SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 10 • 2018**

Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik

Mit Beiträgen von

E. Kanterian | K. Kuhlemann |
A. Reichenberger | T. Sauer & G. Klaedtke |
S. Shokrani & S. Spies | K. Volkert | M. Wille

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 10 (2018)

Mit Beiträgen von:

E. Kanterian | K. Kuhlemann | A. Reichenberger | T. Sauer & G. Klaedtke

S. Shokrani & S. Spies | K. Volkert | M. Wille

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 10 (2018)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2018

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht

Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Vorwort

Die III. Aufgabe.
Wasser in einem Siebe tragen.

> Dieses kan auf vielerley weise in Schertz geschehen / wann man deß Siebes Löcher verstopffet / oder das Sieb samt dem Wasser in ein anders Gefäß setzet / oder auch das Wasser in einer Schweinsblasen in das Sieb leget / dieses sind gemeine Salbader: Wann ich aber einen Deckel mit einem Lufftloch über das Sieb decke / der genau vermachet / daß kein Lufft hinaus kan / als durch besagtes Loch / kan ich das Sieb mit Wasser füllen / das Luftloch mit dem Daumen zuhalten / und also das Wasser / wie in dem Heber tragen.
> GEORG PHILIPP HARSDÖRFFER (1607-1658)

Leider – oder wohl besser: zum Glück – gibt es keinen entsprechenden Kniff, um das bewegliche Begriffs- bzw. Ereignis-Wasser einer philosophischen oder historischen Thematik im Sieb der eigenen Gedanken-Ordnung festzuhalten und verlustfrei an eine beliebige Stelle zu transportieren!

DANIEL SCHWENDTNER (1585-1636), seit 1608 Professor für Hebräisch an der Universität Altdorf, ab 1628 zusätzlich Inhaber der Professur für Mathematik, hatte zur Hebung des allgemeinen Bildungsstandes in den 'MINT-Fächern' einen ersten Band der *Delitiae Mathematicae et Physicae. Oder: Mathematische und Philosophische Erquickstunden* verfasst, der nach seinem frühen Tod 1636 posthum erschien[1]. Das thematische Spektrum ist, gegliedert in insgesamt 16 Abteilungen, weit gefasst und schließt außer einem erweiterten klassischen Quadrivium – Rechenkunst (Arithmetic), Feldmessen (Geometria), Stereometrie, Singkunst (Musica), Sehkunst (Optica), Spiegelkunst (Catoptica), Sternkündigung (Astronomia und Astrologia) — weitere Ingenieur-Künste ein, so die Zubereitung der Sonnen- und Schlaguhren (Gnomonica und Thaumatopoetica), die Gewichtkunst (Statica), die gewaltsame Bewegung (Motum), Feuer- (Pyrolia), Luft- (Pnevmatica) und

1. G. Ph. Harsdörffer & D. Schwendtner: Delitiae Mathematicae et Physicae. oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden. Band 1. Neudruck der Ausgabe Nürnberg 1636. Keip Verlag, Frankfurt am Main 1990.

Wasserkünste (Hydraulica), Schreibkunst, Baukunst (Architectura) und schließlich die Scheid- bzw. Schmelzkunst (Chymia).

Für den elementaren und wenig wissenschaftlichen Charakter der hier präsentierten Aufgaben und Beispiele meint der Autor im Vorwort um Verständnis werben zu müssen[2]:

> Viel dings practicirn die Kinder vnd gemeine Leut/ derer *demonstration* so subtil vnd künstlich/ daß auch die gelehrtesten *Philosophi* selbige zu finden/ sich auffs eusserste bemühen müssen.

Dies Argument kann nun wiederum fast unverändert auch für die Mathematikphilosophie übertragen werden, die das nur scheinbar Selbstverständliche auf Genese und Gründe hin befragt.

Der 26 Jahre jüngere, erfolgreiche Publizist Georg Philipp Harsdörffer hatte Schwendtners Werk im Jahre 1652 einen zweiten und 1653 einen dritten Band folgen lassen. Seiner Klassifikation der Lösungen der eingangs zitierten *III. Aufgabe im dreyzehnden Theil des zweyten Bandes* der *Delitiae Mathematicae et Physicae*[3] folgend dürfen wir jedenfalls versprechen, dass "gemeine Salbader" in die Siegener Beiträge keinesfalls Aufnahme finden würden.

Und auch wenn sich die Siegener Beiträge in ihrer thematischen Breite nicht mit Schwendtners und Harsdörffers *Deliciae* messen können, so ist das thematische Spektrum des vorliegenden Bandes dennoch erfreulich weit gespannt. So reicht es in historischer Hinsicht von Arbeiten über Leibniz (Sauer und Klaedtke) – übrigens einer der bekennenden Leser der Erquickstunden – bis zu Frege (Kanterian) und Nelson (Shokrani und Spies), systematisch werden die Grundlagen der Analysis (Kuhlemann) und der deontischen Logik (Wille) diskutiert, und wiederum historisch werden Verbindungen von Philosophie und mathematischem Unterricht im frühen 20. Jahrhundert (Reichenberger) bzw. mathematischem Studium und polytechnischer Tradition in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts (Volkert) thematisiert.

Und so dürfen wir der Hoffnung Ausdruck verleihen, dass ein interessiertes Lesepublikum wieder manch fröhliche und lehrreiche Erquickstunde mit den Siegener Beiträgen verbringen kann.

Wir freuen uns sehr, nunmehr bereits den zehnten Band der Siegener Beiträge vorlegen zu können. Ganz im Geiste der voranstehenden Gedanken dokumentiert er

2. A.a.O. p. XIII.
3. G. Ph. Harsdörffer: Delitiae Mathematicae et Physicae. Der Mathematischen und Philosophischen Erquickstunden Zweyter Teil. Neudruck der Ausgabe Nürnberg 1651. Keip Verlag, Frankfurt am Main 1990, p. 490.

sehr eindringlich die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden — und kann hoffentlich ein Anstoß für einen produktiven Diskurs sein im Bemühen um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik. Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken.

Unser Dank gilt darüber hinaus Kordula Lindner-Jarchow für die verlagsseitige Betreuung der Reihe, Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Fabian Amberg für Mithilfe bei der LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts und nicht zuletzt dem Team von UniPrint für den stets sorgfältigen und schnellen Druck.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Inhaltsverzeichnis

What is in a Definition? Understanding Frege's Account

Edward Kanterian

Abstract

Joan Weiner (2007) has argued that Frege's definitions of numbers are linguistic stipulations, with no content-preserving or ontological point: they don't capture any determinate content of numerals, as these have none, and don't present numbers as pre-existing objects. I show that this view is based on exegetical and systematic errors. First, I demonstrate that Weiner misrepresents the Fregean notions of '*Foundations*-content', sense, reference, and truth. I then consider the role of definitions, demonstrating that they cannot be mere linguistic stipulations, since they have a content-preserving, ontological point, and a decompositional aspect; Frege's project of logical analysis and systematisation makes no sense without definitions so understood. The pivotal ontological role of elucidations is also explained. Next, three aspects of definition are distinguished, the informal versus the formal aspect, and the aspect of definition achieved through the entire process of systematisation, which encompasses the previous two and is little discussed in the literature. It is suggested that these insights can contribute to resolving some of the puzzles concerning the tension between the epistemological aim of logicism and Frege's presentation of definitions as arbitrary conventions. Finally, I stress the interdependence between the epistemological and ontological aspects of Frege's project of defining number.

1 Preliminary

Frege's logicism, supported by his logical calculus, had an indisputable epistemological aim: to prove that the truths of arithmetic are *a priori* and analytic, and thus deducible from the laws of logic. More problematic, and much debated, is the status of his definitions.[1] Frege dismisses previous attempts at the definition of number, introducing new definitions. In addition, he sometimes describes definitions as arbitrary conventions. So Frege does not seem to want to capture the pre-existing meaning of arithmetical symbols, to tell us what numbers are and always have been, but to stipulate new arithmetical symbols, with new meanings. But how can this revisionism be reconciled with the epistemological aim? How can arbitrary conventions prove the logical status of the truths of arithmetic, i.e. of truths established prior to and independently of those conventions?

Joan Weiner (2007) has offered a new solution to this puzzle: Frege was more thoroughly revisionist than we tend to believe. His revisionism affected not only his conception of definition, but also of sense, reference and truth. Prior to his concept-script systematisation of arithmetic, numerals had no determinate sense and reference, and arithmetical statements were not strictly true. According to Weiner, this systematisation was not intended to unveil the true nature of numbers and the true referents of numerals, but to introduce stricter semantic and inferential constraints stipulating the sense and reference of numerals and of arithmetical statements within a rigorous scientific system. Systematisation was thus for Frege meant as a normative linguistic precisification to reach the epistemological aim, with no claim to semantical and ontological *discoveries* about pre-systematic arithmetic. Hence, no dilemma arises.

Weiner's solution is among the most intriguing and thought provoking offered in recent years. Nevertheless, it is unwarranted, involving exegetical errors and saddling Frege's theory with insuperable substantive difficulties. I give an overview over her argument in section 2, and show, in sections 3-5, that she misrepresents the notions of (what she calls) '*Foundations*-content', and of sense, reference and truth in Frege. Then I focus on Frege's definitions, demonstrating that they have, *pace* Weiner, not only a content-preserving, ontological point, but also a decompositional aspect, which shows that they are not mere stipulations (6-9). The important ontological role of elucidations is explained in this context (10-11), and a three-fold distinction between levels at which Fregean definitions operate emerges, which will help clarify the more general problem of Frege's puzzling remarks about definitions (12-14). Finally, I stress both the epistemological and the ontological aspects of Frege's project, and their interdependence (15).[2]

1. Cf. Benacerraf 1981, Weiner 1984, Picardi 1988, Dummett 1991c, Tappenden 1995, Kemp 1996, Shieh 2008.
2. The current paper is a much enlarged and improved successor to Kanterian 2010.

2 Weiner's argument

Weiner offers a wealth of substantive and exegetical considerations in favour of her view, focusing most explicitly on the role of definitions within Frege's work, especially in the *Foundations of Arithmetic*. She investigates the requirements a definition (of number, numerals etc.) must satisfy to qualify as adequate or faithful. An obvious requirement seems to be the following:

> *The Obvious Requirement*: A definition of an expression must pick out the object to which the expression already refers or applies (680).[3]

Weiner rejects this requirement. Of course, she argues, definitions must be conservative in some sense, i.e. faithful to pre-systematic arithmetic in such a way that they don't transform it into some 'new and foreign science' (687). But this does not entail preservation of reference. She explains: 'Faithful definitions must be definitions on which those sentences that we take to express truths of arithmetic come out true and on which those series of sentences that we take to express correct inferences turn out to be enthymematic versions of gapless proofs in the logical system' (690). Systematisation thus preserves truth-related and inference-related content, what Weiner calls *Foundations*-content. For instance, a definition of '0' and '1' is unacceptable, if it presents as true in the system what is previously taken to be false, e.g. '0=1'. Thus faithful definitions must cover for what are taken to be the well known properties of numbers.[4] Equally, the definition must preserve an inference previously taken to be valid, including in applied arithmetic, for example 'If Venus has zero moons and Earth one, then given that 0<1, the Earth has more moons than Venus' (686).

Since *Foundations*-content is 'some sort of content connected with inferences' (692), it relates to *judgeable content* ('beurteilbarer Inhalt') – a notion developed by Frege in *Begriffsschrift* and designating that which has only 'significance for the inferential sequence' (Frege 1879: 6). However, according to Weiner, *Foundations*-content also anticipates the later notion of sense, *Sinn* (689ff.). First, the judgeable content of a term is not its reference (690), just as much as sense is not reference. Second, a term hitherto considered non-empty will not lose its *Foundations*-content if we discover it is empty, for the discovery will lead to a re-evaluation of pre-systematic beliefs and inferences, a re-evaluation still involving the term itself (690). Moreover, a fictional term like 'Hamlet' has *Foundations*-content, since some speakers think it enables them to express truths and correct inferences (691). Hence, it is not required for a term to have a referent in order to

3. Unless otherwise specified, all page references are to Weiner 2007.
4. Weiner 2007: 688. Cf. Frege 1879: §70.

have *Foundations*-content, and this brings *Foundations*-content in the vicinity of Sinn.

Thus, concept-script systematisation has a conservative side insofar as it preserves *Foundations*-content. But it also has a creative side. For 'preservation' should not be understood in the sense that it there is something outside of the system identical with something in the system. Systematisation involves the process of *proving in the logical system* as true pre-systematic sentences taken to express truths and as correct pre-system inferences taken to be correct. But proving 'in the logical system' is a highly normative process, guided essentially by *two precision requirements* that distinguish sharply system from pre-system: the gapless proof requirement, i.e. all proofs must be absolutely gapless, and the sharpness requirement, i.e. genuine concepts must have sharp boundaries.[5] These constraints do not apply to pre-systematic language; they are the sharp dividing line between pre-system and system. 'Frege's task is to replace imprecise pre-systematic sentences with precise systematic sentences' (710). 'Preservation' means therefore something like 'constraint-guided transformation'. It aims at the creative precisification of indeterminate and vacillating pre-systematic language (697), as Frege apparently suggests about expressions quite generally (Frege 1906a: 302–3). Precisification is of course a semantic process. Hence, Frege intends to reach his epistemological aim by semantics.

Weiner's view has intriguing corollaries, summarised as follows. (More details are presented later.)

(a) *Foundations*-content and sense/*Sinn* are related, but not identical. To have a determinate sense, an expression needs a definition satisfying the precision requirements. But pre-systematic expressions have no such definition, hence they have no sense and, by extension, no reference.[6] Sense and reference (*Sinn* and *Bedeutung*) are only system-internal features of expressions.[7] There is no contrary evidence in Frege, Weiner claims. He never says that pre-systematic terms have a reference or require one to have a use (706f.).[8] This is only apparently absurd: fixing the sense and reference of a term is only the ideal end of a science, once it culminates in a system (709f.)[9].

5. See Weiner 2007: 701, also Frege 1884: §62, §74, 1903: §56.

6. The alternative of an indeterminate sense (and reference) is excluded for Frege: there is no such thing. See e.g. 1903: §56.

7. A similar claim has been advanced before, if for different reasons. See e.g. Stekeler-Weithofer 1986: 280.

8. Weiner's argument comes close to a Wittgensteinian theory of meaning as use, although Wittgenstein is not mentioned.

9. See also Frege 1914: 242.

(b) If pre-systematic terms have no determinate reference, then given compositionality, pre-systematic sentences have no determinate reference, no truth-value. We only 'take them to express truths' (690f.). This does not mean there is nothing 'right' about them (710), only that their rightness does not satisfy systematisation-constraints. We must distinguish, like Frege, between *pre-systematic truth* and *strict truth* (709f.).[10] Preserving pre-systematic truth is one of the aforementioned faithfulness requirements a definition must satisfy.

(c) Since pre-systematic arithmetical expressions have no determinate reference, ordinary arithmetical predicates like 'is a number' have no reference either. Hence, the concept of number is not already fixed prior to Frege's definitions (696). On the contrary, *Foundations* (§100) stresses the arbitrariness of definitions (695ff.), as does the important posthumous text "Logic in Mathematics" (1914), where a determination of sense is said to be either decompositional, and thus a self-evident axiom, or stipulative (a 'constructive definition'). Since Frege's *Foundations*-definitions are not self-evident (1884: §69), they must be stipulations, precisifying *Foundations*-content and thus transforming arithmetic into a scientific system.

(d) Some think that Frege was committed to the *ontological thesis* that numbers are pre-existing, language-independent objects, whose nature his definitions capture. Weiner denies this.[11] Frege makes no claim that numbers existed before his definitions, or else they would be discoveries about pre-existing objects. But they are linguistic stipulations, not ontological discoveries. Frege is not interested in claiming that numbers are really extensions (1884: §107), but only considers the linguistic question 'Are the assertions we make about extensions assertions we can make about numbers?', and answers it by means of a linguistic principle par excellence, the context principle (Weiner 2007: 698f.). As Frege writes: 'I attach no decisive importance to bringing the extensions of concepts into the matter at all' (1884: §107).

3 'Foundations-content'?

My discussion can start with the notion of *Foundations*-content, on which Weiner bases her rejection of the Obvious Requirement. There is, in fact, no decisive evidence for a notion of content in the *Foundations* closely related, although not

10. 'Pre-systematic truth' is not Weiner's term, but my correlate to her phrase 'regarding a sentence as true' (ibid. 706, 709).

11. Weiner defends this anti-ontological stance in previous work, e.g. Weiner 1990: ch. 5.

identical to his later notion of *Sinn*. Frege uses the term 'content' loosely in *Foundations*. It variously means 'sense of a sentence', i.e. a judgement or thought (1884: x, §3, §70, §106), 'sense of a recognition judgement' (§106, §109), 'judgeable content' (§62, §74), 'reference' (§74fn.), but can also refer to conventional meaning and use (§60). 'Content' in the *Foundations* is not a technical term. Frege intended the book as a prolegomenon, an accessible introduction to his logicism. There is also no claim in the book that an expression could have a content without a referent, e.g. that 'Hamlet' has *Foundations*-content. Frege actually claims the opposite: 'the largest proper fraction' has no content or sense, because no object falls under it (§74). He makes a similar point about 'the square root of -1' (§97). Moreover, the philosophically significant role of 'content' in the *Foundations* lies in Frege's repeated claims that we need to specify a content of arithmetical judgements so that they come to express identities, and thus to secure the objecthood of numbers, given that identity is an essential mark of objecthood (§62f.).[12] His aim to specify the content of equations, understood to be identities, as a step in proving the logicist thesis that numbers are objects, would make no sense, if sentential content (of equations/identities) was not essentially linked with numerals have a reference (namely numbers). Hence, there are strong reasons to assume that content in the *Foundations* is quite close to *Bedeutung*.

But is *Foundations*-content not related to *Begriffsschrift*-content and insofar only inferential, not referential? But there is no dichotomy here. Judgeable content is so intimately tied to reference that this affects the basic formation rules of the notation in *Begriffsschrift*. Frege stipulates that any expression following the content stroke must have a judgeable content. And the relation between that expression and its judgeable content is *designation*, which is visible from two things: (a) the expression of a judgeable content is a designator starting with the definite article, paradigmatically a nominalised proposition ('the circumstance that there are houses', 'the murder of Archimedes at the capture of Syracuse'; Frege 1879: §2-3), and (b) the expression of a judgeable content can flank the sameness of content sign, i.e. the identity sign.[13] Hence, the expression of a judgeable content is a name of the judgeable content and no formula in concept-script is syntactic if such a name fails to designate anything.

Weiner argues that since 'Phosphorus = Phosphorus' is derivable from the law of identity, while 'Hesperus = Phosphorus' is not, the two names cannot have the

12. See also Rumfitt 2003: 198.

13. Frege refers to the expression of a judgeable content flanking the identity sign explicitly as a name (Frege 1879: §8, passim). His proviso that in '$A \equiv B$' the names stand for themselves because an identity statement has metalinguistic content does not refute my point, for really they stand for themselves *as names of the same content*.

same *Begriffsschrift*-content (Weiner 2007: 690). But this example is uncongenial to Frege's concerns: 'Phosphorus' and 'Hesperus' are names of *un*judgeable content, while in *Begriffsschrift* only names of judgeable content interest him, of assertible content. Thus we cannot distinguish between what a name of a judgeable content refers to and its inferential content. Therefore, once we establish (by a synthetic judgement) that two names name the same judgeable content, 'A' and 'B' are intersubstitutable for purposes of inference ('$\equiv$' functions as an identity sign, but also as a stipulative sign; Frege 1879: §8, §23), as much as, vacuously, 'A' and 'A'. The difference between two names of the same judgeable content is neither a referential nor an inferential difference, only of a different mode of determining the same inferential content, as Frege states (§8). Claiming that *Foundations*-content is connected to *Begriffsschrift* content, while revising Frege's official view of the latter, is problematic.

4 Sense and reference

It is equally unwarranted to treat sense and reference (*Sinn* and *Bedeutung*) as system-internal features inapplicable to ordinary, pre-systematic expressions. To the contrary, Frege stresses that 'The moon is the reference of "the moon"' (1919: 255) and that 'If we claim that the sentence "Etna is higher than Vesuvius" is true, then the two proper names do not just have a sense [...], but also a reference: the real, external things that are designated'[14]. Again: 'If we say "Jupiter is larger than Mars", what are we talking about? About the heavenly bodies themselves, the references [*Bedeutungen*] of the proper names "Jupiter" and "Mars"' (1906b: 193). In *Grundgesetze* he notes that the notion of reference cannot be genuinely explained, since any explanation would presuppose knowledge that some terms have a reference (Frege 1893: §30); hence, reference predates any system. Since having a reference implies having a sense, ordinary expressions with a reference also have a sense. Neither feature is exclusively system-internal. Hence, even if we described Frege's definitional project as preserving '*Foundations*-content', this would still involve preserving pre-systematic content that has a referential component, and thus content not unlike that described in *Grundgesetze* as split into sense and reference (cf. Frege 1893: x). In addition, there is evidence in the *Foundations* that not only systematic expressions have a determinate content. For Frege writes that '$1000^{(1000^{1000})}$' has 'a perfectly definite sense', which he connects to the fact that $1000^{(1000^{1000})}$ is an object with recognisable properties (1884: §104). This is indicative of Frege's ontological agenda, to which I return below.

14. Carnap 2004: 150.

5 Kinds of truth?

Weiner claims that Frege admits many notions of truth, including pre-systematic and strict truth. But Frege makes no such claim. He argues, in "Thoughts", that truth is undefinable, because any definition must analyse truth into constituent elements (of the truth bearer), which must then be *true of* a particular truth-bearer if the definition is to be applicable (1918a: 60). This circularity suggests that truth is not only indefinable, but also simple, and thus univocal. Frege advances other points incompatible with Weiner's views. He distinguishes between 'holding a thought to be true' (*Fürwahrhalten*) and 'proving the true' (*Beweis des Wahren*). The former arises from psychological laws, the latter from the laws of truth, the object of logic, not psychology (ibid. 58f.; see also 1893: xv). Since Weiner characterises pre-systematic truth in terms strongly resembling *Fürwahrhalten*, e.g. 'what we take to express truth' or 'what we regard as true', it would follow, absurdly, that Frege assigns truths of pre-systematic arithmetic to the psychological, and subsumes pre-systematic arithmetic under psychology. Equally, if pre-systematic truth is vacillating and vague, as Weiner holds, it would be a predicate coming in degrees. But truth does not allow for 'more or less' (1918a: 60). Also, Frege speaks repeatedly about truths of arithmetic or mathematics as such (e.g. 1884: §3, §11, §14, §17, §109), without qualifying them as merely pre-systematic, as opposed to systematic truths.

More generally, the truth of a thought is timeless for Frege (cf. 1884: §77, 1918a: 74). Hence, either a pre-systematic truth is also timeless, which hardly squares with its indeterminacy or vagueness, or a pre-systematic statement expresses no thought at all. Weiner may affirm just this: a pre-systematic statement only expresses *Foundations*-content, not a thought. But then *Foundations*-content is expressible, i.e. assertible, thus must be also thinkable, judgeable, negatable etc. However, Weiner's *Foundations*-content can't be really judgeable, since judging, for Frege, is 'acknowledging the truth of a thought' (1918a: 62). Judgeable is only that to which strict truth may apply. But then *Foundations*-content is not assertible either, for to assert is to make manifest a judgement (ibid.). And if it is not judgeable, *Foundations*-content lacks the essential association with judgeable content Weiner claims it has, and thus has no inferential character either, for, as Frege explains, to infer is to judge (1879/1891: 3). Pre-systematic arithmetical propositions would not be expressible, assertible, thinkable, judgeable, negatable, or occur in inferences. The distinction between pre-systematic and strict truth has catastrophic consequences.[15] This is surely one of the reasons why Frege asserts,

15. For related criticism, see Kemp 1996: 178f. Incidentally, how should we take Weiner's own arguments, formulated, as they are, not in concept-script, but in pre-systematic prose? Are they

late in his life: 'I cannot recognize different meanings of the word "true"' (1917: 20).

6 Objectivity of definitions: the material mode

Doubts about Weiner's interpretation also arise from what Frege says about, and does with, his definitions in the *Foundations.* Some passages stress the stipulative character of definitions, using expressions such as 'to fix' ('*festsetzen*') and 'stipulations' ('*Festsetzungen*') (e.g. 1884: §7, §65, §67f., §75, §104, §109). But his phrasing indicates an objective side of definition too, since he speaks of the need to ascertain or find out ('*feststellen*'), to explain the sense of an equation (1884: x, §62, §106), which Austin inaccurately translated as 'to fix/to define the sense', and to find or attend to ('*aufsuchen*') a judgeable content which can be transformed into an identity whose sides contain the new numbers (1884: §104).

This objectivity is also manifest in Frege's tendency to adopt the material mode and define *objects*, not mere expressions (1884: §7-10, §18, §67). Twice he speaks explicitly of 'the definition of an object' (1884: §67, §74). Weiner believes to find support for her thesis that Fregean definitions are arbitrary linguistic stipulations in §100 of *Foundations*, where Frege apparently denies that the meaning of 'the square root of -1' is fixed before our definitions. But here is the full context:

> 'We should be equally entitled to choose as further square roots of -1 a certain quantum of electricity, a certain surface area, and so on; but then we should naturally have to use *different symbols* to signify these *different roots.* That we are able, *apparently*, to create in this way as many square roots of -1 as we please, is not so astonishing when we reflect that the meaning of the square root of −1 is not something which was already unalterably fixed before we made these choices, but is decided for the first time by and along with them' (1884: §100; my italics).

Clearly, Frege discusses the putative definition of an object. This is why different *symbols* are supposed to be assigned to each square root of -1, *once* each square root of -1 has been chosen, i.e. defined. So the definitional choice here is not linguistic. Moreover, Frege's tone is ironical, as in the embedding discussion.[16] He is not

valid? Are her conclusions strictly true? Both a 'yes' and a 'no' invalidate her theory.

16. In the same context he remarks: 'Let the Moon multiplied by itself be -1. This gives us a square root of -1 in the shape of the Moon' (1884: §100). This was hardly written with a straight face. See also his attack on Kossack (1884: §103): 'We are given no answer at all to the question,

saying that creative definition entitles us to introduce indefinitely many square roots of -1, but is presenting his opponent's view ('apparently').[17] The opponent is a reformed formalist, who has accepted Frege's previous anti-formalist arguments, conceding that signs alone will not bring complex numbers into existence. The opponent now tries to supplement his definition of a complex number with the assignment of a random object, to fix the meaning of the sign for a complex number, but Frege's reply is to spell out the absurd consequence: there can be any number of such assignments.[18] Weiner's misunderstanding of this passage is twofold: Frege is not propounding his *own* view of definition of a linguistic *symbol* as arbitrary stipulation, but his *opponent's* view of definition of an *object* as a random ontic assignment. There is no evidence in *Foundations* that Frege takes definitions to be arbitrary, creative definitions.[19]

Weiner similarly misunderstands an eligibility condition of primitive truths. In "On Formal Theories of Arithmetic" Frege argues that every definition comes to an end, reaching undefinable primitives, the original building blocks of science (*Urbausteine*), expressed in axioms (1885: 96). Weiner takes this to be a semantic point: the eligibility condition 'is that the *expression* of the primitive truth should include only simple, undefinable *expressions*. For these simples are the ultimate building blocks of the discipline' (Weiner 2007: 682, my italics). But this is not Frege's point. Frege adopts the material, not the formal mode, concerned with defining the objects themselves, here geometrical objects: 'It will not be possible *to define an angle* without presupposing knowledge about the straight line. Of course, what a definition is based on might itself have been defined previously' (1885: 104, my italics). The primitives terminating a chain of definitions are not expressions, but undefinable objects 'whose properties are expressed in the axioms'.[20] It is also in the material mode that Frege proceeds to explain that the building blocks of arithmetic must be purely logical (to account for the universality of arithmetic), and that the terminological replacement of 'set' with 'concept' is not mere renaming, but important for the actual state of affairs (1885: 104f.). Similarly, in his polemic against Husserl, Frege insists that concerning the business of definition the mathematicians, unlike the psychologistic logicians, only care

what does 1 + i really mean? Is it the idea of an apple and a pear, or the idea of toothache and gout? Not both at once, at any rate, because then 1 + i would not be always identical with 1 + i.'

17. Dummett also misunderstands this passage. See Dummett 1991a: 178f., 1991c: 34f., 40.

18. A few pages later Frege argues that the formalist origin of this reasoning leads to misconstruing the subject matter of arithmetic as synthetic and even as synthetic *a posteriori* (see Frege 1884: §103).

19. An arbitrary definition seems to be given of 'gleichzahlig' ('equinumerous'; 1884: §67), but Frege explains that the arbitrariness only concerns the symbol, not its meaning.

20. We can call the expressions designating such primitives also 'primitives', but only metonymically.

about the things themselves, the reference (*Bedeutung*) of expressions, in particular the extensions of concepts (1894: 319f.).

7 Objectivity of definitions: Platonic realism

Another challenge to Weiner is Frege's Platonism, which concerns arithmetical truth, arithmetical and logical objects, and appears in the importance existence proofs have for his definitions. Frege explains the definition of 1 by reference to the sempiternality and apriority of the truth of the propositions it helps to derive, e.g. '1 is the immediate successor of 0'; no physical occurrence, not even the 'subjective' constitution of our brains, could affect this truth (1884: §77). Linguistic precisification cannot explain this sempiternality; the truth-value of 'Tom is alive' still depends on contingent, empirical facts, however sharply we cut the boundaries of the embedded expressions.[21] What explains sempiternality is the objectivity of the content of arithmetical propositions, the nature of arithmetical objects. This nature is grounded in the nature of logical objects, given that number-statements are ultimately about relations between logical objects (correlations between extensions of second-order concepts). Far from explaining logical objects by linguistic constraints and stipulations, he awards them ontological objectivity: they are simply there, ready to be discovered by us, independent of such 'external aids [...] as language, numerals, etc.' (1884: iii). Thus judgeable contents, the paradigmatic logical objects of the early work, are as objective as any mind- and language-independent object, e.g. the Sun (1879/1891: 7).[22] Definitions could play no creative role at this ontic level, and don't play it in concept-script, where a definition is merely an abbreviation, stipulating that a simple sign have the same judgeable content as a complex sign (1879: §24). The existence of judgeable contents and their names precedes any definition in concept-script.

Frege claims the same kind of objectivity for numbers, i.e. independence of the mind, language, stipulations. Corresponding passages are legion (e.g. §26, §60, 62), and it is hard to see how they are to be read as merely specifying precision requirements imposed by system construction. Frege compares the objectivity of number with that of the North Sea, noting the independence of both from arbitrary

21. Frege's eternalist theory of truth, defended elsewhere, does not concern us here, since that theory concerns not the justification of the truth-value of a proposition, but the proper truth-bearer.

22. Elsewhere he says something similar of the relation between an object and its concept: 'To bring an object under a concept is merely to recognise a relation that already existed beforehand' (1894: 317). For similar remarks about the objectivity of thoughts see 1893, xvi, 1918a: 76f., 1918b: 151.

linguistic stipulations (§26).[23] Altering the meaning of 'North Sea' today would not falsify whatever true content (thought) has been expressed until now by 'The North Sea is 290.000 square miles in area'. The North Sea is there, objective, ready to be discovered. Presumably, then, there are correct and incorrect definitions of the North Sea, if the North Sea is independent of the definition of 'the North Sea': a correct definition will pick out precisely the North Sea. *Pace* Weiner, this suggests that there is an element of discovery in at least some definitions: correct definitions pick out a pre-existing object in a precise and determinate manner. This is entirely compatible with Frege's claims about numbers, namely that we discover them in the concepts (1884: §48, §58), and that mathematicians are like geographers: neither can create 'things at will; [both] can only discover what is there and give it a name' (§96).[24] It is unclear how Weiner's interpretation can accommodate such passages. They are not mentioned in her article.

Frege's rejection of empiricism in logic and mathematics shows that the objectivity he claims for logical and arithmetical entities is stronger than that of physical entities. Numbers are abstract objects, ready to be recognised by us, but without physical properties, including spatiality and temporality. Our recognition of abstracta is situated in time, but abstracta are not, as he explains using the example of the equator, which was not created, in the sense that nothing positive could be said about it before its alleged creation (1884: §26). Actually, the equator is a dependent abstractum: before the creation of Earth there was indeed nothing positive to say about the equator. But the point is valid for self-subsistent abstracta like numbers: there is something positive to say about them at all times (with appropriate linguistic usage in place). Hence temporalising the truth of statements concerning numbers (e.g. ' "Numbers are extensions" is not a true statement before Frege formulated definitions in 1879'), as Weiner's argument entails, is objectionable and not in line with Frege's views.

Frege's Platonism is manifest in another respect. In the *Foundations* he does not merely provide a definition of, say, 0, and content himself with its satisfying the sharpness requirement. Instead, he gives various *existence proofs*, e.g. that if 0 is the number of an empty concept F and an empty concept G, then there is a relation φ bringing F and G into one-one correlation (1884: §75), or that there is something which immediately succeeds 0 (§77). Equally, he justifies his diagnosis that the formalists have only introduced empty signs, not new number-words, by their failure to prove the existence of the new numbers (§92ff.). The importance of

23. Note, and ignore, that Frege's discussion of the arbitrariness of stipulations is confusingly embedded in a discussion against psychologism.

24. Frege also compares the mathematician with the botanist who determines something objective when he determines the number and colour of a plant's petals. See also 1893: xiii.

existence proofs emerges in his sharp contrast between defining a concept by the properties objects must have to fall under it and proving that something falls under it (1884: §74, 1893: xiv). Thus definitions, on his account, cannot bring objects into existence, only specify concepts hitherto lacking a designator. It is for this reason that he argues at length in *Grundgesetze* precisely against the possibility of creative definitions (1903: §141f.).

8 Numbers as extensions

Frege clearly has an ontological aim, to discover what is already there. Weiner claims that there is no argument in the *Foundations* that numbers are really extensions, citing §69 and §107. In §69, she suggests, Frege avoids the ontological question 'Are numbers extensions?', and asks a linguistic question instead, motivated by the context principle: 'Are the assertions we make about extensions assertions we can make about numbers?' But Frege does not believe that the linguistic question excludes the ontological question. His interest in language is actually only ontological: 'There is no intention of saying anything about the symbols; no one wants to know anything about them, except insofar as some property of theirs directly mirrors some property in what they symbolise' (1884: §24). The context principle, in the *Foundations*, is not deployed as an anti-ontological tool, but against the psychologistic prejudice that an expression designates an entity only when, in isolation, we associate a mental idea with it (§59). The principle actually serves the ontological agenda: numbers are self-subsistent entities because their expressions can be construed as singular terms, not in isolation, but at least in the sentential contexts of their paradigmatic arithmetical use, which is ontologically significant (equations understood as identities).

