ schreibt, ist davon auszugehen, dass es sich bei der „teachers‘ union“ bei Moon bereits um die GEW bzw. ihre Stiftung handelt. Aus Bauersfeld, Heinrich: Sieben Stolpersteine jeglicher Schulreform. Ein Versuch über vernachlässigte Bedingtheiten, in: mathematica didactica 27 (2004), 2, S. 4 [im Folgenden: Bauersfeld, Stolpersteine], geht außerdem hervor, dass die Farbwerke Hoechst seinerzeit eine Finanzierung des Projekts ablehnten; zu den Zahlen vgl. Moon, a. a. O., S. 165; nach Bauersfelds eigenen Angaben stammte 1 Mio. DM aus der Volkswagen-Stiftung.

500. vgl. Lockard, J. David [Ed.]: Sixth Report of the International Clearinghouse on Science and Mathematics Curricular Developments 1968, Maryland [u. a.], 1968; ebenso Zumpe, a. a. O., S. 25, und Griesel, Tradition, S. 53.

501. U. a. hielt er engen Kontakt zu Max Beberman, einem der Vorreiter der New Math in den USA, der dort als einer der ersten die Reform auf die *Elementary School* übertrug (vgl. Kline, Hänschen, S. 30 f.), Beberman besuchte Bauersfeld zu Zeiten des Projekts regelmäßig in Frankfurt (vgl. Moon, a. a. O., S. 168), außerdem war Bauersfeld spätestens seit dem Berliner Symposion zur Mathematik in der Grundschule im November 1966 mit den Ideen von Dienes vertraut (vgl. Dallmann & Heyer, a. a. O., S. 5).

502. Weis, Valentin & Bauersfeld, Heinrich: Neue Mathematik und Rechenfertigkeit. Ergebnisse aus dem „Frankfurter Projekt“, in: Westermanns pädagogische Beiträge 25 (1973), 3, S. 130.

503. vgl. Moon, a. a. O., S. 166 f.; Moon berichtet hier auch, dass Bauersfeld sich überrascht gezeigt habe, dass gerade die Engländer im Rahmen des *Nuffield Project* diese Aspekte weitgehend außer Acht gelassen hätten.

504. vgl. Weis, a. a. O., S. 591.

ständigen Lehrgangs dann ab 1967/68 über die vollständige Grundschulzeit bis 1971 in 10 Klassen mit insgesamt 360 Schülerinnen und Schülern. Der eigentliche Projektlehrgang, also derjenige, der nach vier Jahren Grundschulzeit evaluiert werden sollte, war eine nach enger Rücksprache mit den beteiligten Lehrkräften unter Einbezug der gemachten Unterrichtserfahrungen „gründlich[...]" überarbeitete zweite Fassung. Das Projekt wurde von 1968/69 bis 1972 in 42 Schulklassen mit insgesamt 1610 Kindern in Hessen – vorwiegend in Frankfurt und in Kassel – durchgeführt. Als Kontrollgruppe dienten weitere etwa 40 Klassen mit um die 1100 Schülerinnen und Schülern, die die gesamte Zeit über traditionell unterrichtet wurden. Die Lehrerinnen und Lehrer der Projektklassen standen im regelmäßigen Austausch mit den Projektleitern, erhielten einerseits Beratung und berichteten andererseits von ihren Erfahrungen. Auch fanden Besuche und damit verbundene Beobachtungen in den Projektklassen statt.[505]

Die völlige Neukonzeption veranlasste die Vertreter der hessischen Landesregierung das Werk zunächst nicht zuzulassen, da es „so radikal von den bisher üblichen Lehrgängen ab[weiche], daß man erst die abschließende Erfolgsuntersuchung abwarten müsse"[506], und stattdessen einen Vertrag mit der Projektleitung abzuschließen, in dem diese zusicherte, dass das Leistungsniveau der Projektkinder in den traditionellen Gebieten des Unterrichts mit dem traditionell unterrichteter Kinder vergleichbar blieb. Ein entsprechender Test, der die inhaltsbezogenen Leistungen untersuchte, wurde als Teil der Begleituntersuchung nach der 4. Klasse mit den Projekt- wie den Kontrollkindern durchgeführt[507].

Aus dem Projektlehrgang entstand schließlich, nach weiterer umfassender Revision, das Lehrwerk *alef*, das ab 1969/70 und somit noch während des laufenden Projekts bei Schroedel erschien.[508] *Alef* setzt sich zusammen aus einem ausführ-

505. vgl. Weis, a. a. O., S. 589-591; vgl. Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 135; vgl. Moon, a. a. O., S. 166; Moon, S. 167 und 170 f. zufolge konnte Bauersfeld das Projekt zunächst noch eng persönlich begleiten, mit der Übertragung größerer Verantwortung auf Mitarbeiter und Lehrkräfte, die sich aus der Ausweitung ergab, sei es dann jedoch zunehmend zu Schwierigkeiten, u. a. in der Kommunikation gekommen; es ist jedoch nicht ganz klar, auf welchen Zeitraum sich Moon hier genau bezieht, da als Beispiel eine beteiligte Schule in Berlin genannt wird, während das Projekt nach Angaben von Weis, S. 590, auf hessische Schulen beschränkt blieb.
506. Schwartz, Erwin: Moderne Mathematik schafft neue Schule? in: Schwartz, Erwin [Hrsg.]: Mathematik in der Grundschule / Arbeitskreis Grundschule e. V., Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e. V., ^{3}1974, S. 10.
507. vgl. Moon, a. a. O., S. 167; vgl. Weis, a. a. O., S. 592 f.; zu den Ergebnissen s. weiter unten.
508. vgl. Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Arbeitsblätter für den Schüler, Hannover: Schroedel, 1969 und Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Hannover: Schroedel, 1970; die Bände werden hier als Gesamtwerk betrachtet und [im Folgenden zitiert als Alef 1, 1969/70], die Arbeitsblätter sind durch Seitenzahlen im Format ABXXX gekennzeichnet; Weis, a. a. O., S. 590, weist darauf hin,

lichen Lehrerhandbuch, das in der 1. Auflage auch eine fachliche Einführung bzw. ein Glossar der Fachbegriffe enthält, Arbeitsblättern und weiteren Materialien aus der Reihe *matema*. Eine besonders große Rolle für das 1. Schuljahr spielen dabei das *matema Begriffsspiel* und das *matema Formenspiel*[509], die für jede Schülerin und jeden Schüler verfügbar sein sollen.

Das *matema Formenspiel*

Das Begriffsspiel besteht aus 48 Plättchen, von denen jedes aufgrund einer bestimmten Kombination aus den vier Merkmalen Form (Kreis, Quadrat, Dreieck), Farbe (rot, gelb, grün, blau), Größe (groß, klein) und Griff (glatt, rau) eindeutig beschreibbar ist; das Formenspiel umfasst 67 Plättchen verschiedener geometrischer Grundformen (Quadrat, gleichseitiges Dreieck, gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck, regelmäßiges Sechseck, Rechtecke mit Seitenverhältnis 1:2 sowie 1:3), jeweils in verschiedenen Größen, wobei die speziellen, ganzzahligen Verhältnisse der Seitenlängen in vielen Fällen ein Auslegen einer Form mit mehreren Plättchen-Kombinationen zulassen (zwei kleine gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke entsprechen beispielsweise einem kleinen Quadrat). Ein Schülerbuch – und damit auch ganz ausdrücklich eine Fibel – gibt es nicht[510]. Das Lehrerhandbuch enthält neben didaktischen Hintergrundinformationen und allgemeinen Kommentaren alle notwendigen konkreten Handlungsanweisungen zur methodischen Umsetzung und ist damit Hauptgrundlage des Unterrichts. Die Arbeitsblätter, darauf weisen die Autoren explizit hin, sind ergänzende Arbeitsmittel[511], die der Festigung und Übung dienen, für gewöhnlich jedoch nicht der Einführung eines neuen Begriffs. Diese Materialien werden ergänzt durch einen Klassensatz Symbolkarten, Hinweise für Eltern[512] und weitere Spiele für höhere Klassenstufen. *Alef 1* ist in zwei **Auflagen** erschienen, die erste im Jahr 1969/70, die zweite,

dass die Veröffentlichung der Materialien in Form des Lehrwerks nicht mehr Teil des Projekts war; wie Knut Rickmeyer mir berichtete, war sie auch zunächst nicht intendiert, sondern eine Reaktion auf den ausdrücklichen Wunsch von Eltern der Projektkinder.

509. Dick, O[tto] & Ziegler, Th[eodor]: Begriffsspiel. 48 Plättchen zur Grundlegung begrifflichen Denkens, Hannover: Schroedel, o. J.; dazu: Ziegler, Th[eodor]: Einführung in das „matema"-Begriffsspiel. Begleitschrift zu „matema" Nr. 1 – Begriffsspiel von O. Dick und Th. Ziegler, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1968; Bauersfeld, Heinrich & Kleinschmidt, Gottfried: matema Formenspiel. 67 Legeplättchen zur Präfiguration von Grundbegriffen aus Geometrie und Arithmetik, Hannover: Schroedel, o. J.

510. Es handelt sich hier um eine ganz bewusste Entscheidung, zur Begründung vgl. Alef 1, 1969/70, S. 9.

511. Alef 1, 1969/70, S. 40.

512. Battermann, Heinrich & Windolph, Edeltraud: Alef 1. Wege zur Mathematik; Eltern-Information, Hannover: Schroedel, 1972 [im Folgenden: Battermann & Windolph, Eltern-Information 1972].

nochmals stark überarbeitete, wurde von 1975 bis 1979 gedruckt.[513]

Es ist davon auszugehen, dass *alef* bundesweit zu den weniger verbreiteten Lehrwerken zählt. Nach Verlagsangaben war die Verbreitung um das Schuljahr 1976/77 in Niedersachsen, Bremen, Berlin, Hessen und Schleswig-Holstein noch am weitesten, Zahlen wurden nicht genannt. Eine Untersuchung aus dem Jahr 1972 ergab, dass von 205 befragten Schulen 4,4 % das Werk eingeführt hatten und im Jahr 1974 bereits nur noch 3,0 % (hier $n = 767$). Nach einer Lehrerbefragung in Niedersachsen (v. a. in Göttingen und der Region Hannover) von 1981 arbeiteten schließlich nur 2,3 % der Lehrerschaft damit[514]; nach Müller und Wittmann konnte das gesamte Konzept „sich nicht durchsetzen, auch wenn einzelne Ideen daraus sehr stimulierend wirkten“[515].

Alef 1, 1. Auflage, 1969/70

Die zugehörigen Materialien sind integraler Bestandteil des Lehrgangs und insofern auch maßgeblich für dessen methodische Umsetzung. Die bevorzugte Methode für die Arbeit nicht nur mit den Plättchen ist das Regelspiel, die bevorzugte Sozialform für einen wesentlichen Teil des Kurses die Gruppenarbeit. Die Kombination von Lernspielen und der Arbeit in Gruppen bietet Möglichkeiten der Binnendifferenzierung, führt durch den sachlichen Zwang der Spielregeln zur Präfiguration mathematischer Grundbegriffe sowie zur Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander und verfolgt somit auch soziale und pädagogische Ziele[516]. Bezüglich der Unterrichtsorganisation sind mehrere Modelle vorgesehen, sowohl parallele Arbeit der Gruppen an unterschiedlichen Inhalten als auch Unterricht im Plenum.[517] Auch wird die Möglichkeit angesprochen, einzelne Schülerinnen oder

513. Nach Verlagsangaben gilt das Druckende ebenfalls für den Band 2, während die Bände 3 und 4 bis 1983 gedruckt wurden; insgesamt war das Unterrichtswerk bis 1985 Teil des Schroedel-Programms.
514. Radatz et. al., a. a. O., S. 9; Brauner, Rudolf: Empirische Untersuchungen über mathematische Unterrichtswerke, in: Glatfeld, Schulbuch, S. 25.
515. Müller & Wittmann, 1984, S. 148; vgl. Griesel, Tradition, S. 54, dort heißt es, dass es z. T. „ungewohnte didaktisch-methodische Konzepte“ gab, die aufgrund ihres revolutionären Charakters nicht weit verbreitet gewesen seien, es ist recht wahrscheinlich, dass Griesel hier *alef* einschließt.
516. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 16.
517. vgl. beispielhaft die Unterrichtsprotokolle in Alef 1, 1969/70, S. 36-40 und 178-181 bzw. S. 57-60.

Schüler, die sich nicht ausreichend integrieren, vorübergehend aus einer Gruppe zu nehmen und anderweitig zu beschäftigen[518]. Die Arbeitsblätter wiederum sind zu einem großen Teil für Einzelarbeit vorgesehen.

Aufgrund des methodischen Schwerpunkts auf der Gruppenarbeit werden Hausaufgaben für nicht sinnvoll gehalten, sind daher im Allgemeinen nicht vorgesehen, werden aber auch nicht völlig kategorisch ausgeschlossen[519].

Die Konzeption von *alef* ist durch zeitgenössische psychologische Forschung beeinflusst. Dies wird an vielen Stellen implizit, an einigen aber auch explizit deutlich. Piaget wird mehrmals genannt, einige Spiele sind ausdrücklich von Dienes übernommen, weitere methodische Entscheidungen werden allgemein durch psychologische Erkenntnisse begründet[520]. Auch Klafki, und damit ein zeitgenössischer Pädagoge, wird zitiert[521]. Insgesamt ist also festzustellen, dass die bildungswissenschaftlichen Bezugsfächer berücksichtigt werden.

Als oberstes **Ziel** ihres Lehrgangs formulieren Bauersfeld und seine Mitarbeiter, dass Kinder rechnen lernen, jedoch ausdrücklich nicht nur auswendig – worin die Ursache für die weit verbreiteten nicht zufriedenstellenden Rechenleistungen[522] gesehen wird –, sondern verständig. Sie gehen dabei insofern einen neuen Weg, dass sie das Rechnen nicht als voraussetzungslos betrachten; Zahlen und Operationen sollen durch allgemeine strukturelle Denkweisen und Begriffe grundgelegt werden.[523] Daraus ergibt sich, dass das primäre Lernziel erweitert wird um den „Aufbau eines elementaren Denk- und Sprachverhaltens“[524]. Besonders Letzteres steht zusätzlich im Zusammenhang mit der Idee einer kompensatorischen Erziehung, die allen Kindern, unabhängig von sozialer und sprachlicher Herkunft, gleichermaßen den Aufbau einer präzisen und bewusst reflektierten Sprache vermitteln soll[525]. Bereits hier wird deutlich, dass die Autoren von *alef* mit ihrem Lehrgang neben

518. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 16 und 173.
519. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 21 und 114 f.
520. vgl. zu Piaget Alef 1, 1969/70, S. 55, 176 und 188, zu Dienes ebenda, S. 172 und 212, zu Weiteren ebenda, S. 42 und 66 f.
521. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 15.
522. vgl. Karaschewski, Irrwege, S. XII; Bauersfeld, Neue Ansätze, S. 6.
523. Alef 1, 1969/70, S. 7; Bauersfeld, Heinrich & Weis, Valentin: Aus dem „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule“, in: Arbeitskreis Curriculum [Hrsg.]: Thema Curriculum. Beiträge zur Theorie und Praxis, Bebenhausen: Rotsch, 1972, S. 72.
524. Alef 1, 1969/70, S. 9.
525. Nach Bernstein, a. a. O., wird kompensatorische Erziehung häufig als eine Anpassung der Kinder der Unter- an die der Mittel- und Oberschicht verstanden, eine Sichtweise, die Bernstein selbst aber strikt ablehnt und von der sich auch Bauersfeld et. al. ausdrücklich distanzieren, Alef 1, 1969/70, S. 14; so auch Zumpe, a. a. O., S. 185 und S. 192 f., Zumpe spricht hier davon, dass in *alef* stattdessen ein eher „komplementäre[r] Ansatz“ verfolgt wird, der sich mit der Zeit noch weiter zu einem „emanzipatorischen Konzept“ entwickelt.

fachlichen auch ***soziale*** und ***pädagogische Ziele*** verfolgen. Kooperationsfähigkeit soll ebenso geschult werden wie selbstständiges Arbeiten; Gruppenarbeit dient darüber hinaus der Förderung einer positiven Einstellung zur Mathematik.[526] Auch innerhalb des Faches sollen die Schülerinnen und Schüler nicht nur rein inhaltliche und sprachliche Fähigkeiten, sondern weitere prozessuale Kompetenzen wie die Fähigkeit zum intermodalen Transfer, bewegliches Denken und Problemlösestrategien erwerben[527]. Speziell die aus der Geometrie aufgenommenen Inhalte haben darüber hinaus das Ziel, „fundamentale Ansätze für die Verarbeitung und Gliederung [...] von Erfahrungen" und damit ein Instrumentarium zum Ordnen und Beschreiben der Umwelt bereitzustellen[528].

Diese, offenbar gegenüber dem traditionellen Rechenunterricht neuen, Ziele bedingen als **Inhalte** zentrale mathematische Begriffe, die Strukturen für logisches Denken sowie Bausteine für präzise Sprache bereithalten und zudem geeignet sind, Zahlbegriff und -operationen zu fundieren. Die Autoren von *alef* sind nach eigener Angabe dabei in „der neueren Mathematik" fündig geworden[529] und damit in Begriffen wie Menge, Relation und Abbildung, die dem Lehrgang zugrunde liegen. Erwähnenswert ist, dass durchweg betont wird, dass die Begriffe zu einem so frühen Zeitpunkt lediglich präfiguriert werden sollen und können und entsprechend nicht mit ihnen selbst, sondern mit Modellen der Begriffe gearbeitet wird[530].

Der Überzeugung entsprechend, dass der ***Zahlbegriff*** fundierter Vorbereitung bedarf, beginnt der Lehrgang mit einem ausführlichen pränumerischen Teil[531]. *Alef 1* ist in der ersten Auflage weitgehend zahlfrei, die Einführung der Zahlzeichen ist erst für Woche 33 vorgesehen, die Rechenoperationen in Klasse 2. Das bedeutet nicht, dass die Nutzung von Zahlwörtern bei passender Gelegenheit kategorisch abgelehnt wird, vielmehr werden sie zunächst als Worte aus der Umgangssprache verwendet, also als Alltags-, noch nicht als Fachbegriffe; weiterer Umgang wird der Lehrperson überlassen[532].

Übungen zur Vorbereitung der Zahlen sind ab Woche 29 vorgesehen und berücksichtigen verschiedene Zahlaspekte[533]. Der ordinale Zahlbegriff wird durch stufenweises Ordnen grundgelegt, beginnend mit dem Ordnen von Gegenständen zu-

526. Bauersfeld & Weis, a. a. O., S. 71 und 73; zur konkreten Umsetzung vgl. z. B. Alef 1, 1969/70, S. 42.
527. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 72 f.; Bauersfeld, Heinrich: Mathematik in der Grundschule? in: Neuhaus, Elisabeth: Die Reform der Grundschule, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1970, S. 39.
528. Alef 1, 1969/70, S. 63.
529. Alef 1, 1969/70, S. 7.
530. ebenda.
531. Alef 1, 1969/70, S. 8; dort wird auch auf die Übereinstimmung mit den Empfehlungen der KMK von 1968 hingewiesen.
532. Alef 1, 1969/70, S. 205; vgl. ebenda, S. 26.
533. Zu den verschiedenen Zahlaspekten vgl. beispielhaft Padberg & Benz, a. a. O., S. 13-16.

nächst nach Eigenschaften (z. B. am Baumdiagramm), dann nach Größe bzw. Länge, hin zum Ordnen von Mengen nach Mächtigkeit[534], ein Vorgehen, das den Maßzahlaspekt (im Ordnen nach Längen) sowie den Kardinalzahlaspekt bereits einbezieht. Die systematische Einführung der Zahlen erfolgt schließlich kardinal über Mächtigkeitsvergleiche und entsprechende Klassenbildung. Sie entspricht damit der fachmathematischen Definition einer (natürlichen) Zahl als einer Klasse gleichmächtiger Mengen. Schon während der Einführung über Mengen werden diese wiederum geordnet, bevor direkt im Anschluss die Ordnungszahlen – nun explizit – als Platznummern eingeführt werden[535]. Zählen spielt in *alef 1* dagegen keine Rolle.

Der Begriff der ***Menge***, der der Arithmetik zugrunde liegt, wird ebenso wenig wie der der Zahl als voraussetzungslos betrachtet und durch spielerische Übungen zum Feststellen und Benennen von Eigenschaften an Dingen – vorwiegend an den zum Programm gehörenden Plättchen – sorgfältig vorbereitet. Die Kombination und Negation von Eigenschaften führt dabei gleichzeitig auf, zu Beginn noch unsystematische, aussagenlogische Verknüpfungen („und", „oder", „nicht"), die wiederum Voraussetzung für das Verständnis der entsprechenden Mengenoperationen und ihrer Begriffe (Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Rest-/ Ergänzungsmenge, Teilmenge) sind[536]. Die Bezeichnung Menge wird in der 18. Woche des 1. Schuljahres eingeführt, gemeinsam mit den aussagenlogischen Formulierungen und Symbolen[537]. Die Darstellung von Mengen und Mengenoperationen im Venn-Diagramm wird ebenfalls nicht als unmittelbar verständlich vorausgesetzt und durch topologische Übungen vorbereitet[538].

Vor dem Hintergrund der Ziele des Lehrgangs kommt ***Relationen*** als „Grundelemente[n] unserer Sprache und unseres Denkens"[539] eine wichtige Rolle zu, die sich im Umfang ihrer Behandlung widerspiegelt. Bereits in den ersten Wochen werden einfache Relationen im Rahmen der Benennung von Eigenschaften an Dingen präfiguriert (etwa in Paarbildungen nach der Vorgabe „... hat dieselbe Farbe wie ..."[540]). Im Verlauf des Schuljahres treten Relationen dann häufig in Verbindung mit geometrischen Inhalten auf, so z. B. bei der Thematisierung von Lagebeziehungen oder beim Vergleich von Formen (z. B. „... hat mehr Ecken als ... "), außerdem in Anlehnung an Alltagssituationen (z. B. „... ist Bruder von..."')[541].

534. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 183-189 und 205-207.
535. zur Klassenbildung vgl. Alef 1, 1969/70, S. 205 f.; zur konkreten Einführung vgl. ebenda, S. 210 f.
536. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 28 f., 32 f. und 49 f.
537. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 102-106.
538. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 94-96.
539. Alef 1, 1969/70, S. 86.
540. Alef 1, 1969/70, S. 33.
541. Zitate: Alef 1, 1969/70, S. 87 und 108 f.; vgl. ebenda, S. 61.

Die bevorzugte Darstellungsform für Relationen ist das Pfeildiagramm, dem auch eine besondere Eignung zur Einführung in die Klasseneinteilung durch Äquivalenzrelationen zugesprochen wird[542].

Als weiteres zentrales und teilgebietsübergreifendes Konzept wird der ***Abbildungsbegriff*** präfiguriert. Dabei offenbaren Bauersfeld und seine Mitarbeiter ein breites Verständnis des Begriffs, der über Symmetrieabbildungen in der Geometrie und die Idee der Zuordnung hinausgeht und auch als Voraussetzung für das Verständnis arithmetischer Zusammenhänge wie z. B. des Verdoppelns gesehen wird[543]. Um die Allgemeinheit des Begriffs zu unterstreichen, wird die Bezeichnung „Abbildung" hier ausdrücklich der Bezeichnung „Zuordnung" vorgezogen[544]. Die konkrete Einführung erfolgt spielerisch über das Legen und Nachlegen von Plättchen nach vorgegebenen Abbildungsvorschriften[545].

Einen sehr breiten Raum in *alef 1* nimmt der ***geometrische*** Teil des Kurses ein, der sich besonders dadurch auszeichnet, dass er neben Kongruenzabbildungen und einer propädeutischen Formenlehre (im Zuge derer zahlreiche Begriffe wie Winkel, Ähnlichkeit, Parkettierung etc. bereits „nebenbei" angebahnt werden[546]) elementare Begriffe der Topologie („innen", „außen", „zwischen", „offen", „geschlossen") umfasst. Neben der Bereitstellung von Begriffen zur präzisen Beschreibung der Umwelt dienen diese auch der Vorbereitung der Mengendarstellung in Seilen bzw. Venn-Diagrammen.[547] Symmetrie soll sich ausdrücklich nicht auf Spiegelsymmetrie beschränken, sondern von Anfang an die Drehsymmetrie mit einbeziehen, um der Gefahr der landläufig üblichen Einengung des Begriffs entgegenzuwirken[548]. Ebenso greifen die Autoren von *alef* die Forderung auf, die Behandlung der euklidischen Geometrie nicht auf das Zweidimensionale zu begrenzen, sondern möglichst früh auch Elemente der Stereometrie aufzugreifen[549].

Den einzelnen Inhalten übergeordnet sind Darstellungsschemata, die zum einen als Hilfsmittel in unterschiedlichen Inhaltsbereichen dienen, zum anderen selbst das strukturelle und strategische Denken an sich fördern. Es handelt sich dabei vor allem um Matrizen bzw. Tabellen, Baumdiagramme und schließlich Venn- und Streifendiagramme[550].

542. Alef 1, 1969/70, S. 122.
543. Alef 1, 1969/70, S. 155 f.
544. Alef 1, 1969/70, S. 161.
545. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 69.
546. Alef 1, 1969/70, S. 34 und S. 76 f.
547. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 64, 78 f., 94 f. und 96.
548. Alef 1, 1969/70, S. 156.
549. Alef 1, 1969/70, S. 84 f.
550. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 44-47, 56 f., 70, 112-115 und S. 118 f.

Ein weiterer, von den konkreten fachlichen Inhalten weitgehend unabhängiger, Bestandteil des Lehrgangs sind die vorgestellten Strategiespiele, die einen Beitrag zur Übung übergeordneter mathematischer Handlungen – genannt werden hier „vorausschauendes und schlussfolgerndes Denken, Analysieren, Kombinieren“[551] – wie zum Erwerb heuristischer Strategien und damit zur Förderung einer allgemeinen Problemlösekompetenz leisten sollen.

Insgesamt ist festzustellen, dass der Lehrgang *alef 1* um mehrere ***fundamentale Begriffe*** herum aufgebaut ist, die neben fachlichen Inhalten auch Darstellungsformen und allgemeine mathematische Tätigkeiten einschließen. Die Kapitelthemen wechseln sich im Laufe des Schuljahres ab, so dass die Inhalte im Sinne eines ***Spiralcurriculums*** regelmäßig wieder aufgenommen und erweitert werden[552]. Es handelt sich bei Mengen, Relationen und Abbildungen um typische Begriffe der neuen Mathematik, insofern, als dass sie zum einen eine stabile Basis zum Aufbau der Mathematik liefern und sich zum anderen in vielen späteren Inhalten wiederfinden. Als besondere Leistung der Autoren muss hervorgehoben werden, dass die Inhalte nicht isoliert behandelt werden, sondern Querverbindungen zwischen den Begriffen den Kurs bestimmen, so dass sich der weitere Unterricht und damit insbesondere auch die Arithmetik auf ein regelrechtes Netz aus Grundlagen der Mathematik stützen kann.

Die **didaktisch-methodischen Prinzipien** sind dadurch bestimmt, dass die Darbietung der Unterrichtsinhalte auf für alle gleichermaßen vorgefertigten Abstraktionsstufen, wie sie offenbar im traditionellen Rechenunterricht üblich gewesen ist, von Bauersfeld et. al. ausdrücklich abgelehnt wird, und hierin liegt auch der Grund für den Verzicht auf ein Schülerbuch[553].

Mathematische Begriffe werden als mentale Ideen verstanden, die nicht veranschaulicht werden können, da jede Veranschaulichung nur eine Darstellung des Begriffs, nie aber den Begriff selbst liefern kann. Dementsprechend können sie nicht von außen gelehrt, sondern müssen vom Individuum selbstständig, über einen längeren Zeitraum gebildet, also individuell konstruiert werden[554]. Lerntheoretisch offenbart sich hier ein konstruktivistisches Verständnis von Begriffsbildung. Dies entspricht dem durchgängig vorgeschlagenen ***genetisch-entdeckenden Zugang***: Begriffe bzw. deren Präfigurationen und Strukturen werden aus Handlungen und Anschauungen abstrahiert – so z. B. geometrische Grundformen, aber auch die

551. Alef 1, 1969/70, S. 127, vgl. S. 127-140; vgl. auch Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard & Lubeseder, Ursula: Strategiespiele für die Grundschule, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1970.
552. vgl. z. B. Alef 1, 1969/70, S. 93.
553. Alef 1, 1969/70, S. 9 und 18.
554. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 12, 18 und 64 f.; Gnirk, Hans-Joachim: Arbeiterkinder gewinnen durch die „Neue Mathematik“, in: b:e 3 (1970), 10, S. 29.

Struktur der Matrix[555] –, individuell bei der Arbeit mit Arbeitsblättern gefestigt und die Strukturen schließlich auf andere Bezugssysteme transferiert[556]. Ein solches Verständnis von Lernen erfordert zwingend eine gewisse Offenheit des Unterrichts und damit neue Methoden. Paralleles Arbeiten in Gruppen, nicht nur auf verschiedenen Niveaus, sondern auch an unterschiedlichen Inhalten, ist ausdrücklich vorgesehen[557]; Potentiale zur Differenzierung werden an vielen Stellen hervorgehoben. Bestimmte Inhalte sind von vorneherein einem Minimalkursus zugeordnet, andere dienen ausdrücklich der qualitativen Ergänzung[558]. Zahlreiche Aufgaben sind offen, indem ihre Komplexität leicht modifiziert werden kann – z. B. durch Variierung der gegebenen Grundmenge oder des zugehörigen Ordnungsschemas –, sich weiterführende Impulse anbieten oder sie verschiedene Lösungswege bieten, was beispielsweise besonders bei den Strategiespielen der Fall ist[559]. Das Ziel, Gelegenheiten zur Herausbildung heuristischer Strategien bereitzustellen, erfordert darüber hinaus Aufgabenstellungen, die in der Hinsicht offen sind, dass sie Probleme darstellen, für die zunächst kein Lösungsweg offensichtlich bereitsteht. *Alef 1* tut dem an diversen Stellen Genüge. Als Beispiele seien hier die Bearbeitung der bekannten Unterschiedsspiele in neuer Darstellung und die zahlreichen Arbeitsblätter zur Geometrie, in denen Formen mit den Plättchen des Formenspiels gelegt werden müssen, genannt[560].

Eine konsequente Differenzierung setzt eine regelmäßige Diagnose der individuellen Fähigkeiten voraus. Daher ist ein Teil der Arbeitsblätter explizit zum Testen vorgesehen, andere sind außerdem zur Kontrolle und Diagnose geeignet[561]. Fehlerkontrolle soll soweit wie möglich nicht durch die Lehrperson erfolgen, sondern durch die Kinder in den Arbeitsgruppen selbst. Z. T. verfügen auch die Aufgaben über eine automatische Selbstkontrolle, wenn etwa ein Legespiel am Ende „aufgehen“ muss[562].

Auf die Nutzung verschiedener Repräsentationsformen wird großer Wert gelegt und somit das auf Bruner zurückgehende EIS-Prinzip konsequent angewendet. Dies geschieht sowohl explizit als auch an vielen Stellen implizit, z. B. wenn bei der Einführung von Mengen die an sich ikonischen Venn-Diagramme zunächst durch

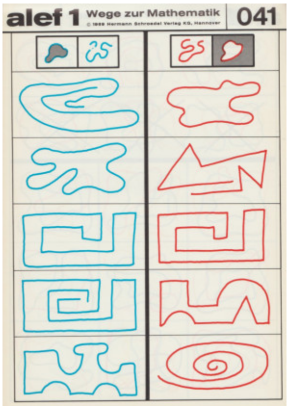
555. vgl. Alef 1, 1969/70, 56 f.
556. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 9; expliziter Bezug auf ein genetisches Vorgehen findet sich auf S. 61 und 90.
557. vgl. die Unterrichtsentwürfe und -protokolle, die sich im Handbuch finden, Alef 1, 1969/70, S. 36-40, 178-181, 191-196 und 200-204.
558. Alef 1, 1969/70, S. 2 und 20.
559. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 10 f., 75 und 97; auch die Berücksichtigung unterschiedlicher Sprach- (s. u.) und Schreibfähigkeiten (S. 89) gehört hierzu.
560. Alef 1, 1969/70, S. 176 und z. B. AB 001-004, 065-068 und 092-094.
561. Alef 1, 1969/70, S. 8 und 20; vgl. ebenda, S. 47 und 89 sowie AB 011-014 und 031-034.
562. Nach Beobachtung der Autoren minimiert eine eigenständige Fehlerkontrolle sogar die Fehlerhäufigkeit, Alef 1, 1969/70, S. 10; vgl. ebenda, S. 163.

Seile und Plättchen enaktiv dargestellt und mit Mengenklammer und Sprechweise sogleich um die symbolischen Repräsentationen ergänzt werden[563]. Für die 1. Klasse liegt dabei ein deutlicher Schwerpunkt auf der enaktiven und der ikonischen Ebene. Die Wertschätzung der händischen Herangehensweise wird bereits deutlich angesichts der zum Lehrgang gehörigen Materialien und der bevorzugten Methode des Lernspiels. Bildliche Darstellungen werden beispielsweise beim Bearbeiten der Arbeitsblätter genutzt bzw. ergänzt (Relationsgraphen, Ordnungsschemata, zweidimensionale Darstellungen der Plättchen des Begriffs-/ Formenspiels…) oder von den Schülerinnen und Schülern selbst erstellt, wenn sie mit dem Material gefundene Ergebnisse abzeichnen. Häufig werden die beiden Darstellungsebenen verknüpft, etwa wenn die Plättchen des Formenspiels aktiv-handelnd in zweidimensionale Ordnungsschemata einsortiert werden, wie dies z. B. bei der Einführung des Baumes oder bei der Erarbeitung der Matrix vorgeschlagen wird, oder beim Erstellen dreh- und spiegelsymmetrischer Figuren mit dem Formenspiel auf Arbeitsblättern[564]. Trotz dieser fundamentalen Bedeutung anschaulicher Darstellungen als Grundlage für die Begriffsbildung werden symbolische Repräsentationen keineswegs vernachlässigt. Zum einen werden die Kinder mit Elementen der fachspezifischen Symbolsprache bekannt gemacht (z. B. den aussagenlogischen Zeichen $\wedge$ und $\vee$ für „und“ bzw. „oder“ und den Mengenklammern[565]), dies jedoch nur in geringem Ausmaß.

Entsprechend dem Ziel der kompensatorischen Spracherziehung kommt der symbolischen Ebene zum anderen im Hinblick auf die Sprachbildung eine doppelte Rolle zu. Die Autoren von *alef 1* äußern die Überzeugung, dass Sprache keine unabdingbare Voraussetzung für Begriffsbildung ist, sondern im Gegenteil, „daß die Ursache sprachlicher Unterentwicklungen nicht selten in der Unterentwickeltheit der operativen (nicht-verbalen) Intelligenz zu suchen ist.“[566], dass also das Bilden nicht-sprachlicher kognitiver Schemata eine Voraussetzung für den Spracherwerb darstellt. Dies schlägt sich im gesamten Band in einer Vielzahl ikonisch-symbolischer Aufgabenstellungen auf den Arbeitsblättern nieder, die ebenfalls sprachfreie Lösungen erfordern[567]. Um nicht-verbale Arbeit auch im Klassenunterricht und in der Gruppenarbeit über weite Strecken zu ermöglichen, gehört zum Programm ein Block mit einem Klassensatz Symbolkarten, die neben ikonischen Arbeitsanweisungen (z. B. Abbildungsvorschriften) Merkmalskarten enthalten, die die Eigenschaften der Plättchen darstellen und bei der Arbeit mit

563. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 99 und 102.
564. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 56 f. und 72 f. sowie AB 065-068 und 077-082.
565. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 102 und 104.
566. Alef 1, 1969/70, S. 212; vgl. ebenda, S. 12 f.
567. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 14, 42, 106 und 173; vgl. beispielhaft die Arbeitsblätter zu den topologischen Grundbegriffen, ebenda, AB 027-030, 041-044 und 047-050.

dem Begriffsspiel zum Einsatz kommen. Es handelt sich hier zwar um symbolische Darstellungen, die jedoch aufgrund ihrer Analogie zum dargestellten Sachverhalt nicht abstrakt sind und somit gut geeignet, die Entwicklung logischer Denkprozesse zu unterstützen[568]. Nichtsdestotrotz sollen – ohne dass die Verbalisierung ausdrücklich gefordert oder gar erzwungen wird – ständig Sprachanlässe geschaffen (so z. B. wenn im Rahmen von Lernspielen die Benennung der Plättchen notwendig wird) und schließlich nach und nach eine präzise Sprache aufgebaut werden.[569] Die Lehrperson ist daher angehalten, den eigenen sprachlichen Anteil möglichst gering zu halten, Formulierungen aber stets mit Bedacht zu wählen, und dabei eine saubere Trennung zwischen Fach- und Alltagssprache zu wahren[570].



Beispiel für nicht-verbale Aufgabenstellungen auf einem Arbeitsblatt zur Topologie (Kennzeichnung des Inneren und des Äußeren geschlossener Kurven) aus *alef 1*

Neben dem Wechsel der Repräsentationsform wird auch innerhalb einer Darstellungsebene die Variation der Veranschaulichung – im Sinne von Dienes – im Lehrgang berücksichtigt, wenn die Begriffsbildung durch „Bereicherung der kognitiven Schemata“ in Form der Ergänzung durch alternative, aber strukturgleiche Darstellungen unterstützt wird[571].

Auch wenn die Plättchen des Begriffsspiels – und damit die strukturierten Materialien – z. T. durch unstrukturierte Alltagsgegenstände als Unterrichtsmaterialien ergänzt werden sollen, liegt der Schwerpunkt klar auf der Arbeit mit den Plättchen. Es handelt sich hierbei um eine bewusste Entscheidung in der Konzeption des Kurses, die pädagogisch dadurch begründet wird, dass affektiven Störungen vorgebeugt werden soll[572]. Gerade die Tatsache also, dass es sich hierbei nicht um Dinge aus dem häuslichen und familiären Umfeld handelt, wird als Gewinn gesehen, da die Plättchen für alle Kinder gleichermaßen durch Vorerfahrungen unbelastete Arbeitsmittel darstellen, eine Argumentation, die in Einklang mit dem Ziel der

568. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 43 f.; einem persönlichen Gespräch mit Knut Rickmeyer (der zu den Mitarbeitern an *alef* gehört) zufolge, wurden die Symbole für „groß“ und „klein“ – die sicher die am wenigsten auf Anhieb selbsterklärenden sind – von den Projektkindern selbst „erfunden“, es handelt sich hier also ganz offenbar um kindgerechte symbolische Darstellungen.
569. Alef 1, 1969/70, S. 19 und 106; vgl. ebenda, S. 22 f. und 28 f.; als Ziel für alle Kinder am Ende der 1. Klasse wird die Fähigkeit formuliert, Mengen nach ihren definierenden Eigenschaften zu benennen, ebenda, S. 114.
570. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 61, 80 f. und 86.
571. Alef 1, 1969/70, S. 118, hier beispielhaft: Venn-Diagramme ergänzt durch Streifendiagramme, die der Straßenkreuzung bei Neunzig & Sorger entsprechen.
572. z. B. bei der Mengenbildung: Diese soll zuerst an den Plättchen erfolgen, erst im Anschluss sollen die Kinder selbst zu Mengenelementen werden, Alef 1, 1969/70, S. 103.

kompensatorischen Erziehung steht. Die Inhalte des Lehrgangs verfügen nichtsdestotrotz über Bezug zum Alltag, nur ist dieser nicht auf den ersten Blick offensichtlich. Es handelt sich hierbei weniger um einen direkten Alltagsbezug im Sinne des Sachrechnens oder einer Kontextualisierung durch Anwendungsprobleme, sondern vielmehr um einen indirekten Zusammenhang. Zum einen werden Alltagsvorstellungen herangezogen, wo sie dem Lernen nutzen – z. B. als Grundvorstellungen zur Geometrie, Anknüpfungspunkte für Ordnungsschemata oder Eselsbrücken[573]. Zum anderen wird darauf hingewiesen, dass die mathematischen Grundbegriffe „Transformation[en] vertrauter Sachverhalte in Zeichen und in Sprache" darstellen[574] und dementsprechend aufgrund ihres Modellcharakters zur Beschreibung von Realsituationen angewendet werden können, somit also über Alltagsrelevanz verfügen[575].

Festzuhalten ist bis hierhin, dass die Autoren von *alef* in einem schlüssigen und kohärenten Gesamtkonzept eine Fülle didaktischer Fragen bei der Konzipierung ihres Lehrgangs berücksichtigt haben, die bis heute von höchster Relevanz bei der Planung und Entwicklung von Mathematikunterricht sind: Differenzierung, Diagnose, Aufbau von Strategien, Sprachbildung, Wechsel der Darstellungsformen, das alles vor dem Hintergrund eines auf einem konstruktivistischen Begriffsverständnis beruhenden genetisch-entdeckenden Zugangs und der Idee, das Curriculum zu einem prozess- und kompetenzorientierten Curriculum zu entwickeln[576].

573. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 72 f. (hier wird beschrieben, dass das Baumdiagramm bei der Einführung von den Schülerinnen und Schülern mit einem Schienennetz assoziiert wird, eine Vorstellung, die im weiteren Stundenverlauf konsequent aufgegriffen wird), 106 (um die Symbole für „und" und „oder" zu unterscheiden, wird $\wedge$ mit einer Klammer und $\vee$ mit einer Tüte assoziiert) und 157.
574. Alef 1, 1969/70, S. 99.
575. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 57 und 86; vgl. ebenso ebenda, S. 52, wo der Wettbewerb im Spiel – und damit eine Unterrichtsmethode – als Modell für ökonomisches Verhalten im Alltag interpretiert wird.
576. Bauersfeld & Weis, a. a. O, S. 65 und 70.

Alef 1, 2. Auflage, 1975

Die zweite Auflage von *alef 1* erschien 1975[577] und damit nach dem Abschluss des *Frankfurter Projekts*, was bedeutet, dass Ergebnisse aus der Evaluation des Projekts eingearbeitet werden konnten und auch wurden. Die Ergebnisse dienten im Wesentlichen der Bestätigung, dass der bisherige Lehrgang geeignet war, die in ihn gesetzten Ziele zu verwirklichen, weshalb das Grundkonzept des Kurses und die zugrunde liegenden didaktischen und pädagogischen Prinzipien nicht verändert wurden[578].

Nach wie vor liegt der Fokus des Anfangsunterrichts auf dem Aufbau einer präzisen Sprache und logischer Denkweisen. Dabei wird dem Aufbau kognitiver, auch nicht-verbaler, Schemata parallel zur bzw. als Voraussetzung für die Sprachbildung sowie als Mittel zum Aufbau von Problemlösefähigkeiten ein hoher Stellenwert eingeräumt, ebenso wie dem affektiven und sozialen Lernen.[579] Die Notwendigkeit konsequenter Differenzierung und regelmäßiger Diagnose wird weiterhin betont[580]. Methodisch folgt daraus wie zuvor die hervorgehobene Rolle der Gruppenarbeit und des Lernspiels, in dem beim Umgang mit den Materialien Struktur- und Ordnungsbegriffe quasi automatisch präfiguriert werden[581].

Dennoch ist der Lehrgang stark überarbeitet worden; es finden sich beträchtliche Unterschiede zwischen den Auflagen.[582] Bauersfeld und seine Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter geben an, dass es sich hierbei zum einen um Korrekturen, die sich aus weiteren Erfahrungen ergeben haben, zum anderen Teil aber um Reaktionen auf politische Entscheidungen handelt. Die Gesamtstruktur der Bände ist im Wesentlichen unverändert geblieben, lediglich der Verzicht auf die fachliche Einführung (aufgrund ausreichend verfügbarer Alternativen auf dem Markt)

577. Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Handbuch zum Lehrgang, Hannover: Schroedel, 1975; Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Arbeitsheft für den Schüler, Hannover: Schroedel, 1975 [im Folgenden: Alef 1, 1975], die Arbeitsblätter sind erneut durch das Format ihrer Seitenzahlen von den Handbuchseiten zu unterscheiden.
578. Alef 1, 1975, S. 7 und 10; zu den Ergebnissen der Evaluation s. weiter unten.
579. vgl. Alef 1, 1975, S. 12 f.
580. vgl. Alef 1, 1975, S. 13 und 17.
581. vgl. Alef 1, 1975, S. 9 und 13-15, wobei außerdem die Notwendigkeit stetiger Abwechslung der Sozialformen betont wird.
582. vgl. für den folgenden Absatz Alef 1, 1975, S. 10.

und die Auslagerung der Lösungen in einen separaten Band[583] führen dazu, dass das Lehrerhandbuch nur noch einen Band umfasst und damit besser handhabbar ist. Die Zusammenfassung der Lösungen entspricht ausdrücklich dem Wunsch der Lehrkräfte; offenbar hat hier im Zuge der Neubearbeitung also ein Dialog stattgefunden. Die wohl größte Veränderung liegt darin, dass die Behandlung der Zahlen deutlich vorgezogen wurde. Es handelt sich hier explizit nicht um eine freiwillige, sondern um eine „gegen [die] sachliche Überzeugung“ der Autoren getroffene Entscheidung, und somit auch nicht um eine Neuerung, die auf Erkenntnissen aus der Unterrichtserfahrung beruht oder aus didaktischen Gründen notwendig erscheint. Vielmehr findet sich hier ein Beispiel für die angesprochene Reaktion auf politische Vorgaben, da die in der Zwischenzeit veröffentlichten Richtlinien für alle Länder das Rechnen bis 20 bis zum Ende von Klasse 1 fordern, Vorgaben, die wiederum „unter dem politischen Druck der Öffentlichkeit und ihrer Reaktionen auf die ‚Mengenlehre‘“ als alternativlos erlassen worden seien.

Erste Vorerfahrungen zu Zahlen werden zwar früh aufgegriffen, zunächst aber nicht systematisch behandelt, sondern über einen gewissen Zeitraum vereinzelt eingestreut[584]. Ganz am Anfang steht dabei neben dem Anknüpfen an den Alltag das Umordnen von Punktemengen. Der Begriff der Mächtigkeit wird in Woche 11 eingeführt, die Zahlen und Zahlzeichen ab Woche 15 (gegenüber Woche 33 in der 1. Auflage). Letzteres erfolgt auf die gleiche Art wie in der 1. Auflage, über Mengenvergleiche und entsprechende Klassenbildung, also kardinal[585]. Dem voraus geht die Diagnose des Verständnisses von Mengeninvarianz gemäß Piaget unter der Nutzung von Aufgaben, die direkt aus dem Werk Piagets übernommen sind[586] – dieser Teil ist vollständig neu gegenüber der 1. Auflage –; der allgemeine Mengenbegriff ist dagegen hier noch nicht bekannt. Es fällt auf, dass direkt nach der Einführung der Zahl(zeich)en, noch im selben Kapitel Strategiespiele folgen, eine Zusammenstellung, die inhaltlich nicht so recht zu passen scheint. Möglicherweise spiegelt sich hierin ein gewisser Widerwille der Autoren, ihren Lehrgang allzu stark umzuordnen – die Spiele sind zeitlich etwa an der gleichen Stelle wie in der älteren Version – oder die Zahlen einen zu großen Raum gegenüber andere Inhalten einnehmen zu lassen; diese Vermutungen lassen sich aber nicht weiter belegen. Nach eigener Aussage von Bauersfeld et. al. sei der kardinale Aspekt vormals überbe-

583. Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Lösungsheft, Hannover: Schroedel, 1975.
584. vgl. Alef 1, 1975, S. 29 und 41, AB 005 f. und AB 019 f.; es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Reihenfolge der Inhalte, wie auch schon in der ersten Auflage, nicht dogmatisch vorgegeben sein soll, vgl. ebenda, S. 18, nichtsdestotrotz ist davon auszugehen, dass die Autoren eine Reihenfolge gewählt haben, die ihnen für die Praxis sinnvoll erschien.
585. vgl. Alef 1, 1975, S. 62-65 und AB 051-054.
586. vgl. Alef 1, 1975, S. 50 f.

tont gewesen, die Zahl dadurch zu einseitig fundiert, dieser Gefahr wird durch eine Ausweitung ordinaler Aspekte begegnet[587]. Auch hier wird auf Übungen von Piaget zurückgegriffen[588], die erstmals in der überarbeiteten Version genutzt werden, und auch hier fällt auf, dass auf Abschnitte zum Zahlbegriff unmittelbar andere Themen folgen. Insgesamt lässt sich deutlich ein stärkerer Bezug auf Piaget erkennen, allerdings ist zu berücksichtigen, dass die Kinder bei der Erarbeitung des Zahlbegriffs nach der Neuauflage auch fast ein halbes Jahr jünger sind und Teile der grundlegenden Begriffe, die u. a. der Fundierung desselben dienen sollen, noch nicht bearbeitet wurden, eine unveränderte Übernahme des ursprünglichen Vorgehens daher nicht angebracht gewesen wäre.

Die Rechenoperationen werden durch Arbeit an Punktmengen vorbereitet, die zunächst beliebig auf verschiedene Weisen gegliedert und dann in Teilmengen zerlegt werden. Die auf J. Wittmann zurückgehende Gliederung der Punktmuster wurde aus Band 2 der 1. Auflage übernommen, dabei lediglich etwas verknappt und in der Darstellung modernisiert[589]. Addition und Subtraktion werden schließlich sowohl aus Handlungen – die Grundlage des Piagetschen Operationsbegriffs sind – als auch aus Zuständen – also Zerlegungen – hergeleitet[590], und auch an weiteren Stellen wird das operative Prinzip umgesetzt, insbesondere im Üben mit Umkehr- und Nachbaraufgaben[591] oder mit dem Operator-Maschinen-Modell, das bereits in der 1. Auflage in den Rechenübungen vorherrschend ist. Als zusätzliches Modell zur Darstellung der additiven Operationen im Sinne einer Variation der Veranschaulichung wird der Zahlenstrahl eingeführt. Auch dieser wird bereits in der älteren Auflage genutzt, hier aber erst im Band für die 3. Klasse.[592] Analog zum ersten Aufgreifen der Zahlen werden die Operationen anhand von Rechengeschichten mit Alltagserfahrungen verknüpft, diese aber direkt auf die „merkmalsarmen Darstellungen mit Punktmengen" übertragen und sehr bald durch die zugehörigen Zahlensätze ergänzt[593], so dass hier Repräsentationsformen und Abstraktionsgrad

587. vgl. Alef 1, 1975, S. 10.
588. vgl. Alef 1, 1975, S. 78 f.
589. vgl. Alef 1, 1975, AB 039, 057, 060, 061 und 068-070 sowie S. 74 f., wobei Wittmann hier im Gegensatz zum ursprünglichen Band für das 2. Schuljahr nicht mehr namentlich genannt wird; vgl. Bauersfeld, Heinrich, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 2. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Hannover: Schroedel, 1970, S. 13, und Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 2. Wege zur Mathematik; Arbeitsblätter, Hannover: Schroedel, 1970, AB 007, 010, 011 und 014 [im Folgenden: Alef 2].
590. vgl. Alef 1, 1975, S. 90.
591. vgl. Alef 1, 1975, S. 90 und 97, wobei der Schwerpunkt beim operativen Üben weniger auf dem Handeln als auf der Zerlegung als Darstellung für die Operationen liegt.
592. vgl. Alef 1, 1975, S. 99; vgl. z. B. Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 3. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Hannover: Schroedel, 1972, AB 015 [im Folgenden: Alef 3].
593. Alef 1, 1975, S. 90 f., vgl. ebenda, S. 96 und AB 080-083.

gewechselt werden. Neu im 1. Schuljahr ist neben der Addition und Subtraktion im Allgemeinen auch der spezielle Bereich des Sachrechnens in Form des Ordnens, Vergleichens und Wechselns von Geld, wenn auch nur in elementarster Form mit den Zahlen 0-9. Wie schon an früherer Stelle werden diese Aufgaben zwischen anderen Themen vereinzelt eingestreut[594], auch dieser Themenbereich wird in der 1. Auflage erst im 3. Schuljahr eingeführt[595].

Trotz anders formulierter Absicht[596] ist der Umfang der Geometrie zugunsten der Arithmetik erheblich verringert worden. Die Drehung wird jetzt erst im 2. Schuljahr thematisiert, Kongruenzabbildungen bleiben damit auf das Beispiel Spiegelung beschränkt[597], obgleich in der früheren Auflage die Wichtigkeit der gleichzeitigen Behandlung einer weiteren Abbildung ausdrücklich betont wurde. Es ist also auch hier davon auszugehen, dass diese Änderung nicht der Überzeugung der Autoren entspricht. Die topologischen Grundbegriffe werden nun erst in Woche 18 statt – wie zuvor – in Woche 8 eingeführt[598], zu den geometrischen Begriffen gibt es insgesamt weit weniger Arbeitsblätter. Auf der anderen Seite hat es in diesem Gebiet kleinere Ergänzungen gegeben. Auch dreidimensionale Objekte sollen auf Symmetrie untersucht werden – damit wird der eigenen Forderung aus der 1. Auflage, möglichst früh die Stereometrie einzubeziehen, genüge getan –, und die Darstellungen in der Topologie werden um rechteckige Gebiete ergänzt, um die Darstellung über Kreise hinaus zu variieren[599].

Die spätere Einführung der Topologie hat erheblichen Einfluss auf die Behandlung des Mengenbegriffs. Da zentrale Begriffe wie „innen“ und „außen“ nach wie vor als Grundlage der Mengendarstellung im Venn-Diagramm verstanden werden[600], werden die Schülerinnen und Schüler erst in einem späteren Kapitel mit dieser bekannt gemacht. Bemerkenswert ist, dass Zahlbegriff, Zahlzeichen und Ordinalzahl zu diesem Zeitpunkt bereits eingeführt sind. Die Einführung erfolgt zwar über Mengenvergleiche und Klassenbildung, die Kinder haben an dieser Stelle aber nur erst einen präformalen Mengenbegriff, der u. a. auf dem Wittmannschen Gliedern von Punktmengen beruht; die Menge als formales Objekt haben sie noch nicht kennen gelernt. Der Anspruch, den Begriff der Menge „vor allem für den Aufbau einer präziseren Sprache, für einen bewußteren Umgang mit Sprache“ einzusetzen[601]

594. vgl. Alef 1, 1975, S. 101 f., AB 099, 102 und 103.
595. vgl. Alef 3, 1972.
596. vgl. Alef 1, 1975, S. 10.
597. Alef 1, 1975, S. 92.
598. vgl. Alef 1, 1975, S. 77 f.
599. Alef 1, 1975, S. 80.
600. vgl. ebenda.

– und damit nicht primär zur Fundierung des Zahlbegriffs – wird hier deutlich umgesetzt.

Das Einführen der Mengen über Venn-Diagramme geht wie schon in der 1. Auflage mit der Einführung aussagenlogischer Verknüpfungen einher[602], auf die zugehörige Symbolik wird aber bei beidem verzichtet, stattdessen wird diese ins 2. Schuljahr verschoben. Hierbei handelt es sich ausdrücklich um eine didaktische Korrektur der vorherigen Überbetonung und der zugrunde liegenden „Fehleinschätzung“[603].

Weitere Änderungen betreffen vor allem den Themenbereich der Stellenwertsysteme und damit die 2. Klasse, weshalb sie hier nicht weitergehend betrachtet werden.

Umsetzung und Rezeption

Die Tatsache, dass es sich bei *alef* um ein mehrfach in der Praxis durchgeführtes, den Beobachtungen entsprechend revidiertes und empirisch evaluiertes Programm handelt, lässt zunächst einmal auf grundsätzliche Umsetzbarkeit des Lehrgangs schließen. Zudem geben die Darstellungen im Handbuch immer wieder Einblick in die Praxis der Arbeit mit den Kindern, wie im bereits erwähnten Beispiel der Identifikation von Baumdiagrammen mit einem Schienennetz[604] oder in den zahlreichen enthaltenen Unterrichtsprotokollen, in denen Unterrichtsszenarien nicht nur entworfen, sondern nach der Durchführung beschrieben werden. Wenn wir davon ausgehen, dass diese Beschreibungen realistisch sind[605], liefern sie uns Quellen über die mögliche Unterrichtspraxis mit *alef*. In allen Stunden wird großer Wert auf Differenzierung gelegt, wahlweise durch verschiedene Arbeitsblätter in einer methodisch verhältnismäßig konventionellen Stunde oder weitergehend, in Form arbeitsteiliger Gruppenarbeit, in der die Gruppen nicht nur auf unterschiedlichen

601. Alef 1, 1969/70, S. 237.
602. vgl. Alef 1, 1975, S. 83-85.
603. Alef 1, 1975, S. 10; vgl. ebenda, 88 f.
604. Aus Gnirk, a. a. O., S. 28, geht hervor, dass die „sogenannten „Eisenbahnspiel[pläne]““ (bei der Bezeichnung „Eisenbahnspielplätze[]“ in der Quelle handelt es sich vermutlich um einen Druckfehler) den Kindern gegenüber auch mit der entsprechenden Bezeichnung vorgestellt werden. Für weitere Unterrichtsbeispiele vgl. ebenda, S. 28 f.
605. In Ermangelung gegensinniger Quellen und da die Protokolle plausibel sind, müssen wir an dieser Stelle davon ausgehen, dass es sich um verlässliche Quellen handelt. Zumindest kann vor dem Hintergrund der Vorgeschichte des Lehrwerks wohl ausgeschlossen werden, dass es sich um zu Werbezwecken stark geschönte Darstellungen aufgrund erheblicher kommerzieller Interessen handelt. Auf den Unterricht in den ursprünglichen Experimentalklassen des *Frankfurter Projekts* lassen sich aufgrund der zahlreichen Um- und Überarbeitungen jedoch kaum noch Rückschlüsse ziehen, Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 130.

Niveaus, sondern auch an verschiedenen Inhalten arbeiten[606]. Dieser Unterrichtsorganisation entsprechen die jeweiligen problemorientierten Aufgabenstellungen, die im Laufe der Stunden von den Schülerinnen und Schülern – z. T. nach weiterführenden Impulsen durch die jeweilige Lehrkraft – bewältigt werden; von besonderen Schwierigkeiten, außer denen, die mit der Herausforderung durch offene Problemstellungen natürlicherweise einhergehen (z. B. in der Verbalisierung), wird dabei nicht berichtet[607]. Stattdessen werden Beobachtungen wiedergegeben, nach denen die Arbeit mit dem Formenspiel bei allen – und damit ausdrücklich auch den schwächeren –Schülerinnen und Schülern Erfolgserlebnisse hervorruft, die Kinder dem Unterricht mit großem Interesse folgen, und sie gute Mitarbeit sowie insbesondere gutes Sozialverhalten zeigen[608]. Klar wird aber auch, welchen hohen Anspruch gerade die völlig neue Unterrichtsorganisation einer solchen arbeitsteiligen Umsetzung des Kurses an die Lehrperson stellt. Sie benötigt einen guten Überblick über die Klasse, vor allem aber große inhaltliche Sicherheit im gesamten Lehrgang und entsprechende diagnostische Fähigkeiten, um angemessen auf Schwierigkeiten reagieren und sich flexibel zwischen verschiedenen Niveaus bewegen zu können. Neben den im Zuge der Differenzierung auftretenden unterschiedlichen Leistungsniveaus erfordern auch die variierenden Inhalte flexibles Denken. Gleichzeitig ist es sicher gerade dieser ständige gedankliche Wechsel zwischen den Themen und Begriffen, der Vernetzung und Flexibilität im Denken bei allen Beteiligten begünstigt und fördert.

An diversen Stellen wird deutlich, dass didaktisch-methodische Entscheidungen explizit auf der Basis von Unterrichtserfahrungen getroffen worden sind und damit auch vorhandene Schwächen korrigiert werden konnten. Beispielhaft sei hier die gemeinsame Einführung der aussagenlogischen Begriffe „und“ und „oder“ genannt, die damit begründet wird, dass die zunächst nacheinander erfolgende Einführung dazu geführt hat, dass das zuerst bekannte „und“ so tief verankert war, dass es später regelmäßig mit dem „oder“ verwechselt wurde, sowie die erhebliche Reduzierung der Symbolik von der ersten zur zweiten Auflage[609]. Auch ermöglicht

606. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 36-40, 57-60, 178-181, 191-196 und 200-204; die Festigung und Übung des neuen Inhalts erfolgt zwar auch im ersten Fall in Gruppenarbeit, die Erarbeitung aber im Plenum.

607. Da die korrekte und präzise Verbalisierung von Sachverhalten ausdrückliches (Fern-)Ziel des Unterrichts ist, sind diesbezügliche Schwierigkeiten natürlicherweise zu erwarten, also sozusagen von vorneherein eingeplant; bei motorischen Defiziten, unterschiedlichem Arbeitstempo sowie beim Schummeln eines Schülers während des Spiels des Plättchenratens handelt es sich dagegen um vom Lehrgang eher unabhängige Schwierigkeiten, vgl. Alef 1, 1969/70, S. 39.

608. Der Mathematik wird an dieser Stelle aufgrund ihrer Objektivität besonderer Wert für das Erlernen guten Sozialverhaltens und den Einsatz sozialer Methoden zugesprochen, da es stets „um eine nachprüfbare Sache geht“, Alef 1, 1969/70, S. 60; vgl. ebenda, S. 37 und 40.

die praktische Erprobung gezielte Hinweise an die Lehrerschaft, wenn Dinge als unerwartet herausfordernd beobachtet wurden.[610]

Ein in weiten Teilen auffallend positives Bild zeichnet ein Lehrer, der in einer hannoverschen Grundschule die ersten beiden Klassenstufen vermutlich mit *alef* unterrichtet hat[611]. Er berichtet von genereller Freude der Kinder an der „Mathematik“[612] und lobt besonders die methodischen Zugänge, die Möglichkeiten zur „Selbsttätigkeit“ und „Teamarbeit“ sowie für „vielfältige Aufgabenstellungen“ bieten und sich aufgrund von „Anschaulichkeit“ und dem „spielerische[n] Umgang mit unterschiedlichen Materialien, Farben und Formen, verknüpft mit Begriffen aus der „Mengenlehre“ und deren Notationen [...] [als] durchaus motivierend“ erwiesen hätten. Insbesondere sieht er einen Gewinn in sozialer und sprachlicher Hinsicht, wenn er hervorhebt, dass „[d]er Weg über konkrete Mengen zu den Anzahlen, Zahlen und Operationen [...] besonders Kindern aus Migranten- und sozial benachteiligten Familien geholfen [hat]“ und die Möglichkeit der Präsentation nicht-verbaler Lösungen sich zum „Vorteil für sprachlich schwächere Kinder“ ausgewirkt habe[613].

Auch wenn nach eigener Aussage von Weis und Bauersfeld das veröffentlichte *alef*-Programm die Arbeit im *Frankfurter Projekt* nur sehr eingeschränkt abbildet[614], liefert uns die empirische Untersuchung des Projekts wichtige Hinweise auf die Wirkung des Lehrgangs. Ein Teil der Evaluationsergebnisse aus dem *Frankfurter Projekt* ist nach dem unerwarteten Tod von Valentin Weis, Mitarbeiter des Evaluationsteams, unter Verschluss geblieben, wesentliche Erkenntnisse sind aber verfügbar und werden auch in der Neuauflage des Lehrerhandbuchs zu *alef 1* wiedergegeben[615].

Da der Rechenkurs des ursprünglichen Curriculums gegenüber den vier Jahren des herkömmlichen Rechenunterrichts auf nur zweieinhalb Jahre verkürzt wurde, liegt – wie zu Beginn des Projekts mit dem Land Hessen vertraglich festgelegt – besonderes Augenmerk auf der ***Auswertung*** der Rechenfähigkeit der Projektkinder. Die entsprechende Untersuchung erfolgte gegen Ende der 4. Klasse des

609. vgl. Alef 1, 1975, S. 10 und 106.
610. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 50 und 53.
611. Der Lehrer, Günther Habel, ist inzwischen verstorben, nach Angaben seiner Witwe hat er mutmaßlich mit *alef* gearbeitet, eine diesbezügliche Nachfrage bei der Schule, an der er zu der Zeit tätig gewesen sein dürfte, blieb jedoch ohne Ergebnis.
612. Leserbrief von Günther Habel in Der Spiegel 28 (1974), 15, S. 10.
613. Fragebogen Günther Habel, unter oben erläutertem Vorbehalt.
614. Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 130. Zur Methodik der Evaluation vgl. Weis, a. a. O., Weis & Bauersfeld, a. a. O., sowie Weis in Bauersfeld & Weis, a. a. O.
615. vgl. Bauersfeld & Weis, a. a. O.; Weis & Bauersfeld, a. a. O.; Alef 1, 1975, S. 7-9; die Hintergrundinformation zu V. Weis stammt aus einem persönlichen Gespräch mit K. Rickmeyer.

letzten Projekt-Lehrgangs 1972, in 40 Projekt- sowie 40 Kontrollklassen[616] und zeigt kaum signifikante Unterschiede in der Rechenfertigkeit. Sowohl Projekt- als auch Kontrollkinder schneiden in jeweils 5 Lernzielen signifikant besser ab; die Unterschiede sind dabei größtenteils durch das aktuelle Unterrichtsgeschehen zu erklären. Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass die bessere Leistung der Projektklassen auf dem Gebiet der schriftlichen Multiplikation möglicherweise auf ein besseres generelles Verständnis des Stellenwertsystems zurückzuführen ist (das in Klasse 2 sehr ausführlich, auch mit unterschiedlichen Basen behandelt wird[617]). Im Gegensatz dazu erscheint besonders bemerkenswert, dass die Kinder, die nach dem herkömmlichen Rechenunterricht gelernt haben, etwas besser im Rechnen mit Geld sind, allerdings hat auch hier nur gut ein Drittel der Schülerinnen und Schüler das Lernziel erreicht[618]. Bauersfeld et. al. sehen damit Ergebnisse anderer, vergleichbarer Studien zur Rechenfähigkeit in moderner Mathematik unterrichteter Kinder[619] ebenso bestätigt, wie die eigene Annahme, dass die breite mathematische Fundierung des Rechenlehrgangs dessen Verkürzung auffangen kann.

Über die rechnerischen Fähigkeiten hinaus zeigen die Projektkinder größere Kreativität im Lösen von Aufgaben, die keine rein schematische Lösung erfordern, während die Kontrollkinder stärker schemagebunden agieren[620]; offenbar hält das Projekt Materialien, Aufgaben und Inhalte bereit, die den Aufbau solcher kognitiver Strukturen begünstigen, die mit einer höheren Problemlösekompetenz, systematischerer Herangehensweise und flexiblerer Verfügbarkeit von Begriffen einhergehen. Dazu passt, dass die Kinder aus den Projektklassen impulsiver, die Kinder aus den Kontrollklassen dagegen generell rigider, also weniger flexibel und kreativ denken.[621] Für die Kinder, die im Experimentalkursus unterrichtet wurden, gilt das ebenfalls für Aufgaben aus der Geometrie; dass diese generell bessere Leistungen in der Geometrie erbringen[622], überrascht dabei angesichts der inhaltlichen Ausrichtung des Programms nicht.

Neben den fachlichen Zielen waren weitere kognitive sowie soziale und affektive Aspekte Gegenstand der Evaluation[623]. Die Untersuchung der Intelligenzentwick-

616. Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 132; Weis, a. a. O., S. 590.
617. vgl. Alef 2.
618. vgl. im Detail Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 133-135.
619. In Alef 1, 1969/70, S. 10, wird dazu auf amerikanische Studien verwiesen, Alef 1, 1975, S. 7., spricht nur von „verwandten [...] Untersuchungen“, ohne diese konkret zu benennen, Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 129, geben jedoch einen groben Überblick über Ergebnisse diverser empirischer Untersuchungen, die zu anderen Lehrgängen der neuen Mathematik durchgeführt wurden. Vermutlich handelt es sich hierbei nur um Untersuchungen aus dem Ausland, da Weis, a. a. O., S. 589, für Deutschland nur die Studie von Picker nennt, vgl. Picker, Schulversuch.
620. Alef 1, 1975, S. 7 f.
621. vgl. Bauersfeld & Weis, a. a. O., S. 76.
622. Alef 1, 1975, S. 8.
623. vgl. Weis, a. a. O., S. 592 f.

lung mit Hilfe von Intelligenztests ergab als interessantestes Ergebnis eine mit der Zeit verringerte Differenz zwischen Projekt- und Kontrollkindern, also einen stärkeren Zuwachs bei den Projektkindern, der nochmals besonders stark bei Kindern aus den unteren Gesellschaftsschichten hervortritt[624]. Damit erfüllt der Lehrgang des *Frankfurter Projekts* nicht nur kognitive Ziele, sondern insbesondere auch die in ihn gesetzten Hoffnungen auf die Erfüllung sozialer Ziele, die an die Idee der kompensatorischen Erziehung geknüpft sind. Ein weiteres Beispiel hierfür findet sich, wenn beim Lösen nicht-mathematischer Probleme in den Projektklassen – im Gegensatz zu den Kontrollklassen – die sozial benachteiligten Kinder kreativer agieren als diejenigen aus der Oberschicht, und auch Gnirk, einer der Mitarbeiter des *Frankfurter Projekts*, sieht die Hoffnungen auf „die Überwindung von [...] sozialen Schranken“ durch seine Erfahrungen als berechtigt an[625]. Bei der Sprachbildung lassen sich hingegen in sozialer Hinsicht keine Unterschiede ausmachen, wenngleich die Projektkinder, bei gleichen Fähigkeiten im Verständnis logischer Verknüpfungen, in der logisch korrekten Sprache klar bessere Leistungen aufweisen als die Kontrollkinder[626]. Eigene linguistische Untersuchungen, die dieses Ergebnis bestätigen, hat Herrlitz durchgeführt[627].

Es ist unklar, ob die geplante Auswertung der affektiven Wirkung des Projektlehrgangs zu Ende geführt wurde[628]. Erste Untersuchungen dazu haben ergeben, dass die Projektkinder den Mathematikunterricht „schwieriger“ finden, ihn aber „lieber“ haben[629], ein Ergebnis, das mit den Antworten aus der Befragung von im Projekt unterrichtenden Lehrkräften vereinbar ist, nach denen die Schülerinnen und Schüler der Projektklassen „mehr Freude an der Mathematik zeigen“[630]. Weiterhin legen Beobachtungen nahe, dass diese Kinder ein positives Selbstkonzept in weit stärkerem Maße aus der eigenen erbrachten Leistung ziehen als dies bei den Kindern aus den Rechenlehrgängen der Fall ist[631].

Die „Hypothese, daß die Ursache sprachlicher Unterentwicklungen nicht selten

624. Bauersfeld & Weis, a. a. O., S. 81 f., vgl. ebenda, S. 79-81; Kinder aus der Oberschicht profitieren ebenfalls, während Mittelschichtkinder bei beiden Lehrgängen gleichermaßen in ihrer Intelligenz gefördert werden, vgl. Gnirk, a. a. O., S. 27.
625. Gnirk, a. a. O., S. 28 f.
626. Alef 1, 1975, S. 7 f.
627. für eine Skizze der entsprechenden Begleituntersuchung vgl. Herrlitz, Wolfgang: Skizze einer Linguistischen Begleituntersuchung zum „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule“, in: Arbeitskreis Curriculum [Hrsg.]: Thema Curriculum. Beiträge zur Theorie und Praxis, Bebenhausen: Rotsch, 1972, S. 85-94.
628. vgl. Weis, a. a. O., S. 593 f., zur Konstruktion eines entsprechenden Fragebogens; nach Bauersfeld & Weis, a. a. O., S. 74, handelt es sich hierbei jedoch nur um Fragestellungen aus „der Peripherie der Untersuchungen“.
629. Bauersfeld & Weis, a. a. O., S. 77.
630. Alef 1, 1975, S. 8.
631. vgl. ebenda.

in der Unterentwickeltheit der operativen (nicht-verbalen) Intelligenz zu suchen ist“[632], aus der gleichermaßen die Vermutung folgt, dass die Bildung nicht-sprachlicher Schemata Voraussetzung für Sprachbildung darstellt, erfährt Bestätigung durch Erfahrungen, die bemerkenswerterweise vor allem in Sonderschulen gemacht wurden. Zunächst zeigt sich hier, dass eine erfolgreiche Bearbeitung von Aufgaben weitgehend auf der ikonisch-symbolischen Darstellungsebene und damit vorsprachlich möglich ist[633]. Gleichzeitig unterstützt die Beobachtung, dass das Plättchenraten in Kindergarten und Sonderschule fast sprachfrei unter Nutzung der entsprechenden Symbolkarten von den Kindern durchgeführt wird, die These, dass „das Zeichen dem Wort sogar (genetisch) vorausgehen kann“[634], zumindest wenn es sich, wie in diesem Fall, um analoge Symbole handelt, die nur eine geringe Abstraktionsleistung erfordern. Schließlich ist der bei einigen Kindern beobachtete „Schub in der Sprachentwicklung“ nach dem Einsatz von Lernspielen, die das nicht-sprachliche, operative Denken fördern, ein Hinweis auf die Richtigkeit der oben wiedergegebenen Hypothese[635]. Es passt zu all diesen Ergebnissen, dass die befragten Projektlehrkräfte der Meinung sind, dass die Vorteile des Experimentallehrgangs und damit der Neuen Mathematik gegenüber dem konventionellen Rechenunterricht klar überwiegen[636].

Schwierigkeiten auf didaktischer Ebene, die vor allem beim Vergleich der beiden Auflagen deutlich werden, sind eine zu starke Betonung der Symbolik und eine Verengung des Zahlbegriffs auf den kardinalen Aspekt in der ersten Auflage, beides wird von den Autoren konkret angesprochen und mit der Neuauflage korrigiert. Unklar bleibt dennoch, wie während des pränumerischen Teils mit den Zahlen umgegangen werden soll. Der explizite Hinweis darauf, dass es der Lehrkraft überlassen ist, wie sie auf bereits zählende Kinder reagiert[637], zeigt, dass dies in der beobachteten Praxis vorgekommen ist. Auf entsprechende Vorkenntnisse weist auch eine von mir befragte Lehrerin hin, die als wesentliche Schwierigkeit des Lehrgangs das „Ausklammern [. . .] von Zahlen“ und eine damit einhergehende Realitätsferne und mangelnde Lebensvorbereitung benennt, die sich auch darin niederschlägt, dass Mathematik als künstliches, konstruiertes Werkzeug präsentiert bzw. wahrgenommen wird[638]. Ein ähnliches Meinungsbild ergibt sich aus der

632. Alef 1, 1969/70, S. 212.
633. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 173.
634. Alef 1, 1969/70, S. 44.
635. Alef 1, 1969/70, S. 212.
636. Alef 1, 1969/70, S. 8.
637. Alef 1, 1969/70, S. 205.
638. Fragebogen Elma Dettmer; sicherlich ist dies eine Seite der Mathematik, die schwerlich mit dem Alltag junger Kinder verknüpft werden kann. Ob und evtl. in welchem Maße eine ernsthafte Propädeutik aber die Eigenschaft der Mathematik als eine in der Tat künstliche Sprache zur Beschreibung der Umwelt einzuschließen hätte, ist eine Frage, die eine Diskussion wert wäre.

von Radatz et. al. 1981 in Niedersachsen durchgeführten Lehrerbefragung, bei der im Vergleich gängiger Grundschulbücher *alef* am ehesten als dasjenige genannt wird, das die Zahlen zu spät einführt. Insgesamt gibt sich in dieser Befragung aber ein uneinheitliches Bild. Mit einer Durchschnittsnote von 3,6 wird *alef* zwar klar am schlechtesten bewertet, jedoch finden sich hierbei im Vergleich mit den anderen Lehrwerken die größten Abweichungen. Das Lehrerhandbuch dagegen erhält eine deutlich bessere Beurteilung als andere[639]. In einer früheren Untersuchung dagegen, die von R. Brauner 1974 durchgeführt wurde, schnitt das Werk bei einer Befragung unter GDM-Mitgliedern mit einigem Abstand am besten ab.[640]

Als deutlichen Mangel wiederum nennt der von mir befragte Lehrer das Fehlen von ausreichend Übungsmaterial, das ausdrücklich der Festigung des Gelernten dient[641]. Weitere offenbar werdende Schwierigkeiten bei der unterrichtlichen Umsetzung des *alef*-Programms sind eher dem organisatorischen Bereich zuzuordnen. Zum einen stellt die völlig veränderte Unterrichtsorganisation, wie bereits angesprochen, erhöhte Anforderungen an die Lehrperson[642]. Zu den Aufgaben gehören verstärkt präzise Handhabung der Sprache sowie Überwachungs-, Diagnose- und Unterstützungstätigkeiten, die neben einem guten Überblick, großer Flexibilität und inhaltlicher Sicherheit im Lehrgang auch Geduld und Vertrauen in die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler erfordern[643]. Neben dem, auch aufgrund der Materialfülle, erhöhten Vorbereitungsaufwand, von dem die am Projekt beteiligten Lehrkräfte selbst berichten[644], ist dafür unter Umständen eine veränderte Einstellung notwendig. So weist Gnirk ausdrücklich darauf hin, dass das Unterrichtsgeschehen durch die Sache bestimmt sein, die Lehrperson damit Autorität abgeben und in den Hintergrund rücken soll, ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu einem „demokratischen Kommunikationsstil auch zwischen Lehrer und Schülern“[645], der demnach im vorherigen Rechenunterricht nicht die Regel war.

Auch an anderen Stellen enthält *alef* Hinweise auf einen traditionellen Lehrerhabitus, der geprägt ist durch zu starke Präsenz, die den Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten zum selbstständigen Arbeiten nimmt, einen hohen Sprachanteil, zudem zu lautes und durch Wiederholungen geprägtes Reden, weiterhin einen zu sorglosen Einsatz von Kritik an den Schülerinnen und Schülern, der zulasten des

639. vgl. Radatz et. al., a. a. O., S. 10, 15 und 16.
640. vgl. Brauner, a. a. O., S. 25 f.; zu den Ergebnissen dieser Studie zählt auch, dass 13,6 % der Lehrkräfte, die nicht mit *alef* arbeiteten, sich die Einführung des Werks wünschten, und dass diese zudem im Schnitt „jünger, fachlich qualifizierter und fortgebildeter“ waren als Kolleginnen und Kollegen, die sich andere Bücher für ihre Schule wünschten.
641. Fragebogen Günther Habel, unter oben erläutertem Vorbehalt
642. Alef 1, 1969/70, S. 8.; vgl. z. B. ebenda, S. 30, 55 und 178-181.
643. vgl. z. B. Alef 1, 1969/70, S. 17, 18, 36-40, 42 und 163.
644. Alef 1, 1975, S. 8.
645. Gnirk, a. a. O., S. 29.

Lobes geht[646]. Da die Inhalte, Aufgaben und Materialien untrennbar mit der Stundenorganisation verknüpft sind und die methodische Umsetzung einen integralen Bestandteil der Gesamtkonzeption des Lehrgangs ausmacht, birgt der erhöhte Anspruch – insbesondere in Verbindung mit dieser Ausgangslage – eine deutliche Gefahr. Werden die neuen Inhalte auf die alte Weise gelehrt[647], bleiben nicht nur wesentliche Potentiale ungenutzt, sondern das gesamte Programm wird weitgehend ad absurdum geführt. Dies gilt umso mehr, als die Inhalte nicht primär um ihrer selbst willen ausgewählt wurden, sondern als bestmöglich geeignetes Mittel zum Zweck der Erfüllung übergeordneter Unterrichtsziele. Gnirk fordert in diesem Zusammenhang eine Neuorganisation der ***Lehrerbildung***, vor allem im Hinblick auf die Ausweitung des methodischen Gehalts sowie die methodische Gestaltung der Ausbildung selbst[648]. Fülle und Umfang der inhaltlichen Einführungen zeigen indessen die mindestens so dringende Notwendigkeit auf, den fachmathematischen Teil der Lehrerbildung stark zu erweitern. Angesichts der erforderlichen fachlichen Sicherheit im Lehrgang muss davon ausgegangen werden, dass die mangelnde mathematische Ausbildung der Lehrkräfte ein Hindernis für die Umsetzung von *alef* im Sinne der Projektbeteiligten darstellt. Allerdings ist an dieser Stelle zu beachten, dass es sich hier um eine Ausgangssituation handelt, die mit der im Verlauf der Reform angepassten Ausbildung an Relevanz verloren haben dürfte.[649]

Die in der Lehrerschaft ohnehin vorhandenen Vorbehalte gegenüber der Sozialform der Gruppenarbeit werden hingegen durch vom Inhalt unabhängige äußere Bedingungen bestärkt, namentlich die extremen Klassengrößen von bis zu 50 Schülerinnen und Schülern, die erhebliche Ansprüche an die Organisation des Unterrichts stellen[650], sowie die schulische Ausstattung. Aus den Ausführungen in den Handbüchern geht hervor, dass es auch 1975 in den Schulen noch Klassenzimmer mit fest installierten Tischreihen, zudem mit schrägen Tischplatten gab[651], eine denkbar ungünstige Raumsituation für offene Unterrichtsformen.

Skepsis angesichts inhaltlicher wie methodischer Elemente des *alef*-Programms ist nicht nur auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer nachweisbar, sondern auch auf Sei-

646. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 19 f. und 41; in dem Unterrichtsprotokoll auf S. 36-40 wird Lob der Lehrerin auffallend häufig erwähnt, was den Eindruck nährt, dass es sich hierbei um eine Besonderheit, also etwas in der Form eher Unübliches handelt
647. Als Beispiel hierfür vgl. die in Bauersfeld, Stolpersteine, S. 11, beschriebene Episode einer Lehrerin, die im guten Glauben, Gruppenarbeit zu machen, herkömmlich frontal unterrichtete.
648. Gnirk, a. a. O., S. 30.
649. Als Beleg kann hier erneut Radatz et. al., a. a. O., S. 11 f., dienen, wo hervorgeht, dass jüngere Lehrkräfte die Schulbücher zur modernen Mathematik insgesamt besser bewerten als ihre älteren Kolleginnen und Kollegen, ein Umstand, der mutmaßlich auf eine veränderte Ausbildung zurückzuführen ist.
650. Alef 1, 1969/70, S. 9 und 18.
651. Alef 1, 1969/70, S. 17, und Alef 1, 1975, S. 14.

ten der Eltern[652]. Ängste in Anbetracht der drohenden Unfähigkeit zur Hausaufgabenhilfe und Unmut aufgrund des finanziellen Aufwands für Material[653] treffen auf eine generelle Ablehnung von Reformen, die ihren Ursprung in „Sorgen um den Verlust oder die Qualitätsminderung von Bewährtem"[654] – insbesondere im Hinblick auf die Rechenfertigkeiten der Kinder[655] – hat und bei Weis und Bauersfeld zur sicheren Erwartung führt, dass „Veränderungen des Kanons der Unterrichtsinhalte [...] sicher konservativen Widerstand hervor[rufen]"[656]. In diesen Kontext gehört auch die wiedergegebene Episode eines vermeintlich „schwierige[n] Kind[es]", das zunächst im Unterricht teilnahmslos blieb, weil es aus dem häuslichen Umfeld das Spiel nicht kannte, sondern nur „ernsthafte Arbeit"[657]. Es offenbart sich hier eine beträchtliche gesellschaftshistorische Dimension der Reform.

Hausaufgaben sehen Bauersfeld et. al. gar nicht vor. Hierin liegt allerdings keine Reaktion auf elterliche Vorbehalte; der Grund ist, dass häusliche Einzelarbeit mit dem Gesamtkonzept – insbesondere den sozialen Zielen – von *alef* nicht kompatibel ist.[658] Dass dennoch vereinzelt mögliche Hausaufgaben angegeben werden[659], zeigt, dass dem nicht in jedem Fall gefolgt wurde.

652. Die Herausgabe einer gesonderten *Eltern-Information* zu *alef* belegt den Bedarf in diesem Bereich, zumal das Heft erst zwei Jahre nach dem eigentlichen Lehrgang erschienen ist und somit als Reaktion auf entsprechende Forderungen gesehen werden muss. Es beinhaltet vorwiegend Erläuterungen zu den Aufgabenstellungen und will „den mathematischen Inhalt verdeutlichen"; obgleich es nach Angabe der Autoren „aus vielen Gesprächen mit Eltern und Lehrern entstanden ist" (S. 1), bleibt doch fraglich, inwieweit die mathematische Terminologie für Eltern verständlich war und nicht eher zu weiterer Verwirrung beigetragen hat, vgl. Battermann & Windolph, Eltern-Information 1972. Für Letzteres spricht, dass die zweite Auflage der *Eltern-Information* neben der Anpassung an die geänderten Inhalte und einer generellen Neusortierung derselben an einigen Stellen zusätzliche Erklärungen enthält, vgl. Battermann, Heinrich & Windolph, Edeltraud: Alef. Wege zur Mathematik; Eltern-Information für das 1. und 2. Schuljahr, nach dem „Handbuch zum Lehrgang" von Heinrich Bauersfeld u. a., Hannover [u. a.]: Schroedel, 1976, S. 6 [im Folgenden: Battermann & Windolph, Eltern-Information ²1976]; dass zudem durch das Heft sogar weitere Ängste geschürt wurden, wird an dem expliziten – gegenüber der ersten Ausgabe neuen – Hinweis deutlich, dass die fachlichen Erläuterungen zu den Mengen „ausschließlich für Eltern gedacht" und „in dieser Form nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts in der Grundschule" sind, ebenda, S. 12.
653. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 8 und 11.
654. Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 127.
655. „Die oft geäußerte Befürchtung, daß die Kinder aufgrund der Modernisierung des Mathematikunterrichts am Ende der Grundschulzeit geringere Rechenleistungen brächten als früher", Battermann & Windolph, Eltern-Information ²1976, S. 2; in Battermann & Windolph, Eltern-Information 1972, findet sich diese Wendung noch nicht.
656. ebenda.
657. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 29. Es wird hier weiterhin berichtet, dass dieses Kind, nachdem man es behutsam an das Spiel als Methode herangeführt hatte, regelrecht aufblühte; neben dem Hinweis auf gesellschaftliche Tendenzen enthält der Bericht somit auch einen Beleg für die auf Kindgemäßheit gegründete Überlegenheit der Methode des Lernspiels, vor allem in sozialer Hinsicht.
658. Alef 1, 1969/70, S. 21.
659. Alef 1, 1969/70, S. 114 f.

Farbenblindheit hingegen sollte nicht als Problem aufgetreten sein; für diesen Fall – der an anderen Stellen durchaus ernsthafte Schwierigkeit bei der Arbeit mit farblich unterschiedenen Plättchen bewirkt hat – ist durch unterschiedliche Grautöne der roten und grünen Plättchen vorgesorgt worden.[660]

Es ist davon auszugehen, dass die vorhergehende Unterrichtspraxis an den Grundschulen Einfluss auf das Gelingen der Umsetzung der Reformideen in die alltägliche Schulpraxis genommen hat. Tatsächlich finden sich neben den Ausführungen zum Lehrerverhalten im Rechenunterricht in *alef* und der ergänzenden Literatur rund um das *Frankfurter Projekt* weitere Hinweise auf die ***Ausgangssituation***, auf die die Reform traf, die relevant scheinen. Diese betreffen zum einen die unterrichtsmethodische Ebene. Berichtet wird hier wiederholt von inhaltlichen Einführungen über vorgegebene Abstraktionsstufen, die frontal erfolgen, z. B. durch Zeigen, Vormachen und Vorsprechen durch die Lehrperson, wobei Sprache durchgängig das beherrschende Medium ist; eine Fibel sowie so genannte arithmetische Veranschaulichungsmittel unterstützen dieses Vorgehen[661]. Die trotz der methodischen Bemühungen, aufgrund mangelnden Verständnisses, hinter den Erwartungen zurückbleibenden Rechenleistungen führen zu „Reiz-Reaktions-Mechanismen und damit verbundenem gedächtnismäßig-mechanischem Drill“[662]. Die beschriebene Methodik setzt offenbar eine Theorie des Lernens voraus, nach der Begriffe unabhängig vom individuellem Subjekt existieren und von außen gelehrt werden können, während gleichzeitig davon ausgegangen wird, mathematische Begriffe an sich wären darstellbar und anschaulich[663].

Dass zudem die Orientierung an einem mittleren Lerntempo angenommen werden muss, ergibt sich auch aus der Untersuchung von Gnirk, die zeigt, dass der Rechenunterricht vor allem Kinder aus der Mittelschicht bestmöglich fördert. Die geringe Binnendifferenzierung fördert eine Festigung der Schichtzugehörigkeit, die Volksschule erweist sich somit als „Standesschule“, die soziale Dynamik praktisch nicht ermöglicht, dies aber auch nicht als Ziel hat[664]. Ebenso wenig werden den einzelnen Inhalten übergeordnete Ziele wie das Lernen des Lernens und Verallgemeinerns, der Aufbau logischer Schemata oder präzises Sprechen berücksichtigt. Sprache wird hingegen als Voraussetzung für das weitere Lernen angesehen, was wiederum bedingt, dass man versucht, Schwierigkeiten im Lernen durch vermehrte Verbalisierung zu kompensieren.[665]

660. Alef 1, 1969/70, S. 18; vgl. zu dem Problem den Leserbrief von Rainer Winkel in Der Spiegel 28 (1974), 15, S. 9 f.
661. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 7, 9, 12 und 18; vgl. Gnirk, a. a. O., S. 29.
662. Gnirk, a. a. O., S. 29; vgl. Alef 1, 1969/70, S. 7.
663. vgl. Alef 1, 1969/70, S. 12.
664. Gnirk, a. a. O., S. 27.
665. ebenda; vgl. Alef 1, 1969/70, S. 9 und 90.

Es lässt sich hier insgesamt feststellen, dass der beobachtete Ist-Zustand und die ihm zugrunde liegenden Vorstellungen dem Konzept des *alef*-Programms praktisch konträr entgegenstehen, weshalb Bauersfeld und seine Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter der alten Rechendidaktik in weiten Teilen ablehnend gegenüberstehen und sich ausdrücklich von ihr abgrenzen.

Zusammenfassung und Vergleich

Im Folgenden werden die Ziele, das inhaltliche Konzept sowie die didaktisch-methodischen Prinzipien, die als Grundlage von *alef* fungieren, noch einmal zusammengefasst, um im Anschluss aus dem Vergleich mit den der Reform ursprünglich zugrunde liegenden Kernideen weitere Schlüsse ziehen zu können.

Die von den Autoren von *alef* angegebenen **Ziele** liegen auf verschiedenen Ebenen und lassen sich entsprechend zu Kategorien zusammenfassen. Zu den ***fachlichen Zielen*** zählen:

- verständiges Rechnen
- mathematisches, bewegliches Denken

Als überfachliche ***pädagogische***, auf die individuelle Entwicklung ausgerichtete, und gleichzeitig ***soziale Ziele*** sind zu nennen:

- Sprachentwicklung (vorrangig im Sinne der sogenannten *kompensatorischen Erziehung*)
- Kommunikationsfähigkeit
- Kooperationsfähigkeit
- Selbstständigkeit

Eine Rolle zwischen diesen beiden Polen der Fachlichkeit nehmen die formulierten ***prozessbezogenen Ziele*** ein, insofern, dass hier über fachspezifische Methoden allgemeine, fachunabhängige Kompetenzen gefördert werden sollen[666]:

- Problemlösefähigkeiten und Verfügbarkeit heuristischer Strategien
- intermodaler Transfer

666. Die Parallelen zu den prozessorientierten Kompetenzen der aktuellen Bildungsstandards sind auffällig. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass es sich hier keineswegs um eine anachronistische Übertragung heutiger Begriffe und Begrifflichkeiten auf historische Zugänge handelt; tatsächlich ist bei Bauersfeld & Weis, a. a. O., S. 65, wörtlich die Rede von der notwendigen „Entwicklung [. . .] von einem stofforientierten zu einem prozessorientierten [. . .] Curriculum“, welches ganz offensichtlich auch inhaltlich den heutigen Vorstellungen entspricht.

Der planmäßige Aufbau einer präzisen Sprache kann hier ebenfalls noch zugezählt werden, da dieser zwar klar mit dem Ziel des Ausgleichs sozialer Ausgangsbedingungen begründet wird, die Mathematik aber hierfür ein Instrumentarium bereithält, das im Hinblick auf Logik und Präzision allen anderen Fächern voraus ist.

Die **Inhalte** werden zu großen Teilen mit ihrer Eignung für die Erreichung der pädagogischen Ziele, insbesondere für den Sprachaufbau, begründet und weniger aus dem Fach heraus. Es ergeben sich daraus die folgenden zu behandelnden Teilgebiete und Begriffe:

- Mengenlehre und Logik (Aussagenlogik im direkten Zusammenhang mit den Mengenoperationen)
- Relationen
- Abbildungen (auch als Zuordnungen)
- Zahlen und Operationen
- Geometrie: elementare Topologie, Symmetrie, propädeutische Formenlehre (auch Raumgeometrie)

Festzuhalten ist zudem zum einen, dass die Arithmetik gemäß der ursprünglichen Konzeption erst zum Ende des ersten Schuljahres thematisiert wird, in der 2. Auflage dann das ganze Jahr hindurch, zum anderen, dass wir es hier zwar mit unter fachstruktureller Perspektive zentralen Begriffen (Menge, Relation, Abbildung) zu tun haben, diese Perspektive aber hinter derjenigen zurücksteht, die in ihnen viel allgemeiner Grundelemente des menschlichen Denkens sieht. Die Behandlung der Geometrie nimmt einen großen Umfang ein; die Symmetrie umfasst dabei zunächst nicht nur die Achsen-, sondern auch die Drehsymmetrie.

Neben diesen rein fachinhaltlichen Begriffen sind außerdem wiederkehrende Darstellungsschemata – z. B. Baumdiagramm und Matrix – Teil des Lehrgangs, die als Inhalte eigenen Rechts behandelt werden, indem ihnen nicht nur darstellende Funktion für die Fachbegriffe, sondern darüber hinaus ein eigener Wert für die Herausbildung strategischen Denkens zugesprochen wird.

Der Lehrgang ist durch ein ***curriculares Gesamtkonzept*** bestimmt, das sich auf mehrere zentrale mathematische Begriffe und Schemata stützt, die zunächst durch grundlegende Erfahrungen präfiguriert und im Anschluss immer wieder aufgenommen und erweitert werden. Die Konzepte stehen dabei als gleichberechtigte fundamentale Begriffe nebeneinander, sind aber durch zahlreiche Querverbindungen auch horizontal verknüpft und spannen somit ein beziehungshaltiges Begriffsnetz auf, auf dem die weiterführende Mathematik und mit ihr auch die Arithmetik aufbauen kann. Es ergibt sich daraus eine Konzeption, die die Mathematik nicht nur nominell, sondern tatsächlich inhaltlich anstelle des Rechnens in den Mittelpunkt des Unterrichts stellt. Die ***Beziehung zwischen Mathematik, Rechnen und Mengen*** ist darin dadurch gekennzeichnet, dass die Arithmetik einen Inhaltsbereich neben anderen darstellt, wenn auch einen insofern hervorgehobenen, als ihr Verständnis bzw. ihre verständige Beherrschung als ein Hauptziel des Unterrichts genannt wird. Zudem wird sie – zumindest mit dem späten Einführungszeitpunkt im ursprünglichen Lehrgang – als ein höherer Inhalt behandelt, der durch einfachere fundiert werden muss, Mathematik ist also Grundlage für das Rechnen, nicht andersherum; mit der 2. Auflage erscheinen die Zahlen dann stärker auf gleicher Ebene wie die weiteren fundamentalen Ideen Menge, Relation und Abbildung. Die Mengenlehre hingegen spielt keine herausragende Rolle. Ihre Begriffe erscheinen als strukturelle Grundlagen gleichberechtigt neben anderen; zwar wird die Zahl kardinal eingeführt, aber vor allem in der Neuauflage noch vor einer formalen Behandlung des mathematischen Begriffs der Menge.

Die **didaktischen Prinzipien**, die Auswahl und Aufbereitung der Inhalte zugrunde liegen, beziehen auch die pädagogischen Vorstellungen der Autoren von *alef* mit ein. Es handelt sich hierbei vor allem um:

- das operative Prinzip
- die Variation der Veranschaulichung
- die Berücksichtigung unterschiedlicher Repräsentationsformen (EIS-Prinzip mit dem Schwerpunkt auf enaktiv und ikonisch anhand wiederkehrender Darstellungen)
- behutsamen Sprachaufbau
- Differenzierung und Diagnose

Konkretisiert werden diese Prinzipien in der Praxis durch eine **methodische Umsetzung**, die gekennzeichnet ist durch:

- Handlungsorientierung
- Material: Begriffsspiel, Formenspiel
- Regelspiele
- bevorzugt Gruppenarbeit, auch parallel an unterschiedlichen Themen
- kein Schülerbuch, Arbeitsblätter zur Übung, Wiederholung und Diagnose

Verglichen mit den ursprünglichen Reformideen ist dabei Folgendes festzuhalten:

- Die vor allem von der OEEC formulierten ökonomischen Ziele spielen in *alef* keine Rolle.
- Die sozialen und pädagogischen Ziele werden gegenüber den ursprünglichen, auf internationaler Ebene formulierten, stark erweitert, vor allem durch die Forderung nach Chancengleichheit, Sprachbildung und dem Ausgleich sozialer Unterschiede; sie weisen dafür starke Parallelen zum *Strukturplan* des Deutschen Bildungsrats auf, an dem Heinrich Bauersfeld mitgearbeitet hat.
- Die fachlichen Ziele, insbesondere im Hinblick auf ein bewegliches mathematisches Denken, entsprechen den Ideen bei Piaget und Dienes.
- Sämtliche Begriffe und fachliche Teilgebiete, wie sie aus den internationalen Quellen abgeleitet wurden, finden sich im Lehrgang.
- Rolle und Umfang der Geometrie gehen über die ursprünglichen Ideen hinaus, in denen die Geometrie – insbesondere in Form der Topologie – zwar immer wieder genannt wird, der inhaltliche Schwerpunkt aber doch auf Mengenlehre und algebraischen Strukturen liegt.
- Der Lehrgang beruht auf einer curricularen Gesamtstruktur, die alle Kernideen berücksichtigt: Rechenunterricht wird durch Mathematikunterricht ersetzt, und die Mathematik wird an fundamentalen Ideen ausgerichtet, die ein Spiralcurriculum strukturieren, in dem die Grundbegriffe so vertikal und horizontal vernetzt werden, dass die Mathematik als Einheit erscheint.
- Damit geht einher, dass die Arithmetik nicht mehr alleiniger Hauptinhalt des Unterrichts ist, sondern als ein mathematisches Teilgebiet neben anderen erscheint.
- Der Begriff der Menge tritt als ein fundamentaler mathematischer Begriff neben anderen auf, ohne dass ihm eine herausragende Sonderstellung zukommt, wie es etwa der *basic-set approach* intendiert.
- Der Konzeption liegt ein genetisch-konstruktivistisches Verständnis von Begriffsbildung zugrunde, wie es Piaget und Dienes vertreten; entsprechend findet auch das Konstruktionsprinzip nach Dienes – wenngleich nicht explizit, so doch implizit in dem regelgebundenen Spielen an strukturiertem Material – Anwendung.
- Die Variation der Veranschaulichung als weiteres Dienes-Prinzip findet implizit Berücksichtigung.

- Das EIS-Prinzip nach Bruner wird, mit Schwerpunkt auf der enaktiven und der ikonischen Ebene, angewandt.

- Der Lehrgang hält Beispiele für operatives Üben nach Piaget und Aebli bereit.

- Problemorientiertes Vorgehen und der Aufbau heuristischer Strategien sind ausdrücklich vorgesehen, so wie sie in den grundlegenden Quellen gefordert werden.

- Inwiefern die Dienessche Theorie vom tiefen Ende umgesetzt wird, kann aufgrund der Beschränkung auf das 1. Schuljahr nicht klar gesagt werden. Es wird jedoch Wert darauf gelegt, Begriffe von Anfang an möglichst allgemein zu behandeln und eine Einengung zu vermeiden (vgl. etwa das Beispiel Symmetrie).

- Im Hinblick auf die Unterrichtsmethoden besteht Übereinstimmung zwischen den grundlegenden Quellen und den Forderungen in *alef*: Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler in Form materialgebundener Regelspiele in Gruppenarbeit ist die bevorzugte Methode.

→ Alef liefert ein Beispiel für einen Lehrgang, der die verschiedensten Kernideen der Reform – die Folgerungen aus der Lernpsychologie sowie die sozialen und pädagogischen Ziele aus dem Strukturplan auf nationaler Ebene – integriert und zu einem schlüssigen Gesamtkonzept eines Mathematikcurriculums verbindet, das den herkömmlichen Rechenunterricht ablöst und den mathematischen Anfangsunterricht von Grund auf neu strukturiert und organisiert.

III.2 *Wir lernen Mathematik* von W. Neunzig und P. Sorger

Auch wenn im *Frankfurter Projekt* erstmalig in der Bundesrepublik eine auf den Ideen der Neuen Mathematik basierende Konzeption in großem Rahmen praktisch umgesetzt wurde, war *alef* nicht das erste deutsche Lehrwerk zur modernen Mathematik in der Grundschule. Dieses stammt stattdessen von Walter Neunzig und Peter Sorger, beide seinerzeit in Freiburg tätig – Neunzig als Didaktikprofessor an der PH, Sorger als Assistent am Mathematischen Institut der Universität (ab 1971 dann Mathematikprofessor an der PH Kiel) –, und erschien unter dem Titel

Wir lernen Mathematik. Das Schulbuch wurde in erster Auflage seit März 1968[667] im ebenfalls in Freiburg ansässigen Herder-Verlag veröffentlicht und war dort Teil des groß angelegten *Programm[s] Moderne Mathematik*, in dem neben zahlreichen anderen die – z. T. von Sorger – ins Deutsche übersetzten Schriften und Materialien von Dienes veröffentlicht wurden. Bedenkt man den Bekanntheitsgrad, den Dienes dank seiner umfassenden Reisetätigkeit auf internationaler Ebene bereits gewonnen hatte, dann muss das kommerzielle Potential, das mit den Rechten an Dienes' Werk verbunden war, erheblich gewesen sein. Angesichts des Umfangs des Programms, in dem neben didaktischen Schriften, den Dienes-Blöcken und dem Unterrichtswerk von Neunzig und Sorger auch begleitende Arbeitskarten, Lehrerhefte und diverse weitere Lernspiele herausgegeben wurden[668], sowie der frühzeitigen Veröffentlichung von *Wir lernen Mathematik* besteht kein Zweifel, dass der Verlag dieses Potential gesehen, ausgenutzt und durch die nun eintretende eigene Werbetätigkeit wiederum massiv verstärkt hat[669]. Es lässt sich schließen, dass aus der Zusammenarbeit des Herder-Verlags mit Dienes eine Allianz erwachsen ist – zu der auch Neunzig und Sorger zu zählen sind[670] –, die erheblichen Einfluss auf die gesamte Reforminitiative, ihre praktische Umsetzung bis hin zur curricularen Entwicklung[671] genommen hat. Dem Schulbuch *Wir lernen Mathematik* kommt

667. Picker, Schulversuch, S. 36, vorher gab es bereits einen Vorab-Teildruck, ebenda.

668. Für eine Auflistung des empfohlenen Materials, das direkt im Lehrgang eingesetzt werden soll, vgl. Neunzig, Walter: Wir lernen Mathematik. Grundschulwerk von W. Neunzig und P. Sorger; Verlag Herder, Freiburg, in: Arbeitskreis Grundschule e. V. [Hrsg.]: Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule, Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e. V., 1972, S. 205 f. [im Folgenden: Neunzig, Grundschulwerk]; wie viele Titel in dem Programm insgesamt erschienen sind, ist nicht ohne Weiteres herauszufinden, allerdings umfasst allein die Reihe der didaktischen Schriften sicher mehr als die 28 Werke, deren Titel der Verfasserin dieser Arbeit ohne umfangreichere Recherche bekannt sind.

669. vgl. Verlag Herder, a. a. O.; vgl. Hollmann, a. a. O.; Dienes spricht in Memoirs, S. 438, selbst davon, dass Herder zahlreiche Workshops mit ihm organisiert hat, und folgert, dass sich das offenbar für den Verlag als lohnend erwiesen hat; in den einzelnen Veröffentlichungen wird zudem stets auf weitere Bücher und Materialien aus der Reihe verwiesen; auch mit Prüfexemplaren war man freigiebig, wie eine einem Satz Arbeitskarten beiliegende Rechnung an die PH Hildesheim vom 18.10.71 sowie eine einer der Dienes-Schriften beiliegenden Rechnung an Prof. H.-G. Bigalke vom 4.4.74 zeigen; auf der 2. Jahrestagung für Didaktik der Mathematik 1968 erhielten nach Neunzig, Entwurf, S. 132, alle Tagungsteilnehmer ein Prüfexemplar von *Wir lernen Mathematik*; auch bei Müller & Wittmann, 1977, S. 143, heißt es, die Bücher seien „durch geschickte Verlagsarbeit weit verbreitet“ worden; vgl. dazu auch Der Spiegel, S. 78 f.

670. Als beispielhaftes Dokument über die Öffentlichkeitsarbeit dieser Allianz kann Hollmann, a. a. O., gelten: es handelt sich hierbei um den von Herder herausgegebenen Bericht über die bereits weiter oben sogenannte Studienwoche in Rinteln, in der Dienes in Musterstunden seine Konzeption von Unterricht und in deren Rahmen auch Sorger sein mit Neunzig geschriebenes Unterrichtswerk vorgestellt hat.

671. Anders ist es kaum zu erklären, dass die Autoren ihr Schulbuch wiederholt durch die Übereinstimmung mit Richtlinien – nämlich den KMK-Empfehlungen aus dem Oktober 1968 – legitimieren, die zum Zeitpunkt der Veröffentlichung des Lehrwerks noch gar nicht beschlossen waren. Wie Der Spiegel, S. 78, schreibt, waren mehrere Didaktiker „sowohl Autoren von Büchern wie Mitglieder von Lehrplan-Kommissionen“, ob Neunzig & Sorger darunter fallen, bleibt hier jedoch

als Teil dieses Komplexes somit eine besondere Rolle zu. Dass es gerade dieses ist, auf das im *Spiegel*-Artikel von 1974 in besonderem Maße exemplarisch Bezug genommen wird, liegt vor diesem Hintergrund nahe.

Die verschiedenen Bände des Gesamtwerks *Wir lernen Mathematik* sind jeweils in zahlreichen **Auflagen** erschienen, von denen die meisten aber unveränderte Nachdrucke sind. Zieht man diese ab, bleiben zwei unterscheidbare Auflagen übrig[672]. Die erste Auflage erschien erstmals von 1968 an bis 1970 (Bände für die Klassen 1-4 nach und nach), die neu bearbeitete Auflage erschien erstmalig von 1971 an bis 1974[673]. Bemerkenswert an diesen Daten scheint im Hinblick auf das 1. Schuljahr, dass nicht nur die erste Auflage früher als die KMK-Richtlinien[674], sondern selbst die zweite Auflage bereits vor Beginn der offiziellen, flächendeckenden Einführung der Neuen Mathematik an bundesrepublikanischen Grundschulen erschienen ist. Es ist also fraglich, inwiefern praktische Erfahrungen in die Neubearbeitung eingeflossen sind.

Für jedes Schuljahr existieren jeweils ein Schülerbuch und eine Lehreranleitung. Das Schülerbuch für die 1. Klasse wird von den Autoren ausdrücklich als „Fibel“ bezeichnet, sie betonen jedoch immer wieder, dass es sich bei dieser Fibel nicht um ein Lehrbuch, sondern um eine Sammlung an Übungsgelegenheiten handelt, die ohne die zugehörige Lehreranleitung wertlos ist[675]. Maßgeblich für die Planung des Unterrichts soll dementsprechend auch die Lehreranleitung sein. Die Kapitel der Lehreranleitung entsprechen im Allgemeinen den inhaltlichen Abschnitten der Fibel und sind jeweils gleich aufgebaut: Nach einer kurzen Nennung des – rein inhaltlichen – Lernziels folgen zunächst eine recht ausführliche fachliche Einführung in den neuen Begriff und im Anschluss (wiederum eher knapp gehaltene) methodisch-didaktische Hinweise, bevor die einzelnen Fibelseiten kommentiert werden.

offen, ebenso wie bei Keitel, Entwicklungen, S. 479.

672. Wenn im Folgenden also von der 2. Auflage die Rede ist, so ist damit diejenige Auflage gemeint, die durch Überarbeitung von der ersten unterscheidbar ist und ein anderes Copyright-Jahr angibt als die erste Auflage; entsprechend werden die Auflagen hier und auch im Literaturverzeichnis über das jeweilige Copyright-Jahr zitiert bzw. aufgeführt.

673. Die letzte über den Bibliothekskatalog des GBV nachweisbare Ausgabe des Schülerbuchs für die 1. Klasse erschien im Jahr 1974; dass ab 1974 die völlig überarbeiteten Arbeitskarten erschienen, macht es zudem unwahrscheinlich, dass danach noch ein nicht weiter überarbeiteter Neudruck des Schülerbuchs erschien.

674. so Der Spiegel, S. 78.

675. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I / 1. Schuljahr. Lehreranleitung, Freiburg: Herder, ©1968 [im Folgenden: Neunzig & Sorger, Lehrer 1968], S. 7 f., 14 und 56 f.; vgl. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I. Erstes Schuljahr, Freiburg: Herder, ©1968 [im Folgenden: Neunzig & Sorger, Schüler 1968].

Logische Blöcke

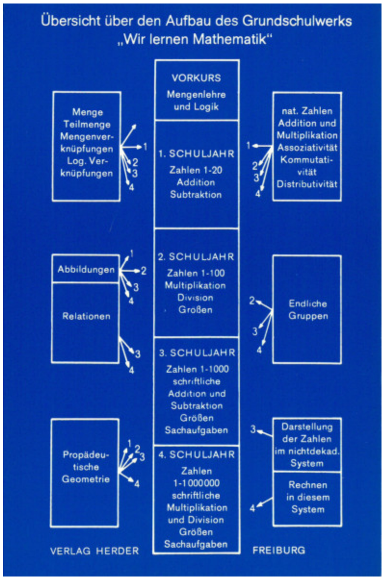
Zu den Schulbüchern gehören notwendigerweise die Logischen Blöcke, in späteren Klassen auch die Dienesschen Mehrsystemblöcke. Zusätzlich sind neben den Arbeitskarten von Dienes ab 1970 eigene Arbeitskarten von Neunzig und Sorger unter dem Titel *Wir lernen Mathematik* erschienen – für die 1. Klasse zunächst zu den Themen „Mengen" und „Zahlen", ab 1972 dann auch zur „Geometrie". Die Arbeitskarten halten Übungsaufgaben über die Schülerbücher hinaus bereit und sind ebenfalls in einer zweiten Ausgabe erschienen. Diese zweite Auflage unterscheidet sich nicht nur äußerlich stark von der ersten, sondern wurde auch erst ab 1974 herausgegeben[676]. Es ist also denkbar, dass die Erfahrungen aus der breiten Schulpraxis, für die das Schülerbuch zu früh erschienen ist, hier verstärkt Eingang gefunden haben, und es wäre interessant zu wissen, inwiefern diese Arbeitskarten, zu denen nun ebenfalls eine gesonderte Anleitung erschienen ist, in der Unterrichtspraxis das Schülerbuch ergänzt[677] oder eher abgelöst haben. Zu den Arbeitskarten gehören wiederum Materialien, neben den Logischen Blöcken sind dies u. a. Spielpläne und das *Planogon* Figurenspiel[678] für die Übungen zur Geometrie.

Bis April 1969 war die Erstauflage der Fibel für die erste Klasse in allen westdeutschen Bundesländern mit Ausnahme Bremens und Bayerns als Lehrwerk genehmigt, zumindest die Genehmigung für Bremen folgte im Februar 1970. Die Übereinstimmung der eigenen Konzeption mit den geltenden Lehrplänen wird von den Autoren immer wieder betont. So finden sich die Genehmigungen der Länder auf dem Buchrücken der Schülerbände für die 1. Klasse, ebenso ein (auffallend positives) „Gutachten des Niedersächsischen Kultusministeriums", und der Verlag legte den Bänden eigens eine Gegenüberstellung der curricularen Anforderungen mit dem Schulbuch bei. Angesichts des frühen Veröffentlichungszeitpunktes, zu dem in allen Ländern noch Richtlinien für den herkömmlichen Rechenunterricht in Kraft waren, ist das Bedürfnis der Autoren, die Anschlussfähigkeit des Lehrwerks nachzuweisen, nachvollziehbar. Überraschender ist wohl, dass die Bücher tatsächlich fast in der gesamten Bundesrepublik vor dem Hintergrund dieser Lehrpläne noch vor 1970 genehmigt wurden. Die Lehrplangebundenheit wird allerdings mehrmals,

676. Die letzte über die Bibliotheken des GBV nachweisbare Ausgabe der Arbeitskarten für den Grundkurs erschien im Jahr 1979.
677. Nach Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Anleitung, Freiburg: Herder, ©1974, S. 5 [im Folgenden: Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung], war das die Absicht der Autoren.
678. vgl. Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Spielpläne für die Primarstufe 1; Kurzkommentar, Freiburg: Herder, 1974 [im Folgenden: Sorger, Spielpläne]; Neunzig, Walter: Planogon. Geometrisches Figurenspiel mit 12 variablen Grundmustern in 6 Farben, Freiburg: Herder, 1972.

neben anderen äußeren Bedingungen, als Argument für didaktische Entscheidungen herangezogen, woraus klar wird, dass Neunzig und Sorger durch den Zwang zur diesbezüglichen Anpassung in ihren Gestaltungsmöglichkeiten nicht frei waren. Entsprechend spricht Sorger selbst davon, dass es sich bei *Wir lernen Mathematik* um eine unterrichtspraktische Umsetzung der Dienes-Konzeption handelt, die „noch voller Kompromisse [steckt]“[679]. Es scheint, dass didaktische Einschränkungen der Preis waren, den Neunzig und Sorger für den kommerziellen Erfolg zahlen mussten.

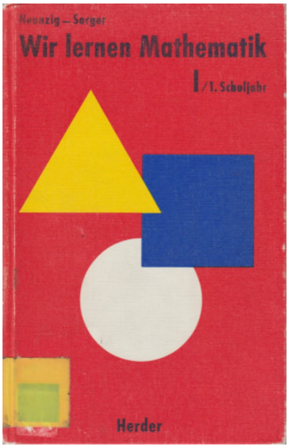
Während vom Herder-Verlag selbst nichts mehr über Verbreitung und Auflage des Werks zu erfahren ist[680], ist im *Spiegel* die Rede vom „erfolgreichsten“ Grundschulbuch zur Neuen Mathematik mit „eine[r] Auflage von über eine Million Exemplaren“. Auch wenn hier nicht nur das Schulbuch, sondern auch die zugehörigen Materialien gezählt wurden[681], muss das Buch sehr weit über die gesamte Bundesrepublik verbreitet gewesen sein. Einen Überblick über den inhaltlichen Aufbau des Gesamtwerks liefert die nebenstehende Abbildung auf der Buchrückseite der Lehreranleitung für die 4. Klasse[682]. Die mathematischen Inhalte umfassen neben der Arithmetik Mengen, Logik, Abbildungen, Relationen, Gruppen, nichtdekadische Stellenwertsysteme sowie Geometrie und ergänzen „die Inhalte des bisherigen Rechenunterrichts“, also das Rechnen in den verschiedenen Zahlenräumen, das über alle vier Grundschuljahre „[a]ls roter Faden“ im Mittelpunkt steht.[683] Während Relationen und nichtdekadische Stellenwertsysteme erst ab der 3. Klasse, endliche Gruppen ab der 2. Eingang in den Unterricht finden, sind gemäß der Übersicht alle weiteren Inhalte ab der 1. Klasse vorgesehen. Zusätzlich zur Ergänzung mit Fragen zu Mengen und Logik über die gesamte Grundschulzeit hinweg ist dem Zahlenrechnen der 1. Klasse ein „Vorkurs Mengenlehre und Logik“ vorgeschaltet. Ob dieser als Teil des schulischen Anfangsunterrichts verstanden wird oder als Teil einer vorschulischen Bil-



679. Hollmann, a. a. O., S. 59.
680. Auf Anfrage wurde per Mail mitgeteilt, dass die entsprechenden „Unterlagen [...] nicht mehr verfügbar“ seien.
681. Der Spiegel, S. 78.
682. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik IV. Viertes Schuljahr, Freiburg: Herder, ©1970.
683. Neunzig, Grundschulwerk, S. 199.

dung, geht aus dem Schema nicht hervor, war aber wohl auch kaum pauschal zu entscheiden, weil nicht von einer einheitlichen vorschulischen Bildung für alle Kinder im 1. Schuljahr auszugehen war. Auffällig ist weiterhin, dass die „nat. Zahlen“ mit der „Addition und Multiplikation“ doppelt auftreten, nämlich neben dem zentralen Zahlenrechnen noch einmal als über- bzw. nebengeordneter mathematischer Inhaltsbereich, hier nun auch ausdrücklich in Verbindung mit den Rechengesetzen. Offenbar ist diese Einteilung Ausdruck einer Unterscheidung in den rein rechnerischen Umgang mit (den natürlichen) Zahlen auf der einen Seite und die Betrachtung derselben unter mathematischen Gesichtspunkten auf der anderen[684].