Nor does Frege's assertion that he does not attach any decisive importance to bringing the extension of a concept into the matter (1884: §107) count against his ontologism. He introduces extensions in his 'explicit' definition of number. This definition responds to the 'Julius Caesar' problem: all recognition statements of the form '$\mathrm{N_t}F(\mathrm{t}) = a$' must have a sense, i.e. we must decide for any object a whether the statement is true or not (§§66-8, §107).[25] But of course, recognition statements are identity statements, and their truth is a criterion for the objecthood of the content of the signs flanking the identity sign (§62, §107). Hence, what Frege is most concerned with here is, again, an ontological issue: to specify a logicist criterion for the objecthood of numbers. He invokes extensions of concepts for

25. '$\mathrm{N_t}F(\mathrm{t})$' stands for 'the number belonging to the concept F'.

this, which are logical objects on his account. His wariness in §107 is not about the need for *some* suitable objects to underpin his definition: such objects are essential to his definition. We can see this from the defence of his own suggestion that one could write 'concept' instead of 'extension of the concept' in his definition of number (1884: §68fn.): by substituting 'concept' for 'extension of the concept' in the definition 'the Number which belongs to the concept F is the extension of the concept "equinumerous to the concept F"' the word 'concept' would be preceded by the definite article, and the whole phrase ('the concept') would be thus still a singular term, determining numbers as objects.[26] Rather, the wariness in §107 concerns the fact that the phrase 'extension of the concept' is left undefined ('presupposed') in the *Foundations*, and hence that the 'Julius Caesar' problem remains; for to decide whether $\mathrm{N_t}F(\mathrm{t}) = a$ we must be able to decide whether a is a certain extension. So Frege's wariness is ontological *par excellence*: it is concerned with securing a sharp objecthood criterion for numbers, which is not achieved just by employing the notion 'extension of the concept'. This interpretation is confirmed once we look at Frege's mature solution to the problem in *Grundgesetze*, where he brings in extensions as value-ranges not as *defined*, but as *primitive* objects.[27] This is obviously an ontological move, in fact one untouched by the stipulative role of definitions. This suggests that merely focusing on the stipulative aspect of definitions won't help understand Frege's project.

9 The decompositional character of definition: the 1914 argument

But what make of Frege's conclusion in e.g. "Logic in Mathematics" (1914) that genuine definitions are indeed mere stipulations? Frege makes there a distinction between two ways to determine the sense of a sign, constructive definition and decompositional analysis (*Zerlegung*). A constructive definition introduces a new sign, previously without sense, to replace a group of signs that already have a sense (1914: 207f.). It is an arbitrary stipulation (1914: 211). Decompositional analysis starts with a sign A with an established use and sense, and attempts a logical analysis of the constituents of its sense. If it succeeds we find a complex expression designating the constituents of the sense of the simple sign, and the whole expression of the analysis is a self-evident axiom. Thus, if *Foundations*-definitions were decompositional, they would be self-evident. But, Weiner argues, *Foundations*-definitions are not self-evident, for we 'think of the extensions of concepts

26. See Frege 1892: 48. See also Burge 1984: 274-84.
27. See Dummett 1991: 159.

as something quite different from numbers' (1884: §69). Hence, *Foundations*-definitions cannot be axioms, but must be constructive definitions, according to her.[28]

This conclusion is premature. It faces difficulties when the whole 1914 argument and other passages, presenting a more complex account of definition, are taken into account. First, if *Foundations*-definitions had a stipulative, system-constructive role, they should take the form $A{:=}B$, where B represents a pre-systematic verbal expression and A a symbol in concept-script (like definitions in logic manuals, marking the transition from informal to formal language). But no *Foundations*-definition has this form, as it involves pre-systematic expressions on its *both* sides. Furthermore, while *Grundgesetze*-definitions are indeed presented as stipulations, they all involve only *concept-script* symbols on both sides. Frege actually specifies that for every newly introduced name we must be able to specify a co-referring complex name consisting only of the eight primitive names of *Grundgesetze* (1893: §33). Hence, definitions occur in *Grundgesetze* only inside the system. Neither *Foundations*-definitions nor *Grundgesetze*-definitions establish the transition from pre-system to system. Neither can be constructive in Weiner's sense.

Second, Frege's own understanding of constructive definitions poses a problem for Weiner. A constructive definition is an *abbreviation* introducing a new sign replacing some group of signs. This conception is already explained and employed in *Begriffsschrift* (1879: §24), and explicitly adopted in *Grundgesetze* (1893: vi, §27).[29] Abbreviations facilitate surveyability, especially in proofs. Such definitions are psychologically useful, if logically dispensable (1914: 208f.). They 'add nothing to the content' and are 'not essential to the system'. If a 'definition' were logically indispensable, a proof would be impossible without it; then it would be an axiom or theorem, not a definition (1914: 208). But on Weiner's interpretation the transition from pre-system to system is effected by definitions, so they must be logically essential to a system. To be fair, this remains a problem independently of Weiner, since in *Foundations* Frege does not suggest that his definitions are logically dispensable abbreviations. After defining number as extensions of

28. Actually, this argument is incomplete, since *Foundations*-definitions could be, if not axioms, at least theorems awaiting proof. But this possibility can be dismissed. If the definition of 0 were a theorem (or axiom), it would also assert a truth *about* 0. But then it would not be a *Foundations*-definition, for Frege writes that a definition does not assert 'anything about an object, but only lays down the meaning of a symbol' (1884: §67). Theorems don't establish the meaning of symbols, on Frege's account. Moreover, *Foundations*-definitions are not derivations at all, so cannot be theorems anyway.

29. It also occurs in "Über Grundlagen der Geometrie I" (1906: 320), where Frege insists, as Weiner notes, that definitions are arbitrary stipulations. (Other passages she mentions are less explicit, and one, in "On the Law of Inertia" (1891), is not relevant (and wrongly referenced, both in terms of page number and year of publication: see Weiner 2007: 697, fn. 27).

concepts (1884: §68), he writes: 'Definitions show their worth by proving fruitful. Those that could just as well be omitted and leave no link missing in the chain of our proofs should be rejected as completely worthless' (1884: §70). Frege also insists, against Kant, on the possibility and necessity of definitions which expand our knowledge by drawing new boundaries (1884: §88). Could it be that Frege means by a constructive definition in 1914 a *definition in concept-script*? This would explain why definitions in both *Begriffsschrift* and *Grundgesetze* are presented as abbreviations, but not in Foundations. This suggests that we should distinguish between *Foundations*-definitions, in the verbal language, and concept-script definitions, in the formula language, with only the latter being abbreviatory and 'constructive' à la 1914. Accordingly, *Foundations*-definitions could not be constructive definitions. Weiner does not seem to be aware of this distinction.[30]

Third, being abbreviations constructive definitions are not creative. They stipulate that a new sign is to have the same sense as the signs abbreviated (1914: 207).[31] Hence, a definition is a sense-conserving device. A *definiendum* is a receptacle into which we 'cram' a complex sense, to unpack it again whenever we need to. Note that Frege uses here his technical term '*Sinn*',[32] and redescribes a definition also as a bestowal of *Bedeutung* (1914: 208f.). Hence, definitions do not transform, by precisification, pre-systematic content into *Sinn* and *Bedeutung*. There must already be expressions with *Sinn* and *Bedeutung* for constructive definitions to be possible.

Another aspect of logical decomposition, as presented by Frege, reinforces this. Decomposition has the form $A{=}B{+}C$ ('=' indicates sameness of sense), which requires a complex expression $B{+}C$ whose constituents have the same sense as the constituents of A. If $A{=}B{+}C$ is self-evident, we obtain an axiom. If not, we infringe the sharpness requirement, since we don't know the complete sense of A and can't decide, for all contexts, whether A is substitutable with $B{+}C$, preserving the same thought (and truth-value). Hence, we go prescriptive: we introduce a new sign D, stipulated to have exactly the sense of the complex expression, i.e. $D{:=}B{+}C$, and operate with D, discarding the original *analysandum* A. Or we keep A, but as a 'new' sign, stipulated to have the same sense as the *analysans*, i.e. $A^*{:=}B{+}C$ (1914: 211, Carnap 2004: 140). A, as an old sign, is discarded in any

30. Others are, but don't make much of it. See e.g. Shieh 2008: 1005, who mentions, but denies that the distinction is relevant for making sense of Frege's epistemological project. But see below for a contrasting view.

31. See also Frege 1906: 289.

32. This is also visible from the fact that sense is here subject to a compositionality principle at the level of thought: the sense of a part of a sentence is part of the thought expressed. That the sense of a sentence is a thought is of course a core aspect of Frege's technical notion of sense.

case.[33] Note the Janus-faced character of A in this case. At any rate, we introduce constructive definitions when $A{=}B{+}C$ is not self-evident. Therefore, *constructive definitions involve logical decompositions.* For we started with a putative logical decomposition of A by means of $B{+}C$, and it is *this* complex expression $B{+}C$ which ends up on the right-hand side of the two possible constructive definitions ($D{:=}B{+}C$ or $A^*{:=}B{+}C$). The original symbol A led the way, as it were. Decompositions, however, are conservative, not creative: they presuppose some group of signs with an established sense.[34] Therefore, *constructive definitions are decompositional and content-preserving*, *pace* Weiner and pace some misleading passages in Frege, e.g. when he writes that in constructing a new system we take no account of anything prior to the system, since '[e]verything has to be made anew from the ground up', with none of our analytical activities making appearance in the new system (1914: 211).[35] If this were true, the very account of constructive definition he gives would be unintelligible, for where would $B{+}C$ come from? In reality, Frege's distinction between constructive definitions and logical decompositions does not exclude their close connection, as he explains in a lecture based on the 1914 text: '*Definitions* don't just *help* to construct, but also to *analyze* what is complex' (Carnap 2004: 140). Therefore our pre-systematic analytical activities (such as those offered in *Foundations*) do appear in the system (e.g. of *Grundgesetze*).

10 The undefinable basis of definition

We have established that, for Frege, there is no contradiction between a definition being stipulative, constructive, arbitrary, and its being decompositional and content-preserving. A definition is at best arbitrary regarding the selection of the *definiendum*-cum-sign, not the content assigned to it. While this undermines Weiner's denial of the Obvious Requirement, we must now probe further to locate the actual role and place of definitions in Frege's thought. Frege views every genuine definition as a stipulated identity[36], and this presupposes that with which the sense of the *definiendum* is identical: the sense of the *definiens*. Eventually, definitions must therefore come to an end; they are parasitic on indefinables (1885:

33. Hence, it is not quite correct to say, as Horty does (2007: 38), that the question of eliminability does not arise at all with decompositions (he calls them 'explicative definitions'). What is true is that A is not discarded in terms of an expression sharing exactly the same sense.

34. Cf. 'We can only allow something as a constituent of a complex expression if it has an established sense [*anerkannten Sinn*]' (1914: 210; translation amended).

35. The decompositional character of definitions is missed by other recent commentators as well, e.g. Shieh 2008: 1004.

36. See 1879: §23, 1884: §98, 1893: §27, §33, 1903a: 320.

96, 1906a: 301f.), hence can't contribute to the latter's constitution. Indefinables constitute the ontological foundation of a system of science: they contain 'like a seed the entire content of [a science]' (1885: 96). In the logicist project, definitions trace back the arithmetical to this realm of indefinables, 'the logical' (ibid.). The structure of *Grundgesetze* reflects this: first, eight *Urzeichen* are introduced as names of primitive logical objects such as value-ranges ('$\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$') or first-level functions ('$—\xi$').[37] These names are subsequently employed to formulate six basic laws, self-evident axioms about the (inter-relations between the) primitive logical objects (1893: §§1-25). Only then are definitions introduced, expanding the stock of signs, which eventually include arithmetical symbols, '0', '1' etc. (1893: §§26ff.), or rather, their concept-script equivalents. By deriving the basic arithmetical laws with these symbols (§§53ff.), Frege purports to prove logicism. Consequently, definitions are only part of a wider process, and they don't establish the system alone.

Weiner mentions a passage in "On the Foundations of Geometry (Second Series)", where pre-systematic scientific expressions are described as too vacillating for strict science (1906a: 302f.). Frege then argues that definitions play a fundamental role in a system of science. Does this not contradict the 1914 view that definitions are logically superfluous, supporting Weiner's view that their system-constructive contribution is just precisification? No. Frege does not deny here that definitions *can* precisify, but insists that their role is not *exclusively* precisification. Definitions stipulate the content of a word, and if the *definiendum* is new, they must give it a precise content. If the *definiendum* is already in use, its use might be vacillating. Frege does not say how to proceed then, but presumably we could follow the 1914 recommendation and go prescriptive. However, Frege's focus in 1906 is not this case, but a putative *definiendum* satisfying 'the strictest requirements', when 'we might think that a definition is unnecessary' (1906a: 303). But this is not so, he argues, for while precise terms facilitate scientific communication, the 'real significance of definition lies in *the logical construction out of primitive elements*' (my emphasis), giving us the benefit of insight into logical structure (and the logical linkage between truths; see below). This is what makes it a 'constituent of the system of science'. The focus is here on 'primitive elements', not 'construction', for Frege immediately adds that definition can be generated by construction or decomposition, and which we employ does not matter. Therefore, there is no contradiction between the 1906 and 1914 arguments. In 1906 he stresses the reliance of

37. These are actually not eight names of eight logical entities (functions), but eight forms of names of eight kinds of logical entities (functions). Symbols like 'ζ' are not themselves primitives of concept-script, but only introduced to exemplify, elucidate forms of concept-script symbols (see 1893: §1, fn. 1). I ignore complications arising from this detail, and treat 'ζ' as a symbol of concept-script.

definition on primitive symbols, reached constructively or analytically. In 1914 he calls only a stipulative convention ('constructive definition') a genuine definition; but, as seen, even this involves decomposition. Construction and decomposition are two sides of the same coin.

How is then Frege's denial in 1914 that definition has logical significance to be understood? This is ambiguous. On the one hand, if Frege denies that formal definition is a necessary part of a system, he is right. Insofar as concept-script definitions abbreviate groups of signs reducible to primitive symbols, definitions are logically dispensable. Arithmetic could be reconstructed without e.g. definition Θ (1893: §41), without introducing a special symbol 'Ø' for zero, using the *definiens* '$\natural\dot{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon)$' instead. Naturally, this will make the system much less surveyable and obscure its relationship to ordinary arithmetic. The cardinal operator '$\natural$' abbreviates itself a complex sign which in turn contains several occurrences of further abbreviations (the signs for elementhood, the extension of the reverse of a relation, etc.). Fully translated into the eight *Urzeichen* the sign for zero would be certainly a monster (e.g. containing over 30 quantifiers, real variables not counted). The resulting complexity is not a trivial matter, and without abbreviations we might not be even able to perform the proofs Frege offers and which advance our knowledge. This 'great importance for thinking as it actually takes place in human beings' (1914: 209) can therefore be seen as one aspect of the fruitfulness of stipulative definitions. The receptacle-function of definition is therefore not to be underestimated.[38] Nevertheless, this is still only of 'psychological', not logical significance. We could imagine a community of mathematicians performing pure and applied systematic arithmetic with the eight primitive symbols alone, every formula displaying the full logical structure of its *Bedeutung*. Formal definitions are therefore ultimately dispensable, as they are mere replacement rules. Nevertheless, when definitions *are* introduced, they do have logical significance: definition Θ, say, fixes the *Bedeutung* of a simple concept-script symbol for zero with an *analysis* in terms of a group of concept-script symbols designating, ultimately, indefinables, thus displaying, or at least intimating the full logical structure of zero.

On the other hand, if Frege meant that, even when introduced, definitions are logically irrelevant, he would be wrong, forsaking his 1906 insight into the relation between definitions and primitive symbols designating indefinables, a relation which proves the undeniably decompositional aspect of formal definition. To be sure, in 1914 Frege officially underplays the ontological role of definition by assigning only psychological usefulness to it. But, as seen, the 1914 argument implicitly

38. This aspect of definition is elaborated in detail in Horty 1993 and 2007, if to the detriment of elucidations and the ontological aspect of definition.

acknowledges the analytical nature of definition.[39] Both arguments allow, correctly, that definitions alone do not establish a system of science, despite their logical significance, when employed, rather require something prior and indefinable.

11 The missing link: elucidations

If not definitions, what does establish the system? How is the caesura between pre-systematic and systematic arithmetic to be understood and how is it bridged? It is bridged, Weiner says, by stipulative definitions meeting standards of precisification. But we have seen that Frege's definitions, as understood so far, do not link pre-system with system; they occur either in pre-systematic language, as in *Foundations*, or in concept-script, as in *Grundgesetze*. Moreover, *Grundgesetze* definitions only abbreviate groups of signs consisting, ultimately, of symbols designating *Urelemente*. These symbols cannot be introduced through definitions, since they designate what is logically simple and unanalysable (1892: 192, 1893: 4, 1914: 235). Definitions presuppose knowledge of the *Urelemente* and their *symbols* (1906a: 302). Knowledge of the former is *a priori* and unmediated (1884: §27f., §105), knowledge of the latter is established through *elucidations*. Elucidations are not part of a system, but belong to its propaedeutic, the 'antechamber' (1899: 36, 1906a: 301). They introduce symbols for the *Urelemente in* pre-systematic language (1914: 207), and elaborate the basic categories of a specific science.[40] They are essentially vague, and it is for this reason that they can't figure in proofs, and depend, like hints, 'on being met half-way by an intelligent guess' (1899: 37, 1906a: 302).[41] Elucidations, and not definitions, are the true links between pre-system and system, and *pace* Weiner they do not answer to precision constraints. Only definitions do. Still, this leaves us with a problem, for if the precision constraints are employed in setting up the system, they precede the system, and if pre-systematic language is not yet subjected to them, then how are they made possible, if not by whatever is going on in the elucidatory transition? But elucidations are supposedly vague, and the resources we can employ to further clarify them are not essentially different from those employed in vacillating pre-systematic language. Circularity (1914: 207) and scepticism (1906a: 301) looms. Frege admits that in theory there is no way to overcome this difficulty. He simply assumes

39. And the 1914 account is more explicit in other respects, as seen above.

40. E.g. 'concept' (1892: 193), 'negation' (1893: §6), 'truth' (1918a: 60), 'judgement' (1918b: 126), 'point' (1906: 304f.), 'function' (1924/1925: 271).

41. See also 1892: 193, 1914: 235, 1893: 4. Russell and Whitehead have a similar account in *Principia Mathematica*. See Russell/Whitehead 1910: 91.

that in practice it is somehow overcome (1914: 207). But this is no solution. Elucidations are Frege's 'Münchhausen problem'.[42]

In any case, it is noteworthy that in one passage Frege suggests that elucidations serve only a communicative purpose: a solitary scientist would need no elucidation (1906a: 301). But this clashes with Frege's claim that a system of science rests on undefinable *Urelemente.* Surely, even a solitary scientist establishing a system needs a concept-script, and since a concept-script differs from his pre-systematic language, the transition between the two would still require links similar to elucidations. Thus elucidations have not only a communicative, but also a system-constructive role.[43] Unlike definitions, they are neither part of the system nor logically indispensable nor subject to precision constraints. Their role is essentially *ontological*: in arithmetic they import primitive logical *objects,* towards which pre-systematic expressions vaguely gesture, into the system, where the structure and nature of those objects is fully revealed. These objects predate the system-language, since the elementary symbols are introduced only through elucidations, which require already meaningful, if (mostly) imprecise, expressions. But primitive logical objects also antedate pre-systematic, indeed any, language, given Frege's Platonism.

No matter how we solve the 'Münchhausen problem', elucidations are therefore necessary for system-construction, for they provide the system with its ontic foundation.[44] Weiner's exclusive focus on definitions, to the detriment of elucidations, is misleading.[45] Frege's conception of analysis, of a scientific system, depends on the contrast between elucidations and definitions. Pre-systematic arithmetical language is, to some extent, imprecise and vacillating, but not without ontic content. It is just this content that is dissected and displayed in the system.

42. That Frege continued to grapple with this problem is evident from notes towards the end of his life (see 1924: 266).

43. Alternatively, we could deny that the solitary scientist needs a concept-script, since that too has only a communicative, pragmatic purpose. But this conflicts with the epistemological and logical value Frege assigns a concept-script (see e.g. 1879: ixff., 1882). Or are we really supposed to think that the private language of the solitary scientist is itself already a concept-script?

44. In 1893: §35 Frege seems to contradict this, by saying that it is the definition of $\xi \frown \zeta$ ('elementhood'- function) which matters for subsequent proofs, not its elucidations, whose falsity would not invalidate the proofs. But $\xi \frown \zeta$ has a definition because it is a *complex* function, and its elucidation does not occur at the formative level of concept-script. The constituents of the definition, by contrast, must eventually consist of primitive symbols whose elucidations can't be false.

45. In a recent article on elucidations Weiner focuses mostly on the elucidation of categoricals like 'function', not on the primitive symbols of concept-script, and she does not address elucidation's ontological, but only its communicative role (Weiner 2005: 210), or rather its role of highlighting the incommunicable element in philosophy. This ontological omission also applies to Weiner's earlier discussion of elucidations (1990: 227ff.). For more criticism of that discussion see Kemp 1996: 175ff.

Otherwise, there would be nothing to analyse and systematize, and the sequence elucidations-axioms-definitions-proofs could not even begin. Since as elucidations introduce concept-script symbols for undefinable logical simples, there would be no basic vocabulary (1893: §31), if the pre-systematic element of an elucidation lacked content. An elucidation of a first-level function must be *of* that function, for which it introduces a symbol ('$—\xi$'). Otherwise '$—\xi$' would have no *Bedeutung*, and '$—\xi$' would infringe the requirement of *Grundgesetze* that all names, simple or complex, have a *Bedeutung* (1893: §§28-31). The pre-systematic element of an elucidation (the 'prose') must have a *Bedeutung* too (how acquired does not concern Frege), however vague. That pre-systematic expressions vacillate does not show that they lack a *Bedeutung*, but only that its precise expression needs a system. In conclusion, there is continuity of *Bedeutung* between pre-system and system, *pace* Weiner. Call this *the Continuity Thesis.*

12 The epistemic gap

While Frege believes that there is a gap between pre-system and system, it is not so wide that the question about the existence of arithmetical objects and the referents of arithmetical expressions only arises within the system. The gap is not ontological, but epistemic. This is suggested by the several passages. For instance, arguing against the attempt to study the nature of arithmetic and logic in historicist and empiricist terms, he distinguishes in *Foundations* between our knowledge of concepts, which is gradual and hazy, and the concepts themselves:

> 'What is known as the history of concepts is really a history either of our knowledge of concepts or of the meanings of words. Often it is only after immense intellectual effort, which may have continued over centuries, that humanity at last succeeds in achieving knowledge of a concept in its pure form, in stripping off the irrelevant accretions which veil it from the eyes of the mind. [...] Do the concepts, as we approach their supposed sources, reveal themselves in peculiar purity? Not at all; we see everything as through a mist, blurred and undifferentiated. It is as though everyone who wished to know about America were to try to put himself back in the position of Columbus, at the time when he caught the first dubious glimpse of his supposed India. Of course, a comparison like this proves nothing; but it should, I hope, make my point clear.' (1884: viif.)

The mist metaphor recurs in the 1914 text, in connexion with the question what to do if a proposed analysis of a simple sign A as $B+C$ is not self-evident (see above). Unlike Weiner, Frege readily distinguishes between the sign's sense and our incomplete grasp of it: 'If [$A{:=}B+C$] is open to question [...] then the reason must lie in the fact that we do not have a clear grasp of the sense of the simple sign, but that its outlines are confused as if we saw it through a mist' (1914: 211).[46] Grasping incompletely the sense of A is surely different from grasping the incomplete sense of A. This fits the Continuity Thesis: given the ontological continuity between pre-system and system, mediated by elucidations, any imprecision can only be epistemic. Moreover, the 1914 passage just quoted in claims not just continuity of *Bedeutung,* but also of *Sinn*, which is also presented as objective and as the goal of precisification.[47] This is compatible with vacillating *use* of pre-systematic language, since Frege nowhere identifies sense with use.

Weiner mistakenly concludes from the acknowledged lack of self-evidence of Frege's *Foundations*-definitions (1884: §69) that numerals have no pre-systematic sense and reference, and that numbers are not really extensions and not discoverable to be so (Weiner 2007: 697f.). The mist-metaphor suggests just the opposite: there is a relative gap between *our* grasp of number and its real nature, a gap to be spanned by systematisation. The ontological objectivity of numbers contrasts with our subjective, vacillating access to it. The content of '2+3=5' is as objective as the sun, although it may seem different to different people (1879/1891: 7). *Foundations* §69 is no counter-evidence to this contrast between appearance and reality,[48] for Frege's formulation is quite weak: 'That this definition [of number] is correct will *perhaps* be hardly evident *at first.* For do we not think of concepts as something quite different from numbers?' (my emphases). It is not that numbers don't have objective, self-evident properties, but only that these properties are not blindingly obvious: self-evidence does not entail immediate assent.[49] Of course, the inves-

46. See also 1914: 217. The metaphor also occurs in Carnap's notes of Frege's 1914 lectures. See Carnap 1914: 141. See also Horty 2007: 37 on this.

47. Continuity of *Sinn* entails continuity of *Bedeutung*, but Frege stresses only the former here, since a few pages before he was concerned with what a proof proves (the *Sinn* of a sentence, not a sentence) (1914: 206).

48. If indeed this passage is concerned with self-evidence. Two doubts arise: (a) if a definition says nothing about an object, i.e. if it is not a judgement (1884: §67), the evidential status of a definition does not arise; (b) contrary to the Austin translation, Frege does not speak of evidence. A better translation of the first sentence of *Foundations* §69 might be: 'That this explanation is appropriate will perhaps be little acceptable'.

49. Weiner admits this, in a footnote (2007: 682, fn. 6), but does not explain how this squares with her denial of an epistemic gap between the objective properties of number and our grasp of them. See Künne (2010: 672ff.) for a helpful discussion of the distinction between self-evidence and immediate assent. In his otherwise valuable discussion Kemp (1996: 181) seems to miss this point, which is just another aspect of Frege's rationalism. Incidentally, the aforementioned distinction is related to that between a proposition's being necessary and its being known to be

tigation of number in *Foundations* can't attain self-evidence for a simple reason: it offers no logical analysis, no definitions and no proofs *in concept-script*. Hence Frege's claim to have made the analyticity of arithmetic only *probable* in *Foundations* (1884: §87, §90, §109).[50] The aforementioned distinction between informal and formal definitions thus proves essential for understanding Frege's epistemological project, for only concept-script definitions really close the epistemic gap, not *Foundations*-definitions.[51] These are still in verbal language, hence they still make us 'see everything as through a mist, blurred and undifferentiated', although much less so than previous definitions. 'Blurred and undifferentiated': i.e. *Foundations*-definitions, lacking the right multiplicity of symbols, still obscure, at least partly, the structure of their referents. We are getting a sense of what causes and what closes the epistemic gap: incomplete vs. complete articulation. I will return to this.

Weiner denies the epistemic gap. She repudiates Tyler Burge's defence of a similar gap (Weiner 2007: 693, fn. 22). Burge states: 'Strictly speaking, from Frege's point of view, no one had fully grasped and mastered the concept of number or *sense* (as distinguished from conventional significance/use) of "Number" by the time he wrote *Foundations* in 1884'[52]. The problem also applies to reference. If Burge were distinguishing strictly between the conventional significance or use and the sense and reference of a numeral, Weiner's misgivings would be understandable.[53] Not only did Frege not make any such strict distinction, but the distinction seemingly entails radical externalism about sense: the conventional use of a numeral, its 'nominal essence' (to use a Lockean phrase), could entirely diverge from its sense, its 'real essence'; a community might use symbols expressing senses not grasped by anybody (Weiner 2007: 693, fn. 22). Semantic scepticism threatens: how can we tell that we have left the conventional use behind and *now* grasp the sense?[54] Weiner's answer would be to say that pre-systematic numerals have no

necessary (see Kenny 1966: 135f.).

50. Remember that concept-script was developed by Frege to avoid the clandestine intrusion of anything intuitive into the chain of reasoning, in other words to articulate proofs in a 'gapless' manner (Frege 1879: preface). Since the propositions of *Foundations* are not thus formulated, we cannot be sure yet that something intuitive is not supporting the number-theoretic investigation. And if the presence of intuition cannot be excluded with certainty, then the claim of analyticity is merely probable, for intuition involves syntheticity, the opposite of analyticity.

51. Hence, we need to treat with great care passages in *Grundgesetze* in which Frege refers the reader, in the context of giving some formal definition, to the corresponding informal definition in *Grundlagen* (see e.g. 1893: §§41f.). The former are not simply formal translations of the latter, or else *Grundgesetze* must also be understood as proving the mere probability of the analyticity of arithmetic.

52. Burge 1984: 276; see also Burge 1990: 257, Baker & Hacker 1984: 176.

53. This is a counterfactual. Given Burge's careful formulation ('no one had fully grasped etc.'), the following should not be interpreted as criticising him.

54. Weiner's own explicit challenge to Burge is less convincing: 'Supposing that there are two

definite sense, only *Foundations*-content, but this was found wanting above. She invokes Frege's discussion of definition in *Grundgesetze* vol. II as additional evidence, suggesting that Frege criticises other mathematicians' definitions of arithmetical terms, because their definitions do not satisfy the sharpness requirement; therefore, the terms, before his system, lack genuine, complete definitions (1903: §62), hence definite sense and, by extension, reference, i.e. truth-value (Weiner 2007: 701). After all, Frege writes: 'would the sentence "any square root of 9 is odd" have a comprehensible sense at all if *square root of 9* were not a concept with a sharp boundary?' (1903: §56).

However, Frege's rhetoric here, indicated by the subjunctive, requires caution. He claims not that 'square root of 9', a pre-systematic term, has no comprehensible sense,[55] but only that, *if* the term had no complete definition, it would express no concept. For 'concepts' without sharp boundaries are pseudo-concepts (1893: §5, fn. 3, 1903: §56, §62). Sentences containing them would not just be lacking the allegedly system-internal feature of *Sinn*, but be nonsense.[56] But Frege never claimed, preposterously, that arithmetical propositions were nonsense before his definitions. His criticism only challenges mathematicians' official definitions. These definitions contrast with mathematicians' practice in their proofs, which, one passage suggests, is more correct than the official definitions (1903: §62, fn. 1)[57]. The subjunctive only indicates a counterfactual situation. If arithmetical propositions *were* nonsense, even Weiner's precisifying definitions could not assign them sense and reference, for nonsense does not admit degrees, the highest degree of which is sense. Moreover, without sharp boundaries arithmetical predicates would not designate concepts, belying the *universal applicability* of numbers. Numbers, on Frege's view, apply universally because number-statements express judgements about concepts applicable to all objects, from all domains of the think-

distinct senses (say, of 'number'), each of which is entirely consistent with accepted mathematical thought. What is it that determines which of these two senses is the one we are currently expressing?' (ibid.). This supposition is not one Burge needs to accept, since it is incompatible with Frege's conception of the sense of a term.

55. Weiner might also be misled by Geach's inaccurate translation of a relevant passage in *Grundgesetze* §62. Frege does not say there that a complete definition (actually explanation, '*Erklärung*') of number is 'what is most lacking' (Geach/Black 1960: 165), but what is lacking *frequently* or *most often* ('*und daran fehlt es meist*').

56. One might object to this on the basis of *Begriffsschrift* §2 and §27, according to which 'Something is a heap' has content, despite 'is a heap' having no sharp boundary. But for this reason the content here is sometimes unjudgeable, as Frege stresses in *Begriffsschrift* §27, hence *as a general judgement* 'Something is a heap' will still be nonsense.

57. Frege's point in this passage is quite specific (concerning the failure of mathematicians to treat equality as identity in their official definitions), but the point can be generalised. In fact, Frege makes similar points elsewhere, e.g. when he explains that Weierstrass's sentences express true thoughts, *if we understand them correctly*, despite the fact that we would go astray if we were to follow his official definitions (1914: 222). See also Horty 2007: 39.

able (1882: 100, 1884: §14, §24). If pre-systematic predicates like 'is the number of F' designated no concept, '2+2=4' would not be universally applicable, since its content contains the content of 'is the number of F'. But '2+2=4' *is* universally applicable. Frege sets out to explain the applicability of number, not to invent it. We see here why it is not only an apparently absurd view to claim, as Weiner does (2007: 706ff.), that it is no prerequisite for our pre-systematic terms to have a *Bedeutung*, but a truly absurd one.

13 Naming, defining, analysing

We must therefore avoid interpretations that make a travesty of Frege's logical analysis, without assuming an unacceptable externalism about Fregean content. The gap in question is precisely not between pre-systematic conventional significance/use on the one hand, and sense and reference as features stipulated within the system on the other. Rather, the gap, or contrast, is between *incomplete and complete articulation* of one and the same thing, *judgeable content*, initially conceptualised as a unit, and later split up into sense and reference. This judgeable content is already designated or expressed by conventional significance, but only opaquely and impurely, since the language of the marketplace is not logically perfect (1879: xi), but made fully perspicuous only in concept-script.[58] This is confirmed by an early text, in which Frege writes that his concept-script is also a *lingua characteristica*, meant to render judgeable content 'more exactly than is done by verbal language', to 'spell it out in full' (1880/1881: 12f.). I will discuss this text shortly. As the 'immense intellectual effort' passage quoted above demonstrates, Frege is a rationalist, as suggested by Burge: mathematical practice has a deeper justification than may initially be visible, and it is only through unearthing the grounds of this justification by means of a system of science that genuine arithmetical knowledge, i.e. unshakeable, non-intuitive *a priori* knowledge of the most fundamental kind can be reached.[59] This unearthing certainly involves

58. Shieh 2008: 1007f. makes a related distinction to defend the epistemic gap, between expressing rule-governed sense (presumably something like conventional use) and grasping this sense fully. This distinction is underwritten by the idea of logical segmentation, as suggested by Thomas Ricketts. However, one problem with this idea is that it is developed on the basis of mere logico-linguistic principles (patterns of inferences etc.), ignoring Frege's ontological agenda. This is obvious from the fact that Shieh's otherwise valuable discussion ignores elucidations altogether. This applies to Horty 2007: 27ff. as well.

59. See on this Burge (1984: 279f., 297f., 1990). For a similarly rationalist view of science in general, see Kant (1781: A 834). It is hard to see how one can deny Frege's rationalism, as Kemp 1996: 182f. seems to do against Burge 1990, not considering, unlike Burge, a wider range of passages. What does Kemp think Frege has in mind when he speaks of the 'immense effort' stretching over centuries to recognise the essence of a concept? That humanity was 'thinking

a more precise and refined language. But it is refined in a very specific respect, aiming only at the analysis of judgeable content relevant for proofs (1879: 6), i.e. the most important aspect of mathematical practice. An exhaustive account of conventional significance was never intended or covered by Frege's programme of logical analysis.[60] This is visible from Frege's very distinction between judgeable and unjudgeable contents (1879: §2), following which unjudgeable content, of e.g. 'house', is not analysable in concept-script.[61] The later sense-reference distinction does not change this: since *Grundgesetze* still analyses only judgeable content, now split up into sense and reference (1893: x), not other features of declarative sentences. Hence, the *Begriffsschrift* contrast between judgeable and unjudgeable content remains, independently of how the sense-reference distinction applies to expressions of unjudgeable content.[62] This contrast fits the above account of analysis: analysing is decomposing judgeable contents into contents ultimately no further analysable by concept-script, primitive logical objects with symbols introduced by elucidations. These objects are elementary unjudgeable contents. As in *Begriffsschrift*, concept-script in *Grundgesetze* is only a tool to analyse judgeable content – judgeable content shared by both pre-systematic and systematic expressions, and that decomposes into unjudgeable contents already signified, if

with the [sharp] sense', but was merely muddled when attempting 'to think *about* the sense, to give a definition' (Kemp 1996: 183)? How was such a persistent discrepancy possible?

60. This of course was argued by Weiner herself, in her 1990. See also Stekeler-Weithofer 1986: 200ff. for a similar thesis.