Wir lernen Mathematik I, 1. Aufl., 1968



Neunzig und Sorger ordnen ihr Lehrwerk in international bereits umgesetzte Reformbemühungen sowie eine breite, national wie international geführte, Diskussion über Möglichkeiten und Grenzen des mathematischen Elementarunterrichts ein, für die sie konstatieren, dass ein gewisser Konsens – zumindest unter Lehrern – über die Notwendigkeit einer Neuorientierung bestehe.[685] Der ursprünglich „im Sinne einer volkstümlichen Bildung konzipiert[e]“ Rechenunterricht passe nicht mehr in die Zeit[686]. Die **Gründe**, die sie dafür angeben, sind dabei sowohl fachlicher wie lebensweltlicher als auch innerschulischer Natur. Die Entwicklung der Mathematik zu einer auf Logik und Strukturen basierenden und durch diese Strukturen zu einem kohärenten Ganzen verbundenen Wissenschaft ermöglicht eine bis dahin nicht dagewesene „Transparenz“, die aus zuvor weitgehend unverbundenen einzelnen Inhalten eine sichtbare Einheit werden lässt. Um die Mathematik als solche zu erfassen, scheint die Kenntnis dieser grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge unabdingbar. Inhaltlich kommt dabei der Mengenlehre eine besonders wichtige Rolle zu.[687] Parallel zu dieser innerma-

684. vgl. zum inhaltlichen Aufbau des Gesamtwerks und der Trennung in Rechnen und Mathematik auch Neunzig, Walter: Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Vorschläge zu seinem Aufbau und zu seiner Gestaltung, in: Neunzig, Walter [Hrsg.]: Konzeptionen für den Mathematikunterricht. Beiträge aus sechs Ländern, Stuttgart: Klett, 1970, S. 98-105 [im Folgenden: Neunzig, Vorschläge].
685. vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 6 f. und 31-47.
686. Neunzig, Vorschläge, S. 91.
687. vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 9 und 13; Neunzig, Walter: Mathematik in der Grundschule – eine Utopie? in: Die Ganzheitsschule 16 (1967), 2, S. 41 f. [im Folgenden: Neunzig,

thematischen Entwicklung schlägt sich die zunehmende außerfachliche Bedeutung der Mathematik in einer immer stärker werdenden Mathematisierung der Lebens-, speziell der Arbeitswelt nieder. Technologisierung und Computerisierung verschiedenster Lebensbereiche implizieren die Annahme, die Bewältigung des Alltags wäre ohne eine neue Art mathematischer Bildung, die stärker als bisher prozessuale und reflexive Kompetenzen berücksichtigt, kaum möglich.[688] Für die Schule ergibt sich daraus die Forderung, dass die Inhalte sich keinesfalls auf die Vermittlung mechanischer Lösungsverfahren oder ein reines Zahlenrechnen beschränken dürfen, da dieses „keine echte Einsicht in die Zusammenhänge möglich“ mache. Statt einer „Überbewertung“ der Arithmetik[689] fordern Neunzig und Sorger eine Verbindung von Rechnen und Mathematik, die über die Betonung der entsprechenden Zusammenhänge ein tieferes Verständnis des Kalküls fördert, und zwar von Beginn an. Die strikte Trennung von Rechen- und Mathematikunterricht an den verschiedenen Schulformen und der damit verbundene Bruch zwischen Grundschule und Gymnasium muss aus den genannten Gründen überwunden werden. Auch eine Isolierung der Mathematik von anderen Fächern ist angesichts der vermeintlich zunehmenden Alltagsrelevanz mathematischer Denkweisen nicht haltbar, vielmehr erfordert die Bedeutung der Mathematik für Alltag und Beruf verstärkt fächerübergreifende Inhalte.[690]

Konkreter ergeben sich daraus **zwei Hauptziele** des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Rechnen und Mathematik sollen verbunden werden, indem das Kalkül nicht nur beherrscht wird, sondern Rechenverfahren und Lösungswege über strukturelle Zusammenhänge fundiert und einsichtig gemacht werden. Auf der anderen Seite baut Mathematik auf dem Rechnen auf. Daraus ergibt sich für die Arithmetik eine neue Zielsetzung, die weniger in der Anwendung von Operationen für das Sachrechnen liegt als in der Vorbereitung der Mathematik.[691] Das darüber hinaus formulierte Ziel lässt sich als Entwicklung mathematischen Denkens zusammenfassen. Die Notwendigkeit des Erwerbs einer „moderne[n] mathematische[n] Denkweise“ leitet Neunzig aus der Annahme her, dass „Mathematik in besonderer Weise als Bildungsfach wirksam“ [692] sein kann; als spezifisch hierfür gelten Ausgangspunkte für die Entwicklung geistiger Beweglichkeit und der

Utopie].
688. vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 7 und 9-11.
689. Neunzig, Vorschläge, S. 91.
690. vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 12-14; Neunzig, Utopie, S. 42; Neunzig, Vorschläge, S. 92.
691. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 5; Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 48; Neunzig, Grundschulwerk, S. 193.
692. Neunzig, Utopie, S. 42.

Fähigkeit zur Abstraktion, die Bildung und Transfer allgemeiner, von konkreter Anschauung unabhängiger Strukturbegriffe ermöglicht.[693]

Namentlich beziehen sich Neunzig und Sorger auf verschiedene **Einflüsse**, vor allem aus den Bereichen Psychologie und Reformpädagogik. Neben Dienes findet Piaget Erwähnung[694], außerdem Pestalozzi, Fröbel und Montessori als Vorbilder im Hinblick auf die Unterrichtsmethodik, Suppes und Picard als Wegbereiter der Reform auf internationaler Ebene und mit Breidenbach auch ein Vertreter des Volksschul-Rechenunterrichts. Arthur Kern wird über seinen Rechenkasten, dessen Einsatz an einer Stelle vorgeschlagen wird, genannt[695]. Der überragende Bezugspunkt ist Z. P. Dienes, dessen Konzeption immer wieder ausdrücklich als Grundlage des Lehrgangs genannt wird. Neunzig und Sorger verstehen *Wir lernen Mathematik* als Konkretisierung der Dienesschen Ideen, angepasst an die Schulrealität in der Bundesrepublik; die Umsetzung basiert explizit auf den vier didaktischen Prinzipien (Variabilitäts-, Aufbau-, dynamisches Prinzip und Variation der Anschauung), mit denen Dienes seine Unterrichtsversuche begründet[696].

Trotz der großen Vorbildfunktion weichen Neunzig und Sorger von vorneherein in einem wesentlichen Punkt von Dienes‘ Konzept ab: Eine gewisse Systematik im **Aufbau des Lehrgangs** erscheint ihnen unumgänglich. Sie schlagen die Erstellung eines Begriffskanons vor, der zum Ende der Grundschulzeit erworben sein soll, dabei müssen aufeinander aufbauende Inhalte in entsprechender Reihenfolge behandelt werden, eine Notwendigkeit, die besonders für die Arithmetik konstatiert wird. Begründet wird diese somit aus gewissen inhaltlichen Zwängen, darüber hinaus aber auch mit zeittypischen Umständen wie der Lehrerausbildung, der „Reaktion der Eltern“, sowie mit der generellen Lehrplangebundenheit von Unterrichtinhalten.[697] Da, wie bereits weiter oben erwähnt, zum Zeitpunkt der Veröffentlichung noch keine reformierten Lehrpläne existierten und auch die KMK-Richtlinien noch nicht bekannt waren, beziehen sich Neunzig und Sorger hier offenbar auf die bisherigen Lehrpläne für das Fach Rechnen.

Die eigene Forderung nach einer logischen Reihenfolge im Aufbau der arithmetischen Begriffe bedingt die Auswahl der **Inhalte**, die in die Fibel für den mathematischen Anfangsunterricht Eingang gefunden haben sowie deren Aufbau. In

693. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 8 und 15; Neunzig, Vorschläge, S. 92.
694. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 57; Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 48; Neunzig, Vorschläge, S. 93 f.
695. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 80 und 84; vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 48 und 31-41; Neunzig, Grundschulwerk, S. 193 f. und 195; Neunzig, Entwurf, S. 136.
696. vgl. z. B. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 29-31.
697. Neunzig, Entwurf, S. 134; vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 7; Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 52 f. und 55.

Verbindung mit einer vorgenommenen, für notwendig gehaltenen Reduktion[698] ergeben sich daraus im Wesentlichen zwei Inhaltskomplexe für die 1. Klasse, nämlich Mengenlehre und Arithmetik. Eine Betrachtung der zugehörigen Inhalte unter strukturellen Gesichtspunkten dient dabei auch der – an dieser Stelle allerdings unsystematischen – vorbereitenden Präfiguration solcher Begriffe, Strukturen und Gesetzmäßigkeiten, die erst später „voll zugänglich" sind[699].

Die Themenblöcke *Mengen* und *Zahlen und Operationen* werden zunächst relativ unabhängig voneinander behandelt, wobei die Arithmetik auf der Mengenlehre aufbaut. Die Mengen nehmen daher die ersten 10-12 Wochen des Anfangsunterrichts ein[700]. Das Zurückstellen der Zahlen begründen Neunzig und Sorger mit der Abstraktheit des mathematischen Objekts *Zahl*, die die Arbeit damit gleich zu Beginn der Schulzeit verfrüht erscheinen lässt. Mengen und Mengenoperationen dienen dagegen der anschaulichen Fundierung und sollen als Basis des Zahlbegriffs und der Zahlenoperationen Einsicht und Verständnis in diese sowie in deren strukturelle Eigenschaften fördern. Z. B. wird die Mengenvereinigung als Grundlage der Addition wie der Kommutativität genannt; die Mengenlehre dient hier also auch der Präfiguration von Rechengesetzen.[701] Neben der an dieser Stelle rein arithmetischen Begründung mengentheoretischer Inhalte wird die schulische Mengenlehre noch durch ihre fachliche Bedeutung legitimiert, insofern, als sie als Grundlage eines großen Teils mathematischer Themengebiete – und damit auch schulmathematischer Inhalte – fungiert. Letztlich finden sich mit dem Hinweis auf die Leistungsfähigkeit der Mengensprache für eine präzise Beschreibung von Sachverhalten auch eine didaktische Begründung für die schulische Relevanz der Mengenlehre sowie später an anderer Stelle eine methodische Legitimierung, die besagt, dass die Mengenbegriffe besonders gut konkret-handelnd zu erarbeiten sind.[702]

Der pränumerische Mengenkurs umfasst in elementarer Weise die Begriffe der (endlichen) Menge (Element einer Menge, Benennung über Aufzählung der Elemente wie über die definierende Eigenschaft), Teilmenge, Schnitt-, Vereinigungs- und Restmenge sowie Mengengleichheit und -ungleichheit. Als Veranschaulichung der Mengenbegriffe sollen dabei sowohl Mengen aus strukturiertem Material als auch

698. vgl. Neunzig, Vorschläge, S. 97; Neunzig geht hier ganz klar nicht davon aus, dass die Arithmetik durch die Mengenlehre ausreichend grundgelegt ist, dafür seien viel mehr mathematische Begriffe nötig, die jedoch allein aus Zeitgründen nicht alle im Vorfeld der Arithmetik behandelt werden können.

699. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 54; man könnte aus dieser Formulierung ableiten, dass die Autoren die Begriffe der (naiven) Mengenlehre, die in der 1. Klasse behandelt werden, bereits für „voll zugänglich" halten, nach Neunzig, Vorschläge, S. 99, ist dies aber offenbar nicht der Fall.

700. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 9.

701. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 58; vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 38 und 44 f.; vgl. Neunzig, Grundschulwerk, S. 198.

702. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 57 f.; Neunzig, Vorschläge, S. 98 und 100; Neunzig, Grundschulwerk, S. 198.

Mengen aus unstrukturierten Alltagsgegenständen genutzt werden. Zu jedem Begriff sind auf den ersten Seiten in der Fibel nur Alltagsmengen – darunter auch Schülerinnen und Schüler selbst als Elemente – abgebildet; Übungen zu den Logischen Blöcken, als fest mit dem Lehrgang assoziierte strukturierte Materialien, bilden jeweils einen ebenfalls abgeschlossenen Teil im Anschluss. Der Mengenteil enthält neben der Vorbereitung arithmetischer Inhalte mit den Unterschiedsspielen an den Merkmalsklötzen bereits Aufgaben zur Präfiguration des Abbildungs- sowie des Relationsbegriffs, auch wenn diese von den Autoren lediglich als Übung im Benennen der Eigenschaften der Blöcke und damit als Teil der Mengenlehre deklariert werden[703]. Mit der Verbalisierung der Mengenoperationen Schnitt- und Vereinigungsmengenbildung werden die entsprechenden aussagenlogischen Zusammenhänge formuliert und damit das logische „und“ sowie das logische „oder“ eingeführt.[704] An verschiedenen Stellen machen die Autoren dabei deutlich, dass der Mengenbegriff nur elementar, präformal und noch nicht in Verbindung mit der formalen Mengenschreibweise („Klammern“) eingeführt werden soll.[705]

Nachdem der Block „Mengen“ mit einer Seite zur Zusammenfassung und Wiederholung[706] vorerst abgeschlossen wird, beginnt die Einführung der Zahlen, die wie angekündigt einer bestimmten Reihenfolge in einem systematisch gestuften Aufbau folgt. Dieser ist daran ausgerichtet, dass die Autoren „auf jeden Fall vermeiden wollen, daß sie zu früh als reine Zahlen erscheinen“, also als abstrakte und damit genuin mathematische Objekte[707]. Neben einem naiven Mengenbegriff ist die Kenntnis der eineindeutigen Zuordnung Voraussetzung für die Einführung des Zahlbegriffs gemäß der Konzeption.

Für die Zahlen 1-5 wird jedoch auf eine Einführung über die bijektive Zuordnung von Mengenelementen verzichtet. Dies geschieht bewusst und wird damit begründet, dass eine solche Einführung angesichts der üblichen Vorkenntnisse der Kinder zu Schulbeginn, die u. a. in der Fähigkeit zur Simultanauffassung von Mengen mit bis zu 5 Elementen liegen, künstlich wäre.[708] Insgesamt werden die Zahlen von 1-10 nicht in rein ordinaler Reihenfolge eingeführt, sondern die Systematik folgt der Reihenfolge $2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 1 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10$, wobei die geraden Zahlen größer als 2 jeweils zunächst als das Doppelte der bereits bekannten Hälfte dargestellt werden. Darin, dass die geraden Zahlen dadurch als leichter zugänglich gesehen werden, liegt ein Grund für die auf den ersten Blick ungewöhnliche An-

703. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 26.
704. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 34 f. und 38 f.
705. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 14; Neunzig, Vorschläge, S. 99.
706. Es fällt auf, dass die Themen Teilmenge und Schnittmenge hier fehlen, Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 43.
707. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 83.
708. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 50.

ordnung, von der bei den Zahlen 6-10 schließlich ausdrücklich abgewichen wird[709]. Ausgegangen wird jeweils von der Darstellung von Mengen mit entsprechender Mächtigkeit, der Zahlbegriff wird also über den kardinalen Aspekt eingeführt[710]. Ebenfalls kardinal erfolgt die additive Zerlegung der einzelnen Zahlen direkt nach der Einführung über die Zerlegung passender Mengen in Teilmengen. Die kardinale Darstellung geht jedoch bald in eine ordinale über, indem (kardinale) Würfelbilder mit Plättchen nachgelegt und u. a. in Reihen umgeordnet werden sollen, und Neunzig und Sorger betonen die Wichtigkeit beider Zahlaspekte, indem sie dazu auffordern, stets beide in Kombination zu berücksichtigen.[711] Die 0 wird über die leere Menge, die durch entsprechende Restmengenbildung entsteht, im Zuge der Subtraktion eingeführt[712].

Ein gewisser Bruch in der Konzeption erfolgt bei der Erweiterung des Zahlenraums auf die Zahlen 1-20. Die Zahlen 11-20 werden als Längen eingeführt.[713] Dadurch lernen die Kinder zum einen den Maßzahlaspekt als weiteren Zahlaspekt der natürlichen Zahlen kennen, zum anderen erlaubt ein solches Vorgehen die Verknüpfung mit dem Inhaltsbereich *Messen*. In der Tat wird das Messen an dieser Stelle in die weitere Zahleinführung eingebettet, zunächst nur an den Zahlen 1-10, ausgehend von einem pränumerischen Längenvergleich über beliebige Vergleichsmaße hin zu normierten Maßen. Es fällt auf, dass Neunzig und Sorger zwar den verwendeten Maßstab „als Teil eines Zahlenstrahls“ deuten und der Darstellung eine Funktion zur Vertiefung des Zahlbegriffs zusprechen[714], weitere fachliche Theorie zum Begriff des Messens hier aber fehlt. Das Messen stellt insofern keinen eigenständigen mathematischen Inhalt noch eine fundamentale mathematische Idee dar, sondern wird in den Dienst der Arithmetik gestellt, in der die Zahlen an dieser Stelle nicht als „reine“, sondern als benannte Zahlen erscheinen. Sind die Zahlen 11-20 einmal als Maße bekannt, werden sie nun ebenfalls als Mengen dargestellt; entsprechend motiviert die Addition von Papierstreifen der Längen 1-10 zwar die Zahlraumerweiterung, Addition und Subtraktion mit den neu gewonnenen Zahlen werden aber schließlich über die Darstellung als (Punkt-)Mengen veranschaulicht[715] und nicht mehr über einen Maßstab oder Zahlenstrahl.

Zählen sollen die Kinder erst, wenn die Zahlen bis 20 und damit auch die Zahlen in ihrer Ordnung bekannt sind, bis dahin findet die Zahlwortreihe keine Erwäh-

709. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 60.
710. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 51.
711. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 60, 64 und 67; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 56 und 68.
712. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 76.
713. vgl. im Folgenden Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 80-84; vgl. Neunzig, Entwurf, S. 135.
714. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 82 f.
715. vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 94-96.

nung.[716] Offenbar soll ein unverstandenes, rein auswendiges Aufsagen der Reihe vermieden werden. Eine ähnliche Sorge treibt Neunzig und Sorger nämlich in Bezug auf das Rechnen um.[717] Das Rechnen – für die 1. Klasse heißt das das Addieren und das Subtrahieren – wird daher analog zu den Zahlen eingeführt. D. h. Grundlage der Rechenoperationen ist die kardinale Vorstellung in Form der zugrundeliegenden Mengenoperationen. Die Addition basiert auf der Vereinigung disjunkter Mengen, die Subtraktion auf der Restmengenbildung, wobei beides bereits durch die Zerlegung von Mengen in Teilmengen im Zuge der Zahleinführung vorbereitet worden ist.[718] Die Einführung beider Rechenarten folgt einem gestuften Aufbau mit schrittweise zunehmender Abstraktion, der dem Vorgehen für die Zahlen 6-10 vergleichbar ist. Es scheint noch bemerkenswert, dass die Subtraktion zunächst als von der Addition unabhängige Operation, die rein aus der Restmengenbildung heraus motiviert ist, behandelt wird. Über Ergänzungsaufgaben, die als Bindeglied zwischen der Addition und der Subtraktion fungieren, wird schließlich der Zusammenhang – übrigens auch hier erst zwischen den zugehörigen Mengenoperationen – hergestellt.[719] Rechengesetze werden noch nicht eingehend behandelt, das Erfassen der Kommutativität wird aber durch passende Aufgaben vorbereitet[720]. Sachrechenaufgaben sind Teil der Übungsaufgaben, die sich am Ende des Buches finden. Vor der Erweiterung des Zahlenraums auf die Zahlen 1-20 wird das bis hierhin erworbene Wissen über die Zahlen 1-10 und über die Operationen Addition und Subtraktion auf zwei Wiederholungsseiten in den wesentlichen Punkten zusammengefasst[721]. Als wichtigste Aspekte des bisherigen Lehrgangs gelten demnach der kardinale wie der ordinale Aspekt des Zahlbegriffs, der Zusammenhang der Addition mit der Vereinigungsmengenbildung, der Zusammenhang der Subtraktion mit der Restmengenbildung sowie der operative Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion als zueinander reversible Operationen.

Weitere mathematische Teilgebiete werden eher impliziert, eigenständige Kapitel sind ihnen zumeist nicht gewidmet. Algebraische Strukturen, die ebenso wie Relationen als besonders geeignetes Lernfeld für Transfer und Abstraktion gelten[722], werden noch nicht thematisiert, Relationen nur in Form der Spezialfälle Gleichheit/Ungleichheit und der Ordnungsrelation. Abbildungen treten ebenfalls nur am Rande in speziellen Formen auf, implizit in den Unterschiedsspielen sowie in der eineindeutigen Zuordnung, die dem Mengenvergleich und damit dem Zahlbegriffs-

716. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 92; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 102.
717. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 68.
718. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 73 f.; vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 75 f.
719. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 75 und 77; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 82 f.
720. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 39 und 44; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 29 und 36.
721. vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 87 f.
722. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 15.

erwerb dient.[723] Zahlenfolgen finden sich in den Übungsaufgaben auf den letzten Seiten der Fibel, werden aber ebenfalls nur als Instrument zur Vertiefung des Zahlbegriffs beschrieben[724]. Dafür gibt es in der Lehreranleitung ein eigenes Kapitel zu mathematischen Symbolen, die damit nicht nur eine Funktion zur Repräsentation von mathematischen Begriffen und Zusammenhängen erfüllen, sondern in den Status eines Inhalts eigenen Rechts gehoben werden[725], wenngleich dies an anderer Stelle relativiert wird, wenn es heißt, dass die Nutzung von Symbolen im ersten Schuljahr auf das Nötigste beschränkt bleiben soll. Die Sorge vor einer rein mechanischen Nutzung von Symbolen[726] mag auch hier ein Motiv sein, ihnen besondere Aufmerksamkeit zu widmen, um ein ausreichendes Verständnis zu ermöglichen, und sie dafür zu einem Thema für sich zu machen. Geometrische Inhalte spielen hingegen in Fibel und Lehreranleitung überhaupt keine Rolle; ganz entgegen der o. g. Übersichtsdarstellung über das Gesamtwerk, nach der propädeutische Begriffe der Geometrie in allen vier Schuljahren Teil des Lehrgangs sein sollten, finden diese erst im Laufe des zweiten Schuljahrs Eingang in den Kurs.[727]

Die **didaktisch-methodischen Entscheidungen**, die den Lehrgang prägen, beruhen fast sämtlich auf dem Primat des eigentätigen Handelns der Kinder im Unterricht. Immer wieder betonen Neunzig und Sorger, dass es im Mathematikunterricht auf keinen Fall darum geht, Formalismen zu vermitteln – offenbar war die Befürchtung, dass Mathematik für die Grundschule genau so verstanden werden könnte, groß –, sondern dass es um Begriffsbildungen aus konkreten Erfahrungen geht. Keine Definitionen sollten vorgegeben, keine deduktive Methode angewandt, keine formale Symbolsprache verwendet werden. Nichtsdestotrotz ist die fachliche Korrektheit eines der wesentlichen bindenden Prinzipien, aber gleichberechtigt neben der Kindgemäßheit in Sprache, Aufbau und Methodik[728]. Die Selbsttätigkeit dient dabei weniger der Fähigkeit Aufgaben zu lösen – wobei Aufgaben hier wohl im relativ engen Sinne als rein algorithmisch zu lösende Arbeitsaufträge zu verstehen sind – als der begrifflichen Einsicht in strukturelle Zusammenhänge. Bestimmend für die didaktische Konzeption sind die 4 Prinzipien von Dienes, das dynamische Prinzip, das mathematische Variabilitätsprinzip, das Aufbauprinzip[729] und die Variation der Veranschaulichung, wobei die Bedeutung der beiden Letzteren für *Wir lernen Mathematik* deutlich hervorgehoben wird. In der Lehreranleitung für das 1. Schuljahr werden die beiden anderen gar nicht genannt, ohne

723. vgl. z. B. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 98-100.
724. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 95; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 107.
725. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 47-49.
726. vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 55.
727. vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 59-62.
728. vgl. z. B. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 5, 7 f., 30 und 49.
729. auch „Prinzip des konstruktiven Denkens“, s. Neunzig, Vorschläge, S. 94.

dass hierfür eine Begründung angegeben wird.[730] An anderer Stelle wird jedoch gerade die Reduktion im Hinblick auf die mathematische Variabilität bedauert, indem die Ausrichtung an dem Prinzip als möglicherweise „angemessener“ bezeichnet wird.[731]

Das *Aufbauprinzip* hängt eng mit der Forderung nach Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler zusammen. Obgleich abstraktes, analytisches Denken den Kindern im Grundschulalter im Allgemeinen noch nicht möglich ist, können sie nach Dienes‘ Beobachtungen bereits lange vorher konstruktiv denken. Konstruktives Denken meint hier, dass das Kind zum einen eine Lösung auf konkretem, synthetischem Wege findet, sich eine Lösung „erspielt“, und zum anderen einen Begriff aus Beispielen abstrahiert, indem es gemeinsame Strukturen in unterschiedlichen Gegenständen erkennt. Die generelle Fähigkeit hierzu kommt dann zum Tragen, wenn die Beispiele konkret, also auf der enaktiven Ebene, dargestellt sind. Das eigene Handeln am Material unterstützt diesen Prozess der Konstruktion von Begriffen und Zusammenhängen. Wenn Neunzig und Sorger feststellen, dass die Strukturen der Mathematik keinesfalls von außen gelehrt werden können, offenbaren sie ein Verständnis von Begriffsbildung als eines genetischen Prozesses, der Konzeption liegt offenbar die Lerntheorie des Konstruktivismus zugrunde, die auch das Aufbauprinzip impliziert[732].

Einführung der Zahl 5 in *Wir lernen Mathematik I* ©1968, S. 49

Dennoch – und hierin liegt ein gewisser Widerspruch – ist für die Einführung der Zahlen wie der Addition und der Subtraktion eine gestufte Reihenfolge fester *Abstraktionsschritte* vorgesehen. Ausgegangen wird in allen Fällen von der kardinalen Darstellung der Zahl, repräsentiert durch konkrete Mengen auf der rein enaktiven Ebene. Bei der Einführung der Zahlen sind dies jeweils Klassen verschiedenartiger Mengen gleicher Kardinalität, deren Anzahleigenschaft schnell symbolisch als Zahlwort, zunächst gesprochen, dann geschrieben, dargestellt wird. Im nächsten Schritt erfolgt der Übergang zur zeichnerischen, also ikonischen Darstellung von Mengen, deren Kardinalität nun wiederum ikonisch, allerdings in abstrakterer Form von analogen Zeichen (Striche, Kringel) festgehalten wird, bevor schließlich als abstrakteste der symbolischen Repräsen-

730. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 6; ebenso Neunzig, Vorschläge, S. 94 f.
731. Neunzig, Entwurf, S. 134.
732. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 5; Neunzig, Vorschläge, S. 96.

tationen die Ziffer zur Bezeichnung der Anzahlen genutzt wird[733]. Bei der Einführung der Addition werden die (disjunkten) Mengen zunächst konkret-handelnd vereinigt, erst beliebige Mengen, dann solche, die jeweils Repräsentanten von Klassen gleicher Kardinalität sind. Von Anfang an sind die Dingmengen mit Ziffernkärtchen versehen, die nun Schritt für Schritt von den Mengen losgelöst werden, bis nur noch rein symbolische Gleichungen gelöst werden, wobei der Rückgriff auf die anschauliche Mengendarstellung jederzeit weiterhin als Hilfe herangezogen werden darf. Die Einführung der Subtraktion folgt analogen Stufen.[734]

Es finden sich in diesen Schritten verschiedene Arten von Abstraktion. Auf der Ebene der Darstellungen sind Wechsel und Verknüpfung der unterschiedlichen Repräsentationsformen in Übereinstimmung mit dem EIS-Prinzip berücksichtigt[735]. Die Arbeit auf der konkreten, enaktiven Ebene steht jeweils am Anfang, Ziel ist das Arbeiten mit der abstrakten symbolischen Repräsentation. In der schriftlichen Darstellung werden Symbole unterschiedlichen Abstraktionsgrades verwendet, indem dem voll abstrakten Ziffernsymbol analoge, ikonische Zahlzeichen in Form von Strichen und Kringeln vorgeschaltet werden. Schließlich findet die schon im Rahmen des Aufbauprinzips angesprochene begriffliche Abstraktion statt, wenn der allgemeine Begriff von den konkreten Beispielen abgehoben wird.

Letzteres bildet auch den Kern des zweiten Dienesschen Prinzips, das als maßgeblich angesehen wird, das der *Variation der Anschauung*[736]. Demnach ist es Voraussetzung für echte Abstraktion, dass ein mathematischer Gegenstand durch mehrere unterschiedliche Beispiele und Materialien repräsentiert wird. Diese müssen stets anschaulich, bevorzugt auf der Handlungsebene, und zueinander isomorph sein. Abstraktion impliziert, dass ein Begriff rein mental, unabhängig von einer speziellen Darstellung verfügbar ist. Die Variation der Anschauung zielt darauf, die Assoziation mit ausschließlich einem Material zu vermeiden. Die Darstellungen in der Fibel werden hingegen wenig variiert. Während im Lehrerband regelmäßig darauf hingewiesen wird, dass neben dem strukturierten Material der Logischen Blöcke auch der Einsatz von Alltagsmengen, Plättchen etc. vorgesehen ist, ist die bestimmende Mengendarstellung hier das Venn- bzw. Euler-Diagramm (im Klassenzimmer durch Reifen oder Seile repräsentiert). Erst bei den vermischten

733. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 51; auf der symbolischen Ebene folgen die Stufen nur bedingt einer schrittweise stärkeren Abstraktion, da das Zahlwort – egal, ob gesprochen oder geschrieben – abstrakterer Natur ist als die analogen Zeichen.

734. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 68-72 und 74 f.; vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 69-74 und 77 f.

735. Ikonische Darstellungen der Mengenoperationen in Verbindung mit den zugehörigen Zahlengleichungen finden sich zwar nicht in den beschriebenen Stufen, aber im Schülerbuch auf den o. g. Seiten.

736. vgl.Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 6; Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 51.

Übungen zu den Mengenoperationen findet sich mit dem Modell der Straßenkreuzung eine alternative Darstellung der Operationen. Dann werden Straßenkreuzung und Venn-Diagramm allerdings gegenübergestellt, um die Anwendung des Prinzips über den Vergleich dezidiert herauszufordern[737].

Die überragende Rolle des Umgangs mit konkretem Material liegt auch im Piagetschen Begriff der *Operation* begründet. Die Aneignung mentaler Operationen als verinnerlichte Handlungen setzt zwingend die Handlung, und zwar für alle Lernenden individuell und an für die Begriffsbildung geeigneten Gegenständen, voraus. Während Neunzig an anderer Stelle auf diese Theorie verweist[738], spielen die Arbeiten Piagets in der Lehreranleitung zu *Wir lernen Mathematik* praktisch keine Rolle. Operatives Üben, wie es auch dem hier nicht weiter berücksichtigten Dienes-Prinzip der mathematischen Variabilität entspricht, ist lediglich implizit vorgesehen, wenn in Aufgaben die Leerstellen in den Gleichungen variiert werden.[739]

Während also die händische Arbeit an strukturierten und unstrukturierten Materialien zentrale Methode, vor allem zur Einführung neuer Sachverhalte, sein soll, weisen die Autoren wiederholt darauf hin, dass die Fibel hierfür weder gedacht noch geeignet ist, dass es sich ganz dezidiert nicht um ein Lehrbuch im Sinne eines vollständigen Lehrgangs handelt, sondern um eine Aufgabensammlung zur Festigung und Wiederholung[740]. Für die Bearbeitung der Aufgaben des Schülerbandes gibt es spezielle Folien, die über die Buchseiten gelegt werden können, damit nicht direkt ins Buch geschrieben werden muss. Ein solches Vorgehen ermöglicht die Wiederverwendung der Bände; da die Folien abwischbar sind und ebenfalls wiederverwendet werden sollen, bedeutet dies allerdings, dass Aufgabenlösungen später nicht mehr verfügbar sind. Auf ergänzende Arbeitskarten zur Übung wird verwiesen[741], allerdings waren weder die Arbeitskarten von Neunzig und Sorger noch die von Dienes zum Zeitpunkt der Veröffentlichung von *Wir lernen Mathematik* erschienen. Den bisherigen Ausführungen steht entgegen, dass die Symbole offenbar mithilfe der Fibel eingeführt werden sollen, ebenso soll sie bei der Einführung in den Begriff der Restmenge herangezogen werden[742]. Unklar ist die Rolle, die dem Schülerbuch bei der Einführung der Zahlen 1-10 zukommt; die einzelnen

737. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 44; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 35. Das Modell der Kreuzung findet sich zuvor bereits bei den Unterschiedsspielen in der Fibel, S. 19, vgl. Lehrer 1968, S. 27, dort aber nicht als Darstellung für Mengenoperationen.
738. Neunzig, Vorschläge, S. 94 f.
739. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 71; Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 74.
740. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 7 f., 14 und 34; Neunzig, Vorschläge, S. 97.
741. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 8 und 56; Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 52.
742. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 41 und 48.

Abstraktionsstufen sind jedenfalls für alle 10 Zahlen zeichnerisch darin wiedergegeben[743].

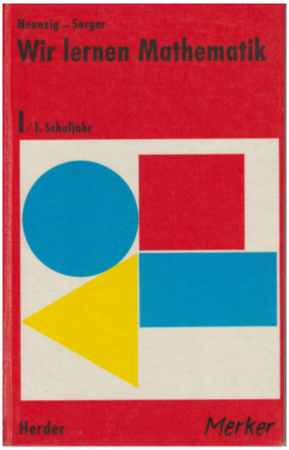
Bezüglich der bevorzugten Sozialform weichen Neunzig und Sorger erneut ausdrücklich von Dienes ab, indem sie die von ihm vorgesehene Dominanz der Gruppenarbeit einschränken und stattdessen eine „Synthese zwischen Gruppen- und Frontalunterricht“ fordern[744]. Sie begründen diese Entscheidung zum einen didaktisch, damit, dass sie frontalen Phasen z. B. zur Sicherung oder Einführung von Bezeichnungen einen eigenen Wert zusprechen, zum anderen mit äußeren, lokalen Bedingungen. Ein Übergang zu ausschließlicher Gruppenarbeit wird „in der Bundesrepublik“ unter den damaligen Voraussetzungen nicht für möglich gehalten[745]. Die Gruppenarbeit ist als Rahmen für das Handeln mit dem Material nichtsdestotrotz von großer Bedeutung, auch, weil sie u. a. der Differenzierung dient, ein pädagogisch-didaktischer Aspekt, der sonst im Werk kaum Erwähnung findet[746]. Der Umgang mit den Materialien soll zwar größtenteils spielerisch erfolgen, als explizit eigenständige Methode findet das Lernspiel aber keine Berücksichtigung.

Es soll Wert auf eine kindgerechte Sprache gelegt werden. Eine zu formale, abstrakte Ausdrucksweise und feste Sprachmuster sind abzulehnen. Für entsprechend geeignete Formulierungen werden an mehreren Stellen Vorschläge gemacht, so sollen z. B. die gleiche Mächtigkeit von Mengen durch die Wendung „Die Mengen passen zusammen.“[747] beschrieben und Mengen generell als jeweilige „Menge der ...“[748] bezeichnet werden. Da zudem die Wichtigkeit einer korrekten Sprechweise betont wird und die Lehrkräfte angehalten sind, auf deren Einhaltung zu achten, erhalten diese Formulierungen dennoch den Charakter fester Vorgaben. In einem gewissen Widerspruch zur Forderung nach fachlicher Korrektheit steht wiederum, dass Subtraktionsgleichungen in der Form „Sieben *weniger* vier *gleich* drei.“ verbalisiert werden sollen[749]. Die Nutzung von Symbolen ist im 1. Schuljahr aufs Notwendigste zu beschränken. Da das Zahlenrechnen aus den entsprechenden Mengenoperationen abgeleitet wird, gehören dazu neben den Rechenzeichen die Zeichen für die Mengenvereinigung, für die Restmengenbildung und – vermutlich der Vollständigkeit halber – die für Schnittmengenbildung.[750] In den Mengengleichungen werden

743. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 52 f.; vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 44-67.
744. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 6; ebenso Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 52.
745. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 7.
746. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 42; nur sehr vereinzelt dienen Inhalte ausdrücklich der Differenzierung, z. B. die Schnittmengenbildung aus drei Mengen, Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 44 und Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 36.
747. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 57; zur Kritik an dieser Formulierung vgl. Karaschewski, Irrwege, S. 45.
748. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 20, hier als Beispiel „Menge der Mäntel“.
749. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 75, Hervorh. im Original.
750. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 47 und 55.

zwar die Operations- und Relationssymbole genutzt, die Mengen selbst aber stets ikonisch dargestellt, da die formale Mengenschreibweise unter Nutzung der Mengenklammern in der 1. Klasse noch nicht eingeführt wird.[751]

Wir lernen Mathematik I, 2. Aufl. 1971



Sowohl Schülerbuch als auch Lehreranleitung für das 1. Schuljahr wurden mit der 2. Auflage überarbeitet und in wesentlichen Teilen abgeändert. Während die formulierten Ziele, zentralen Inhalte und grundlegenden Prinzipien gleich geblieben sind, wurde der **Gesamtaufbau** des Werks für die 1. Klasse neu strukturiert. Die klare Trennung der inhaltlichen Blöcke Mengen und Arithmetik wurde aufgehoben; die ersten Zahlen werden früher eingeführt, und zwar bereits nach 6 statt wie zuvor nach 10-12 Wochen.[752] Das hat zur Folge, dass sich die Behandlung der Begriffe aus der Mengenlehre mit der Einführung der Zahlen und Operationen stückweise abwechseln. Die Mengenlehre hat damit nicht mehr den Charakter eines geschlossenen Vorkurses; beide Inhaltsbereiche existieren stärker nebeneinander, wobei die Reihenfolge nach wie vor dadurch bestimmt wird, dass die Zahlen > 5 und das Rechnen auf Mengenbegriffen aufgebaut werden. Dass die **Einführung der Zahlen** 1-5 nicht mehr so weit hinausgeschoben wird, begründen Neunzig und Sorger mit dem Interesse der Kinder für Zahlen.[753] Die Entscheidung ist außerdem schlüssig vor dem Hintergrund, dass die Autoren schon in der 1. Auflage hierbei nicht auf Mengen zurückgreifen und stattdessen an i. A. bereits vor Schulbeginn ausgebildete Fähigkeiten zur Simultanauffassung anknüpfen.

Eine nicht-ordinale Reihenfolge wird beibehalten, allerdings wird die 1 nun zwischen der 3 und der 5 eingeführt.[754] Die Einführung selbst ist entlang der gleichen Abstraktionsschritte vorgesehen wie zuvor, allerdings insgesamt gekürzt, was dazu passt, dass darauf hingewiesen wird, dass an dieser Stelle „der Anspruchsgrad für

751. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 14.
752. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 9 und Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I / 1. Schuljahr. Lehreranleitung, Freiburg: Herder, ©1971, S. 8 [im Folgenden: Neunzig & Sorger, Lehrer 1971]; vgl. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I. Erstes Schuljahr; bearb. Aufl., Freiburg: Herder, ©1971 [im Folgenden: Neunzig & Sorger, Schüler 1971].
753. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 37.
754. vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1971, S. 28 f.

einige Kinder zu gering ist“[755]. Die Zahlen 6-10 werden nicht nur getrennt von den Zahlen 1-5 und nach wie vor auf Mengenbegriffen basierend eingeführt, sondern noch einmal unterteilt in 5-8 und 9-10, wobei Letztere zusätzlich durch den Mengenvergleich unter Zuhilfenahme der Größer- und Kleiner-Relation motiviert werden.[756]

Die Abstraktionsstufen, über die die ***Addition*** aus der Mengenvereinigung und die ***Subtraktion*** aus der Restmengenbildung abgeleitet werden, bleiben im Wesentlichen die gleichen, wenn auch etwas umsortiert, z. T. konkretisiert und z. T. zusammengefasst. Sie werden allerdings in zwei Abschnitte aufgeteilt, von denen der erste der Gewinnung der Zahlengleichung und der zweite stärker der Festigung dient.[757] Aus Anmerkungen zur Kommutativität der Addition geht hervor, dass eine ausführlichere Behandlung im Unterricht aufgrund der Offensichtlichkeit, auch für die Schülerinnen und Schüler, häufig nicht für notwendig gehalten wird. Zur Abhilfe schlagen Neunzig und Sorger vor, die Besonderheit dieser Eigenschaft durch nicht-kommutative Beispiele (z. B. Bewegungsabläufe aus dem Alltag) aufzuzeigen[758] und damit den Begriff über das Rechnen hinaus zu verallgemeinern. Neu ist, dass die Bildung der Restmenge bereits vor dem Zahlenrechnen als Umkehrung der Vereinigungsmengenbildung behandelt wird.[759] Entsprechend wird größerer Wert auf den operativen Zusammenhang von Addition und Subtraktion gelegt, indem von Anfang an mit zueinander passenden äquivalenten Gleichungen gearbeitet wird.[760]

Die Zahlen 11-20 werden weiterhin als ***Längen*** eingeführt, es wird in der Fibel lediglich noch eine Seite zum vorzahligen Längenvergleich vor den konkreten Maßen eingefügt[761]. In der Lehreranleitung wird das Messen hingegen umfangreicher begründet, indem stärkerer Bezug auf die Anwendung genommen wird. Die Arbeit mit benannten Zahlen, die „seit jeher einen wichtigen Bestandteil des Rechenunterrichts“[762] darstellt, dient der Herstellung des Alltagsbezugs im Mathematikunterricht. Das erfolgreiche Lösen von Textaufgaben wird entsprechend als ausdrückliches Lernziel genannt, die passenden Aufgaben finden sich nicht mehr gebündelt am Ende des Buches, sondern sind stärker in die jeweiligen Kapitel integriert. Eine Vertiefung des Zahlbegriffs wird zwar außerdem als Begründung für die

755. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 40; Abstraktionsschritte so auch in Neunzig, Grundschulwerk, S. 197.
756. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 47.
757. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 73 f.
758. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 75 f.
759. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 71.
760. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 78; vgl. Neunzig & Sorger, Schüler 1971, S. 66 f. und 77.
761. Neunzig & Sorger, Schüler 1971, S. 82.
762. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 81.

Verbindung mit dem Messen genannt, dennoch sind kardinaler und Maßzahlaspekt „streng voneinander zu trennen“. Der vage angedeutete fachliche Hintergrund, dass die Vermischung der diskreten Mengenvorstellung mit der stetigen Längenvorstellung zu Schwierigkeiten führen könnte, wird nicht weiter ausgeführt.[763] Es entsteht der Eindruck, dass es hier nicht darum geht, den abstrakten Zahlbegriff durch einen weiteren Aspekt zu erweitern, sondern dass die Behandlung der Zahlen als Größen ganz im Dienst des Sachrechnens steht.

Damit, dass es in der Neubearbeitung kein eigenständiges Kapitel mehr zum Thema Ordnungsrelationen gibt, findet das Zählen hier keine Erwähnung mehr, aber auch an keiner anderen Stelle. Da es bekannt ist, dass viele Kinder zumindest die Zahlwortreihe bereits zu Schulbeginn beherrschen und zählen wollen, ist in diesem Fall anzunehmen, dass die in der 1. Auflage noch geäußerte Forderung, dies weit hinauszuschieben, ohnehin nicht befolgt wurde. Mit den Zahlen wird nun auch der ordinale Aspekt früher eingeführt, ein frühes Zählen widerspricht zudem nicht mehr dem alten Gesamtkonzept, das auf der Trennung von Mengenlehre-Vorkurs und der Arbeit an Zahlen beruhte. Die Ordnungsrelation als Themenbereich findet stattdessen in Form der Größer-/Kleiner-Beziehung Eingang in die Einführung der Zahlen 9 und 10, allgemeinere relationale Betrachtungen finden vorher schon beim wiederholten Vergleichen von Mengen statt.

Zudem sind ***Relationen*** im Allgemeinen nun ein eigener Inhaltsbereich, dem ein gesamtes Kapitel gewidmet ist, wenn auch nur am Ende des Buches und relativ kurzgefasst (so dass dieses Thema in der Praxis wahrscheinlich realistischerweise häufig am Schuljahresende weggefallen ist). Die Autoren begründen dies mit psychologischen „Nachteile[n] durch ein zeitlich zu weites Hinausschieben der Zahlen“[764]; da Relationen in ihrer expliziten Form also keine unmittelbare Voraussetzung fürs Rechnen sind, benötigt man sie nicht früher, es handelt sich hierbei um eine Argumentation, die man so auch im vorletzten Kapitel findet, demjenigen zu Venn-Diagrammen mit drei Mengen.[765] Dass den Relationen überhaupt größeres Gewicht zukommt, dient nach Angabe der Autoren vor allem der Vertiefung des Zahlbegriffs durch das Herausstellen von Beziehungen der Zahlen untereinander. Überhaupt soll der Relationsbegriff, hauptsächlich durch das Ausfüllen von Pfeildiagrammen, nur erst vorbereitet werden, die tiefergehende Behandlung des Begriffs an sich wird in die 3. und 4. Klasse verschoben.

Andererseits nennen Neunzig und Sorger es in Bezug auf die gesamte stoffliche Konzeption eine „unzulässige Einschränkung, im Fach Mathematik die Umwelt

763. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 84 f.
764. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 102.
765. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 95.

nur im Hinblick auf irgendwelche Zahleigenschaften zu untersuchen“[766]. Es soll also um mehr gehen als eine rein quantitative Betrachtung der Umwelt, Ziel muss es sein, die Mathematik als Werkzeug zur qualitativen Beschreibung lebensweltlicher Phänomene zu nutzen. Dies schlägt sich zum einen darin nieder, dass vereinzelt auf erste propädeutische Erfahrungen mit weiteren Begriffen wie Abbildungen und Folgen verwiesen wird[767], zum anderen in den didaktischen Begründungen für die einzuführenden Mengenbegriffe, die in der 2. Auflage über rein fachliche Ausführungen hinausgehen. Während die Operationen, auf denen die Addition und die Subtraktion basieren, weiterhin mit der Grundlegung eines einsichtsvollen Rechnens begründet werden, dienen die Schnitt- und die Teilmengenbildung darüber hinaus der präzisen Beschreibung von Objekten durch mehrere Eigenschaften. Damit sind sie gleichzeitig Mittel zur Ausbildung logischer Fähigkeiten.[768]

Geometrie wird in der Fibel nach wie vor nicht thematisiert. Dies geschieht für das 1. Schuljahr erstmalig mit den *Arbeitskarten: Geometrie*, die aber nicht vor 1972 erschienen sind.

Die Kapitel der **Lehreranleitung** wurden einer gründlichen Neubearbeitung unterzogen. Die fachlichen Erläuterungen wurden zugunsten didaktischer Begründungen gekürzt und vereinfacht, didaktisch-methodische Hinweise werden wesentlich ausführlicher gegeben und durch mehr konkrete Unterrichts- und Aufgabenbeispiele ergänzt. Die Lernziele werden nicht mehr nur auf fachlicher Ebene, sondern stärker didaktisch formuliert, für Mengen z. B. liefern die Entwicklungen in der Wissenschaft keine Begründung mehr. Ganz offenbar wurde hier auf eine entscheidende Schwäche des Werks in der 1. Auflage reagiert, namentlich der Vernachlässigung unterrichtspraktischer Anmerkungen und damit solcher Ausführungen, die eine Umsetzung im Sinne der Verfasser überhaupt erst möglich machen.

Vorbild und Grundlage des eigenen **didaktischen Konzepts** ist weiterhin Dienes mit seinen didaktischen Prinzipien, von denen das Aufbauprinzip sowie das Prinzip der Variation der Veranschaulichung den Lehrgang bestimmen. Die Dienesschen Stufen des Aufbauprinzips mit der Rolle des Lernspiels für die Begriffskonstruktion werden jetzt näher ausgeführt, die Notwendigkeit des Wechsels der Darstellungen und Beispiele wird stärker betont. Vor allem aber werden diese in der Fibel selbst stärker variiert. Alltagsmengen und strukturierte Mengen aus Logischen Blöcken wechseln sich ab, mit den Torspielen – einer Darstellung, die Neunzig und Sorger

766. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 12.
767. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 20, 23 und 93, wobei hier auch wieder die Zahlenfolgen vorrangig mit der Festigung arithmetischer Kenntnisse begründet werden.
768. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 30 und 53.

selbst entwickelt haben[769] – gibt es ein weiteres Modell für Mengen und Mengenoperationen, auch in der Lehreranleitung finden sich Verweise auf ergänzendes, den Merkmalsklötzen strukturgleiches Material.[770] Die vormals z. T. uneindeutige ikonische Darstellung der Mengendiagramme wurde mit der Überarbeitung vereinheitlicht[771]. Der explizite Hinweis, dass es auf die Art der Grundmengen im Einzelnen nicht so sehr ankommt, sondern dass es „[nur] [w]esentlich ist, daß man das Material wechselt“[772], kann Beleg dafür sein, dass ein ausführlicherer Kommentar aufgrund von Unsicherheiten in der Praxis nötig geworden war.

Mengendarstellung im Venn-Diagramm und in Tordarstellung in *Wir lernen Mathematik I* ©1971, S. 5

Die Ausführungen zur Korrektheit der ***Sprache***, wie sie sich in der älteren Version des Lehrerbuchs finden, werden in der neueren ausdrücklich relativiert. An mehreren Stellen heißt es, dass im Anfangsunterricht keine formal korrekte Sprache gefordert werden soll, dass feste Sprachmuster zu vermeiden sind, ebenso wie die verfrühte Einführung von noch unverstandenen Symbolen[773]. Dagegen wird ein „gewisser Ausgleich von Sprachbarrieren“[774] im Sinne eines kompensatorischen Ansatzes gefordert. Möglichkeiten zur Reduktion des Spracheinsatzes bieten inzwischen verfügbare Symbolkärtchen und symbolische Arbeitsaufträge, die die verbalen Aufgabenstellungen gerade im Anfangsunterricht, wenn die meisten Kinder diese ohnehin noch nicht lesen können, ablösen[775]. Die Nutzung formal korrekter Zahlen- und Mengengleichungen inklusive der dafür notwendigen Symbole und Termini ist dennoch weiterhin vorgesehen, ebenso werden für die Beschreibung der Gleichheit von Mengen Formulierungen vorgegeben[776], obwohl der Hinweis, dass die Verbalisierung von Operationen „mit

769. nach Griesel, Heinz: Die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Eine Analyse der gegenwärtigen Lehrbuchsituation; grundsätzliche Überlegungen und Tendenzen, in: ZDM 4 (1972), 3, S. 94.
770. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 26-28.
771. vgl. z. B. Neunzig & Sorger, Schüler 1968, S. 22 und Neunzig & Sorger, Schüler 1971, S. 19.
772. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 72.
773. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 16, 53, 55 und 59 f.; tatsächlich werden Symbole in der 2. Auflage später eingeführt; ebenso sind „nur die unbedingt notwendigen Symbole einzuführen“, Neunzig, Grundschulwerk, S. 197.
774. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 16.
775. Auf den ersten 20 Fibel-Seiten finden sich jetzt nur noch Anmerkungen für Eltern und Lehrpersonen, die auch entsprechend gut als solche zu erkennen sind.
776. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 70; für Bemerkungen zur Symbolik vgl. ebenda, S. 67 f. und 70.

der korrekten Sprech- und Schreibweise sicher nicht einfach [ist]“[777] auf Schwierigkeiten in der unterrichtlichen Umsetzung schließen lässt.

Die **methodischen Grundsätze**, dass Gruppenarbeit und Frontalunterricht gleichermaßen beherrschende Sozialformen sein sollen und das eigene Schülerhandeln am Material zentral für den Lehrgang ist, bleiben gleich, ebenso die Rolle der Fibel. Dass die Herleitung der einzelnen Mengenbegriffe im Schülerbuch mit der Neuauflage weniger umfangreich ausfällt als zuvor, mag Hinweis darauf sein, dass der ältere Band mit seinen ausführlicheren Darstellungen entgegen der Absicht der Verfasser doch zu sehr dazu verleitet hat, die Fibel als Lehrbuch zu nutzen und die enaktiv-spielerische Arbeit in der Klasse zu vernachlässigen. Zusätzlich sind in den drei Jahren zwischen den Auflagen diverse, das Schulbuch ergänzende Materialien erschienen. Verwiesen wird u. a. auf Spielpläne, Arbeitskarten, das Buch *Denken mit LEGO* von Freund und Sorger sowie die Merkmals- und Symbolkarten, die die Unterrichtsorganisation erleichtern sollen – ihre Rolle im Hinblick auf die Sprachbildung wird hier aber nicht erläutert.[778]. V. a. den Arbeitskarten kommt eine wichtige Rolle zu. Sie erfüllen den Bedarf an leicht verfügbarem Übungsmaterial, auf das auch später noch zurückgegriffen werden kann[779]. Die wiederverwendbaren Folien für das Bearbeiten der Aufgaben im Schülerbuch haben sich dafür offenbar nicht als praktikabel erwiesen und sind auch nicht mehr vorgesehen.

Mit der Verbindung von individuell einsetzbaren Arbeitskarten und Gruppenarbeit sind Bedingungen für die Umsetzung von Differenzierung gegeben, zumal die Aufgaben in den Arbeitskarten z. T. mehrere Lösungen zulassen und bewusst im Schwierigkeitsgrad variieren[780]; die Testseiten, die mit der Neuauflage eingeplant sind, können u. a. hierfür als Instrument zur Diagnose eingesetzt werden. Die Realisierung der ***Gruppenarbeit*** in der Unterrichtspraxis scheint allerdings keineswegs reibungslos vor sich gegangen zu sein, wie die Bemerkung, dass diese vor allem am Anfang „die größten Probleme“ bereite, belegt. Die Anweisungen, die als Hilfe zum erfolgreichen Einsatz von Gruppenarbeit formuliert werden, geben einen Einblick in die Art der Schwierigkeiten. Vorgeschlagen werden eine feste Aufgabenverteilung innerhalb heterogener Gruppen und eine begrenzte Dauer der Arbeit in Gruppen; dass außerdem der Verzicht auf den Anspruch, die Arbeit jedes Einzelnen zu kontrollieren, angemahnt wird, zeigt, dass die Probleme nicht nur im

777. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 72.
778. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 8 und 18; vgl. Neunzig, Grundschulwerk, S. 196 f.; vgl. darüber hinaus Freund, Helmut & Sorger, Peter: Denken mit LEGO. Vergnügliche Denkspiele für Logik und Mengenlehre, Freiburg: Herder, 1971.
779. Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 8.
780. vgl. z. B. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten 1: Mengen, Freiburg: Herder, ©1970, S. 13 f.; vgl. Lunkenbein, Dieter: Mengen und Logik. Lehrerheft zu den Arbeitskarten „Mengen und Logik“, Freiburg: Herder, 1970, S. 3.

Bereich einer effizienten Organisation liegen, sondern vor allem eine veränderte Wahrnehmung der Lehrerolle vonnöten ist.

An einer anderen Stelle verweisen Anmerkungen zur Gruppenarbeit indes noch auf ganz andere Bedingungen, die Einfluss auf die Umsetzung der Reform genommen haben. Während in der 1. Auflage der Lehreranleitung verlangt wird, dass „Klassen nicht mehr als 32 Kinder umfassen [sollten], wobei 8 Gruppen mit je 4 Schülern gebildet werden könnten." heißt es in der 2. Auflage in abgeschwächter Form, dass „anzustreben [ist], daß die Klassen [...] nicht mehr als 36 Kinder umfassen, wobei 9 Gruppen mit je 4 Schülern gebildet werden könnten." Bei der Klassenstärke handelt es sich um eine äußere Voraussetzung für den Methodeneinsatz, die von Lehrkräften in keinerlei Weise beeinflussbar ist, eine Tatsache, der Neunzig und Sorger mit der Anpassung der genannten Zahlen Tribut zollen müssen. Auch die weitere Formulierung relativiert die unbedingte Forderung nach dem ständigen Einsatz von Gruppenarbeit, wenn es zunächst heißt, dass bei größeren Klassen diese „in Mathematik in zwei Abteilungen aufgeteilt werden [sollte]", später dann nur noch, dass „zu überlegen [ist], ob die Klasse in einigen Mathematikstunden nicht in zwei Abteilungen aufgeteilt werden kann."[781]

Umsetzung und Rezeption

Der Vergleich der beiden unterschiedlichen Auflagen sowohl des Schülerbuchs als auch der Lehreranleitung liefert bereits verschiedene Hinweise auf Schwierigkeiten, die z. T. im Konzept bzw. in dessen Konkretisierung in den Büchern, z. T. aber auch in der praktischen Umsetzung unter den gegebenen Bedingungen in den Grundschulen angelegt waren. Diverse Unsauberkeiten, Widersprüche und offensichtlich problematische Stellen in den beiden Bänden wurden korrigiert, überarbeitet und abgeändert. Klar wird aber auch, dass weiterhin Inkonsistenzen bestehen.

Die hohen Auflagenzahlen lassen darauf schließen, dass *Wir lernen Mathematik* in vielen deutschen Grundschulen eingesetzt wurde, passend dazu ergab eine Umfrage unter Lehrkräften in Nordrhein-Westfalen im Schuljahr 1970/71, dass 43 % der Befragten das Buch nutzten[782]; das frühe Erscheinen wird zu dieser Zeit dazu beigetragen haben. Bei einer von Radatz et. al. durchgeführten Lehrerbefragung in Niedersachsen gaben hingegen nur 2 und damit 0,5 % der befragten Lehrkräfte an, mit dem Schulbuch von W. Neunzig und P. Sorger gearbeitet zu haben.[783]

781. jeweils Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 9, und Neunzig & Sorger, Lehrer 1971, S. 8.
782. Soika, a. a. O., S. 68.
783. Radatz et. al., a. a. O., S. 9.

Da die Befragung von 1981 ist, das Lehrwerk in seiner letzten Auflage also zu der Zeit bereits 10 Jahre alt war, kann hieraus wohl weder ohne Weiteres geschlossen werden, dass das Buch generell in Niedersachsen gering verbreitet war, noch dass es aus Qualitätsgründen durch andere ersetzt worden ist. Eine entsprechende Untersuchung dazu könnte Aufschluss über oder zumindest Hinweise auf die Praktikabilität des Lehrgangs geben. Die beiden betroffenen Lehrkräfte bewerteten das Schulbuch im Schnitt mit der Note 2,0; es erhielt damit die beste Note von allen, was angesichts der Datenbasis aber wenig aussagekräftig ist. Die Lehrerinformationen wurden alle als gut bewertet, die Lehreranleitung von Neunzig und Sorger ist hier eingeschlossen.[784] Die Logischen Blöcke werden in der neueren Lehreranleitung als „feste[r] Bestandteil der Arbeit in Kindergärten und Vorschulen“ bezeichnet, sie haben sich demnach als Spiel- und Lernmaterial auch unabhängig von dem Schulbuch durchgesetzt.

Walter Neunzig hat ab 1967, also noch bevor die erste Auflage von *Wir lernen Mathematik I* erschien, nach einem speziellen Lehrplan Unterrichtsversuche in neun ersten Klassen im Raum Freiburg durchgeführt und fünf Jahre später ebenso wie Bauersfeld zeigen können, dass die „Rechenfähigkeit der Kinder in ihren Versuchsklassen nicht gelitten hat.“[785] Picker hat für seine Unterrichtsversuche neben anderen Werken ebenfalls auf das Schulbuch zurückgegriffen. Weitere oder umfassendere Evaluationen oder weitere wissenschaftliche Begleituntersuchungen von *Wir lernen Mathematik* sind nicht bekannt, zu den in einem entsprechenden Unterricht erworbenen Kompetenzen und zur Erfüllung der Lernziele kann daher kaum eine Aussage getroffen werden.[786] Allerdings belegen protokollierte Unterrichtsbeispiele einer Freiburger Lehrerin in der Schrift *Einstieg in die Mathematik*, die von Neunzig und Sorger selbst als zusätzliche Begleitschrift verfasst wurde, sowie eigene Aussagen Neunzigs, dass die Autoren die Umsetzung in die Praxis beobachtet haben. Zudem geben die Protokolle Einblick in einen möglichen Unterricht gemäß der Konzeption, wie sie sich in der 1. Auflage darstellt.[787]

Die Ausschnitte zeigen, dass die Einführung vieler Begriffe offenbar reibungslos verlaufen ist, das Konzept der leeren Menge scheint den Schülerinnen und Schülern keine Schwierigkeiten zu bereiten[788], ebenso wenig die Mengengleichheit[789]. Das

784. Radatz et. al., a. a. O., S. 10 und 15.
785. Picker, 40 Jahre; vgl. Picker, Reform, S. 15, 18 und 30; vgl. Neunzig, Entwurf, S. 134.
786. Die Arbeit von Soika, a. a. O., untersucht lediglich, inwiefern das genutzte Schulbuch überhaupt Einfluss auf die Erreichung der Lernziele hat, mit dem Ergebnis, dass *Wir lernen Mathematik* hierfür genauso gut geeignet ist wie das Mathematiklehrwerk von Resag & Bärmann und besser als die erste Auflage des Buches von Fricke & Besuden, welche noch nicht an neue Lehrpläne angepasst war, vgl. ebenda, S. 84.
787. vgl. im Folgenden Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 71-74, 78-80, 89-92 und 98-100.
788. insofern konform mit Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 36.
789. Es handelt sich hier um ein nicht unproblematisches Konzept, in der Hinsicht, dass es auf

Herstellen von Mengengleichheit über die eineindeutige Zuordnung gelingt den Kindern von sich aus, und auch bei der Einführung und Ordnung der Zahlen 1-5 bzw. 1-9 zeigen sich keinerlei Probleme; in der Tat scheint der Zahlbegriff durch die Mengenvorstellung so fundiert zu sein, dass der ordinale Aspekt sich mit einer gewissen Selbstverständlichkeit daran anknüpfen und damit verbinden lässt. Die eineindeutige Zuordnung wird bei Schwierigkeiten mit Umkehraufgaben der Addition selbstständig von einer Schülerin als Hilfe herangezogen und insofern als Problemlösestrategie genutzt.

Schwierigkeiten, die sich an anderen Stellen zeigen, liegen nicht unbedingt in den fachlichen Inhalten. So erweist sich z. B. der Transfer einer Lösung von der konkreten Ebene der Menge aus Kindern der Klasse auf die – ebenfalls konkrete – Menge der Merkmalsklötze als keinesfalls trivial[790], das strukturgleiche Problem an der veränderten Grundmenge stellt für die Kinder zu Anfang ein völlig neues Problem dar, dessen Lösung erst mit der Zeit und mit Hilfe übertragen werden kann. Es handelt sich hierbei aber wohl kaum um ein konzeptuelles Hindernis, sondern im Gegenteil eher um eine Bestätigung für die Notwendigkeit der Variation der Anschauung. Ähnliches gilt für die Additionsaufgaben der 5. Abstraktionsstufe, auf der die Leerstellen in Zahlengleichungen variiert werden. Dass dieses den Schülerinnen und Schülern schwer fällt, ist sicher kein Argument gegen solche Übungen, sondern zeigt vielmehr deutlich, wie notwendig operatives Üben nach dem Prinzip der mathematischen Variabilität ist.

Anders sieht es aus mit solchen Unterrichtsinhalten, denen es aus Sicht der Kinder an Sinnhaftigkeit mangelt. Hierzu muss wohl die Beobachtung gezählt werden, dass es schwieriger scheint, einfachere Aufgaben, also solche, deren Lösung leicht gesehen wird, mithilfe konkreter Materialien zu lösen. Das aussagenlogische „oder“ wird im Zusammenhang mit der Vereinigung von Mengen über die Frage motiviert, welche Antwort auf die Frage nach der Eigenschaft eines beliebigen Elements der Vereinigungsmenge die in jedem Fall richtige ist. Dass die Kinder die Lösung zunächst nur durch sehr enge Fragen von Seiten der Lehrperson finden und sie dann schnell wieder vergessen, bestätigt die Sinnlosigkeit von außen aufgezwungener Formulierungen – dies wird von der Lehrerin selbst vermerkt. Dass aber ein Schüler

enaktiver Ebene nicht möglich ist, zwei gleiche Mengen nebeneinander zu legen, da die Elemente im konkreten Fall immer unterscheidbar sind. In der Stunde wird der Begriff über eine bloße Umsortierung auf der konkreten Ebene eingeführt, nebeneinander erscheint die jeweils gleiche Menge in umsortierter Form dann im Anschluss zeichnerisch, Schwierigkeiten sind an dieser Stelle nicht zu beobachten, anders bei Neunzig, Entwurf, S. 140.

790. in Neunzig, Entwurf, S. 139, berichtet Neunzig aus seinen eigenen Beobachtungen davon, dass der Schwierigkeitsgrad der Arbeit generell von der Art der Grundmenge abhängt; während den Kindern die Arbeit am leichtesten fällt, wenn sie selbst als Mengenelemente fungieren, und auch die Arbeit an den Logischen Blöcken nicht auf größere Probleme stößt, bereitet ausgerechnet die Alltagsmenge „Schreibzeug“ die größten Schwierigkeiten.

in einer späteren Stunde, in der die korrekte Sprechweise bereits von den Kindern beherrscht wird, einwirft, dass er „lieber einmal nicht richtig raten" würde, wirft die Frage auf, ob es sich bei der Ausgangsfrage nicht um eine zwar letztlich zielführende, aber dennoch vor allem künstliche handelt, die Alltagserfahrungen mit der Tätigkeit „Raten" (etwa im Spiel) widerspricht. Die Gefahr, dass unverstandene Sprachmuster aufgeprägt werden, vor der Neunzig und Sorger wiederholt warnen, scheint hier in der Tat gegeben. Überhaupt fällt das Formulieren auch an anderer Stelle schwer, sofern es dabei allerdings um die Verbalisierung von Lösungswegen geht, handelt es sich – zumindest aus heutiger Perspektive – wiederum um eine Kompetenz, auf die nicht verzichtet werden darf und die stattdessen im besonderen Maße gefördert und geübt werden muss.

Weitere beobachtete Schwierigkeiten[791] betreffen in der Tat in der Konzeption angelegte Bereiche. Der Begriff der Vereinigungsmenge erweist sich als für die Kinder schwierig – was aber auch in der Verknüpfung mit dem logischen „oder" begründet liegt –, die übermäßige Nutzung abstrakter Symbole birgt die Gefahr von Überforderung, und bei einigen Kindern wurde entgegen dem oben zitierten Unterrichtsprotokoll beobachtet, dass die Einsicht, dass ein und dieselbe Menge in der zeichnerischen Darstellung zweimal vorhanden sein kann, schwer fiel. Der letzte Punkt wird relevant bei der Einführung der Mengengleichheit. Andererseits gilt auch hier, dass die Beobachtung zeigt, wie wichtig es ist, den Unterschied zwischen einem Begriff und seiner Darstellung herauszustellen.

Die Einführung der Zahlen wird erst für die 17. Woche protokolliert und damit noch einmal wesentlich später als vorgesehen. Die Umsortierung in der 2. Auflage erfährt hier weitere Berechtigung. Worin die Ausdehnung des Mengen-Vorkurses begründet liegt, kann aus den vorliegenden Ausschnitten nicht abgeleitet werden; da es sich um die 65. Stunde handelt, können organisatorische Ursachen wie vorheriger Stundenausfall nicht ausgeschlossen werden, die Ursachen können aber ebenso im Kurs in Form nicht eingeplanter oder falsch eingeschätzter Hindernisse selbst liegen. Ohnehin haben wir es hier nur mit einer bedingt aussagekräftigen Quelle zu tun, denn obgleich es keinen Grund gibt, die Schilderungen in den Aufzeichnungen anzuzweifeln, so ist doch klar, dass diese nur in Ausschnitten wiedergegeben sind, deren Auswahl im Rahmen der Schrift *Einstieg in die Mathematik* eher dem Kriterium der Werbetauglichkeit als der Eignung für eine kritische Aufarbeitung unterliegt. Es ergibt sich nichtsdestotrotz nicht der Eindruck, dass das Hinausschieben der Zahlen für die Kinder eine Belastung darstellt. Als es schließlich so weit ist, dass sie Mengen mit gleicher Anzahl an Elementen vergleichen sollen, fällt ihnen diese gemeinsame Eigenschaft zunächst gar nicht auf.

791. vgl. Neunzig, Entwurf, S. 139 f.

Auffällig ist die methodische Gestaltung des Unterrichts in den Aufzeichnungen. Die Lehrperson folgt den Vorgaben in der Lehreranleitung sehr genau, was Ablauf, Abstraktionsstufen (erst das gesprochene, dann das geschrieben Zahlwort, auf die Übereinstimmung wird hier explizit hingewiesen) und Formulierungen („Die Mengen passen zusammen.") betrifft. Als Sozialform dominieren in den Beispielen jedoch klar Frontalunterricht und Einzelarbeit, Frontalunterricht für die Einführung von etwas Neuem und zur Ergebnissicherung, Einzelarbeit in Übungsphasen. Einmal findet Übung in Gruppen statt, diese bestehen jedoch nur aus zwei Kindern. Die Gesprächsführung ist sehr eng fragend-entwickelnd, in dem Beispiel des aussagenlogischen „oder" geradezu sokratisch-mäeutisch. Offene Gruppenarbeit, in der mit dem Material spielerisch umgegangen wird, in der die dem Material inhärente Struktur mathematische Gesetzmäßigkeiten offen legt und die Kinder sich im selbsttätigen Handeln Begriffe konstruieren oder zumindest präfigurieren, wie es der Dienes-Konzeption entspricht, findet nicht statt. Der gesamte Unterricht ist sehr lehrerzentriert und damit offenbar methodisch traditionell, nicht die Kinder erarbeiten sich die Begriffe selbst, sondern „die Lehrerin [erarbeitet] mit den Kindern die Begriffe"[792].

Was aus den Lehrerbänden im Hinblick auf Schwierigkeiten in der unterrichtlichen Praxis deutlich wird, sind vom mathematischen Inhalt weitgehend unabhängige Bedingungen, die vor allem die methodische Umsetzung der Modernen Mathematik behindern. Neben den bereits angesprochenen äußeren Voraussetzungen in den Schulklassen gehören dazu offenbar eine methodische Tradition, die mit Gruppenarbeit nur schwer zu vereinbaren ist – was sich im o. g. Beispiel zu bestätigen scheint – , und vor allem die Frage der Lehrerbildung. Wiederholt sprechen sich Neunzig und Sorger für eine Reform der Lehrerausbildung aus, und zwar in fachlicher wie in didaktischer Hinsicht, was sie mit dem Anspruch der Neuen Mathematik in inhaltlicher wie methodischer Hinsicht begründen. An mehreren Stellen gründen sie didaktisch-methodische Entscheidungen sogar ausdrücklich auf die durch die mangelhafte Ausbildung der Lehrkräfte gegebenen Beschränkungen, so z. B. das Festhalten an einem systematischen Weg und die Einschränkung der Gruppenarbeit. Ebenso fordern sie den Einsatz von Fachlehrerinnen und -lehrern.[793] Darüber hinaus bemängeln sie die generelle Einstellung eines großen Teils des Berufsstandes der Grundschullehrkräfte, denen sie mangelnde Fortbildungsbereitschaft und Bequemlichkeit vorwerfen.[794] Die Aussage am Anfang der ersten Ausgabe des Lehrerbandes, dieser sei so aufgebaut, „dass mathematische Vorkenntnisse nicht

792. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 92.
793. vgl. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 7; vgl. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 23; vgl. Neunzig, Vorschläge, S. 95 und 97.
794. Neunzig & Sorger, Einstieg, S. 22 f.

erforderlich sind“[795], ist unter diesen Voraussetzungen ein ausgesprochener Widerspruch. Die fachlichen Einführungen in die Mengenbegriffe werden ohne jegliche fachliche Vorbildung vielen nicht verständlich gewesen sein, was sich schließlich auch in der Art der Überarbeitung niederschlägt. Dass dem Lehrer an anderer Stelle Freiheit in der methodischen Gestaltung zugestanden wird[796], erhöht zum einen den Anspruch, mag auf der anderen Seite aber auch als Kompromiss verstanden werden, um den nicht mathematisch ausgebildeten Lehrkräften entgegenzukommen.

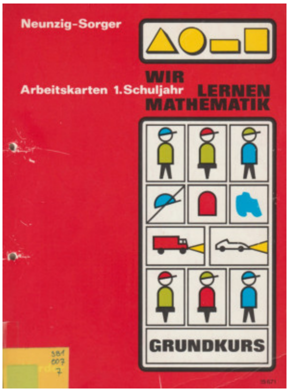
Festzuhalten ist, dass die unzureichende fachliche Ausbildung der Grundschullehrerinnen und -lehrer in Verbindung mit den großen Klassenstärken – die Klasse aus den Unterrichtsbeispielen umfasst ebenfalls 36 Kinder – sowie einer methodischen Tradition, in der lehrerzentrierter Frontalunterricht und Einzelarbeit dominieren, einen Komplex an ungünstigen äußeren Bedingungen bilden, die weitgehend unabhängig von den konkreten Inhalten des Lehrgangs eine Umsetzung der Neuen Mathematik im Sinne der Verfasser von *Wir lernen Mathematik* in der Praxis möglicherweise entscheidend erschwert haben.

Es ist ausdrücklich nicht Ziel dieser Arbeit, die betrachteten Schulbücher zu kritisieren. Da, wo die obigen Beschreibungen auf Inkonsistenzen und Unklarheiten stoßen, wird darauf hingewiesen. Es wird vor diesem Hintergrund aber darauf verzichtet, auf zeitgenössische Bewertungen, die an verschiedenen Stellen zu *Wir lernen Mathematik* geäußert wurden, näher einzugehen, zumal die Überlegungen, so schlüssig sie auch sein mögen, häufig offenbar auf rein theoretischen Analysen beruhen. Inwiefern sie Hinweise auf in der Unterrichtspraxis tatsächlich auftretende, vor allem aber auf historisch relevante Probleme liefern, bleibt unklar.[797]

795. Neunzig & Sorger, Lehrer 1968, S. 8.
796. Neunzig, Vorschläge, S. 97.
797. vgl. dazu Griesel, Heinz & Hollmann, Erwin: Eine mathematik-didaktische Analyse dreier Erstrechenkurse, in: ZDM 1 (1969), 2, S. 32-39; Der Spiegel, S. 79; Griesel, Heinz: Die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Eine Analyse der gegenwärtigen Lehrbuchsituation; grundsätzliche Überlegungen und Tendenzen, in: ZDM 4 (1972), 3, S. 89-95, wobei hier lediglich ein zusammenfassender Überblick über die derzeitige Lehrbuchsituation gegeben wird, in der i. A. die einzelnen Werke nicht für sich benannt werden; ebenso einen zusammenfassenden, kriteriengeleiteten Überblick über mehrere Unterrichtswerke liefert Brosch, Werner: Vergleichende Untersuchung von Mathematikbüchern für das 1. Schuljahr, in: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 2 (1974), S. 500-513; interessant ist hier, dass eine entsprechende Übersicht belegt, dass die Zahl der eingeführten Symbole bei Neunzig & Sorger tatsächlich im Vergleich zu anderen Büchern eher gering ist; vgl. weiterhin Karaschewski, Irrwege, S. 39-56; ein erheblicher Teil der Kritikpunkte von Karaschewski lässt sich mit entgegenstehenden Zitaten aus der Lehreranleitung direkt widerlegen, Karaschewskis Ausführungen liegt offenbar eine spezielle Auffassung von Mathematik zugrunde, die darunter recht eng die axiomatisch-deduktive Wissenschaft versteht, vgl. dazu auch Griesel, der in Tradition, S. 54, zur Kritik Karaschewskis schreibt: „Sie traf nicht den Kern der Reform.“, denn die Argumentation sei „zu schwach“, da „durch mathematische und didaktische Unkenntnis [...] belastet und zu sehr in die Enge des eigenen dogmatisch vertretenen Standpunktes verstrickt.“; die Kritik von Keitel & Damerow, a.

Erwähnt sei hier nur, dass Griesel und Hollmann für die 1. Auflage des Lehrwerks aufgrund fehlender beweglicher Beziehungen und Zusammenhänge und eines damit einhergehenden Mangels an operativen Übungsmöglichkeiten konstatieren, dass der Lehrgang „insgesamt recht geringe Anforderungen an das Kind stellt“.[798] Dieses Urteil ist insofern interessant, als es geradezu konträr zu vielen anderen Reaktionen auf die Neue Mathematik im Allgemeinen erscheint.

Wir lernen Mathematik, Arbeitskarten, 1974



Die ersten Arbeitskarten im *Programm Moderne Mathematik* wurden offenbar nicht vor 1970 veröffentlicht. Es handelt sich dabei um Übersetzungen ein Jahr früher im Original erschienener Aufgabensätze von Dienes. Spezielle Arbeitskarten, die von Neunzig und Sorger als Teil des Lehrgangs *Wir lernen Mathematik* erstellt wurden, sind ebenfalls 1970 erschienen und damit vor der 2. Auflage der Fibel und des Lehrerbandes für die 1. Klasse. Die zwei ersten Kartensätze mit Übungsaufgaben bedienen den Materialbedarf für die beiden zentralen Themenblöcke „Mengen“ und „Zahlen“[799]. Gesonderte Erläuterungen zu den Übungen liegen nicht vor[800], im Mengen-Block finden sich auf den einzelnen Seiten jeweils methodische Hinweise zum gewünschten Umgang mit den Aufgaben, im Zahlen-Block gibt es stattdessen bereits schriftliche Aufgabenstellungen für die Schülerinnen und Schüler. Die Karten zur Mengenlehre enthalten die aus dem Schülerbuch bekannten Mengendiagramme – das Venn-Diagramm ist dominant und wird ergänzt durch Tor-, Straßenkreuzungs- und Gitterdarstellung – sowie Vorlagen für Unterschiedsspiele. Als Grundmenge werden ausschließlich die Logischen Blöcke eingesetzt. Da die Karten schwarz-weiß gedruckt sind, werden die Farbmerkmale durch die jeweiligen Anfangsbuchstaben abgekürzt, was den Eindruck erhöhter Symbollastigkeit erweckt. Die Abbildungen auf den Seiten sind z. T. recht eng gedrängt und zu klein, als dass enaktiv mit den Klötzen direkt darauf gearbeitet werden könnte.

a. O., wiederum richtet sich nicht gegen die Umsetzung von Neunzig & Sorger, sondern auf die Dienes-Konzeption als solche.

798. Griesel & Hollmann, a. a. O., S. 39; die Übungsaufgaben in den späteren Arbeitskarten enthalten auch Aufgaben zum operativen Üben.

799. vgl. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten 1: Mengen, Freiburg: Herder, ©1970 und Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten 2: Zahlen, Freiburg: Herder, ©1970.

800. Darauf kann zum einen geschlossen werden, weil in den Karten sonst mit Sicherheit darauf verwiesen werden würde, zum anderen aufgrund der Hinweise im Kartensatz für die Geometrie.

Allerdings wird auf Spielpläne als ergänzendes Hilfsmittel verwiesen, es kann also davon ausgegangen werden, dass diese groß genug waren, um die Aufgaben von den Karten in handlungsorientierte Gruppenarbeit zu übertragen. Waren diese nicht vorhanden oder wurde in Einzelarbeit an den Karten gearbeitet, mussten die Merkmalsklötze neben die Blätter gelegt werden; die Arbeit am konkreten Material ist in jedem Fall in den Arbeitsanweisungen vorgesehen. Die Karten zur Arithmetik nutzen zur Mengendarstellung ausschließlich das Venn-Diagramm, vorwiegend mit den Logischen Blöcken als Grundmenge, nur ganz vereinzelt ergänzt durch Plättchen bzw. Kringel. Die Rechenaufgaben ermöglichen operatives Üben, indem Leerstellen variiert, äquivalente Additions- und Subtraktionsaufgaben gemeinsam bearbeitet, Tausch- und Nachbaraufgaben berücksichtigt werden. Neben Gleichungen finden sich Verknüpfungstafeln als Darstellung, inhaltlich neben Addition und Subtraktion noch Zahlenfolgen, Aufgaben zum Ordnen von Zahlen, Ungleichungen und eine Seite mit Textaufgaben.

Arbeitskarten zur Geometrie erschienen erstmalig 1972[801] und damit nach der 2. Auflage von Fibel und Lehrerbuch. Es handelt sich dabei um die ersten Geometrie-Materialien, die überhaupt im Rahmen von *Wir lernen Mathematik* für das 1. Schuljahr erschienen sind, die Karten umfassen die Themengebiete Grundformen, (Auslegen von) Flächen, Muster bzw. geometrische Folgen, Achsen- und Punktsymmetrie sowie toplogische Grundbegriffe, die auf der letzten Seite mit den bekannten ikonischen Mengendarstellungen verknüpft werden. Knappe „Hinweise zum Gebrauch der Arbeitskarten“, die in diesem Fall Teil des Blocks sind, betonen, dass die Arbeit zu diesem Zeitpunkt nicht systematisch erfolgen soll, vielmehr ist das Ziel, auf Handlungsebene experimentell Erfahrungen zu gewinnen bzw. unterschiedliche Vorerfahrungen kompensatorisch auszugleichen. Notwendig zu den Karten gehöriges Material ist das *Planogon* Figurenspiel, eine Sammlung verschiedener geometrischer Formen (unterschiedliche Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Trapeze, Parallelogramme, Rauten, konkave Vierecke, Achtecke), die jeweils in verschiedenen Größen und Farben vorhanden sind und die hier u. a. genutzt werden sollen, um Figuren auf den Arbeitskarten direkt auszulegen[802].

Die Neuauflage der Arbeitskarten, die zum ersten Mal 1974 erschienen ist[803], un-

801. vgl. Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten: Geometrie, Freiburg: Herder, ©1972.

802. Neunzig, Walter: Planogon. Geometrisches Figurenspiel mit 12 variablen Grundmustern in 6 Farben, Freiburg: Herder, 1972.

803. vgl. im Folgenden Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung; Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Förderkurs, Freiburg: Herder, ©1974; Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Grundkurs, Freiburg: Herder, ©1974; Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Stützkurs, Freiburg: Herder, ©1974; Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Test, Freiburg: Herder, ©1974.

terscheidet sich stark von diesen ersten Kartensätzen. Zwar tragen sie nach wie vor den Titel *Wir lernen Mathematik* und sind ausdrücklich als Ergänzung zur immer noch grundlegenden Lehreranleitung von 1971 und der zugehörigen Fibel gleichen Datums gedacht, doch schon die äußere Erscheinung lässt zunächst gar nicht an das Lehrwerk denken. Die für die Fibel typischen und auf sehr prägnante Weise schematisiert dargestellten „Kinder“ sind durch neue, noch viel stärker schematisierte „Kinder“ abgelöst worden, das bisherige Farbschema aus gelb, rot und blau wurde durch grün ergänzt, Autos als Grundmengen sind neu dazugekommen, selbst die Schriftart ist eine andere, und es findet sich nirgends mehr das Label *Programm Moderne Mathematik.* Zu vermuten ist, dass der Verlag die Reihe eingestellt hat, nachdem die anfängliche Reformeuphorie ebenso wie die durch den massiven Bedarf hervorgerufene Schwemme an Material abgeebbt war.

Die dargestellten konkreten **Materialien** zur Mengenbildung durchziehen konsequent sämtliche Arbeitsblätter. Neben den beibehaltenen Logischen Blöcken sind dies zwei Kartensätze, einmal die $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ „Kinderkärtchen“ mit den Merkmalen Mädchen/Junge, Mütze in rot/blau/grün und Pullover in rot/blau/grün und zum zweiten $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ „Autokärtchen“ mit den Merkmalen Licht an/Licht aus, PKW/LKW/Rennauto und rot/blau/gelb/grün. Darüber hinaus wird nun häufiger auf Plättchen zurückgegriffen, die in mehreren Farben und zwei Größen vorhanden sind, von denen die einzelnen Merkmalskombinationen aber mehrfach vorliegen. Es ergibt sich damit eine größere Variation in der Veranschaulichung, die Zahl der unterschiedlichen Materialien bleibt dennoch überschaubar, auch aufgrund des hohen Wiedererkennungswerts.

Der Umfang der Arbeitsblätter ist um ein Vielfaches größer als zuvor[804]. Vollkommen neu ist die Einteilung in einen „Grundkurs“, einen „Förderkurs“ für schnellere bzw. stärkere sowie einen „Stützkurs“ für schwächere Schülerinnen und Schüler. Ergänzt werden diese Arbeitskarten durch ein weiteres Heft mit Testkarten, eine separate und vergleichsweise ausführliche Anleitung, die Kärtchen-Sets und einen Satz geometrischer Formenplättchen zum Ausschneiden, außerdem neue Spielpläne, zu denen ebenfalls eine separate Anleitung vorliegt.[805] Die inhaltliche Trennung der Arbeitskarten fällt dafür weg. Es scheint, dass die vorrangig fachlichen Kriterien für den Aufbau des Lehrgangs durch umfassende didaktisch-pädagogische Überlegungen zumindest ergänzt, z. T. ganz abgelöst worden sind. Es ist durchaus denkbar, dass erst das Ende des zeitlichen Drucks aus der Anfangszeit der Reform, den der kurze Vorlauf mit sich gebracht hat, Neunzig und Sorger die nötige Ruhe beschert hat, ein auch überfachlich sorgsam durchdachtes und damit

804. zum Vergleich: Die drei Blöcke der älteren Auflage umfassen zusammen $3 \cdot 32$ Karten, in der späteren Auflage bieten allein der Grundkurs schon 160 Arbeitskarten bzw. -blätter.
805. vgl. Sorger, Spielpläne.

pädagogischen Ansprüchen genügendes Konzept zu entwickeln.

Da die Arbeitskarten keinen eigenen, vollständigen Lehrgang darstellen, sondern lediglich das in der Lehreranleitung festgehaltene Grundkonzept ergänzen, sind die **Inhalte** weitgehend unverändert, und mit den Inhalten sind auch die Ziele im Wesentlichen die gleichen. Dazu, dass diese nicht in jedem Fall inhaltlicher Art sind, gibt es einen ausdrücklichen Hinweis, indem gesagt wird, dass beispielsweise die Unterschieds- und Gitterspiele weiterführenden Zwecken wie dem Schlussfolgern (damit also dem mathematischen Denken) und der verständigen Nutzung spezieller Darstellungsformen (Tabellen) dienen.[806] Ein weiteres, überfachliches Ziel, das in vorherigen Ausführungen noch keine Erwähnung gefunden hat und nun genannt wird, liegt in der Förderung eines angemessenen Arbeitsverhaltens, das insbesondere im Rahmen der Spiele in den Gruppen und in Partnerarbeit gelernt werden soll.[807]

Lediglich die ***geometrischen Inhalte*** sind jetzt neu in das 1. Schuljahr integriert, wobei hier gleich relativiert werden muss: Einige Inhalte im Grundkurs sind ausdrücklich dafür gekennzeichnet, im Falle von Zeitdruck „weggelassen bzw. reduziert“ werden zu können. Neben der „Bildung von drei Mengen“, die schon früher eher als Differenzierung denn als Inhalt für alle vorgesehen war, und der Zahldarstellung in Stellenwertsystemen zu verschiedenen Basen, die bereits auf das 2. Schuljahr vorgreift, sind dies die allgemeinen Relationen und die geometrischen Inhalte, und zwar sowohl die Behandlung der Grundformen als auch die topologischen Fragestellungen.[808] Es handelt sich bei der Geometrie also nicht um einen obligatorischen noch um einen gleichwertigen Inhaltsbereich, der Fokus des Lehrgangs liegt unverändert klar auf den thematischen Gebieten ***Mengenlehre*** und ***Arithmetik***. Die geometrischen Inhalte sind letztlich verzichtbar, die Topologie ist sogar explizit „als Zusatzstoff gedacht“; dass das zugehörige Material dann auch noch als strukturiertes Material (weiter)verwendet werden kann[809], die topologischen Inhalte also in den Dienst der Mengenlehre gestellt werden, verstärkt den Eindruck, dass der Topologie – zumindest an dieser Stelle – kein wirklich eigener Wert im Hinblick auf die Reformziele zugestanden wird. Ebenso erhalten die Relationen in Form von Pfeildiagrammen im Rahmen des Kurses nicht die Bedeutung, die gerade diesem Begriff in der Gesamtkonzeption der Neuen Mathematik in der Grundschule i. A. zugesprochen wird.

806. vgl. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 14.
807. vgl. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 7.
808. vgl. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 5 f.
809. vgl. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 44 und Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Grundkurs, Freiburg: Herder, ©1974, S. 108.

Mit den Inhalten sind auch wesentliche Elemente des Gesamtaufbaus gleich geblieben, die Abstraktionsstufen zur Zahlbegriffseinführung – die hier ab Woche 7 vorgesehen ist – ebenso wie der didaktische Schwerpunkt auf dem „tätige[n] Umgang mit Material". Neu sind dagegen die herausragende Rolle und die Vielfalt der Maßnahmen zur **Differenzierung**, die in den vorherigen Veröffentlichungen praktisch nicht vorgekommen ist.[810] Jetzt wird nicht nur wiederholt explizit auf die Umsetzung von Differenzierung hingewiesen, sondern die entsprechenden Möglichkeiten werden auf den verschiedenen Ebenen bereitgestellt, qualitativ wie quantitativ[811], im äußeren Aufbau durch die Aufteilung in Grund-, Stütz- und Förderkurs, im nochmals jeweils unterschiedliche Schwierigkeitsgrade einzelner Aufgaben innerhalb der Blöcke, in den unterschiedlichen Bearbeitungsmöglichkeiten der einzelnen Aufgaben, in verschiedenen Lösungswegen und mehreren möglichen Lösungen bis hin zu den Möglichkeiten, die die Sozialform der Gruppenarbeit im Hinblick auf die Anpassung an individuelle Dispositionen der Kinder bietet.

Die zusätzlichen Spielpläne dürften dabei eine wesentliche Hilfe für die Umsetzung von Gruppenarbeit gewesen sein und damit gleichzeitig die konstruktive Begriffsbildung im materialgebundenen Spiel im Sinne des Dienesschen Aufbauprinzips gefördert haben. Mit dem wiederholten Verweis auf das Buch *Denkspiele mit Pfiff*, das P. Sorger gemeinsam mit H. Freund herausgegeben hat[812] und das Spiele mit den in den Arbeitskarten verwendeten Materialien für die Vorschule bereithält, wird neben der Sozialform der Gruppenarbeit ebenfalls die Methode des Lernspiels gestärkt. Darüber hinaus ist generell eine stärkere Variation der Sozialform als bisher vorgesehen; diese wird gefördert, indem für jede Arbeitskarte die zur Bearbeitung passenden Sozialformen in der Lehreranleitung gut sichtbar angegeben werden. Die einzelnen Arbeitskarten bieten fast alle die Gelegenheit auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen bearbeitet zu werden, enaktiv durch Auslegen mit den konkreten Materialien oder den abstrakteren Merkmalskärtchen ebenso wie ikonisch durch Ausmalen, z. B. in der gesuchten Farbe. Die meisten Aufgaben lassen sich dementsprechend auch sprachfrei bearbeiten und lösen, bieten aber zeitgleich zwanglos Sprachanlässe, ein Mittel für einen „gewisse[n] Ausgleich" der vorhandenen Vorerfahrungen.[813] Die Verfasser weisen in dieser Anleitung noch wesentlich vehementer darauf hin, dass keine festen Sprachschablonen nötig bzw. diese sogar schädlich sind, und geben jetzt auch Beispiele für informelle, kindgerechte Formulierungen, die korrekt und präzise genug sind, um ein in ausreichendem Maße erworbenes Begriffsverständnis bei den Kindern zu belegen. Auch weisen sie mit

810. entsprechende Kritik auch bei Griesel & Hollmann, a. a. O., S. 39.
811. vgl. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 10: „für schnelle Gruppen".
812. vgl. Freund, Helmut & Sorger, Peter: Denkspiele mit Pfiff. Junge Mathematik für die Eingangsstufe, Freiburg [u. a.]: Herder, 1973.
813. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 8.

der Feststellung, dass diese Anmerkung „nötig“ sei, sowohl auf die bisherige praktische Umsetzung hin als auch über den Unterricht hinaus, wenn sie davor warnen, dass „künstlich überhöhte Formulierungen leicht zu einer Diskreditierung des Bereichs „Mengen und ihre Eigenschaften“ beitragen können“[814]. Bei der Nutzung der symbolisierten Darstellung der Eigenschaften des strukturierten Materials auf den Merkmalskärtchen sind hingegen nach den Erfahrungen der Autoren keine Probleme zu erwarten.[815]

Die Testkarten bieten Gelegenheit zur Diagnose und sind ebenfalls im Schwierigkeitsgrad gestuft, um eine differenzierte Leistungsbeurteilung zu ermöglichen. Die Anleitung enthält in den Hilfen zur Diagnose Hinweise auf mögliche Fehlerursachen und darauf, wobei es sich um mehr und wobei um weniger schwerwiegende Fehler auf Seiten der Kinder handelt.

Zusammenfassung und Vergleich

Im Hinblick auf den angestrebten Vergleich mit den in Kapitel 1 herausgearbeiteten Kernideen, die der Reform ursprünglich zugrunde lagen, werden die Ziele, das inhaltliche Konzept und die didaktisch-methodischen Prinzipien, auf denen das Unterrichtswerk *Wir lernen Mathematik* aufbaut, im Folgenden zusammengefasst.

Die formulierten **Ziele** sind vorwiegend ***fachlicher Art***:

- arithmetisches Verständnis, einsichtiges Rechnen
- Fundierung der Mathematik
- mathematisches Denken (strukturelles, flexibles Denken, Abstraktions- und Transferfähigkeit)

Darüber hinaus wird – in den später erschienenen Materialien – als überfachliches, ***soziales Ziel*** genannt:

- Aufbau eines angemessenen Arbeitsverhaltens

Besonders im Hinblick auf die fachlichen Ziele wird ein **inhaltliches Konzept** entworfen, das die Behandlung der folgenden ***fachlichen Gebiete*** umfasst:

- Mengenlehre (als Vorkurs, zunächst abgeschlossen, mit der Zeit weniger)
- Logik (im Zusammenhang mit der Mengenlehre)

814. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 9; vgl. auch ebenda, S. 19.
815. Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung, S. 8.

- Arithmetik
- Messen (in Verbindung mit der Arithmetik)
- Abbildungen (eingeschränkt, implizit in logischen Spielen)
- Relationen (eingeschränkt, vorwiegend implizit)
- diverse Inhalte aus der Geometrie (erst ab 1972)

Welcher Art die ***Beziehung zwischen Mathematik, Rechnen und Mengenlehre*** in dem Konzept gedacht ist, ist nicht ganz klar, da die Aussagen hierzu z. T. divergieren. Die Forderung nach einer Verbindung von Rechnen und Mathematik lässt darauf schließen, dass beide als zunächst voneinander getrennt gesehen werden. Die geforderte Verbindung wird dann als gegenseitige Fundierung präzisiert, indem einmal der Mathematik die Funktion zugeteilt wird, Zahlbegriff und -operationen einsichtig zu machen, an anderer Stelle wiederum eine verständige Arithmetik als Grundlage der Mathematik bezeichnet wird. Schließlich geht auch aus der inhaltlichen Gesamtübersicht zur 1. Auflage hervor, dass das Rechnen im Mittelpunkt des Unterrichts steht, die mathematischen Gebiete werden zwar damit verknüpft, stehen aber dennoch daneben, die Mengenlehre als prominentestes mathematisches Teilgebiet hingegen davor. Die zentrale Rolle der Arithmetik, der die Auswahl und Behandlung der weiteren mathematischen Inhalte unterliegen, bewirkt gewisse Inkohärenzen im ***curricularen Gesamtkonzept***, das am ehesten als ein um mathematische Begriffe ergänzter und durch Mengenlehre fundierter Rechenunterricht beschrieben werden kann. Es sei daran erinnert, dass vor dem Hintergrund der zu Beginn noch geltenden Lehrpläne auch kaum etwas anderes möglich war. Abgesehen von der Ergänzung um geometrische Inhalte und die Auflösung der strengen Abgeschlossenheit des Mengenvorkurses änderte sich jedoch auch im Laufe der Zeit die inhaltliche Ausrichtung nicht wesentlich.

Die **didaktischen Prinzipien**, auf die sich W. Neunzig und P. Sorger am explizitesten beziehen, sind die jeweils von Dienes übernommene

- Variation der Veranschaulichung und
- das Aufbau- bzw. Konstruktionsprinzip (impliziert genetisch-konstruktivistisches Verständnis von Begriffsbildung).

Beide werden jedoch nur unvollständig umgesetzt, die Variation der Veranschaulichung wrd eingeschränkt durch geringe Variation in der Fibel, das Aufbauprinzip durch die gleichzeitig vorgegebene

- feste Stufung von Abstraktionsschritten.

Darüber hinaus sind maßgeblich für den Unterricht:

- fachliche Korrektheit
- kindgerechte Sprache
- die Berücksichtigung verschiedener Repräsentationsebenen
- Differenzierung (zunehmende Berücksichtigung mit späteren Auflagen)

Bezüglich der **methodischen Umsetzung** sind vorgesehen:

- eigentätiges Handeln der Schülerinnen und Schüler
- Gruppenarbeit und Frontalunterricht in Kombination
- Materialeinsatz (als strukturiertes Material: Logische Blöcke)
- Einsatz der Fibel zur Wiederholung, Festigung und Übung
- Einsatz weiterer Materialien wie Arbeitskarten, Spielpläne...

Vergleicht man die hier zusammengestellten Aspekte mit denen aus Kapitel I. 4, so fallen vor allem folgende Punkte auf:

- Das „mathematische Denken“ ist in weitgehender Übereinstimmung mit Dienes und Piaget (bzw. wie aus Piaget abgeleitet) ein wesentliches Ziel des Unterrichts.
- Der ökonomische Aspekt steht nicht im Vordergrund und findet eher am Rande Berücksichtigung, und zwar im Hinblick auf in der zukünftigen Arbeitswelt notwendige Kompetenzen, weniger auf eine generelle Aufrechterhaltung des Wirtschaftswachstums.
- Die sozialen und persönlichkeitsbildenden Ziele sind weniger allgemein gefasst und zunächst auf das Verhalten innerhalb des Sozialraums Schulklasse bezogen.
- Die geforderten neuen Inhalte finden Berücksichtigung (bis auf die Algebra, der aber von vorneherein im 1. Schuljahr noch keine große Rolle zugedacht ist), allerdings kommt der Mengenlehre dabei ein so viel größeres Gewicht zu als allen anderen, dass man ebenso gut von einer einseitigen Selektion der Mengenlehre sprechen kann.
- Der Rechenunterricht soll *nicht* durch einen Mathematikunterricht ersetzt, sondern lediglich durch mathematische Begriffe zu einem mathematisierten Rechenunterricht ergänzt werden.

- Damit geht einher, dass das Curriculum *nicht* an mehreren, gleichberechtigten strukturellen Leitbegriffen orientiert ist, höchstens an einem, und zwar dem der Menge.

- Arithmetik ist kein Teilgebiet neben anderen, sondern zentraler Inhalt des Unterrichts.

- Damit geht weiterhin einher, dass die Mathematik nicht von vorneherein als Einheit im Sinne eines Nebeneinanders fundamentaler Begriffe vermittelt wird. Es handelt sich vielmehr um einen Kurs, in dem verschiedene Inhalte linear aufeinander aufbauen.

- Die von Dienes formulierten didaktischen Prinzipien werden nur in Auswahl übernommen und angepasst; es kann daher nicht von einer Umsetzung des Dienesschen Gesamtkonzepts gesprochen werden.

- Die verschiedenen Darstellungsebenen im Sinne des EIS-Prinzips nach Bruner werden berücksichtigt.

- Das operative Üben spielt keine ausgewiesene Rolle, wird aber z. T. implizit berücksichtigt.

- Die wichtigsten methodischen Grundsätze werden übernommen: selbsttätiges Handeln an (strukturierten) Materialien in Gruppenarbeit.

- Weitere pädagogische Grundsätze, wie sie auch Teil der allgemeinen Grundschulreform sind (Differenzierung und kompensatorische Erziehung als Mittel für Durchlässigkeit und Chancengleichheit) werden erst nach und nach einbezogen.

→ Während die methodische Umsetzung im Großen und Ganzen den ursprünglichen Vorschlägen entspricht und die didaktischen Prinzipien wenigstens zum Teil übernommen werden, besteht ein **entscheidender Unterschied im inhaltlichen Konzept** von *Wir lernen Mathematik* zum curricularen Gesamtkonzept der internationalen Reformbewegung, der gekennzeichnet ist durch das Festhalten an einem mathematischen Elementarunterricht, der im Kern Rechenunterricht bleibt, der zwar durch mathematisch-logische Begriffe ergänzt wird, aber hier wiederum einseitig die Mengenlehre aus den vorgeschlagenen fachlichen Teilgebieten selektiert.

III.3 *Mathematik in der Grundschule* von A. Fricke und H. Besuden

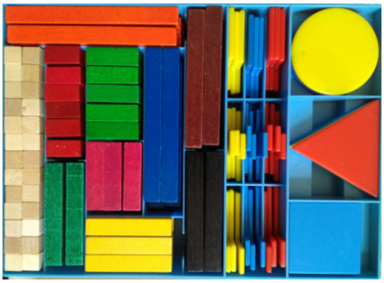
Das Lehrwerk „Mathematik in der Grundschule“ von Arnold Fricke und Heinrich Besuden ist nicht in Folge der Einführung der „Mengenlehre“ entstanden. Ähnlich wie bei *alef* liegen die Ursprünge früher, im Unterscheid dazu jedoch nicht in einem groß angelegten und von außerhalb finanzierten Forschungsprojekt[816], sondern in einem Schulbuch für den Rechenunterricht der Volksschule. Diese erste Ausgabe von 1967 trägt bereits das Wort „Mathematik“ im Titel und belegt mithin, dass Reformideen für eine Mathematisierung des Grundschulunterrichts innerhalb der deutschen Didaktik schon vor 1968 unabhängig von politischen Richtlinien existierten und – auch wenn dies noch ungewöhnlich war – bereits konkret wurden. *Mathematik in der Grundschule* belegt zudem, dass es in Deutschland – ebenso wie auf internationaler Ebene – verschiedene konzeptionelle Zugänge gab und ein Schwerpunkt auf der Mengenlehre hier nicht zwangsläufig als alternativloser Zugang zur Grundschulmathematik angelegt war. Arnold Fricke – zunächst Fachmathematiker und Ingenieur, dann als Didaktiker in Braunschweig tätig – und Heinrich Besuden – Hochschullehrer und vormals Student an der PH in Oldenburg, mit praktischer Unterrichtserfahrung als Grundschul- und Gymnasiallehrer – verfolgen einen anderen Weg und nehmen dabei für sich in Anspruch, das „erste Unterrichtswerk in der Bundesrepublik, das die Stagnation des traditionellen Rechenunterrichts durchbrach“[817] veröffentlicht und den Rechenunterricht „in einen mathematischen Unterricht, seinen Geist und seine Fragestellungen integriert“[818] zu haben.

Sie folgen dabei vollständig der operativen Methode, die sie explizit aus den psychologischen Theorien Piagets ableiten, und die in ihrer speziellen Ausformung nach eigenen Angaben in einem Wechsel aus theoretischer Reflexion und praktischer Erprobung entstanden ist.[819] Es existieren vier unterschiedliche Ausgaben

816. In Lockard, J. David [Ed.]: Seventh Report of the International Clearinghouse on Science and Mathematics Curricular Developments 1970, Washington, D. C. [u. a.], 1970, S. 80-83 [im Folgenden: Lockard, Seventh], ist *Mathematik in der Grundschule* als einziges deutsches mathematisches Curriculumprojekt neben dem *Frankfurter Projekt* aufgeführt, es geht hier klar hervor, dass es weder eine externe Finanzierung gab noch eine höhere organisatorische Instanz beteiligt war.
817. Fricke, Arnold: Mathematik in der Grundschule. Ausgabe B von Fricke – Besuden; Ernst Klett Verlag, Stuttgart, in: Arbeitskreis Grundschule e. V. [Hrsg.]: Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule, Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e. V., 1972, S. 64 [im Folgenden: Fricke, Arbeitskreis].
818. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Lehrerband, Stuttgart: Klett, 1972, S. IV [im Folgenden: Fricke & Besuden, B] (zur Zitation s. Anm. 828).
819. Fricke, Arnold: Vorwort, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 3.

von *Mathematik in der Grundschule* für das 1. Schuljahr, die alle für den hier betrachteten Zeitraum relevant sind:

- Mathematik in der Grundschule. Operatives Rechnen mit farbigen Stäben, 1967. (im Folgenden referiert als Ausgabe A, eine Bezeichnung, die Fricke und Besuden später selber nutzen[820])
- Mathematik in der Grundschule. Ausgabe B, 1972.
- Mathematik in der Grundschule. Ausgabe C, 1977. (in zwei Regionalausgaben erschienen)
- Mathematik in der Grundschule. Neu, 1984. (im Folgenden referiert als Ausgabe D)



Materialkasten *Formen und Stäbe*

Zu allen Ausgaben sind neben dem Grundbuch Lehrerhefte bzw. -bände sowie verschiedene Übungshefte erschienen. Obligatorisches Material für alle Ausgaben sind die Cuisenaire-Stäbe (auch: Farbige Stäbe), die wie die Bücher im Klett-Verlag erschienen sind. Ab Ausgabe B waren unter der Bezeichnung *Formen und Stäbe* Materialkästen erhältlich, die neben den Stäben Formen- und Winkelplättchen enthalten.[821] Die Cuisenaire-Stäbe verdanken ihren Namen dem belgischen Grundschullehrer Georges Cuisenaire, der um 1930 einen Satz verschiedenfarbiger Stäbe entwickelte, die die Zahlen 1-10 repräsentieren. Die Einer sind Würfel der Kantenlänge 1 cm, alle weiteren Stäbe ergeben sich aus der Aneinanderreihung der entsprechenden Anzahl Einer, wobei die Stäbe über keine Einteilung verfügen, so dass die Einheiten nicht abgezählt werden können. Die Farben der Stäbe sind nicht beliebig gewählt, sondern sollen z. T. das Erkennen von Zahlbeziehungen, besonders des Verdoppelns und Halbierens unterstützen (z. B. Dreier hellgrün, Sechser dunkelgrün).[822] Bekannt wurden die Stäbe dadurch,

820. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Lehrerband, Stuttgart: Klett, 1977, S. III [im Folgenden: Fricke & Besuden, C].

821. Mathematik in der Grundschule. Formen und Stäbe, Stuttgart: Klett, o. J.

822. Fricke & Besuden, B, S. VIII. Es finden sich in der Geschichte der Unterrichtsmaterialien ähnliche Stäbe früheren Datums, vgl. die bei Brücher, Karl: Anschauung in der Arithmetik, Bamberg: Buchner, 1911 verwendeten und ebenda auf S. 2 dargestellten farbigen Stäbe des „Rechenbaukasten Arithmos" (www.rechnerlexikon.de/it/artikel/Arithmos_Rechenbaukasten_Material), auch hier werden Zahlbeziehungen durch die Farbgebung deutlich, da die Stäbe für gerade Zahlen immer die gleiche Farbe haben wie ihre Hälfte; ebenfalls waren in den 50er/60er-Jahren in Teilen Deutschlands Rechenbaukästen in Gebrauch, die – allerdings nicht unterschiedlich gefärbte

dass Caleb Gattegno sie in der Folge eines Besuchs bei Cuisenaire im Jahr 1953 auch außerhalb Belgiens in seinen Büchern propagierte[823]; nach Besuden hatten die Stäbe 1970 „in der Bundesrepublik schon weite Verbreitung in den Schulen und Zustimmung bei den Lehrern gefunden“[824]. Bei den Formenplättchen handelt es sich um Plastikplättchen, die aufgrund unterschiedlicher Merkmale eindeutig beschreibbar sind. Die Merkmale sind Farbe (rot, gelb, blau), Form (dreieckig, kreisrund, quadratisch) und Größe (klein, groß), es ergibt sich somit eine Anzahl von $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Plättchen. Die Winkelplättchen sind ebenfalls aus Plastik und rot, gelb oder blau, sie haben die Formen der drei nicht-trivialen, nicht-konvexen Tetrominos. Die nach Form und Farbe unterschiedlichen Plättchen sind jeweils in dreifacher Ausführung vorhanden.

Über die Verbreitung des gesamten Lehrwerks sind keine genauen Zahlen bekannt[825]. Ausgabe A war um 1970 in allen westdeutschen Bundesländern außer Hamburg zugelassen[826], und nach Angabe der Autoren waren bis zum Jahr 1970 bereits über 200.000 Exemplare verkauft, die von ca. 7000 Lehrkräften an 3000 Schulen, vorrangig in Braunschweig, Oldenburg und Wilhelmshaven, eingesetzt wurden.[827] Die Umfrage von Soika aus dem Schuljahr 1970/71 ergab, dass seinerzeit 30 % der befragten Lehrkräfte in Nordrhein-Westfalen mit dem Buch arbeiteten.[828] Dass Ausgabe A zudem bis 1972 in diverse Sprachen übersetzt und entsprechend im europäischen (Frankreich, Niederlande, Schweiz) wie nicht-europäischen (Kanada, Südamerika) Ausland „verbreitet“ war[829], spricht generell

– Stäbe und Zahl- sowie Rechenzeichenkarten enthielten, mit denen Rechenaufgaben gelegt werden konnten.

823. vgl. www.cuisenaire.co.uk/index.php und www.cuisenaire.co.uk/index.php/gattegno. Gattegno war Mathematikdidaktiker, wurde in Ägypten geboren, lebte und arbeitete aber – ähnlich wie Dienes – in verschiedensten Ländern auf unterschiedlichen Kontinenten.

824. Besuden, Heinrich: Farbige Stäbe als Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule? in: Unterricht heute 21 (1970), 4, S. 161 [im Folgenden: Besuden, Farbige Stäbe].

825. Eine entsprechende Anfrage beim Verlag ergab keine genauen Daten, und entsprechende Informationen sind offenbar auch nicht verlässlich. So wurde mir mitgeteilt, es hätte bundesweit nur eine Ausgabe von *Mathematik in der Grundschule* gegeben, was angesichts der Existenz zweier Regionalausgaben zumindest für Ausgabe C widerlegt ist.

826. vgl. Klett Verlag [Hrsg.]: Die Reform des mathematischen Unterrichts in der Grundschule, Stuttgart: Klett, o. J., es handelt sich hierbei um einen Verlagsprospekt, der *Mathematik in der Grundschule* sowie zugehörige Materialien und weiterführende Literatur bewirbt.

827. Lockard, Seventh, S. 82; zumindest lässt die explizit aus Verkaufszahlen heraus geschätzte Zahl von 200.000 Schülerinnen und Schülern, die nach dem Kurs lernen, auf diese Zahlen schließen.

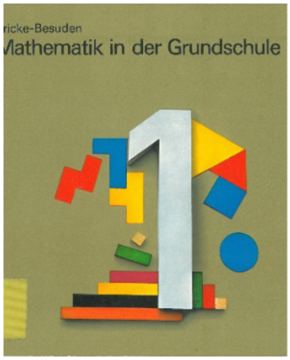
828. Soika, a. a. O., S. 68; die Umfrage ergab weiterhin, dass von allen untersuchten Unterrichtswerken *Mathematik in der Grundschule* das am wenigstens für die Erreichung der neuen Lernziele geeignete sei; da es sich hierbei aber um die erste, noch nicht an die neuen Lehrpläne angepasste Ausgabe handelt, ist dieses Ergebnis in Hinblick auf eine Wertung der Konzeption wertlos, vgl. ebenda, S. 84.

829. Fricke & Besuden, B, S. XI, diese Länder entsprechen der bei Lockard, Seventh, S. 82, bereits angekündigten Übersetzung ins Französische, Spanische und Holländische, vgl. auch Klett Verlag, a. a. O., S. 16.

für einen großen Verbreitungs- und Bekanntheitsgrad, der auch für die weiteren Ausgaben angenommen werden kann. So ergab die Umfrage von Radatz et. al. von 1981 für Niedersachsen mit 19 % eine nach wie vor relativ breite Nutzung.[830]

Da erst Ausgabe B in den Zeitraum der offiziellen Reform fällt, wird diese hier ausführlich und unter Einbezug weiterer Literatur der Autoren beschrieben. Nach eigenen Angaben haben Fricke und Besuden Ausgabe A u. a. in „Versuchsklassen" eingesetzt, evaluiert, diverse Aufgaben daraus beibehalten und die „bewährt[e]" didaktisch-methodische Konzeption übernommen.[831] Ein genauerer Vergleich mit Ausgabe A erfolgt im Anschluss.

Mathematik in der Grundschule 1, Ausgabe B, 1972



Ausgabe B des Lehrwerks von A. Fricke und H. Besuden besteht aus dem Schüler-*Grundbuch*, dem zweiteiligen *Arbeitsheft G* (Grundkurs, auch als Arbeitsheft 1 erschienen), dem *Arbeitsheft E* (Erweiterungskurs, auch als Arbeitsheft 2 erschienen) und dem Lehrerband (enthält das Grundbuch).[832] Es existiert zudem ein *Lehrerheft*, das im gleichen Jahr wie der *Lehrerband* erschienen ist, es handelt sich jedoch offenbar um eine frühere Veröffentlichung, da es noch Unterschiede zu den Lehrerseiten im Gesamtband gibt. Auch für Grundbuch und Arbeitshefte hat es Vorab-Teildrucke gegeben, die sich teils marginal von den endgültigen Materialien unterscheiden.[833] Ein *Elternbuch*,

830. Radatz et. al., a. a. O., S. 9.
831. Fricke, Arbeitskreis, S. 64; Lockard, Seventh, S. 82; Fricke & Besuden, B, S. IV.
832. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Grundbuch, Stuttgart: Klett, 1972; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Arbeitsheft G (Grundkurs) Teil 1 und 2, Stuttgart: Klett, 1972; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Arbeitsheft E (Erweiterungskurs), Stuttgart: Klett, 1972; Hinweise zur Zitation: Die hier aufgeführten Bände sowie der Lehrerband unterscheiden sich im Format der Seitenzahlen, weshalb sie hier aus Gründen der Übersichtlichkeit gemeinsam [im Folgenden als Fricke & Besuden, B] zitiert werden; die einfache Seitenzahl bezeichnet die Seite im Grundbuch, GXX die entsprechende Seite im Arbeitsheft G, EXX im Arbeitsheft E, LXX im Lehrerkommentar im Lehrerband; mit römischen Zahlen sind die einführenden Erläuterungen des Lehrerbandes gezählt.
833. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Lehrerheft, Stuttgart: Klett, 1972; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; [Teildruck Grundbuch], Stuttgart: Klett, 1972; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Arbeitsheft 1 und Arbeitsheft 2; Arbeitsheft 1 (Grundkurs) und Arbeitsheft 2 (Erweiterungskurs). [Teildruck], Stuttgart: Klett, 1972.

verfasst von A. Hermann, ist in mehreren Auflagen erschienen[834], offenbar stieß dies auf einen entsprechend hohen Informationsbedarf der Elternschaft. Der Band erläutert die Gründe und Ziele der Reform, legt Inhalt und (operative) Methode dar und gibt konkrete Hinweise zu einzelnen Seiten des Grundbuchs, die denen im Lehrerband ähneln. Neben einem Glossar der wichtigsten neuen Begrifflichkeiten – das relativ knapp und weniger formal gehalten ist – finden sich auch eigens für die Eltern zusammengestellte Aufgaben samt Lösungen. Weitere zugehörige bzw. als Ergänzung vorgeschlagene *Materialien* umfassen z. B. Spielpläne und Gesellschaftsspiele.[835]

Dem Kommentar zu den einzelnen Grundbuchseiten ist im Lehrerband ein ausführlicher Einführungsteil vorangestellt, in dem das Konzept, die Methode, die Inhaltsbereiche und die zugehörigen Materialien vorgestellt sowie praktische Hinweise zur „Arbeit mit dem Unterrichtswerk“ gegeben werden. Ebenfalls enthalten ist ein Verzeichnis mathematischer und fachdidaktischer Begriffe, dieses liefert „absichtlich nicht in erster Linie mathematische Definitionen letzter Exaktheit, sondern allgemein verständliche Beschreibungen.“[836] Auch wenn dies hier nicht weiter expliziert wird, ergibt sich der Eindruck einer bewussten Abgrenzung von anderen Konzeptionen und Lehrwerken. Die Kommentarseiten sind jeweils in mehrere Abschnitte unterteilt: A: fachliches Thema und Ziel, B: didaktische Hinweise zur Sache und C: methodische Hinweise zur Schulbuchseite.

Um ihr Konzept bzw. die Notwendigkeit einer Reform zu begründen, schildern Fricke und Besuden zunächst die Defizite des herkömmlichen Rechenunterrichts. Den Grund für die immer wieder festgestellten mangelhaften Leistungen im Rechnen, die auch und sogar besonders das Sachrechnen betreffen, sehen sie in einer verbreiteten „Starrheit des Denkens“[837]. Diese werde bedingt durch die traditionelle „Vorstellung vom linearen und sukzessiven Ablauf des Lernprozesses“[838], die darin resultiere, dass „Gesamtproblem[e] in die Teilprobleme 1, 2, … bis n aufgelöst und sie der Reihe nach je den drei Stufen: anschauliche Erarbeitung, Abstraktion, Übung und Anwendung unterworfen“[839] werden. Dieses standardisierte Vorgehen sei verbunden mit der Einengung auf bestimmte, festgelegte arithmetische Lösungsverfahren. Offenbar ist das rein mechanische Anwenden so erworbener Re-

834. hier vorliegend die 2. Auflage: Hermann, Alf: Fricke – Besuden, Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Elternbuch, Stuttgart: Klett, ²1973; eine 3. Auflage von 1974 ist in Bibliothekskatalogen nachweisbar.
835. vgl. Fricke & Besuden, B, S. IX f.
836. Fricke & Besuden, B, S. XX.
837. Besuden, Heinrich: Der Umgang mit Sachaufgaben im operativen Rechnen, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 141 [im Folgenden: Besuden, Sachaufgaben].
838. Fricke, Arnold: Operative Lernprinzipien im Mathematikunterricht der Grundschule, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 82 [im Folgenden: Fricke, Operative Lernprinzipien].
839. Fricke, Operatives Denken, S. 21.

chenregeln nicht geeignet, um die gewünschten Rechenfähigkeiten aufzubauen, sondern hierfür sind vielmehr Verständnis, Einsicht und „denkende[s] Rechnen“ vonnöten.[840] Ein entsprechender Unterricht setzt u. a. eine fachlich fundierte Klärung des Zahlbegriffs voraus, der vor dem Hintergrund einer sensualistischen Auffassung, die davon ausgeht, dass Begriffe allein aufgrund von Sinneswahrnehmungen gebildet werden, nicht erfolgt ist.[841] Die Ergebnisse von Piaget, der hier der alles überragende Bezugspunkt ist, stehen einer solchen Psychologie, die die Entwicklung des Zahlbegriffs an die geeignete Veranschaulichung knüpft, konträr entgegen: Begriffe werden – als Teil operationalisierter Gruppierungen – basierend auf Handlungen konstruiert; insbesondere die Zahl ist zudem kein für sich allein stehendes Objekt, sondern ein Beziehungsbegriff, der bestimmt ist durch die Relationen, in denen er zu anderen Objekten steht. Die Auffassung eines Begriffs als gebunden in einem netzartigen Beziehungsgeflecht steht in völligem Widerspruch zur Idee eines linearen wie kleinschrittigen Lernprozesses, Fricke und Besuden folgern – in Anlehnung an Aebli –, dass Begriffe und Verfahren nicht länger isoliert voneinander behandelt werden dürfen, sondern dass diese in Zusammenhänge eingebettet und aufeinander bezogen werden müssen.[842]

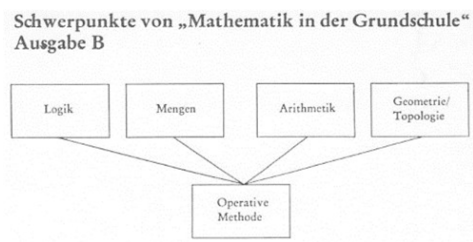
Der häufige Bezug auf Piaget ist nicht gleichbedeutend damit, dass die Autoren keine anderen grundlegenden Konzepte kennen. Der Name von Dienes wird mehrmals genannt, u. a. wenn Besuden dessen Variation der Veranschaulichung referiert.[843] In den meisten Fällen stehen Fricke und Besuden Dienes‘ Vorschlägen allerdings kritisch gegenüber, ebenso wie Konzepten des ganzheitlichen Unterrichts und der von Gattegno vorgeschlagenen Verwendungsweise für die Cuisenaire-Stäbe.[844]

Die aus Piagets Ergebnissen abgeleiteten Prinzipien entsprechen dagegen der **Zielsetzung**, die weniger im routinierten Rechnen besteht und weit über die reine

840. Fricke, Operatives Denken, S. 7 f., Zitat: S. 7.
841. vgl. Fricke, Arnold: Operative Zahlerfassung. Ein Beitrag zur Frage nach Ergebnis und Bedeutung der Untersuchungen Piagets, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 49 [im Folgenden: Fricke, Operative Zahlerfassung]; die entsprechende von ihm geforderte Begriffsklärung nimmt er selbst vor in Fricke, Arnold: Der Zahlbegriff. Eine sachliche Klärung im Hinblick auf den Erstrechenunterricht, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 31-46 [im Folgenden: Fricke, Zahlbegriff].
842. vgl. beispielhaft Fricke, Operative Zahlerfassung; Fricke, Operatives Denken; Fricke, Operative Lernprinzipien, vgl. Fricke & Besuden, B, S. IV.
843. vgl. Besuden, Heinrich: Mehr-Modell-Methoden und das Prinzip der Variation. Aufgezeigt an Beispielen aus dem Mathematikunterricht der Grundschule, in: Westermanns Pädagogische Beiträge 21 (1969), 10, S. 553 [im Folgenden: Besuden, Mehr-Modell-Methoden].
844. für Kritik an Dienes vgl. z. B. Besuden, Mehr-Modell-Methoden, S. 554; Besuden, Heinrich: Topologie statt geometrische Propädeutik in der Grundschule, in: Westermanns Pädagogische Beiträge 21 (1969), 3, S. 165 [im Folgenden: Besuden, Topologie]; für Kritik am ganzheitlichen Unterricht vgl. Fricke, Operatives Denken, S. 10; zur Abgrenzung vom ganzheitlichen Unterricht und von Gattegno vgl. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Operatives Rechnen mit farbigen Stäben; erstes Schuljahr. Lehrerheft, Stuttgart: Klett, 1967, S. 7 [im Folgenden: Fricke & Besuden, A].