61. There are further substantiating points. *Begriffsschrift* acknowledges formal languages covering various domains, such as arithmetic or chemistry. Concept-script does not cover those, but is an additional domain, 'the central one, which borders on all the others' (1879: 7). This suggests that concept-script captures only the judgeable content of those pre-existing formal languages, not that it replaces them. This applies even to fundamental logical principles and rules (§13). Also, in the actual concept-script Frege allows for two sentences having the same judgeable content, but a different linguistic sense ('sense' should not be confused here with the later *Sinn*). Sense is individuated by the subject-predicate structure, judgeable content by function-argument decomposition (1879: §3). He also considers certain modal specifications to have merely grammatical significance, and argues that the difference between apodictic and assertoric forms of judgement does not entail difference in judgeable content (1879: §4). Furthermore, while concept-script symbols like' '$\Vdash$' (definitional sign) or '$|$' (judgement stroke) are meaningful in concept-script, neither they nor any formulas containing them have judgeable content. Later, in *Foundations*, Frege claims that using a numeral as a predicate or attribute is to be excluded, which changes its meaning, but not that this changes the judgeable content of statements containing numerals, especially equations (1884: §60). Also, when, after splitting judgeable content into sense and reference (1893: x), Frege considers sentences containing indexicals, he seems to assign *Sinn* and *Bedeutung* to token-sentences, not type-sentences (1893: xvi-xvii). If *type*-sentences are the bearers of linguistic meaning, this too allows for a distinction between linguistic meaning and judgeable content (or rather the twin successors of the latter).

62. Notice that *Grundgesetze* does not include an analysis of even the most obvious expressions of unjudgeable content, elementary proper names, i.e. names that can figure as substitution instances in function-names. In fact, elementary proper names are not even elucidated in *Grundgesetze*; only the eight basic function-names are.

hazily, by pre-systematic language.[63] So there is no tension between conventional significance and content for Frege, since concept-script analysis only handles the latter, not other aspects of pre-systematic mathematical language.[64]

Nevertheless, concerning the transition from pre-system to system, there is still the 'Münchhausen problem' mentioned in section 11. For Frege's rationalism requires him to tell us how a potentially private and hazy pre-systematic acquaintance with arithmetical objects can be turned into a maximally objective, precise and perspicuous recognition thereof, if the means (concept-script) to achieve the latter is developed by means (elucidations) substantially not different from the resources of the pre-system[65]. Suggesting that precisification does the job won't do, for that requires an already sharp, non-circular, non-subjective concept and method of precisification, and this is precisely 'what is most lacking', for Frege admits that there are no theoretical reasons against scepticism and circularity (1914: 207). So a fundamental problem concerning the transition remains, even if we discount semantic externalism.

Leaving this problem to aside, I have claimed that systematisation amounts for Frege to complete articulation. Admittedly, there are not many passages explicitly discussing this. Frege was not much concerned with an explicit vis-à-vis comparison between pre-systematic mathematical language and its concept-script analysis, presumably because he took the relation between the two to be self-evident.[66] An important exception, not discussed by Weiner, is the early, long article presenting the advantages of his concept-script over Boole's calculus (1880/1881); for to demonstrate these advantages Frege had to resort to a neutral ground of comparison, i.e. show how his logical analysis can discern features *of* pre-systematic arithmetical language *eluding* Boole's notation. Frege first demonstrates how a judgeable content like $2^4=16$ can undergo functional analysis, decomposing it into, say, 2, 16 and $x^4=y$, by regarding 2 and 16 as replaceable or variable. We thus gain a certain concept, y being the fourth root of x, independently of the more rigid subject-predicate analysis. This replaceability and variability is essential for Frege's understanding of fruitful concept-formation, of drawing 'new boundary lines', for it yields open sentences which can be subjected to quantification and

63. It was for this reason that Frege labelled his logical system 'concept-script' in *Begriffsschrift* (1879: 5f.), and still labels it 'concept-script' in *Grundgesetze* (1893: V).

64. Of course, Frege might be advancing a mistaken view about what counts as conventional significance versus judgeable content. See Kanterian 2012: 223, fn. 13 for one reason to assume this.

65. There is therefore agreement in principle, if not in all details, with Kemp 1996.

66. There are numerous juxtapositions of formulas with verbal paraphrases in *Begriffsschrift* and *Grundgesetze* (see e.g. 1893: 240ff.), but theoretical reflections on the relation between the two are missing.

thus generality (see 1880/1881: 16, 32ff.). Essentially, this amounts to the introduction of 'new' quantificational structure, providing not only insight into logical structure but also, as explained later, into the 'logical linkage of truths', thus reducing the number of axioms to an absolute minimum (1906a: 302, 1914: 209).[67] Of course, this procedure allows alternative analyses, yielding other concepts (e.g. $2^x=16$). But while such decomposition is meant to extend our knowledge, it is still conservative. For, as he will write later, while the conclusions drawn from fruitful definitions are not contained in the definitions 'as beams are contained in the house', they are nevertheless contained, namely 'as plants are contained in their seeds' (1884: §88). Hence, decomposition must start with a judgeable content, whose expression 'must already be structured in itself'[68]. Frege continues:

> 'We may infer from this that at least the properties and relations which are not further analysable must have their own simple designations. But it doesn't follow from this that the ideas of these properties and relations are formed apart from objects [...]. Hence in the concept-script their designations never occur on their own, but always in combinations which express contents of possible judgement' (1880/1881: 17).[69]

Frege next illustrates how to represent in concept-script arithmetical formulas, and also concepts and propositions of arithmetic hitherto expressed only by combining arithmetical symbols and prose. A good example is the concept 'the real function $\Phi(x)$ of a real variable x is continuous throughout the interval from A to B', which he specifies in concept-script thus:[70]

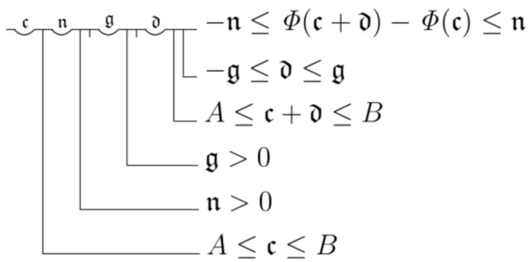
67. See Dummett 1991a: 38ff., Tappenden 1995: 427ff., Horty 2007: 39f.

68. This is a more accurate translation than the Long/White one as 'must already be itself articulated' (1880/1881: 17).

It should be noted that there is a major problem here with Frege's analytical method, which is undermined by two fundamentally incompatible paradigms of analysis, part-whole decomposition versus functional analysis. I have discussed this issue in detail in Kanterian 2012: 136ff., 184ff.

69. Notice how this passage anticipates the context-principle.

70. This characterisation of a concept is only the terminus of a longer chain of analysis, starting with a judgeable content. For Frege has noted before that 'we arrive at a concept by splitting up the content of a possible judgement' (1880/1881: 17).



One might think, following Weiner, that the differences between the words and the formula are radical enough to assume that it introduces something new, ‘content’ (or sense and reference) previously unavailable in pre-systematic language or even non-existent. But this is deceptive: ‘If in this case the formula seems longwinded by comparison with the verbal expression, you must always bear in mind that the former gives the definition of a concept which the latter only names’ (1880/1881: 24). This is a remarkable passage. Frege contrasts here *naming* with *defining*; the latter is analytical, decomposing the *definiendum* into indefinable elements (see section 8). This contrast confirms both the Obvious Requirement and the Continuity Thesis: the verbal expression already names the concept, and this presupposes the existence of the concept. The contrast is also consistent with the relative epistemic gap defended above, for naming an object does not entail knowing everything about it.

Frege describes the pre-systematic mathematician’s introduction of symbols repeatedly as one of naming entities that are already there. Recall the *Foundations*’ comparison of the mathematician with the geographer mentioned above, according to which both merely ‘discover what is there and give it a name’ (1884: §96). The same picture and argument are offered in *Grundgesetze*, where the mathematician’s definition is denied any creative power and is described as merely marking out something and giving it a name, similar to what a geographer’s definition of a sea accomplishes (1879: xiii). It is noteworthy that Frege identifies defining with naming in this later passage. Does this not contradict the contrast between naming and defining just drawn? One could reply that Frege means here by ‘definition’ the introduction of symbols in *pre-systematic* language (such as his own definitions given in *Foundations*), contrasting with definitions in *concept-script* (see section 8 above). And we would want to say only of the latter that they have a decompositional aspect, not of the former, which only name an object, but do not reveal its essence. So while pre-systematic definitions would only name a mathematical object or concept, definitions in concept-script would reveal its full essence (its atomic number, as it were). But in fact pre-systematic definitions have a decompositional aspect as well. Take Frege's example above: the verbal expression, the 'name' of the concept under investigation is 'the real function $\Phi(x)$ of a real variable x is continuous throughout the interval from A to B': this is not a mere tag, but already 'structured in itself', prefiguring some, although by far not all elements found in the final analysis in concept-script (e.g. the free, 'real' variables Φ, A, B). As seen, Frege observed the necessity of such structuredness for the possibility of functional analysis. Hence, even the pre-systematic name has an analytical aspect, and the contrast between the verbal expression and the concept-script formula is not absolute in this respect either. In other words, we can defend the Continuity Thesis not only with respect to there being a pre-given object or concept which the verbal expression names and the concept-script formula defines, but also in the sense that the verbal expression structurally anticipates, qua pre-systematic definition, at least some of the elements that the formula, qua definition in concept-script, will give a complete account of. So the difference between the verbal expression and the concept-script formula is a matter of degree, as is that between naming, defining and analysing, with the verbal expression as the beginning and the concept-script formula as the terminal point of the scale.[71]

This difference in degree is obscured by usual Frege's omission of intermediate steps between the verbal expression and the formula (including in the currently discussed example of the continuity of a real function; cf. Frege 1880/1881: 24). But such steps must exist: the formula is not reached just by glancing at the verbal expression, even with its semi-decompositionality. These steps were available in mathematics before Frege's concept-script definitions, and Frege uses them himself. For instance, before giving a concept-script specification of the concept 'the real function $\Phi(x)$ is continuous at $x = A'$, he interpolates the informal paraphrase 'given any positive non-zero number $\mathfrak{n}$, there is a positive non-zero $\mathfrak{g}$ such that any number $\mathfrak{d}$ lying between $+\mathfrak{g}$ and $-\mathfrak{g}$ satisfies the inequality $-\mathfrak{n} \leq \Phi(A+\mathfrak{d}) - \Phi(A) \leq \mathfrak{n}$' (ibid.), which is a rephrased version of Weierstrass's 1859 definition.[72] The only difference is that Frege's paraphrase is also elucidatory, containing concept-script symbols (free variables and German letters) in anticipation of the concept-script formula (see 1879: §11). Such intermediate, elucidatory steps are actually legion

71. Note that the contrast drawn here between verbal formulas and concept-script formulas allows for further intermediate steps, especially on the side of verbal formulas, also in the more context case of Frege's definition of number (which is not dealt with in the 1880/1881 article). It is one thing to use the phrase 'the number 0', and quite a different thing to use the definition of 0 proposed by Frege in *Foundations*, i.e. 'the extension of the concept "equal to the concept *not identical with itself*"' (1879: §68, §73). The latter goes a long way towards giving the analysis of 0, unlike 'the number 0' of course. But even 'the number 0' indicates something fundamental about 0: the fact that it is an object.

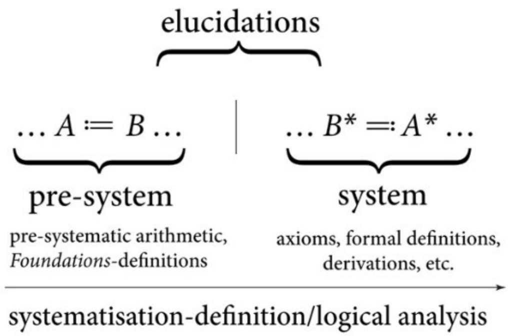
72. See Kline 1972: 952, also Tappenden 1995: 431, 458, fn. 14.

in *Begriffsschrift* and especially in the *Grundgesetze*'s '*Zerlegung*' sections accompanying the actual proofs. While these are not part of the system (1879: v), they surely contribute to its constitution, as they are its 'antechamber' (as he would call them in 1914). In our example Frege's verbal paraphrase anticipates much of the formula. If Weiner were right, the verbal paraphrase should be nonsense, or at least lack system-internal content (understood in terms of the allegedly system-internal features of *Sinn* and *Bedeutung*). But for Frege verbal paraphrase and formula differ in degree, not content. He describes them as 'equivalent' in 1880/1881, but the formula is briefer and more perspicuous (see 1880/1881: 27). 'Equivalent' ('*gleichwertig*') very likely means more than material equivalence here, since the expressions involved are concept-words, not sentences. But even he means merely material equivalence, if an informal paraphrase is equivalent to a concept-script formula, the paraphrase must have content of the same *kind* as the formula, e.g. truth, and not just pre-systematic truth. In occasional, but for our purposes important passages *Grundgesetze* too says not that such paraphrases lack content, but that they are not *fully* precise and do not express the *whole* content, unlike the concept-script formulas (see e.g. 1903: 240, fn. 1, 242, fn. 1).

Altogether, we can now distinguish between at least four steps in the chain of analysis/definition. Specified to the example above, these are: (a) the verbal expression 'the real function $\Phi(x)$ is continuous at $x = A$', (b) Weierstrass's 'informal' definition without concept-script symbols, (c) Frege's informal paraphrase using concept-script symbols, and (d) Frege's concept-script definition (see 1880/1881: 24). The definition of 0 serves as another example. The four steps are here: (a) 'the number zero' or '0'; (b) Frege's *Foundations definiens*, i.e. 'the Number which belongs to the concept "not identical with itself"' (1884: §74); (c) Frege's informal paraphrase using concept-script symbols, 'the number of the $\dot{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon)$-concept' (1893: §41); and (d) ' $\mathfrak{P}\dot{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon)$' (i.e. the *definiens* in definition Θ; ibid.). In fact, these are only the more salient elements. To get anywhere close to a complete list and analysis of nought, we would have to include previous attempts to define mathematical concepts and objects (certainly not all mistaken), Frege's discussion of them, his own informal attempts, his elucidations and elaborations of logic and concept-script, and a version of 0 fully spelled out in concept-script, involving only its primitive terms. This gives us an inkling as to why 'only after immense intellectual effort, which may have continued over centuries, [...] humanity at last succeeds in achieving knowledge of a concept in its pure form' (1884: xixf.).

14 Systematisation-definition: Frege's goal

One last point remains: we have, so far, made an explicit distinction between definitions in pre-systematic science and definitions in concept-script, such that the *definiendum* and the *definiens* both belong to the same respective language. But this distinction cannot accommodate the definitional-analytical chains beginning with a pre-systematic verbal expression and ending with a concept-script formula. '*Definiendum*' and '*definiens*' here belong to different languages, leaving no canonical way to represent the definition. '$\Vdash \mathfrak{p}\dot{\varepsilon}(\top\varepsilon = \varepsilon) =$ the number zero' would not be well-formed in concept-script.[73] Still, Frege describes the concept-script formula as defining *what* the verbal expression names.[74] And *that* is the object itself, zero, the common reference point throughout the whole chain. The ontological continuity between the two languages is thus crucial for analysis. The definition *in* concept-script, a mere abbreviation of a complex sign by a simple sign, would miss its point if it did not define zero, the object pre-systematic expressions like 'the number zero' or '0' name. This explains why in his concept-script definition Frege chooses a 'new' sign, the struck-out nought ('$\varnothing$') that 'happens' to resemble the original, pre-systematic numeral '0' (1893: §41). We must therefore distinguish a *third, wider type of definition*, definition of an object or concept, which is neither an informal nor a formal definition, and is achieved *through the whole process of analysis and systematisation*, stretching from the pre-systematic verbal expression to the eventual concept-script definition.[75] We can call this *systematisation-definition*. Here is a possible way to display it:



73. Not well-formed if 'the number zero' has its customary pre-systematic meaning. The definition would be well-formed if 'the number zero' is taken as a previously unused sign. But this would be just another definition *in* concept-script, not the special kind of definition discussed here.

74. On this problem see also Baker & Hacker 1984: 175ff.

75. Definition must be given an even wider sense, since, according to Frege, its validation involves the derivation of the truths of arithmetic within the whole system.

The asterisk indicates a concept-script ‘equivalent’ of a pre-systematic expression. Taking the analysis of 0 as an example, A is ‘0’, ‘B’ is its *Foundations*-definition using verbal language, B^* the concept-script version of the latter, and A^* is the totally new symbol ‘0̸’, the concept-script equivalent of ‘0’. All expressions here have the same *Bedeutung*, but they don’t all share the same *Sinn*. In particular, the concept-script expressions do not have the same sense as their pre-systematic versions, and this is precisely the knowledge-increasing aspect of logical analysis. Whether A and B have the same *Sinn* depends on how we interpret the seed-metaphor, i.e. in what way the quantificational structure explicit in B is ‘contained’ in A as a ‘seed’. Of course, there may be no general way to determine this question, since A and B express their senses only ‘hazily’, on Frege’s view. What matters is that we end up with the right *Bedeutung* (1894: 319f.), and the rest is up to systematisation. A^* and B^*, on the one hand, do have the same *Sinn*, by definition (1893: §27). This is possible despite A^* not having the same syntactic richness as B^*; for ‘sameness of sense’ must be understood dynamically here: the *definiendum* A^* is a receptacle into which the sense of B^* has been crammed.

Some interesting points arise. We see that systematisation-definition starts, from left to right, with a *definiendum* already in use, A, which is defined by a *definiens*, B, that introduces and unveils new quantificational structure, which in turn finds its fully perspicuous formal equivalent, after the elucidatory setup of the system, in B^*, which finally gets abbreviated by a new, simple symbol, A^*. In a sense we are turning full circle, with A at the beginning, and A^* at the end of the definitional chain.[76] This explains why the formal definition is a stipulation or abbreviation, as opposed to the informal one. It also explains why the formal definition is arbitrary: we can choose whatever new sign we want to abbreviate B^* (and Frege is quite inventive in his choice of *definienda*; for a sample, see 1893: appendix 2, “Tafel der Definitionen”). For the same reason, *Foundations*-definitions can’t be arbitrary; their *definienda* have been long in use. Consider that, say, the *Foundations*-definition of 0 is nothing even remotely like an abbreviation. Nevertheless, this does not mean, with respect to the 1914 argument, that only *Foundations*-definitions are analytical, while formal ones are merely constructive, stipulative, for we have seen that constructive definitions have an analytical aspect as well. And this fits with the place of formal definition in the above diagram, reading it from right to left: the formal definition presupposes a complex *definiens*, B^*, which in turn has a pre-systematic counterpart, B, which itself gave an analysis

76. This is visible even from the syntax of informal and formal definition respectively. In informal definitions, the *definiendum* is on the left-hand side, in formal definition on the right-hand side of the equation. See e.g. 1884: §74 and 1893: §41 respectively.

of A. Thus A^* is indeed an analysis of A, despite being merely an abbreviation of B^*. For in being so it shares not only the same *Bedeutung*, but also the same *Sinn* with B^* (in the sense just specified), and that *Sinn* is just the maximally perspicuous mode of presentation of the *Bedeutung* of A, mediated via the less perspicuous mode of presentation afforded by B, and the elucidations. 'Decomposition' ('analysis'), 'constructive definition', 'informal definition', 'elucidation', 'formal definition' are all various moments in the broader chain of systematisation-definition. There is no simple way to describe this complex state of affairs. We can only understand it by comparing its various aspects with each other and their role within the broader context of Frege's definitional project. Some problems in the literature arise, because priority is given to the individual aspects, and not the organic whole.

Frege gave no explicit account of systematisation-definition.[77] Nevertheless, it is what his project aimed for. In giving the formal definition Θ, say, Frege gave a systematisation-definition of '0', the ordinary numeral, and thus of the complex logical object to which '0' *really* refers, in terms of logical *Urelemente*. The Obvious Requirement is correct. So is the Continuity Thesis, for no matter how we conceive of the *Sinne* of the expressions in the chain of systematisation, they all share the same *Bedeutung*, on Frege's conception of the matter. Of course, the worry raised by the 'Münchhausen dilemma' remains. And there are other worries.[78]

At any rate, the essential role of systematisation-definition for Frege's logicism refutes Weiner's interpretation. While systematisation-definition involves precisification, it does not precisify in virtue of being a stipulation (meeting precision constraints). For it is not a stipulation, since it does not assume the canonical form '*definiendum* := *definiens*'. It does not have the form of what Frege calls definitions either in *Foundations* or *Grundgesetze*. Nor can it establish the systematic language, since this is the role of elucidations. But it is the very aim of Frege's logical analysis of arithmetic.[79]

77. For further elaboration, see Baker & Hacker 1984:175ff., Kanterian 2012: 118ff.

78. These relate to the precise nature of the relation between sense and reference. If *Sinn* is merely understood as 'the mode of presentation of *Bedeutung*', as Frege occasionally puts it, then we may conceive of one and the same *Bedeutung* being given, initially, 'as through a mist', and later on in a more perspicuous way. But if there is a much closer structural relation between Fregean sense and reference, with *both* having to be understood in function-theoretic terms, then Frege has a problem. For discussion, see Kanterian 2012: 179ff.

79. Cf. Baker & Hacker 1984: 176.

15 Epilogue: Frege's epistemological-ontological foundationalism

My discussion has aimed at clarifying the tension between Frege's epistemological aim and the strictures of systematisation. Clarifying the tension does not entail solving it. To solve that would involve solving the Münchhausen dilemma without giving up Frege's rationalism. Whatever the solution, the discussion has also shown that Fregean definitions have an ontological underpinning. *Pace* Weiner, his logicism is incomprehensible without the ontological agenda. I have also shown that Frege's explanations and employments of definition, early to late, are part of a more encompassing view than they appear. For instance, there is no clash between definition presented as analysis, in *Foundations*, and as stipulation, in concept-script. Definition in Frege's work is a richer and more multifaceted notion than often assumed, not being reducible to the notion of formal or informal definition.

One final remark may be permitted. While Weiner wrongly underplays Frege's ontological agenda, her stress on his epistemological aim is certainly correct. However, she believes that Frege pursues his epistemological aim *semantically*, by sharpening pre-systematic arithmetical language. But it is unclear how sharpening alone could satisfy Frege's Cartesian craving for certainty. *Foundations* has only established a probable thesis (1884: §87, §90), while he wants 'to place the truth of a proposition beyond all doubt' (§2), to gain 'absolute certainty that it contains no mistake and no gap' (§91), to raise the probability that arithmetical truths are analytic and *a priori* to certainty (§109), etc. Vagueness of concepts is not the only source of doubt and error; sharpened concepts do not guarantee certainty. 'X is a sharp concept, but it is uncertain whether y falls under X' is coherent. Nor does gapless proof alone yield certainty: we still need to reach the unshakeable ground supporting derived propositions, the axioms expressing *Urwahrheiten*, *Urgesetze* (§2ff.).[80] Frege wants not only conceptual and proof-technical rigour, to be achieved by mere stipulations, but genuinely reductive analysis: an arithmetical truth has found its epistemological classification if we trace its proof back to primitive truths (§4), whose number is reduced to a minimum (§2). Since primitive truths are truths evident without proof, they imply a source of indubitable *a priori* knowledge. Hence, Frege's epistemology has a foundationalist agenda. Moreover, this foundationalism does not exclude, but rather presupposes his ontologism. Truths about logical objects are self-evident by their nature: 'In arithmetic we are not concerned with objects which we come to know as something alien from without

80. Clearly, Frege's image, '*Unerschütterlichkeit eines Felsblockes*' (1884: §2), best translated as 'unshakeability of a boulder', lies in the metaphorical orbit of Descartes' *fundamentum inconcussum.*

through the medium of the senses, but with objects given directly to our reason and, as its nearest kin, utterly transparent to it. And yet, or rather for that very reason, these objects are not subjective fantasies. There is nothing more objective than the laws of arithmetic' (§105). The ultimate rationale for the epistemological agenda is Platonism: 'If there were nothing firm, eternal in the continual flux of all things, the world would cease to be knowable, and everything would be plunged in confusion' (vii)[81]. Ultimately, for Frege, epistemological puzzles are deeply intertwined with ontological questions concerns.

Literature

Note: *Begriffsschrift*, *Foundations* and *Grundgesetze* quotations always refer to the sections of the books. Frege's other published writings are cited by the original paginations. Posthumous writings and letters are cited by the English translation in Gabriel et al. 1979 and 1980.

Baker, G., Hacker, P. (1984), *Frege: Logical Excavations*, Oxford: Oxford University Press

Beaney, M., E. Reck (eds.) (2005), *Gottlob Frege: Critical Assessments of Leading Philosophers*, (4 vols.) London: Routledge

Benacerraf, P. (1981), "Frege: The Last Logicist", *Midwest Studies in Philosophy* 6:1, 17-36

Burge, T. (1984), "Frege on Extensions of Concepts", in Burge 2005

Burge, T. (1990), "Frege on Sense and Linguistic Meaning", in Burge 2005

Burge, T. (2005), *Truth, Thought, Reason: Essays on Frege*, Oxford: Oxford University Press

Carnap, R. (2004), *Frege's Lectures on Logic: Carnap's Student Notes, 1910-1914*, Reck, E. H./Awodley, S. (eds.), Chicago: Open Court

Cellucci, C., Sambin, G. (1988), *Temi e Prospettive della Logica e della Filosofia della Scienza Contemporanee*, vol. 1, Bologna: Cooperativa Libraria Universitaria Editrice Bologna

Dummett, M. (1981b), *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Cambridge/Mass.: Harvard University Press

81. Translation amended by the author.

Dummett, M. (1991a), *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge/Mass.: Harvard University Press

Dummett, M. (1991b), *Frege and Other Philosophers*, Oxford: Oxford University Press

Dummett, M. (1991c), "Frege and the Paradox of Analysis", in Dummett 1991b

Frege, G., *Begriffsschrift* (1879), in Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge/Mass.: Harvard University Press

Frege, G. (1879/1891), "Logic", in Hermes et al. 1979

Frege, G. (1880/1881), "Boole's Logical Calculus and the Concept-script", in Hermes et al. 1979

Frege, G. (1882), Letter to Marty, 29.8.1882, in Gabriel et al. 1980

Frege, G. (1884), *Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner; translated by J. L. Austin as *The Foundations of Arithmetic. A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*, Oxford: Blackwell, 1950

Frege, G. (1885), "On Formal Theories of Arithmetic", in McGuinness 1984

Frege, G. (1891), "On the Law of Inertia", in McGuinness 1984

Frege, G. (1892), "On Concept and Object", in McGuinness 1984

Frege, G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik I*, Jena: Verlag Hermann Pohle

Frege, G. (1894), "Review of Husserl, *Philosophie der Arithmetik* I", in McGuinness 1984

Frege, G. (1899), Letter to Hilbert, 27.12.1899, in Gabriel et al. 1980

Frege, G. (1903), *Grundgesetze der Arithmetik II*, Jena: Verlag Hermann Pohle

Frege, G. (1903a), "On the Foundations of Geometry (First Series)", in McGuinness 1984

Frege, G. (1906a), "On the Foundations of Geometry (Second Series)", in McGuinness 1984

Frege, G. (1906b), "Introduction to Logic", in Hermes et al. 1979

Frege, G. (1914), "Logic in Mathematics", in Hermes et al. 1979

Frege, G. (1917), Letter to Dingler, 6.2.1917, in Gabriel et al. 1980

Frege, G. (1918a), "Thoughts", in McGuinness 1984

Frege, G. (1918b), "Negation", in McGuinness 1984

Frege, G. (1919), "Notes for Ludwig Darmstaedter", in Hermes et al. 1979

Frege, G. (1924), "Number", in Hermes et al. 1979

Frege, G. (1924/1925), "Sources of Knowledge of Mathematics and the Mathematical Natural Sciences", in Hermes et al. 1979

Hermes, H., Kambartel, F., Kaulbach, F. (eds.) (1979), G. Frege, *Posthumous Writings*, Oxford: Basil Blackwell

Gabriel, G., Hermes, H., Kambartel, F., Thiel, C., and Veraart, A. (eds.) (1980), G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford: Basil Blackwell

Geach, P., M. Black (eds.) (1980), *Translations from the Writings of Gottlob Frege*, Oxford: Basil Blackwell

Horty, J. (1993), "Frege on the Psychological Significance of Definitions", *Philosophical Studies* 72

Horty, J. (2007), *Frege on Definitions: A Case Study of Semantic Content*, Oxford: Oxford University Press

Kanterian, E. (2010), "Frege's Definition of Number: No Ontological Agenda?", *Hungarian Philosophical Review*, 54: 4, pp. 76-92

Kanterian, E. (2012), *Frege: A Guide for the Perplexed*, London: Continuum

Kemp, G. (1996), "Frege's Sharpness Requirement", *Philosophical Quarterly* 46

Kenny, A. (1966), "God and Necessity", in Montefiore 1966

Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press

Kant, I. (1781), *Kritik der reinen Vernunft*, Riga: Hartknoch

Künne, W. (2010), *Die Philosophische Logik Gottlob Freges: Ein Kommentar*, Frankfurt: Klostermann

McGuinness (ed.) (1984), G. Frege, *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, Oxford: Basil Blackwell

Montefiore, A. (1966), *British Analytical Philosophy*, London: Routledge & Kegan Paul

Picardi, E. (1988), "Frege on Definition and Logical Proof", in Cellucci & Sambin 1988

Rumfitt, I. (2003), "Singular Terms and Arithmetical Logicism", *Philosophical Books* 44, 193-219

Russell, B., Whitehead, A. N. (1910), *Principia Mathematica I*, Cambridge: Cambridge University Press

Shieh, S. (2008), "Frege on Definitions", *Philosophical Compass* 3:5, 992-1012

Stekeler-Weithofer, P. (1986), *Grundprobleme der Logik: Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*, Berlin/New York: Gruyter

Tappenden, J. (1995) "Extending Knowledge and 'Fruitful Concepts': Fregean Themes in the Foundations of Mathematics", *Noûs* 29, 427-67

Weiner, J. (1984), "The Philosopher Behind the Last Logicist", in Wright 1984

Weiner, J. (1990), *Frege in Perspective*, Ithaca/NY: Cornell University Press

Weiner, J. (2005), "On Fregean Elucidation", in Beaney & Reck 2005, vol. 4

Weiner, J. (2007), "What's in a Numeral? Frege's Answer", *Mind* 116:463, 677-716

Wright, C. (ed.) (1984), *Frege: Tradition and Influence*, Oxford: Basil Blackwell

Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung

Karl Kuhlemann

> *[...] sie [die Leser] werden aber bemerken, was für ein großes Feld des Entdeckens offen steht, sobald sie dieses Eine richtig begriffen haben, dass jede krummlinige Figur nichts anderes als ein Polygon mit unendlich vielen, der Größe nach unendlich kleinen Seiten ist.*[1]

1 Motivation

In seiner Quadratura von 1676 preist Leibniz die Fruchtbarkeit des Gebrauchs unendlicher und unendlich kleiner Größen in der Analysis, die er zumindest als nützliche Fiktionen anerkennt.

> Und es kommt nicht darauf an, ob es derartige Quantitäten in der Natur der Dinge gibt, denn es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen, da sie Abkürzungen des Redens und Denkens und daher des Entdeckens ebenso wie des Beweisens liefern, so dass es nicht immer notwendig ist, Einbeschriebenes oder Umbeschriebenes zu benutzen und *ad absurdum* zu führen, und zu zeigen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger zuweisbarer ist. [...] Wenn sich also im folgenden jemand über den Gebrauch dieser Quantitäten beklagen wird, wird er sich entweder als ein Unkundiger oder Undankbarer zeigen. Als ein Unkundiger eben, wenn er nicht versteht, was für ein großes Licht hier in der ganzen Indivisibelnmethode und auf dem Gebiet der Quadraturen

1. Siehe Leibniz 2016, Seite 131.

> angezündet wird; als ein Undankbarer aber, wenn er den Nutzen, den er bekommt, verheimlicht.[2]

Welcher Status diesen Fiktionen bei Leibniz zukommt, ist in der Fachliteratur vielfach diskutiert worden.[3] Im Kern geht es um die Frage, ob der Gebrauch von Infinitesimalien für Leibniz *nur* eine (gegenüber der Exhaustionsmethode) abkürzende Redeweise ist – und Infinitesimalien damit gar keine eigenen Entitäten sind – oder ob Infinitesimalien sehr wohl Entitäten sind, die zwar durch Fiktion eingeführt werden, die aber mit einer bestimmten Vorstellung verbunden sind. Die erste Interpretation wird *synkategorematisch* genannt, weil Infinintesimalien dann im Grunde nichts *bezeichnen*, sondern nur abkürzend für eine kompliziertere Formulierung mit Quantoren und endlichen Größen stehen, die zweite Interpretation *formalistisch*, weil Infinitesimalien dann Entitäten sind, deren (fiktive) Existenz sich wie im Hilbert'schen Formalismus aus der Konsistenz einer Theorie ergibt. Man kann dann so tun, *als ob* es diese Entitäten gäbe.

Welche der beiden Interpretationen dem historischen Leibniz besser gerecht wird, ist für die hier angestellte Untersuchung nicht entscheidend, wenngleich die zweite, formalistische Interpretation wegen ihrer Nähe zur heutigen Nichtstandardanalysis einen besseren Anknüpfungspunkt bietet. In der Tat unterstelle ich eher diese Interpretation, wenn ich (ausgehend von dem Leibnizzitat, das diesem Aufsatz als Motto vorangestellt ist) weiter unten von Leibniz' *Vorstellung* einer Kurve als Polygon mit unendlich kleinen Seiten spreche.

Zu dieser Interpretation kommen auch Bedürftig und Murawski, wenn sie (u. a. belegt durch Leibniz' Ausführungen zum charakteristischen Dreieck) feststellen:

> Wir sehen bei Leibniz eine Erweiterung der aristotelischen Kontinuumsauffassung, die eine neue qualitative Dimension hinter der quantitativen Erfassung eröffnet. Infnitesimalien bei Leibniz sind, so meinen wir, neue Idealisierungen in der idealen Welt der geometrischen Kontinua.[4]

In der folgenden Betrachtung von Kurven unter einer infiniten Vergrößerung wird der Bezug zur Anschauung in den Vordergrund gestellt und unter dem Blickwinkel

2. Siehe Leibniz 2016, Seite 129.
3. Eine Auswahl einschlägiger Artikel zu diesem Thema findet sich im Literaturverzeichnis unter Goldenbaum und Jesseph 2008, Goethe et al. 2015, Arthur 2009, Arthur 2013, Tzuchien 2012, Bascelli et al. 2014, Bair et al. 2017, Bascelli et al. 2016, Błaszczyk et al. 2013, M. Katz und Sherry 2012, Katz und Leichtnam 2013, M. G. Katz und Sherry 2013, Sherry und Katz 2012. Ich danke den Herausgebern, Gregor Nickel und Ralf Krömer, für ihren Vorschlag, hier auf die Fiktionendebatte in der Leibniz-Forschung und (in Abschnitt 2) auf das Kirsch'sche Funktionenmikroskop einzugehen.
4. Bedürftig und Murawski 2017, S. 77

der Nichtstandardanalysis beleuchtet. Das Leibnizzitat über eine krummlinige Figur als Polygon mit unendlich vielen der Größe nach unendlich kleinen Seiten lädt geradezu dazu ein, in Gedanken unendlich stark in die Kurve hineinzuzoomen, um zu „sehen", was im unendlich Kleinen passiert. In der Standardanalysis ist das in Ermangelung unendlicher Zahlen nicht möglich.

Doch wie hat man sich ein Polygon mit der Größe nach unendlich kleinen Seiten vorzustellen? Hat eine Kurve unendlich viele „Knickstellen", an denen die geraden Seiten zusammenstoßen? Oder sind die Seiten nicht wirklich gerade, sondern nur unendlich schwach gekrümmt? Sind Kurve und Polygon wirklich identisch oder unterscheiden sie sich nur unendlich wenig?