Beherrschung von Verfahren hinausgeht. Vielmehr muss es Aufgabe des Mathematikunterrichts sein, das „Denken im rechnerisch-mathematischen Bereich zu entwickeln“[845], noch genauer die „Förderung eines beziehlichen Denkens“[846]. Flexibles Rechnen und allgemeiner ein Denken in beweglichen Operationen erfordert also die „Integration des Rechenunterrichts in einen mathematischen Unterricht“[847], wobei der mathematische Unterricht „tragende mathematische Grundideen sichtbar machen [...] und sie als strukturelle Elemente beim Aufbau der Inhalte [...] verwenden“[848] soll, und zwar durchgängig. Damit wird die Vereinheitlichung des Curriculums zu einem weiteren Ziel. Die genannten Forderungen implizieren, dass die mathematischen Grundbegriffe bereits in den Rechenunterricht einfließen bzw. das Rechnen unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet wird. Sie implizieren gleichermaßen, dass der Unterricht zwar durch fachliche Ideen strukturiert wird, einzelne inhaltliche Ziele aber nicht im Vordergrund stehen, sondern die mathematischen Operationen dazu dienen, ***bewegliches Denken*** aufzubauen.

Auch wenn Fricke und Besuden die zumindest anfängliche Konzentration auf die „Aufnahme neuer mathematischer Inhalte“[849] nicht gutheißen, so erfordert ihr Konzept für eine Mathematisierung des Rechenunterrichts dennoch die Erweiterung der **Inhalte** um bestimmte strukturierende Grundideen der Mathematik, als die sie „Zuordnung, Relation, Verknüpfung, Operator u. a. – und als Voraussetzung dafür die Idee der Menge“[850] nennen. Der inhaltliche Teil der Reform scheint also mit dem Konzept der operativen Methode kompatibel. Dass das Rechnen auch in einem derart angelegten Mathematikunterricht seinen Platz hat, wird immer wieder betont. Es geht hier nicht darum, etwas Altes durch neue Inhalte zu ersetzen, sondern um deren „organische[] Einordnung in den bisherigen Aufbau“.[851] Die Inhalte des Lehrgangs für das 1. Schuljahr sind vier Inhaltsbereichen zugeordnet, in denen sich „wichtige neue und unersetzbare traditionelle Aufgabenbereiche der



Inhaltsübersicht im Lehrerband, S. IV

845. Fricke, Operatives Denken, S. 9.
846. Fricke & Besuden, B, S. L6.
847. Fricke, Arbeitskreis, S. 64.
848. Fricke & Besuden, B, S. XI; vgl. auch Hermann, a. a. O., S. 7.
849. Fricke, Operative Lernprinzipien, S. 80; vgl. auch Hermann, a. a. O., S. 6, wo die rein inhaltliche Reform als „Fehler“ bezeichnet wird.
850. Fricke & Besuden, B, S. XI; vgl. Fricke, Arbeitskreis, S. 64; vgl. Fricke, Vorwort, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 4.
851. Fricke & Besuden, B, S. IV; vgl. Besuden, Farbige Stäbe, S. 161; vgl. Hermann, a. a. O., S. 8.

Mathematik“[852] gleichermaßen treffen: Logik, Mengen, Arithmetik und Geometrie/Topologie. Über allen diesen Inhaltsbereichen steht die operative Methode, die damit als didaktisch-methodisches Prinzip die Behandlung aller Teilgebiete bestimmt, strukturiert und diese zueinander in Beziehung setzt. Der Lehrerteil enthält einen Zeitplan[853], in dem jedem Thema die gewünschte Bearbeitungsdauer zugewiesen ist. Der Kurs besteht aus einem pränumerischen, einem numerischen und einem geometrischen Teil. Für den pränumerischen Teil sind die ersten 12 Wochen des Schuljahres vorgesehen. Er umfasst die Kapitel Relationen und Mengenbildung, Mengen und ihre Mächtigkeit (Mengenvergleich, damit ebenfalls Relationen) und Operationen (Verknüpfungen an Maschinen, „Dazu und weg“ an Mengen, Gesetzmäßigkeiten an den Stäben, Verdoppeln und Halbieren). Die Geometrie (4 Wochen) findet sich im Schulbuch am Stück inmitten des numerischen Teils. Damit ist allerdings nicht intendiert, dass die verschiedenen Themen aus dem Bereich unmittelbar hintereinander behandelt werden, Reihenfolge und Zeitpunkt sind flexibel von der jeweiligen Lehrkraft zu wählen.[854]

Auch wenn sie als eigenständiger Inhalt aufgeführt wird, so gibt es doch kein eigenes Kapitel zur ***Logik***. Logik meint hier schlussfolgerndes Denken unter Nutzung von logischen Elementen wie Wenn-dann-Aussagen und Quantifizierungen, also weniger einen mathematischen Inhalt als eine bestimmte Art sprachlicher Kompetenz oder eine Heuristik für das Problemlösen, die im Lehrgang anhand der weiteren Themenbereiche erworben wird.[855]

Die Bedeutung der ***Mengen*** ergibt sich u. a. aus Frickes Überlegungen zum Zahlbegriff, in denen er die Menge als einen wesentlichen der Zahl – auch historisch – genetisch vorausgehenden Begriff benennt. Gleiches gilt für die Relation, insbesondere für die die Mengenbildung erst motivierende Äquivalenzrelation, weshalb der Relationsbegriff in den Erläuterungen stets im engen Zusammenhang mit den Mengen thematisiert wird.[856] Die Addition und Subtraktion sind aus den entsprechenden Mengenoperationen wiederum genetisch hervorgegangen, weshalb den Mengen für das Rechnen „fundamentale[] Bedeutung“[857] zugesprochen wird.

Fricke und Besuden grenzen sich nichtsdestotrotz klar vom Konzept eines pränumerischen, geschlossenen Mengenvorkurses ab. Neben dem Bezug auf die KMK-

852. Fricke & Besuden, B, S. IV.
853. Fricke & Besuden, B, S. XVIII f.
854. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XVII und L64.
855. vgl. Fricke & Besuden, B, S. V; vgl. Fricke, Arbeitskreis, S. 66; vgl. Fricke & Besuden, B, S. V; dass die Logik tatsächlich eher als in die anderen Bereiche integriert gedacht ist, wird in Ausgabe C bestätigt, wo das Inhaltsschema neu sortiert ist und die Logik als „mathematisches Denken“ den anderen Inhaltsbereichen übergeordnet wird.
856. vgl. Fricke, Zahlbegriff, S. 35 f.; vgl. Fricke & Besuden, B, S. XI, vgl. Fricke, Arbeitskreis, S. 65.
857. Fricke & Besuden, B, S. L72.1; vgl. Fricke, Zahlbegriff, S. 44.

Empfehlungen von 1968, gemäß derer Mengen in das gesamte Curriculum integriert werden sollen, stützen sie ihre Ablehnung auf mangelnde Sinnhaftigkeit eines solchen Vorgehens.[858] Die Arbeit an Mengen bedürfe Motivation und problemhaltiger Situationen, für deren Lösung die entsprechenden Begriffe eine Hilfe bereitstellen. So stellen Fricke und Besuden z. B. heraus, dass die Bildung einer Menge aus beliebigen verschiedenartigen Elementen „völlig unmotiviert" und daher nicht sinnvoll sei.[859] Offenbar steckt darin deutliche Kritik an anderen existierenden Kursen, eine solch scharfe Abgrenzung wäre sonst kaum notwendig. Gleiches gilt für die ausdrückliche Warnung davor, „einem „Mengenlehrekult" [zu] verfallen"[860]. Das Problem, das die Nutzung der Mengenbegriffe – nicht zwangsläufig die zugehörige Terminologie – in *Mathematik für die Grundschule* motiviert, ist der Aufbau des Zahlbegriffs, in dessen Dienst die Mengenlehre dadurch überwiegend gestellt wird. Konkret besteht die Mengenbehandlung darin, dass zunächst Dinge – Alltagsgegenstände ebenso wie Formenplättchen – nach gemeinsamen Eigenschaften (z. B. gleiche Farbe, gleiche Form) sortiert und in Tabellen eingeordnet werden; das Venn-Diagramm wird nicht fertig vorgegeben, sondern entwickelt, indem zusammengehörige Objekte durch Linien verbunden und dann mit einer Linie eingefasst werden, dieser Klassenbildung liegt also jeweils eine Äquivalenzrelation zugrunde. Die Klammerschreibweise wird nicht eingeführt.[861]

Häufiger als auf die Darstellung im Venn-Diagramm wird auf die Nutzung der Cuisenaire-Stäbe als Modell für Kardinalität zurückgegriffen, indem den Mengen zunächst Einerklötzchen bijektiv zugeordnet werden, bevor diese dann durch den passenden Stab repräsentiert werden. Die Mächtigkeit zweier Ausgangsmengen kann nun direkt über die Länge der entsprechenden Stäbe verglichen werden.[862] Der kardinale Aspekt steht dadurch nicht isoliert, sondern wird bereits pränumerisch in die ordinale Länger-kürzer-Relation übertragen. Dieser Zusammenhang kann nun flexibel gehandhabt und auch immer wieder umgekehrt werden, was der operativen Methode und damit der Intention der Autoren entspricht. Zum anderen führt der Vergleich der Stäbe auf den Begriff der Gleichmächtigkeit, gleichlange und gleichfarbige Stäbe bilden dabei jeweils eine Äquivalenzklasse. Die Begriffe Grund- und Teilmenge sowie die Mengenoperationen werden jeweils im Venn-Diagramm, in der Tabelle oder Matrix und am Baumdiagramm dargestellt.[863] Auch die Mengeninvarianz soll durch die Bewusstmachung der Lageunabhängigkeit von Mengenelementen erkannt werden; dies wird wieder mit Bezug auf Piaget

858. Fricke & Besuden, B, S. V; vgl. ebenda, S. XI; vgl. Besuden, Mehr-Modell-Methoden, S. 554.
859. Fricke & Besuden, B, S. XI; vgl. ebenda, S. XV f.
860. Fricke & Besuden, B, S. VII.
861. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XI f., 9, L9 und G9.1.
862. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XIII, 17, 18, L17 und L18.
863. Fricke & Besuden, B, S. XV f. und 72-75.

begründet, obgleich dies für den Großteil der Kinder nicht mehr nötig sein sollte.[864]

Im Hinblick auf die Elemente der Mengenlehre ist hier also besonders hervorzuheben, dass eine isolierte Behandlung im Sinne eines geschlossenen Vorkurses von Fricke und Besuden strikt abgelehnt wird und sie der Forderung nach Integration der Mengenbegriffe in ein Gesamtkonzept selbst Genüge tun, indem sie diese stets in Verbindung mit anderen grundlegenden Begriffen thematisieren. Insbesondere sind dies die Relationsbegriffe, weshalb Relationen als Teil des gemeinsamen Inhaltsbereiches „Mengen“ erscheinen.

Die ***Relationen*** haben für die Ziele des Lehrgangs mehrfache Bedeutung. Als „pränumerische Vorbereitungen des Zahlbegriffs“ – dabei im engen Zusammenhang mit Mengen – dienen sie dem Ziel des verständigen Rechnens, als „vielseitiges Aufgabenfeld im Sinne operativer Durcharbeitung“ der Schulung beweglichen Denkens. Allgemeiner stellen sie notwendige Begriffe für die Erfassung der Umwelt bereit.[865] In jedem Fall werden die Relationen nicht zum Selbstzweck oder aus fachwissenschaftlichen Gründen, sondern vorwiegend zum Zweck einer formalen Bildung betrachtet. Dabei wird zunächst von allgemeinen Relationen ausgegangen, bevor die speziellen Relationen des Mächtigkeitsvergleichs hervorgehoben werden. Fricke und Besuden sprechen für die ersten Teile ihres Unterrichtswerks sogar von „der Leitidee der Relation“[866] statt z. B. von der Leitidee der Menge. Die Äquivalenzrelationen werden als grundlegender gesehen, zum einen aufgrund des engen Zusammenhangs mit dem Mengenbegriff und somit zum kardinalen Zahlaspekt, zum anderen ist der Begriff der Ordnungsrelation komplexer. Er erfordert stets den Vergleich zwischen mehreren Objekten, während die Äquivalenz von Eigenschaften jeweils des einzelnen Objekts ausgeht. Dennoch geht das Ordnen in Reihenfolgen im Lehrgang der Gleichmächtigkeit voraus, da die Äquivalenzrelation „genauso viel wie“ letztlich erst dadurch motiviert wird.[867] Als Darstellung für Ordnungsrelationen werden häufig Pfeildiagramme[868] verwendet, zu deren Vorteilen es gehört, dass die Relationseigenschaften der Transitivität, Irreflexivität und Asymmetrie direkt mit den Richtungen der Pfeile verknüpft und entsprechend abgelesen werden können.

Weiterführende algebraische Strukturen werden im 1. Schuljahr noch nicht benötigt, sind daher nicht sinnvoll integrierbar und werden somit hier noch nicht

864. vgl. Fricke & Besuden, B, S. L16.
865. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XII f.
866. Fricke & Besuden, B, S. L57.1.
867. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XII, 11-12 und L11-12; vgl. Fricke, Arbeitskreis, S. 65; vgl. Fricke, Zahlbegriff, S. 45.
868. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XII und z. B. 21-22.

eingeführt.

Der Begriff der ***Abbildung*** wird im Lehrgang „gleichbedeutend gebraucht mit „Operator" und „Maschine""[869] sowie Zuordnung. Während die Maschine eher ein didaktisches Modell darstellt, handelt es sich beim ***Operator*** um einen bestimmten Aspekt des Abbildungsbegriffs, dem allerdings kein eigener Inhaltsbereich gewidmet ist; die Nutzung des Operatormodells ist in der operativen Methode impliziert. In Übereinstimmung mit der angestrebten Allgemeinheit des Begriffs geht der Lehrgang von nicht-numerischen Abbildungen und Zuordnungen aus, die sehr allgemein gehalten sind, wie Farbtransformationen, einfaches „Gegenüberstellen, Abdecken oder Aneinanderlegen" oder dem Legen geometrischer Muster.[870] Der Mächtigkeitsvergleich soll schließlich als Spezialfall einer Zuordnung vermittelt werden. Fricke und Besuden halten den „Weg vom allgemeinen zum speziellen [...] [für] zweifellos de[n] lerneffektivere[n]"[871]. Das Maschinenmodell als Darstellung für Rechenoperationen bietet Möglichkeiten zur Einsicht in operative Zusammenhänge und zur Verallgemeinerung des mathematischen Operatorbegriffs. Das Modell wird zudem auf Verknüpfungsmaschinen erweitert[872], der Abbildungsbegriff wird also auch dahingehend verallgemeinert. Um darüber hinaus funktionale Zusammenhänge zu betonen, wird wiederholt an „Treppen" gerechnet. Die Bezeichnung „Treppe" bezieht sich auf die Darstellung der Rechenaufgaben mit den Stäben, inhaltlich geht es bei den Treppenaufgaben um das gleichmäßige schrittweise Verändern der verschiedenen Werte in den Aufgaben.[873]

Vor Tendenzen, die ***Arithmetik*** zu vernachlässigen, wird mehrfach gewarnt. Eine solche Einschränkung ziehen Fricke und Besuden dementsprechend nirgendwo in Erwägung, vielmehr stellen sie wiederholt fest, dass die Arithmetik als fach- wie schulmathematisches Teilgebiet „wesentlicher Bestandteil der Mathematik auch in der Schule [bleibt]".[874] Stets wird dabei darauf hingewiesen, dass „Zahlen aber nicht um ihrer selbst willen eingeführt werden, sondern ihre Verknüpfungen und deren Gesetze das Hauptziel sind"[875], die Arithmetik also als „Lern- und Übungsfeld mathematischen Denkens"[876] fungiert. Wenn das Ziel nicht die reine Anwendung der Zahlen beim Rechnen ist, sondern Einsicht in Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten, dann muss die Zahl in ihren vielfältigen Facetten als Begriff erfasst werden

869. Fricke & Besuden, B, S. XXI.
870. Fricke & Besuden, B, S. L2; vgl. ebenda, S. XV, 4, L4, G4.2, E4.2 und L57.2.
871. Fricke & Besuden, B, S. L14; vgl. ebenda, S. XIII f.
872. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 24-25.
873. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 49-50, L49-50, 85 und L85.2.
874. Besuden, Farbige Stäbe, S. 161; vgl. Fricke & Besuden, B, S. V; vgl. Fricke, Operative Lernprinzipien, S. 79; vgl. Fricke, Arbeitskreis, S. 66.
875. Fricke & Besuden, B, S. XIII.
876. Fricke & Besuden, B, S. V; Fricke, Arbeitskreis, S. 66.

und nicht nur als Manipulationsobjekt. Dies wiederum erfordert die Berücksichtigung verschiedener Zahlaspekte in unterschiedlichen Modellen. Das Mengenmodell allein, das die Zahlen nur kardinal grundlegt, ist dafür unzureichend, der Zahlbegriff kann nur dann voll operationalisiert werden, wenn er als Teil eines Beziehungsgefüges aufgefasst wird; „die Zahl gewinnt erst Konturen durch Vergleich mit anderen Zahlen“.[877] Zu den wichtigsten Handlungen, die Zahlen zueinander in Beziehung setzen, zählen das Verdoppeln und das Halbieren.

Für derartige relationale Betrachtungen haben die Autoren in den farbigen Stäben ein passendes Modell für die Zahlen gefunden. Sie erlauben Handlungen und sind darüber geeignet, strukturelle Zahlbeziehungen und Operationen einsichtig zu machen. Sie eignen sich zudem für die Repräsentation der drei Zahlaspekte, die Fricke und Besuden als relevant für den Aufbau der numerischen Begriffe nennen, den kardinalen, den ordinalen und den Operatoraspekt. Der Maßzahlaspekt, obwohl in den Cuisenaire-Stäben und besonders in deren Nutzung im Hinblick auf die Länger-kürzer-Relation enthalten, wird an keiner Stelle expliziert.

Der pränumerische Kurs endet mit einer Seite zum Verdoppeln und Halbieren an den Stäben und leitet damit direkt zur Einführung der Zahlen 1-10 über[878], die auf dem Verdoppeln beruht. Der numerische Kurs beginnt mit zwei Seiten zu den Zahlen 1-4, die weitere Einführung erfolgt in Zweierschritten. Die Zahlen werden zunächst kardinal eingeführt, über die Mengendarstellung (Venn-Diagramm) sowie über die farbigen Stäbe, an denen unmittelbar die additiven Zerlegungen durchgeführt werden. Die geraden Zahlen werden dabei über die Verdoppelung eingeführt, die ungeraden Zahlen dann jeweils im Rahmen der Zerlegung (Bsp.: „Beim Zerlegen der 6 in zwei Teile tritt der gelbe Stab auf, und damit wird 5 eingeführt.“[879]). Im Sinne der operativen Methode wird die Verdoppelung sogleich umgekehrt und die Zerlegung der geraden Zahlen in Hälften als Grundbeziehungen betont. Die Erkenntnis, dass dies bei den ungeraden Zahlen nicht möglich ist, führt in diesem Fall auf die fundamentale Zerlegung in „Fasthälften“[880], die ebenfalls bereits pränumerisch an „fast gleich große[n]“ Stäben vorbereitet wurde.[881] Für die symbolische Darstellung der Zerlegungen werden das Plus- sowie das Gleichheitszeichen benötigt, beide werden im Zuge dessen ebenfalls eingeführt. Die Null wird später über die Subtraktion der Form $a - a$ erarbeitet, die am Ende einer Folge

877. Fricke & Besuden, B, S. XIV; vgl. Besuden, Mehr-Modell-Methoden, S. 554; vgl. Besuden, Heinrich: Nur ein Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule? Möglichkeiten und Grenzen des Cuisenaire-Materials, in: Westermanns Pädagogische Beiträge 21 (1969), 4, S. 208 [im Folgenden: Besuden, Arbeitsmittel].
878. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 32-36 und L32-36.
879. Fricke & Besuden, B, S. L34.
880. Fricke & Besuden, B, S. XIV.
881. vgl. Fricke & Besuden, B, S. L31.

von Treppenaufgaben steht, und somit nicht als Kardinalität der leeren Menge.[882] Die Einführung der geraden Zahlen von 11-20 erfolgt analog, nach dem gleichen Prinzip des Verdoppelns und Zerlegens in Zweierschritten, wenn auch jetzt zeitlich komprimiert. Die ungeraden Zahlen werden nun über die Ordnungsrelation des Größenvergleichs zwischen Nachbarzahlen motiviert.[883] Die Zahlbeziehungen sind also von Anfang an fundamental für die arithmetische Begriffsbildung.

Nach der kardinalen Zahleinführung werden die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge geordnet, also ordinal betrachtet und schließlich wird auch gezählt. Weiter vorne im Lehrgang wird das Zählen noch nicht als notwendig gesehen, ist aber auch „nicht krampfhaft zu unterdrücken“[884]; die Zahlworte bis 5 sollen vielmehr zwanglos genutzt werden.

Die operative Methode bestimmt die Einführung und Einprägung des Rechnens in mehrerlei Hinsicht. Gemäß der Forderung danach, Operationen nicht isoliert voneinander, sondern von Anfang an im gegenseitigen Zusammenhang zu betrachten, werden die Addition und die Subtraktion gemeinsam eingeführt. Dies geschieht anhand von Rechengeschichten und schließt somit an das pränumerische Vereinigen und Trennen von Mengen („Dazu und weg“) an.[885] Die schwerpunktmäßige Betrachtung der Rechenarten unter strukturellen Gesichtspunkten wird am Beispiel der Kommutativität und der Assoziativität ebenfalls bereits pränumerisch vorbereitet. Im numerischen Teil wird die Beziehungshaltigkeit der Zahlen und Operationen schließlich umfassend ausgenutzt, um Lösungswege für arithmetische Aufgaben abzuleiten und einzuprägen. Das Ziel, flexibles Denken aufzubauen, erfordert denkendes Rechnen, und „[d]enkend rechnen heißt, eine Aufgabe auf einfachere zurückführen und lösen.“ Dies wird im Lehrgang umgesetzt anhand verschiedener wiederkehrender „Verfahren denkenden Rechnens: 1. Zurückführen auf eine Nachbaraufgabe 2. Anwendung des kommutativen Gesetzes 3. Ausnutzen multiplikativer Zahlzerlegungen 4. Gegenläufiges Verändern der Summanden 5. Gleichsinniges Ändern der Glieder einer Differenz 6. Anwenden der Probeaufgabe“[886]; konkretisiert werden diese Verfahren in verschiedenen Aufgabentypen, die sich alle dadurch auszeichnen, dass sie leicht über bestimmte Zahlbeziehungen oder Operationseigenschaften gelöst werden können. Die in dem Zitat bereits erwähnte Probeaufgabe beruht auf der Reversibilität der Operationen; zwei benachbarte Aufgaben sind dadurch bestimmt, dass es sich bei einer der enthaltenen Zahlen um eine Nachbarzahl der entsprechenden Zahl in der anderen Aufgabe handelt. Nachbaraufgaben bilden die schon beschriebenen Treppen, darüber hinaus sind

882. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XV und 49.
883. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 78-79 und L78-79.
884. Fricke & Besuden, B, S. L22.
885. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 26 und 43.
886. Fricke & Besuden, B, S. L49.

sie vor allem dann relevant, wenn sie den Grundaufgaben benachbart sind, unter denen wiederum diejenigen besonders einfach zu lösenden Aufgaben zu verstehen sind, denen eine der Fundamentalbeziehungen „das Doppelte/die Hälfte von" oder „ $+1/-1$ " zugrunde liegt. Zur Bewusstmachung der Assoziativität wird mit drei Zahlen gerechnet und entsprechend zusammengefasst. Neben diesen für *Mathematik in der Grundschule* typischen Aufgabenformaten liegt wohl eine weitere Besonderheit des Lehrgangs darin, dass das Konzept der Tauschaufgaben auf die Subtraktionen erweitert wird, wobei nicht Subtrahend und Minuend, sondern Subtrahend und Differenz vertauscht werden. Die Tauschaufgabe zu $8-2=6$ lautet entsprechend $8-6=2$. In Verbindung mit den Probeaufgaben ergeben sich auf diese Weise jeweils vier operativ zusammenhängende Aufgaben.

Obwohl das Ziel des beweglichen, flexiblen Rechnens und Denkens im Vordergrund steht, geht es doch auch um das „systematische Erlernen von Rechenaufgaben" bzw. „Rechensätzen" der Addition und Subtraktion.[887] Die Multiplikation wird vorbereitet durch multiplikative Zerlegungen an den Stäben (Auslegen mit „[g]leich lange[n] Stäbe[n]")[888] und Mengenbündelungen. Auch mit dem Mal-Punkt werden die Schülerinnen und Schüler bereits bekannt gemacht, wenn „2·" als Schreibweise für „das Doppelte von" und analog „$\frac{1}{2}\cdot$" als Schreibweise für „die Hälfte von" eingeführt werden.[889] Der Umgang mit Zahlen wird schließlich in verschiedenen Aufgabenformaten geübt, z. B. werden auch hier wieder die Darstellungen der Tabelle zum Rechnen sowie des Baumdiagramms für das Aussondern von Zahlenmengen genutzt.

Besuden warnt an anderer Stelle vor der Vernachlässigung des ***Sachrechnens*** und gibt Beispiele, wie auch in diesem Bereich die operative Methode helfen kann, die Leistungen zu verbessern.[890] Dennoch spielt das Sachrechnen in *Mathematik für die Grundschule* im ersten Schuljahr keine große Rolle. Die pränumerischen Mengenoperationen werden zwar ebenso über Sachzusammenhänge und Rechengeschichten eingeführt wie die Addition und die Subtraktion, und gerade im pränumerischen Teil wird wiederholt auf Sachkontexte zurückgegriffen, im numerischen Teil kommen Sachaufgaben aber nur vereinzelt und auf den letzten Seiten vor. Eine Seite des Grundbuchs ist dem Rechnen mit Geld gewidmet[891], andere Einheiten zum Inhaltsbereich Größen kommen nicht vor.

Die ***geometrischen Inhalte*** des Kurses umfassen verschiedene Begriffe aus unterschiedlichen geometrischen Teilgebieten. Im Schulbuch finden sich die zugehö-

887. Fricke & Besuden, B, S. L78, L82.1 und L87.
888. Fricke & Besuden, B, S. L82.1.
889. Fricke & Besuden, B, S. L78.1.
890. vgl. Besuden, Sachaufgaben, S. 139-141 und 145.
891. Fricke & Besuden, B, S. 91.

rigen Seiten alle am Stück, der Zeitpunkt des Einsatzes bleibt den Lehrkräften überlassen. Dass überhaupt geometrische Inhalte ihre Berechtigung in der Grundschule haben, wird eigens betont, galt also offenkundig nicht als selbstverständlich. Begründet wird dies vorwiegend mit der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens, außerdem mit der notwendigen Grundlegung des späteren systematischen Geometrieunterrichts.[892] Die im 1. Schuljahr behandelten Inhalte sind Raumgeometrie, Symmetrieabbildungen und Topologie, und gerade Letzterem wird besonderer Wert für die Erreichung der Ziele zugesprochen. Die Geometrie im Raum erhält den Vorzug gegenüber der ebenen Geometrie, weil sie in weit höherem Maße der Lebenswelt der Kinder entspricht. Statt der Benennung euklidischer Grundformen, wie zuvor üblich, stehen konkrete geometrische Erfahrungen im Vordergrund, die zu diesem frühen Zeitpunkt noch zumeist unsystematisch beim Bauen mit den Stäben gesammelt werden.[893] Gewisse Übungen zur Kopfgeometrie sind jedoch bereits enthalten, wenn das Kippen einer Streichholzschachtel z. T. im Kopf vollzogen werden soll. Zudem berühren Anordnungsprobleme an Würfeln kombinatorische Fragestellungen.[894]

Fricke und Besuden unterteilen ihren Lehrgang in Normal-, Erweiterungs- und Minimalkurs. Es verdient an dieser Stelle Erwähnung, dass es sich bei der Raumgeometrie um den einzigen Themenbereich handelt, der vollständig aus dem Minimalkurs rausgenommen ist.

Die geometrischen Abbildungen umfassen neben der Achsen- auch die „schwierigere[] Drehsymmetrie“[895], wenn auch mehr implizit beim Auslegen drehsymmetrischer Figuren mit Plättchen. Die Bezeichnung Symmetrie wird auch nur für die Achsensymmetrie genutzt, die über Handlungen wie Falten, Klappen oder Reißen eingeführt und beim Legen und Ergänzen symmetrischer Figuren mit Plättchen und Stäben gefestigt werden soll.[896]

Aufgrund der ihr zugesprochenen genetischen Eigenschaften steht die ***Topologie*** am Anfang des Geometrieblocks im Buch. Ihre nicht-metrischen Begriffe sind nicht nur grundlegend für die Raumanschauung des Kindes und die spätere metrische euklidische Geometrie, sondern gehen jener nach Piaget und Dienes auch

892. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XV; Besuden, Heinrich: Die Aufgabe der Geometrie in der Grundschule, in: Lebendige Schule 28 (1973), 6, S . 217 f. [im Folgenden: Besuden, Aufgabe der Geometrie].
893. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 69-70 und L69; vgl. Besuden, Topologie, S. 163 f.; vgl. Besuden, Aufgabe der Geometrie, S. 217; es erstaunt, dass Besuden hier noch in einem 1973 – und damit 3-4 Jahre nach dem Erscheinen des ersten *alef*-Bandes – erschienenen Aufsatz das „Fehlen jeglicher progressiver Vorschläge für eine Geometrie in der Grundschule“ moniert. Es wird aber auch an keiner Stelle Bezug auf Bauersfeld genommen.
894. Fricke & Besuden, B, S. 70 und 71.
895. Fricke & Besuden, B, S. L64.
896. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 64-68 und L64-68.

entwicklungspsychologisch voraus[897]. Die Begriffe, die hier behandelt werden, sind geschlossen/nicht-geschlossen, innerhalb/außerhalb, Gebiete (auch Durchschnitte davon) und Verkettungen[898]. Trotz des prinzipiellen Vorrangs der topologischen Inhalte weisen Fricke und Besuden ausdrücklich darauf hin, dass damit keine strikte Nacheinanderbehandlung von Topologie und euklidischer Geometrie intendiert ist. Eine solche Trennung würde offensichtlich ihrer Methode widersprechen. Ebenso steht die gesamte Geometrie nicht isoliert von den anderen drei Inhaltsbereichen, Zusammenhänge zur Logik, Mengenlehre und Arithmetik sollen vielmehr im Unterricht deutlich werden, z. B. dadurch, dass alle Materialien nicht nur themenspezifisch, sondern in allen Bereichen gleichermaßen genutzt werden. Dass die Verfasser selbst die Inhalte in ihren Zusammenhängen sehen, verdeutlicht die detaillierte „Übersicht über Aufbau und Zusammenhang der Inhalte“ im Einführungsteil des Lehrerbandes.[899] Der Lehrgang bildet ein organisches Ganzes.

Wie bereits erwähnt, definieren Fricke und Besuden einen Normal-, einen Erweiterungs-, einen Minimal- sowie noch einen eingeschränkten Normalkurs.[900] Der Normalkurs entspricht dem gesamten Grundbuch; der Erweiterungskurs bezieht außerdem das entsprechende Arbeitsheft E ein. Der eingeschränkte Normalkurs „zeigt, welche Unterrichtseinheiten am ehesten gekürzt oder übergangen werden können“, der Minimalkurs, welche Teile „für den weiteren Aufbau des Lehrganges zwingend erforderlich“ sind. Der Lehrgang erlaubt damit eine Anpassung an die individuelle Klassensituation unter Wahrung des Gesamtkonzepts und wird dadurch praktikabler. Gleichzeitig beugen die Verfasser der Gefahr vor, dass die Lehrkräfte bei Zeitmangel als erstes die neuen, ihnen weniger vertrauten Inhalte weglassen.

Das alles überstrahlende **didaktische Prinzip**, auf dem *Mathematik in der Grundschule* aufbaut, ist das aus den entwicklungspsychologischen Ergebnissen von Piaget abgeleitete und von Aebli bereits exemplarisch konkretisierte ***operative Prinzip***. Es ist das Verdienst von Arnold Fricke und Heinrich Besuden, einen gesamten kohärenten Lehrgang konzipiert zu haben, der die operativen Ziele konsequent verfolgt und gleichzeitig den geltenden Lehrplänen genügt. Zentrales Merkmal des operativen Prinzips oder der operativen Methode ist die Behandlung von Begriffen und Verfahren in Zusammenhängen, unter der Betonung ihrer gegenseitigen Beziehungen sowie der operativen Eigenschaften – Kompositionsfähigkeit, Reversibilität, Assoziativität – dieser Beziehungen. Dabei gilt es, die strukturellen Zusammenhänge und Beziehungen von Anfang an herauszustellen und unmittelbar

897. vgl. Fricke & Besuden, B, S. L60; vgl. Besuden, Aufgabe der Geometrie, S. 218; vgl. Besuden, Topologie, S. 164 f. und 166-169 für Beispiele.
898. vgl. Fricke & Besuden, B, S. 60-63.
899. Fricke & Besuden, B, S. XVI.
900. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XIX.

zusammenhängende Begriffe gleichzeitig anstatt nacheinander einzuführen. Die gegenseitigen Beziehungen und Abhängigkeiten, zu denen insbesondere auch solche funktionaler Art zählen, werden deutlich in den unterschiedlichen didaktisierten Aufgabentypen, in denen sie für das Finden von Lösungswegen arithmetischer Aufgaben genutzt werden. Um das bewegliche Denken durch flexibles Rechnen zu fördern, wird die Fähigkeit angestrebt, Lösungen über verschiedene solcher Wege zu begründen; dabei werden die „Normalverfahren [...] nur als ein möglicher Weg unter anderen angeboten".[901] Die Handlungsorientierung, die in der fortwährenden Nutzung vor allem des Cuisenaire-Materials konkretisiert wird, beruht ebenfalls auf dem Piagetschen Operationsbegriff, der eine voll verinnerlichte Handlung und somit einen vollendeten Akt ***konstruktiver Begriffsbildung*** beschreibt.

Der gesamte Lehrgang soll an tragenden ***fundamentalen Ideen*** orientiert sein, beispielhaft genannt werden hier Zuordnung, Relation, Operator, Verknüpfung und Menge. Die Arithmetik und ihre Elemente werden selbst nicht als solche Grundideen aufgeführt, sie dienen eher als inhaltliches Teilgebiet, an dem diese Begriffe exemplarisch gebildet werden können.

Es ist bereits am Band für das 1. Schuljahr sichtbar, wie diese Begriffe den Lehrgang der Länge nach durchziehen und im Sinne eines Spiralcurriculums in anderem Zusammenhang, in anderer Darstellung und auf höherem Niveau wieder aufgegriffen werden.[902] Die Orientierung an Leitideen verbietet ebenso wie die Betonung operativer Zusammenhänge die Behandlung einzelner Themen als isolierte Spezialfälle. Die Begriffe sollen in ihrer Allgemeinheit vermittelt werden, und an mehreren Stellen wird ein Begriff zunächst in möglichst allgemeiner Form eingeführt, bevor er auf Spezialfälle eingegrenzt wird.[903] Fricke und Besuden begründen dieses Vorgehen mit dem „vertretene[n] Prinzip der „Einbettung spezieller Einsichten in allgemeinere Zusammenhänge und Strukturen""[904]. Es handelt sich hier offenbar um einen Grundsatz, der der Dienesschen ***Theorie vom tiefen Ende*** entspricht, dieser Bezug wird von den Autoren aber nicht hergestellt.

An anderer Stelle nimmt Besuden hingegen sehr direkt Bezug auf Dienes. Er nennt das Dienessche Prinzip der Variation der Veranschaulichung als ein Beispiel dessen, was er als den „überzeugenden Ansatz" der ***Mehr-Modell-Methode*** bezeichnet.[905] Die Methode beinhaltet den Grundsatz, dass neue Begriffe nur dann

901. Fricke & Besuden, B, S. L89; vgl. ebenda, S. G89.2, E54 und E89.
902. vgl. z. B. die Wiederaufnahme der Ordnungsrelation in der Darstellung in Pfeildiagrammen in Fricke & Besuden, B, S. 21-22, L21-22, G21-22 und E21.
903. vgl. z. B. Fricke & Besuden, B, S. XIV (zum Vorgehen bei der Einführung der Verknüpfung) sowie 24-26 und L57.2 (zum Vorgehen beim Operatorbegriff).
904. Fricke & Besuden, B, S. 73; vgl. Fricke, Operative Lernprinzipien, S. 101 f.
905. Besuden, Mehr-Modell-Methoden; vgl. für das Folgende ebenda, insbesondere S. 127, 130-133 und 138; die Bezeichnung Mehr-Modell-Methoden hat Besuden offenbar aus dem Bericht zur

gebildet werden können, wenn sie auf mehreren Modellen basieren. Modell ist in dem Kontext allerdings nicht mit Material oder Veranschaulichungsmittel zu verwechseln. Mit Letzterem verbundene Konzepte aus der Rechenmethodik nämlich, die davon ausgehen, dass nur die Art der Arbeitsmittel häufig genug gewechselt werden oder über einen ausreichend langen Zeitraum handelnd mit einer isomorphen Grundveranschaulichung gearbeitet werden muss, damit sich Abstraktion einstellt, werden klar abgelehnt.[906] Stattdessen gibt Besuden Beispiele, in denen zwar verschiedene Objekte genutzt werden, das Modell aber stets das gleiche ist (z. B. Mengenbildungen, bei denen lediglich das Material verändert wird), im Gegensatz dazu nennt er das Beispiel der Cuisenaire-Stäbe, die es ermöglichen, mit einem Arbeitsmittel mehrere Modelle darzustellen. Die Theorie ist in *Mathematik in der Grundschule* also in den zugehörigen Materialien bzw. ihrer Nutzung impliziert. Im gleichen Aufsatz bezieht sich Besuden außerdem auf das zweite Variationsprinzip von Dienes, das Prinzip der ***mathematischen Variabilität***, ein Prinzip, dem er sich ausdrücklich anschließt. Das überrascht wenig, weil die Idee des funktionalen Denkens, das hierdurch geschult werden kann, wesentlicher Bestandteil der operativen Methode ist. Die mathematische Variabilität ist also klar unabhängig von Dienes Bestandteil des Lehrgangs von Fricke und Besuden.

Die Variation der Veranschaulichung findet sich schließlich in den verschiedenen ikonischen Mengendarstellungen (Venn-Diagramm, Matrix, Baum) und wird dort besonders hervorgehoben, wenn diese miteinander verglichen werden.[907]

Es versteht sich von selbst, dass auf allen drei Repräsentationsebenen gearbeitet wird, enaktiv mit den Materialien, ikonisch mit den Abbildungen in den Büchern, symbolisch mit den Rechenzeichen sowie der Sprache allgemein. Besonders betont werden diese aber nicht, der Name Bruner fällt nicht, und es erfolgt auch keine explizite Aufforderung zum Wechsel zwischen den Repräsentationsformen. Die enaktive Handlungsebene nimmt sehr großen Raum ein, dies ist aber durch das Primat der operativen Methode gegeben. Auf der symbolischen Ebene wird Formalismus abgelehnt. Mengensymbolik wird überhaupt nicht eingeführt, für Relationen nur die Zeichen $<$ und $>$ und in der Arithmetik die Ziffern, das Gleichheits- sowie die Rechenzeichen. Mit der Einführung des Mal-Punkts und der Bruchschreibweise für $\frac{1}{2}$ bereits im 1. Schuljahr gehen Fricke und Besuden andererseits vergleichsweise weit in der arithmetischen Symbolik. Verfrühte Fachsprache, z. B. in Form von Formulierungen aus der Aussagenlogik, soll noch nicht genutzt werden, die

UNESCO-Tagung von 1966 übernommen (*multiple embodiment approach*), auf die er sich hier ausdrücklich bezieht, vgl. ISGML, a. a. O., S. 22-27.

906. vgl. Besuden, Arbeitsmittel, S. 207 und 209; vgl. Fricke, Operative Lernprinzipien, S. 105 und 107; vgl. Fricke, Operatives Denken, S. 8.

907. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XV und 73-75; vgl. Fricke, Arbeitskreis, S. 65.

Autoren „plädieren nach wie vor für ausführliche, natürliche Sprechweisen gegenüber verkürzter Fachsprache [...] im ersten Schuljahr“[908], grundsätzlich sollen die Schülerinnen und Schüler aber häufig zum Sprechen angeregt werden.

Als hauptsächliches Mittel zur ***Differenzierung*** innerhalb der Klasse ist die individuelle Hilfestellung durch die Lehrkraft vorgesehen, die dadurch entlastet wird und Kapazitäten hinzugewinnt, dass die Kinder selbstständig mit dem Material arbeiten.[909] Die Einteilung in Normal-, Erweiterungs-, Minimal- und eingeschränkten Normalkurs dient weniger der Individualisierung als der Anpassung des Kurses an die gesamte Klasse. Ebenso ist das Arbeitsheft E als Ergänzung zum Erweiterungskurs für die ganze Klasse vorgesehen, zusätzlich aber auch zur qualitativen wie quantitativen Differenzierung für einzelne Schülerinnen oder Schüler bei Bedarf.[910] Auch die *Ravensburger Spiele*, die als ergänzendes Material angegeben werden, sollen in diesem Sinne genutzt werden.

Zur Diagnose und Bewertung werden die Übungsaufgaben aus den Arbeitsheften als geeignet vorgeschlagen. Noten und Leistung sollen jedoch ausdrücklich nicht gegenüber dem Lernen und der Freude an der Mathematik im Vordergrund stehen, denn: „[d]ie Kinder zu beurteilen und zu benoten ist [...] nicht die Hauptaufgabe des Lehrers.“[911]

Fragen der **Unterrichtsmethodik** sind naturgemäß nicht von didaktischen Prinzipien zu trennen. Dies gilt generell für Fragen des Materialeinsatzes und für *Mathematik in der Grundschule* umso mehr, weil die methodischen Prinzipien so unmittelbar an didaktische Entscheidungen zu Auswahl von und Umgang mit Inhalten geknüpft sind. Zur Methodik ist daher vieles schon an anderer Stelle in diesem Kapitel gesagt worden.

Neben den gedruckten Materialien sind die ***Formen und Stäbe*** das im Unterricht zentrale Material, mit dem gebaut und gelegt wird und an dem handelnd Zusammenhänge erkannt und so Begriffe konstruiert werden sollen. Fricke und Besuden kategorisieren die ihrer Meinung nach für den Kurs notwendigen Arbeitsmittel nach dem Grad der Strukturiertheit.[912] Die Formenplättchen sind (voll)

908. Fricke & Besuden, B, S. L72.1.
909. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XVII.
910. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XVIII. Im Elternheft (Hermann, a. a. O., S. 14) wird – dem Anschein nach zur Beruhigung der Eltern – gesagt, dass das Arbeitsheft E höchstens in einem „Extra-Kurs zur Förderung besonders begabter Schüler“ verwendet und „für den Grundkurs entbehrlich“ sei; dazu, inwiefern die Inhalte des Elternhefts mit den Ansichten von Fricke und Besuden übereinstimmen bzw. diese Einfluss genommen haben, kann hier keine Aussage getroffen werden, es handelt sich jedoch an Stellen wie dieser um eine Quelle, die Rückschlüsse auf Reaktionen aus der Elternschaft zulässt.
911. Fricke & Besuden, B, S. XVII.
912. vgl. für das Folgende Fricke & Besuden, B, S. VI-IX.

strukturiert, je eindeutig bestimmbar und dadurch gut zur Teilmengenbildung und für die Durchführung der Mengenoperationen geeignet. Die Winkelplättchen sind teilstrukturiert, d. h. jedes der Objekte, die über eine bestimmte Merkmalskombination verfügen, ist mehrfach vorhanden, damit zwar genau, aber nicht eindeutig beschreibbar; es können damit Abbildungen aller Art dargestellt werden. Die Cuisenaire-Stäbe umfassen gleich zwei Sorten von Material. Die Einerklötzchen können als homogenes Material verwendet werden, zur Herstellung von Mengen aus nicht-unterscheidbaren Elementen, deren Bildung auf einer Äquivalenzrelation beruht. Die Stäbe dienen dagegen als spezielles „Material für den Rechenlehrgang", an dem nicht nur Lösungen ermittelt, sondern vor allem gesetzmäßige Eigenschaften und Beziehungen erkannt werden können. Als fünfte Kategorie nennen Fricke und Besuden Material für den Geometrieunterricht, mit dem gebaut, gelegt und an dem sich Symmetrien auffinden lassen. In ihrem Lehrgang fallen darunter alle Materialien der *Formen und Stäbe.* Die Formenplättchen verzichten bewusst auf eine größere Anzahl an Eigenschaften, um nicht unübersichtlich zu werden. Dass ihnen eine weit geringere Bedeutung zukommt als den vergleichbaren Plättchen oder Klötzen bei z. B. Dienes, ergibt sich bereits aus der Konzeption des Lehrgangs. Die Winkelplättchen scheinen in dieser Form speziell für *Mathematik in der Grundschule* entwickelt worden zu sein.

Die größte Rolle spielen unbestritten die Cuisenaire-Stäbe. Als Modell für die Zahlen sind diese leistungsfähiger als Dingmengen. Das Mengenmodell wird nicht abgelehnt – es wird ja im Lehrgang selbst genutzt –, aber seine Möglichkeiten sind begrenzt, z. B. wenn es um die Darstellung großer Zahlen geht, um die breite Fundierung des Zahlbegriffs durch Berücksichtigung verschiedener Zahlaspekte oder um strukturelle Einsichten, die vom konkreten Beispiel unabhängig sind.[913] Die Stäbe dagegen vereinen die drei wesentlichen Zahlaspekte – kardinal, ordinal, Operator – in sich[914], die Kardinalität durch die Umtauschbarkeit in die Einerwürfel, die Ordnung im einfachen Herstellen einer Reihenfolge aufgrund von Längenvergleichen und den Operatoraspekt z. B. bei der Darstellung multiplikativer Zusammenhänge, wenn ein Stab anzeigt, wie oft ein anderer vervielfacht werden soll. Das Fehlen von Einkerbungen für die einzelnen Einheiten wird insofern als besonderer Vorteil gewertet[915], als die Aufmerksamkeit von der Frage nach Anzahlen auf die Betonung struktureller Zusammenhänge verschoben wird, etwa dadurch, dass Beziehungen als anzahlunabhängig und damit als allgemeingültig erkannt werden können. Die fehlende Einteilung begünstigt also den Modellcharakter der Stäbe,

913. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XIV; vgl. Besuden, Arbeitsmittel, S. 208 und 211 f.
914. vgl. Fricke & Besuden, B, S. VIII.
915. vgl. Fricke & Besuden, B, S. VIII; vgl. Besuden, Arbeitsmittel, S. 210.

zum einen für beliebige Zahlen, zum anderen für weitere Modelle. Sie werden so „ein Repräsentant höherer Art“.[916]

Es ist gerade diese Modelleigenschaft der farbigen Stäbe, die häufig zu Missverständnissen geführt hat, wie sie entstehen, „wenn man das Material als Veranschaulichungsmittel wertet, das für bestimmte Rechenvorgänge herangezogen wird, so als wenn diese in stereotype Handlungen mit Stäben übersetzt werden sollten, so daß man dann an bestimmten Gestalten mit den Augen etwas ablesen könnte.“[917] Als Rezipienten, die entsprechende Fehlvorstellungen offenbaren, nennt Besuden mit Breidenbach und Karaschewski zwei langjährige Vertreter der Volksschul-Rechenmethodik.[918] Es liegt nahe, dass es sich bei Besudens Modellbegriff um eine so vollkommen neue Idee handelt, dass sie aus der Tradition der Nutzung von Veranschaulichungen zur Abstraktion, die ihrerseits auf den Theorien einer sensualistischen Psychologie beruht, überhaupt nicht ohne Weiteres verständlich war.

Es gibt zusätzlich eine vergrößerte Ausgabe der Stäbe, die an der Tuch- oder Klettentafel haften und der Demonstration für die gesamte Klasse dienen.

Neben den *Formen und Stäben* werden noch weitere begleitende Materialien empfohlen.[919] Symbolkarten und Spielpläne, welche auch bereits das Arbeitsheft an mehreren Stellen bereithält, erweitern als Ergänzung des Lehrwerks die Handlungsoptionen; mit der Spielesammlung von *Ravensburger*, die bekannte Gesellschaftsspiele wie Memory und Domino enthält und von den Kindern bei Gelegenheit selbstständig genutzt werden soll, werden neben fachlichen auch soziale Ziele verfolgt.

Fricke und Besuden beschreiben beispielhaft, wie eine Unterrichtseinheit aus ihrem Lehrgang methodisch ablaufen könnte. Als Einstieg wird die Betrachtung einer ikonischen Darstellung im Grundbuch vorgeschlagen, die die Schülerinnen und Schüler nachvollziehen und beschreiben sollen. „Aus diesen Tätigkeiten entwickeln sich dann die ersten Aufgabenstellungen im Grundbuch“, die im Anschluss von der gesamten Klasse bearbeitet werden. Übergänge zu neuen Einheiten sollen ebenfalls stets mit allen gemeinsam gestaltet und so insgesamt „ein Auseinanderfallen der Klasse verhindert“ werden. Während der Arbeitsphasen leistet die Lehrkraft Hilfestellung; die individuelle Nutzung von Aufgaben des Erweiterungskurses nach Beendigung der gemeinsamen Aufgaben ist an dieser Stelle möglich.

916. Besuden, Mehr-Modell-Methoden, S. 555; vgl. Fricke & Besuden, B, S. L27; vgl. Besuden, Arbeitsmittel, S. 209.
917. Besuden, Farbige Stäbe, S. 170; vgl. ebenda, S. 161 f. und 166.
918. Besuden, Farbige Stäbe, S. 161; vgl. Breidenbach, Walter: Die Rechenstäbe von Cuisenaire, in: Die Deutsche Schule 61 (1969), 10, S. 620-626.
919. vgl. Fricke & Besuden, B, S. IX-XI.

Trotz der hier beschriebenen eher konventionellen Unterrichtsorganisation soll u. a. mit der möglichst häufigen Wahl kooperativer Sozialformen und den Spielen im Klassenraum ein „neues Klima geschaffen“ werden[920]. Auswendig gelernt werden soll dagegen nur das nötigste, „vieles im modernen Anfangsmathematikunterricht ist Sammeln von Erfahrungen, spielerisches Tun, experimenteller Umgang“[921] und all das mit „eine[r] fragendforschende[n] Einstellung den mathematischen Objekten gegenüber“[922].

Umsetzung und Rezeption

Die Ausgabe B von *Mathematik in der Grundschule* wurde zwar inhaltlich an die neuen curricularen Richtlinien angepasst und damit stark verändert, das grundlegende Konzept der operativen Methode und der Arbeit am Modell der farbigen Stäbe ist aber aus Ausgabe A übernommen worden, und es gibt zahlreiche Überschneidungen im numerischen Teil zwischen den Ausgaben. Dass dieser Kurs bereits über vier Jahrgänge u. a. in „Versuchsklassen“ eingesetzt wurde, spricht für eine generelle Umsetzbarkeit zumindest des arithmetischen Teils. Fricke und Besuden sprechen selbst auch von den „bewährten didaktischen Grundsätzen[, an denen] festgehalten wird.“[923]

Die Verfasser geben eine Liste an praktischen Hinweisen, um die Umsetzung des Lehrgangs in ihrem Sinne zu unterstützen und dem Lehrpersonal Hilfen an die Hand zu geben.[924] Möglicherweise sind einige der Hinweise aus vorherigen Unterrichtsbeobachtungen entstanden, in dem Fall würden sie Rückschlüsse auf die Unterrichtspraxis erlauben. Hierzu zählen die Bemerkungen, dass die Lehrkraft möglichst wenig selbst reden, stattdessen die Schülerinnen und Schüler „zum Sprechen anregen“ soll und die Kinder wiederum so viel wie möglich selbstständig tätig werden sollen. Es zeigt sich hier zumindest die Befürchtung, dass der traditionell hohe Redeanteil von Lehrpersonen im Unterricht, der sich nicht mit der Forderung nach umfangreicher Selbsttätigkeit der Kinder verträgt, ein Hindernis für die Umsetzung im Sinne des Konzepts darstellen könnte. Eine vergleichbare Interpretation lässt der ausdrückliche Hinweis zu, das Cuisenaire-Tafel-Material sei „nicht zum Vormachen und Nachmachen gedacht“.[925] Auf die Missverständnisse bezüglich des Einsatzes der farbigen Stäbe wurde bereits eingegangen. In beiden Fällen scheinen methodische Traditionen eine wesentliche Ursache für antizipierte Schwierigkeiten

920. Fricke & Besuden, B, S. XVII; vgl. ebenda, S. XVII f. und L2.
921. Fricke & Besuden, B, S. XVII.
922. Fricke & Besuden, B, S. IV.
923. Fricke & Besuden, B, S. IV.
924. vgl. Fricke & Besuden, B, S. XVII.
925. Fricke & Besuden, B, S. IX.

bei der Realisierung des Lehrgangs zu sein, sowohl auf Seiten des Lehrpersonals wie auf Seiten der Methodiker.

Weitere von anderer Seite erwartete Probleme werden aus einem Artikel von Besuden offenbar, in dem er auf entsprechende Fragen eingeht. Es geht dabei hauptsächlich um den praktischen Einsatz der Stäbe, z. B. um die Frage, inwiefern Farbenblindheit ein Nachteil ist oder eine enge Kopplung zwischen Zahl und Farbe zu erwarten ist. Besuden weist diese Befürchtungen zurück; die Farben der Stäbe seien nicht notwendig für den verständigen Umgang mit ihnen, und wenn strukturelle Beziehungen im Vordergrund stünden, sei auch eine zu enge Verknüpfung von Stabfarbe und Zahl nicht zu erwarten. Zumindest Letzteres trifft nicht zu, tatsächlich ist die Assoziation zwischen Zahl und Farbe häufig die erste spontane Erinnerung ehemals mit den Stäben unterrichteter Schülerinnen und Schüler.[926] Es gibt jedoch keinen Grund anzunehmen, dass das Mathematiklernen hierdurch in irgendeiner Form beeinträchtigt gewesen wäre, schließlich handelt es sich bei der Farbe lediglich um eine zusätzliche symbolische Repräsentation der Zahlen.

Die Überarbeitungen im Zuge der Neuausgabe C von 1977 geben Rückschluss darauf, welche Art von ***Schwierigkeiten*** bei der Arbeit mit der Ausgabe B von *Mathematik in der Grundschule* in der Praxis am ehesten aufgetreten ist. Zum einen scheint der Anspruch an die Schülerinnen und Schüler in einigen Teilen zu hoch gewesen zu sein, z. B. durch das Fehlen von Routineaufgaben[927], auch in den Übungsheften. Zum anderen verfolgen die Änderungen das Ziel einer höheren Praktikabilität und einer stärkeren Aktivierung der Eigentätigkeit der Kinder. Offenbar fehlten hier methodische Vorschläge, die über den Umgang mit den Aufgaben im Buch hinausgehen, die entsprechenden Hinweise zu den Buchseiten (C = Methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung) wurden nämlich erheblich erweitert und diese Ergänzungen sogar vorab in einem Zusatzheft zur Ausgabe B herausgegeben.[928] Die Aufgabentexte waren für Schulanfängerinnen und -anfänger i. A. noch nicht lesbar, weshalb sie später durch Anmerkungen für Lehrkräfte und Eltern ersetzt wurden. Die Geometrie als geschlossener Block im Grundbuch habe sich als „weniger wirksam“ erwiesen.[929] Es ist wohl davon auszugehen, dass der Anspruch, die Lehrerschaft möge selbst über Reihenfolge und Zeitpunkt des sinnvollen Einsatzes der geometrischen Einheiten entscheiden, zu hoch war. Man kann

926. Nach der Erfahrung der Verfasserin aus persönlichen Gesprächen.
927. Es heißt dazu, es gebe jetzt „weniger verschiedene Aufgabentypen auf einer Seite“, Fricke & Besuden, C, S. III.
928. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Teildruck des Lehrerbands: Erweiterung der C-Teile, Stuttgart: Klett, 1975; offenbar sollte es eine 2. Auflage des Lehrerbandes zur Ausgabe B geben, für die dieses Heft Teildruck war; ob diese Neuauflage jemals erschienen ist, ist jedoch unklar, sie konnte nicht gefunden werden.
929. Fricke & Besuden, C, S. III.

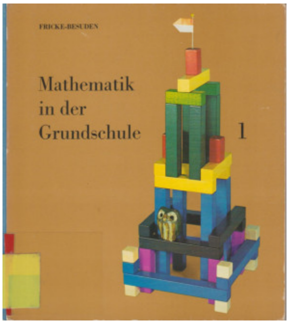
daher annehmen, dass die Geometrie eher am Stück wie im Buch, ohne Verknüpfung zu den anderen Inhalten unterrichtet wurde oder gleich ganz weggelassen wurde. Das Arbeitsheft für den Erweiterungskurs wurde in der Ausgabe C durch einen Stützkurs zur Förderung ersetzt; es kam wohl kaum zum Einsatz, während Übungsmaterial zur Differenzierung für Leistungsschwächere notwendig gewesen wäre, ein weiterer Hinweis auf den z. T. zu hohen Anspruch, den der Lehrgang B an die Kinder gestellt hat.[930]

Über den Umgang mit dem Konzept von Fricke und Besuden hinaus gibt *Mathematik in der Grundschule* Einblick in den Reformverlauf im Allgemeinen. So sei die Reform zunächst vorwiegend „inhaltlicher Art“ gewesen, wobei die „anfängliche Überbewertung der „Mengenlehre““ bei „weitgehende[r] Beschränkung der Arithmetik“ als – in der Zwischenzeit z. T. korrigierte – „Fehlinterpretation“ bezeichnet wird.[931] Das würde bedeuten, dass – ohne dass dies von einer höheren Ebene intendiert gewesen wäre – ein Teil der ursprünglichen Ideen im Laufe der verschiedenen Rekontextualisierungsprozesse verloren gegangen wäre, der einzelne inhaltliche Aspekt der Aufnahme des Mengenbegriffs dafür auf einer tieferen Ebene eine Dominanz gewonnen hätte, die so nicht angelegt war. Die speziell für die Eltern formulierte Feststellung, es sei ein „weitverbreiteter Irrtum [...], daß die moderne Mathematik gleichbedeutend sei mit der Mengenlehre“ und „ohne Rechnen auskommen [wolle]“[932], geht in die gleiche Richtung, und in der Tat gibt es unzählige Quellen, die den Eindruck stützen, in der öffentlichen Wahrnehmung sei das Rechnen nicht durch Mathematik, sondern durch Mengenlehre ersetzt worden.[933]

Die Eltern waren ihrerseits offenbar gewohnt, ihre Kinder umfangreich bei den Hausaufgaben zu unterstützen. Sowohl im Lehrer- wie im Elternbuch – dort sogar in Fettdruck hervorgehoben – wird betont, dass die Eltern den Unterricht nicht zuhause fortsetzen und auch nicht „zu viel Hilfestellung bei den Hausaufgaben leisten“ sollen.[934] Geht man davon aus, dass viele Eltern dies trotzdem vorhatten, erklärt sich angesichts des vermeintlich neuen Schulfachs ein Teil der heftigen Reaktionen in der Gesellschaft der Bundesrepublik.

930. Es kann indes nicht ausgeschlossen werden, dass der Anspruch auch an die Lehrkräfte, möglicherweise sogar besonders an diese, nicht unerheblich war.
931. Fricke & Besuden, B, S. IV, und Besuden, Aufgabe der Geometrie, S. 217.
932. Hermann, a. a. O., S. 5 und 8.
933. vgl. exemplarisch Lauter & Röhrl, a. a. O., insbesondere S. 11 und 15-17.
934. Hermann, a. a. O., S. 14; Fricke & Besuden, B, S. XVII.

Mathematik in der Grundschule 1. Operatives Rechnen mit farbigen Stäben, 1967



Es ist bereits auf Parallelen zwischen den Ausgaben A und B hingewiesen worden und auch auf die mögliche Bedeutung der Tradition des Rechenunterrichts für Schwierigkeiten bei der Umsetzung der Reform. Der rückblickende Vergleich zur ersten Ausgabe kann hier weiteren Aufschluss geben, weshalb er an dieser Stelle eingeschoben wird, bevor im Anschluss die Ausgaben C und D näher betrachtet werden.

Die Ausgabe A besteht aus einem Schülerbuch, einem Lehrerheft mit notwendigen Erläuterungen, ohne die das Schülerbuch nicht verständlich ist, und einem Übungsheft[935], das zusätzliche Aufgaben für den numerischen Kurs bereithält. Fricke und Besuden begründen ihren neuen Zugang, mit dem ihrer eigenen Aussage nach „neue Wege beschritten werden, die vom Herkömmlichen stark abweichen", mit der notwendigen Anpassung an die bereits begonnene Reformentwicklung an den weiterführenden Schulen und noch allgemeiner damit, „daß der Rechenunterricht kein vom mathematischen Unterricht getrenntes Dasein führen kann, daß vielmehr der Rechenunterricht von der ersten Stunde des ersten Schuljahres an ein mathematischer Unterricht sein soll", denn ohnehin beschreiben sie die Trennung von Rechen- und Mathematikunterricht als etwas nicht aus sachlichen, sondern aus rein historischen Gründen Gegebenes. Ziel ist also die „Integration des Rechenunterrichts in den gesamten mathematischen Unterricht", wodurch von Anfang an Grundlagen gelegt werden sollen, die jedoch weniger inhaltlicher Art sind, sondern vor allem „Haltung und Einstellung" berühren. Sie implizieren hier also die Idee eines einheitlichen Curriculums selbst vor dem Hintergrund eines rein arithmetischen Anfangsunterrichts. Die Erkenntnisse Piagets sind erwartungsgemäß ein weiterer Anstoß für die Überzeugung, dass Neuerungen vor allem auf didaktisch-methodischer Ebene unumgänglich sind und dass die ***operative Methode*** mit ihrer mehrdimensionalen Vernetzung geeignet ist, den bisher noch üblichen, offenbar vorwiegend durch behavioristische Reiz-Reaktions-Schemata gekennzeichneten, linearen Unterricht abzulösen.[936]

Inhaltlich handelt es sich bei der ersten Ausgabe von *Mathematik in der Grundschule* um ein Buch für den Rechenunterricht, also ein Arithmetikbuch, das Zahlen und Rechenoperationen (Addition, Subtraktion und erste Multiplikation) im

935. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Klett-Übungsheft, Stuttgart: Klett, 1967.
936. vgl. Fricke & Besuden, A, S. 5 f., Zitate: ebenda.

Zahlenraum bis 100 behandelt. Die Bedeutung des Rechnens wird nicht in Frage gestellt, aber ein Stück weit relativiert durch die Aussage, dass der Lernprozess wichtiger sei als die konkreten Inhalte.[937] Implizit sind weitere mathematische Begriffe, die nicht unmittelbar aus der Arithmetik stammen, dennoch enthalten, auch Ausgabe A ist nämlich bereits in einen pränumerischen und einen numerischen Kurs geteilt. Der ***pränumerische Kurs*** soll sicherstellen, dass die notwendigen Dispositionen, die Voraussetzung für den Erwerb des Zahlbegriffs sind, zum Zeitpunkt der Zahleinführung bei allen Kindern gleichermaßen vorhanden sind. Es handelt sich hier um Erfahrungen im Umgang mit Mengen und Relationen, wie es den Theorien von Piaget entspricht. Das Material, an dem diese Erfahrungen und Einsichten gewonnen werden, sind ausschließlich die ***Cuisenaire-Stäbe***, welche für jedes einzelne Kind zur Verfügung stehen sollen. Mit der Einschränkung auf nur ein Material hebt sich der Lehrgang wiederum von der sonst üblichen Methodik ab, in der Wert auf die Nutzung aller drei Repräsentationsformen gelegt wurde, die dabei enaktiv genutzten verschiedenen Dinge aber häufig nur einem Modell entsprechen.[938] Ein weiterer Unterschied zur herkömmlichen Rechenmethodik zeigt sich in der Rolle der Rechengeschichte, von der es heißt, sie „verliert [. . .] als Einstieg und Motivation vom numerischen Teil ab immer mehr an Bedeutung“[939]; begründet wird dies mit dem geringen didaktischen Mehrwert eingekleideter Aufgaben. Der pränumerische Kurs beginnt mit Bau- und Legetätigkeiten mit den Stäben, damit die Kinder mit dem Material vertraut werden, und umfasst im Folgenden u. a. Übungen zum Erkennen der Mengeninvarianz, den Vergleich von Mengen über Würfel und Stäbe, das Herstellen von Ordnungen, das Verdoppeln und Halbieren an den Stäben, Mengenoperationen sowie die Vorbereitung der Gesetzmäßigkeiten von Addition und Subtraktion ebenfalls an den Stäben, mittels Ersetzen und Vertauschen.[940]

Die ***Zahleinführung*** erfolgt kardinal, indem die Stäbe als Repräsentanten für Mengen interpretiert werden. Sie beginnt mit den Zahlen 1-4 und wird dann bis zur 10 in Zweierschritten fortgeführt, ausgehend jeweils von der Operation des Verdoppelns.[941] Jede Zahl wird gemeinsam mit all ihren additiven Zerlegungen eingeführt, die als symbolische Gleichungen aufgeschrieben werden; die ungeraden

937. Fricke & Besuden, A, S. 6.
938. vgl. Fricke & Besuden, A, S. 12.
939. Fricke & Besuden, A, S. 16; vgl. ebenda, S. 58.
940. vgl. u. a. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Operatives Rechnen mit farbigen Stäben; erstes Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1967, S. I 4-6, I 10, I 21, I 24, I 34 [im Folgenden ebenfalls: Fricke & Besuden, A]; Hinweis zur Zitation: Die Seitenzählung beginnt im numerischen Teil erneut bei 1, Seitenzahlen der Form I XX bezeichnen daher hier Seiten des pränumerischen Kurses, Seitenzahlen der Form II XX solche des numerischen Kurses, ob Schüler- oder Lehrerband zitiert wird, ergibt sich damit ebenfalls aus dem jeweiligen Format der Seitenzahl.
941. vgl. Fricke & Besuden, A, S. II 1-5.

Zahlen treten wiederum im Laufe der Zerlegungen auf und werden über Vergleich mit den Nachbarzahlen gewonnen. Die Erweiterung des Zahlenraums bis 20 geht erneut vom Verdoppeln aus. Noch vor der Ordnung der Zahlen nach ihrer ordinalen Reihenfolge (inklusive der Symbole $<$ und $>$) und dem Zählen werden Eigenschaften der Zahlen und ihrer Zerlegungen betont; das Rechnen als ein dynamischer Prozess – im Gegensatz zum zunächst rein statischen Zerlegen – wird erst danach eingeführt.[942] Bereits bis hierhin wird deutlich, wie viel aus dem ursprünglichen Unterrichtswerk den Weg in die Ausgabe B geschafft hat: die Fundierung des Zahlbegriffs in einem pränumerischen Kursteil, die Nutzung der Stäbe zum Mengenvergleich über die Einerwürfel als Zwischenstufe, die pränumerische Vorbereitung arithmetischer Gesetzmäßigkeiten, die besondere Bedeutung des Verdoppelns und Halbierens sowie insgesamt Art und Ablauf der Zahleinführung, die Zurückstellung des Zählens und die geringe Bedeutung des Sachrechnens. Noch augenfälliger werden die Gemeinsamkeiten auf den Seiten zum operativen Rechnen. Grund-, Nachbar-, Probe- und Tauschaufgaben sowie das Rechnen an Treppen zur Einsicht in strukturelle Zusammenhänge, operative Beziehungen und funktionale Abhängigkeiten bilden bereits in der Ausgabe von 1967 einen wesentlichen Kern des Lehrgangs.[943] Es sind gerade diese Teile, die an vielen Stellen weitgehend unverändert in die Ausgabe B übernommen wurden. Als entscheidender Unterschied zwischen den Ausgaben erweist sich mithin die Aufnahme neuer Inhalte, z. B. der gesamten Geometrie, damit unmittelbar zusammenhängender neuer Materialien sowie diverser neuer Darstellungen, z. B. Mengendarstellungen, Pfeildiagramme und das Maschinen-Modell.

Die Neue Mathematik wurde häufig als schwerpunktmäßig curriculare Reform beschrieben und kritisiert. *Mathematik in der Grundschule* zeigt, dass wesentliche Reformaspekte, die den Anfangsunterricht betreffen, wie die Einführung eines pränumerischen Vorkurses, die Rückstellung des Zählens, die ausgiebige Nutzung didaktischer Materialien, die Orientierung an Strukturen oder die vergleichsweise geringe Bedeutung des Sachrechnens unabhängig von Richtlinien zur „Mengenlehre“ ihren Weg in unterrichtliche Konzepte gefunden haben. Für die inhaltliche Ausrichtung der Reform hingegen waren die Lehrpläne von größerer Bedeutung.

Es finden sich diverse Hinweise zur methodischen Ausrichtung des Rechenunterrichts zum Ausgang der Reform, der gekennzeichnet war durch eine feste Stufenfolge der Erarbeitung neuer Begriffe und Verfahren, den synthetischen Aufbau des Zahlbegriffs (d. h. den Aufbau aus Einheiten) und das Auswendiglernen von Rechensätzen. Diese Methoden zehrten seinerzeit von einer langen Tradition, die nahezu ungebrochen fortbestand, für die Inhalte gilt das gleiche: der „festgefügte[]

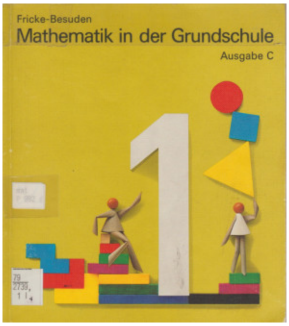
942. vgl. Fricke & Besuden, A, S. II 10-12.
943. vgl. Fricke & Besuden, A, S. 14-21 und 23.

Kanon von Unterrichtsstoffen [. . .] scheint nahezu axiomatischen Charakter zu haben“.[944] Angesichts dieser Feststellung lag im curricular bedingten Teil mutmaßlich eine in der Tat revolutionäre Neuerung. Für den methodischen Teil galt allerdings augenscheinlich Ähnliches, es lässt sich vor diesem Hintergrund vermuten, dass die Umsetzung des Kurses von Fricke und Besuden in der Praxis bereits mit der ersten Ausgabe auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten stieß, zumindest sofern es sich nicht um spezielle Versuchsklassen gehandelt hat. In jedem Fall muss die beschriebene Ausgangssituation für eine historische Beurteilung der „Mengenlehre“ berücksichtigt werden.

Es überrascht, dass trotz der inhaltlich so stark veränderten Richtlinien die Ausgabe A auch nach Erscheinen der Ausgabe B weiterhin lieferbar gewesen sein soll.[945] Allerdings erschien 1970 ein ergänzendes Heft mit Informationen zu Mengen und Algebra, in dem dargelegt wird, wie das Lehrwerk in Übereinstimmung mit den neuen Lehrplänen eingesetzt werden kann. Dies sollte möglich sein, da die neuen Begriffe im Wesentlichen bereits in *Mathematik in der Grundschule* enthalten sind, allerdings nur implizit. Sie müssen also expliziert und der Lehrgang ergänzt werden. Zusatzmaterial sei bereits erschienen oder in Vorbereitung.[946] Im Heft selbst werden konkrete Beispiele zur Ergänzung gegeben, diese enthalten allerdings einen sachlichen Fehler.[947]

944. Fricke & Besuden, A, S. 5; vgl. ebenda, S. 6.
945. Fricke & Besuden, B, S. [II]
946. Bergmann, H.: Mathematik in der Grundschule 1. Information 1: Mengenalgebra und Aussagenlogik im 1. Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1970, S. 3; zur Ergänzung wird verwiesen auf Stübe, Rudolf: Ordnungsoperationen in der Grundschule, Stuttgart: Klett, 1970 sowie die zugehörigen Reihenblöcke, ein Material, das zum Legen verschiedener Folgen geeignet ist.
947. Bergmann, a. a. O., S. 6 f.; dort werden eine Menge der „Pakete mit nicht gelben Kisten“ und eine Menge der „Pakete mit gelben Kisten“ als Beispiel für zwei disjunkte Mengen gegeben; ein Paket mit z. B. 3 roten und 2 gelben Kisten würde aber offenkundig beiden Mengen angehören.

Mathematik für die Grundschule 1, Ausgabe C, Regionalausgabe 1, 1977



Die Ausgabe C besteht wie B aus einem Lehrerband, einem Grundbuch für die Schülerinnen und Schüler, einem zweiteiligen Übungsheft für alle sowie einem zusätzlichen Übungsheft, das jetzt der Förderung dient.[948] Als Gründe für die Neubearbeitung nennen Fricke und Besuden neben den praktischen Erfahrungen auch die z. T. geänderten Lehrpläne in Folge der neuen KMK-Richtlinien von 1976[949]. Ihre didaktische Grundkonzeption bleibt aber gleich, die ***operative Methode*** ist nach wie vor maßgeblich für die Anordnung, Behandlung und – soweit möglich – Auswahl der Inhalte. Der Umfang der Neuerungen ist vergleichsweise gering[950], und betrifft vorwiegend die inhaltliche Gliederung sowie einige **methodische Aspekte**. Die Neugestaltung der C-Teile (also der methodischen Hinweise) im Lehrerkommentar des Lehrerbandes wurde bereits angesprochen. Neu sind hier konkrete Vorschläge dazu, wie ein neues Thema unabhängig vom Buch und unter Sicherung größtmöglicher Aktivität der Schülerinnen und Schüler eingeführt werden kann, während dieser Teil in Ausgabe B auf die Erläuterung der Aufgaben in Grundbuch und Arbeitsheften beschränkt geblieben ist. Das Buch war daher als Medium im Unterricht wohl sehr dominant. Beispiele für solche Vorschläge sind, zur Einführung des Baumdiagramms den Klassenraum zu verlassen und gemeinsam draußen eine Weggabelung aufzusuchen oder die Operatormaschinen als Kästen zu bauen und enaktiv zu nutzen.[951] Ebenfalls neu hinzugekommen sind zum Lehrerkommentar im numerischen Kursteil mögliche Wiederholungsaufgaben, die jeweils passend eingesetzt werden können. Es passt dazu, dass auch ins Grundbuch einige Seiten zum ***Üben*** neu aufgenommen wurden. Es handelt sich dabei um Seiten mit zusätzlichem Übungsmaterial in verschiedenen Aufgabenformaten, wie Zauberquadrate, Zahlengitter oder auch Zahlenfolgen, und eine Seite mit Material, aus dem flexibel weitere Übungsaufgaben generiert werden können.[952] Es ist also festzuhalten, dass hier Wert nicht nur

948. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Übungsheft Teil 1 und 2, Stuttgart: Klett, 1977; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Zusatzheft (Stützkurs), Stuttgart: Klett, 1977; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Grundbuch, Stuttgart: Klett, 1977.
949. Fricke & Besuden sprechen in C, S. III von den KMK-Richtlinien von 1977; nach Müller & Wittmann, 1977, S. 159, handelt es sich dabei jedoch um einen Beschluss vom 3.12.1976.
950. vgl. Fricke & Besuden, C, S. III: an der „Gesamtkonzeption hat sich dagegen nichts geändert".
951. vgl. Fricke & Besuden, C, S. L63 und L66.
952. vgl. Fricke & Besuden, C, S. 92, 93 und 96.

auf eine größere Fülle an Aufgaben gelegt wurde, sondern auf Abwechslungsreichtum und die Eignung des Übungsmaterials zur Gewinnung weiterer struktureller Einsichten. Die zum Lehrgang gehörigen Materialien sind gleichgeblieben, ihre Erläuterungen im Wesentlichen auch, allerdings wurde der Abschnitt zu den farbigen Stäben gekürzt. Möglicherweise waren diese inzwischen als Unterrichtsmaterial so bekannt, dass kürzere Erläuterungen genügten. Andererseits entspricht die Kürzung womöglich auch der leicht zurückgenommenen Dominanz der Stäbe in den Darstellungen im Grundbuch, wo sie z. T. durch Darstellungen an „strukturierten Punktfeldern ergänzt" bzw. ersetzt worden sind.[953]

Im Hinblick auf die Darstellungen fällt zudem auf, dass auf der symbolischen Ebene auf den Mal-Punkt verzichtet wird und damit auch auf die Bruchdarstellung „$\frac{1}{2}\cdot$" für „die Hälfte von". Diese Änderung beruht jedoch keineswegs auf einer sachlich begründeten Entscheidung oder auf Schwierigkeiten, die beobachtet worden wären, sondern allein auf curricularen Festlegungen, da die Lehrpläne der Länder die Nutzung dieses Symbols im 1. Schuljahr nicht zulassen.[954] Es handelt sich hier vordergründig um eine Marginalie, die aber beispielhaft dafür steht, wie politische Entscheidungen gegen die Überzeugung der Didaktiker Einfluss auf die Ausformung der Konzepte genommen haben. Es lässt sich hierin aber außerdem ein Beleg sehen für ein gesellschaftlich tief verankertes Misstrauen gegenüber der Mathematik und ihrer Symbolik sowie der Angst vor einer Überforderung der Kinder durch die mathematische Sprache, die – zumindest in diesem Fall – offenkundig völlig unbegründet war.[955] Dass das Arbeitsheft zur ***Differenzierung*** nach oben durch eines zur Differenzierung nach unten, nämlich durch ein „Zusatzheft zur Förderung schwacher Schüler"[956] ersetzt wurde, ist aber wohl nicht vor diesem Hintergrund zu sehen, denn in der Tat muss das Fehlen von Hilfen für leistungsschwächere Kinder in Ausgabe B als ein Mangel gesehen werden. Eine Differenzierung für leistungsstärkere Kinder ist überdies nach wie vor eingeplant, schwierigere Aufgaben im Übungsheft[957] sind zu diesem Zweck mit einem Eulensymbol gekennzeichnet, das aus Ausgabe A wieder aufgenommen wurde.

Die ***inhaltliche Neugliederung*** rührt zu einem guten Teil daher, dass die einzelnen Themen der Geometrie jetzt über den gesamten Lehrgang verteilt sind. Die

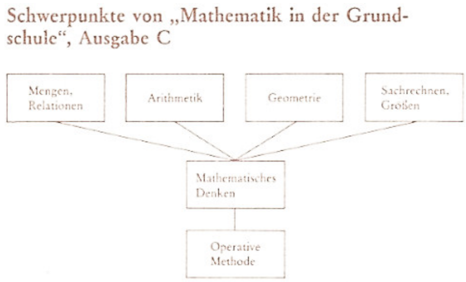
953. Fricke & Besuden, C, S. L37; vgl. Fricke & Besuden, B, S. 44 und C, S. 47.
954. vgl. Fricke & Besuden, C, S. III, L41, L75 sowie B, S. L78.1 und G78.
955. vgl. vor diesem Hintergrund auch die beschwichtigenden Worte an die Eltern bei Hermann, a. a. O., S. 14, dass der E-Kurs eigentlich gar nicht benötigt werde.
956. Fricke & Besuden, C, S. III.
957. Dass die Bezeichnung der Aufgabensammlung von „Arbeitsheft" wieder in „Übungsheft" geändert wurde, mag als eine unwesentliche Randnotiz erscheinen, lässt jedoch – besonders vor dem Hintergrund einiger obiger Feststellungen – Raum für Interpretationen, wenn man die Konnotationen der beiden Begriffe vergleicht: Die Kinder sollen nicht durch mühevolle Arbeit überfordert werden.

Aufteilung in 8 große thematische Kapitel, die jeweils in einzelne Einheiten unterteilt sind, ist der Aufteilung in 22 Einheiten gewichen.[958] Damit entfallen auch die inhaltlich-didaktischen Einführungen zu Anfang jedes Kapitels im Lehrerkommentar. Inhaltlich gehen damit aber nur geringe Änderungen einher, ein gewisser Teil dieser Abschnitte findet sich jetzt in den B-Teilen der Erläuterungen. Die zuvor nur für die Gesamtkapitel angegebene zeitliche Verteilung für die einzelnen Einheiten wird damit präziser. Die Vorgabe eines Minimal- und Erweiterungskurses wurde rausgenommen, ebenso das umfangreiche und in seiner Komplexität wohl eher verwirrende Diagramm über die einzelnen Inhalte sowie Teile des Glossars. Im Hinblick auf die Unterrichtspraxis ist es aufschlussreich, dass die praktischen Hinweise fast unverändert übernommen wurden, an einer Stelle aber um die zusätzliche Forderung ergänzt wurde, die Lehrkraft solle „[n]icht mehr als nötig vormachen“.[959] Offenbar gab es weiterhin Beobachtungen, nach denen die Umsetzung des Konzepts an zu starker Lehrerzentrierung krankte.

Zwei **Inhalte**, die völlig aus dem Grundbuch für das 1. Schuljahr verschwunden sind, aber auch in Ausgabe B nur in Ansätzen vorkamen, sind die Drehsymmetrie und Verkettungen. Die Begriffe stehen entsprechend auch nicht mehr im Glossar. Ebenfalls nicht mehr im Glossar erklärt sind Schnitt- und Vereinigungsmenge, Klasseneinteilung, Term, reflexiv, irreflexiv, symmetrisch (als Eigenschaft von Relationen, Äquivalenz- und Ordnungsrelationen werden entsprechend nicht mehr durch diese Begriffe definiert[960]) sowie die Unterscheidung von Abbildungen in und Abbildungen auf eine Menge. Die Reduktion der Begrifflichkeiten der ***Mengenlehre*** setzt sich auf den Seiten des Schülerbuchs fort. Sie entspricht zum einen der geringeren Bedeutung der Mengen in den neu gefassten KMK-Richtlinien, zum anderen kommt sie Fricke und Besuden entgegen, die einer zu umfangreichen Nutzung der Mengenterminologie ohnehin stets kritisch gegenüber standen. Andererseits stellen sie selbst fest, dass in ihren Abschnitten angesichts der neuen Curricula kaum Änderungen vonnöten waren, da den Mengen sowieso keine übermäßige Bedeutung zukam.[961] Die Mengenbegriffe, die für ihr Konzept weiterhin wichtig sind, sind auch noch enthalten. Das führt z. T. dazu, dass im Vorfeld nicht fachlich definierte Begriffe trotzdem an späteren Stellen auftreten oder zumindest implizit genutzt werden, z. B. auf den Seiten zu Relationen, bei Klasseneinteilungen, wenn die Kardinalzahl – noch im Glossar selbst – als eine Eigenschaft von Klassen definiert, die Negation ohne die Restmenge eingeführt oder im Kastendiagramm nach wie vor Mengen geschnitten und vereinigt werden.[962] Die explizite Warnung vor einem

958. vgl. Fricke & Besuden, C, S. XVIII.
959. Fricke & Besuden, C, S. XVII.
960. vgl. Fricke & Besuden, C, S. XX.
961. vgl. Fricke & Besuden, C, S. III und XII f.
962. vgl. Fricke & Besuden, C, S. XX, XXII, L11, L12 und L29, wo die Eigenschaften der Men-

„Mengenlehrekult“ ist in der Ausgabe von 1977 nicht mehr enthalten, sie wurde wohl nicht mehr für nötig befunden. Dafür ist der weitgehend neu geschriebene Mengenabschnitt im Einführungsteil nun um Ausführungen zu den Relationen ergänzt, was aufgrund des engen Zusammenhangs plausibel ist. Die Erläuterungen zu den Mengen selbst, deren Beschränkung hier erneut betont wird, werden ebenfalls ergänzt, und zwar um ihre Bedeutung für „Grundaktivitäten mathematischen Denkens“ wie Klassifizieren, Ordnen, Zuordnen oder Vergleichen[963], also Tätigkeiten, die auch im Alltagsdenken allgegenwärtig sind. Die Rolle der Mengenbegriffe geht mithin über die eines Mittels zur arithmetischen Grundlegung hinaus, es handelt sich hier vielmehr um relevante Begriffe für das Ziel des logischen – im Sinne eines schlüssigen – Denkens. Die inhaltlich angepassten Erläuterungen ziehen auch eine veränderte Bezeichnung des entsprechenden Inhaltsbereichs nach sich, der jetzt statt nur „Mengen“ folgerichtig „Mengen und Relationen“ heißt. Das ist nicht die einzige Veränderung am übergeordneten Inhaltsschema.[964] Die Topologie wird nicht mehr explizit erwähnt, der Inhaltsbereich „Sachrechnen, Größen“ ist ganz neu dazugekommen, Logik wird nicht mehr als eigener Bereich aufgeführt, sie geht stattdessen in dem weiteren den Inhalten übergeordneten Aspekt „Mathematisches Denken“ auf, wie diverse Parallelen in den Formulierungen zeigen. Dies ist vollkommen schlüssig angesichts der schon in Ausgabe B sehr allgemein gehaltenen Formulierungen.



Inhaltsübersicht im Lehrerband, S. IV

Das ***Sachrechnen*** nimmt einen etwas größeren Umfang ein.[965] Hauptsächliches Ziel ist hier nicht das Rechnen mit benannten Zahlen oder die reine Anwendung von Verfahren in eingekleideten Aufgaben, sondern eine Kompetenzorientierung hin zur Fähigkeit zu mathematisieren.

Der ***arithmetische Teil*** mit seinen spezifischen Aufgabentypen, der sich „seit Ausgabe A immer wieder bewährt“ habe[966], ist nahezu unverändert geblieben. Einige Teile sind neu sortiert (wie der Komplex zum (multiplikativen) Zerlegen und Bündeln), von einer auf zwei Seiten ausgedehnt (z. B. erhalten die Aufgaben

genvereinigung schließlich doch noch angegeben werden.
963. Fricke & Besuden, C, S. V.
964. vgl. Fricke & Besuden, C, S. IV f.
965. vgl. Fricke & Besuden, C, S. 94, die Seite ist neu gegenüber Ausgabe B.
966. Fricke & Besuden, C, S. IV.

mit $+2/-2$ jetzt eine eigene Seite) oder werden ausführlicher erläutert als zuvor (wie das Rechnen im Zahlenraum bis 20).[967]

Der ***Operatorbegriff*** ist wie gehabt grundlegend im arithmetischen Kurs. Der Abbildungsbegriff wird aber weniger allgemein behandelt, nicht-numerische Verknüpfungen sind nicht mehr Teil des Lehrgangs. Dafür wird der funktionale Zusammenhang bei den Nachbaraufgaben stärker betont, und Unterschiedsspiele sind als einfachere Form der Abbildungen neu aufgenommen worden.[968]

Die ***geometrischen Themen*** sind keineswegs beliebig über das Schuljahr verteilt worden, sondern so, dass sie besonders gut sinnvoll mit anderen Inhalten verknüpft werden können: die Symmetrie wird so direkt mit dem Verdoppeln verzahnt, Gebiete mit Venn-Diagrammen, das Begriffspaar innerhalb/außerhalb ebenso.[969] Mit der Neugliederung gehen diverse Änderungen einher, die hier nicht im Einzelnen aufgeführt werden brauchen; insgesamt kann festgehalten werden, dass die Ausführungen zur Geometrie im Hinblick auf die Ziele präzisiert und konkretisiert worden sind. Einige Inhalte, v. a. aus der Raumgeometrie wurden ins 2. Schuljahr verschoben, dafür wurde eine neue Einführungsseite gestaltet, über die an Bautätigkeiten zunächst grundlegendste Erfahrungen zu Bewegungen und Lagebeziehungen gesammelt werden sollen.[970] Es wird zudem auf eine neue Aufgabensammlung, „Geometrie mit Winkelplättchen", zur Ergänzung und Differenzierung verwiesen.[971]

Bemerkenswert erscheint noch, dass in der Auflistung verschiedener zusätzlicher Materialien wie Haftstreifen für die Tafel, Merkmalkärtchen oder Arbeitsunterlagen auch ein „Mathematisches Labor zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" aufgeführt wird[972]; es wird allerdings weder auf das Material noch auf den Inhalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung an irgendeiner späteren Stelle in den Bänden für das 1. Schuljahr eingegangen.

Es ist davon auszugehen, dass die Ausgabe C von *Mathematik in der Grundschule*, diejenige ist, auf die 1981 in der Umfrage von Radatz et. al. Bezug genommen wird. Das Unterrichtswerk erhält hier mit einer Gesamtnote von 3,33 von den Lehrkräften eine vergleichsweise schlechte Bewertung, die als relativ aussagekräf-

967. vgl. Fricke & Besuden, C, S. XVI, 56, 79-81 sowie B, S. 53.
968. vgl. Fricke & Besuden, C, S. XIII, 16 und 53.
969. vgl. Fricke & Besuden, C, S. III.
970. vgl. Fricke & Besuden, C, S. 73
971. vgl. Fricke & Besuden, C, S. VI und X; eine Aufgabensammlung unter entsprechendem Titel ist bis heute verfügbar, vgl. Besuden, Heinrich: Geometrie mit Winkelplättchen, Seelze-Velber: Friedrich, 2005.
972. Fricke & Besuden, C, S. XI.

tig angesehen werden muss, da immerhin fast ein Fünftel der Befragten mit den Büchern arbeiteten.[973]

Regionalausgabe 2

Es gibt eine weitere Version der Ausgabe C von *Mathematik in der Grundschule*, die Regionalausgabe 2, die ebenfalls im Jahr 1977 für die Länder Baden-Württemberg, Rheinland-Pfalz, Hessen und das Saarland erschienen ist[974], während Regionalausgabe 1 „vorwiegend für die Länder Niedersachsen, Bremen, Hamburg, und Schleswig-Holstein vorgesehen“[975] war. Für Bayern existiert zumindest eine eigene Ausgabe für das 4. Schuljahr, für das 1. konnte keine nachgewiesen werden, ebenso wenig für Nordrhein-Westfalen oder Berlin. Dass überhaupt unterschiedliche Ausgaben für die verschiedenen Länder erschienen sind, überrascht vor dem Hintergrund des Bildungsföderalismus nicht und ist auch aus späterer Zeit bekannt. Es handelt sich hier eher um einen Beleg dafür, wie unterschiedlich die Länder die KMK-Richtlinien besonders im Hinblick auf die Mengenlehre jeweils ausgelegt haben. Die Unterschiede zwischen den beiden Ausgaben sind erheblich.

Wie zu erwarten, schlagen sich die verschiedenen Vorgaben der Lehrpläne in inhaltlichen Veränderungen gegenüber der Regionalausgabe 1 nieder. Mengen und ihren Eigenschaften kommt ein höherer Stellenwert zu, Symmetrie wird dagegen nicht thematisiert; die Inhalte sind z. T. anders angeordnet, der Mal-Punkt wird hier nicht ausgeschlossen, die Zahlen werden bereits nach 8 statt erst nach 11 Wochen eingeführt. Es erstaunt schon eher, dass bei der Einführung der Zahlen von den üblichen Zweierschritten abgewichen wird. Die Zahlen 0-5 werden über Zuordnungen und Mengen eingeführt, 1-5 direkt im Anschluss geordnet, dann mit ihren Zerlegungen die Zahlen 6-10 einzeln eingeführt.[976] Die für das Unterrichtswerk so typischen operativen Grund-, Tausch- und Probeaufgaben nehmen weniger Raum ein, die Fundamentalbeziehung halb/doppelt hat geringere Bedeutung. Durch Differenzen in den curricularen Dokumenten aber letztlich gar nicht zu erklären sind die Unterschiede zwischen den Abbildungen in den Büchern. Ein guter Teil der Seiten mit gleichem Thema ist anders gestaltet. Zwar entsprechen die Fotos dem typischen Stil der Regionalausgabe 1, es sind aber häufig andere. Insgesamt sind es

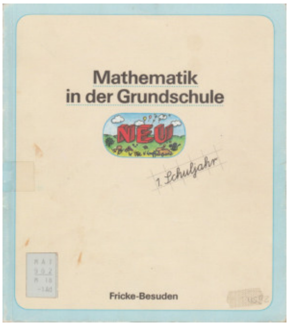
973. Radatz et. al., a. a. O., S. 10.
974. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 2. Grundbuch für das 1. Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1977 [im Folgenden: Fricke & Besuden, C2, Schüler]; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 2. Lehrerheft, Stuttgart: Klett, 1977 [im Folgenden: Fricke & Besuden, C2, Lehrer]; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 2. Übungsheft Teil 1, Stuttgart: Klett, 1977.
975. Fricke & Besuden, C, S. [II].
976. vgl. Fricke & Besuden, C2, Schüler, S. 25-29 und 35-40.

überhaupt nur 27 von 96 Seiten, auf denen sich die Abbildungen wenigstens stark ähneln, und selbst wo dies der Fall ist, sind die Hinweise zu den Aufgaben anders formuliert, so dass es letztlich keine Seite gibt, in der beide Ausgaben vollständig übereinstimmen.

Piktogramme im Grundbuch, die sich in keinem anderen Band der Reihe finden, dienen als Hinweis auf die gewünschte methodische Bearbeitung (schriftlich zu bearbeiten, mit Material zu legen, auf Folien zu bearbeiten). Der Lehrerkommentar ist um einen Teil D mit ergänzenden Hinweisen erweitert und vollständig neu geschrieben, ebenso gibt es in den Erläuterungen im Lehrerheft einen Absatz zu Lernzielkontrollen, auf die in allen anderen Ausgaben überhaupt nicht eingegangen wird.[977] Als Mitarbeiter werden im Grundbuch neben Fricke und Besuden W. Bentzinger und R. Künstler genannt, im Übungsheft H. G. Baumann und ebenfalls W. Bentzinger. Auch an der Regionalausgabe 1 waren neben A. Fricke und H. Besuden weitere Mitarbeiter beteiligt, es handelt sich aber hier um andere Namen. Die Regionalausgabe 2 fällt aus dem Rahmen der Reihe, in der es sonst zahlreiche Kontinuitäten über die Ausgaben A-D hinweg gibt. Es hat den Anschein, dass Fricke und Besuden diese Ausgabe weitestgehend aus der eigenen Hand gegeben haben, und es ist fraglich, inwiefern sie überhaupt Einfluss genommen haben. So überraschend diese Erkenntnis auch sein mag, so ist sie gleichzeitig der Grund, weshalb auf diese Ausgabe hier nicht weiter eingegangen wird, und lediglich noch erwähnt sein soll, dass die methodische Forderung – und damit womöglich erneut ein Hinweis auf zeitgenössische Unterrichtspraxis – enthalten ist, es sei „jede Form von Drill zu vermeiden“.[978]

977. vgl. Fricke & Besuden, C2, Lehrer, S. 11-13.
978. Fricke & Besuden, C2, Lehrer, S. 14.

Mathematik in der Grundschule. Neu, 1. Schuljahr, 1984/1985



1984 erschien eine weitere und gleichzeitig die letzte Neuausgabe von *Mathematik in der Grundschule*; die Reihe wurde nach dem Tod Arnold Frickes 1986 eingestellt. Sie umfasst ein Schülerbuch, einen Lehrerband und ein Übungsheft[979], welches jetzt nicht mehr zweigeteilt ist. ein Zusatzheft zur Differenzierung gibt es nicht mehr. Das bedeutet sicher nicht, dass sich der Umfang an Übungsmaterial insgesamt verringert hat, der Wunsch von Lehrkräften nach mehr Gelegenheiten zum Üben und Wiederholen wird nämlich als ein Grund für die Neubearbeitung genannt, die diesbezüglichen Ergänzungen in Ausgabe C waren demnach noch nicht hinreichend. Weitere Gründe liegen in den erneut überarbeiteten Lehrplänen sowie allgemein in „[v]eränderten Tendenzen". Die weitere bzw. nun praktisch völlige Zurückdrängung der Mengen aus den Richtlinien werten Fricke und Besuden als positiv und stellen fest, dass nun „erfreulicherweise" die Arithmetik wieder primär im Vordergrund steht. Dementsprechend finden sich keine spezifischeren Einheiten zu Mengenbegriffen mehr im Buch, und auch für die Einführung der Zahlen 1-4 wird nicht mehr auf Mengen und Zuordnungen zurückgegriffen, ein solches Vorgehen wird von den Autoren sogar als „unangebracht" bezeichnet. Sortierübungen sind dennoch weiterhin enthalten. „Die hier früher verordnet gewesenen Übertreibungen in Richtung „Mengenlehre" seien zwar heute durch neuere Entwicklungen und Richtlinien als solche erkannt worden, aber damit entfallen nicht alle logischen Übungen. Für das 1. Schuljahr kommen v. a. Aufgaben des Sortierens, Klassifizierens und Vergleichens als wichtige[] Grundaktivitäten menschlichen Denkens in Frage."[980]

Der ***pränumerische Teil*** fällt wesentlich kürzer aus als noch in Ausgabe C, er umfasst jetzt noch 15 im Gegensatz zu den vorherigen 27 Seiten, auf denen Mengenvergleiche, Zuordnungen (stark gekürzt), die topologischen Begriffspaare innen/außen und offen/geschlossen, Gegensätze und Reihenfolgen als einfache Relationen sowie nach wie vor das Verdoppeln und Halbieren behandelt werden. Die Zahlen werden planmäßig ab Woche 7 eingeführt statt wie zuvor nach 11 Wochen.

979. Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule. Neu; 1. Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1984 [im Folgenden: Fricke & Besuden, D, Schüler]; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule. Neu; 1. Schuljahr, Lehrerband, Stuttgart: Klett, 1985 [im Folgenden: Fricke & Besuden, D, Lehrer]; Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule. Neu; 1. Schuljahr, Übungsheft, Stuttgart: Klett, 1985.
980. Fricke & Besuden, D, Lehrer, S. 15

Die Inhalte, die vormals Teil des pränumerischen Kurses waren, sind zum Teil nach hinten geschoben worden, dabei aber unverändert geblieben (z. B. Pfeildiagramme und das Auslegen von Flächen)[981], andere wurden auch inhaltlich in den arithmetischen Teil integriert, z. B. ist die Teilmengenbildung, die eng mit Sortiertätigkeiten am Baum und in der Matrix gekoppelt ist, stark gekürzt und direkt mit dem Rechnen in Tabellen verbunden worden.[982] Wieder andere wie eben die Mengenoperationen Trennen und Vereinigen oder allgemeine Transformationsmaschinen sind nicht mehr im Schulbuch enthalten, und mit dem Vertauschen und Zusammenfassen an Stäben gilt dies sogar für eine Einheit, die seit Ausgabe A Teil des Lehrgangs war. Beispiele wie dieses zeigen, dass im Falle von *Mathematik in der Grundschule* die Reduktion der Mengenlehre mit gleichzeitig wieder starker Betonung der Arithmetik nicht gleichbedeutend ist mit der Rückkehr zum ursprünglichen Konzept des Rechenunterrichts.

Im ***arithmetischen Teil*** nehmen einige Themen jetzt einen größeren Umfang ein als zuvor. So wurden die Einheit zu Ordnungszahlen von einer auf zwei Seiten ausgedehnt, die Einführung der Addition und Subtraktion auf 2 Seiten aufgeteilt und auch Seiten mit Übungsaufgaben ergänzt und ausgeweitet. [983] Wirklich neu gegenüber allen bisherigen Ausgaben ist eine eigene zwei Seiten umfassende Einheit zum Zehnerübergang[984], die nicht allein steht, sondern mit der auch an anderen Stellen stärkeren Berücksichtigung der Darstellung in der Form $10 + x$ für die Zahlen von 11-20 korrespondiert. Während also noch in Ausgabe C das Standardverfahren zum Zehnerübergang „nur als ein Weg unter anderen“[985] aufgeführt wurde, heißt es nun: „Dennoch wird auch hier der Standardweg zum Zehnerübergang [...] entwickelt“.[986]

Außerdem als neu genannt ist ein planmäßiger Aufbau des ***Sachrechnens*** bzw. überhaupt ein stärkerer Einbezug von lebensweltlichen Kontexten, z. B. durch zusätzliche Seiten zum Sachrechnen und mithilfe eines Satzes sogenannter Arbeittransparente, die als Kulisse dienen[987] und die die unterschiedlichen arithmetischen Themen in wiederkehrende Sachzusammenhänge einbetten. Dazu wurde das Rechnen mit Geld ausgeweitet und kontextualisiert, indem jetzt zum einen auch mit Scheinen statt wie zuvor nur mit Münzen gerechnet wird, vor allem aber auch

981. vgl. Fricke & Besuden, D, Schüler, S. 60, 77 und 78.
982. vgl. Fricke & Besuden, D, Schüler, S. 66-68 und Lehrer, S. 72-74.
983. vgl. Fricke & Besuden, D, Schüler, S. 38-39, 41 und 64-65.
984. vgl. Fricke & Besuden, D, Schüler, S. 88-89.
985. Fricke & Besuden, C, S. L86.
986. Fricke & Besuden, D, Lehrer, S. 94.
987. Fricke & Besuden, D, Lehrer, S. 3 und Schüler, S. 64-65.

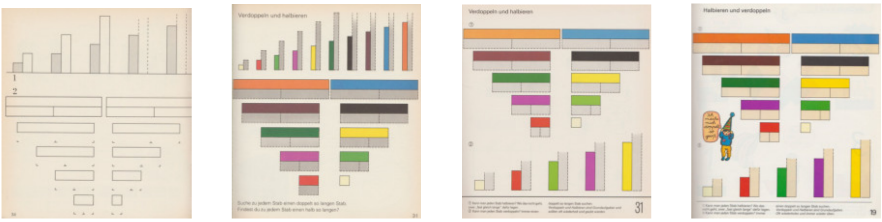
im Zusammenhang mit konkreten Waren sowie Ein- und Verkaufsszenarien der Alltagsbezug deutlich verstärkt wird.[988]

Insgesamt wurde das Layout des Schulbuchs verändert, statt der früheren Fotos sind jetzt sämtliche Abbildungen gezeichnet, die Zeichnungen entsprechen z. T. aber direkt den Fotos. Im Lehrerkommentar sind die bisher recht ausführlichen Erläuterungen zu „Aufgaben und Inhalt" nicht mehr enthalten, die Ausführungen zur operativen Methode sowie zu den Inhaltsbereichen gekürzt, die praktischen Hinweise zur Arbeit mit dem Buch und zu den Materialien aber im Wesentlichen unverändert. Die Verschiebung des Gewichts in Richtung Übung und Wiederholung schlägt sich ebenfalls in einer Neuerung im Lehrerkommentar nieder. Die bisherigen Abschnitte A-C wurden ersetzt durch die Teile „I. Sache und Didaktik", „II. methodische Hinweise" und „III. Wiederholung und Übung".[989]

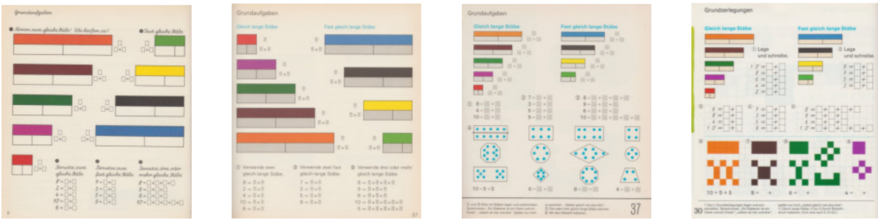
Trotz der diversen genannten Unterschiede gibt es zahlreiche Parallelen, nicht nur zwischen den Ausgaben C und D, sondern zwischen allen vier Ausgaben, so dass jetzt deutliche Kontinuitäten erkennbar sind, die offenlegen, was den unveränderlichen Kern des operativen Konzepts von Fricke & Besuden ausmacht. Es sind dies die Betonung des Verdoppelns und Halbierens, die damit direkt zusammenhängenden „Grundzerlegungen" in gleich lange bzw. fast gleich lange Stäbe, die Treppen zum Erfassen funktionaler Abhängigkeiten, die Übersichtsseite zu den Nachbaraufgaben, die Stabdarstellung zur Ordnung der Zahlen, die Repräsentation von Dingmengen durch Einerwürfel und deren anschließende Ersetzung durch die passenden Stäbe zum Mengenvergleich[990] sowie die unmittelbare Zerlegung der Zahlen bis 10 bei deren Einführung.[991]

988. Fricke & Besuden, D, Schüler, S. 92-94.
989. Fricke & Besuden, D, Lehrer, S. 9.
990. Die „Isomorphie zwischen den Relationen kürzer, länger, gleich lang zwischen den Stäben und den Relationen kleiner, größer, gleich zwischen den entsprechenden Kardinalzahlen" wird als „grundlegend" bezeichnet, Fricke & Besuden, D, Lehrer, S. 23.
991. vgl. jeweils Fricke & Besuden, A, S. I 34, B, S. 31, C, S. 31 und D, Schüler, S. 19; A, S. II 6, B, S. 37, C, S. 37 und D, Schüler, S. 30; A, S. II 17, B, S .49, C, S. 51 und D, Schüler, S. 46; A, S. II 33, B, S. 85, C, S. 82 und D, Schüler, S. 82; A, S. II 19, B, S. 51, C, S. 53 und D, Schüler, S. 48-49; A, S. II 28, B, S. 80, C, S. 77 und D, Schüler, S. 72 sowie A, S. I 22, B, S. 17-18, C, S. 23-24 und D, Schüler, S. 22-23.

Kontinuitäten in den vier Ausgaben von *Mathematik in der Grundschule 1* (jeweils Ausgabe A-D von links nach rechts):



Bsp. 1: pränumerischen Verdoppeln und Halbieren an der Cuisenaire-Stäben



Bsp. 2: Grundzerlegung in gleichlange und fast gleichlange Stäbe im numerischen Teil

Zusammenfassung und Vergleich

Die zentralen Elemente des Lehrgangs von Fricke und Besuden werden im Folgenden noch einmal zusammengefasst bzw. das inhaltliche Konzept weiter analysiert und die Punkte dann mit den internationalen Reformkonzepten abgeglichen.

Das hauptsächliche **Ziel**, das die Autoren verfolgen, ist die

- Schulung des mathematischen Denkens,

was in ihrem Fall als Denken in Begriffen, Beziehungen und Operationen und damit als bewegliches, flexibles Denken zu verstehen ist.

Die **inhaltliche Gestaltung** ist zunächst gekennzeichnet durch die ***fachlichen Inhalte***, wie sie zum einen in den explizit angegebenen Inhaltsbereichen in den Grundbüchern, zum anderen als Leitideen genannt werden, wobei sich die Nennungen weitgehend überschneiden:

- Arithmetik
- Mengen (explizit in B und C, implizit in A und D)

- Relationen (vor allem Äquivalenz- und Ordnungsrelationen)
- Zuordnung / Abbildung / Operator
- Geometrie: Symmetrie (in A höchstens implizit im Verdoppeln), Topologie (nicht in A), Raumgeometrie (nicht in A),

wobei die geometrischen Lagebeziehungen wiederum exemplarisch für Relationen und die Symmetrie beispielhaft für Abbildungen stehen.

Das ***curriculare Gesamtkonzept***, das *Mathematik in der Grundschule* zugrunde liegt, ist durch Ziel und Methode bestimmt. Während es sich bei Ausgabe A noch um ein reines Arithmetikbuch handelt – zumindest, was die explizit im Unterricht behandelten Themen betrifft – erhebt Ausgabe B den Anspruch, an zentralen mathematischen Begriffen ausgerichtet zu sein, „tragende mathematische Grundideen sichtbar [zu] machen“ und damit die Mathematik als Einheit zu vermitteln. Diese Begriffe – Menge, Relation, Abbildung und die Begriffe der Arithmetik – durchziehen den Lehrgang in der Tat ziemlich komplett und werden stets in neuem Zusammenhang, neuer Darstellung oder auf höherem Niveau wieder aufgenommen, ganz im Sinne des Spiralprinzips. Die Übersicht über die Inhaltsbereiche suggeriert eine Gleichgewichtung zwischen diesen, tatsächlich bleibt die Arithmetik aber primärer Inhalt, vom Umfang wie von der Bedeutung her. Ihre Rolle ist aber wiederum vor dem Hintergrund der Ziele zu sehen.

Die ***Beziehung zwischen Rechnen, Mathematik und den Mengen*** beruht auf einem Verständnis von Mathematik, das nur sehr indirekt auf die Fachwissenschaft bezogen ist. Mathematik wird hier vor allem verstanden als eine spezifische Denkweise, eine zwar logische, aber keinesfalls axiomatisch-deduktive. Die Mathematik nach Fricke und Besuden ist nicht hierarchisch, sondern ein Nebeneinander jeweils über verschiedene Stränge miteinander vernetzter Begriffe. Mathematisches Denken ist dann die Fähigkeit, sich flexibel in diesem Netz zu bewegen und ein Ziel auf verschiedenen Wegen zu erreichen. Die Arithmetik ist ein wichtiger, grundlegender Inhalt, aber sie wird hier nicht zum Selbstzweck betrieben, sondern quasi als exemplarisches Teilgebiet, das aufgrund seiner Beziehungshaltigkeit für das Lernen mathematischen Denkens besonders gut geeignet ist. Die Mengen erfüllen ihren Zweck als Grundlage der Arithmetik, vor allem durch ihren engen Zusammenhang mit dem hier eigentlich zentraleren Begriff der Relation. Dass der mathematische Relationsbegriff für ein Denken in Beziehungen relevant ist, versteht sich von selbst. Relationen erzeugen Mengen, und Mengen stehen in Relationen zueinander. Es ist dieser gegenseitige Zusammenhang, der den Mengen ihre Bedeutung als Grundlage für die Mathematik im Sinne Frickes und Besudens und damit ihres Konzepts verleiht. Dass sie expliziert, formalisiert und allgemein als mathematische Objekte behandelt werden, ist dafür nicht notwendig.

Es folgt hieraus, dass die Betonung zentraler Leitbegriffe sich deutlich vom Brunerschen Konzept unterscheidet. Bei Bruner sind die fundamentalen Ideen gerade diejenigen Begriffe, die fachimmanente Strukturen repräsentieren; sie werden aus der Fachwissenschaft und dort wiederum insbesondere aus aktuellen Entwicklungen abgeleitet. Wie bewegliches Denken entsteht, ist dagegen gewissermaßen zeitlos, zumindest aber unabhängig von aktueller fachlicher Forschung. Bei Fricke und Besuden basiert die Auswahl der ***fundamentalen Ideen*** nicht auf der Fachmathematik, sondern der psychologischen Theorie Piagets zur Entwicklung des intelligenten Denkens. Es ist sicher kein reiner Zufall, dass beides weitgehend auf die gleichen Begriffe führt; Piaget hat sich für die Formulierung seiner Theorie zeitgenössischer logisch-mathematischer Terminologie bedient. Die an dieser Stelle dennoch erstaunliche Passung zwischen der Entwicklungspsychologie und der Fachmathematik ist sicher ein wesentlicher Grund dafür, dass Fricke und Besuden in der Lage waren, die Begriffe aus der Fachwissenschaft auch gegen ihre innere Überzeugung organisch in ihren Lehrgang einzubinden und diese Ergänzung auch schlüssig zu begründen.

Die **didaktischen Prinzipien**, denen das Werk folgt, lassen sich in zwei Hierarchieebenen einteilen. Über sämtlichen Entscheidungen – curricularen wie methodischen – steht das

- operative Prinzip (auch: operative Methode),

das hier als primäres Prinzip genannt werden muss. Aufgrund der speziellen exponierten Stellung dieses Prinzips müssen die weiteren prinzipiellen Grundlagen hier als solche eher sekundärer Natur angenommen werden. Es sind dies:

- das Spiralprinzip (damit auch: Mathematik als Einheit)
- die Mehr-Modell-Methode (entspricht der Variation der Veranschaulichung)
- das Prinzip der mathematischen Variabilität
- das Prinzip vom tiefen Ende (nicht unter dieser Bezeichnung),

wobei für eine Einordnung berücksichtigt werden muss, dass diese sich z. T. direkt aus dem Primat der operativen Methode ergeben, also nicht für sich stehen. Weiterhin impliziert das operative Prinzip, dass Lernen als ein individueller, genetisch-konstruktivistischer Prozess verstanden wird.

Grundsätze zur **Unterrichtsmethodik**, die zum Großteil ebenfalls eng mit der didaktischen Fundierung zusammenhängen, umfassen:

- Material: Formen und Stäbe
- Handlungsorientierung, Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler
- experimentelle Herangehensweise
- Arbeit am Grundbuch und im Arbeits-/Übungsheft
- kooperative Sozialformen (allerdings nicht konkretisiert)

Im Vergleich zu den ursprünglichen Ideen ist damit Folgendes festzuhalten:

- Das gesamte Konzept basiert in hohem Maße auf den Ergebnissen Piagets zur Entwicklung des Denkens, vor allem auf seinem Operationsbegriff. Aufbauend auf den von Piaget abgeleiteten didaktischen Überlegungen bei Aebli konkretisieren Fricke und Besuden diese Theorie für die Unterrichtspraxis.
- Das fachliche Ziel des beweglichen Denkens wird aus der internationalen psychologischen Forschung übernommen.
- Die wesentlichen unterrichtsmethodischen Prinzipien Handlungsorientierung, Selbsttätigkeit, Materialeinsatz sowie kooperatives Arbeiten wurden übernommen, wobei jede Form der Handlungsorientierung integraler Bestandteil des operativen Prinzips ist.
- Ökonomische Ziele spielen praktisch keine Rolle, ebenso wenig wie die zeitgenössische Fachmathematik, entsprechend wird auf die Aktivitäten der OEEC kein Bezug genommen.
- Die Inhalte des Lehrgangs entsprechen den in Kapitel I. 4 aufgeführten.
- *Mathematik in der Grundschule* ist ein spiralcurricularer Lehrgang, der an gewissen fundamentalen Ideen ausgerichtet ist. Bezüglich der Auswahl dieser Ideen gibt es jedoch erhebliche Unterschiede zum Konzept von Bruner, wie oben ausgeführt.
- Wesentlicher Einfluss ist nicht die Fachwissenschaft, sondern die Psychologie.
- Dienes‘ Zugang wird an diversen Stellen kritisch gesehen, seinen didaktischen Prinzipien wird sich jedoch z. T. angeschlossen. Es ergibt sich allerdings der Eindruck, dass gerade diejenigen Prinzipien übernommen werden, die die operative Methode ohnehin impliziert bzw. die problemlos damit verbunden werden können.

- Rechenunterricht soll nicht durch Mathematikunterricht ersetzt, sondern in diesen integriert werden. Ziel ist damit nicht ein praktisch neues Schulfach, das von Grund auf neu aufgebaut wird, sondern eine Verbindung des Alten mit dem Neuen zu einem neuen Gesamtkonzept.
- Die Arithmetik ist weniger ein Teilgebiet neben anderen als vielmehr eines, das exemplarisch für die Mathematik als Ganzes steht, zumindest sofern Mathematik als spezifische bewegliche Denkweise verstanden wird.
- Die Menge ist ein grundlegender Begriff für bewegliches Denken wie für die Arithmetik und fügt sich daher in den Lehrgang ein. In seiner expliziten mathematischen Form bzw. als mathematischer Begriff an sich ist er aber nicht von Interesse. Eine zu starke Gewichtung des formalen Begriffs, wie sie die Autoren ursprünglich nicht vorgesehen haben und auch deutlich ablehnen, war nicht von vorneherein angelegt. Der entscheidende Anstoß kam hier aus den nationalen Richtlinien.

→ Dass es sich bei *Mathematik in der Grundschule* von A. Fricke und H. Besuden um einen kohärenten Lehrgang handelt, ist mutmaßlich in der Konsequenz bedingt, mit der die Piagetsche Theorie umgesetzt wird. Andere Einflüsse werden mit aufgenommen, insofern sie ohne Weiteres mit der Konzeption verträglich sind; alles andere wird vernachlässigt, zumindest soweit möglich. Die neuen Richtlinien haben Fricke und Besuden eine inhaltliche Anpassung aufgezwungen, die nur aufgrund der besonderen Umstände, unter denen die theoretischen Grundlagen formuliert wurden, letztlich mit ihrem Konzept der operativen Methode verträglich war.

III.4 Die unterrichtskonzeptionelle Ebene: Vergleich und Verallgemeinerung der ausgewählten Lehrwerke

Die drei hier betrachteten Lehrwerke wurden als exemplarische Quellen für die unterrichtskonzeptionelle Ebene ausgewählt, hier aber zunächst einzeln und für sich beschrieben. Ein zusammenfassender und verallgemeinernder Vergleich der Unterrichtswerke liefert weitere Erkenntnisse darüber, wodurch die Reform an dieser Schnittstelle zwischen Theorie und Praxis gekennzeichnet war, gleichzeitig werden noch einmal die jeweiligen Spezifika deutlich.