Solche Fragen lassen sich in der Nichtstandardanalysis präzise stellen und beantworten, wodurch ein aus der Leibniz'schen Idee abgeleitetes Instrument der Veranschaulichung innerhalb der Analysis eine befriedigende Rechtfertigung erhält. Um dieses Instrument, die *Technik der infiniten Vergrößerung*, um seine *mathematische Rechtfertigung* und seine *Grenzen* geht es im vorliegenden Text.

2 Vergrößerung als didaktisches Instrument in der Analysis

Die Technik des Vergrößerns, das „Hineinzoomen" in Funktionsgraphen, wird auch in der Standardanalysis als didaktisches Instrument eingesetzt. Arnold Kirsch hat 1979 ein „Funktionenmikroskop" mittels OHP-Folien realisiert „zur Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff".[5] Inzwischen gibt es interaktive Realisierungen für den Computer, zum Beispiel die „Funktionenlupe" von Elschenbroich.[6] Der vergrößerte Funktionsgraph wird dort in einem zweiten Fenster angezeigt, wobei der Vergößerungsfaktor dynamisch über einen Schieberegler verändert werden kann. Optional können Sekanten und Steigungsdreiecke eingeblendet werden.

Was unterscheidet die Funktionenlupe bzw. das Funktionenmikroskop der Standardanalysis von der Technik einer infiniten Vergrößerung in der Nichtstandardanalysis? Die äußerlich ähnlichen Ideen basieren auf grundsätzlich verschiedenen Konzepten. Das Funktionenmikroskop ist eine Visualisierung des Beginns eines nicht

5. Kirsch 1979
6. Siehe Elschenbroich et al. 2014 und Elschenbroich,

endenden Prozesses, einer prinzipiell beliebig fortschreitenden, potentiell unendlichen Vergrößerung. Die infinite Vergrößerung ist eine Visualisierung infinitesimaler Verhältnisse und damit einer arithmetischen Situation des Infinitesimalkalküls.

Grenzprozesse sind naturgemäß nie beendet, sie können arithmetisch nicht vollzogen werden und erreichen ihren Grenzwert (im Allgemeinen) nie. Gerade dieser Umstand macht den Grenzwertbegriff für Schüler so schwer fassbar.[7] Diese Schwierigkeit bleibt auch beim Kirsch'schen Funktionenmikroskop prinzipiell bestehen.

In der Nichtstandardanalysis ist das Unendliche kein offener Prozess, sondern ein arithmetisches Objekt. Man rechnet mit unendlich kleinen (infinitesimalen) und unendlich großen (inifiniten) Zahlen wie mit gewöhnlichen, endlichen Zahlen. Der zu Grunde gelegte Rechenbereich ist der angeordnete Körper ${}^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen, der infinite und infinitesimale Zahlen enthält. Also können infinite Zahlen als Streckfaktoren und damit zur Veranschaulichung geometrischer Verhältnisse im unendlich Kleinen verwendet werden.

Bereits Schmieden und Laugwitz[8] führen die Idee einer „unendlichen Vergrößerung" ein, um infinite Schwankungen von Nichtstandardfunktionen oder das Verhalten von Potenzreihen in infinitesimaler Umgebung ihrer Konvergenzgrenze zu analysieren. Die Vergrößerung findet hier rein formelhaft auf der x-Achse statt, zum Beispiel, indem Werte der Form $x = 1 - \frac{\xi}{\Omega}$ (Ω hypernatürlich) verwendet werden, um zu zeigen, dass die Nichtstandardfunktion x^{Ω} für $x \approx 1$ bei passender infiniter Vergrößerung „wie eine Exponentialfunktion" wächst.

Keisler greift die Idee in Gestalt eines unendlichfach vergrößernden „Mikroskops" auf, um die Methoden der Nichtstandardanalysis für Standardfunktionen zu veranschaulichen. In seinem „Elementary Calculus" [9] findet man zahlreiche Abbildungen zur Differentiation und Integration, die infinitesimale Ausschnitte von Funktionsgraphen unter unendlichfacher Vergrößerung zeigen.

Die elementare Einführung Wunderling et al. 2013 und der Zeitschriftenartikel Wunderling et al. 1997 richten sich in erster Linie an Lehrkräfte und werben für den Einsatz von Nichtstandardmethoden im Mathematikunterricht. Unter der Bezeichnung „Unendlichkeitsbrille" wird dort die Technik der infiniten Vergrößerung vielfach benutzt, unter anderem um „geometrische Beweise" zu führen, zum Beispiel bei der Ableitung der Sinusfunktion (siehe Abbildung 1). Unter infiniter Vergrößerung erscheint der Kreis gerade. Die Tangente in P, die Sehne PQ und der

7. Siehe Bedürftig 2018
8. Siehe Schmieden und Laugwitz 1958.
9. Keisler 2000

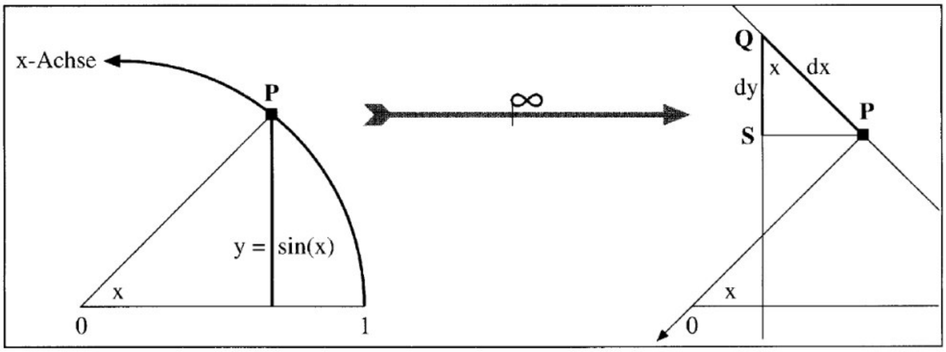


Abbildung 1: Zur Ableitung der Sinusfunktion (Quelle: Wunderling et al. 1997)

Kreisbogen sind zeichnerisch nicht mehr zu unterscheiden. Die infinite Vergrößerung suggeriert $\frac{dy}{dx} = \cos x$, also die Ableitung der Sinusfunktion.

Wenn man aber die Theorie der Kurven ins Hyperreelle überträgt, dann ist der infinitesimale Kreisbogen mit dx ein wenig länger als die infinitesimale Sehne PQ, und der Winkel bei Q ist ein wenig größer als x. Für diesen speziellen in Abbildung 1 dargestellten Fall wird in Wunderling et al. 2013 gezeigt, dass $\frac{dy}{dx}$ und $\cos x$ sich dennoch nur infinitesimal unterscheiden (geschrieben: $\frac{dy}{dx} \approx \cos x$), was gerade bedeutet, dass die reelle Zahl $\cos x$ die gesuchte Ableitung des Sinus an der reellen Stelle x ist.

Kurve, Tangente und Sehne sind also in einer infinitesimalen Umgebung eines Kurvenpunktes im Allgemeinen verschieden, aber sie unterscheiden sich bei „hinreichend gutartigen“ Kurven vernachlässigbar wenig. Dabei geht es um Richtung und Länge: Der Winkel zwischen Tangente und Sehne in einem Kurvenpunkt ist infinitesimal und der Längenunterschied zwischen Sehne und dem entsprechenden Kurvenstück ist von höherer Ordnung infinitesimal. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Sehnen ist bis auf eine infinitesimale Abweichung der gestreckte Winkel.

Im Folgenden wird gezeigt, dass dies für alle regulären stetig differenzierbaren Standardkurven der Fall ist (Satz 2). Für solche Kurven gibt also die infinite Vergrößerung die geometrischen Sachverhalte im Wesentlichen korrekt wieder. Das heißt: Nur für die reelle Analysis vernachlässigbare Unterschiede werden unterdrückt. Was im Beispiel aus Abbildung 1 zunächst wie eine anschaulicher „Trick“ anmutet und für diesen speziellen Fall in Wunderling et al. 2013 begründet wurde, ist in einem sehr allgemeinen Rahmen gerechtfertigt.

Damit ist die infinite Vergrößerung ein legitimes didaktisches Hilfsmittel für die grenzwertfreie Analysis, so wie es die potentiell beliebig gesteigerte endliche Vergrößerung für die Grenzwertanalysis ist (dort allerdings mit dem Problem der prinzipiellen Nichtvollendbarkeit des Vergrößerungsprozesses). So kann die infinite Vergrößerung sogar als sinnvolle Ergänzung zur endlichen Vergrößerung angesehen werden. Während die gesteigerte endliche Vergrößerung zeigt, in welcher Weise sich das Bild verändert (der Funktionsgraph wird „praktisch“ gerade), zeigt die infinite Vergrößerung eine Situation, die auch in der *Theorie* genügt.

3 Reelle Kurven

Eine *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist eine stetige Abbildung $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches, aber nicht entartetes) Intervall ist. Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit werden wie üblich über die Komponentenfunktionen definiert.

Eine differenzierbare Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn $\|f'(t)\| \neq 0$ für alle $t \in I$ ist.

Für eine Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n, [a, b] \subseteq \mathbb{R}, a < b$ und eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ sei $p_f(t_0, \ldots, t_k)$ die Länge des Polygonzugs durch die Punkte $f(t_i), i = 0, \ldots, k$. Es gilt

$$p_f(t_0, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Die Punkte $f(t_i), i = 0, \ldots, k$ heißen die *Stützpunkte* des Polygonzugs.

Definition 1 *Eine Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* rektifizierbar *mit der Länge L, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k - 1 < t_k = b$ der Feinheit $\leq \delta$ gilt*

$$|p_f(t_0, \ldots, t_k) - L| \leq \epsilon.$$

Aus der reellen Analysis (siehe zum Beispiel Forster 2013) ist der folgende Satz bekannt.

Satz 1 *Jede stetig differenzierbare Kurve* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ist rektifizierbar, und für ihre Länge* L *gilt*

$$L = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

4 Ein Ausflug in die Nichtstandardanalysis

Will man Kurven im ${}^*\mathbb{R}^n$ untersuchen und mit Polygonzügen vergleichen, muss man zunächst den Begriffsapparat der reellen Analysis geeignet verallgemeinern. Dies geschieht in der Nichtstandardanalysis. Ich deute hier die in diesem Zusammenhang wichtigsten Ergebnisse an. Weitere Details findet man zum Beispiel in Laugwitz 1986.

- $\mathbb{R}$ und ${}^*\mathbb{R}$ sind als angeordnete Körper elementar äquivalent, das heißt arithmetisch nicht zu unterscheiden. In beiden Strukturen gelten die gleichen arithmetischen Aussagen.

- Zu jeder finiten hyperreellen Zahl α gibt es genau eine infinitesimal benachbarte reelle Zahl $\mathrm{st}(\alpha)$, den *Standardteil* von α.

- Teilmengen von $\mathbb{R}$ sowie Relationen über $\mathbb{R}$ und reelle Funktionen lassen sich kanonisch auf ${}^*\mathbb{R}$ fortsetzen. Zum Beispiel hat $\mathbb{N}$ die kanonische Fortsetzung ${}^*\mathbb{N}$, die Menge der hypernatürlichen Zahlen, welche auch infinite Zahlen enthält.

- In $\mathbb{R}$ gültige Aussagen über Mengen (zum Beispiel die Supremumseigenschaft beschränkter Mengen) gelten in ${}^*\mathbb{R}$ nicht allgemein, sondern nur für bestimmte, sogenannte *interne* Mengen. Entsprechendes gilt für Relationen und Funktionen, da sie sich auf den Mengenbegriff zurückführen lassen.

- Insbesondere sind die kanonischen Fortsetzungen reeller Mengen, Relationen und Funktionen intern, ebenso hyperreelle Intervalle und hyperendliche Folgen $a_1, \ldots, a_\nu$ mit $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ (als interne Funktionen von $\{1, \ldots, \nu\}$ nach ${}^*\mathbb{R}$).

- Beim Rechnen mit hyperreellen Zahlen ist zu beachten, dass $a \approx b \Rightarrow a \cdot c \approx b \cdot c$ im Allgemeinen nur dann gilt, wenn c endlich ist.

Die hyperreelle Analysis für interne Funktionen kann analog zur reellen Analysis aufgebaut werden. Stetigkeit, Ableitung und Integral können analog definiert und analoge Sätze bewiesen werden. Zum Beispiel gelten die Mittelwertsätze der

Differential- und Integralrechnung. Hyperendliche Folgen haben (wie endliche reelle Folgen) stets ein kleinstes und ein größtes Glied und erlauben die Summation ihrer Glieder. Auch Definition 1 und Satz 1 sind auf interne hyperreelle Kurven übertragbar, wobei $a, b, L, \epsilon, \delta$ als hyperreelle Zahlen und k als hypernatürliche Zahl zu lesen sind.

Der Clou der Nichtstandardanalysis ist zum einen, dass man neben den Standardfunktionen auch interne Nichtstandardfunktionen zur Verfügung hat (zum Beispiel $\frac{\mu}{1+\mu^2x^2}$, μ infinit, als eine Dirac'sche Deltafunktion), zum anderen, dass man die reelle Analysis über den Umweg ins Hyperreelle grenzwertfrei umformulieren kann, was nichts weniger als ein zum Standard alternatives Programm zur Finitisierung der Analysis darstellt, da unendliche Grenzprozesse entfallen.

So ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, genau dann stetig in $x \in D$, wenn (für die kanonische Fortsetzung) $f(\xi) \approx f(x)$ für alle $\xi \in {}^*D$ mit $\xi \approx x$ gilt. Sie ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle $\xi, \eta \in {}^*D$ mit $\xi \approx \eta$ auch $f(\xi) \approx f(\eta)$ ist. Die Ableitung kann als Standardteil des Differentialquotienten und das Integral als hyperendliche Riemann'sche Summe eingeführt werden. In Wunderling et al. 2013 wird ein solcher grenzwertfreier Einstieg in die Analysis auf Schulniveau dargestellt.

Für die anschließende Untersuchung stetig differenzierbarer Kurven ist noch folgende Aussage von Belang. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (und f' daher gleichmäßig stetig), so gilt für die kanonische Fortsetzung von f und beliebige hyperreelle $\eta_0, \eta \in [a, b]$ (jetzt als hyperreelles Intervall) mit $\eta \approx \eta_0$

$$f(\eta) = f(\eta_0) + f'(\eta_0)(\eta - \eta_0) + \xi(\eta - \eta_0) \tag{1}$$

für ein $\xi \approx 0$.

Für $\eta = \eta_0$ ist die Aussage trivial. Für $\eta \neq \eta_0$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\bar{\eta}$ zwischen η_0 und η mit

$$\frac{f(\eta) - f(\eta_0)}{\eta - \eta_0} = f'(\bar{\eta}) = f'(\eta_0) + \xi$$

für ein $\xi \approx 0$, denn wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f' und $\eta_0 \approx \bar{\eta}$ ist auch $f'(\eta_0) \approx f'(\bar{\eta})$. Hieraus folgt die Behauptung (1).

Für $\eta \neq \eta_0$ lässt sich (1) einfacher so ausdrücken:

$$\frac{f(\eta) - f(\eta_0)}{\eta - \eta_0} \approx f'(\eta_0). \tag{2}$$

Der Differentialquotient ist also auf dem gesamten hyperreellen Intervall $[a, b]$ (nicht nur an den reellen Punkten) eine gute Näherung für die Ableitung. In Laugwitz 1986 wird diese Eigenschaft von Funktionen *gleichmäßige Ableitbarkeit* genannt. Man beachte, dass (1) im Allgemeinen nicht gilt, wenn f bloß differenzierbar ist (siehe Gegenbeispiel in Abschnitt 7).

5 Hyperreelle Vektoren

Das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zweier Vektoren, die Norm $\|\cdot\|$ eines Vektors und der Winkel $\angle(\cdot,\cdot)$ zwischen zwei Vektoren werden in $^*\mathbb{R}^n$ auf analoge Weise definiert wie in $\mathbb{R}^n$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ aus $^*\mathbb{R}^n$ ist

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{und} \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Für $x, y \neq 0$ ist $\angle(x, y)$ das eindeutig bestimmte (hyperreelle) $\theta \in [0, \pi]$, für das gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Aus der Definition ergibt sich $\angle(x, y) = \angle(s \cdot x, t \cdot y)$ für alle positiven $s, t \in {}^*\mathbb{R}$.

x heißt infinitesimal, wenn alle seine Komponenten infinitesimal sind. Dies ist äquivalent dazu, dass $\|x\| \approx 0$ ist. Entsprechend bedeutet $x \approx y$, dass $x - y$ infinitesimal ist.

Proposition 1 *Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}^n$ ungleich 0. Dann gilt*

$$\angle(x, y) \approx 0 \Leftrightarrow \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \approx 1. \tag{3}$$

Ist x nicht infinitesimal und $x \approx y$, so gilt

$$\frac{\|x\|}{\|y\|} \approx 1 \approx \frac{\|y\|}{\|x\|} \tag{4}$$

und

$$\angle(x, y) = \angle(s \cdot x, t \cdot y) \approx 0 \tag{5}$$

für alle positiven $s, t \in {}^*\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\theta = \angle(x, y)$. Wegen $\theta \in [0, \pi]$ und der Stetigkeit des Kosinus gilt $\theta \approx 0 \Leftrightarrow \cos\theta \approx 1$ und damit (3).

Sei x nicht infinitesimal und $x \approx y$. Dann ist $\xi := y - x$ infinitesimal. Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt

$$\left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \right| \leq 1 \cdot \|\xi\| \approx 0$$

und, da x nicht infinitesimal ist, auch

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \approx 0. \tag{6}$$

Damit ist

$$\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|x+\xi\|^2}{\|x\|^2} = 1 + \frac{\|\xi\|^2}{\|x\|^2} + \frac{2}{\|x\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \approx 1.$$

Daraus folgt (4).

Nun ist

$$\cos\theta = \frac{\langle x, x+\xi \rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{\|x\|^2 + \langle x, \xi \rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{1}{\|y\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle$$

Multiplikation mit $\frac{\|y\|}{\|x\|}$ ergibt wegen (4)

$$\cos\theta \approx \frac{\|y\|}{\|x\|} \cdot \cos\theta = 1 + \frac{1}{\|x\|} \cdot \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \xi \right\rangle \mathrm{st}ackrel(6) {\approx} 1.$$

Wegen (3) folgt daraus (5).

$\square$

6 Hyperreelle Kurven

Jede reelle Kurve $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ lässt sich kanonisch fortsetzen zu einer internen hyperreellen Kurve $f\colon [a, b] \to {}^*\mathbb{R}^n$. Die Fortsetzung heißt dann eine *Standardkurve*. Zur Vereinfachung bezeichne ich diese Kurve wieder mit f. $[a, b]$ bezeichne je nach Zusammenhang entweder das reelle oder das hyperreelle Intervall von a bis b.

Satz 2 *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve der Länge L (mit der kanonischen Fortsetzung $f\colon [a,b] \to {}^*\mathbb{R}^n$) und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = b$ eine infinitesimale Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt*

1. *Das Kurvenstück und die Sehne zwischen zwei benachbarten Stützpunkten unterscheiden sich in der Länge nur infinitesimal relativ zum (bereits infinitesimalen) Parameterintervall.*

$$\int_{t_{\imath-1}}^{t_\imath} \|f'(t)\|\,dt - \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\| = \tau_\imath \cdot (t_\imath - t_{\imath-1}) \tag{7}$$

   mit $0 \leq \tau_\imath \approx 0$ für $\imath = 1, \ldots, \kappa$.

2. *Die Länge der Kurve unterscheidet sich nur infinitesimal von der Länge des Polygonzugs.*

$$L \approx \sum_{\imath=1}^{\kappa} \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\| \tag{8}$$

3. *Ist f regulär, so gilt darüber hinaus:*

   (1) *Der Winkel zwischen Tangente und Sehne in den Stützpunkten des Polygonzugs ist infinitesimal.*

$$\angle(f'(t_{\imath-1}), f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})) \approx 0, \text{ für } \imath = 1, \ldots, \kappa. \tag{9}$$

   (2) *Der Winkel in den Stützpunkten zwischen zwei benachbarten Sehnen des Polygonzugs weicht nur infinitesimal vom gestreckten Winkel ab.*

$$\angle(f(t_{\imath-1} - f(t_\imath)), f(t_{\imath+1}) - f(t_\imath)) \approx \pi, \text{ für } \imath = 1, \ldots, \kappa - 1. \tag{10}$$

Beweis. Ad 1. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\bar{t}_\imath \in [t_{\imath-1}, t_\imath]$ mit

$$L_\imath := \int_{t_{\imath-1}}^{t_\imath} \|f'(t)\|\,dt = \|f'(\bar{t}_\imath)\| \cdot (t_\imath - t_{\imath-1}). \tag{11}$$

Die Sehnenlänge ist $p_f(t_{\imath-1}, t_\imath) = \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\|$.

Allgemein gilt für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in {}^*\mathbb{R}^n$

$$\|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}. \tag{12}$$

Sei $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Dann sind die Komponentenfunktionen f_i stetig differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es jeweils ein $s_{\imath i} \in [t_{\imath-1}, t_\imath]$ mit

$$\frac{f_i(t_\imath) - f_i(t_{\imath-1})}{t_\imath - t_{\imath-1}} = f_i'(s_{\imath i}). \tag{13}$$

Wegen $s_{\imath i} \approx \bar{t}_\imath$ und der gleichmäßigen Stetigkeit der f_i' folgt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{L_\imath - p_f(t_{\imath-1}, t_\imath)}{t_\imath - t_{\imath-1}}\right| \quad \mathrm{st}ackrel(11)= \quad & \left| \|f'(\bar{t}_\imath)\| - \frac{\|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\|}{t_\imath - t_{\imath-1}} \right| \\
\leq \quad & \left\| f'(\bar{t}_\imath) - \frac{f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})}{t_\imath - t_{\imath-1}} \right\| \\
\mathrm{st}ackrel(12)\leq \quad & \sqrt{n} \cdot \max \left\{ \left| f_i'(\bar{t}_\imath) - \frac{f_i(t_\imath) - f_i(t_{\imath-1})}{t_\imath - t_{\imath-1}} \right| \mid i = 1, \ldots, n \right\} \\
\mathrm{st}ackrel(13)= \quad & \sqrt{n} \cdot \max \{ |f_i'(\bar{t}_\imath) - f_i'(s_{\imath i})| \mid i = 1, \ldots, n \} \approx 0
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung (7).

Ad 2. Seien für $\imath = 1, \ldots, \kappa$ infinitesimale $\tau_\imath$ gemäß (7) gewählt, und sei $\hat{\tau}$ ihr Maximum. Dann ist

$$0 \leq \hat{\tau} = \max\{\tau_\imath \mid \imath = 1, \ldots, \kappa\} \approx 0$$

und

$$0 \leq \sum_{\imath=1}^{\kappa} \tau_\imath \cdot (t_\imath - t_{\imath-1}) \leq \hat{\tau} \cdot \sum_{\imath=1}^{\kappa} (t_\imath - t_{\imath-1}) = \hat{\tau} \cdot (b - a) \approx 0$$

und daher

$$\begin{aligned}
L \quad &= \quad \int_a^b \|f'(t)\|\, dt = \sum_{\imath=1}^{\kappa} \int_{t_{\imath-1}}^{t_\imath} \|f'(t)\|\, dt \\
&= \quad \sum_{\imath=1}^{\kappa} \left(\|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\| + \tau_\imath \cdot (t_\imath - t_{\imath-1}) \right) \\
&= \quad \left(\sum_{\imath=1}^{\kappa} \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\| \right) + \left(\sum_{\imath=1}^{\kappa} \tau_\imath \cdot (t_\imath - t_{\imath-1}) \right) \\
&\approx \quad \sum_{\imath=1}^{\kappa} \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\|.
\end{aligned}$$

Ad 3a. Nach (2), angewendet auf alle Komponentenfunktionen, gilt

$$\frac{f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})}{t_\imath - t_{\imath-1}} \approx f'(t_{\imath-1}).$$

$f'(t_{\imath-1})$ ist wegen der Regularität von f nicht infinitesimal. Daher folgt die Behauptung aus (5) in Proposition 1.

Ad 3b. Für $\imath \in \{1, \ldots, \kappa - 1\}$ gilt

$$\frac{f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})}{t_\imath - t_{\imath-1}} \approx f'(t_{\imath-1}) \approx f'(t_\imath) \approx \frac{f(t_{\imath+1}) - f(t_\imath)}{t_{\imath+1} - t_\imath}$$

wieder aufgrund von (2) bzw. beim mittleren $\approx$ aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f'. Wegen der Regularität von f sind $f'(t_{\imath-1})$ und $f'(t_\imath)$ und damit auch die Außenterme nicht infinitesimal. Nach (5) in Proposition 1 ist daher

$$\angle(f(t_\imath) - f(t_{\imath-1}), f(t_{\imath+1}) - f(t_\imath)) \approx 0.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.

□

Satz 2 bestätigt Leibniz' Vorstellung einer Kurve als Polygonzug mit infinitesimalen Seiten für stetig differenzierbare Standardkurven. Kurve und Polygonzug unterscheiden sich zwar, aber der Unterschied ist für die reelle Analysis unerheblich.

Zugleich rechtfertigt Satz 2 für stetig differenzierbare Standardkurven die Technik der infiniten Vergrößerung, wie sie in Wunderling et al. 1997 und Wunderling et al. 2013 zur Veranschaulichung infinitesimaler Verhältnisse verwendet wird.

Bei einem grenzwertfreien Einstieg in die Analysis kann die Länge einer Kurve – ganz im Geiste der Leibniz'schen Vorstellung – als Standardteil einer hyperendlichen Summe, der Länge eines Polygonzugs mit infinitesimalen Seiten, eingeführt werden.

Eine reelle Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar mit der Länge L, wenn für die kanonische Fortsetzung von f und für jede infinitesimale Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = b$ der Standardteil von $\sum_{\imath=1}^{\kappa} \|f(t_\imath) - f(t_{\imath-1})\|$ existiert und gleich L ist.

Bereits Robinson behandelt in seiner Non-standard Analysis eine elementare Differentialgeometrie der Kurven (formuliert für den dreidimensionalen Fall).[10] Er zeigt, dass man die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve in Übereinstimmung mit der klassischen Definition als Standardteil einer Polygonzuglänge bei gleichmäßig infinitesimal unterteiltem Parameterintervall definieren kann. Dies ist ein Spezialfall von Satz 2, Unterpunkt 2. Ebenfalls zeigt er, dass die Tangente in einem Standardkurvenpunkt P in ihrem endlichen Teil nur infinitesimal von der Sekante durch P und einen infinitesimal benachbarten Kurvenpunkt Q abweicht. Genauer: Jeder hyperreelle endliche Punkt auf der Sekante liegt in infinitesimaler Nachbarschaft (genau) eines reellen Punktes auf der Tangente. Daraus folgt, dass der Winkel zwischen Tangente und Sekante infinitesimal sein muss (in Übereinstimmung mit Satz 2, Unterpunkt 3a).

Im vorliegenden Aufsatz ist die Längenformel (8) für stetig differenzierbare reelle Kurven eher ein Nebenergebnis, denn im Vordergrund steht die Rechtfertigung der infiniten Vergrößerungstechnik, also der „Beobachtung“ eines infinitesimalen Bildausschnitts und damit der Vergleich von infinitesimalen Kurvenstücken und Sehnen bezüglich Länge und Winkel. Daher muss die allgemeinere Längendefinition für interne hyperreelle Kurven herangezogen werden, auch wenn in Satz 2 nur Standardkurven betrachtet werden. Eine solche Untersuchung ist mir von anderen Autoren bislang nicht bekannt.

7 Die Grenzen der Vergrößerungstechnik

Dass die infinite Vergrößerung sehr wohl täuschen kann, wenn die Kurve nur differenzierbar ist, zeigt das folgende Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber in 0 nicht stetig differenzierbar. Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$ und an der Stelle 0 gilt

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \sin \frac{\pi}{h} \right) = 0.$$

10. Siehe Robinson 1996, S. 83-88. Den Hinweis auf Robinson verdanke ich Herrn Prof. Reinhard Hochmuth.

f hat die Nullstellen $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und jeweils zwischen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n}$ ein lokales Minimum bzw. Maximum, dessen Betrag zwischen $\frac{1}{(n+1)^2}$ und $\frac{1}{n^2}$ liegt. Für die Länge L_n des Funktionsgraphen zwischen den Nullstellen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n}$ gilt daher

$$L_n \geq \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Die Intervalllänge I_n zwischen den Nullstellen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n}$ ist

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Für den Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall gilt

$$D_n = L_n - I_n \geq \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n(n+1)^2}$$

und für den Längenüberschuss relativ zur Intervalllänge somit

$$\frac{D_n}{I_n} \geq \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Sei $D(\frac{1}{2m}, \frac{1}{m})$ der Längenüberschuss des Graphen zwischen den Nullstellen $\frac{1}{2m}$ und $\frac{1}{m}$ gegenüber dem zugehörigen Intervall. Dann gilt

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}\right) &= \sum_{n=m}^{2m-1} I_n \cdot \frac{D_n}{I_n} \geq \sum_{n=m}^{2m-1} I_n \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \cdot \sum_{n=m}^{2m-1} I_n = \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \cdot \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

Also gilt auch für das Intervall von $\frac{1}{2m}$ bis $\frac{1}{m}$: Der relative Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall der Länge $\frac{1}{2m}$ ist $\geq 1 - \frac{2}{m+1}$.

Alle Überlegungen übertragen sich auf die hyperreelle Fortsetzung von f. Bei unendlichfacher Vergrößerung mit dem hypernatürlichen Faktor μ an der Stelle 0 sind der Funktionsgraph und die x-Achse (als Tangente) nicht zu unterscheiden (siehe Abbildung 2). Die Ausschläge des Graphen sind von der Größenordnung x^2 und verschwinden in der Darstellung. Der relative Längenüberschuss des Graphen gegenüber dem Intervall ist aber $\geq 1 - \frac{2}{\mu+1}$ und damit nicht infinitesimal.

Die Nullstellen sind unendlich gedrängt und in der Darstellung nicht zu unterscheiden, denn der Abstand zwischen $\frac{1}{\mu+1}$ und $\frac{1}{\mu}$ ist infinitesimal relativ zu $\frac{1}{\mu}$.

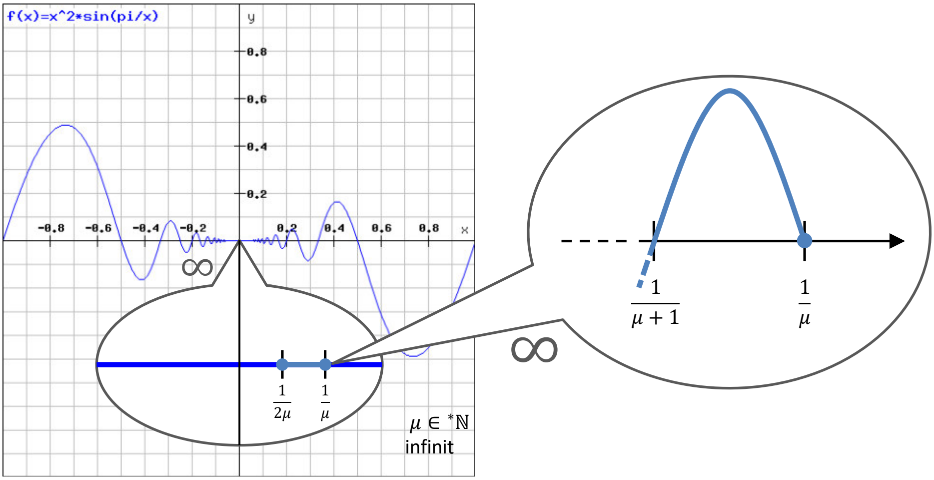


Abbildung 2: Der Funktionsgraph von f in einem infinitesimalen Intervall um 0

Auch der Winkel zwischen x-Achse und Funktionsgraph ist im Allgemeinen nicht infinitesimal, sondern schwankt mit $f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$ zwischen nicht infinitesimalen positiven und negativen Werten. In einer infinitesimalen Umgebung von 0 unterscheiden sich also die Kurventangenten erheblich, obwohl bei infiniter Vergrößerung zeichnerisch kein Unterschied zwischen Kurve und x-Achse auszumachen ist.

8 Fazit

Das Eingangsbeispiel aus Abbildung 1 stellt sich unter Verwendung von Satz 2 folgendermaßen dar. Der Winkel im Punkt Q beträgt $x + d\varphi$ mit $d\varphi \approx 0$ und der infinitesimale Kreisbogen von P bis Q hat die Länge $dx = |PQ| + d\xi$ mit $\frac{d\xi}{dx} \approx 0$. Aufgrund der Stetigkeit des Kosinus ist dann (für reelles x)

$$\cos x \approx \cos(x + d\varphi) = \frac{dy}{|PQ|} = \frac{dy}{dx - d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d\xi}{dx}} \approx \frac{dy}{dx}$$

und daher $\cos x = \mathrm{st}(\frac{dy}{dx})$ die gesuchte Ableitung von $\sin x$.

Satz 2 ist nun für eine sehr allgemeine Klasse von Kurven, nämlich die der stetig differenzierbaren Kurven anwendbar.

Funktionen wie die in Abschnitt 7 betrachtete sind bewusst „pathologisch“ konstruiert, um den Unterschied zwischen Differenzierbarkeit und stetiger Differenzierbarkeit herauszuarbeiten, wobei dort nur die Stelle 0 problematisch ist.[11]

Die im Schulunterricht behandelten differenzierbaren Funktionen sind in aller Regel auch stetig differenzierbar. Ihre Graphen sind reguläre Kurven. Daher kann man sie, wie von Leibniz angeregt, ohne Verlust als Polygonzüge mit infinitesimalen Seiten ansehen. Die infinite Vergrößerung erweist sich dann als ein adäquates und starkes Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Nichtstandardmethoden in einer grenzwertfreien Analysis.[12]

Literaturverzeichnis

Arthur, Richard TW. 2009. Actual infinitesimals in Leibniz's early thought. *The Philosophy of the Young Leibniz, Studia Leibnitiana Sonderhefte* 35:11–28.

———. 2013. Leibniz's syncategorematic infinitesimals. *Archive for history of exact sciences* 67 (5): 553–593.

Bair, Jacques, Piotr Błaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, Semen S Kutateladze, Thomas McGaffey, Patrick Reeder et al. 2017. Interpreting the infinitesimal mathematics of Leibniz and Euler. *Journal for general philosophy of science* 48 (2): 195–238.

Bascelli, Tiziana, Piotr Błaszczyk, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, David M Schaps und David Sherry. 2016. Leibniz versus Ishiguro: Closing a Quarter Century of Syncategoremania. *HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science* 6 (1): 117–147.

Bascelli, Tiziana, Emanuele Bottazzi, Frederik Herzberg, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, Tahl Nowik, David Sherry und Steven Shnider. 2014. Fermat, Leibniz, Euler, and the gang: The true history of the concepts of limit and shadow. *Notices of the AMS* 61 (8).

11. Ein analoges Beispiel einer pathologischen Funktion betrachtet auch Elschenbroich mit seiner Funktionenlupe. Man sieht dort, wie die Kräuselungen des Funktionsgraphen immer enger und flacher werden, bis dieser nicht mehr von der x-Achse zu unterscheiden ist.

12. Der in diesem Aufsatz verwendete Zugang zur Nichtstandardanalysis über eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ zu ${}^*\mathbb{R}$ geht auf Robinson zurück. Ein anderer Weg zur Nichtstandardanalysis ist Nelsons *Internal Set Theory*, die in dem folgenden Aufsatz „Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen“ nach einer Analyse der üblichen Einführung der reellen Zahlen die Grundlage bilden wird. Da dort die Mengenlehre selbst erweitert wird, erübrigen sich die Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, die Fortsetzung reeller Funktionen und die Erweiterung von endlich zu hyperendlich. Ebenso entfällt die Unterscheidung zwischen internen und externen Mengen, da nur intern Mengen gebildet werden.

Bedürftig, Thomas. 2018. Über die Grundproblematik der Grenzwerte. *Mathematische Semesterberichte* 65 (2): 277–298.

Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2017. Historische und philosophische Notizen über das Kontinuum. *Mathematische Semesterberichte* 64:63–88.

Błaszczyk, Piotr, Mikhail G Katz und David Sherry. 2013. Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking. *Foundations of Science* 18 (1): 43–74.

Elschenbroich, Hans-Jürgen. FUNKTIONENLUPE.de. Besucht am 3. Mai 2018. http://www.funktionenlupe.de/.

Elschenbroich, Hans-Jürgen, Günter Seebach und Reinhard Schmidt. 2014. Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *mathematik lehren* 187.

Forster, Otto. 2013. *Analysis 2.* Springer Spektrum.

Goethe, Norma B, Philip Beeley, David Rabouin et al. 2015. *GW Leibniz, interrelations between mathematics and philosophy.* Springer.

Goldenbaum, Ursula, und Douglas Jesseph. 2008. *Infinitesimal differences: Controversies between Leibniz and his contemporaries.* Walter de Gruyter.

Katz, Mikhail G, und Eric Leichtnam. 2013. Commuting and noncommuting infinitesimals. *American Mathematical Monthly* 120 (7): 631–641.

Katz, Mikhail G, und David Sherry. 2013. Leibniz's infinitesimals: Their fictionality, their modern implementations, and their foes from Berkeley to Russell and beyond. *Erkenntnis* 78 (3): 571–625.

Katz, Mikhail, und David Sherry. 2012. Leibniz's laws of continuity and homogeneity. *Notices of the American Mathematical Society* 59 (11).

Keisler, H. Jerome. 2000. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach.* 2. Aufl. University of Wisconsin.

Kirsch, Arnold. 1979. Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. *Der Mathematikunterricht* 25 (3): 25–41.

Laugwitz, Detlef. 1986. *Zahlen und Kontinuum.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 2016. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae.* Herausgegeben von Eberhard Knobloch. Springer Spektrum.

Robinson, Abraham. 1996. *Non-standard Analysis.* Revised. Princeton University Press.

Schmieden, Curt, und Detlef Laugwitz. 1958. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Math. Zeitschr.* 69:1–39.

Sherry, David, und Mikhail Katz. 2012. Infinitesimals, imaginaries, ideals, and fictions. *Studia Leibnitiana:* 166–192.

Tzuchien, THO. 2012. Equivocation in the foundations of Leibniz's infinitesimal fictions. *Societate şi Politică* 6 (12): 70–98.

Wunderling, Helmut, et al. 1997. Infinitesimalmathematik. *MU (Der Mathematikunterricht)* Heft 1.

Wunderling, Helmut, Peter Baumann, Angelika Keller und Thomas Kirski. 2013. *Analysis als Infinitesimalrechnung.* Berlin: DUDEN PAETEC.

Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen

Karl Kuhlemann

1 Einleitung

Die reellen Zahlen sind dem ausgebildeten Mathematiker sehr vertraut, denn sie gehören zu den ersten mathematischen Objekten, mit denen er in seiner Ausbildung (gleich zu Beginn der Analysis 1-Vorlesung) in Berührung gekommen ist. Zum später erworbenen Standardwissen gehört, dass alle vollständigen archimedisch angeordneten Körper isomorph sind, dass also die Menge $\mathbb{R}$ durch die Axiome der reellen Zahlen *im Wesentlichen* eindeutig bestimmt ist.[1] Überraschungen die Struktur von $\mathbb{R}$ betreffend, wie etwa die Existenz infiniter (also unendlich großer) und infinitesimaler (also unendlich kleiner) Zahlen in $\mathbb{R}$, erscheinen daher ausgeschlossen.

In diesem Aufsatz lade ich den Leser ein, sich davon zu überzeugen, dass eine solche Schlussfolgerung vorschnell wäre. Zwar scheint die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$ der Existenz infiniter und infinitesimaler Zahlen zu widersprechen, denn zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl, aber dieses Gegenargument zöge nur dann, wenn die Existenz infiniter natürlicher Zahlen ausgeschlossen wäre, und das ist nicht der Fall. Man kann in der Analysis *nicht* beweisen, dass es infinite natürliche Zahlen (und damit infinite und infinitesimale reelle Zahlen) *nicht* gibt.

Im Gegenteil: Man kann die Existenz solcher *Nichtstandard-Zahlen* sichtbar machen, indem man ein neues Prädikat s (für „standard") in die Sprache der Analysis aufnimmt und neue Axiome postuliert, die den Umgang mit s regeln. Das sind die zusätzlichen mengentheoretischen Axiomenschemata I, S und T, um die Edward

1. Der Körper-Isomorphismus zwischen zwei solchen Körpern ist eindeutig bestimmt und erhält die Anordnung und die Limesbildung. Siehe z. B. Ebbinghaus et al. 1992, S. 42.

Nelson in seiner *Internen Mengenlehre* (engl. *Internal Set Theory*, abgekürzt mit IST) die übliche Mengenlehre ZFC ergänzt hat.[2]

Nichtstandard-Zahlen sind also im Lichte dieser Betrachtung nichts anderes als besondere reelle Zahlen, deren Existenz der Standard-Analysis nur verborgen bleibt. Um das zu sehen, muss man aufmerksam und genau auf die Axiomatik der reellen Zahlen schauen – aufmerksamer, als dies gewöhnlich in der Praxis und Lehre geschieht. Man muss konsequent Sprachebenen unterscheiden: die Metasprache, in der über Terme und Ausdrücke der Analysis gesprochen wird, von der Objektsprache, in der über reelle Zahlen und Mengen gesprochen wird. Und man muss (entgegen der üblichen Praxis) die benötigten Mengenaxiome in die Analysis einbeziehen.

Im vorliegenden Aufsatz wird es also zunächst um eine kritische und systematische Analyse der Axiomatisierung der reellen Zahlen in ihrer Bezugnahme auf Metasprache und Mengenlehre gehen. Die erfolgreiche Anwendbarkeit der Standard-Analysis gemäß der gegenwärtigen Praxis bleibt hiervon unberührt. Die Analyse führt aber in natürlicher Weise zu einer „bewussteren" Sicht auf die reellen (und die natürlichen) Zahlen. Die damit verbundene (optionale) Bereicherung der Analysis um Nichtstandard-Elemente lässt die systematische Analyse auch unter didaktischen Aspekten interessant erscheinen.

Abschnitt 2 gilt der Analyse der reellen Axiomatik und Abschnitt 3 dann der Begründung der Nichtstandard-Zahlen (und weiterer Nichtstandard-Objekte). In Abschnitt 4 gehe ich auf mögliche systematische und didaktische Konsequenzen ein.

2 Der Standardweg und seine Problematik

2.1 Metasprache und Objektsprache

Nach meinen Recherchen werden die reellen Zahlen in den universitären Anfängervorlesungen zur Analysis zumeist axiomatisch eingeführt, wobei die Axiome in aller Regel nicht formal, sondern umgangssprachlich und Mengenaxiome überhaupt nicht angegeben werden. Dies birgt die Gefahren, dass die Grenze zwischen Metasprache und Objektsprache verwischt und dass implizit verwendete, aber unausgesprochene Axiome der Mengenlehre intransparent bleiben.

2. Nelsons IST ist nicht die einzige Möglichkeit, ZFC zu erweitern, um Nichtstandard-Objekte zu erhalten. Einen umfassenden Überblick über die verschiedenen axiomatischen Zugänge zur Nichtstandard-Analysis gibt Kanovei und Reeken 2004.

Selbst wenn man die Formalisierung der Mathematik anfangs nicht zu sehr hervorkehren möchte, ist es wichtig zu vermitteln, dass das Sprechen über Terme, Ausdrücke und Axiome auf einer anderen Ebene stattfindet als das Sprechen über reelle Zahlen, Mengen und Funktionen und dass die metasprachlichen natürlichen Zahlen, die man „naiv“ verwendet, um die Länge von Termen oder die Anzahl der freien Variablen eines Ausdrucks anzugeben, etwas anderes sind als die objektsprachlichen natürlichen Zahlen, die man innerhalb der axiomatisch eingeführten reellen Zahlen definiert. Besonders klar wird der Unterschied, wenn man sich in der Metasprache mit dem potentiell Unendlichen begnügt und aktual unendliche Mengenbildungen (zum Beispiel die Menge aller Terme) unterlässt, was ohne Weiteres möglich ist, solange man keine Modelltheorie betreiben will. Verwendet man in der Metasprache das aktual Unendliche, so befindet man sich im „Meta-Universum“ der Hintergrundmengenlehre, die ihrerseits wieder einer axiomatischen Grundlegung bedarf. Die metasprachlichen natürlichen Zahlen sind dann genau genommen nicht mehr *naiv*, denn das aktual Unendliche kann naiv nicht erschlossen werden, man muss es *vereinbaren*, sprich: Man braucht Axiome. Damit erscheint eine weitere Meta-Ebene hinter der Sprache der Hintergrundmengenlehre.

Für die hier angestellten Überlegungen ist es ausreichend, zwei Sprachebenen zu unterscheiden: die Objektsprache (in der über das Universum der Analysis, also über Mengen und reelle Zahlen gesprochen wird) einerseits und die Metasprache (in der über die Objektsprache und – sofern für modelltheoretische Betrachtungen erforderlich – über das Meta-Universum der Hintergrundmengenlehre gesprochen wird) andererseits.

In jedem Fall müssen die natürlichen Zahlen und damit auch der Endlichkeitsbegriff der unterschiedlichen Sprachebenen sauber auseinandergehalten werden. Um diese wesentliche Unterscheidung optisch hervorzuheben, verwende ich für metasprachliche natürliche Zahlen und Variablen den Frakturzeichensatz (zum Beispiel $\mathfrak{0}, \mathfrak{1}, \mathfrak{2}, \mathfrak{3}, \ldots, \mathfrak{n}$) und für objektsprachliche natürliche Zahlen und Variablen den normalen Zeichensatz (zum Beispiel $0, 1, 2, 3, \ldots, n$). Das Symbol $\mathbb{N}$ verwende ich ausschließlich in der Objektsprache für die Menge der objektsprachlichen natürlichen Zahlen.

2.2 Formalisierung

Erfahrungsgemäß wird (schon aus Bequemlichkeit, zur Vermeidung von Schreibarbeit) im Verlauf der Anfängervorlesungen die Objektsprache durch die Verwendung logischer Quantoren und Junktoren mehr oder weniger streng formalisiert, sodass auch optisch eine Abgrenzung zur Metasprache gegeben ist.

Formalisierung dient aber auch dazu, die logische Struktur komplexerer Aussagen deutlicher hervortreten zu lassen, gerade bei Ausdrücken mit verschachtelten Quantoren, wie sie für die ϵ-δ-Definitionen und -Sätze der Analysis typisch sind.

Ein gewisser Grad an Formalisierung wird also dem Anfänger ohnehin zugemutet. Es spricht allerdings nichts dagegen, Umgangssprache und logische Formeln zu kombinieren und letztere dort einzusetzen, wo sie für das Verständnis förderlich sind. Es sollte dann klar sein, dass ein (teilweise) umgangssprachlicher Satz der Objektsprache prinzipiell komplett formalisiert werden könnte.

Beispiel: Viele Sätze beginnen mit Formulierungen wie „Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt …“ Formal ist ein solcher Satz ein Ausdruck der Gestalt $\forall f \forall a \forall b\,(\phi \Rightarrow \psi)$, wobei ϕ formale Ausdrücke enthält für „f ist eine Funktion“, „a und b sind reelle Zahlen“, „der Definitionsbereich von f ist $[a,b]$“, „der Bildbereich von f ist eine Untermenge von $\mathbb{R}$“, „f ist stetig“, die vorher definiert worden sein müssen.

Der wichtigste Grund, die Formalisierung der für die Analysis verwendeten Sprache zu thematisieren, ist jedoch, dafür zu sensibilisieren, dass die Wahl der Sprache darüber entscheidet, welche Aussagen in der Analysis formuliert werden können und welche nicht. So ist es unmöglich, eine Aussage über Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu formulieren, wenn die Objektsprache keine Symbole für Mengen-Prädikate („ist eine Menge“, „ist Element von“) hat. Auch ein Rückgriff auf metasprachliche Begriffe (z. B. „ist eine (metasprachliche) natürliche Zahl“ oder „alle Terme der Form $1 + \cdots + 1$“) ist in der Objektsprache nicht möglich. Sprachen der Prädikatenlogik erster Stufe (die in der Regel verwendet werden) erlauben unbeschränkte Quantifizierungen über das gesamte postulierte „Universum“ der Analysis („Für alle x gilt …“ oder „Es gibt ein x, für das … gilt“), nicht jedoch über Prädikate (z. B. „Für alle Prädikate gilt …“).

2.3 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind – arithmetisch – nicht in einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe charakterisierbar.[3] Axiomatisierungen auf der ersten Stufe[4] lassen immer auch Nichtstandardmodelle zu und sind weniger für die Analysis selbst als für die Modelltheorie von Interesse.

3. Siehe zum Beispiel Ebbinghaus et al. 2007
4. Siehe z. B. Bedürftig und Murawski 2015, S. 346

Üblich und für die Praxis tauglicher sind mengentheoretische Axiomatisierungen, wie sie zuerst von Hilbert (Hilbert 1900) und Tarski (Tarski 1937) angegeben worden sind. Sie finden sich daher in fast allen Lehrbüchern zur Analysis. Im Grunde handelt es sich dabei um Erweiterungen einer axiomatischen Mengenlehre, wobei die Axiome der Mengenlehre in den Lehrbüchern in der Regel nicht explizit genannt werden. Wenig Beachtung findet die Tatsache, dass auch die mengentheoretischen Axiomensysteme der reellen Zahlen (inklusive der Mengenaxiome) stets verschiedene Modelle haben.

Das weit verbreitete Lehrbuch von Otto Forster beginnt (nach einem einleitenden Paragraphen zur vollständigen Induktion) in §2 mit den Worten

> Wir setzen in diesem Buch die reellen Zahlen als gegeben voraus. Um auf sicherem Boden zu stehen, werden wir in diesem und den folgenden Paragraphen einige Axiome formulieren, aus denen sich alle Eigenschaften und Gesetze der reellen Zahlen ableiten lassen.[5]

Anschließend werden zunächst die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome vorgestellt, die noch rein arithmetisch (also ohne Mengenvokabular) formulierbar sind. Beim archimedischen Axiom und bei den Definitionen von reellen Zahlenfolgen, Konvergenz und Vollständigkeit (mittels Cauchy-Folgen) tritt dann die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in Erscheinung, und da wird die Unterscheidung zwischen Metasprache und Objektsprache relevant, denn die naheliegende „Definition" von $\mathbb{N}$ als Menge aller Einsensummen $1+\cdots+1$ ist in der Objektsprache nicht möglich, da sie einen Rückgriff auf metasprachliche Begriffe beinhaltet. Andererseits darf das Symbol $\mathbb{N}$ erst dann zur Formulierung von Axiomen, Definitionen und Sätzen der Analysis benutzt werden, *wenn* es in der Objektsprache definiert worden ist.[6]

Ein korrekter Weg, um die Menge der (objektsprachlichen) natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder analog als Teilmenge eines beliebigen angeordneten Körpers K) zu gewinnen, ist folgender:[7]

1. Man nenne eine Menge M induktiv, wenn $1 \in M$ ist und wenn mit jedem $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ ist.[8]

5. Siehe Forster 2015, S. 17.
6. Wenn man $\mathbb{N}$ als eigenes Konstantensymbol in die ursprüngliche Symbolmenge aufnähme (oder alternativ ein einstelliges Relationssymbol für das Prädikat „ist eine natürliche Zahl"), liefe es auf das Gleiche hinaus, denn man müsste das Axiomensystem dann um entsprechende definierende Axiome für die neue Konstante bzw. das neue Prädikat ergänzen.
7. Vgl. z. B. Ebbinghaus et al. 1992, S. 39.
8. Bei einigen Autoren (z. B. bei Forster oder Ebbinghaus) ist 0 das initiale Element induktiver Mengen, bei den meisten hier zitierten Autoren jedoch 1. Daher schließe ich mich dieser Konvention an.

2. Man definiere $\mathbb{N}$ als den Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Die Definition ist möglich, da es induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$ gibt (zum Beispiel $\mathbb{R}$ selbst) und da der Durchschnitt induktiver Mengen wieder induktiv ist. Voraussetzung sind Mengenaxiome, die diese Schlüsse zulassen (hier insbesondere das Potenzmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome).

$\mathbb{N}$ ist nach Definition die (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Menge, das heißt für jede induktive Menge M gilt $\mathbb{N} \subseteq M$. Eine unmittelbare Folgerung ist der Satz der vollständigen Induktion: Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist mit $\mathbb{N}$ identisch. Daraus ergibt sich als wichtige Konsequenz die *Wohlordnung* von $\mathbb{N}$: Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält ein minimales Element.

Auch Forster definiert die Menge der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie vorübergehend mit $\mathcal{N}$. Dass diese Menge die 'richtigen' (Zitat Forster) natürlichen Zahlen enthält (und die Bezeichnung $\mathbb{N}$ damit gerechtfertigt ist), begründet er damit, dass sie die (mengentheoretisch formulierten) Peano-Axiome erfüllt, welche die natürlichen Zahlen charakterisieren (nach dem Satz von Dedekind sind zwei Peano-Strukturen isomorph). Zuvor schreibt er:

> $\mathcal{N}$ besteht also genau aus den Zahlen, die sich aus der 0 durch sukzessive Addition von 1 erhalten lassen.[9]

Wie oben angemerkt ist eine solche Formulierung insofern problematisch, als sie die Sprachebenen vermischt. Durch sukzessive Addition von 1 erhält man zwar zu jeder metasprachlichen natürlichen Zahl (die angibt, wie oft man 1 addiert hat) eine objektsprachliche natürliche Zahl. Es ist aber in der Objektsprache nicht möglich, die Menge genau dieser Zahlen zu bilden. Daher ist nicht auszuschließen, dass die Menge $\mathbb{N}$ (metasprachlich) *unerreichbare* Zahlen enthält, also Zahlen, die nicht durch Terme der Form $1 + \cdots + 1$ erreicht werden. Eine genauere Analyse dieses Problems folgt in Abschnitt 2.7. Auch die Peano-Axiome verhindern nicht, dass es in $\mathbb{N}$ (und nach dem Satz von Dedekind damit in jeder Peano-Struktur) unerreichbare Zahlen geben kann (siehe Abschnitt 2.8).

Hat man die Menge $\mathbb{N}$, wie oben beschrieben, in der Objektsprache zur Verfügung, kann man das archimedische Axiom wie bei Forster formulieren.[10] Ebenso kann man Folgen, Cauchy-Folgen und die Konvergenz von Folgen definieren und das Vollständigkeitsaxiom wie bei Forster formulieren („Jede Cauchy-Folge konvergiert“).

9. Siehe Forster 2015, S. 28.

10. Das archimedische Axiom ist direkt formulierbar in einer Sprache, die unendliche Ausdrücke zulässt (siehe z. B. Ebbinghaus et al. 2007, S 152).

Statt des archimedischen und des mittels Cauchy-Folgen formulierten Vollständigkeitsaxioms wird in anderen Lehrbüchern das Supremumsaxiom (z. B. in Deitmar 2014, Grieser 2014) oder das Dedekind'sche-Schnitt-Axiom (z. B. in Behrends 2015, Heuser 2009) verwendet. Die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$ und die Konvergenz aller Cauchy-Folgen sind dann Folgerungen. Wird die Vollständigkeit über das Intervallschachtelungs-Axiom definiert (wie z. B. in Königsberger 2004), wird wieder zusätzlich das archimedische Axiom gebraucht. Bei jeder dieser Varianten der Axiomatisierung ist $\mathbb{N}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu definieren. Nicht alle Autoren machen sich (und ihren Lesern) diese Mühe. In Deitmar 2014 und Königsberger 2004 werden einfach die naiv eingeführten natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) in $\mathbb{R}$ weiterverwendet.

Behrends gibt zunächst eine „unkritische" (Bezeichnung so bei Behrends) Definition von $\mathbb{N}$ (innerhalb eines angeordneten Körpers K) an:

> Unter den natürlichen Zahlen in K verstehen wir die Gesamtheit derjenigen Elemente, die sich als endliche Summe von Einsen schreiben lassen, also $1, 1{+}1, 1{+}1{+}1$, usw.; üblicherweise schreibt man $2 := 1{+}1$, $3 := 1 + 1 + 1, \dots$ Wir werden hier das Zeichen $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen in K verwenden.[11]

Anschließend räumt er ein, dass diese Definition nicht zum Weiterarbeiten taugt, weil nicht klar sei, was „endliche Summe" oder „usw." bedeuten soll, und führt den Leser zur „kritischen" (Bezeichnung so bei Behrends) Definition $\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ das System der induktiven Teilmengen von K). Allerdings erliegt er direkt danach der Versuchung, die natürlichen Zahlen mit den Einsensummen gleichzusetzen, wenn er schreibt:

> Es ist plausibel, dass dieses $\mathbb{N}$ gerade die Zahlen 1, $1 + 1$, usw. enthalten muss:
>
> - 1 muss zu $\mathbb{N}$ gehören, da 1 in allen induktiven Mengen liegt, ebenso $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, ...
> - Andere Elemente als 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, ... können nicht in $\mathbb{N}$ liegen. Die 0 z.B. deswegen nicht, weil $\{x \mid x \in K, x > 0\}$ eine induktive Menge ist, die 0 nicht enthält.[12]

Ähnliches findet man bei Heuser (der die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbf{N}$ bezeichnet). $\mathbf{N}$ wird als Schnittmenge aller induktiven Teilmengen des angeordneten Körpers K definiert. Im Kapitel „Folgerungen aus dem Schnittaxiom" steht dann:

---

11. Siehe Behrends 2015, S. 37.
12. Siehe Behrends 2015, S. 38

> Wir werden sehen [...], daß die vertraute Vorstellung von der nach oben unbeschränkten Menge **N** tatsächlich zutrifft; der Beweis hierfür kann jedoch das Schnittaxiom nicht entbehren, mit anderen Worten: Er kann nicht mit alleiniger Benutzung der Körper- und Ordnungsaxiome erbracht werden (es gibt „nichtarchimedisch" angeordnete Körper, deren „natürliche Zahlen" – die n-gliedrigen Summen $1 + 1 + \cdots + 1$, 1 das Einselement des Körpers – alle unter einem festen Körperelement liegen; [...].)[13]

Zwar ist richtig, dass die Menge der natürlichen Zahlen in der Menge der reellen Zahlen nach oben unbeschränkt ist und dass es nichtarchimedisch angeordnete Körper gibt, aber die natürlichen Zahlen dürfen nicht mit den n-gliedrigen Summen $1 + 1 + \cdots + 1$ identifiziert werden, da n hier eine metasprachliche natürliche Zahl ist (entsprechend meiner oben angegebenen Vereinbarung würde ich hier also $\mathfrak{n}$ schreiben).

Ein anderes Beispiel für die Vermischung von Metasprache und Objektsprache ist die Definition der Partialsummen durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \cdots + a_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und eine gegebene Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Die rechte Seite stellt einen Term der Objektsprache dar, der nur für eine metasprachliche natürliche Zahl n (also eigentlich $\mathfrak{n}$) sinnvoll ist. Dies reicht zur Definition der Partialsummen nicht aus. Korrekt wäre die rekursive Definition

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1},$$

die aufgrund des (zu beweisenden) Rekursionssatzes eindeutig ist. Der Rekursionssatz fußt auf dem Satz der vollständigen Induktion, der wiederum aus der Definition von $\mathbb{N}$ als kleinster induktiver Teilmenge von $\mathbb{R}$ folgt.

Der Rekursionssatz kann für Funktionen (die auf Mengen definiert sind) oder allgemeiner für Operationen (die auf dem gesamten Universum definiert sind) formuliert werden. Die zweite Version setzt das Schema der Ersetzungsaxiome voraus und wird dann gebraucht, wenn Operationen rekursiv definiert werden sollen,

13. Siehe Heuser 2009, S. 71

zum Beispiel die n-fache Potenzmenge einer Menge A durch $\mathcal{P}^1(A) := \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}^{n+1}(A) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(A))$ für $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Die unterschlagenen Mengenaxiome

Da die übliche Analysis sich der Mengensprache bedient, enthalten viele Analysis-Lehrbücher oder -Vorlesungsskripte eine kurze Einführung in die (naive) Mengenlehre (siehe z. B. Behrends 2015, Deitmar 2014, Grieser 2014, Heuser 2009). Es wird dabei stets darauf geachtet, dass die Mengenlehre nicht als zur Analysis gehörig erscheint. Vielmehr scheint die Mengenlehre einer anderen Ebene anzugehören und ein selbstverständlicher Unterbau zu sein, der mit der axiomatischen Theorie nichts zu tun hat. Behrends vergleicht das Verhältnis von Analysis zur Mengenlehre mit dem Verhältnis dessen, was man in der Fahrschule über das Autofahren lernt, zum Studium von Kraftfahrzeugbau und Verkehrsrecht. Er schreibt:

> So ähnlich verhält es sich mit dem Stellenwert der Mengenlehre innerhalb der Analysis. Es kann hier nicht die Absicht sein, Sie in die Feinheiten des Gebiets einzuführen, dafür ist in späteren Semestern immer noch Zeit. Hier geht es nur um ein *erstes Kennenlernen*, insbesondere brauchen wir einige *Vokabeln*.

In der Tat braucht man für die Analysis nicht die Feinheiten der Mengenlehre (z. B. Ordinalzahltheorie oder fundierte Strukturen), aber wesentliche Grundsätze schon. Es ist schlechterdings unmöglich, axiomatische Analysis mit dem Vokabular der Mengenlehre zu machen, ohne Axiome, die den Umgang mit Mengen regeln. Warum sollte man die Kommutativität der Addition reeller Zahlen axiomatisch fordern müssen, aber die Möglichkeit, Vereinigungs- oder Potenzmengen zu bilden nicht? Man kann Mengenlehre auch nicht auf die Metasprachebene verbannen (als Hintergrundmengenlehre), wenn die Axiome der reellen Zahlen die Mengensprache verwenden. Man braucht die Mengenlehre als *Objektmengenlehre* innerhalb der Analysis.

Es erfordert im Grunde nur wenig Mehraufwand gegenüber der Vermittlung von Grundfertigkeiten im Umgang mit Mengen, dazu jeweils die axiomatische Grundlage anzugeben. Verzichtet man darauf, sollte man zumindest offen bekennen, dass zum Axiomensystem der Analysis noch Axiome der Mengenlehre gehören, die den naiven Umgang mit Mengen im vorgestellten Rahmen rechtfertigen, die aber aus didaktischen Gründen oder aus Gründen der Zeitersparnis (noch) nicht explizit behandelt werden.

Insgesamt werden für die Analysis die folgenden Axiome der ZFC-Mengenlehre benötigt:[14]

- Extensionalitätsaxiom
- Potenzmengenaxiom
- Axiom der Vereinigung
- Auswahlaxiom
- Schema der Ersetzungsaxiome

Das Paarmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome folgen aus den vorgenannten, werden aber oft in Einführungen in die axiomatische Mengenlehre (zum Beispiel Ebbinghaus 2003) gesondert angegeben, weil diese Axiome historisch betrachtet vor dem Schema der Ersetzungsaxiome formuliert worden sind und man mit ihnen über weite Strecken auch ohne dieses Schema auskommt. Wie oben erwähnt, wird das Schema der Ersetzungsaxiome zum Beispiel gebraucht, um den Rekursionssatz für Operationen zu beweisen.

Ein Existenzaxiom ist überflüssig, wenn die Existenz mindestens einer Menge durch andere Axiome sichergestellt wird, wie in ZFC durch das Unendlichkeitsaxiom. In der mengentheoretischen Axiomatisierung der reellen Zahlen braucht man ein Axiom, das die Existenz einer Menge fordert, die alle reellen Zahlen enthält. Das Unendlichkeitsaxiom ist dann überflüssig, weil man die Menge der natürlichen Zahlen (wie oben beschrieben) durch Aussonderung aus der Menge der reellen Zahlen gewinnt. Das Fundierungsaxiom aus ZFC wird für die Arithmetik der reellen Zahlen nicht gebraucht.

Die in der Analysis benötigten Mengenaxiome sind (in einer umgangssprachlichen Formulierung) auch für einen Anfänger nicht schwer zu verstehen (siehe Abschnitt 2.6). Sie schärfen vielmehr das Bewusstsein für das, was man in der Analysis (und der Mathematik überhaupt) mit Mengen tut. Ihre explizite Nennung unterstreicht ihren Vereinbarungscharakter. Das ist wichtig für ein Verständnis der Grundlagen der Mathematik, denn Mengenaxiome sind keine Selbstverständlichkeiten. Es erscheint mir unangemessen, auf der einen Seite die reellen Zahlen axiomatisch einzuführen und von den Studierenden die korrekte Anwendung der axiomatischen Methode zu erwarten, aber auf der anderen Seite erstens nicht streng zwischen Metasprache und Objektsprache zu unterscheiden und zweitens mit den Mengenaxiomen einen wesentlichen Teil des Axiomensystems unerwähnt zu lassen.

14. Siehe Bedürftig und Murawski 2012, S. 314f.

Eine (vielleicht beabsichtigte) Folge dieser Vorgehensweise ist, dass die sogenannte Standardtheorie (ungerechtfertigt) als ganz natürlich erscheint, während ebenso mögliche Nichtstandardtheorien unbeachtet bleiben. Unterscheidet man von Anfang an konsequent zwischen beiden Sprachebenen und bezieht die benötigte Mengenlehre ein, so führt dies in ganz natürlicher Weise zu einer (potentiell) reichhaltigeren Theorie. Es eröffnet die Möglichkeit einer Nichstandard-Analysis innerhalb der reellen Zahlen. Man braucht keine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, keine hyperreellen Zahlen, denn das Infinitesimale und alles, was daraus folgt, schlummert (potentiell) bereits unerkannt in $\mathbb{R}$.

2.5 Endliche Mengen

Die meisten Analysis-Lehrbücher definieren zwar die Begriffe *abzählbar* und *überabzählbar* (und zeigen mit dem Cantor-Argument die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$), würdigen aber dem Begriff *endlich* keiner Definition (Behrends ist hier eine Ausnahme). Dabei ist dieser Begriff weniger trivial, als es zunächst den Anschein hat. Auch hier ist es wieder wichtig, sauber zwischen den Sprachebenen zu unterscheiden.

Für die Objektsprache liegt folgende Definition nahe: Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, sodass M und $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ gleichmächtig sind, wobei die Gleichmächtigkeit zwischen zwei Mengen wie üblich über die Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen ihnen definiert ist. Die leere Menge ist von dieser Endlichkeitsdefinition eingeschlossen ($n = 0$).

Behrends gibt die gleiche Definition an und weist auch auf die unerwartete Schwierigkeit des Endlichkeitsbegriffs hin:

> Eine Menge M wird *endlich* genannt, wenn sie leer ist oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ (das ist die Abkürzung von $\{m \mid m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n\}$) gleichmächtig sind, wenn man also die Elemente aus M mit den Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Die Zahl n heißt die *Anzahl der Elemente von M*. Es gelten dann die folgenden Aussagen:
>
> - Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es keine echte Teilmenge von M gibt, die gleichmächtig zu M ist.
> - Teilmengen endlicher Mengen sind wieder endlich.
> - Die Vereinigung von zwei endlichen Mengen ist endlich.
> - Die Potenzmenge einer endlichen Menge ist endlich.

> Die *Beweise* sollen hier nicht geführt werden, da wir von diesen Ergebnissen keinen Gebrauch machen werden. (Wenn Sie es selbst versuchen, werden Sie feststellen, dass sie schwieriger sind, als man es bei diesen „offensichtlichen“ Tatsachen erwarten würde.)[15]

Beweise für diese und weitere „offensichtliche“ Tatsachen über endliche Mengen findet man zum Beispiel in Ebbinghaus 2003. Der erste Punkt ist die Äquivalenz von *endlich* und *Dedekind-endlich*; für den Beweis benötigt man in der Richtung „$\Leftarrow$“ das Auswahlaxiom. Die Richtung „$\Rightarrow$“ sowie die anderen Punkte in der Liste ergeben sich im Wesentlichen durch Induktionsbeweise. Schon die Wohldefiniertheit der Elementanzahl muss durch vollständige Induktion erst gezeigt werden.

Folgender Satz über endliche Mengen wird in der Analysis häufiger gebraucht (und wird ebenfalls durch vollständige Induktion nach der Elementanzahl bewiesen):

- Jede endliche nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält eine kleinste und eine größte Zahl.

2.6 Ein Axiomensystem der Analysis

In diesem Abschnitt wird ein Axiomensystem der Analysis unter Einbeziehung der benötigten Mengenaxiome vorgestellt.[16] Inhaltlich wird der Analysis hierdurch nichts hinzugefügt. Die hier angegebenen arithmetischen Axiome (Körperaxiome, Anordnungsaxiome) und das Vollständigkeitsaxiom findet man so (oder in äquivalenten Formulierungen) in jeder Analysis-Einführung. Die hier angegebenen Mengenaxiome findet man so (oder in äquivalenten Formulierungen) in jedem Lehrbuch zur axiomatischen Mengenlehre auf der Basis von ZFC. Der Unterschied zu gängigen Analysis-Einführungen besteht also lediglich darin, dass mit den Mengenaxiomen hier *explizit* formuliert wird, was ansonsten *implizit* vorausgesetzt wird. Alle Axiome werden dazu in einer einheitlichen Sprache formuliert, die dann zwischen Mengen und reellen Zahlen unterscheiden muss. Der Unterschied zu einer direkt auf ZFC aufsetzenden Analysis besteht darin, dass der mengentheoretische Aufbau des Zahlensystems und der Beweis der arithmetischen Axiome und des Vollständigkeitsaxioms entfallen kann. Diese axiomatische „Abkürzung“ entspricht der weithin geübten universitären Praxis.

15. Siehe Behrends 2015, S. 66.

16. Ich übernehme das Axiomensystem im Wesentlichen aus Bedürftig und Murawski 2012 (S. 314f), mit dem Unterschied, dass ich zusätzliche, definierte Symbole verwende und das Paarmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome ebenfalls aufführe. Dafür kann das Schema der Ersetzungsaxiome für funktionale (statt für schwach funktionale) Ausdrücke formuliert werden.

Für die folgenden Betrachtungen gehe ich von einer formalen Sprache der ersten Stufe über der Symbolmenge

$$\mathcal{S} = \{0, 1, +, \cdot, \mathrm{r}, \mathrm{m}, <, \in\}$$

aus, wobei 0 und 1 Konstantensymbole, $+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionssymbole, r, m einstellige Relationssymbole („ist eine reelle Zahl“ bzw. „ist eine Menge“) und $<, \in$ zweistellige Relationssymbole sind. Eine solche Sprache gestattet die übliche mengentheoretische Axiomatisierung der reellen Zahlen und der darauf aufbauenden Analysis. Ich nenne $\mathcal{S}$ auch die *Symbolmenge der (Standard-) Analysis* und die formale Sprache über $\mathcal{S}$ die *Sprache der (Standard-) Analysis.*

Zum allgemeinen Zeichenvorrat der Prädikatenlogik gehören noch Variablen, Klammern, das Gleichheitszeichen sowie die üblichen logischen Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ (nicht, und, oder, wenn-dann, genau-dann-wenn, für alle, es gibt).[17]

Zur Verkürzung und leichteren Lesbarkeit der Axiome verwende ich darüber hinaus noch folgende definierte Symbole:

$$\begin{aligned}
x \neq y &\quad :\Leftrightarrow \quad \neg\, y = x \\
x \notin y &\quad :\Leftrightarrow \quad \neg\, x \in y \\
x \leq y &\quad :\Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y \\
A \subseteq B &\quad :\Leftrightarrow \quad \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)
\end{aligned}$$

Außerdem gebrauche ich folgende Abkürzungen bei Quantoren:

$$\begin{aligned}
\forall^{\mathrm{r}} x\, \phi &\quad :\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\mathrm{r}(x) \Rightarrow \phi) \\
\forall^{\mathrm{m}} x\, \phi &\quad :\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\mathrm{m}(x) \Rightarrow \phi) \\
\exists^{\mathrm{r}} x\, \phi &\quad :\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\mathrm{r}(x) \wedge \phi) \\
\exists^{\mathrm{m}} x\, \phi &\quad :\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\mathrm{m}(x) \wedge \phi) \\
\exists^{=1} x\, \phi(x) &\quad :\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\phi(x) \wedge \forall y\, (\phi(y) \Rightarrow y = x))
\end{aligned}$$

Die Axiome der Analysis gliedern sich in Körperaxiome, Anordnungsaxiome, Mengenaxiome und das Vollständigkeitsaxiom.

17. In Logikbüchern werden in formalen Ausdrücken statt der in der mathematischen Praxis etablierten Symbole $=, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ manchmal abweichend $\equiv, \to, \leftrightarrow$ verwendet.

Körperaxiome

$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad \mathrm{r}(x+y) \tag{1}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad x+y=y+x \tag{2}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (x+y)+z=x+(y+z) \tag{3}$$
$$\mathrm{r}(0) \tag{4}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad x+0=x \tag{5}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad \exists^{\mathrm{r}} y \; x+y=0 \tag{6}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad \mathrm{r}(x \cdot y) \tag{7}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad x \cdot y=y \cdot x \tag{8}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z) \tag{9}$$
$$\mathrm{r}(1) \tag{10}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad x \cdot 1=x \tag{11}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \quad (x \neq 0 \Rightarrow \exists^{\mathrm{r}} y \; x \cdot y=1) \tag{12}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z \tag{13}$$
$$0 \neq 1 \tag{14}$$

Anordnungsaxiome

$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad (x \neq y \Rightarrow x<y \vee y<x) \tag{15}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \quad (x<y \Rightarrow \neg\, y<x) \tag{16}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (y<z \Rightarrow x+y<x+z) \tag{17}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (0<x \wedge y<z \Rightarrow x \cdot y<x \cdot z) \tag{18}$$
$$\forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \forall^{\mathrm{r}} z \quad (x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z) \tag{19}$$

Mengenaxiome

Das noch ausstehende Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen benutzt die Mengensprache. Daher werden zunächst die in Abschnitt 2.4 erwähnten Mengenaxiome, die in der Analysis benötigt werden, eingeschoben. Ich gebe sie jeweils in einer umgangssprachlichen und einer formalen Version an.

Extensionalitätsaxiom. Zwei Mengen, die die gleichen Elemente enthalten, sind gleich. Formal:

$$\forall^{\mathrm{m}} A\, \forall^{\mathrm{m}} B\, (\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B) \tag{20}$$

Existenzaxiom. Es gibt eine Menge, die genau alle reellen Zahlen enthält. Formal:

$$\exists^{\mathrm{m}} A\, \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow \mathrm{r}(x)) \tag{21}$$

Die Menge A ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Aussonderungsaxiom (Schema). Sei ϕ ein Ausdruck mit der freien Variablen x und optional weiteren Parametern $a_1, \ldots, a_n$. Dann gibt es für alle $a_1, \ldots, a_n$ und für alle Mengen A eine Menge B, die genau die Elemente $x \in A$ enthält, für die $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ gilt. Formal:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n\, \forall^{\mathrm{m}} A\, \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall x\, (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, a_1, \ldots, a_n)) \tag{22}$$

Die (ggf. von $a_1, \ldots, a_n$ abhängige) Menge B ist nach dem Extensionalitäsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit

$$\{x \in A \mid \phi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

bezeichnet.

Definition der leeren Menge. Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leer*. Nach dem Existenzaxiom und dem Aussonderungsaxiom gibt es eine leere Menge, zum Beispiel $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq x\}$. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind alle leeren Mengen gleich. Die eindeutig bestimmte leere Menge wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Paarmengenaxiom. Für alle x, y existiert eine Menge A, die genau x und y als Elemente enthält. Formal:

$$\forall x \forall y \exists^{\mathrm{m}} A\, (\forall z\, (z \in A \Leftrightarrow z = x \vee z = y)) \tag{23}$$

Die Menge A ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt, wird die Paarmenge von x und y genannt und mit $\{x, y\}$ bezeichnet.

Vereinigungsmengenaxiom. Zu jedem Mengensystem A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente von A enthält. Formal:

$$\forall A\,(\mathrm{Msys}(A) \Rightarrow \exists^{\mathrm{m}} B\,\forall x\,(x \in B \Leftrightarrow \exists Y\,(Y \in A \wedge x \in Y))) \tag{24}$$

mit

$$\mathrm{Msys}(A) \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{m}(A) \wedge \forall y\,(y \in A \Rightarrow \mathrm{m}(y)). \tag{25}$$

Die Menge B ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird die *Vereinigung* von A genannt und mit $\bigcup A$ bezeichnet.

Potenzmengenaxiom. Zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind. Formal:

$$\forall^{\mathrm{m}} A\,\exists^{\mathrm{m}} B\,\forall X\,(X \in B \Leftrightarrow X \subseteq A) \tag{26}$$

Die Menge B ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt, wird die *Potenzmenge* von A genannt und mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

Auswahlaxiom. Zu jedem paarweise disjunkten Mengensystem A mit $\emptyset \notin A$ gibt es eine Auswahlmenge B, die aus jedem der Elemente von A genau ein Element enthält. Formal:

$$\forall A\,\mathrm{Msys}(A) \wedge \mathrm{disjunkt}(A) \wedge \emptyset \notin A \Rightarrow \exists^{\mathrm{m}} B\,\mathrm{Auswahl}(B, A) \tag{27}$$

mit $\mathrm{Msys}(A)$ gemäß (25),

$$\begin{aligned}\mathrm{disjunkt}(A) \quad :\Leftrightarrow \quad & \forall X \forall Y \\ & (X \in A \wedge Y \in A \Rightarrow (X = Y \vee \neg\exists z\,(z \in X \wedge z \in Y)))\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Auswahl}(B, A) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall X\,(X \in A \Rightarrow \exists^{=1} y\,(y \in X \wedge y \in B))$$

Ersetzungsaxiom (Schema). Sei ϕ ein Ausdruck mit den freien Variablen x und y sowie optional weiteren Parametern $a_1, \ldots, a_n$. Dann gilt für alle $a_1, \ldots, a_n$: Wenn $\phi(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ funktional ist, dann gibt es zu jeder Menge A eine Menge

B, die genau die y mit $\phi(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ und $x \in A$ enthält. Formal:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \, (\forall x \exists^{=1} y \, \phi(x, y) \Rightarrow \forall^{\mathrm{m}} A \, \exists^{\mathrm{m}} B \, \forall x \, (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, y))) \tag{28}$$

Der Teilausdruck $\forall x \exists^{=1} y \, \phi(x, y)$ formalisiert darin die Aussage „$\phi(x, y)$ ist funktional", ordnet also jedem x genau ein y zu. Die in ϕ optional noch vorhandenen Parameter $a_1, \ldots, a_n$ werden hier zur Verkürzung der Ausdrücke in der Darstellung unterdrückt.

Ist $\phi(x, y)$ funktional, so ist die (ggf. von $a_1, \ldots, a_n$ abhängige) Menge B nach dem Extensionalitäsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit

$$\{y \mid x \in A \wedge \phi(x, y)\}$$

bezeichnet. Hat man zum funktionalen Ausdruck $\phi(x, y)$ ein Operationssymbol F eingeführt durch

$$\mathrm{F}(x) = y \quad :\Leftrightarrow \quad \phi(x, y),$$

so schreibt man für die Menge B auch

$$\{\mathrm{F}(x) \mid x \in A\}.$$

Auf der Basis der Mengenaxiome kann man die üblichen Mengenoperationen definieren und Rechenregeln dafür ableiten.

Vollständigkeitsaxiom

Ich formuliere das Vollständigkeitsaxiom nach Dedekind mittels Schnitten in $\mathbb{R}$. Dazu sei das einstellige Prädikat Schnitt(X) („X ist ein Schnitt in $\mathbb{R}$") definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Schnitt}(X) \quad :\Leftrightarrow \quad & X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \neq \emptyset \wedge X \neq \mathbb{R} \wedge \\ & \forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \, (x \in X \wedge y \notin X \Rightarrow x < y). \end{aligned}$$

Vollständigkeitsaxiom (Schnittaxiom). Jeder Schnitt in $\mathbb{R}$ wird durch eine reelle Zahl hervorgebracht. Formal:

$$\forall X (\mathrm{Schnitt}(X) \Rightarrow \exists^{\mathrm{r}} z \forall^{\mathrm{r}} x \forall^{\mathrm{r}} y \, (x \in X \wedge y \notin X \Rightarrow x \leq z \wedge z \leq y)) \tag{29}$$

Das Axiomensystem der Analysis ist damit komplett. Alle Definitionen und Sätze können wie gewohnt behandelt werden.

Bemerkung zum archimedischen Axiom. Wird die Vollständigkeit mittels Cauchy-Folgen oder Intervallschachtelungen formuliert, braucht man (wie bereits in Abschnitt 2.3 angemerkt) zusätzlich noch das archimedische Axiom. Bei dem hier gewählten Zugang über Schnitte kann die archimedische Anordnung als Satz gefolgert werden.[18]

Satz des Archimedes. Jede reelle Zahl wird von einer natürlichen Zahl übertroffen. Oder gleichbedeutend: Die Menge $\mathbb{N}$ ist (in $\mathbb{R}$) nach oben unbeschränkt. Formal:

$$\forall^{\mathrm{r}} x \exists n \, (n \in \mathbb{N} \wedge x < n).$$

2.7 Modelltheoretischer Exkurs

In der mathematischen Logik werden Terme und Ausdrücke einer formalen Sprache zunächst losgelöst von jeder Bedeutung, rein syntaktisch, als – nach bestimmten induktiven Kalkülen aufgebaute – Zeichenreihen über einem bestimmten Alphabet definiert.[19] Das Alphabet enthält neben allgemeinen Grundsymbolen (Gleichheitszeichen, Klammern, Variablen, logische Junktoren und Quantoren) optional sprachspezifische Symbole (Konstanten-, Funktions-, und Relationssymbole). Die Menge der sprachspezifischen Symbole bezeichnet man als die *Symbolmenge* der Sprache. Die Symbolmenge der Sprache der Standardanalysis ist die in Abschnitt 2.6 angegebene Menge $\mathcal{S}$.

Als spezielle Terme kann man *Einsensummenterme* so definieren:

- 1 ist ein Einsensummenterm.
- Ist τ ein Einsensummenterm, so ist auch $\tau + 1$ ein Einsensummenterm.

Der Zusammenhang mit den metasprachlichen natürlichen Zahlen wird durch folgende induktive Definition hergestellt ($\mathfrak{n}'$ sei darin der Nachfolger von $\mathfrak{n}$):

$$\begin{aligned} \mathrm{EST}(\mathfrak{1}) &:= 1 \\ \mathrm{EST}(\mathfrak{n}') &:= \mathrm{EST}(\mathfrak{n}) + 1 \end{aligned}$$

18. Siehe z. B. Heuser 2009, S. 73.
19. Siehe z. B. Ebbinghaus et al. 2007

EST ordnet also jeder metasprachlichen natürlichen Zahl $\mathfrak{n}$ einen Einsensummenterm mit $\mathfrak{n}$ Summanden zu.

$$\mathrm{EST}(\mathfrak{n}) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\mathfrak{n}\text{-mal}}.$$

Durch metasprachliche Induktion zeigt man, dass es umgekehrt zu jedem Einsensummenterm τ genau eine metasprachliche natürliche Zahl $\mathfrak{n}$ mit $\mathrm{EST}(\mathfrak{n}) = \tau$ gibt. Soweit sind die Überlegungen rein syntaktischer Natur und kommen mit dem potentiell Unendlichen aus.

Setzt man eine Hintergrundmengenlehre voraus, die aktual unendliche Mengen und die Ableitung des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes erlaubt (dies ist zum Beispiel in der ZFC-Mengenlehre der Fall[20]), sind modelltheoretische Betrachtungen möglich. Terme und Ausdrücke (genauer $\mathcal{S}$-Terme und $\mathcal{S}$-Ausdrücke) erhalten dann eine Bedeutung durch ihre *Interpretation* in *$\mathcal{S}$-Strukturen*, welche die Hintergrundmengenlehre bereitstellt. Eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{a})$ ist ein Paar, bestehend aus einer TRÄGERMENGE[21] $\mathcal{A}$ und einer ABBILDUNG $\mathfrak{a}$, die jedem Symbol aus $\mathcal{S}$ seine Interpretation zuordnet, genauer, jedem Konstantensymbol ein ELEMENT in $\mathcal{A}$, jedem $\mathfrak{n}$-stelligen Funktionssymbol eine $\mathfrak{n}$-stellige FUNKTION über $\mathcal{A}$ und jedem $\mathfrak{n}$-stelligen Relationssymbol eine $\mathfrak{n}$-stellige RELATION über $\mathcal{A}$. Die Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{S}$ in der Struktur $\mathfrak{A}$ werden häufig so bezeichnet, dass man den jeweiligen Symbolen die hochgestellte Bezeichnung der Struktur anfügt, etwa $1^{\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{a}(1)$ und $+^{\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{a}(+)$.

Induktiv wird die Interpretation auf alle Terme der Sprache fortgesetzt, zum Beispiel

$$(\sigma + \tau)^{\mathfrak{A}} := \sigma^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} \tau^{\mathfrak{A}}$$

für Terme σ und τ. Jeder variablenfreie Term (zum Beispiel jeder Einsensummenterm) erhält so eine Interpretation als ein ELEMENT von $\mathcal{A}$. Bei Termen mit Variablen hängt die Interpretation von der *Belegung* der Variablen mit ELEMENTEN aus $\mathcal{A}$ ab. Die Belegung wird in eckigen Klammern dem Term angehängt. Für eine Variable n und ein ELEMENT a aus $\mathcal{A}$ ist zum Beispiel

$$(n+1)^{\mathfrak{A}}[a] = n^{\mathfrak{A}}[a] +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}} = a +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}}$$

Ein Ausdruck ϕ erhält durch die Interpretation in $\mathfrak{A}$ eine strukturspezifische „Über-

20. Siehe Ebbinghaus et al. 2007, S. 118-122.

21. Ich wähle in diesem Abschnitt die Kapitälchenschrift, wenn ich mengentheoretische Begriffe wie MENGE, ELEMENT, ABBILDUNG, RELATION etc. im Sinne der Hintergrundmenge gebrauche.

setzung“ in eine in der Hintergrundmengenlehre gültige oder ungültige Aussage. Im ersten Fall schreibt man $\mathfrak{A} \models \phi$ („$\mathfrak{A}$ ist ein Modell von ϕ“), im zweiten Fall $\mathfrak{A} \not\models \phi$ („$\mathfrak{A}$ ist kein Modell von ϕ“). Enthält ein Ausdruck freie Variablen, so ist die Modelleigenschaft von der Belegung dieser Variablen abhängig. Wie bei Termen wird die Belegung in eckigen Klammern angehängt.

Genauer ist die Modellbeziehung induktiv über den Aufbau der Ausdrücke definiert. Ich gebe wieder nur Beispiele an. σ, τ sind darin beliebige Terme und ϕ, ψ beliebige Ausdrücke. „:gdw“ steht abkürzend für „definitionsgemäß genau dann, wenn“ und $\in^{\mathrm{H}}$ für „ist ELEMENT von“ (im Sinne der Hintergrundmengenlehre).

$$\mathfrak{A} \models \sigma \in \tau \quad \text{:gdw} \quad \sigma^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \tau^{\mathfrak{A}} \tag{30}$$

$$\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi \quad \text{:gdw} \quad \mathfrak{A} \models \phi \text{ und } \mathfrak{A} \models \phi \tag{31}$$

$$\mathfrak{A} \models \phi \Rightarrow \psi \quad \text{:gdw} \quad \text{wenn } \mathfrak{A} \models \phi, \text{ dann } \mathfrak{A} \models \phi \tag{32}$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x\, \phi(x) \quad \text{:gdw} \quad \text{für alle } a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A} \text{ gilt } \mathfrak{A} \models \phi(x)[a] \tag{33}$$

Die Bedeutung der Symbole aus $\mathcal{S}$ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ kann eine völlig andere sein als die gewohnte. Zum Beispiel muss für zwei ELEMENTE a, b in $\mathcal{A}$ mit $a \in^{\mathfrak{A}} b$ nicht (im Sinne der Hintergrundmengenlehre) a ein ELEMENT von b (also $a \in^{\mathrm{H}} b$)sein.

Ist Φ eine MENGE von Ausdrücken und gilt $\mathfrak{A} \models \phi$ für alle ϕ in Φ, so heißt $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ (kurz: $\mathfrak{A} \models \Phi$). Da die Interpretation der logischen Symbole der üblichen (metasprachlichen) Bedeutung folgt, ist $\mathfrak{A}$ dann auch ein Modell jedes aus Φ ableitbaren Ausdrucks.

Nach dem Gödel'schen Vollständigkeitssatz hat jedes widerspruchsfreie (in einer Sprache der ersten Stufe formulierte) Axiomensystem ein Modell (sogar ein abzählbares Modell).[22]

Φ sei das Axiomensystem der Analysis aus Abschnitt 2.6. Unter der Prämisse, dass Φ widerspruchsfrei ist[23], gibt es also ein Modell $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{a})$ von Φ. Aufgrund der Modelleigenschaft von $\mathfrak{A}$ gibt es zu jeder in Φ definierbaren Konstante c ein eindeutig bestimmtes ELEMENT $\mathrm{c}^{\mathfrak{A}}$ in $\mathcal{A}$, sodass für alle $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models (x = \mathrm{c})[a] \quad \text{gdw} \quad a = \mathrm{c}^{\mathfrak{A}}. \tag{34}$$

22. Die ABZÄHLBARKEIT eines Modells steht nicht im Widerspruch zur Ableitbarkeit der Existenz einer überabzählbaren Menge U, deren Elemente alle in $\mathcal{A}$ interpretiert werden. Die Überabzählbarkeit von U bedeutet ja nur, dass es kein $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ gibt, das die Interpretation einer bijektiven Abbildung von U nach $\mathbb{N}$ ist. Dies ist das sogenannte Skolem-Paradoxon.

23. Φ ist konsistent relativ zu ZFC, denn man kann innerhalb von ZFC die über $\in$ hinausgehenden Symbole aus $\mathcal{S}$ auf die übliche Weise definieren. Die Axiome aus Φ sind dann in ZFC beweisbar, und man erhält so zu jedem Modell von ZFC ein Modell von Φ.

Ebenso gibt es zu jedem in Φ definierbaren $\mathfrak{n}$-stelligen Prädikat P eine eindeutig bestimmte $\mathfrak{n}$-stellige RELATION $\mathrm{P}^{\mathfrak{A}}$ über $\mathcal{A}$, sodass für alle $a_{\mathfrak{1}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}} \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{P}(x_{\mathfrak{1}}, \ldots, x_{\mathfrak{n}})[a_{\mathfrak{1}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}}] \quad \text{gdw} \quad \mathrm{P}^{\mathfrak{A}}(a_{\mathfrak{1}}, \ldots, a_{\mathfrak{n}}). \tag{35}$$

Mit den definierenden Ausdrücken

$$\begin{aligned} X = \mathbb{R} \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{m}(X) \wedge \forall x\,(x \in X \Leftrightarrow \mathrm{r}(x)) \\ X \subseteq Y \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in X \Rightarrow x \in Y) \\ \mathrm{ind}(X) \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{m}(X) \wedge 1 \in X \wedge \forall x\,(x \in X \Rightarrow x + 1 \in X) \\ X = \mathbb{N} \quad &:\Leftrightarrow \quad \mathrm{ind}(X) \wedge \forall Y\,(\mathrm{ind}(Y) \Rightarrow X \subseteq Y) \end{aligned}$$

erhält man so Interpretationen $\mathbb{R}^{\mathfrak{A}}, \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$ der Konstanten $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ sowie Interpretationen $\mathrm{ind}^{\mathfrak{A}}, \subseteq^{\mathfrak{A}}$ der ein- bzw. zweistelligen Prädikate $\mathrm{ind}, \subseteq$.

In jedem Modell $\mathfrak{A}$ der Analysis hat jeder Einsensummenterm τ genau eine Interpretation $\tau^{\mathfrak{A}}$. Durch metasprachliche Induktion zeigt man: Für zwei Einsensummenterme σ und τ sind die Interpretationen $\sigma^{\mathfrak{A}}$ und $\tau^{\mathfrak{A}}$ genau dann gleich, wenn σ und τ gleich viele Summanden haben. $\mathbb{N}^{\mathrm{H}}$ bezeichne die MENGE der metasprachlichen natürlichen Zahlen. Die metasprachlich gebildete MENGE

$$\mathcal{N} := \{\tau^{\mathfrak{A}} \mid \tau \text{ ist ein Einsensummenterm}\} = \{\mathrm{EST}(\mathfrak{n})^{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{n} \in^{\mathrm{H}} \mathbb{N}^{\mathrm{H}}\}$$

ist eine TEILMENGE von $\mathcal{A}$. Sie ist ein Konstrukt der Hintergrundmengenlehre und steht in der Objektsprache der Analysis, also theorie-*intern* nicht zur Verfügung. Daher kann sie nicht zur Definition der Menge $\mathbb{N}$ innerhalb der Analysis dienen. Man kann aber die MENGE $\mathcal{N}$ in der Hintergrundmengenlehre (also theorie-*extern*) mit der MENGE

$$\mathcal{N}' := \{a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A} \mid a \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}\}$$

vergleichen. $\mathcal{N}$ enthält genau die interpretierten Einsensummenterme (und damit umkehrbar eindeutig Entsprechungen der metasprachlichen natürlichen Zahlen). $\mathcal{N}'$ enthält die objektsprachlichen natürlichen Zahlen, aber *extern* betrachtet (als ELEMENTE der TRÄGERMENGE des Modells). Es gilt folgender

Metasprachlicher Satz 1 *Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ (also ein Modell der Standardanalysis). Dann gilt: $\mathcal{N}$ ist eine* TEILMENGE *von $\mathcal{N}'$.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{A} \models \mathrm{ind}(\mathbb{N})$ gilt $1^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$ und für alle $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$: wenn $a \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$, dann $a +^{\mathfrak{A}} 1^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$. Mittels metasprachlicher Induktion folgt daraus für jeden Einsensummenterm τ: $\tau^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \mathbb{N}^{\mathfrak{A}}$. Also ist $\mathcal{N}$ eine TEILMENGE von $\mathcal{N}'$, qed.

Die Gleichheit von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ gilt im Allgemeinen nicht. Zwar gilt für alle $a \in^{\mathrm{H}} \mathcal{A}$ mit $\mathrm{ind}^{\mathfrak{A}}(a)$ auch $\mathbb{N}^{\mathfrak{A}} \subseteq^{\mathfrak{A}} a$, es ist aber nicht gesagt, dass $\mathcal{N}$ überhaupt ein ELEMENT von $\mathcal{A}$ ist. Daher ist der Schluss auf $\mathcal{N}$ nicht anwendbar.

In der Standardanalysis kann also nicht behauptet werden, dass $\mathbb{N}$ gerade die Einsensummen $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ enthält. Es könnte in $\mathbb{N}$ unerreichbare Zahlen geben, die nicht durch fortgesetzte Aufsummierung von Einsen erreicht werden. Dies wird sich in Abschnitt 3 bestätigen.

2.8 Welches sind die richtigen natürlichen Zahlen?

Die Notwendigkeit, zwischen den natürlichen Zahlen der verschiedenen Sprachebenen zu unterscheiden, mag zu der Frage verleiten, welches denn nun die „richtigen" natürlichen Zahlen sind. Allerdings verlassen wir mit einer solchen Frage den Zuständigkeitsbereich der Mathematik, zumindest der Mathematik, wie sie heute verstanden wird.

Die moderne, formalistisch geprägte Mathematik gibt keine ontologischen Antworten. Behrends weist in den Vorbemerkungen seines Analysis-Lehrbuchs darauf hin,

> [...] dass Mathematik nicht untersucht, was ist, sondern was sich folgern lässt.[24]

Mathematische Antworten sind somit immer an den axiomatischen Rahmen gebunden, in dem sie gegeben werden. Wenn in der Mathematik etwas „ist", dann deshalb, weil das vorausgesetzte Axiomensystem konsistent ist (bzw. die Konsistenz angenommen wird) oder die fragliche Existenz explizit in den Axiomen postuliert wird oder sich aus den Axiomen folgern lässt. Es ist eine *theoretische* Existenz. Die Dinge, von denen die Axiome handeln (und deren Existenz angenommen wird), werden nur *implizit* durch die Axiome definiert. Über das „Wesen" der Dinge schweigt sich die Mathematik aus.

Was wir von den natürlichen Zahlen in der Mathematik erwarten, wird seit Peano und Dedekind durch die Peano-Dedekind'schen Axiome – meist kurz nur *Peano-Axiome* genannt – festgelegt. Sie charakterisieren die natürlichen Zahlen, bis auf Isomorphie, eindeutig, sind aber, wegen des Induktionsaxioms nur in der Prädikatenlogik der zweiten Stufe formulierbar.[25] Mit dem Konstantensymbol 0, dem

24. Siehe Behrends 2015, S. 5.
25. Siehe Ebbinghaus et al. 2007, S. 52f.

einstelligen Funktionssymbol σ und der Prädikatsvariablen X lauten die Axiome in moderner Notation so:

(P1) $\forall x \, \neg \sigma x = 0$

(P2) $\forall x \forall y \, (\sigma x = \sigma y \Rightarrow x = y)$

(P3) $\forall X (X0 \wedge \forall x \, (Xx \Rightarrow X\sigma x) \Rightarrow \forall y \, Xy)$

Die Modelle von (P1) bis (P3) sind gerade die *Peano-Strukturen*, also die Strukturen mit einer Trägermenge A und einer auf A definierten Funktion ν (die Interpretation von σ) und einem Element a aus A (der Interpretation von 0), sodass gilt:

(P1') $\nu \colon A \overset{\text{inj}}{\to} A$

(P2') $a \notin \text{Bild}(\nu)$

(P3') $\forall B (B \subseteq A \wedge a \in B \wedge \forall x \, (x \in B \Rightarrow \nu(x) \in B) \Rightarrow B = A)$

Nach dem Satz von Dedekind sind alle Peano-Strukturen isomorph. (P1') bis (P3') sind die mengentheoretische Version der Peano-Axiome, auf die sich Forster beruft, wenn er die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ als die Menge der richtigen natürlichen Zahlen identifiziert. Diese Menge $\mathbb{N}_0$ ist mit $a := 0$ und $\nu(x) := x + 1$ eine Peano-Struktur gemäß (P1') bis (P3').

Schließen die Peano-Axiome und der Satz von Dedekind die Existenz unerreichbarer Zahlen aus? Nein. Wie schon in Abschnitt 2.3 angedeutet, ist nicht auszuschließen, dass $\mathbb{N}_0$ – und damit alle Peano-Strukturen – unerreichbare Elemente enthalten. Dies ist keine Besonderheit des hier zu Grunde gelegten Axiomensystems Φ, sondern bedingt durch die Unterscheidung zwischen Metasprache und Objektsprache.

In ZFC, was normalerweise als Axiomensystem für die Hintergrundmengenlehre angenommen wird, wird eine Menge N induktiv genannt, wenn

1. $\emptyset \in N$,
2. $\forall x (x \in N \Rightarrow x \cup \{x\} \in N)$.

Das Unendlichkeitsaxiom von ZFC postuliert die Existenz einer induktiven Menge, und ω wird dann als (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Menge definiert. Mit $a := \emptyset$ und $\nu(x) := x \cup \{x\}$ folgt, dass ω eine Peano-Struktur gemäß (P1') bis (P3') ist. Daher können die Elemente von ω als die natürlichen Zahlen in ZFC aufgefasst werden. Zu jeder metasprachlichen natürlichen Zahl $\mathfrak{n}$ hat man (durch $\mathfrak{n}$-fache Anwendung von ν) ein Element $\nu^{\mathfrak{n}}(0)$ aus ω. Die Überlegungen aus den Abschnitten 2.3 und 2.7 gelten dann analog. Die Menge aller $\nu^{\mathfrak{n}}(0)$ kann theorie-intern nicht gebildet werden. Die metasprachlichen und die objektsprachlichen, *theoretischen* natürlichen Zahlen fallen auseinander. Die Existenz unerreichbarer Zahlen ist nicht ausgeschlossen.

Über die theoretischen natürlichen Zahlen (welcher Theorie auch immer) kann nur das gesagt werden, was aus den Axiomen ableitbar ist. Insbesondere kann nicht angenommen werden, dass eine Aussage über *alle* theoretischen natürlichen Zahlen in einem absoluten, apriorischen Sinne wahr oder falsch sein muss, weil nicht klar ist, was „alle" bedeutet. Es hängt von der darunter liegenden Mengenlehre ab, die die Peano-Strukturen bereitstellt und die unterschiedlichste Modelle haben kann. Daher fällt es schwer, theoretische natürliche Zahlen als die „richtigen" (in einem absoluten Sinne) anzuerkennen.

Es bleibt die „naive" Antwort: Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen, die wir zum Zählen benutzen, also 1, 2, 3, ... oder, noch elementarer $|, ||, |||, \ldots$. Diese Zahlen sind *potentiell* unendlich. Über sie als Gesamtheit sprechen zu wollen, transzendiert den naiven Zähl-Ansatz und führt zu theoretischen natürlichen Zahlen, welche der Mengenlehre als Modell-Lieferant bedürfen.

Sind also die naiven, nur potentiell unendlichen natürlichen Zahlen die *richtigen* natürlichen Zahlen? Dafür spricht, dass sich hier die Kluft zwischen Metasprache und Objektsprache nicht auftut, denn der Anspruch, über aktual unendliche Gesamtheiten zu sprechen, wird gar nicht erhoben. Einen solchen Schluss wird freilich nur derjenige ziehen können, der nicht einem Realismus Gödel'scher Prägung anhängt.

Für Gödel existierten mathematische Gegenstände, wie die der Mengenlehre, *objektiv.* Sie waren für ihn *real* (in einem immateriellen und aktual unendlichen mathematischen Universum). Zumindest hielt Gödel den Glauben an ihre Existenz für genauso legitim, wie den Glauben an die Existenz physischer Körper. In *Russel's mathematical logic* sagt er über Klassen (classes) und Begriffe (concepts):

> Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, namely, classes as "pluralities of things" or as structures consisting of a plurality of things and concepts as the properties and relations of things existing independently of our definitions and constructions.
>
> It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory systems of mathematics as physical bodies

> are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the "data", i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions.[26]

Für die mathematische Praxis sind ontologische Fragen wenig relevant. Wir betreiben Mathematik üblicherweise auf dem Boden der Mengenlehre und verwenden dabei die *theoretischen* natürlichen Zahlen, welche die Mengenlehre (über die Peano-Strukturen) bereithält. Dies können wir tun, unabhängig davon, ob das Mengenuniversum real ist oder fiktiv. Wir müssen uns aber dann damit abfinden, dass die Existenz unerreichbarer natürlicher Zahlen nicht ausgeschlossen ist. Allerdings können wir die Existenz solcher Zahlen (ohne weitere Annahmen) auch nicht beweisen.

3 Eine Chance für Nichtstandard

In der Analysis (inklusive der Mengenaxiome) ist folgender Satz beweisbar: Jeder vollständige archimedisch angeordnete Körper ist isomorph zu $\mathbb{R}$.[27] Aus der archimedischen Anordnung folgt, dass die Menge der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dass also jede reelle Zahl von einer natürlichen Zahl übertroffen wird. Daher mag es „standard-geschulte" Mathematiker überraschen, dass es trotz der archimedischen Anordnung infinite und infinitesimale Zahlen in $\mathbb{R}$ geben kann. Die Möglichkeit der Existenz solcher Zahlen ist einfach eine konsequente Fortsetzung der vorangegangenen Überlegungen zu den natürlichen Zahlen. Zwar muss eine infinite Zahl größer sein als $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ (allgemein als jede Einsensumme) und eine infinitesimale Zahl kleiner als der Kehrwert jeder Einsensumme. Aber eine infinite Zahl muss nicht größer als *jede* natürliche Zahl sein und eine infinitesimale Zahl nicht kleiner als der Kehrwert *jeder* natürlichen Zahl. Gibt es unerreichbare Zahlen in $\mathbb{N}$, so ist damit auch die Möglichkeit infiniter und infinitesimaler Zahlen in $\mathbb{R}$ gegeben (unter Wahrung der archimedischen Anordnung).

Beachtet man den Unterschied zwischen metasprachlichen und objektsprachlichen natürlichen Zahlen, besteht kein Grund anzunehmen, dass die Menge $\mathbb{N}$ ausschließlich Zahlen enthält, die durch Einsensummenterme dargestellt werden. Vielmehr könnte es unerreichbare Zahlen in $\mathbb{N}$ geben, die größer als jede Einsensumme sind, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird. Alles, was man dazu braucht, ist ein neues, (im Allgemeinen) nicht mengenbildendes Prädikat und zusätzliche Axiome.

26. Siehe Gödel 1944, enthalten in Schilpp 1944, S. 137
27. Siehe z. B. Ebbinghaus et al. 1992, S. 42

Jetzt wird deutlich, dass der in der Analysis bewiesene Satz der vollständigen Induktion stärker ist als eine metasprachliche Induktion über Einsensummenterme. Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche die 1 enthält und mit jedem n auch $n+1$, ist mit $\mathbb{N}$ identisch, enthält also auch die (möglicherweise existierenden) unerreichbaren Zahlen.

Wie kann man in der Objektsprache über unerreichbare Zahlen sprechen? Schließlich steht in der Objektsprache ein Prädikat „durch Einsensummen darstellbar" nicht zur Verfügung und damit auch nicht die Prädikate „erreichbar" oder „unerreichbar". Man kann aber ein neues Basisprädikat „standard" in die Objektsprache einführen, das gewissermaßen für das metasprachliche „erreichbar" einspringt. Es ist damit zwar nicht möglich, die Standardzahlen unmittelbar mit den erreichbaren Zahlen zu identifizieren, denn *standard* ist dann ein objektsprachlicher und *erreichbar* ein metasprachlicher Begriff. Man kann aber durch geeignete Axiome dafür sorgen, dass alle erreichbaren Zahlen Standardzahlen und damit alle Nichtstandardzahlen unerreichbar sind.

Den Axiomen der Standardanalysis (inklusive der benötigten Mengenaxiome) werden in diesem Abschnitt drei weitere Axiomenschemata hinzugefügt, die den Umgang mit dem neuen Prädikat „standard" regeln, und zwar die Axiomenschemata I, S und T der sogenannten *Internen Mengenlehre* (im Original *Internal Set Theory*) von Edward Nelson.[28] Die so erweiterte Analysis nenne ich daher im Folgenden *IST-Analysis.*

Da die bisherigen Axiome nicht verändert werden, bleiben alle Definitionen und Sätze der Standardanalysis auch in der IST-Analysis gültig. $\mathbb{N}$ wird, wie bisher, als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert. Es gilt weiterhin der Satz der vollständigen Induktion. $\mathbb{R}$ ist weiterhin archimedisch angeordnet, und alle vollständigen archimedisch angeordneten Körper sind isomorph zu $\mathbb{R}$. Es werden aber durch die neuen Axiome gegenüber der Standardanalysis neue Definitionen möglich und neue Sätze beweisbar. Zum Beispiel wird es in der IST-Analysis in $\mathbb{R}$ infinite und infinitesimale Zahlen geben, mit denen man den Grenzwertformalismus vollständig vermeiden kann.

3.1 Erweiterung der Sprache

Die formale Sprache der Analysis wird erweitert um das neue einstellige Relationssymbol s (für das undefinierte Basisprädikat „standard"). Ein beliebiges Objekt

28. Erstmals vorgestellt 1977 (siehe E. Nelson 1977).

x des Universums der IST-Analysis ist also entweder standard ($\mathrm{s}(x)$) oder nicht standard ($\neg\mathrm{s}(x)$).

Zur Generalisierung bzw. Partikularisierung über alle Standardobjekte werden folgende Abkürzungen vereinbart:

$$\begin{aligned} \forall^{\mathrm{s}} x\, \phi &\quad :\Leftrightarrow \quad \forall x\, (\mathrm{s}(x) \Rightarrow \phi) \\ \exists^{\mathrm{s}} x\, \phi &\quad :\Leftrightarrow \quad \exists x\, (\mathrm{s}(x) \wedge \phi) \end{aligned}$$

Ich verwende gelegentlich auch die Kombinationen mit den Prädikaten m bzw. r:

- $\forall^{\mathrm{sm}}$ („Für alle Standardmengen")
- $\forall^{\mathrm{sr}}$ („Für alle reellen Standardzahlen")
- $\exists^{\mathrm{sm}}$ („Es gibt eine Standardmenge")
- $\exists^{\mathrm{sr}}$ („Es gibt eine reelle Standardzahl")

Zum Beispiel steht der Ausdruck $\forall^{\mathrm{sm}} A\, \phi$ abkürzend für

$$\forall A\, (\mathrm{s}(A) \wedge \mathrm{m}(A) \Rightarrow \phi)$$

und der Ausdruck $\exists^{\mathrm{sr}} x\, \phi$ abkürzend für

$$\exists x\, (\mathrm{s}(x) \wedge \mathrm{r}(x) \wedge \phi).$$

Metasprachliche Definition 1 *Ein Ausdruck heißt* intern*, wenn er das Prädikat* s *weder direkt noch indirekt enthält. Alle anderen Ausdrücke heißen* extern*.*

Wenn die neue Theorie Nichtstandardobjekte enthalten, aber gegenüber der Standardtheorie konservativ sein soll, muss das neue Prädikat s für die Standardtheorie gewissermaßen unsichtbar sein. Das heißt, s darf in den aus der Standardtheorie übernommenen Axiomen nicht vorkommen. Von dieser Bedingung sind die Axiomenschemata der Aussonderung und der Ersetzung betroffen. Es wird also in der neuen Theorie im Allgemeinen nicht möglich sein, zu einer vorgegebenen Menge A Mengen der Art

$$\{x \in A \mid \phi(x)\}$$

oder

$$\{y \mid x \in A \wedge \psi(x, y)\}$$

zu bilden, wenn ϕ ein externer Ausdruck bzw. ψ ein externer funktionaler Ausdruck ist. Die Axiomenschemata gelten (wie in der Standardtheorie) nur für interne Ausdrücke. Externe Ausdrücke sind im Allgemeinen *nicht mengenbildend*.

Es mag auf den ersten Blick unbefriedigend erscheinen, dass ein so plausibles Axiom wie das der Aussonderung nicht mehr für alle Prädikate gelten soll, aber dies ist gerade essentiell für die angestrebte Erweiterung der Theorie. Man vergleiche die Situation mit der Zulassung aktual unendlicher Mengen Ende des 19. Jahrhunderts. Um nicht unmittelbar zu Widersprüchen zu kommen, musste man das plausible euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als sein Teil“ aufgeben.

Nun geht es in der Analysis nicht vornehmlich um natürliche, sondern um reelle Zahlen und um Mengen. Daher darf die Unterscheidung von standard und nichtstandard nicht auf natürliche Zahlen beschränkt bleiben. Man wird zum Beispiel erwarten, dass $\frac{1}{n}$ und $\sqrt[n]{2}$ reelle Standardzahlen und $\{n\}$ und das Intervall $[0, n]$ Standardmengen sind, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Standardzahl ist, aber reelle Nichtstandardzahlen bzw. Nichtstandardmengen, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Nichtstandardzahl ist. Allgemein sind alle Objekte des Universums entweder standard oder nicht standard.

Mittels des neuen Prädikats s lassen sich folgende für die Analysis wichtige externe Prädikate definieren:

Definition 1

$$\begin{aligned}
x \approx 0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall^{\mathrm{sr}} y\,(y > 0 \Rightarrow |x| < y),\\
x \approx y \quad &:\Leftrightarrow \quad |x - y| \approx 0,\\
x \textit{ finit} \quad &:\Leftrightarrow \quad \exists^{\mathrm{sr}} y\,|x| < y,\\
x \gg 1 \quad &:\Leftrightarrow \quad x > 1 \wedge \neg(x \textit{ finit}).
\end{aligned}$$

$x \approx 0$ *wird gelesen als „x ist infinitesimal“,* $x \approx y$ *als „x ist infinitesimal benachbart zu y“ und* $x \gg 1$ *als „x ist infinit“.*

$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}$.

3.2 Erweiterung des Axiomensystems

Das Axiomensystem Φ der Standardanalysis aus Abschnitt 2.6 wird beibehalten und ergänzt um drei Axiomenschemata, die mit I, S und T abgekürzt werden (für Idealisierung, Standardisierung bzw. Transfer).

Das Transferaxiom T

Ein *Standardausdruck* sei ein interner Ausdruck, der eventuell noch Standardparameter (zum Beispiel Konstanten) enthält.

Das Transferaxiom T besagt: Ist ϕ ein Standardausdruck mit der einzigen freien Variablen x, dann gilt ϕ für alle x genau dann, wenn ϕ für alle standard x gilt. Die Richtung von links nach rechts ist dabei trivial.

Eine äquivalente Umformulierung T' lautet: Ist ϕ ein Standardausdruck mit der einzigen freien Variablen x, dann gilt ϕ für mindestens ein x genau dann, wenn ϕ für mindestens ein standard x gilt. In dieser Variante ist die Richtung von rechts nach links trivial.

Was macht die umgekehrte Richtung plausibel? Es ist die Absicht, dass die neuen Axiome die Standardtheorie erweitern, aber in ihrem Bestand nicht verändern sollen. Wenn etwas in der Standardtheorie eindeutig definierbar ist (zum Beispiel die Zahl π, die Exponentialfunktion, die Menge $\mathbb{N}$ oder deren Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$), dann ist es nach T' ein Standardobjekt. Vereinfacht gesagt: Standarddefinitionen führen zu Standardobjekten.

Insbesondere sind für beliebige Standardmengen A und B auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, B^A, $\{A\}$ und $\mathcal{P}(A)$ Standardmengen.

Die formalisierte Fassung des Transferaxioms ist

Axiom 1 (Transferaxiom T) *Das Axiomenschema enthält für jeden internen Ausdruck $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ das Axiom*

$$\forall^{\mathrm{s}} a_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} a_n \quad (\forall^{\mathrm{s}} x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \forall x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n)). \tag{36}$$

In der äquivalenten Variante T' lautet der formalisierte Ausdruck

$$\forall^{\mathrm{s}} a_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} a_n \quad (\exists x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \exists^{\mathrm{s}} x\, \phi(x, a_1, \ldots, a_n)). \tag{37}$$

Als unmittelbare Folgerung erhält man

Satz 1 *Für alle Standardmengen A, B gilt*

$$\forall^{\mathrm{s}} x\, (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subseteq B \tag{38}$$

$$\forall^{\mathrm{s}} x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B \tag{39}$$

Um die Inklusion oder die Gleichheit von Standardmengen zu zeigen, reicht es also, nur die Standardelemente der Mengen zu betrachten. Insbesondere sind zwei Standardmengen genau dann gleich, wenn sie dieselben Standardelemente enthalten.

Weitere Folgerungen aus T bzw. T' sind:

- Alle in der Standardanalysis definierbaren Objekte sind in der IST-Analysis Standardobjekte.
- Standardfunktionen haben für Standardargumente Standardfunktionswerte.

Das Idealisierungsaxiom I

Das Transferaxiom macht zwar Aussagen über Nichtstandardobjekte, aber es garantiert nicht, dass es überhaupt Nichtstandardobjekte gibt. Um die Existenz von Nichtstandardobjekten zu sichern, braucht man ein weiteres Axiom, das Idealisierungsaxiom I.

Die Grundidee von I ist eine Verallgemeinerung des Anspruchs, dass es jenseits der beliebig großen natürlichen Standardzahlen noch unendlich große, metasprachlich unerreichbare Nichtstandardzahlen geben soll.

Dass es beliebig große natürliche Standardzahlen gibt, kann man so ausdrücken: Zu jeder endlichen Menge E von natürlichen Standardzahlen, gibt es eine natürliche Standardzahl, die größer als jedes Element von E ist.

In dieser Formulierung lässt sich der Nichtstandard-Anspruch auf beliebige zweistellige Relationen verallgemeinern und damit das potentielle Anwendungsspektrum von Nichtstandard-Methoden sehr weit ausdehnen.

Für eine zweistellige Relation $\phi(x,y)$ führe man die Sprechweise „x dominiert y (im Sinne von ϕ)“ ein (man denke etwa an Relationen wie $y < x$ oder $y \in x$). Dann lässt sich der Nichtstandard-Anspruch so formulieren: Wenn es zu jeder endlichen Menge E von Standardobjekten ein Standardobjekt gibt, das jedes Element von E dominiert, dann gibt es ein Objekt, das *alle* Standardobjekte dominiert. Diese Forderung bezeichne ich vorläufig als Axiom I1.

Wie bisher bedeutet „A ist endlich“, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass A und $\mathbb{N}_{\leq n} := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ gleichmächtig sind. Was passiert nun, wenn n eine Nichtstandardzahl ist? Es erscheint zunächst wie ein nichtstandard-spezifisches Paradoxon, dass die *endliche* Menge $\mathbb{N}_{\leq n}$ die (zumindest potentiell) *unendlich* vielen erreichbaren Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ enthalten kann. Aber diese paradoxe Möglichkeit gibt es in der Standardanalysis auch. Die Standardanalysis „sieht“ sie bloß nicht, weil sie (mangels des Prädikats s) „blind“ für die Unterscheidung von Standardzahlen und (unerreichbaren) Nichtstandardzahlen ist.

Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind unendlich, und sie sind Standardmengen, da sie sich durch interne Ausdrücke definieren lassen. Andererseits enthalten sie nach dem vorläufigen Axiom I1 auch Nichtstandardelemente. Standardmengen können also Nichtstandardelemente enthalten. Von der endlichen Menge $\mathbb{N}_{\leq n}$ erwarten wir dagegen, dass sie genau dann standard ist, wenn alle ihre Elemente standard sind. In Verallgemeinerung dieser Erwartung erscheint folgende Festlegung plausibel, die ich als vorläufiges Axiom I2 bezeichne: Eine Menge ist genau dann eine endliche Standardmenge, wenn alle ihre Elemente standard sind.

Das Axiom I wird nun gerade so formuliert, dass aus ihm die beiden vorläufigen Axiome I1 und I2 folgen.

Axiom 2 (Idealisierungsaxiom I) *Das Axiomenschema enthält für jeden internen Ausdruck $\phi(x, y)$ mit den freien Variablen x und y (und möglicherweise weiteren freien Variablen) das Axiom*

$$(\forall^{\mathrm{sm}} A\,(A \text{ endlich } \Rightarrow \exists x \forall y\,(y \in A \Rightarrow \phi(x, y)))) \Leftrightarrow \exists x \forall^{\mathrm{s}} y\, \phi(x, y)$$

Umgangssprachlich ausgedrückt heißt das, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für jede endliche Standardmenge A gibt es ein x, das alle $y \in A$ dominiert.
2. Es gibt ein x, das alle standard y dominiert.

Für die meisten Anwendungen von I ist die Richtung von 1. nach 2. relevant. Die umgekehrte Richtung wird zum Beweis des vorläufigen Axioms I2 gebraucht (siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 437).

Einige wichtige Konsequenzen von I sind:

Satz 2 *Es gibt eine endliche Standardmenge, die alle Standardobjekte enthält.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 435.

Satz 3 *Zu jeder Menge A gibt es eine endliche Teilmenge, die alle Standardelemente von A enthält.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 435.

Satz 4 *Jede unendliche Menge enthält Nichtstandardobjekte.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 436.

Insbesondere enthalten die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ Nichtstandardzahlen. Da alle erreichbaren Zahlen in $\mathbb{N}$ nach Axiom T' Standardzahlen sind, enthält $\mathbb{N}$ (metasprachlich) unerreichbare Zahlen, die nicht durch Einsensummenterme darstellbar sind. Dies ist auch in der Standardanalysis nicht ausgeschlossen, nur nicht beweisbar.

Die natürlichen Nichtstandardzahlen sind infinit, ihre Kehrwerte infinitesimal und damit unerreichbar klein. Also enthält $\mathbb{R}$ sowohl infinite, als auch infinitesimale Zahlen.

Eine Charakterisierung der endlichen Standardmengen gibt

Satz 5 *Für alle Mengen A gilt: A ist eine endliche Standardmenge genau dann, wenn alle Elemente von A Standardobjekte sind.*

Beweis. Siehe Landers und Rogge 1994, S. 437, qed.

Das Standardisierungsaxiom S

Nach Axiom T' sind alle klassisch definierbaren Objekte Standardobjekte. Aber das reicht nicht für eine ausreichende Rückkopplung zur Standardtheorie.

So ist zum Beispiel jede definierbare reelle Zahl (etwa π oder e) eine Standardzahl, aber es ist nicht klar, dass jede finite reelle Zahl in infinitesimaler Nachbarschaft einer Standardzahl liegt. Die Existenz eines solchen *Standardteils* für beschränkte reelle Zahlen ist aber entscheidend für die Nützlichkeit von Nichtstandardmethoden in der Analysis.

Ein schweres Handycap scheint auch die Beschränkung des Aussonderungsaxioms auf interne Ausdrücke zu sein. Eine Aussonderung mit externen Prädikaten wie standard, inifinitesimal oder finit ist dadurch im Allgemeinen nicht möglich. Wie können also externe Prädikate überhaupt für die Analysis nützlich sein? Hier schafft das Standardisierungsaxiom Abhilfe, welches für interne *und* externe Ausdrücke anwendbar ist.

Axiom 3 (Standardisierungsaxiom S) *Das Axiomenschema enthält für jede (eventuell mit Parametern definierte) Eigenschaft $\phi(x)$ das Axiom*

$$\forall^{\mathrm{sm}} A\, \exists^{\mathrm{sm}} B\, \forall^{\mathrm{s}} x\, (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x)))$$

Umgangssprachlich: Zu jeder Standardmenge A gibt es eine Standardmenge B, deren Standardelemente genau die Standardelemente von A sind, die ϕ erfüllen. Diese Standardmenge ist eindeutig bestimmt und wird mit ${}^{\phi}A$ oder ${}^{\mathrm{s}}\{x \in A \mid \phi(x)\}$ bezeichnet.

Man vergleiche das Standardisierungsaxiom mit dem Aussonderungsaxiom (22), welches nur für interne Ausdrücke gilt (hier zur Vereinfachung ohne die optionalen Parameter wiederholt):

$$\forall^{\mathrm{m}} A\, \exists^{\mathrm{m}} B\, \forall x\, (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \phi(x))).$$

Der Aufbau ist vollkommen identisch, mit der Ausnahme, dass die Quantoren in S nur über Standardobjekte laufen.

Es ist wichtig zu beachten, dass Axiom S nur Aussagen über Standardelemente macht: Die Standardelemente von ${}^{\phi}A$ sind genau die Standardelemente von A, die ϕ erfüllen. Es kann also Nichtstandardelemente von ${}^{\phi}A$ geben, die ϕ nicht erfüllen, ebenso wie Nichtstandardelemente, die ϕ erfüllen, aber nicht in ${}^{\phi}A$ sind.

Hierzu ein einfaches Beispiel: Sei $\phi(x)$ der externe Ausdruck

$$0 < x \wedge \neg x \approx 0 \wedge (x < 1 \vee x \approx 1)$$

und a eine positive infinitesimale Zahl. Dann ist ${}^{\phi}\mathbb{R} =]0, 1]$. Die Standardelemente dieser Standardmenge sind genau die Standardzahlen, die ϕ erfüllen. Aber für die Nichtstandardzahl a gilt $a \in {}^{\phi}\mathbb{R}$ trotz $\neg\phi(a)$. Und für die Nichtstandardzahl $1 + a$ gilt $\phi(1 + a)$, aber $1 + a \notin {}^{\phi}\mathbb{R}$.

Einige wichtige Folgerungen aus S sind die folgenden Sätze.

Satz 6 (Standardteil) *Zu jeder finiten reellen Zahl x gibt es genau eine infinitesimal benachbarte reelle Standardzahl y. Formal:*

$$\forall^{\mathrm{r}} x\, (x \textit{ finit } \Rightarrow \exists^{=1\mathrm{sr}} y\; y \approx x)$$

Beweis. Siehe Robert 2011, S. 38.

Die nach Satz 6 eindeutig bestimmte zu x infinitesimal benachbarte Standardzahl y wird der *Standardteil* von x genannte und mit $\mathrm{st}(x)$ bezeichnet.

In den Beweis von Satz 6 geht wesentlich die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein. Ansonsten wird in der IST-Analysis die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ eher nicht explizit verwendet, sondern nur noch indirekt über die Verwendung des Standardteils. Die folgenden Regeln für das Rechnen mit Standardteilen können anhand der Definition leicht verifiziert werden.

Satz 7 *Für alle finiten $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$.
2. $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.
3. $\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$, *falls* $\mathrm{st}(y) \neq 0$.
4. $x \leq y \Rightarrow \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.

Satz 8 *Jede Teilmenge A einer Standardmenge hat einen eindeutig bestimmten Standardteil ${}^{\mathrm{s}}A$, das heißt eine Standardmenge, die dieselben Standardelemente wie A enthält.*

Beweis. Siehe z. B. Landers und Rogge 1994, S. 438.

Das weitere Programm der Analysis kann nun ohne Grenzwertformalismus entwickelt werden, zum Beispiel

- Definition der Stetigkeit als infinitesimale Änderung des Funktionswerts bei infinitesimaler Änderung des Arguments,
- Definition der Ableitung als Standardteil des Differentialquotienten (also des Differenzenquotienten bei infinitesimaler Änderung des Arguments),
- Definition des Integrals als Standardteil der Riemann'schen Summen zu infinitesimalen Unterteilungen.

Diese Definitionen gelten zunächst für Standardfunktionen und -zahlen und implizit (per Standardisierung) dann allgemein. Weitere Ausführungen findet man zum Beispiel in Robert 2011, E. Nelson 1977 und Deledicq und Diener 1989.

3.3 Zur Widerspruchsfreiheit der IST-Analysis

Nelson hat gezeigt, dass IST widerspruchsfrei ist, sofern ZFC widerspruchsfrei ist.[29] Durch die neuen Axiome I, S und T werden also keine Widersprüche in ZFC hineingetragen. Hieran ändert sich nichts, wenn wir statt ZFC das Axiomensystem der Analysis zugrunde legen. Genauer gesagt, ist die IST-Analysis relativ konsistent zu zu IST und damit auch zu ZFC. Die über die Symbolmenge $\{\in, \mathrm{s}\}$ von IST hinausgehenden Symbole der IST-Analysis können wie üblich definiert werden. Die Axiome aus den Abschnitten 2.6 und 3.2 sind dann in IST beweisbare Sätze und man erhält zu jedem Modell von IST ein Modell der IST-Analysis.

4 Fazit

Welche Konsequenzen können aus den bisherigen Betrachtungen gezogen werden? Ich gehe kurz auf systematische und didaktische Aspekte ein.

4.1 Systematik

Ausgangspunkt der Kritik in diesem Aufsatz war die mangelnde Unterscheidung von Metasprache und Objektsprache in Analysis-Einführungen und die daraus resultierende ungerechtfertigte Gleichsetzung der natürlichen Zahlen mit den Einsensummen.

Inwieweit ist hiervon die praktische Analysis in Forschung und Lehre betroffen? Zunächst einmal überhaupt nicht. Die Theorie funktioniert trotz dieser nicht sauberen Trennung der Sprachebenen. Sie funktioniert deswegen, weil wir beim Beweisen von Theoremen axiomatisch arbeiten und die theoretischen (also objektsprachlichen) natürlichen Zahlen und das theoretische „endlich“ verwenden, obwohl viele dabei eher an die metasprachlichen natürlichen Zahlen und das metasprachliche „endlich“ denken dürften. Wer verspürt schon die Notwendigkeit zu beweisen, dass die Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist?

Der Punkt ist, dass die Vermischung der Sprachebenen das „Nichtstandard-Denken“, wie es vielleicht der Intuition eines Leibniz und anderer Analysis-Pioniere zu Grunde lag, behindert. Wir berauben uns so der Möglichkeit, unerreichbare Zahlen in unserer Standard-Theorie zu *denken*. Dabei sind sie (potentiell) vorhanden. Wir

29. Siehe E. Nelson 1977

müssen sie nicht erst umständlich (zum Beispiel als hyperreelle Zahlen) dazukonstruieren.

Es ist eine Frage des Wollens. Will man metasprachlich unerreichbare Zahlen in der Theorie haben, so kann man sie durch eine Erweiterung der Sprache und der Axiomatik bekommen. Es wird dann eine Nichtstandard-Analysis mit infiniten und infinitesimalen Zahlen möglich.[30]

Will man lediglich Standard-Analysis betreiben und es im Ungewissen lassen, ob es metasprachlich unerreichbare Zahlen in der Theorie gibt, so kann man bei der Standard-Axiomatik bleiben. Ausgeschlossen sind unerreichbare Zahlen damit nicht. Sie reisen quasi immer als mögliche „blinde Passagiere" in der Theorie mit. In einer modelltheoretischen Argumentation ist dies eine Konsequenz aus dem Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski, wonach eine Ausdrucksmenge, die über einem unendlichen Träger erfüllbar ist, stets verschiedene Modelle hat, und zwar beliebiger Kardinalität (größer als die Kardinalität der Ausdrucksmenge).

4.2 Didaktik

Über den Nutzen von Nichtstandard-Methoden im Analysis-Unterricht (zur Vermeidung schwer verdaulicher Grenzwerte) werden unterschiedliche Ansichten vertreten.[31] In der Hochschul-Analysis wird man Grenzwerte schon aufgrund ihrer zentralen Bedeutung für die aktuelle Standard-Analysis behandeln müssen. Das bedeutet jedoch nicht, dass man deswegen Nichtstandard-Methoden komplett ausklammern muss. In Veranstaltungen zur Geschichte oder Philosophie der Mathematik hat Infinitesimalmathematik ohnehin ihren Platz, aber kann sie daraüber hinaus heute noch etwas zum *Verstehen* der Analysis beitragen?

Behrends, der die Rolle der Nichtstandard-Analysis eher skeptisch beurteilt, räumt immerhin ein:

> Es gibt einen aus der Modelltheorie entstandenen und vor einigen Jahrzehnten viel diskutierten alternativen Zugang zur Analysis, in dem die „unendlich kleinen Größen" ein Comeback erleben (die *Nonstandard-Analysis*). Hauptvorteil ist, dass man endlich „versteht", was Leibniz und den anderen wohl vorgeschwebt haben könnte, außerdem kommt man viel schneller zu den Hauptsätzen der Analysis.

30. Einen Überblick, wie Nichtstandard (auf der Basis von IST) in der aktuellen mathematischen Praxis eingesetzt wird, gibt z. B. Diener und Diener 1995.

31. Siehe z. B. Baumann und Kirski 2016, Baumann und Kirski 2017, Bedürftig 2018, Hischer 2017.

Gleich danach schränkt er aber ein:

> Dabei muss man sich allerdings, wenn man alles so streng wie allgemein üblich entwickeln möchte, sehr ausführlich mit sehr verzwickten Teilen der Modelltheorie beschäftigen, und deswegen spricht einiges dafür, dass diese Variante der Analysis nur eine Episode bleiben wird.[32]

Hierzu ist anzumerken, dass die modelltheoretische Konstruktion von Nichtstandard-Erweiterungen zwar vergleichsweise kompliziert ist, aber nicht unbedingt benötigt wird, um nonstandard *in* Modellen zu arbeiten. Dies gilt insbesondere für die Schule und die Anfängervorlesungen, wo man darauf vertraut, dass geeignete Modelle existieren (so wie man es auch bezüglich der reellen Zahlen tut).[33]

Der hier vorgestellte, an IST anknüpfende Zugang kommt gänzlich ohne komplizierte modelltheoretische Konstruktionen aus und bietet zugleich interessante Ansatzpunkte für eine Diskussion mathematischer Grundlagen und des Selbstverständnisses der Mathematik. Er erscheint mir daher zumindest als Inhalt vorlesungsbegleitender oder -ergänzender Veranstaltungen zur Analysis einer Erwägung wert.[34]

In den Standard-Vorlesungen würde eine (gegenüber Nichtstandard-Methoden) unvoreingenommene Sichtweise durch die Beachtung der folgenden Punkte begünstigt:

- Eine (behutsame) Sensibilisierung für die Unterscheidung von Sprachebenen und die Unterscheidung von metasprachlichen und objektsprachlichen natürlichen Zahlen.

- Eine (behutsame) Sensibilisierung für die Verwendung mengentheoretischer Axiome (die, sofern nicht explizit als Axiome formuliert, zumindest als bewusste zusätzliche Vereinbarungen wahrgenommen werden könnten).

- Die Wahrung der Option auf unerreichbare Zahlen durch präzise Formulierung: Jede Einsensumme ist eine natürliche Zahl, die Umkehrung bleibt offen.

- Einstieg und Experimente mit Grenzwerten *und* Nichtstandard-Elementen und -Methoden in Anfängervorlesungen ohne formalen Aufwand.

32. Siehe Behrends 2015, S. 76.
33. Siehe z. B. Bedürftig und Murawski 2015, Abschnitt A.5
34. Ein Beispiel für eine vorlesungsbegleitende Veranstaltung auf der Basis von IST ist Deledicq und Diener 1989.

Die Einbeziehung „infinitesimaler" Betrachtungen neben dem Grenzwertformalismus dient nicht nur der kritischen Würdigung der historischen Wurzeln der Analysis, sondern auch dem intuitiven Verständnis für Begriffsbildungen und Beweisideen. Die hier durchgeführte Analyse zeigt, dass dies gefahrlos möglich ist, denn Infinites und Infinitesimales ist ja potentiell vorhanden.

4.3 Schluss

Abschnitt 3 ist überschrieben mit „Eine Chance für Nichtstandard" (die sich aus der vorangegangenen Analyse in Abschnitt 2 ergeben hat). Für Forschung und Lehre wird daraus eine Chance *durch* Nichtstandard – eine Chance, die wir nutzen sollten.

Literaturverzeichnis

Baumann, Peter, und Thomas Kirski. 2016. Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 100:6–16.

———. 2017. Analysis ohne Grenzwert! *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 102:15–16.

Bedürftig, Thomas. 2018. Über die Grundproblematik der Grenzwerte. *Mathematische Semesterberichte* 65 (2): 277–298.

Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2012. *Philosophie der Mathematik.* 2. Aufl. Berlin Boston: de Gruyter.

———. 2015. *Philosophie der Mathematik.* 3. Aufl. Berlin Boston: de Gruyter.

Behrends, Erhard. 2015. *Analysis Band 1.* Springer Spektrum.

Deitmar, Anton. 2014. *Analysis.* Springer Spektrum.

Deledicq, André, und Marc Diener. 1989. *Leçons de calcul infinitésimal.* Armand Colin (Paris).

Diener, Francine, und Marc Diener, Hrsg. 1995. *Nonstandard Analysis in Practice.* Springer.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2003. *Einführung in die Mengenlehre.* Spektrum Akademischer Verlag.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, et al. 1992. *Zahlen.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. 2007. *Einführung in die mathematische Logik.* 5. Aufl. Springer-Verlag.

Forster, Otto. 2015. *Analysis 1.* 12. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gödel, Kurt. 1944. Russell's mathematical logic. *1944:* 123–153.

Grieser, Daniel. 2014. *Analysis I.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heuser, Harro. 2009. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Hilbert, David. 1900. Über den Zahlbegriff. *Jahresberichte der DMV* 8.

Hischer, Horst. 2017. „Grenzwertfreie Analysis" in der Schule via „Nonstandard Ana1ysis"? *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 103:31–36.

Kanovei, Vladimir, und Michael Reeken. 2004. *Nonstandard Analysis: Axiomatically.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Königsberger, Konrad. 2004. *Analysis 1.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Landers, Dieter, und Lothar Rogge. 1994. *Nichtstandard Analysis.* Berlin Heidelberg: Springer.

Nelson, Edward. 1977. Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bull. of the American Mathematical Society* 83 (6): 1165–1198.

Robert, Alain M. 2011. *Nonstandard Analysis.* Dover Publications.

Schilpp, Paul Arthur. 1944. *The philosophy of Bertrand Russell.* Evanstown: Northwestern University.

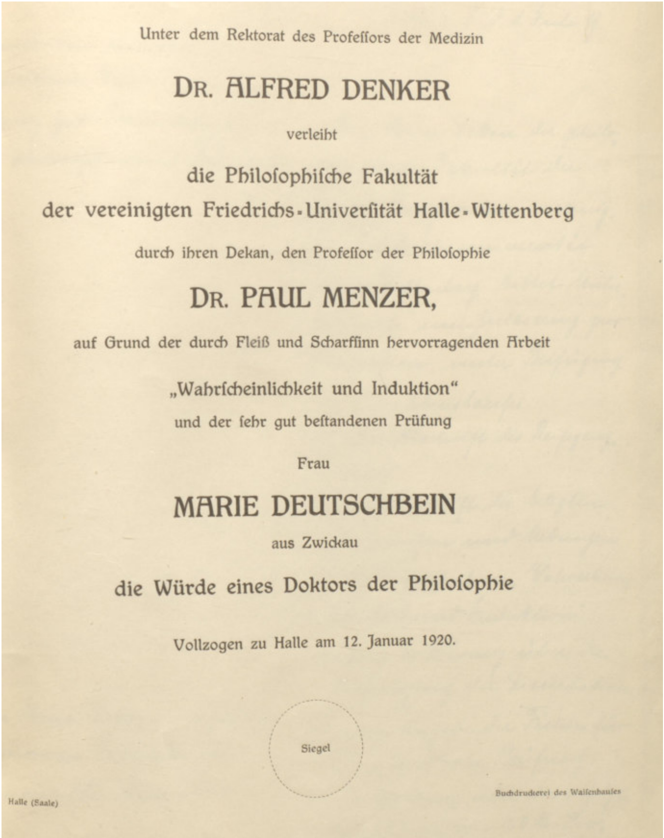
Tarski, Alfred. 1937. *Einführung in die mathematische Logik und die Methodologie der Mathematik.* Wien: Julius Springer.

Walther Brand and Marie Deutschbein's *Introduction to the Philosophical Foundations of Mathematics* (1929): A Book for Teaching Practice?

Andrea Reichenberger

1 Marie Anna Deutschbein and Walther Brand: A Biographical Sketch

Marie Anna Deutschbein was born on May 5, 1881 in Zwickau (in Saxony, Germany) as the daughter of Dr. Franz Dautzenberg and his wife Fanny Dautzenberg, née Ebert. In June 1902, at the age of 21, she married Dr. Max Leo Ammon Deutschbein (born on May 7, 1876 in Zwickau, died on April 15, 1949 in Marburg). Max Deutschbein was a German philologist who had studied English, German and Romance language and literature in Berlin and Leipzig. In 1910, he was appointed with a full professorship of English language and literature at the Martin Luther University of Halle-Wittenberg. In 1919, he moved to the University of Marburg, where he taught until his retirement in 1946. Marie Deutschbein, meanwhile a married wife, decided to study philosophy, mathematics and physics at the Martin Luther University of Halle-Wittenberg, where her husband was a professor. (In the first semesters, she also attended courses in history, modern languages and art history.) She received her degree on January 12, 1920 (Deutschbein 1920a). Her dissertation, *Probability and Induction*, was published in the same year (Deutschbein 1920b). The referees were Paul Menzer and Theodor Ziehen. Not much is known about Marie Deutschbein's scientific and professional activities, with one exception: In 1929, she and Walther Brand published the book *Introduction to the Philosophical Foundations of Mathematics* (Brand and Deutschbein 1929).



Unter dem Rektorat des Profeſſors der Medizin

DR. ALFRED DENKER

verleiht

die Philoſophiſche Fakultät

der vereinigten Friedrichs-Univerſität Halle-Wittenberg

durch ihren Dekan, den Profeſſor der Philoſophie

DR. PAUL MENZER,

auf Grund der durch Fleiß und Scharfſinn hervorragenden Arbeit

„Wahrſcheinlichkeit und Induktion"

und der ſehr gut beſtandenen Prüfung

Frau

MARIE DEUTSCHBEIN

aus Zwickau

die Würde eines Doktors der Philoſophie

Vollzogen zu Halle am 12. Januar 1920.

Siegel

Halle (Saale) Buchdruckerei des Waiſenhauſes

Figure 1: Marie Deutschbein obtained her doctorate in degree on January 12, 1920. Promotionsakte Marie Anna Deutschbein. Courtesy of the Archiv der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg UA Halle, Rep. 21, Nr. 662 (10)

Walther Brand (1880–1968) had received his doctorate at the University of Marburg in 1912 with the thesis *Some Results of the Registration of Air Pressure and Temperature on the Danmark Expedition to Northeast Greenland* (Brand 1912). The meteorologist and polar researcher Alfred Wegener was the supervisor of the dissertation. In 1923, Brand published a book on ball lightning in which he statistically evaluated over 100 cases (Brand 1923). In later years, Brand was a teacher and, at the end of his career, "Oberstudiendirektor" and the leading director of the

Martin Luther School in Marburg, which was renamed to "Adolf Hitler School" in 1933. His report "Die Oberrealschule und das Realgymnasium von 1906-1946" is an important document on the history of school and education in Nazi Germany (Brand 1946). The documents in the Hessian State Archives in Marburg show that Brand tried to protect Jewish pupils from attacks by their classmates and limit the influence of the Hitler Youth. Both Deutschbein and Brand shared their interest in promoting mathematics as a subject in schools (Deutschbein 1929). Unfortunately, it was not possible to find out more about the background of the cooperation between Brand and Deutschbein.

2 Introduction to the Philosophical Foundations of Mathematics: A Content Overview

Walther Brand and Marie Deutschbein's book, *Introduction to the Philosophical Foundations of Mathematics*, was published by Moritz Diesterweg in Frankfurt a.M. in 1929. A Spanish translation by R. Ledesma Ramos, entitled *Introducción a la filosofia matemática*, was published by Revista de Occidente (Madrid) in 1930 (Brand and Deutschbein 1930). The book is divided into three chapters:

1. Mathematics and Logic (Chapter 1)
2. The Development of the Concept of Number (Chapter 2)
3. Historical Development of Theories of Space (Chapter 3)

At the end of each chapter a careful and comprehensive bibliography is added. Particular value is assigned to the treatment of logic in its relationship to mathematics, which occupies a broad space. The first chapter begins with a section about the logical and epistemological foundations of mathematics. Firstly, the standard structure of a syllogism is presented and the traditional logic of concept containment is explained. Further, important logical principles are introduced, namely the principle of identity, the principle of contradiction, the principle of the excluded middle and the principle of the sufficient reason. It is striking and typical for that time that the authors are sceptical about the principle of the sufficient reason which states that every judgement must have a sufficient reason. This is explained by an example: Given the sentence "If it rains, the street is wet," then "raining" is the reason, "being wet" is the consequence. If the street is wet, however, I cannot conclude from it that it has rained (Brand and Deutschbein 1929, 15).

A historical outline of formal logic follows, starting with Lullus, Leibniz, Hamilton, De Morgan and Boole up to the contemporary contributions of Whitehead and Russell, Frege, Dedekind, Schröder, Hilbert, Peano, Burali-Forti and Couturat. Afterwards, the controversial topic of the relationship between mathematics and logic is discussed. Two positions are confronted: The first position asserts that logic is based on mathematics (e.g., Hermann Weyl; Luitzen E. J. Brouwer). The second position maintains that mathematics is "logic in disguise" (e.g., Bertrand Russell; Heinrich Behmann). Instead of favoring the one over the other position, the authors argue that it is important to understand the origin of the controversy: Modern formal logic does not restrict itself to the traditional syllogistic theory. It is much more flexible and applicable to a wide variety of mathematical propositions, so the question arose as to whether mathematics may be reducible to logic. For a better understanding of this development the authors gave a short introduction to propositional calculus and first order logic on the basis of David Hilbert and Wilhelm Ackermann's book *Principles of Mathematical Logic* (Hilbert and Ackermann 1928).

In the following chapter, entitled "Axiomatics," the basic ideas of Hilbert's axiomatic method are introduced. In mathematics, an axiomatic system is any set of axioms from which some or all axioms can be used in conjunction to logically derived theorems. Every axiomatic theory should fulfill three criteria: independence, consistency and completeness. An axiomatic system is said to be consistent if it lacks contradiction, i.e., one is not able to derive both a statement and its denial from the system's axioms. An axiom is called independent if it is not a theorem that can be derived from other axioms in the system. An axiomatic system is complete if, for every statement, either itself or its negation is derivable. Brand and Deutschbein conclude that the impact of the axiomatic method lies in its foundational task and heuristic value, quoting from Hilbert's "Axiomatic Thought":

> The procedure of the axiomatic method, as is expressed here, amounts to a *deepening of the foundations* of the individual domains of knowledge — a deepening that is necessary for every edifice that one wishes to expand and to build higher while preserving its stability (Ewald 1996, 1109).[1]

1. To quote the German original: "Das Verfahren der axiomatischen Methode, wie es hierin ausgesprochen liegt, kommt also einer *Tieferlegung der Fundamente* der einzelnen Wissensgebiete gleich, wie eine solche ja bei jedem Gebäude nötig wird in dem Maße, als man dasselbe ausbaut, höher führt und dennoch für seine Sicherheit bürgen will" (Hilbert 1918, 407). All passages in quotation are presented in English. In the footnotes, the quoted passages are presented in their original language.

The following section presents a sketch from naive Cantorian set theory to its modern formal axiomatization. The basic trichotomy between finite, countable, and uncountable sets is introduced on the basis of the term "cardinality": Two sets are said to have the same cardinality if a bijection exists between them. Two key results and their proofs are sketched out: (i) The rational numbers are countable. (ii) The real numbers are uncountable. That the set of real numbers $\mathbb{R}$ is uncountable or non-denumerable means that its elements cannot be listed, or cannot be put in a bijective correspondence with the natural numbers. This proof idea is known as Cantor's diagonal argument, i.e., the proof that there are infinite sets which cannot be put into a one-to-one correspondence with the infinite set of natural numbers: Assuming the reals are countable, the decimal expansions of all real numbers in $(0;1)$ can be put in a matrix with countably many rows and columns. Use the digits in the diagonal to construct a real number in $(0;1)$ not accounted for, thus obtaining a contradiction.

Cantor's proof, however, give no indication of the extent to which the cardinality of the integers is less than that of the real numbers. Cantor proposed the continuum hypothesis as a possible solution to this question. The continuum hypothesis states that the set of real numbers has a minimal possible cardinality which is greater than the cardinality of the set of integers. Assuming the axiom of choice as it was formulated in 1904 by Ernst Zermelo in order to formalize his proof of the well-ordering theorem (Zermelo 1904), every (infinite) set can be well-ordered. The axiom of choice is equivalent to the proposition that every infinite cardinal is an aleph $\aleph$.

It is remarkable and that Brand and Deutschbein give an introduction to this current state of research, referring to Abraham A. Fraenkel's *Introduction to Set Theory* (Fraenkel 1928). The authors explain the difference between ordinal and cardinal numbers and define the concept of a well-ordered set. They also give an outlook on the controversies that were being led at the time, e.g., arguments for and against the axiom of choice, whether the ordinal numbers are more fundamental than the cardinal numbers, and whether the continuum hypothesis is true. In the following, the authors put a special focus on the objections to set theory.

A series of antinomies forced mathematicians to revise their idea of what constituted a set in order to avoid these antinomies and to achieve consistency. Brand and Deutschbein explicitely mention Russell's antinomy of the irreflexive classes (today called Zermelo-Russell antinomy), the Burali-Forti antinomy of the greatest ordinal, and Richard's paradox which states that it is possible to describe a set of positive integers that cannot be listed in a book containing a set of counting numbers on each consecutively numbered page. As a consequence, all the problems that lie in the concept of infinity became virulent again. The fundamental dispute between formalists and intuitionists bears witness to these problems. Intuitionists such as Kronecker, Poincare, Weyl and Brouwer did not understand an infinite set as a given infinite totality. For them, the absolutely infinite, as Cantor introduced it into mathematics, was metaphysically suspect and the root of evil for the antinomies of set theory. The intuitionists argued that the sentence of the excluded middle cannot be applied to infinite sets, especially not to the real continuum of numbers (i.e., the principle that either all numbers have a given property or there is a number which does not have it).

Mathematics itself, however, operates with abstract concepts, e.g., quantifiers, sets, functions, and uses logical inference based on principles such as mathematical induction or the principle of the excluded middle. These "concept-formations" and modes of reasoning had been criticized by Brouwer and others on grounds that they presuppose infinite totalities as given, or that they involve impredicative definitions (which were considered by the critics as viciously circular). "The aim of the formalists, on the other hand," was, as Brand and Deutschbein emphasize, "to prove that the application of the principle of the excluded middle in mathematics also applies to infinite sets, i.e., it does not lead to a contradiction and cannot even lead to it" (Brand and Deutschbein 1929, 48).[2] The goal of Hilbert's program was to give a contentual, metamathematical proof that there can be no derivation of a contradiction, i.e., no formal derivation of a formula A and of its negation $\neg A$. Brand und Deutschbein argue that even if it were possible to prove that there was no contradiction in Hilbert's sense, "the dispute would not be settled" (Brand and Deutschbein 1929, 50), because, for the intuitionists, freedom from contradiction does not coincide with mathematical existence.

The first chapter ends with a topic that Deutschbein had already addressed in her doctoral thesis: "The Logical and Epistemological Foundations of Probability." A brief historical review goes back to probability calculations in the fifteenth century and ends with Pierre-Simon (Marquis de) Laplace's justification. Thematically, Brand and Deutschbein contrast two directions: the logical (subjective) direction with Carl Stumpf and Christoph Sigwart as the main representatives, who "sees in probability calculation a regulation of our formation of expectations in a purely rational manner" (Brand and Deutschbein 1929, ibid., 52) and the so-called natural-philosophical (objective) direction, which was first established by Jakob Friedrich Fries in 1837 and "is probably represented today by most of

2. To quote from the German original: "Das Ziel der Formalisten dagegen ist es, nachzuweisen, daß die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik auch für Unendlichkeitsbetrachtungen gilt, das heißt, nicht zu einem Widerspruch führt, ja nicht dazu führen kann." Unless otherwise noted, translations are my own.

those who deal with the problems of probability calculation. This view says that it makes little sense to calculate expectations for an individual case, but that a certain legality can be seen when considering a very large number of cases" (Brand and Deutschbein 1929, ibid., 54).[3] In this context, Brand and Deutschbein attach great importance to the law of large numbers, which only applies (as the name indicates) when a large number of observations is considered. It states that, if one repeats an experiment independently a large number of times, the average of the result should be close to the expected value. The authors emphasize that, especially in modern physics, the law of large numbers is of great importance. As an example, they mention Rudolf J.E. Clausius's application of the law of large numbers in an area that came to be known as statistical thermodynamics, which focuses on the mathematical properties of large numbers of particles in a system.[4]

The second chapter, entitled "The Development of the Concept of Number," begins with Leopold Kronecker's famous remark: "God made the integers, all the rest is the work of man."[5] It is precisely the meaning of the natural numbers we are all familiar with that is difficult to understand. At least this much can be said: The basic characteristic of natural numbers is that every number has a successor. This characteristic feature is the basis for an important mathematical proof technique: mathematical induction.

Assuming one wants to prove that for some statement $P, P(n)$ is true for all n starting with $n = 1$, the principle of mathematical induction states that one should accomplish this in just two steps:

1. Prove that $P(1)$ is true.

3. "Dieser Auffassung gegenüber steht die sogenannte 'naturphilosophische'. Sie wurde zuerst von Fries (1837) aufgestellt und wird heute wohl von den meisten, die sich mit den Problemen der Wahrscheinlichkeit befassen, vertreten. Diese Auffassung sagt: Es hat wenig Zweck, die Erwartung für einen einzelnen Fall zu berechnen; es ist aber von großer Wichtigkeit, daß wir bei der Betrachtung von einer sehr großen Anzahl von Fällen eine gewisse Gesetzmäigkeit erwarten können."

4. In her doctoral thesis, *Probability and Induction* (Deutschbein 1920b), Deutschbein also deals in detail with the philosophical contributions to probability by Hans Reichenbach (Reichenbach 1916) and Edgar Zilsel (Zilsel 1916), comparing Reichenbach's principle of the existence of a continuous probability function in Kantian fashion with Zilsel's so-called application problem of probability, that is the question as to why the logical probability calculus was valid for physical events.

5. Kronecker is said to have expressed this sentence at a lecture at the *Berliner Naturforscher-Versammlung* in 1886. The above quote refers to the German phrase quoted from Hans J. Weber in his obituary of Kronecker: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" (Weber 1893, 15).

2. Assume that $P(k)$ is true for some k. Derive from here that $P(k+1)$ is also true.

Die vollständige Induktion der Mathematik läßt sich also durch folgendes Schema darstellen:

1. Feststellung: Der Satz ist gültig für ein kleinstes n, wobei im allgemeinen n = 1 ist.
2. Annahme: Der Satz ist gültig für ein beliebiges n.
3. Nachweis: Der Satz ist dann auch gültig für n + 1.

Figure 2: Scheme of mathematical induction according to (Brand and Deutschbein 1929, 56)

The status of mathematical induction was a matter of disagreement among philosophers and mathematicians of the late nineteenth and early twentieth century. There was some philosophical dispute at that time about whether mathematical induction is a synthetic a priori principle (Henri Poincaré) or simply a definition (Bertrand Russell). For Poincaré, mathematical induction was a constitutive principle, permitting mathematics to proceed from its premises to genuinely new results. Gottlob Frege, and later Alfred North Whitehead, and Bertrand Russell disagreed. They hold the view that mathematical induction was analytic in the sense that it can be reduced to a principle of pure logic by suitable definitions of the terms involved. Whether we agree with Russell or concede to Poincaré, the fact remains that reasoning from it is a purely deductive procedure, which allows to reduce the number of proof steps for all possible cases to two steps (Brand and Deutschbein 1929, 58). In other words, mathematical induction is a form of direct proof, which demonstrates the validity of a statement for all possible cases in two steps.

Besides the principle of mathematical induction, another principle plays a crucial role: the principle of permanence. The principle of permanence states, loosely spoken, that we employ rules under circumstances more general than are warranted by the special cases under which the rules were derived and have validity. According to Brand and Deutschbein, "the genetic explanation of the concept of numbers due to the introduction of the principle of permanence shows its great fertility in discovering new numbers" (Brand and Deutschbein 1929, 63).[6] Thus, the principle of permanence is a helpful heuristic rule when extending the realm of numbers. For example, we start with $\mathbb{N}$ and addition and multiplication. Among the rules that

6. "Die genetische Erklärung des Zahlbegriffs auf Grund der Einführung des Permanenzprinzips zeigt dessen große Fruchtbarkeit im Auffinden neuer Zahlen."

hold for addition and multiplication are associativity and commutativity. Now, we construct larger sets of numbers along the number system hierarchy $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ to solve more problems while trying to preserve most basic laws. Attempts to find generalizations of the concept of a complex number led to the theory of hypercomplex numbers, such as quaternions. However, as Brand and Deutschbein mention, the extension of the concept of a complex number has its price. It is possible only at the cost of some of the usual properties of numbers, thus in losing the principle of permanence.

Avoiding the controversial question concerning the "existence" of numbers, Brand and Deutschbein ask about the meaning of the number concept and thus arrive at the distinction between ordinal and cardinal numbers. At the end of the chapter, the authors point out that the genetic representation of the concept of number did not exactly correspond to the actual historical development. On two pages the authors offer a short cultural-historical retrospective on the use of object-specific counting of primitive cultures, early counting principles, and the historical development of different numeral systems for representing numbers.

The third and last chapter on the historical development of theories of space begins with an excursion to Plato and Aristotle and then focuses on the beginning of modern times with Copernicus, Kepler and Galileo. The dispute between Isaac Newton and Gottfried W. Leibniz is described in particular detail, contrasting the absolute vs. relational view of space: While Newton understood space as an absolute entity of independent existence, Leibniz favored a relational theory of space, i.e., space cannot be a real thing-in-itself; it is a mental abstraction, an ideal being, the order of coexisting things.

Immanuel Kant later aimed to mediate between the two positions by "giving space its very own intermediate position" (Brand and Deutschbein 1929, 76). According to Kant, space and time are pure forms of a priori intuition, independent of all sense-content, thus, they are the a priori condition of the possibility of experience. Experience does not determine space and time, rather space and time are determined in pure intuition. This leads Kant to the hypothetical conception of the transcendental ideality and empirical reality of space. Through sensation, we have objects given to us in space. These objects are empirically real, i.e., they exist in consideration of the transcendental ideality of space as conditioned by our own capacities.

The advent of non-Euclidean geometry seemed to falsify Kant's account of geometry. (In fact, this is the subject of an intense debate until today.) In many passages, Kant suggested that the geometry he considers a priori is Euclidean. In these passages, he might mean what his critics think he meant: that the only possible geometry is three-dimensional and Euclidean. Instead of answering the question of whether this is actually the case, Brand and Deutschbein ask another question: "What do these geometries mean for our intuition of space, or 'Raumanschauung'?" (Brand and Deutschbein 1929, ibid., 80).[7] The provable fact that non-Euclidean geometries are consistent, thus possible, means that they are "conceivable, or conceptually feasible" ("denkbar, begrifflich durchführbar") (Brand and Deutschbein 1929, ibid.). Has this fact any consequence for our intuition of space? Some authors argued that although non-Euclidean geometries are conceivable, they are not imaginable.

Brand and Deutschbein consider this answer to be mistaken. We can still define a straight line and a curvature in relation to a certain dimensional characteristic ("Maßeigenschaft"). "The so-called *true geometry* cannot be determined in this way" (Brand and Deutschbein 1929, 82).[8] However, Euclidean geometry is the simplest geometry among all other possible geometries, because here the degree of curvature is zero. This means that the question of truth is simply a question of expediency for the individual case. For the case of general relativity, Euclidean geometry is no longer suitable, because here the shortest distance between two points is no longer a straight line, but a curved geodesic. With this statement, the authors introduce the last section of their book, which gives an overview of the central contents and the historical development of the theory of relativity. The chapter ends with an outlook on the general theory of relativity, which interprets gravity as a geometric property of curved four-dimensional space-time.

3 A Book for Teaching Practise?

In the preface to their book, Brand and Deutschbein emphasize that their introduction to the philosophical foundations of mathematics was intended for "mathematical teaching practice in higher schools," especially since "the Prussian guidelines demand the philosophical penetration of every single subject" (Brand and Deutschbein 1929, ibid., pref.). In fact, their book is unlikely to have found such a use. This does not mean that Brand and Deutschbein's book cannot be integrated into a teaching practice that addresses questions at the intersection of the history and philosophy of mathematics. Behind this goal lies the thesis that a comparison of the contents and presentations of textbooks and introductory books from different periods can be helpful for a better and deeper understanding of the issues

7. "Hier soll vor allem die Frage gestellt werden: Was bedeuten diese Geometrien für die Raumanschauungen?"

8. "Die sogenannte 'wahre Geometrie' läßt sich auf diesem Wege nicht feststellen."

dealt with. This will be demonstrated using two case studies, namely Cantor's diagonal argument and the decision problem in logic.

Learning objective: By reading text passages from Brand and Deutschbein's book and comparing them with standard textbooks in teaching practice, students are motivated to reflect philosophically and critically on what they have learned. This not only promotes reading competence in mathematical education, but also encourages students to do further and more in-depth research.

3.1 Case study 1: Cantor's Diagonal Argument

Provided that students are familiar with the concepts of cardinality and bijection, the following questions might be subject of a course:

1. What is Cantor's diagonal argument?
2. How do Brand and Deutschbein explain Cantor's diagonal argument?
3. Brand and Deutschbein present an "intuitive" geometric proof of Cantor's diagonal argument by assuming that every point of a number line corresponds to a real number, and every real number to a point. Reconstruct this proof.

Sample answers:

1. Cantor's diagonal argument is the proof that the set of real numbers $\mathbb{R}$ are uncountable, or non-denumerable, i.e., that the set of real numbers $\mathbb{R}$ has a larger cardinality than the set of natural numbers $\mathbb{N}$.
2. Brand and Deutschbein "explain" Cantor's diagonal argument by proving that the open interval $(0, 1)$ is uncountable (Brand and Deutschbein 1929, 37). The proof is by contradiction. If there exists a bijection from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{N}$, then we could compose it with a bijection from $(0; 1)$ to $\mathbb{R}$. No matter how we list the real numbers, any such listing will miss some natural numbers, which contradicts the assumption that the real numbers are countable. Therefore the uncountability of the open interval $(0, 1)$ implies the uncountability of $\mathbb{R}$.
3. Brand and Deutschbein demonstrate that the set of all points of a straight line, which is unlimited on both sides, is equivalent to the set of all points of a limited, arbitrarily small segment. Therefore, the set of all real numbers is equivalent to the set of all real numbers between 0 and 1 (or between any two other straight lines). The segment ACB is thought to be broken at the right angles in C. The point C is on the straight line L. Connect A directly to

B and halve this line in S. From S you draw rays that intersect ACB as well as L. Assign the corresponding intersections to each other. The geometric procedure can be used to set up a one-to-one correspondence between the set of all points on a line and the sets of points between the ends of any line segment. That is, all line segments, no matter how long they are, contain the same number of points. (A more detailed proof can be found in (Fraenkel 1928, 50-53).)

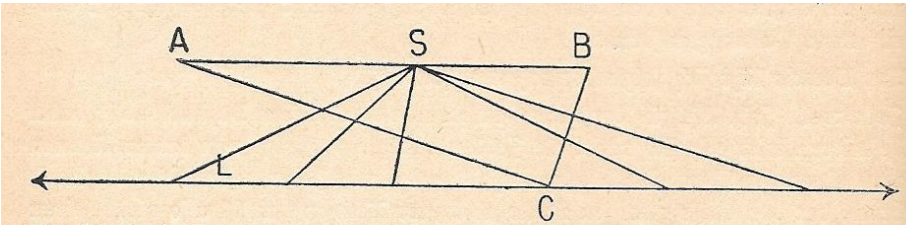


Figure 3: The set of points on the broken line ACB and the straight line L are equivalent (Brand and Deutschbein 1929, 38).

3.2 Case study 2: Decision Problem

Provided that students are familiar with the first-order predicate calculus, the following questions might be subject of a course:

1. What is the decision problem? Explain it by using an example.
2. How did David Hilbert and Wilhelm Ackermann formulate the decision problem in 1928 (Hilbert and Ackermann 1928)?
3. In 1931, Kurt Gödel published the work "On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I" (Gödel 1932). What did Gödel prove?
4. The book by Brand und Deutschbein appeared two years before Gödel's proof of the undecidability of predicate logic. What do the authors understand by the decision problem?
5. Brand and Deutschbein see a close connection between the decision problem and Hilbert's identification of mathematical existence with freedom from contradiction (Brand and Deutschbein 1929, 45-50). Reconstruct Brand and Deutschbein's interpretation.

Sample answers:

1. The decision problem is the question of whether an algorithm exists for deciding whether or not a specific mathematical assertion is provable. A decision problem, which can be solved by an algorithm, is called decidable. The halting problem is an important undecidable decision problem. It is the problem of determining, from a description of an arbitrary computer program and an input, whether the program will finish running (i.e., halt) or continue to run forever.

2. Hilbert and Ackermann considered the decision problem the main problem of mathematical logic. In *Principles of Mathematical Logic*, they formulated the decision problem as follows: "The Entscheidungsproblem [decision problem for first-order logic] is solved if we know a procedure that allows for any given logical expression to decide by finitely many operations its validity or satisfiability" (Börger et al. 1997, 3).[9]

3. Gödel's incompleteness results showed that no finitary consistency proof of arithmetic can be given (Gödel 1932). Gödel proved that for the system of Russell's and Whitehead's *Principia Mathematica* (and even much more elementary ones, e.g., Zermelo-Fraenkel set theory), there will always be individual propositions in its language that are undecidable by the system, i.e., which can neither be proved nor disproved from its axioms provided it is consistent (first incompleteness theorem). Even more, Gödel showed that the consistency of such a system cannot be proved within the system itself (second incompleteness theorem) (Gödel 1932).

4. Brand and Deutschbein understood the decision problem as the question, "whether a mathematical problem can always theoretically be solved" (Brand and Deutschbein 1929, 50).

5. In a much quoted letter to Gottlob Frege, David Hilbert called the freedom from contradiction "the criterion of truth and existence" (Frege 1976, 68). Intuitionists like Luitzen E. J. Brouwer did not agree with this definition. For Brouwer, mathematical existence required constructability. The intuitionists rejected non-constructive proofs of existence, based on an unrestricted use of the principle of the excluded middle, applied to the transfinite. Given today's definition of consistency as the syntactic non-derivability of a contradiction

9. To quote the German original: "Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt" (Hilbert and Ackermann 1928, 73).

in a given formal system, the question concerning mathematical existence as freedom from contradiction no longer seems to play any role.

References

Börger, Egon, Erich Grädel, and Yuri Gurevich. 1997. *The Classical Decision Problem.* Berlin: Springer.

Brand, Walther. 1912. Einige Ergebnisse der Registrierung von Luftdruck und Temperatur auf der Danmark-Expedition nach Nordostgrönland. PhD thesis, Universität Marburg.

———. 1923. *Der Kugelblitz. Probleme der kosmischen Physik.* Hamburg: Henri Grand.

———. 1946. Die Oberrealschule und das Realgymnasium von 1906-1946. Hessisches Staatsarchiv Marburg, Aktenbestand HSTAM 153/15, Nr. 371.

Brand, Walther, and Marie Deutschbein. 1929. *Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik.* Frankfurt a.M.: Diesterweg.

———. 1930. *Introducción a la filosofia matemática, span. Übers. u. Anmerkungen v. R. Ledesma Ramos.* Edited by R. Ledesma Ramos. Madrid: Revista de Occidente.

Deutschbein, Marie. 1920a. Promotionsakte Marie Anna Deutschbein. Archiv der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg UA Halle, Rep. 21 II, Nr. 211.

———. 1920b. *Wahrscheinlichkeit und Induktion.* Cöthen: Verlag von Otto Schulze.

———. 1929. Der philosophische Bildungswert der Mathematik. *Zeitschrift für Deutsche Bildung* 5:326–333.

Ewald, William, editor. 1996. *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Volume 2. Oxford: Clarendon Press.

Fraenkel, Abraham Adolf. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre.* Volume IX. Grundlagen der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer.

Frege, Gottlob. 1976. *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Edited by Gottfried Gabriel and Hans Hermes. Hamburg: Felix Meiner.

Gödel, Kurt. 1932. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38:173–198.

Hilbert, David. 1918. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen* 78:405–415.

Hilbert, David, and Wilhelm Ackermann. 1928. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin: Springer.

Reichenbach, Hans. 1916. *Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für die mathematische Darstellung der Wirklichkeit.* Leipzig: Barth.

Weber, Heinrich. 1893. Leopold Kronecker. *Mathematische Annalen* 43:1–25.

Zermelo, Ernst. 1904. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen* 59 (4): 514–16.

Zilsel, Edgar. 1916. *Das Anwendungsproblem: Ein philosophischer Versuch über das Gesetz der großen Zahlen und die Induktion.* Leipzig: Barth.

Eine Leibnizsche Identität

Tilman Sauer und Gabriel Klaedtke

1 Einleitung

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), einer der Begründer der modernen Analysis, warb 1702 in einem Brief an den französischen Mathematiker Pierre Varignon (1654–1722) für ein Vertrauen in die begrifflichen Grundlagen der neuen Infinitesimalmathematik, ungeachtet des ungeklärten Status der unendlich kleinen Grössen. Mit diesen verhielte es sich nämlich wie mit den imaginären Wurzeln:

> Mehr noch, so wie die imaginären Wurzeln ihre *Begründung in der Sache* haben—sodass der verstorbene Herr Huygens, als ich ihm mitteilte, dass
>
> $$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} \text{ gleich } \sqrt[2]{6} \tag{1}$$
>
> sei, dies so bewundernswert fand, dass er mir antwortete, es gäbe darin etwas für uns Unbegreifliches [...].[1]

Der Brief von Leibniz an Varignon wurde 1702 im *Journal des Scavans* publiziert. Der dort zitierte Ausspruch stammt von Christiaan Huygens (1629–1695) und dieser schrieb ihn fast dreissig Jahre vorher in einem Brief an Leibniz. Der junge Leibniz war damals sehr stolz, dass der ältere und viel erfahrenere Huygens ihm selbstlos zu einer mathematischen Einsicht gratulierte. Was hat es mit dieser Identität auf sich?

1. „‘De plus comme les racines imaginaires ont leur *fondamentum in re*, de sorte que feu Mons. Hughens lors que je luy communiquay que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ est egal à $\sqrt[2]{6}$, le trouva si admirable qu'il me repondit qu'il y a là dedans quelque chose qui nous est incomprehensible;“ Leibniz an Pierre Varignon, 2. Februar 1702, auszugsweise publiziert in (Leibniz 1702), kritisch ediert in (Leibniz 2017, S. 13). Die deutsche Übersetzung dieser Stelle folgt (Leibniz 2011, S. 354); soweit nicht anders angegeben, stammen die deutschen Übersetzungen der anderen lateinischen Zitate von Natalia Poleacova.

SieB 10 (2018), 123-138

In den mit viel Liebe zum Detail und wissenschaftshistorischer Kenntnis akribisch aufbereiteten Werkeditionen bedeutender Mathematiker finden sich, oft in Fussnoten versteckt, immer wieder kleine interessante Episoden, in denen beispielsweise deutlich wird, wie in der Vergangenheit auch grosse Mathematiker noch mit Fragen gerungen haben, welche heute in den Schulunterricht fallen. Auf die im folgenden diskutierte Episode weist Pieper (1985, S. 204; 1988, Aufgabe 38) hin. Die Identität selbst findet sich bereits bei Kästner (1794, S. 24–25), Tropfke (1902, S. 171) und Remmert (1983, S. 48).

2 Historischer Hintergrund

Komplexe Zahlen traten historisch zuerst bei der Lösung quadratischer, kubischer und quartischer Gleichungen auf, und bei der Lösung quadratischer Gleichungen können sie auch im Schulunterricht eingeführt werden. Historisch wurde das Wurzelziehen aus negativen Grössen bei der Lösung quadratischer Gleichungen jedoch lange vermieden. Es wurden stets unterschiedliche Fälle von quadratischen Gleichungen unterschieden, je nachdem ob die Koeffizienten, die ursprünglich immer als ganze Zahlen gedacht wurden, positiv oder negativ waren, und Fälle negativer Diskriminante wurden ausgeschlossen. Ähnliche Fallunterscheidungen wurden auch noch beim Lösen kubischer Gleichungen getroffen.

Die Geschichte der Lösung der kubischen (und quartischen) Gleichungen ist eine an menschlichen Dramen reiche Episode, die man in vielen Darstellungen der Mathematikgeschichte nachlesen kann. Erste Verfahren zur Lösung kubischer Gleichung wurden von dem italienischen Mathematiker Scipione del Ferro (ca. 1465–1526) um das Jahr 1500 herum gefunden. Vor seinem Tod teilte Ferro seine Lösung noch seinem Schüler Antonio Maria Fior mit.

Als Fior jedoch den Rechenmeister Niccolò Tartaglia (ca.1500–1567) zu einem öffentlichen Wettbewerb, bei dem es um die Auflösung von kubischen Gleichungen der Form $x^3 = px + q$ ging, aufforderte, musste er feststellen, dass Tartaglia seinerseits bereits die Formeln zur Lösung kubischer Gleichungen gefunden hatte. Tartaglia gab dann dem Drängen seines Landsmannes Geronimo Cardano (1501–1576) nach und verriet ihm seine Formeln unter dem Versprechen, dass Cardano sie nicht publizieren würde. Cardano brach sein Versprechen aber, vielleicht auch weil er erfuhr, dass Tartagla gar nicht die Priorität gebührte, und publizierte die später so genannten Cardanischen Formeln in seiner *Ars magna* von 1545, nicht jedoch ohne Tartaglia als den Urheber dieser Formeln explizit zu nennen. Die *Ars magna* enthielt ausserdem noch das Lösungsverfahren für quartische Gleichungen, welches von Cardanos Schüler Ludovico Ferrari (1522–1565) gefunden worden war.

Für die Geschichte der komplexen Zahlen ist schliesslich eine neue zusammenfassende Darstellung der algebraischen Methoden durch Raphael Bombelli (ca. 1526–1573) wichtig. Dieser verfasste etwa um das Jahr 1560 herum sein Werk *L'Algebra*, in dem er eine zusammenfassende Darstellung gab und dabei auch bemerkte, dass Wurzelausdrücke negativer Zahlen, die bei Anwendung der Formeln von Cardano und Ferrari regelmässig auftreten, in speziellen Fällen einfachen reellen Wurzelausdrücken gleich sind. Bombellis *L'Algebra* wurde erst 1572, kurz vor seinem Tod teilweise publiziert.

Wie Hofmann (1972) bemerkt, stellt Bombellis Werk einen Höhepunkt der Tradition der frühen italienischen Algebraiker dar, die sich dann aber nicht weiter entwickelte. Auch Bombellis *L'Algebra* geriet für mehrere Jahrzehnte in Vergessenheit. Nachdem aber der junge Leibniz in seinen Pariser Lehrjahren 1672–1676 mehr oder weniger durch Zufall in der königlichen Bibliothek in Paris auf Bombellis *L'Algebra* gestoßen war, erkannte er, dass die dort gegebenen Verfahren zur Auflösung von Gleichungen dritter und vierter Ordnung ohne Einschränkungen, also auch ohne Fallunterscheidungen gültig sind. Jedenfalls berichtete er seinem Mentor Huygens von dieser Einsicht Mitte 1675 in einem Brief und nahm gleichzeitig Priorität für diese Einsicht in Anspruch. Er schrieb:

> So denke ich als Erster dargelegt zu haben
> 1. dass die Cardanischen Formeln absolut gute und allgemeine Formeln sind, ob ausziehbare, oder nicht ausziehbare; ob wahre, ob falsche oder negative;
> 2. dass wir durch dieses Mittel die allgemeine Lösung aller kubischen Gleichungen haben.

und dann fuhr er fort

> 3. Ich habe als Erster herausgefunden, dass man nicht ausziehbare zusammengesetzte Wurzeln aller gradzahligen Grade, die die imaginären Zahlen enthalten, formen kann und dass deren Realität nichtsdestoweniger ohne Extraktion handfest gemacht werden kann: Um zu beurteilen, dass die Realität solcher Formeln nicht durch Extrahierbarkeit begrenzt ist: davon ist das Beispiel der Formel $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, die $\sqrt{6}$ ergibt, ein beachtlicher Beweis.[2]

2. "Ainsi je croy d'avoir demonstré le premier (1) que les formules de Cardan sont absolument bonnes et generales, soit extrahibles, soit non extrahibles; soit vrayes, soit fausses ou negatives; (2) que nous avons par ce moyen la resolution generale de toutes les equations cubiques. (3) J'ay trouvé le premier qu'on peut former des racines composées non extrahibles de tous les

Huygens war in der Tat beeindruckt und antwortete am 30. September 1675 mit jenem Satz, den Leibniz viele Jahre später wieder zitieren sollte:

> Die Bemerkung, die Sie bezüglich der extrahierbaren Wurzeln machen, und mit imaginären Quantitäten, die dennoch eine reelle Quantität ergeben, wenn sie zusammengefügt werden, ist erstaunlich und auf jeden Fall neu. Man hätte niemals geglaubt, dass $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$ wird, und es gibt da drin etwas Verborgenes, was uns unverständlich ist.[3]

3 Moderne Behandlung des Leibnizschen Ausdrucks

Unser Problem ist also die Bedeutung des Leibnizschen Ausdrucks

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}} =: \sqrt{a}+\sqrt{b} =: x+y =: z, \tag{2}$$

wo $a, b, x, y, z \in \mathbb{C}$. Es ist dabei zu beachten, dass fast alle Techniken, mit denen wir heute komplexe Zahlen handhaben, Leibniz und seinen Zeitgenossen noch nicht zur Hand standen. So verstehen wir erst seit Gauss komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene, was uns erlaubt, zur Berechnung der Wurzeln von a und b diese in Polarkoordinaten zu schreiben. Die Auffassung der komplexen Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene erlaubt uns ausserdem eine graphische Veranschaulichung von der Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion.

Schreiben wir also eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ als

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z| \cdot e^{i\varphi_z} \tag{3}$$

mit

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \tag{4}$$

degrez pairs, qui contiennent des imaginares, et dont neantmoins la realité peut estre rendüe palpable sans extraction: pour faire juger que la realité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité: dont l'example de la formule $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ qui vaut $\sqrt{6}$, est une preuve tres considerable." Leibniz an Huygens, etwa Mitte September 1675 (Huygens 1899, Vol.8, No. 2057, S. 501, Leibniz 1976, 278).

3. "La remarque que vous faites touchant des racines inextrahibles, et avec des quantitez imaginaires, qui pourtant adjoutées ensemble composent une quantitè reelle, est suprenante et tout à fait nouvelle. L'on n'auroit jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fist $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de cachè là dedans qui nous est incomprehensible." Huygens an Leibniz, 30. September 1675 (Huygens 1899, Vol.8, No. 2058, S. 505–6, Leibniz 1976, 284).

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right). \tag{5}$$

Es sind dann also der Betrag von a und b