Als allererstes muss man feststellen, dass es sich um drei sehr unterschiedliche Konzepte handelt. Von *dem* Reformkonzept oder *der* „Mengenlehre“ kann also keineswegs die Rede sein. Die Unterschiede liegen besonders in der Gewichtung der didaktischen Prinzipien und der unterschiedlichen Einflüsse sowie im inhaltlichen Teil, hier allerdings weniger darin, welche Inhalte behandelt werden, sondern eher im grundlegenden curricularen Konzept. Dieses wiederum ist bestimmt durch das jeweilige Verständnis von Mathematik, die Rolle der einzelnen Teilgebiete und Begriffe innerhalb des Faches sowie deren Beziehung zueinander.

Trotz unterschiedlicher didaktischer Schwerpunkte finden sich die größten Parallelen zwischen den Lehrgängen in Fragen der **Unterrichtsmethodik**. Die Forderung nach Handlungsorientierung, Eigentätigkeit und Materialeinsatz muss als typisch für die methodischen Konzeptionen der „Mengenlehre“ gelten. Alle Lehrgänge nutzen ***strukturiertes Material*** in Form von Merkmalsplättchen oder -klötzen, die jeweils nach 3-4 Merkmalen unterschieden werden können. Gemeinsam sind dabei stets die Merkmale Form, Farbe und Größe; es ist offensichtlich, dass all diese Plättchen auf den von Dienes propagierten Logischen Blöcken basieren.[992] Zu allen Lehrgängen gibt es weiteres Material, das mehr oder weniger fester Bestandteil der Kurse ist. Für das 1. Schuljahr obligatorisch sind bei Neunzig und Sorger nur die Logischen Blöcke, während bei beiden anderen Unterrichtswerken Geometriematerialien fest dazugehören (bei Bauersfeld das Formenspiel, bei Fricke und Besuden hauptsächlich die Winkelplättchen), bei Fricke und Besuden außerdem die Cuisenaire-Stäbe für den Arithmetik-Unterricht, die hier zugleich das wichtigste Material sind.

Lehrerzentrierte ***Sozialformen*** werden in jedem Fall abgelehnt, Lehrkräfte sind angehalten, möglichst wenig vorzumachen und selbst zu sprechen, die Kinder sollten zudem möglichst viel in Gruppen oder mit einem Partner arbeiten. In ihren Vorschlägen zu offenen Unterrichtsformen gehen die Verfasser der Bücher unterschiedlich weit. Während Fricke und Besuden Wert darauf legen, dass die Klasse im Wesentlichen als Einheit agiert und gemeinsam zu neuen Themen übergeht, propagieren Neunzig und Sorger eine Mischung aus Frontalunterricht für Einstiegsphasen und regelmäßiger Gruppenarbeit sonst. Bauersfeld et. al. gehen dagegen praktisch bis zur Auflösung der herkömmlichen Klassenstruktur, wenn sie vorschlagen, jede Gruppe bzw. sogar jedes Kind solle individuell an einem anderen Inhalt arbeiten. Diesen Stufen der Offenheit entspricht der jeweils intendierte Umgang mit den gedruckten Materialien. Das Grundbuch von *Mathematik in der Grundschu-*

992. Die Autorin dieser Arbeit hat in diversen persönlichen Gesprächen mit damaligen Schülerinnen und Schülern die Erfahrung gemacht, dass der Erwähnung der „Mengenlehre“ unmittelbar eine Reaktion der Art „Das war doch das mit den bunten Plättchen!“ folgt. Es lässt sich folgern, dass die strukturierten Materialien 1. in der Unterrichtspraxis umfangreich eingesetzt wurden, 2. nicht nur für die unterrichtskonzeptionelle, sondern auch für die schulpraktische Ebene als typisch gelten können und auch als typisch wahrgenommen wurden und 3. in irgendeiner Weise einen nachhaltigen Eindruck bei den Kindern hinterlassen haben.

le soll durchaus auch zum Einstieg in neue Einheiten und zur Erarbeitung neuer Begriffe genutzt werden; die zu *Wir lernen Mathematik* gehörige Fibel dient ausdrücklich nicht der Einführung, sondern ist zur Übung und Wiederholung gedacht; *alef* wiederum umfasst gar nicht erst ein Schülerbuch. Trotz der Parallelen in den unterrichtsorganisatorischen Grundsätzen findet sich bereits in dieser Hinsicht ein breites Spektrum.

Alle drei Lehrgänge beginnen mit einem **pränumerischen Vorkurs**. Es handelt sich hierbei um ein für die „Mengenlehre" typisches Vorgehen, das auf der Vorstellung beruht, der abstrakte Begriff der Zahl werde nicht ohne gewisse Voraussetzungen gebildet, müsse also durch andere Begriffe grundgelegt werden, die dementsprechend im Vorfeld behandelt werden. Eine dieser Grundlagen ist in jedem Fall die Menge, darüber hinaus unterscheiden sich aber auch die pränumerischen Kurse in Inhalt, Aufbau und Dauer. Die inhaltlichen Unterschiede in den Vorkursen hängen dabei naturgemäß mit der inhaltlichen Konzeption der gesamten Lehrgänge zusammen. Auch hier gehen die Macher von *alef* wieder am weitesten, gemessen an konventionellem Unterricht. In ihrer ursprünglichen Konzeption umfasst der pränumerische Teil fast das gesamte 1. Schuljahr, die Inhalte sind weit vielfältiger als nur Mengenlehre, tatsächlich wird diese gegenüber Relationen und Abbildungen nicht hervorgehoben und vorwiegend in Form elementarer Sortierübungen betrieben. Einen großen Umfang nimmt dagegen bereits die Geometrie (Auslegen von Flächen, Symmetrie, Topologie) ein. Mit der Neuauflage werden die Zahlen noch in der ersten Hälfte des Schuljahres eingeführt, der Begriff der Mächtigkeit demgemäß auch früher. Allerdings ist mit der Einführung der Zahlen der nicht-numerische Kursteil nicht beendet, die im Anschluss behandelten Inhalte sind die gleichen wie im vormals pränumerischen Teil, und sie werden im Wesentlichen auch auf die gleiche Art und Weise bearbeitet.

Bei Neunzig und Sorger sind pränumerischer und numerischer Kurs zunächst klar getrennt, aber zueinander analog aufgebaut. Der Vorkurs umfasst Mengenlehre mit den Begriffen Menge, Element, Teilmenge, Grundmenge, den Mengenoperationen und der Gleichheit von Mengen; weitere Begriffe, die eher implizit behandelt werden, sind Relationen und Abbildungen, Letzteres in Form der Unterschiedsspiele. Nach Abschluss des Mengenteils beginnt der Teil zur Arithmetik. Es handelt sich hier mutmaßlich um genau die Art von geschlossenem Mengenvorkurs, den Fricke und Besuden klar ablehnen. Mit der zweiten Auflage werden die Zahlen früher eingeführt, nicht am Stück, sondern nach und nach und stets im Wechsel mit Inhalten der Mengenlehre. Die Grundlegung der Arithmetik bleibt dennoch auf Mengenbegriffe beschränkt.

Fricke und Besuden wiederum behandeln in ihrem Vorkurs die Mengen nicht umfassend, geschweige denn systematisch, sondern legen den Schwerpunkt auf Relationen und strukturelle arithmetische Gesetzmäßigkeiten, die sie mithilfe der farbigen Stäbe einsichtig machen, ohne dass konkrete Zahlenwerte dafür genutzt werden. Die Zusammenhänge werden später im Lehrgang in Verbindung mit den Zahlen wieder aufgegriffen. Der Vergleich von Mengen ist dabei ein wesentlicher Bestandteil, insofern, als er Beziehungen zwischen den Zahlen vorbereitet. Was den pränumerischen Kurs allgemein betrifft, ist *Mathematik in der Grundschule* besonders aufschlussreich. Zum einen verfügt bereits die erste Ausgabe über so einen zahlfreien Vorkurs, es handelt sich mithin nicht um eine unmittelbar an die „Mengenlehre“ geknüpfte Erfindung, wie es häufig wahrgenommen wurde. Zum anderen zeigt der Vergleich der Ausgaben, wie genau dieser pränumerische Teil nach und nach gekürzt wurde, die Einführung der Zahlen also mit jeder Ausgabe weiter nach vorne gerückt ist, ein Umstand, der sich an allen drei hier betrachteten Lehrwerken übereinstimmend beobachten lässt. Darüber hinaus enthält der Lehrerkommentar an diversen Stellen Hinweise darauf, dass es weitere Schulbücher gegeben hat, die – wohl vergleichbar mit *Wir lernen Mathematik* – von einem abgeschlossenen Mengenvorkurs ausgegangen sind, ohne dass hier andere grundlegende Begriffe eine entsprechende Rolle gespielt hätten oder die Inhalte organisch mit dem späteren Rechnen verwoben gewesen wären.

Vergleicht man insgesamt die Werke auf ihre **Inhalte** hin, so fällt als erstes auf, dass die Fibel von Neunzig und Sorger in beiden Auflagen keine Geometrie enthält. Für die 1. Auflage ist dies noch weniger überraschend, da die alten Lehrpläne diese nicht für den Anfangsunterricht vorsahen – es findet sich daher auch noch keine Geometrie in der Erstausgabe von Fricke und Besuden –, die 2. Auflage ist aber bereits nach den KMK-Richtlinien von 1968 erschienen, die geometrische Inhalte für die Grundschule vorsahen, eine Forderung, der erst durch ergänzende Arbeitskarten Genüge getan wurde. Abgesehen davon behandeln die Lehrgänge die gleichen Begriffe, allerdings in teils stark unterschiedlicher Gewichtung sowie auf verschiedene Art und Weise. Bei *alef* stehen Mengen, Relationen, Abbildungen, topologische und euklidische Grundbegriffe sowie schließlich auch Zahlen gleichberechtigt nebeneinander und bilden, wie Gerüststangen, die ausgehend vom Präformalen gleichmäßig weiter in die Höhe gebaut werden, nach und nach ein Gerüst aus mentalen Schemata, relationalen Denkweisen und sprachlichen Strukturen, auf denen die Arithmetik und weitere mathematische Teilgebiete aufbauen können. In *Wir lernen Mathematik* sind die Begriffe der naiven Mengenlehre klar dominant. Die Mengenlehre dient der Fundierung der Arithmetik, wird aber nicht nur im Hinblick auf ihren späteren Nutzen, sondern als eigenständiger mathematischer Inhalt an sich behandelt, was sich z. B. in der Thematisierung der Schnittmengenbildung niederschlägt, die für die Arithmetik nicht weiter relevant ist. Die Begriffe werden dabei verhältnismäßig formal behandelt, inklusive der entsprechenden Terminologie und Symbolik. Fricke und Besuden lehnen genau diese Betrachtung von Mengen als formale Objekte ab, sie nutzen den Begriff stattdessen nur insofern, als sie ihn brauchen, um den Zahlbegriff kardinal grundzulegen sowie im Zusammenhang mit den Relationen, die hier als zentrales Leitmotiv der operativen Methode eine herausgehobene Stellung innehaben und damit stärker betont werden als in den anderen Konzepten. Der Wert der Arithmetik wird in keinem der Lehrwerke angezweifelt, im Gegenteil sind ihre Beherrschung und ihr Verständnis wesentliche Ziele. Unterschiede liegen aber in ihrer Beziehung zur Mathematik. Zahlen und Operationen sind Grundlage der Mathematik (Neunzig und Sorger), exemplarisches Teilgebiet für mathematisches Denken (Fricke und Besuden) oder fundamentale Idee neben anderen (Bauersfeld), Mengen in jedem Fall ein die Arithmetik fundierender Begriff. Die inhaltlichen Konzepte scheinen indessen auch auf nicht einheitlichen Vorstellungen darüber aufzubauen, was eigentlich einen Mathematikunterricht im Unterschied zum Rechenunterricht im Kern ausmachen soll. Soll der Rechenunterricht durch ein faktisch neues Fach ersetzt oder um mathematische Inhalte zu einem mathematisierten Rechenunterricht ergänzt werden? Und was genau bedeutet die Formulierung, der Rechenunterricht sei in den Mathematikunterricht zu integrieren? Die Ausführungen hierzu bleiben eher vage.

Selbstredend sind inhaltliche Entscheidungen maßgeblich durch **Zielsetzungen** und **didaktische Grundprinzipien** bedingt. Besonders offensichtlich ist der Zusammenhang bei Fricke und Besuden, die die operative Methode zum übergeordneten Prinzip erheben. Sie beziehen sich fast ausschließlich auf Piaget und leiten auch ihre Zielsetzung des beweglichen mathematischen Denkens aus Piagets Operationsbegriff her, der wiederum ihre Inhaltsauswahl und die Betonung der Relationen bestimmt. Neunzig und Sorger beziehen sich explizit auf die Dienes-Konzeption und die zugehörigen didaktischen Prinzipien, die sie allerdings anpassen und dabei eingrenzen, so dass für den Anfangsunterricht die Variation der Veranschaulichung und das Konstruktionsprinzip übrig bleiben, auf deren Grundlage die stärker fachliche Zielsetzung – einsichtiges Rechnen und Fundierung der Mathematik – erreicht werden soll, womit eine stärker am Fach orientierte Auswahl und Behandlung der Inhalte einhergeht. Die Einflüsse auf das Konzept von Bauersfeld und Mitarbeitern sind breiter gestreut und gehen dabei auch über die Didaktik und die Psychologie hinaus, woraus sich vor allem pädagogische und soziale Zielsetzungen ergeben, die bei den anderen zwar auch erwähnt werden, hier aber einen viel größeren Stellenwert erhalten.[993] So ist die Auswahl der Inhalte hier in hohem Maße durch ihre Eignung für eine kompensatorische Erziehung, besonders im Sinne der gemeinsamen Sprachbildung, begründet.

So uneinheitlich die Bezugspunkte sind, so ist doch allen Konzeptionen gemeinsam, dass sie von individuell-genetischer, konstruktivistischer Begriffsbildung ausgehen, die im Gegensatz zur alten sensualistischen Vorstellung eines Lernens allein durch Wahrnehmung steht. Die Arbeit mit einem Veranschaulichungsmittel ist daher in allen hier beschriebenen Konzeptionen einer gewissen Variation der Anschauung bzw. der Arbeit an mehreren Modellen gewichen; das Primat der Selbsttätigkeit der Kinder folgt ebenso unmittelbar aus der Theorie des Konstruktivismus. Als weitere Gemeinsamkeit muss erwähnt werden, dass ökonomische Gründe für keinen der Lehrgänge ein entscheidendes Kriterium darstellen und auch die fachwissenschaftliche Forschung nicht als Argumentationsgrundlage herangezogen wird, stattdessen ist die Entwicklungspsychologie insgesamt der wichtigste Bezugspunkt.

Eine weitere Gemeinsamkeit ist die Hinwendung zu einem prozessorientierten Curriculum, das weniger auf Kenntnisse als auf Fähigkeiten ausgerichtet ist. Der Vorrang von Einsicht und Verständnis gegenüber mechanischen Fertigkeiten schlägt sich in den Lehrwerken v. a. in einer Betonung des Problemlösens nieder, dem allerdings wiederum unterschiedliches Gewicht zukommt. Die Notwendigkeit der Nutzung heuristischer Herangehensweisen, die elementarer Bestandteil des flexiblen mathematischen Denkens sind, wird bei Neunzig und Sorger am wenigsten thematisiert, bei Bauersfeld am ausdrücklichsten. Fricke und Besuden implizieren mit ihren operativen Übungen den Aufbau eines Vorrats an Problemlösestrategien für die Lösung arithmetischer Aufgaben, auf den konstant zurückgegriffen wird.

Dass die unterschiedlichen Argumentationsbasen scheinbar zufällig auf die gleiche Auswahl an fachlichen Begriffen führen, ist nur zum Teil tatsächlich der Fall. Um zugelassen zu werden, müssen Lehrwerke zu den Lehrplänen passen, es ist davon auszugehen, dass ein Teil der Konzepte bzw. ihrer Begründungen passend gemacht wurden. Dass dies aber in jedem Fall möglich war und die fachlichen Inhalte sich auf der Basis der entsprechenden psychologischen Theorien, didaktischen wie methodischen Grundsätze und Entwicklungen in der fachwissenschaftlichen Forschung gleichermaßen überzeugend begründen lassen, mag einen erheblichen Teil zu der Vehemenz beigetragen haben, mit der die Reform umgesetzt wurde.

993. nach Griesel, Dienes, S. 16, war denn auch *alef* dasjenige Lehrwerk, das die pädagogischen Ideen von Dienes am weitestgehenden umgesetzt hat, nicht etwa das Werk von Neunzig und Sorger.

IV Folgerungen

Es gilt nun, die Erkenntnisse aus den vorherigen Kapiteln unter der eingangs formulierten zentralen Fragestellung zu betrachten: Wie wurden die in I. 4 zusammengefassten ursprünglichen Kernideen aus den internationalen Bezugswissenschaften in der Bundesrepublik in konkreten Unterrichtskonzepten rekontextualisiert bzw. inwiefern übernahmen die Protagonisten aus der Fachdidaktik die Kernideen für ihre Unterrichtswerke, und welche Bedingungen lassen sich dafür identifizieren?

Aussagen, die sich zu den weiteren, übergeordneten Fragestellungen treffen lassen, und sonstige bemerkenswerte Erkenntnisse, die darüber hinaus noch gewonnen werden konnten, werden im Anschluss behandelt.

IV.1 Rekontextualisierungen auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene

Die Autoren von ***alef*** haben ein breit fundiertes Konzept entwickelt, für das sie diverse Einflüsse aufgenommen und diese zu etwas Neuem zusammengefügt haben. Das impliziert, dass sie keine der grundlegenden Theorien in Gänze für sich übernommen haben, vielmehr wurden die Elemente ausgewählt, die untereinander kompatibel sind und denen vor allem eine Eignung für die Erreichung ihrer Ziele zugesprochen wird. Diese Ziele sind vorrangig pädagogischer und sozialer Natur, weniger fachlich-inhaltlicher. Es ist daher davon auszugehen, dass die internationalen Einflüsse, zumindest soweit sie für Kapitel I ausgewählt wurden, nicht den Ausgangspunkt der Konzeption darstellen, sondern ihre Elemente vor dem Hintergrund der Forderung nach Chancengleichheit, Differenzierung und Individualisierung[994] sowie der Theorie der kompensatorischen Erziehung ausgewählt wurden.

994. Der *Strukturplan* des Deutschen Bildungsrats scheint hier einen wesentlichen Einfluss genommen zu haben. Es ist aber zu bedenken, dass Bauersfeld selbst Mitglied des Bildungsrats war, inwiefern also Bauersfeld Ideen aus dem *Strukturplan* übernommen hat oder umgekehrt seine bereits vorher vorhandenen Ideen in das Dokument eingeflossen sind, kann nicht ohne Weiteres geklärt werden. Es muss daher in Erwägung gezogen werden, dass diese Forderungen auch unabhängig von der Kodifizierung im *Strukturplan* Teil des *alef*-Programms geworden wären.

Es zeigt sich, dass viele der didaktischen Prinzipien, die aus den Ergebnissen der Psychologie abgeleitet wurden, zu den Zielen passen. Fundamentale mathematische Begriffe, zumal wenn sie spiralcurricular vernetzt sind, scheinen geeignet, genau solche mentalen Schemata und Strukturen aufzubauen, die als notwendige Grundlage für Sprachbildung verstanden wurden. Die Beziehungen, ohne die Vernetzung nicht möglich ist, erfahren besondere Betonung in der Anwendung des operativen Prinzips. Die Begriffe und Schemata werden ihrerseits bei Handlungen an Material, der Arbeit an verschiedenen Modellen und auf verschiedenen Darstellungsebenen sowie in kooperativen Lernformen wie Gruppenarbeit konstruiert. Dass *alef* ein Curriculum bereithält, das tatsächlich aufgrund der Gleichwertigkeit der mathematischen Grundbegriffe den Rechenunterricht eher ersetzt anstatt ihn nur zu ergänzen, ist gleichsam durch die Zielsetzung zu erklären: Die verinnerlichten logisch-mathematischen Strukturen sind alle gleichermaßen wichtig für den Aufbau einer präzisen Sprache. Die Rekontextualisierung der ursprünglichen Ideen ist jedoch keineswegs nur durch die theoretischen Zielsetzungen bedingt. Speziell im Fall von *alef* ist klar, dass die praktischen Erfahrungen und die Evaluationsergebnisse aus dem *Frankfurter Projekt* Einfluss auf die Ausgestaltung des Unterrichtswerks hatten. Die Anpassungen an die Schulpraxis, die im Zuge mehrmaliger Revision stattgefunden haben, müssen erheblich gewesen sein, zumindest lässt die Aussage von Weis & Bauersfeld, dass das Lehrwerk die Arbeit im Projekt nur eingeschränkt abbildet, keinen anderen Schluss zu.[995]

Die erneute Überarbeitung im Zuge der Neuauflage basiert ebenfalls auf praktischer Erfahrung sowie auf Evaluationsergebnissen aus dem *Frankfurter Projekt*, das didaktisch-methodische Grundkonzept bleibt dabei das gleiche. Starke Veränderungen haben mit der wesentlich früheren Einführung der Zahlen allerdings im Hinblick auf den inhaltlichen Aufbau stattgefunden. Diese waren explizit nicht von den Verfassern selbstgewählt, widersprachen sogar deren Überzeugung; sie waren allein curricular bedingt. Es handelt sich hier also um eine von außen angestoßene Anpassung. Man kann hier von einer erzwungenen Rekontextualisierung sprechen, die es Bauersfeld et. al. nicht ermöglicht, ihren eigenen Weg in der gleichen Konsequenz weiterzugehen.

→ Im Hinblick auf die Rekontextualisierungen in der *alef*-Konzeption kann also festgehalten werden:

Die Kernideen wurden in der Breite übernommen und zu etwas Eigenem verbunden. Auswahl, Anpassung und Ergänzung sind zunächst bedingt durch die spezifische Zielsetzung des Programms sowie schulpraktische Erfahrun-

995. Weis & Bauersfeld, a. a. O., S. 130.

gen, später dann auch entscheidend – und gegen den Willen der Verfasser – durch die Vorgaben der curricularen Ebene.

Primärer Bezugspunkt für das Konzept von W. Neunzig und P. Sorger sind Z. P. Dienes und seine didaktischen und methodischen Prinzipien, andere Einflüsse werden nur am Rande erwähnt. ***Wir lernen Mathematik*** wird sogar ausdrücklich als eine Konkretisierung der Dienes-Konzeption bezeichnet, angepasst an die bundesdeutsche Schulrealität. Es wird damit bereits hier deutlich, dass äußere Bedingungen die Art und Weise der Rekontextualisierung der Dienesschen Ideen entscheidend beeinflusst haben. Solche expliziten Anpassungen sind das Abweichen vom absoluten Primat der Gruppenarbeit hin zu einer Kombination von Gruppenarbeit und Frontalunterricht, die u. a. damit begründet wird, dass anderes vor dem Hintergrund bundesrepublikanischer Schulrealität nicht durchsetzbar scheint. Gleiches gilt hinsichtlich der Systematik im inhaltlichen Aufbau, dem eine gewisse logische Reihenfolge zugrunde gelegt wird, die die Offenheit in der ursprünglichen Konzeption erheblich einschränkt. Die Zielsetzung wird im Wesentlichen von Dienes übernommen, ebenso die Inhalte Arithmetik, Mengen und Eins-zu-Eins-Zuordnung für den Anfangsunterricht, wobei die Anordnung der Inhalte, also das zunächst strikte Nacheinander von Mengenkurs und Arithmetik hier durch ebendiese Forderung nach einer festen Systematik bestimmt wird und in der Form von Dienes wohl nicht intendiert war. Relationen werden dagegen nicht explizit thematisiert, Geometrie zunächst gar nicht.

Die von Dienes vorgesehene Konzeption eines an mehreren algebraischen Strukturbegriffen orientierten Spiralcurriculums wird dadurch, zumindest für das 1. Schuljahr, zu einem an nur *einem* strukturellen Leitbegriff ausgerichteten Curriculum, und zwar dem Begriff der Menge. Der Zweck, den die Mengenlehre erfüllt, scheint ein doppelter. Dass sie mit dem Ziel eingeführt wird, die Arithmetik zu fundieren, ist klar. Dass ihr offenbar darüber hinaus ein Wert als eigenständiger Inhalt an sich sowie als Fundament der gesamten Mathematik, über die Arithmetik hinaus, zugestanden wird, lässt sich aus der Behandlung für die Arithmetik nicht unmittelbar notwendiger Begriffe wie der Schnittmenge ableiten. Andererseits ist es aber gerade die Schnittmenge, die auf der Wiederholungsseite zum Mengenblock fehlt, die also für den weiteren Lehrgang augenscheinlich von geringerer Wichtigkeit ist. Zieht man weiterhin die Inhaltsübersicht (s. S. 175) heran und erinnert an die Aussage von Neunzig, gemäß derer das Rechnen den roten Faden des Unterrichtswerks bildet, zeigt sich, dass hier keine Konzeption eines Mathematikunterrichts im Dienesschen Sinne vorliegt, sondern dass *Wir lernen Mathematik* exemplarisch für Konzeptionen eines mathematisierten bzw. eines durch Mathematik angereicherten Rechenunterrichts steht.

Von den didaktischen Prinzipien übernehmen Neunzig und Sorger für das 1. Schuljahr nur zwei, nämlich das Konstruktions- oder Aufbauprinzip, das sich in der vorgesehenen Unterrichtsmethodik konkretisiert, sowie das Prinzip der Variation der Anschauung. Dass die methodischen Grundsätze bei Dienes hier in weiten Teilen übernommen werden, liegt in diesen Prinzipien begründet. Die eigenhändige Arbeit an strukturiertem Material nach den Regeln spezieller Lernspiele ist essentiell für das Konstruktionsprinzip. Es entspricht überdies Piaget, der von Neunzig und Sorger an dieser Stelle auch ergänzend als Argumentationsgrundlage herangezogen wird. Die Anschauung wird in der 2. Auflage stärker variiert, die Variation bleibt dabei auf die ikonische Ebene beschränkt, auf der die Mengendarstellungen Venn-Diagramm und Straßenkreuzung noch durch die Tordarstellung ergänzt werden. Als Material stehen die Logischen Blöcke im Mittelpunkt, die von Dienes übernommen wurden.[996] Eine Fibel oder allgemeiner ein Schülerbuch sieht Dienes nicht vor. Arbeitskarten, das von ihm vorgeschlagene Instruktions-Medium, werden erst später von Neunzig und Sorger als Ergänzung herausgegeben. Vergleicht man die übernommenen didaktischen Prinzipien mit den nicht übernommenen, so fällt auf, dass Neunzig und Sorger ihren Lehrgang auf diejenigen gründen, die unterrichtsmethodische Forderungen implizieren.[997] Das Prinzip der mathematischen Variabilität, das dynamische Prinzip und die Theorie vom tiefen Ende betreffen dagegen inhaltliche Fragen und führen als Grundlage einer Gesamtkonzeption weiter weg vom Rechenunterricht, näher hin zur Mathematik.

Die äußeren Bedingungen, vor deren Hintergrund Neunzig und Sorger die Ideen von Dienes rekontextualisiert haben, sind relativ klar dargelegt: Die erste Ausgabe von *Wir lernen Mathematik* erschien zu einem Zeitpunkt, zu dem in der gesamten Bundesrepublik die Lehrpläne des Volksschul-Rechenunterrichts in Kraft waren. Selbst wenn davon ausgegangen werden konnte, dass die Reformbemühungen in absehbarer Zeit zum Erlass neuer Richtlinien führen würden, so war doch nicht vorhersehbar, wie diese aussehen würden. Das Lehrwerk musste also trotz des Anspruchs auf einen mathematischen Unterricht in weitgehender Übereinstimmung mit den Lehrplänen für den Rechenunterricht gestaltet sein. Die umfassende Anpassung der Dienes-Konzeption an dieses Erfordernis führte zu einer erheblichen Verkürzung auf verschiedenen Ebenen, naturgemäß vor allem auf der inhaltlichen. Die Einführung eines elementaren Mathematikunterrichts, der algebraische Strukturbegriffe in den Mittelpunkt stellt, war zu diesem frühen Zeitpunkt nicht denkbar. Ein weiterer Umstand, der Einfluss auf das Konzept genommen hat, scheint

996. In höheren Klassen werden dann auch die Mehrsystemblöcke, das zweite sehr bekannte Dienes-Material, eingesetzt; da Stellenwertsysteme im 1. Schuljahr noch nicht thematisiert werden, spielen die Blöcke hier noch keine Rolle.

997. Der Befund passt damit zu Neunzigs Aussage, der methodische Teil der Reform sei am wichtigsten, Neunzig, Entwurf, S. 132.

die methodische Tradition in der Schulrealität gewesen zu sein. Zumindest ist die Feststellung, dass reine Gruppenarbeit an den deutschen Schulen nicht umsetzbar sei, so zu interpretieren. Die Umformulierung im Lehrerband der zweiten Auflage, die die Forderung nach regelmäßiger Einteilung der Schulklasse in Arbeitsgruppen relativiert, bestätigt diese Einschränkung von außerhalb. Sorger spricht selbst davon, dass das Unterrichtswerk voller Kompromisse stecke, diese sind jedoch mit der zweiten Auflage nicht wirklich beseitigt worden. Wodurch genau die frühere Einführung der Zahlen in der Neuauflage primär bedingt ist, wird nicht klar. Die Aufnahme weiterer mathematischer Inhalte oder eine tiefergehende mathematische Betrachtung der arithmetischen Inhalte, die über die Mengenperspektive hinausgeht, z. B. durch funktionale Variation, bleiben auch hier zunächst aus und werden erst in den späteren Arbeitskarten berücksichtigt. Diese sind aber nicht als eigenständige Neuauflage, sondern nur als Ergänzung der Fibel vorgesehen, so dass sich insgesamt feststellen lässt:

→ Die Rekontextualisierung der Dienes-Konzeption im Rahmen der zunächst noch geltenden Lehrpläne für den herkömmlichen Rechenunterricht sowie der methodischen Schulrealität hatten eine starke Verkürzung des Konzepts auf einen mathematisierten Rechenunterricht zur Folge, dessen Mathematisierung sich im Wesentlichen in der Aufnahme eines – zunächst geschlossenen – Mengenvorkurses konkretisierte.

Fricke und Besuden stützen ***Mathematik in der Grundschule*** praktisch vollständig auf Piaget. Im Angesicht dessen, dass Piaget nur psychologische Theorien, aber keine didaktischen Konsequenzen formuliert hat, muss die Entwicklung ihres Unterrichtswerks mit umfassenden Anpassungen einhergegangen sein. Zwar beziehen sie sich auf die Vorarbeiten Aeblis, dessen Folgerungen für Unterricht bleiben aber meist allgemein und werden nur exemplarisch konkretisiert. Ein Lehrgang nach Piaget, der Operationen als verinnerlichte Handlungen definiert, ist auf Material angewiesen, an dem beim Umgang mit ihm Strukturen offengelegt werden können. Fricke und Besuden bedienen sich hierzu für den Rechenunterricht bei dem bereits existierenden und bekannten Material der Cuisenaire-Stäbe und passen dessen Einsatz seinerseits an ihre operativen Prinzipien an. Sie übernehmen zwar die Stäbe von Gattegno, explizit aber nicht dessen Vorschläge zum Umgang mit diesen. Ebenso wenig identifizieren sie sich mit dem ganzheitlichen Unterricht, mithin auch nicht mit Konzepten eines ganzheitlich-operativen Rechenunterrichts. Inwiefern internationale Entwicklungen aus der Richtung des *arithmetically oriented approach* Einfluss auf die Konzeption genommen haben, kann hier nicht festgestellt werden, da diese nicht näher betrachtet wurden. Keinesfalls ist aber das Material selbst Ausgangspunkt der Konzeptentwicklung, sondern die Stäbe werden innerhalb des Rahmens der Piagetschen Theorie selbst rekontextualisiert, nicht andersherum.

Vergleichbares gilt für Ideen aus anderen Quellen. Von Dienes beispielsweise wird nur übernommen, was sich in den Lehrgang nach Piaget ohne Weiteres einfügt, wahlweise werden Elemente auch verändert, so wie das strukturierte Material der Formenplättchen, die zwar auf den Logischen Blöcken basieren, aber von vier auf drei Merkmale, ebenso wie von vier auf drei Formen reduziert werden. Die Winkelplättchen, die schließlich als weiterer fester Bestandteil des Kurses dazukommen, scheinen ohne Vorbilder von Fricke und Besuden selbst erfunden worden zu sein.

Die methodischen Grundsätze wie Handlungsorientierung, Selbsttätigkeit und Materialeinsatz sind, da kompatibel, übernommen worden. Gleiches gilt für die didaktischen Prinzipien von Dienes, die Variation der Anschauung (oder Mehr-Modell-Methode), zumindest in Teilen das Konstruktionsprinzip (dass nämlich Strukturen beim Handeln am Material offenbar und verinnerlicht werden, auch wenn die Methode des Lernspiels hier nicht die Rolle spielt, wie sie es bei Dienes tut) und z. T. die Theorie vom tiefen Ende, wobei unklar ist, inwiefern diese hier auf Dienes zurückgeht, da weder sein Name noch seine Bezeichnung des Prinzips genannt werden. Nicht übernommen wurden Ideen zu einer offeneren Unterrichtsorganisation. Das Grundbuch ist zentrales Medium im Unterricht, und Gruppenarbeit ist zwar erwünscht, wird aber nicht in dem Maße betont wie z. B. bei Dienes. Wo – zumindest im ursprünglichen Konzept der Ausgabe A – erhebliche Unterschiede zu den in Kapitel I aufgeführten Einflüssen bestehen, ist bei der Auswahl der Inhalte. Die Arithmetik ist schwerpunktmäßiger Inhalt, das Spezifikum liegt in der relationalen Betrachtung der Arithmetik, die den Mengenbegriff einschließt, aber nicht im Sinne eines mathematischen Objekts mit eigenem Bildungswert. Während das Fehlen der Geometrie und die Nichtberücksichtigung des Gruppenbegriffs, wiewohl sich für beides bei Piaget gute Argumente finden, anfangs noch darüber zu begründen sind, dass ihre Einführung mit den geltenden Lehrplänen des Rechenunterrichts nicht kompatibel ist, wird auf eine tiefergehende Behandlung des Mengenbegriffs aus Überzeugung verzichtet. Sie hat im Rahmen des operativen Gesamtkonzepts schlicht keinen Wert. Die Rekontextualisierung der inhaltlichen Ideen, wie sie sich u. a. bei Dienes finden, besteht also praktisch in einer Nichtberücksichtigung bzw. sogar Ablehnung der Inhalte, was wiederum im speziellen Verständnis von Mathematisierung begründet liegt. Und zwar bedeutet dies für Fricke und Besuden gerade nicht, dass die bisherigen Inhalte des Rechenunterrichts durch mathematische Begriffe ergänzt oder gar abgelöst werden, sondern dass sie als exemplarisch für die Mathematik aus fachlich-struktureller Perspektive betrachtet werden. Fricke und Besuden liefern somit weniger ein Konzept für einen Mathematikunterricht in dem Sinne, dass das Fach gleichmäßig und spiralcurricular auf mehreren fundamentalen mathematischen Ideen aufbaut, ihr Konzept entspricht eher einem mathematisierten Rechenunterricht, vielleicht sollte man sogar passender von einem arithmetisierten Mathematikunterricht sprechen. Die Kernidee, Mathematik das gesamte Curriculum hindurch als Einheit zu vermitteln, steht hierzu nicht im Widerspruch. Wenn Mathematik eine bestimmte Denkform ist, dann ist der Lehrgang in der Lage, genau das zu leisten.

Dass *Mathematik in der Grundschule* mit Ausgabe B schließlich doch den Weg geht, Mengen als eigene mathematische Objekte zu behandeln und den Lehrgang explizit an zentralen inhaltlichen Leitideen zu orientieren, womit sich die Verfasser den ursprünglichen Ideen der wissenschaftlich-theoretischen Ebene annähern, ist wiederum curricular bedingt und entspricht nicht ihrer inneren Überzeugung. Es gelingt ihnen dennoch, diesen Paradigmenwechsel so zu vollführen, dass das Ergebnis kohärent und die Begründungen und Erläuterungen schlüssig sind. Ihren eigenen Weg konsequent weiter zu verfolgen, war den Autoren jedoch ebenso wenig möglich wie den Autoren von *alef*. Das oben Gesagte gilt im Übrigen mutmaßlich nicht für die Geometrie, es ist davon auszugehen, dass sich Fricke und Besuden mit der Aufnahme geometrischer Inhalte durchaus identifizieren konnten, sie bleiben auch Bestandteil des Schulbuchs bis zur letzten Ausgabe.

→ Während Piaget der überragende Bezugspunkt ist, aus dessen Theorien Fricke und Besuden einen sehr eigenständigen Lehrgang nach der operativen Methode entwickeln, werden weitere ursprüngliche Ideen rekontextualisiert, indem sie übernommen werden, sofern sie in das Konzept passen, und ansonsten abgelehnt werden. Bedingt durch curriculare Entwicklungen sind die Autoren jedoch gezwungen, weitere, vor allem inhaltliche Kernideen zu übernehmen; sie rekontextualisieren diese, indem sie sie der Piagetschen Theorie unterordnen.

In der Summe ist es schwierig, Aussagen darüber zu treffen, inwiefern die ursprünglichen konzeptuellen Ideen, die als maßgeblich für die Reform in der Bundesrepublik Deutschland gelten, auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene rekontextualisiert wurden, da erhebliche Unterschiede zwischen den hier betrachteten Lehrwerken und ihren Grundlegungen deutlich geworden sind. Einige allgemeine Aussagen lassen sich dennoch ableiten.

- Die ökonomischen Zielsetzungen, denen in Royaumont ein großer Stellenwert zukam, werden auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene praktisch nicht als Argument für die Notwendigkeit der Reform oder die Gestaltung der Lehrwerke herangezogen, es findet sich lediglich bei Neunzig und Sorger das mutmaßlich von Dienes übernommene Argument der Bedeutung mathematischen Denkens für die Berufswelt. Überhaupt lässt sich an keiner Stelle ein unmittelbarer Einfluss des Seminarberichts nachweisen; wo es inhaltliche Übereinstimmungen gibt, da handelt es sich um Ideen, die sich auch in den anderen Quellen finden. Es ist also davon auszugehen, dass von Seiten der Grundschuldidaktik die Ergebnisse des Royaumont-Seminars gar nicht rekontextualisiert wurden, weil man sie schlicht nicht direkt berücksichtigt hat.

- Die methodischen Grundsätze, wie sie sich besonders bei Dienes expliziert finden, werden in unterschiedlichem Maße übernommen. Anpassung betraf besonders die Offenheit des Unterrichts. Es gibt Hinweise darauf, dass ein wesentliches Kriterium dafür, wie weit die rekontextualisierte Methode von der ursprünglichen entfernt war, die „Machbarkeit" vor dem Hintergrund traditioneller Gepflogenheiten in bundesdeutschen Klassenzimmern war. Mit *alef* gab es ein Konzept, das die Vorschläge sehr weitgehend übernommen hat; das Werk war nur gering verbreitet, weil es zu weit entfernt war von dem, was man gewohnt war.

- In Verallgemeinerung dessen lässt sich feststellen, dass **die schulpraktische Ebene die Rekontextualisierung von der wissenschaftlichen zur unterrichtskonzeptionellen Ebene wesentlich mit bestimmt**. Das gilt natürlich auch insofern, wie Konzepte aufgrund empirischer Beobachtungen (Rückmeldungen von Lehrkräften ebenso wie evaluative Forschung, wo es sie gibt) in der Schulpraxis revidiert werden.

- Didaktische Prinzipien wurden übernommen, allerdings wiederum in unterschiedlichem Maße. Mit dem EIS-Prinzip – wobei häufig nicht klar ist, inwiefern dies auf Bruner zurückgeht – und der Variation der Veranschaulichung sind am häufigsten diejenigen Prinzipien in die Konzeptionen eingeflossen, die eher auf unterrichtsmethodischer Ebene realisiert werden können, während diejenigen, die eine neue inhaltliche Herangehensweise erfordern, vernachlässigt werden. Das gilt besonders für das Lehrwerk von Neunzig und Sorger, die sich zwar von den hier betrachteten Quellen am explizitesten und fast ausschließlich auf Dienes beziehen, dessen Prinzipien aber am stärksten eingeschränkt umsetzen.

- Den Unterrichtswerken liegen sehr unterschiedliche curriculare Gesamtkonzepte zugrunde. Die Idee eines durchgängigen Mathematikunterrichts, der sich an mehreren gleichberechtigten fundamentalen mathematischen Ideen orientiert, in denen die Arithmetik aufgeht, konnte sich nicht durchsetzen. Sie wurde zumeist zum Konzept eines **mathematisierten Rechenunterrichts** rekontextualisiert. Die Gründe hierfür dürften vielfältig sein: unterrichtliche Traditionen, Ausbildung der Lehrer etc. und nicht zuletzt die hohe

Relevanz der Arithmetik. Auch hier gilt wieder, dass *alef* dem Brunerschen Spiralcurriculum sehr nah kam, aufgrund der geringen Verbreitung kann das Programm aber gerade wieder als Indiz dafür gewertet werden, dass das Gegenteil üblich war.

- Die Kernidee, den Zahlbegriff durch mathematische Begriffe, zu denen der der Menge zählt, zu fundieren, wurde in allen hier beschriebenen Konzepten übernommen, die Art und Weise war allerdings verschieden und bedingt durch unterschiedliche Schwerpunktsetzung bezüglich der Einflüsse und des Verständnisses von Mathematik. Insbesondere die **Rolle der Mengenlehre sowie ihre Beziehung zur Mathematik und zum Rechnen und damit wesentliche theoretische Grundlagen waren uneinheitlich**.

- Die Kernidee, den elementaren Mathematikunterricht bereits in der Breite gleichmäßig an mehreren mathematischen Leitideen auszurichten, wurde in den meisten Fällen nicht umgesetzt. Stattdessen wurde die Menge zum dominanten Begriff, teilweise sogar zum einzigen fundamentalen Begriff. Mit *alef* wurde hier ein Lehrgang betrachtet, in dem die Mengen nicht dominant sind, es gelten aber die obigen Bemerkungen. Mit *Mathematik in der Grundschule* wurde ein weiteres Konzept beschrieben, das ebenfalls den Mengenbegriff nicht stark betont und das zudem in Teilen Deutschlands relativ weit verbreitet war. Fricke und Besuden liefern aber über ihren eigenen Lehrgang hinaus durch zahlreiche Andeutungen eine aussagekräftige Quelle dafür, dass ein geschlossener Mengenvorkurs und eine generelle Überbetonung des Mengenbegriffs bis hin zum „Mengenlehrekult“ die Regel waren, zumindest in der Anfangszeit der Reform. *Wir lernen Mathematik* ist ein Beispiel für genau so ein Unterrichtswerk, das die Mengenlehre stark betont und der Arithmetik voranstellt und beides weitgehend hintereinander behandelt. **„Mathematik“ wurde also offenbar häufig zu „pränumerischer Mengenlehre“ rekontextualisiert**, was im Übrigen auch eine Erklärung für die öffentliche Wahrnehmung der Reform und ihre bis heute übliche Bezeichnung bietet.[998] Die Gründe für diese Verkürzung sind nicht auf Anhieb offensichtlich, es wird weiter unten noch darauf eingegangen werden.

- Die Autoren der hier behandelten Unterrichtswerke eint der Versuch, ihre Konzepte tatsächlich direkt aus der wissenschaftlich-theoretischen Ebene zu rekontextualisieren. In allen Fällen ist dies jedoch aufgrund curricularer Vorgaben nicht in der intendierten Konsequenz möglich. Während Neunzig und Sorger zunächst noch an Lehrpläne zum Rechenunterricht gebunden sind und

998. Dieser Befund hat sich bereits an diversen Stellen in Kapitel II.1 angedeutet und stimmt zudem mit entsprechenden Feststellungen von Keitel & Damerow, a. a. O., überein, s. S. 78f.

deshalb keinen in der Breite mathematischeren Lehrgang entwickeln können (zumindest keinen, der für die Schulen genehmigt wird), die Kompromisse aber auch mit der zweiten Auflage nicht weniger werden, erfahren Fricke und Besuden gerade das Gegenteil, ihr arithmetischer Unterricht muss durch mathematische Begriffe, vor allem durch den Mengenbegriff, ergänzt werden. Wieder anders ergeht es Bauersfeld, der in sein mathematisches Programm die Zahlen früher einführen muss, als es seiner Überzeugung entspricht. Dass curriculare Vorgaben Einfluss auf die Gestaltung von Lehrwerken nehmen, ist klar. Was eher überrascht, ist, dass für alle hier betrachteten Unterrichtswerke die Richtlinien praktisch einen Störfaktor darstellen, der die Rekontextualisierung zwischen den beiden didaktischen Ebenen nicht nur mitbestimmt, sondern letztlich dazu führt, dass Kompromisse notwendig werden, die z. T. die anfängliche Stringenz der Lehrgänge aufweichen.

- Das hier genutzte Modell zur Beschreibung der Reform suggeriert, dass die Dokumente der curricularen Ebene Rekontextualisierungen der wissenschaftlich-theoretischen Ebene darstellen. Die hier festgestellten Differenzen zwischen der curricularen und der unterrichtskonzeptionellen Ebene werfen indes die Frage auf, ob die Akteure der curricularen Ebene nicht ihre hauptsächlichen Einflüsse von einer anderen Ebene des Bildungssystems beziehen bzw. welche Bedingungen so maßgeblich für die Rekontextualisierung der wissenschaftlich-theoretischen Ebene sind, dass die Ergebnisse auf beiden Ebenen eine so geringe Passung aufweisen.

IV.2 Mengenlehre statt Mathematik – ein Erklärungsansatz

Die UNESCO-Tagung von 1966 hat gezeigt, dass es neben dem *basic-set approach* auf internationaler Ebene verschiedene weitere Reformansätze für eine Mathematisierung des Anfangsunterrichts gab, und für die Bundesrepublik Deutschland existierten mit *Mathematik in der Grundschule* und *alef* ebenfalls zwei frühe Reformprogramme, die in eine andere Richtung gingen. Die Dominanz der Mengenlehre war somit in der westdeutschen Reformbewegung nicht von Anfang an angelegt. Wie also ist es zu erklären, dass der Mengenansatz so bestimmend für die Grundschulreform werden konnte, dass er ihr Bild so nachhaltig geprägt hat?

Z. P. Dienes gilt als einer der Vertreter des *basic-set approach*. Dienes' Einfluss auf die bundesdeutsche Reform war zweifellos groß, seine Schriften weit verbreitet und sein Bekanntheitsgrad spätestens nach mehreren TV-Auftritten auch bei nicht mathematisch Interessierten hoch. Dienes alleine kann dennoch kaum ein so großer Einfluss zugesprochen werden, in Verbindung mit den massiven Werbemaßnahmen des Herder-Verlags und dem Lehrwerk von Neunzig und Sorger aber, das durch das frühe Erscheinen und die weite Verbreitung gewissermaßen stilbildend wirkte, kann eine erhebliche Wirkung der Dienes-Konzeption auf die Reformbewegung angenommen werden. Wenn man davon ausgeht, dass *Wir lernen Mathematik* für viele weitere Lehrwerke als Folie gedient hat, erklärt sich, wie der geschlossene pränumerische Mengenkurs ein typisches Reformmerkmal werden konnte. *Wir lernen Mathematik* konnte nur aufgrund seiner frühen Veröffentlichung eine solche Wirkung entfalten. Der frühe Erscheinungszeitpunkt wiederum bedingte die Kopplung an im Grunde überholte Richtlinien, die sich in einem Schulbuch „voller Kompromisse“ konkretisierte, das in der Folgezeit beispielhaft für andere wurde.[999] Vorrangig durch die Aktivität des Herder-Verlags ergibt sich hier eine Gemengelage, die kaum zu etwas anderem als einer unvollständigen Reform führen konnte, die im Wesentlichen dadurch gekennzeichnet war, dass dem Rechenunterricht ein Mengenkurs vorgeschaltet wurde, der mit der Arbeit an Merkmalsplättchen ausgestaltet wurde.

Die erste Ausgabe des Unterrichtswerks von Fricke und Besuden erschien indes noch früher als *Wir lernen Mathematik*. Sie bietet eine schlüssige Konzeption für den arithmetischen Unterricht, der gleichzeitig eine Mathematisierung an den herkömmlichen Inhalten anstrebt, mit Piaget eine gewichtige Argumentationsgrundlage aufweisen kann und nicht gering verbreitet war. Da es sich bei Ausgabe A um ein Buch für den Rechenunterricht handelte, hatte Ausgabe B zudem den Vorteil, unmittelbar an den Rechenunterricht anzuknüpfen. Es bleibt die Frage, warum der *arithmetically oriented approach* kein größeres Gewicht in der Reform gewinnen konnte. Die bisherigen Beobachtungen legen nahe, dass den Richtlinien hier eine entscheidende Rolle zukommt.

Die in dieser Arbeit exemplarisch betrachteten niedersächsischen Lehrpläne zeigen, dass das operative Prinzip, der Begriff der Relation und das Maschinen-Modell durchaus einen relativ großen Raum darin einnehmen, und zwar bereits 1972 in den *Handreichungen*, und damit bevor das operative Üben 1976 durch die erneuerten KMK-Richtlinien vorgegeben wurde. Nun hat Besuden an den *Handreichungen* mitgearbeitet, auf denen wiederum die späteren Rahmenrichtlinien aufbauen, und es ist davon auszugehen, dass sich sein Einfluss an diesen Stellen widerspiegelt. Einerseits sind die niedersächsischen Lehrpläne also im Hinblick auf die Gewichtung operativer Prinzipien vielleicht weniger repräsentativ, andererseits sind sie umso aussagekräftiger, angesichts der Tatsache, dass selbst hier, wo ein entschiedener

999. vgl. auch Röhrl, a. a. O., S. 254, wo die Rede ist von „schlechten Schulbüchern [...] für die Zeit des Übergangs, Schulbücher der in den Verlagen als nötig erachteten Kompromisse“.

Gegner der Mengenkonzeption an den curricularen Vorgaben mitgeschrieben hat, die Mengenlehre letztlich dominant ist. Ein offensichtlicher Grund hierfür sind die *Empfehlungen und Richtlinien* der KMK von 1968, an deren Struktur der Themenkreise sich die *Handreichungen* klar anlehnen. Eine entscheidende Ursache für jedwede Überbetonung der Mengenlehre läge dann in der Tat in diesen Richtlinien, die den Zugang über Mengen verbindlich auswählten, ohne dass verantwortliches Personal aus der Grundschuldidaktik daran beteiligt gewesen wäre. Was indessen nicht von der KMK intendiert war, ist ein pränumerischer Mengenvorkurs, wie er schließlich in allen Länderrichtlinien vorgesehen ist. Es ist nicht auszuschließen, dass das Lehrwerk von Neunzig und Sorger bis in die curriculare Ebene als Vorbild gewirkt hat.

Worauf die übermäßige Betonung der Mengen von Seiten der Kultusminister beruht, ist nicht ganz klar. Die KMK bezieht sich namentlich auf die Aktivitäten der OECD. Der Royaumont-Bericht, dem damit mittelbar doch ein erheblicher Einfluss zukäme, nennt zwar Mengen als essentiellen mathematischen Begriff, der die gesamte Mathematik fundiert, vor allem möchte man aber das Curriculum an algebraischen Strukturen ausgerichtet sehen. Auch der *Nürnberger Lehrplan* sieht die Orientierung an mehreren grundlegenden mathematischen Begriffen vor. Allerdings kommt den Mengen hier bereits größere Wichtigkeit zu, da sie gemeinsam mit der Logik arithmetische Zusammenhänge fundieren. Es könnte hierin ein Erklärungsansatz liegen, insofern, als eben die Mengen, anders als z. B. Abbildungen, unmittelbare Bedeutung für das zentrale Teilgebiet der Arithmetik haben. Möglich auch, dass die der Mengenlehre zugesprochene Eignung für den Anfangsunterricht hier eine Rolle gespielt hat. Beides, die Festschreibung des Mengenansatzes durch die Kultusminister sowie die weite Verbreitung der beispielgebenden Konzeption von Neunzig und Sorger durch den Verlag, scheint einer gewissen Zufälligkeit unterlegen zu haben.

Interessant ist vor diesem Hintergrund auch noch, dass Neunzig den Mengenschwerpunkt zu einem frühen Zeitpunkt explizit mit Bezug auf Dienes und W. Breidenbach begründet[1000], Letzterer ein Vertreter der Rechenmethodik. Möglicherweise war also die Zahleinführung über Mengen an Konzepte für den Rechenunterricht anschlussfähig.

1000. Neunzig, Entwurf, S. 136.

IV.3 Die schulpraktische Ebene als Einflussfaktor auf Rekontextualisierungen

Hinweise zur schulpraktischen Ebene, die die Unterrichtspraxis sowie deren Rezeption und damit als Akteure Lehrpersonen, Eltern und Schülerschaft umfasst, wurden bereits an verschiedenen Stellen wiedergegeben. Die Ausführungen dazu in den Unterrichtswerken decken sich im Allgemeinen mit denen in der weiteren Literatur, so dass sich ein recht konsistentes Bild ergibt. Sie werden im Folgenden nochmals zusammengefasst und unter der Fragestellung betrachtet, inwiefern sich hier mögliche Gründe für einen Teil der im Vorhergehenden beschriebenen Rekontextualisierungen finden.

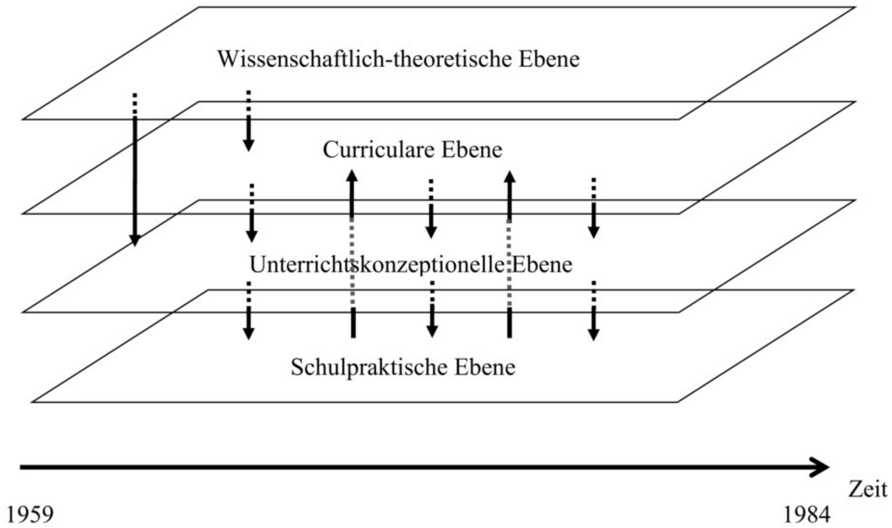
Der traditionelle Rechenunterricht wird übereinstimmend beschrieben als durch eine methodische Tradition gekennzeichnet, in der die Lehrkraft im Mittelpunkt steht. Sie bietet neue Inhalte auf fest vorgegebenen Abstraktionsstufen dar, zeigt Veranschaulichungen und macht Verfahren vor; den Schülerinnen und Schülern obliegt es, das Gezeigte nachzumachen und auswendig zu lernen. Der sprachliche Anteil am Unterricht ist insgesamt hoch, jedoch ungleichmäßig verteilt; es spricht hauptsächlich die Lehrperson. Die Darbietungen erfolgen anhand der Fibel und spezieller Anschauungsmaterialien, deren Wahrnehmungen Begriffsbildung durch mentale Abbildung des Gesehenen bewirken sollen. Verfahren, die im Mittelpunkt stehen, und Rechensätze sollen unter dem Einsatz von Drill und behavioristischen Reiz-Reaktions-Mechanismen auswendig gelernt werden. Zunächst einmal ist festzuhalten, dass ein solcher Unterricht mit den zeitgenössischen psychologischen Theorien so wenig vereinbar ist, dass die unbedingte Notwendigkeit einer methodischen Reform außer Frage steht.

Nun geben die Quellen darüber hinaus Hinweise darauf, dass die Umsetzung des methodischen Teils der Reform nicht auf Anhieb gelungen ist, offenbar war es Lehrkräften nicht in jedem Fall möglich, Einstellung und Verhalten im Unterricht zu ändern, ihre dominante Rolle aufzugeben, den Kindern die wesentlichen Aktivitäten zu überlassen und so den Unterricht insgesamt zu öffnen. Das ist wenig überraschend. Man muss nicht das Schlagwort der „doppelten Diskontinuität“[1001] bemühen, um sich klar zu machen, über welche Stärke Bildungstraditionen verfügen. Dieser Umstand ist nicht auf das Bildungswesen beschränkt, er wirkt wohl in praktisch allen Bereichen der Gesellschaft, das Bildungswesen scheint hier aber

1001. das im Wesentlichen die Neigung von Lehrkräften impliziert, auf die Art und Weise zu unterrichten, wie sie selbst einst unterrichtet worden sind, vgl. für das Originalzitat von Felix Klein z. B. Allmendinger, a. a. O., S. 1; vgl. auch Fend, Literatur, S. 10: „Schule geht es zentral um die Bewahrung und Weiterentwicklung einer kulturellen Tradition“.

noch einmal besonders betroffen. Des Weiteren betreffen die beschriebenen Missstände in der schulpraktischen Umsetzung Aspekte wie eine zu starke Betonung von Symbolen und generell Formalismen, die mit einer engen Sprachführung und dem Aufdrängen fest vorgegebener Sprachmuster einhergehen. Die Sozialform der Gruppenarbeit traf auf Skepsis, nicht zuletzt, weil Lehrerinnen und Lehrer schlicht ungeübt in ihrer Durchführung waren. Beides weist auf ein weiteres Problem neben der Macht methodischer Traditionen hin. Die Verwissenschaftlichung der Lehrerbildung steckte gewissermaßen noch in den Kinderschuhen, gerade ältere Lehrkräfte verfügten nicht über eine fachwissenschaftliche Ausbildung, die eine spiralcurriculare Vernetzung mathematischer Begriffe bzw. die Einordnung der Inhalte aus der Neuen Mathematik in ein solches Netz aus Begriffen und Beziehungen erst ermöglicht. Selbst wenn sie reibungslos verlaufen wären, hätten die Lehrerfortbildungen dieses Defizit kaum vollständig ausgleichen können. So ist es nachvollziehbar, dass Lehrpersonen, die den Stoff nicht von höherer Warte aus durchschauen, dessen Sinn und Bedeutung nicht erkennen und sich an Schulbücher klammern, dabei u. a. an die Nutzung korrekter Terminologie. Dass es den Lehrwerken in der Anfangszeit tendenziell an Übungsmaterial mangelte, dürfte die Problematik verschärft haben. Nicht nur die neuen Inhalte stellten einen höheren Anspruch, sondern ebenso die Unterrichtsorganisation, weshalb an mehreren Stellen eine Reform der Lehrerbildung in fachlicher wie methodischer Richtung gefordert wird. Viele Lehrkräfte rekontextualisierten also die Unterrichtsmaterialien vor dem Hintergrund ihrer Ausbildung, Einstellung und Gewohnheiten.

Die hier beschriebene Situation beeinflusst die Gestaltung der Unterrichtskonzepte in mehrfacher Hinsicht, direkt ebenso wie indirekt. Neunzig und Sorger weisen in der 1. Auflage von *Wir lernen Mathematik* ausdrücklich darauf hin, dass ein Teil ihrer methodisch-didaktischen Kompromisse in der für weitergehende Neuerungen unzureichenden Lehrerbildung begründet liegt. Solche direkten Verweise finden sich bei den anderen nicht. Lehrerinnen und Lehrer waren nicht die einzigen, die mit Inhalten und Methoden nicht vertraut waren, Gleiches gilt für die Eltern. Die daher ohnehin bereits bei einem Teil vorhandenen Vorbehalte werden durch eine mangelhafte Umsetzung noch verstärkt worden sein. Der so schließlich entstandene Druck der Öffentlichkeit auf die Politik resultierte in curricularen Vorgaben, die wesentliche Teile der Reform nach und nach zurücknahmen und so die Verfasser von Lehrwerken zwangen, ihre Konzeptionen anzupassen. Zum Teil geschah dies gegen deren Willen – wie das Beispiel *alef* zeigt – , zum Teil ermöglichte es aber auch, wieder näher an die ursprüngliche Konzeption heranzurücken, wie im Fall von Fricke und Besuden. So oder so erforderten veränderte Lehrpläne jeweils eine neue Rekontextualisierung vor deren Hintergrund. Es ist davon auszugehen, dass die schulpraktische Ebene auf diesem Wege mittelbar die Anpassungsprozesse beeinflusst hat. In dem zugrunde liegenden Modell des Bildungssystems stellt sich die Beeinflussung der Ebenen dann folgendermaßen dar:



In der zeitlichen Dimension bewirkt die wechselseitige Beeinflussung zwischen schulpraktischer, curricularer und unterrichtskonzeptioneller Ebene die schrittweise Rücknahme der reformspezifischen Inhalte bei gleichzeitiger Stärkung der Arithmetik und des Sachrechnens. Davon weitgehend unberührt bleiben die Geometrie und die grundsätzliche Intention eines mathematischen Unterrichts in der Grundschule.

IV.4 Überlegungen zur historischen Einordnung

Eingangs wurden weiterführende und übergeordnete Fragen zu einer breiteren historischen Einordnung der „Mengenlehre" formuliert, die in diesem Rahmen nicht eingehend beantwortet werden können, weil sie weitergehende Untersuchungen erfordern. Der derzeitige Stand erlaubt aber, einige Vermutungen zu äußern.

1. Welchen (äußeren) Bedingungen war die Reform unterworfen, und wie entscheidend waren diese für ihren Verlauf und Erfolg?

Der vorhergegangene Abschnitt hat bereits gezeigt, inwiefern von den Akteuren der nicht primär fachdidaktischen Ebenen (Politiker, die curriculare Dokumente entwerfen, Eltern, die Einfluss nehmen, Verlage, die ökonomische Interessen verfolgen) Impulse auf den Reformverlauf ausgingen. Die Quellen liefern darüber hinaus Hinweise auf ungünstige Reformvoraussetzungen wie große Klassenstärken, ungeeignete Möblierung von Klassenräumen, unsachgemäße Darstellungen in den Medien, aber auch generelle konservative Tendenzen in der Nachkriegsgesellschaft der Bundesrepublik und somit auf Umstände, die außerhalb des Einflussbereichs der Protagonisten lagen. Inwieweit diese entscheidend im Hinblick auf Verlauf und Erfolg waren, lässt sich kaum feststellen. Es kann aber von einer Reihe ungünstiger äußerer Faktoren, wie den hier genannten, ausgegangen werden, die den Reformerfolg in Verbindung mit zahlreichen weiteren Umständen belasteten.

2. Welche Bedeutung hat die Reform für die Geschichte des Mathematikunterrichts bzw. welche Rolle in der Entwicklung kommt ihr zu (zeitlich begrenzte und überwundene Episode, nachhaltiger Wendepunkt...)?

In mancher Hinsicht muss die Reform wohl als Wendepunkt in der Geschichte des Grundschulunterrichts gesehen werden, denn schließlich markiert sie trotz aller Verkürzungen den Übergang vom Rechenunterricht zum Mathematikunterricht in der Grundschule, der neben Zahlen und Operationen auch andere Inhalte umfasst oder zumindest vorbereitet. So ist z. B. die Geometrie seither fester Unterrichtsstoff der Grundschule.[1002] Was die Mengenlehre selbst betrifft, so muss ihre Behandlung in der Grundschule als überwundene Episode gelten. Ihre Begriffe sind nicht nur vollständig aus den Curricula verschwunden, auch in Schulbüchern spielen sie aktuell keinerlei Rolle mehr. Um zu untersuchen, was darüber hinaus evtl. geblieben ist, wäre ein Vergleich mit aktuellen Schulbüchern, und zwar über solche für das 1. Schuljahr hinaus, lohnenswert.

3. Handelt es sich tatsächlich um ein singuläres Ereignis, ein Einzelphänomen, eine „besondere“ Reform oder finden sich zumindest gewisse Aspekte, die als prototypisch für Reformen des Mathematikunterrichts bzw. für Bildungsreformen im Allgemeinen gelten können?

Es gilt hier erneut, dass die Reform ihre Einmaligkeit aus dem Übergang vom Rechen- zu einem propädeutischen Mathematikunterricht bezieht, in dieser Hinsicht muss also tatsächlich von einem singulären Ereignis gesprochen werden. Es kann aber ebenso davon ausgegangen werden, dass es sich bei außerschulischen

1002. Wenn hier auch einschränkend festgestellt werden muss, dass der Befund von Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen, Hannover: Schroedel, 1991, S. 4, die Geometrie friste nach wie vor ein „eher stiefmütterliches Dasein“ in den Grundschulen, da die Arithmetik „traditionsgemäß für wichtiger“ gehalten werde, vermutlich bis heute aktuell ist, vgl. Franke, Marianne & Reinhold, Simone: Didaktik der Geometrie. In der Grundschule, Berlin [u. a.]: Springer Spektrum, 2016, S. xi f.; die hier diagnostizierte traditionelle Dominanz der Arithmetik ist zudem als potentieller Einflussfaktor auf den Verlauf der „Mengenlehre“ von Interesse.

Bedingungen, politischen Entscheidungen und langwierigen Traditionen um Rahmenbedingungen handelt, deren Einfluss auf das Reformgeschehen nicht spezifisch für die „Mengenlehre“ ist, sondern vielmehr typisch für Reformen des Bildungswesens, auch über den Mathematikunterricht hinaus.

4. Wie fügt sich die „Mengenlehre“ ein in die deutsche Tradition des mathematischen Elementarunterrichts? Wo sind Brüche, wo Kontinuitäten?

Die Einführung eines Grundschulfachs Mathematik, das die fast 500-jährige Tradition des reinen Rechenunterrichts bricht, stellt ganz klar einen tiefen Einschnitt dar. Es wird wohl niemand heute die Notwendigkeit eines Mathematikunterrichts in der Grundschule anzweifeln, ein gewisser Bruch war also unvermeidbar. Dieser Bruch betrifft auf jeden Fall die inhaltlich-curriculare Ausrichtung des Unterrichts, nach dem, wie die Praxis des Rechenunterrichts in den Quellen beschrieben wird, aber auch die methodische Seite. Um nähere Aussagen treffen zu können, wie tief der Einschnitt in dieser Hinsicht tatsächlich war und ob sich nicht doch auch Kontinuitäten finden, bedarf es vergleichender Untersuchungen, insbesondere unter Heranziehung methodischer Konzepte des vormaligen Volksschul-Rechenunterrichts, wie jenen von J. Kühnel („Neubau des Rechenunterrichts“), J. Wittmann (ganzheitlicher Rechenunterricht) oder W. Breidenbach. Solche Untersuchungen könnten dann auch nähere Hinweise zu Frage 3 liefern.

V Fazit: „Mengenlehre“ als Beispiel einer gescheiterten Reform?

Nimmt man die Nähe der Umsetzung von Reformkonzepten zu den Ideen und Zielen, die ihren ursprünglichen Ausgang markieren, als Kriterium für den Erfolg einer Reform, so muss die „Mengenlehre“ als gescheitert gelten. Die Reform ist gekennzeichnet durch eine Fülle an Anpassungen und Verkürzungen, auf den verschiedenen Ebenen.

K. Krüger nutzt genau eine solche Definition des „Scheiterns“, wenn sie die Meraner Reform als eine gescheiterte Reform wertet.[1003] Die Ziele Felix Kleins, die sich hier auf zwei schlagwortartige Grundideen konzentrieren, sind „in Lehrplänen, in Schulbüchern und wohl auch im Unterricht“ schlicht nicht in der intendierten Konsequenz umgesetzt worden, die beabsichtigte „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ ist letztlich im Wesentlichen der Aufnahme des Funktionsbegriffs in den Unterricht gewichen und damit ihres eigentlichen didaktischen Kerns beraubt worden. Es lassen sich hier Parallelen erkennen, die vermuten lassen, dass die „Mengenlehre“ auch unter diesem Aspekt als prototypisch gelten kann.

Es stellt sich dann allerdings die Frage, ob nicht jede Unterrichtsreform aufgrund der in ihrem Verlauf notwendigen Rekontextualisierungen zwangsläufig auf diese Weise scheitern *muss*.

Eine Folgerung aus dieser Überlegung ist, dass eine Bewertung der ursprünglichen Konzeption(en) zur „Mengenlehre“ im Hinblick auf Wirksamkeit und Sinnhaftigkeit gar nicht möglich ist, weil sie in der Schulpraxis nie in dieser Form angekommen ist bzw. sind. Es ist davon auszugehen, dass es sich hierbei um eine weitere verallgemeinerbare Parallele zu anderen Unterrichtsreformen handelt. Pauschale Kritik an Reformen kann kaum zielführend sein, Kritik sollte sich zumindest stets der Tatsache bewusst sein, dass unterschiedliche Akteursebenen existieren und auf

1003. Krüger, a. a. O., S. 301 f.

dieser Basis jeweils unterscheiden, auf welche Ebene des Bildungssystems sie sich bezieht.[1004]

Schwerwiegender ist die Frage, was sich aus einem solchen Befund für zukünftige Reformen lernen lässt, zeigt sich hier doch eine grundsätzliche Problematik: In der Form, wie Reformen in der Theorie geplant werden, können sie wohl niemals vollständig in die Unterrichtspraxis umgesetzt werden, Anpassungsprozesse aufgrund spezifischer Traditionen, äußerer Bedingungen, individueller Dispositionen der beteiligten Akteure etc. sind in jedem Fall unvermeidlich, und es ist davon auszugehen, dass die Änderungen und Verkürzungen im Zuge der Rekontextualisierungen umso weiter gehen, je umfassender die vorgesehenen Neuerungen sind. Die generelle Beschränkung von Reformvorhaben auf vereinzelte Neuerungen birgt dagegen die Gefahr, dass diese ohne Wirkung bleiben und zu Stagnation führen oder dass an das Bestehende einfach etwas Neues angehängt wird, zulasten eines schlüssigen Gesamtkonzepts, ganz so, wie bereits von Servais befürchtet[1005]. In beiden Fällen stünde am Ende ein Unterricht, der eher aus Versatzstücken verschiedener Konzepte als auf einer kohärenten Gesamtkonzeption basiert. Es ist dies ein Dilemma, das offenbar nicht zu lösen ist. Es sollte daraus natürlich nicht gefolgert werden, dass Weiterentwicklung von Unterricht nicht möglich ist; die in Reformvorhaben eingebundenen Akteure sollten sich jedoch von Anfang an dieser Grenzen bewusst sein, Vorschläge für Neuerungen stets sorgfältig aus verschiedenen Perspektiven auf Machbarkeit prüfen, zu diesem Zweck eine möglichst große Anzahl an Protagonisten der verschiedenen Ebenen einbeziehen – z. B. Ideen und Vorschläge mit Lehrern und Eltern diskutieren, sich regelmäßig mit den Schulbuchverlagen austauschen... – und ausreichend Zeit für ihre praktische Umsetzung einplanen.[1006] Zudem sollten grundlegende Begriffe im Vorfeld möglichst präzise definiert werden; individuelle Rekonstruktionen und Interpretationen sind natürlicher Bestandteil menschlichen Denkens und werden sich daher nie vermeiden lassen, es sollte aber ein Ziel sein, durch ausreichende Klärung begriffliche Missverständnisse so weit möglich gering zu halten, um eine stabile gemeinsame Diskussionsgrundlage zu schaffen.

Zu guter Letzt muss festgehalten werden, dass die „Mengenlehre" in ihrem Verlauf – und zwar in der zeitlichen ebenso wie in der nicht-zeitlichen Dimension – nur

1004. Man vergleiche vor diesem Hintergrund auch die undifferenzierte Schuldzuweisung für unzureichende Mathematikleistungen von Studierenden an die Kompetenzorientierung der Bildungsstandards, wie sie aktuell im so genannten „Brandbrief" vom 17.03.2017 formuliert wird, vgl. www.tagesspiegel.de/downloads/19549926/2/offener-brief.pdf .

1005. s. Zitat auf S. 34.

1006. vgl. auch Fend, Literatur, S. 184: „Mahnung, mit der Entwicklung von Curricula am „grünen Tisch" vorsichtig zu sein und an ihre Realisation unter den Bedingungen von alltäglicher Schulpraxis zu denken."

in ihrer historischen Bedingtheit verstanden werden kann. Zeittypische Umstände haben die verschiedenen Rekontextualisierungsprozesse genauso entscheidend mit bedingt wie – zumindest historisch gesehen – zufällige Entwicklungen; die Einflussfaktoren wären zu einer anderen Zeit andere gewesen.[1007] Inwiefern andere Umstände einen vergleichbaren Verlauf bedingt hätten, lässt sich naturgemäß nicht feststellen. Die grundsätzliche historische Bedingtheit von Reformen impliziert aber, dass es keinen Grund gibt, Konzepte aus zurückgenommenen Reformen pauschal als untauglich zu disqualifizieren. Dies gilt auch für Konzepte zur „Mengenlehre“ – zumal die Gründe für die endgültige Rücknahme letztlich weitgehend im Dunkeln bleiben. Die „Mengenlehre“ mag in vielerlei Hinsicht ein extremes Beispiel einer Unterrichtsreform gewesen sein, und dass ihre Sinnhaftigkeit nicht bewertet werden kann, heißt nicht, dass es keine konzeptimmanenten Schwierigkeiten gab. Es ist jedoch auffällig, dass ein großer Teil der didaktisch-methodischen Argumentation völlig kompatibel mit heutigen Vorstellungen von „gutem“ Mathematikunterricht ist. Es sollte daher – vorbehaltlich aller inhaltlichen Differenzen zu aktuellen Lehrplänen – zumindest eine Option sein, die Materialien der unterrichtskonzeptionellen Ebene bei der Suche nach Lösungen für aktuelle und drängende Fragen des Mathematikunterrichts, wie zunehmende Heterogenität, Inklusion oder Sprachbildung[1008], auf etwaige Einsatzmöglichkeiten zu prüfen.

1007. Es sei hier nur beispielhaft auf die Rolle empirischer Forschung verwiesen, die seinerzeit viel weniger umfangreich war als z. B. heute und als Einflussfaktor auf Rekontextualisierung gelten muss.

1008. Eine Masterarbeit an der Universität Hildesheim konnte zeigen, dass Materialien aus dem *alef*-Programm – in diesem Fall Arbeitsblätter zur Symmetrie aus den Bänden für die Jahrgänge 3 und 4 in Verbindung mit dem Formenspiel – , sofern sie angepasst und mit sprachfördernden Prinzipien verbunden werden, für den sprachbildenden Einsatz bei der Arbeit mit Flüchtlingskindern geeignet sind, vgl. Teichmann, Sonja: Sprachförderung im Mathematikunterricht anhand von spracharmem Material. Eine Studie mit mehrsprachigen Lernenden, Hildesheim: Universität Hildesheim, 2016 (unveröffentlichte Masterarbeit).

Literaturverzeichnis

Schulbücher und zu den Unterrichtswerken gehörige Materialien

Alef

Battermann, Heinrich & Windolph, Edeltraud: Alef 1. Wege zur Mathematik; Eltern-Information, Hannover: Schroedel, 1972. [zitiert als: Battermann & Windolph, Eltern-Information 1972]

Battermann, Heinrich & Windolph, Edeltraud: Alef. Wege zur Mathematik; Eltern-Information für das 1. und 2. Schuljahr, nach dem „Handbuch zum Lehrgang“ von Heinrich Bauersfeld u. a., Hannover [u. a.]: Schroedel, 1976. [zitiert als: Battermann & Windolph, Eltern-Information ^{2}1976]

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Arbeitsblätter für den Schüler, Hannover: Schroedel, 1969. [zitiert als: Alef 1, 1969/1970]

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Teil 1 und 2, Hannover: Schroedel, 1970. [zitiert als: Alef 1, 1969/1970]

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Arbeitsheft für den Schüler, Hannover: Schroedel, 1975. [zitiert als: Alef 1, 1975]

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Handbuch zum Lehrgang, Hannover: Schroedel, 1975. [zitiert als: Alef 1, 1975]

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 1. Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Lösungsheft, Hannover: Schroedel, 1975.

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Görner, Ulrike, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 2. Wege zur Mathematik; Arbeitsblätter, Hannover: Schroedel, 1970.

Bauersfeld, Heinrich, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Mitsos-Görner, Ulrike, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 2. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Teil 1 und 2, Hannover: Schroedel, 1970. [zitiert als: Alef 2]

Bauersfeld, Heinrich, Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard, Lubeseder, Ursula, Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Alef 3. Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang, Teil 1 und 2, Hannover: Schroedel, 1972. [zitiert als: Alef 3]

Gnirk, Hans-Joachim: Arbeiterkinder gewinnen durch die „Neue Mathematik", in: b:e. betrifft: erziehung 3 (1970), 10, S. 27-30.

Bauersfeld, Heinrich & Kleinschmidt, Gottfried: matema Formenspiel. 67 Legeplättchen zur Präfiguration von Grundbegriffen aus Geometrie und Arithmetik, Hannover: Schroedel, o. J.

Dick, O[tto] & Ziegler, Th[eodor]: Begriffsspiel. 48 Plättchen zur Grundlegung begrifflichen Denkens, Hannover: Schroedel, o. J.

Ziegler, Th[eodor]: Einführung in das „matema"-Begriffsspiel. Begleitschrift zu „matema" Nr. 1 – Begriffsspiel von O. Dick und Th. Ziegler, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1968.

Wir lernen Mathematik

Neunzig, Walter: Planogon. Geometrisches Figurenspiel mit 12 variablen Grundmustern in 6 Farben, Freiburg: Herder, 1972.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten: Geometrie, Freiburg: Herder, ©1972.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten 1: Mengen, Freiburg: Herder, ©1970.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. 1. Schuljahr; Arbeitskarten 2: Zahlen, Freiburg: Herder, ©1970.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I. Erstes Schuljahr, Freiburg: Herder, ©1968. [zitiert als: Neunzig & Sorger, Schüler 1968]

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I. Erstes Schuljahr; bearb. Aufl., Freiburg: Herder, ©1971. [zitiert als: Neunzig & Sorger, Schüler 1971]

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I / 1. Schuljahr. Lehreranleitung, Freiburg: Herder, ©1968. [zitiert als: Neunzig & Sorger, Lehrer 1968]

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik I / 1. Schuljahr. Lehreranleitung, Freiburg: Herder, ©1971. [zitiert als: Neunzig & Sorger, Lehrer 1971]

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik IV. Viertes Schuljahr, Freiburg: Herder, ©1970.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Anleitung, Freiburg: Herder, ©1974. [zitiert als: Neunzig & Sorger, Arbeitskarten Anleitung]

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Förderkurs, Freiburg: Herder, ©1974.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Grundkurs, Freiburg: Herder, ©1974.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Stützkurs, Freiburg: Herder, ©1974.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Arbeitskarten 1. Schuljahr; Test, Freiburg: Herder, ©1974.

Sorger, Peter: Wir lernen Mathematik. Spielpläne für die Primarstufe 1; Kurzkommentar, Freiburg: Herder, 1974. [zitiert als: Sorger, Spielpläne]

Mathematik in der Grundschule

Bergmann, H.: Mathematik in der Grundschule 1. Information 1: Mengenalgebra und Aussagenlogik im 1. Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1970.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Operatives Rechnen mit farbigen Stäben; erstes Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1967. [zitiert als: Fricke & Besuden, A]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Operatives Rechnen mit farbigen Stäben; erstes Schuljahr. Lehrerheft, Stuttgart: Klett, 1967. [zitiert als: Fricke & Besuden, A]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Klett-Übungsheft, Stuttgart: Klett, 1967.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Lehrerband, Stuttgart: Klett, 1972. [zitiert als: Fricke & Besuden, B]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Lehrerheft, Stuttgart: Klett, 1972.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Grundbuch, Stuttgart: Klett, 1972. [zitiert als: Fricke & Besuden, B]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Arbeitsheft G (Grundkurs) Teil 1 und 2, Stuttgart: Klett, 1972. [zitiert als: Fricke & Besuden, B]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Arbeitsheft E (Erweiterungskurs), Stuttgart: Klett, 1972. [zitiert als: Fricke & Besuden, B]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; (Teildruck Grundbuch), Stuttgart: Klett, 1972.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Arbeitsheft 1 und Arbeitsheft 2; Arbeitsheft 1 (Grundkurs) und Arbeitsheft 2 (Erweiterungskurs). (Teildruck), Stuttgart: Klett, 1972.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Teildruck des Lehrerbands: Erweiterung der C-Teile, Stuttgart: Klett, 1975.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 4. Ausgabe B. Grundbuch, Ausgabe Bayern, Stuttgart: Klett, 1975.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Grundbuch, Stuttgart: Klett, 1977.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Lehrerband, Stuttgart: Klett, 1977. [zitiert als: Fricke & Besuden, C]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Übungsheft Teil 1 und 2, Stuttgart: Klett, 1977.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Zusatzheft (Stützkurs), Stuttgart: Klett, 1977.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 2. Grundbuch für das 1. Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1977. [zitiert als: Fricke & Besuden, C2, Schüler]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 2. Lehrerheft, Stuttgart: Klett, 1977. [zitiert als: Fricke & Besuden, C2, Lehrer]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe C; Regionalausgabe 2. Übungsheft Teil 1, Stuttgart: Klett, 1977.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule 2. Ausgabe C; Regionalausgabe 1. Grundbuch, Stuttgart: Klett, 1978.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule. Neu; 1. Schuljahr, Stuttgart: Klett, 1984. [zitiert als: Fricke & Besuden, D, Schüler]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule. Neu; 1. Schuljahr, Lehrerband, Stuttgart: Klett, 1985. [zitiert als: Fricke & Besuden, D, Lehrer]

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik in der Grundschule. Neu; 1. Schuljahr, Übungsheft, Stuttgart: Klett, 1985.

Hermann, Alf: Fricke – Besuden, Mathematik in der Grundschule 1. Ausgabe B; Elternbuch, 2. Aufl., Stuttgart: Klett, ^{2}1973.

Mathematik in der Grundschule. Formen und Stäbe, Stuttgart: Klett, o. J.

Weitere Literatur

Aebli, Hans: Psychologische Didaktik. Didaktische Auswertung der Psychologie von Jean Piaget, Stuttgart: Klett, 1963 = 1976. [zitiert als: Aebli, Didaktik]

Aebli, Hans: Über die geistige Entwicklung des Kindes, Stuttgart: Klett, 1963. [zitiert als: Aebli, Entwicklung]

Allmendinger, Henrike: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus". Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht, Siegen: universi, 2014.

Bauersfeld, Heinrich: Mathematik in der Grundschule? in: Neuhaus, Elisabeth: Die Reform der Grundschule, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1970, S. 31-41.

Bauersfeld, Heinrich: Neue Ansätze zur Didaktik der Mathematik in der Grundschule, in: Zum Mathematikunterricht in der Hauptschule. Vorträge auf der Tagung der Fachvertreter für Didaktik der Mathematik vom 4.-7. April 1967 in Osnabrück, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1968, S. 5-19. [zitiert als: Bauersfeld, Neue Ansätze]

Bauersfeld, Heinrich: Sieben Stolpersteine jeglicher Schulreform. Ein Versuch über vernachlässigte Bedingtheiten, in: mathematica didactica 27 (2004), 2, S. 3-15. [zitiert als: Bauersfeld, Stolpersteine]

Bauersfeld, Heinrich & Weis, Valentin: Aus dem „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule“, in: Arbeitskreis Curriculum [Hrsg.]: Thema Curriculum. Beiträge zur Theorie und Praxis, Bebenhausen: Rotsch, 1972, S. 65-84.

Behr, Alfred & Horeni, Michael (2004): Nerven wie Bandnudeln, in: FAZ, 08.07.2004. Verfügbar unter: www.faz.net/aktuell/politik/gerhard-mayer-vorfelder-nerven-wie-bandnudeln-1175328.html, 18.04.2018

Bernstein, Basil: Der Unfug mit der „kompensatorischen“ Erziehung, in: b:e. betrifft: erziehung 3 (1970), 9, S. 15-19.

Besuden, Heinrich: Die Aufgabe der Geometrie in der Grundschule, in: Lebendige Schule 28 (1973), 6, S. 217-224. [zitiert als: Besuden, Aufgabe der Geometrie]

Besuden, Heinrich: Farbige Stäbe als Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule? in: Unterricht heute 21 (1970), 4, S. 161-170. [zitiert als: Besuden, Farbige Stäbe]

Besuden, Heinrich: Geometrie mit Winkelplättchen, Seelze-Velber: Friedrich, 2005.

Besuden, Heinrich: Mehr-Modell-Methoden und das Prinzip der Variation. Aufgezeigt an Beispielen aus dem Mathematikunterricht der Grundschule, in: Westermanns Pädagogische Beiträge 21 (1969), 10, S. 552-558. [zitiert als: Besuden, Mehr-Modell-Methoden]

Besuden, Heinrich: Nur ein Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule? Möglichkeiten und Grenzen des Cuisenaire-Materials, in: Westermanns Pädagogische Beiträge 21 (1969), 4, S. 207-212. [zitiert als: Besuden, Arbeitsmittel]

Besuden, Heinrich: Der Umgang mit Sachaufgaben im operativen Rechnen, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 139-146. [zitiert als: Besuden, Sachaufgaben]

Besuden, Heinrich: Topologie statt geometrische Propädeutik in der Grundschule, in: Westermanns Pädagogische Beiträge 21 (1969), 3, S. 163-169. [zitiert als: Besuden, Topologie]

Bjarnadóttir, Kristín: The Implementation of the ‘New Math’ in Iceland. Comparison with Neighbouring Countries, in: The International Journal for the History of Mathematics Education 8 (2013), 1, S. 1-18.

Bjarnadóttir, Kristín: Royaumont – proposals on arithmetic and algebra teaching for lower-secondary school level, Paper zum Vortrag auf der ICME13, Hamburg: 2016.

Blöchliger, Rudolf: Revolution im Rechenbuch. Die Mathematik verliert ihre Schrecken, Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, 1970.

Brauner, Rudolf: Empirische Untersuchungen über mathematische Unterrichtswerke, in: Glatfeld, Martin [Hrsg.]: Das Schulbuch im Mathematikunterricht, Braunschweig [u. a.]: Vieweg, 1981, S. 20-30.

Breidenbach, Walter: Die Rechenstäbe von Cuisenaire, in: Die Deutsche Schule 61 (1969), 10, S. 620-626.

Brosch, Werner: Vergleichende Untersuchung von Mathematikbüchern für das 1. Schuljahr, in: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 2 (1974), S. 500-513.

Brücher, Karl: Anschauung in der Arithmetik, Bamberg: Buchner, 1911.

Bruner, Jerome S[eymour]: Der Prozeß der Erziehung, Düsseldorf: Schwann = Berlin: Berlin Verl., 1970. [zitiert als: Bruner, Prozeß]

Bruner, Jerome S[eymour]: The Process of Education revisited, in: The Phi Delta Kappan 53 (1971), 1, S. 18-21.

Bruner, Jerome S[eymour], Olver, Rose R. & Greenfield, Patricia M.: Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am „Center for Cognitive Studies“ der Harvard- Universität, Stuttgart: Klett, 1971.

Dallmann, Gerhard & Heyer, Peter [Hrsg.]: Mathematikunterricht in der Grundschule. Beiträge zum Symposion „Mathematikunterricht in der Grundschule“ vom 21. bis 25. November 1966 in Berlin, Weinheim [u. a.]: Beltz, 1970.

D’Ambrosio, Beatriz Silva: The Modern Mathematics Reform Movement in Brazil and Its Consequences for Brazilian Mathematics Education, in: Educational Studies in Mathematics 22 (1991), 1, S. 69-85.

Damerow, Peter: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Eine Fallstudie zum Einfluß gesellschaftlicher Rahmenbedingungen auf den Prozeß der Curriculum-Reform. Bd. 1. Reformziele, Reform der Lehrpläne, Stuttgart: Klett-Cotta, 1977.

Damerow, Peter, Hentschel, Götz & Scholz, Hartmut: Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne Allgemeinbildende Schulen, Bielefeld: IDM, 1981.

De Bock, Dirk & Vanpaemel, Geert: Early experiments with Modern Mathematics in Belgium, Paper zum Vortrag auf der ICME13, Hamburg: 2016.

De Bock, Dirk & Vanpaemel, Geert: Modern mathematics at the 1959 OEEC Seminar at Royaumont, in: Bjarnadóttir, Kristín [Ed.]: “Dig where you stand” 3.

Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education; September 25-28, 2013, at Department of Education, Uppsala University, Sweden, Uppsala: Uppsala Universitet, 2015, S. 151-168. [zitiert als: De Bock & Vanpaemel, Royaumont]

Deutscher Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen: Empfehlungen und Gutachten des Deutschen Ausschusses für das Erziehungs- und Bildungswesen 1953-1965. Gesamtausgabe, Stuttgart: Klett, 1966.

Deutscher Bildungsrat: Strukturplan für das Bildungswesen. Verabschiedet auf der 27. Sitzung der Bildungskommission am 13. Februar 1970, Bonn: Dt. Bildungsrat, 1970.

Dienes, Z[oltan] P[aul]: Aufbau der Mathematik, Freiburg: Herder, 1965. [zitiert als: Dienes, Aufbau]

Dienes, Zoltan Paul: Memoirs of a maverick mathematician, Leicestershire: Upfront Publishing, ^{2}2003. [zitiert als: Dienes, Memoirs]

Dienes, Z[oltan] P[aul]: Moderne Mathematik in der Grundschule, Freiburg: Herder, 1965. [zitiert als: Dienes, Moderne]

Dienes, Z[oltan] P[aul]: Moderne Mathematik in der Grundschule, Freiburg: Herder, ^{2}1968.

Dienes Z[oltan] P[aul]: Relationen. Lehreranleitung zu den Arbeitskarten, Freiburg: Herder, 1970.

Dienes, Z[oltan] P[aul]: Schulmathematik als Bildungsfach. Eine Untersuchung des Übergangs von der konstruktiven zur analytischen Phase im mathematischen Denken bei Schulkindern, Freiburg: Herder, 1967. [zitiert als: Dienes, Bildungsfach]

Dienes, Z[oltan] P[aul]: Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozeß, Freiburg: Herder, 1971. [zitiert als: Dienes, Sechs Stufen]

Dienes, Z[oltan] P[aul], Gaulin, Claude & Lunkenbein, Dieter: Das Programm des Sherbrooker Mathematik-Projektes, in: Neunzig, Walter [Hrsg.]: Konzeptionen für den Mathematikunterricht. Beiträge aus sechs Ländern, Stuttgart: Klett, 1970, S. 7-25.

Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Die Entdeckung des Raumes und praktische Meßübungen, Freiburg: Herder, 1967. [zitiert als: Dienes & Golding, Raum]

Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Mathematisches Denken und logische Spiele. Erlernen der Logik im Spiel, Freiburg: Herder, ^{2}1968. [zitiert als: Dienes & Golding, Logische Spiele]

Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Menge, Zahl, Potenz, Freiburg: Herder, ^{4}1971. [zitiert als: Dienes & Golding, Potenz]

Dienes, Z[oltan] P[aul] & Golding, E. W.: Methodik der modernen Mathematik. Grundlagen für Lernen in Zyklen, Freiburg: Herder, 1970. [zitiert als: Dienes & Golding, Methodik]

Dienes, Z[oltan] P[aul] & Jeeves, M. A.: Denken in Strukturen. Ein Versuchsmodell zur Untersuchung mathematischer Lernprozesse, Freiburg: Herder, ^{2}1970. [zitiert als: Dienes & Jeeves, Denken]

Dienes, Z[oltan] P[aul] & Jeeves, M. A.: Struktur und Transfer. Die Rolle der mathematischen Struktur im Lernprozeß, Freiburg: Herder, 1972. [zitiert als: Dienes & Jeeves, Transfer]

Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne in der Bundesrepublik Deutschland, Bielefeld: IDM.

Bd. I. Stand September 1977 / Gert Schubring, 1977.

Bd. II. Allgemeinbildende Schulen. Stand: Juni 1980 / Peter Damerow…, 1981;

Bd. IV. Allgemeinbildende und berufsbildende Schulen 1980-1985. Stand: Dezember 1985 / Ute Thiede, 1986.

Erlanger Stellungnahme zu den „Empfehlungen und Richtlinien der Kultusminister-Konferenz zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen“ vom 3. Oktober 1968, in: b:e (1969), 11, S. 34-35.

Fend, Helmut: Schule gestalten. Systemsteuerung, Schulentwicklung und Unterrichtsqualität, Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften, 2008. [zitiert als: Fend, Gestalten].

Fend, Helmut: Soziologie der Schule. Bd. 4. Sozialisation durch Literatur, Weinheim [u. a.]: Beltz, 1979. [zitiert als: Fend, Literatur]

Franke, Marianne & Reinhold, Simone: Didaktik der Geometrie. In der Grundschule, Berlin [u. a.]: Springer Spektrum, 2016.

Freund, Helmut & Sorger, Peter: Denken mit LEGO. Vergnügliche Denkspiele für Logik und Mengenlehre, Freiburg: Herder, 1971.

Freund, Helmut & Sorger, Peter: Denkspiele mit Pfiff. Junge Mathematik für die Eingangsstufe, Freiburg [u. a.]: Herder, 1973.

Fricke, Arnold & Besuden, Heinrich: Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik, Stuttgart: Klett, 1970. [zitiert als: Fricke & Besuden, Mathematik]

Fricke, Arnold: Operative Lernprinzipien im Mathematikunterricht der Grundschule, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 79-116. [zitiert als: Fricke, Operative Lernprinzipien]

Fricke, Arnold: Operative Zahlerfassung. Ein Beitrag zur Frage nach Ergebnis und Bedeutung der Untersuchungen Piagets, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 47-78. [zitiert als: Fricke, Operative Zahlerfassung]

Fricke, Arnold: Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 5-30. [zitiert als: Fricke, Operatives Denken]

Fricke, Arnold: Der Zahlbegriff. Eine sachliche Klärung im Hinblick auf den Erstrechenunterricht, in: Fricke & Besuden, Mathematik, S. 31-46. [zitiert als: Fricke, Zahlbegriff]

Fricke, Arnold: Mathematik in der Grundschule. Ausgabe B von Fricke – Besuden; Ernst Klett Verlag, Stuttgart, in: Arbeitskreis Grundschule e. V. [Hrsg.]: Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule, Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e. V., 1972, S. 64-78. [zitiert als: Fricke, Arbeitskreis]

Fuchs, Walter R.: Eltern entdecken die neue Mathematik. Mengen und Zahlen, München [u. a.]: Droemer Knaur, 1974.

[GDM]: Stellungnahme der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) zum Entwurf des KMK-Schulausschusses (1976), in: Grundschule 9 (1977), 2, S. 52 = Lindenau & Schindler, S. 70-73.

Glatfeld, Martin: Die „Arithmetik“ in dem KMK-Entwurf, in: Grundschule 9 (1977), 3, S. 128-132. [zitiert als: Glatfeld, KMK Arithmetik]

Glatfeld, Martin: Die „Geometrie“ in dem KMK-Entwurf, in: Grundschule 9 (1977), 3, S. 133-136. [zitiert als: Glatfeld, KMK Geometrie]

Glatfeld, Martin [Hrsg.]: Das Schulbuch im Mathematikunterricht, Braunschweig [u. a.]: Vieweg, 1981. [zitiert als: Glatfeld, Schulbuch]

Gnirk, Hans-Joachim: Arbeiterkinder gewinnen durch die „Neue Mathematik“, in: b:e. betrifft: erziehung 3 (1970), 10, S. 27-30.

Gnirk, Hajo, Homann, Gerhard & Lubeseder, Ursula: Strategiespiele für die Grundschule, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1970.

Gosztonyi, Katalin: Tradition and reform in mathematics education during the “New Math” period. A comparative study of the case of Hungary and France, 2015, www.math.u-szeged.hu/phd/dreposit/phdtheses/gosztonyi-katalin-a.pdf, 18.04.2018

Griesel, Heinz: Der Einfluß von Z. P. Dienes auf den Mathematikunterricht in der Grundschule, in: MU 17 (1971), 5, S. 5-17. [zitiert als: Griesel, Dienes]

Griesel, Heinz: Die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Eine Analyse der gegenwärtigen Lehrbuchsituation; grundsätzliche Überlegungen und Tendenzen, in: ZDM 4 (1972), 3, S. 89-95.

Griesel, Heinz: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Versuch einer Bilanz, in: Haarmann, Dieter [Hrsg.]: Lernen und Lehren in der Grundschule. Studienbuch für den Unterricht der Primarstufe, Braunschweig: Westermann, 1977, S. 368-383. [zitiert als: Griesel, Bilanz]

Griesel, Heinz: Tradition und Fortschritt im Mathematikunterricht der Grundschule, in: Grundschule 9 (1977), 2, S. 53-57. [zitiert als: Griesel, Tradition]

Griesel, Heinz & Hollmann, Erwin: Eine mathematik-didaktische Analyse dreier Erstrechenkurse, in: ZDM 1 (1969), 2, S. 32-39.

Hasemann, Klaus & Gasteiger, Hedwig: Anfangsunterricht Mathematik, Berlin [u. a.]: Springer Spektrum, ³2014.

Herrlitz, Wolfgang: Skizze einer Linguistischen Begleituntersuchung zum „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule“, in: Arbeitskreis Curriculum [Hrsg.]: Thema Curriculum. Beiträge zur Theorie und Praxis, Bebenhausen: Rotsch, 1972, S. 85-94.

Hollmann, Erwin: Moderne Mathematik in der Grundschule. Bericht über eine Studienwoche mit Z. P. Dienes in Rinteln/Weser, Freiburg: Herder, 1969.

International Study Group for Mathematics Learning [ISGML]: Mathematics in Primary Education. Learning of mathematics by young children / compiled by Z. P. Dienes, Hamburg: UNESCO Institute for Education, 1966. Verfügbar unter: http://unesdoc.unesco.org/images/0001/000184/018427eo.pdf , 28.05.2018

Jahnke, Hans Niels & Mies, Thomas: J. S. Bruners Kognitions- und Curriculumtheorie, in: ZfP 21 (1975), 2, S. 239-248.

Karaschewski, Horst: Irrwege der modernen Rechendidaktik. Eine kritische Analyse, Bonn [u. a.]: Dürr, 1969. [zitiert als: Karaschewski, Irrwege]

Keitel, Christine: Beiträge zum Mathematikunterricht 1967-1973, in: ZfP 21 (1975), S. 125-130.

Keitel, Christine: Entwicklungen im Mathematikunterricht, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 447-500. [zitiert als: Keitel, Entwicklungen]

Keitel, Christine: Réformes et développements de l'enseignement mathématique en R.F.A. depuis 1950, in: Belhoste, Bruno et. al. [Hrsg.]: Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger, Paris: Librairie Vuiber [u. a.], 1996, S. 303-310. [zitiert als: Keitel, Réformes]

Keitel, Christine & Damerow, Peter: Unvollendete Revolution. Zur Kritik der Dienes-Konzeption mathematischen Unterrichts, in: b:e. betrifft: erziehung (1969), 8, S. 11-16.

Keitel, Christine, Otte, Michael & Seeger, Falk: Text, Wissen, Tätigkeit. Das Schulbuch im Mathematikunterricht, Königstein/ Ts.: Scriptor. 1980.

Keitel-Kreidt, Christine: Reformen des Mathematikunterrichts in den USA. Geschichte, Reformkonzeption und Curriculumentwicklung, Bielefeld: Univ. Bielefeld, 1981.

Kesselring, Thomas: Jean Piaget, München: Beck, 1988.

Kilpatrick, Jeremy: The new math as an international phenomenon, in: ZDM 44 (2012), 4, S. 563-571.

Kleinschmidt, Gottfried: Kurzbericht zum Internationalen Mengenlehre-Kongreß in München am 5. September 1974, in: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 2 (1974), S. 614-615.

Klett Verlag [Hrsg.]: Die Reform des mathematischen Unterrichts in der Grundschule, Stuttgart: Klett, o. J.

Kline, Morris: „Mengenlehre – das ist Zeitverschwendung“, in: Der Spiegel 28 (1974), 36, S. 32-34. Verfügbar unter: www.spiegel.de/spiegel/print/d-41667426.html, 18.04.2018

Kline, Morris: Warum kann Hänschen nicht rechnen? Das Versagen der Neuen Mathematik, Weinheim [u. a.]: Beltz, 1974. [zitiert als: Kline, Hänschen]

[KMK] Kultusministerkonferenz: Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968, in: Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland; 611. [zitiert als: KMK 1968]

[KMK] Kultusministerkonferenz: Empfehlungen und Richtlinien zum Mathematikunterricht in der Grundschule. Beschluß der KMK-Konferenz vom 3.12.1976, abgedruckt in: Müller & Wittmann, 1977, S. 159-164 = 1984, S. 166-170. [zitiert als: KMK 1976]

[KMK] Kultusministerkonferenz: Empfehlungen und Richtlinien zum Mathematikunterricht in der Grundschule – Entwurf (1976), in: Grundschule 8 (1976), 8, S. 446-449 = Lindenau, Volkmar & Schindler, Manfred: Neuorientierung des Mathematikunterrichts, Bad Heilbrunn/Obb. 1978, S. 64-70.

[KMK] Kultusministerkonferenz: Abkommen zwischen den Ländern der Bundesrepublik zur Vereinheitlichung auf dem Gebiete des Schulwesens. Vom 28.10.1964 in der Fassung vom 14.10.1971. Verfügbar unter: www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1964/1964_10_28-Hamburger_Abkommen.pdf, 18.04.2018

[KMK] Kultusministerkonferenz: Empfehlungen zur Arbeit in der Grundschule. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 2.7.1970, in: Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland; 130. [zitiert als: KMK, Empfehlungen GS]

[KMK] Kultusministerkonferenz: Richtlinien für die Genehmigung von Schulbüchern. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 29.6.1972. Verfügbar unter: www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_06_29_Schulbuecher_Genehmigung.pdf, 18.04.2018

Krüger, Katja: Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips, Berlin: Logos Verl., 2000.

Lauter, Josef: Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Didaktisch-methodische Hilfen für die Unterrichtspraxis, Donauwörth: Auer, ²1977.

Lauter, Josef & Röhrl, Emanuel: Kummer mit der Neuen Mathematik. Eltern und Lehrer fragen, Fachleute helfen, Freiburg: Herder, 1974.

Lenné, Helge: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart: Klett, 1969.

Leschinsky, Achim & Roeder, Peter Martin: Didaktik und Unterricht in der Sekundarstufe I seit 1950, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 283-391.

Lockard, J. David [Ed.]: Sixth Report of the International Clearinghouse on Science and Mathematics Curricular Developments 1968, Maryland [u. a.], 1968.

Lockard, J. David [Ed.]: Seventh Report of the International Clearinghouse on Science and Mathematics Curricular Developments 1970, Washington, D. C. [u. a.], 1970. [zitiert als: Lockard, Seventh]

Lunkenbein, Dieter: Mengen und Logik. Lehrerheft zu den Arbeitskarten „Mengen und Logik“, Freiburg: Herder, 1970.

Matthiesen, Hayo: Kleine Inseln am Horizont, in: Die Zeit 29 (1974), 37.

Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg: Schulintern. Informationen für Lehrer in Baden-Württemberg, 1982.

[MNU] Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Nachwuchs: Nürnberger Lehrpläne des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, in: MNU 18 (1965/66), 1/2, S. 1-8. [zitiert als: Nürnberger Lehrpläne]

[MNU] Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Nachwuchs: Nürnberger Lehrpläne. Kritiken und Erwiderungen; Rahmenplan für Mathematik, in: MNU 18 (1965/66), 12, S. 433-439.

Montessori, Maria: Psychoarithmetik. Die Arithmetik dargestellt unter Berücksichtigung kinderpsychologischer Erfahrungen während 25 Jahren, Freiburg [u. a.]: Herder, 2012.

Moon, Bob: The ‚New Maths' Curriculum Controversy. An International Story, London [u. a.]: The Falmer Press, 1986.

Müller, Walter & Thyen, Hermann: Rechentüchtigkeit und mathematische Bildung. Vergleichende Untersuchung von Rechenbüchern für das 5. bis 8. Schuljahr der Hauptschulen, Realschulen und Gymnasien, Darmstadt: Winter, 1967.

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele, Braunschweig: Vieweg, 1977. [zitiert als: Müller & Wittmann, 1977]

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele, Braunschweig [u. a.]: Vieweg, ^{3}1984. [zitiert als: Müller & Wittmann, 1984]

Naumann, Jens: Entwicklungstendenzen des Bildungswesens der Bundesrepublik Deutschland im Rahmen wirtschaftlicher und demographischer Veränderungen, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 21-102.

Neander, Joachim: Mathematik und Ideologie. Zur politischen Ökonomie des Mathematikunterrichts, Starnberg: Raith, 1974.

Neunzig, Walter: Entwurf für die systematische Gestaltung des Erstrechenunterrichts auf der Grundlage der Prinzipien von Dienes, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1968. Vorträge auf der 2. Tagung der Fachvertreter für Didaktik der Mathematik vom 2.-5. April 1968 in Frankfurt am Main, Hannover: Schroedel, 1969, S. 132-141. [zitiert als: Neunzig, Entwurf]

Neunzig, Walter: Mathematik in der Grundschule – eine Utopie? in: Die Ganzheitsschule 16 (1967), 2, S. 41-48. [zitiert als: Neunzig, Utopie]

Neunzig, Walter: Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Vorschläge zu seinem Aufbau und zu seiner Gestaltung, in: Neunzig, Walter [Hrsg.]: Konzeptionen für den Mathematikunterricht. Beiträge aus sechs Ländern, Stuttgart: Klett, 1970, S. 91-112. [zitiert als: Neunzig, Vorschläge]

Neunzig, Walter: Wir lernen Mathematik. Grundschulwerk von W. Neunzig und P. Sorger; Verlag Herder, Freiburg, in: Arbeitskreis Grundschule e. V. [Hrsg.]: Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule, Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e. V., 1972, S. 193-208. [zitiert als: Neunzig, Grundschulwerk]

Neunzig, Walter & Sorger, Peter: Einstieg in die Mathematik. Aufriß eines systematischen Weges für die Grundschule, Freiburg [u. a.]: Herder, ^{2}1969. [zitiert als: Neunzig & Sorger, Einstieg]

Der Niedersächsische Kultusminister: Handreichungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule, Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, [1972]. [zitiert als: Nds. KM, Handreichungen]

Der Niedersächsische Kultusminister: Hilfen zur Durchführung von Elternabenden zu Inhalten des Modernen Mathematikunterrichts in der Grundschule, Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, 1974.

Der Niedersächsische Kultusminister: Rahmenrichtlinien für die Grundschule, Hannover: Schroedel, 1975.

Der Niedersächsische Kultusminister: Rahmenrichtlinien für die Grundschule. Mathematik, Hannover: Schroedel, 1977. [zitiert als: Nds. KM, RRL 1977]

Der Niedersächsische Kultusminister: Rahmenrichtlinien für die Grundschule. Mathematik, Hannover: Schroedel, 1984. [zitiert als: Nds. KM, RRL 1984]

Niedersächsisches Kultusministerium: Schulverwaltungsblatt für Niedersachsen. Amtsblatt des Niedersächsischen Kultusministers für Schule und Schulverwaltung 21 (1969).

[OEEC] Organisation for European Economic Co-operation: New thinking in school mathematics, Paris: OEEC, 1961.

[OECD]: Synopsis für die moderne Schulmathematik / hrsg. vom Delegierten der Ständigen Konferenz der Kultusminister bei der OECD, Frankfurt a. M. [u. a.]: Diesterweg, 1966.

Otte, Michael [Hrsg.]: Mathematiker über Mathematik, Berlin [u. a.]: Springer, 1974.

Padberg, Friedhelm: Didaktik der Arithmetik, Heidelberg [u. a.]: Spektrum Akad. Verl., ^{2}1996 = 2002.

Padberg, Friedhelm & Benz, Christiane: Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Heidelberg: Spektrum Akad. Verl, ^{4}2011.

Piaget, Jean: Erziehung und Unterricht seit 1935, in: Piaget, Jean: Theorien und Methoden der modernen Erziehung, Wien [u. a.]: Molden, 1972, S. 13-137. [zitiert als: Piaget, Erziehung]

Piaget, Jean: Die Genese der Zahl beim Kind, in: Rechenunterricht und Zahlbegriff. Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffes und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht; Bericht und Diskussion, mit Beitr. von Jean Piaget..., Braunschweig: Westermann, 1964, S. 50-72.

Piaget, Jean: Psychologie der Intelligenz, Zürich: Rascher, 1948. [zitiert als: Piaget, Intelligenz]

Piaget, Jean & Inhelder, Bärbel: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart: Klett, 1971.

Piaget, Jean & Szeminska, Alina: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde, Stuttgart: Klett, 1965.

Picht, Georg: Die deutsche Bildungskatastrophe. Analyse und Dokumentation, Olten [u. a.]: Walter, 1964.

Picker, Bernold: Moderne Mathematik im ersten Schuljahr. Ergebnisse eines Schulversuchs mit Unterrichtsplanung und Auswertung durch Protokolle und psychologische Tests, Freiburg [u. a.]: Herder, ^{2}1971. [zitiert als: Picker, Schulversuch]

Picker, Bernold: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule, in: Der Grundschulunterricht. 1968-1978; eine Literaturübersicht, Duisburg: Verl. für

Pädagogische Dokumentation. Bd. 2. Lernbereich Mathematik, 1979, S. 1-44. [zitiert als: Picker, Reform]

Picker, Bernold: Von Osnabrück bis PISA – 40 Jahre Mathematikdidaktik in Deutschland. Mathematikhistorische, schulpolitische und pädagogische Aspekte, Vortrag auf der 40. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 2006 (unveröffentlichter Vortrag). [zitiert als: Picker, 40 Jahre]

Picker, Bernold: Von Osnabrück bis PISA – 40 Jahre Mathematikdidaktik in Deutschland, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6.3. bis 10.3.2006 in Osnabrück, S. 413-416. Verfügbar unter: www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2006 /Sektions/picker_bernold.pdf , 18.04.2018

Prytz, Johan: New Math for big education, old math for small education. A study of different way to reform school mathematics, Paper zum Vortrag auf der ICME13, Hamburg: 2016.

Radatz, Hendrik & Rickmeyer, Knut: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen, Hannover: Schroedel, 1991.

Radatz, Hendrik, Schipper, Wilhelm, Oltmanns, Katrin & Wille, Ulrike: Zum Mathematikunterricht an Grundschulen. Ergebnisse einer Lehrerbefragung, Göttingen: Univ. Göttingen, 1981.

Randow, Thomas von: Ende für die Klötzchen, in: Die Zeit 39 (1984), 49.

Rezat, Sebastian: Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen, Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.

Robinsohn, Saul B.: Bildungsreform als Revision des Curriculum und Ein Strukturkonzept für Curriculumentwicklung, Neuwied am Rhein [u. a.]: Luchterhand, ^{3}1971 = ^{4}1972.

Röhrl, Emanuel: Gegenwärtiger Stand der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Tendenzen und Initiativen, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975. Vorträge auf der 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 11. bis 14. März 1975 in Saarbrücken, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1975, S. 252-254.

Rogers, Leo: Epistemology, methodology, and the building of meaning in a new community of mathematics educators in England, 1950-1980, in: Bjarnadóttir, Kristín [Ed.]: “Dig where you stand” 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education; September 25-28, 2013, at

Department of Education, Uppsala University, Sweden, Uppsala: Uppsala Universitet, 2015, S. 345-360.

Sager, Christin: Das aufgeklärte Kind. Zur Geschichte der bundesrepublikanischen Sexualaufklärung (1950-2010), Bielefeld: Transcript-Verl., 2015.

Schuberth, Ernst: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Ihre Geschichte und Probleme; unter besonderer Berücksichtigung von Felix Klein, Martin Wagenschein und Alexander I. Wittenberg, Stuttgart: Verl. Freies Geistesleben, 1971.

Schubring, Gert: On the Methodology of Analysing Historical Textbooks. Lacroix as Textbook Author, in: For the Learning of Mathematics 7 (1987), 3, S. 41-50. [zitiert als: Schubring, Methodology]

Schubring, Gert: The Road Not Taken – The Failure of Experimental Pedagogy at the Royaumont Seminar 1959, in: JMD 35 (2014), 1, S. 159-171. [zitiert als: Schubring, Royaumont]

Schulz-Hardt, Joachim & Fränz, Peter: Zur Geschichte der Kultusministerkonferenz 1948-1998, in: Sekretariat der Kultusministerkonferenz: Einheit in der Vielfalt. 50 Jahre Kultusministerkonferenz 1948-1998, Neuwied [u. a.]: Luchterhand, 1998, S. 177-227. Verfügbar unter: www.kmk.org/kmk/aufgaben/geschichte-der-kmk.html ,
18.04.2018

Schwartz, Erwin: Moderne Mathematik schafft neue Schule? in: Schwartz, Erwin [Hrsg.]: Mathematik in der Grundschule / Arbeitskreis Grundschule e. V., Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule e. V., ^{3}1974, S. 7-12.

Soika, Claus-Dieter: Moderne Mathematik in der Schulpraxis. Eine empirische Untersuchung zur Evaluation des modernen Mathematikunterrichts der Grundschule am Beispiel des 2. Schuljahrs im Schulversuch in Nordrhein-Westfalen, Ratingen [u. a.]: Henn, 1974.

Der Spiegel 28 (1974), 13. [zitiert als: Der Spiegel] Verfügbar unter: www.spiegel.de/spiegel/print/index-1974-13.html, 18.04.2018

Der Spiegel 28 (1974), 15. Verfügbar unter: www.spiegel.de/spiegel/print/index-1974-15.html , 18.04.2018

Stübe, Rudolf: Ordnungsoperationen in der Grundschule, Stuttgart: Klett, 1970.

Teichmann, Sonja: Sprachförderung im Mathematikunterricht anhand von spracharmem Material. Eine Studie mit mehrsprachigen Lernenden, Hildesheim: Universität Hildesheim, 2016 (unveröffentlichte Masterarbeit).

Thomas, Michael O. J.: Building up Mathematics. The Legacy of Zóltan Diénès, Vortrag auf der ICME13, Hamburg: 2016. Abstract unter: www.icme13.org/files/abstracts/ICME-13-Invited-lectures-Thomas.pdf, 18.04.2018

Trommer-Krug, Luitgard: Soziale Herkunft und Schulbesuch. Eine Zusammenstellung von Daten aus der amtlichen Statistik und aus empirischen Untersuchungen über die soziale Herkunft, in: Institut für Bildungsforschung [Hrsg.]: Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen. Bd. 1. Entwicklungen seit 1950, Stuttgart: Klett, 1980, S. 217-281.

Varga, Tamás: Benachteiligte Kinder lernen moderne Mathematik, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1971. Vorträge auf der 5. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. April 1971 in Bayreuth, Hannover [u. a.]: Schroedel, 1972, S. 9-17.

Verlag Herder [Hrsg.]: Arbeitsbericht für die Schule 1965/66. Mathematik in der Grundschule: Neue Wege im „Rechenunterricht“ der Volksschule; Herder stellt vor: „Programm Moderne Mathematik“, Freiburg: Herder, o. J.

Vohns, Andreas: Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts, in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 100 (2016), S. 35-42.

Weis, Valentin: Das Evaluationskonzept des „Frankfurter Projekts“, in: Die Deutsche Schule. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft und Gestaltung der Schulwirklichkeit 64 (1972), 9, S. 589-597.

Weis, Valentin & Bauersfeld, Heinrich: Neue Mathematik und Rechenfertigkeit. Ergebnisse aus dem „Frankfurter Projekt“, in: Westermanns pädagogische Beiträge 25 (1973), 3, S. 127-135.

Winkel, Rainer [Hrsg.]: Pädagogische Epochen. Von der Antike bis zur Gegenwart, Düsseldorf: Schwann, 1988.

Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. Bd. 2. Von Euler bis zur Gegenwart, Berlin [u. a.]: Springer, 2009.

Zumpe, Sybille: Der neue Mathematikunterricht in der Grundschule. Eine kritische Analyse auf dem Hintergrund bildungspolitischer Zielsetzungen Anfang der 70er Jahre, Berlin: FU Berlin, Zentralinstitut für Unterrichtswissenschaften und Curriculumentwicklung, 1984.

Internetquellen

Woods Hole Conference, https://en.wikipedia.org/wiki/Woods_Hole_Conference, 18.04.2018

The Cuisenaire Company, www.cuisenaire.co.uk/index.php, 18.04.2018

Statistik zur Bevölkerung im früheren Bundesgebiet, www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/Indikatoren/LangeReihen/Bevoelkerung/lrbev04.html?cms_gtp=151956_list%253D2&https=1, 18.04.2018

Gesetz, betreffend die Grundschulen und Aufhebung der Vorschulen.

Vom 28. April 1920, www.documentarchiv.de/wr/1920/grundschulgesetz.html, 18.04.2018

Hans Aebli, www.madipedia.de/wiki/Hans_Aebli, 18.04.2018

Arithmos Rechenbaukasten Material, www.rechnerlexikon.de/it/artikel/Arithmos_Rechenbaukasten_Material, 18.04.2018

Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung – ein offener Brief, www.tagesspiegel.de/downloads/19549926/2/offener-brief.pdf, 18.04.2018

Sorgenkind moderne Mathematik, www.youtube.com/watch?v=yzxmXxJOXq4, 18.04.2018

Zoltan Dienes' Website, www.zoltandienes.com/posts/in-memoriam, 18.04.2018

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.
2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.
3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro. Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro. *Susanne Spies:* Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro. *Henrike Allmendinger:* Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro. *Martin Rathgeb:* George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2017), 199 S., kart., 13,– Euro Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2018), 202 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 9 (2018)

Die in den 1970ern in der Bundesrepublik Deutschland stattgefundene Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule („Mengenlehre") war durch die Aufnahme neuer Inhalte wie Methoden gekennzeichnet.

Die vorliegende Arbeit geht schwerpunktmäßig der Frage nach, wie die grundlegenden wissenschaftlich-theoretischen Ideen in Unterrichtskonzepten – hier exemplarisch anhand dreier Unterrichtswerke aus der Zeit – umgesetzt wurden, um damit eine Grundlage für Aussagen über Verlauf und historische Bedeutsamkeit der Reform zu schaffen. Es lässt sich dabei ein weitgehender Konsens im Hinblick auf die methodische Umsetzung in den Lehrgängen feststellen, während sich die didaktischen, curricularen Gesamtkonzeptionen, bedingt durch eine verkürzte Übernahme der grundlegenden Ideen, unterscheiden.

Vor diesem Hintergrund muss die Reform – mutmaßlich beispielhaft für weitere Reformen – bereits im Ansatz als gescheitert gelten.

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN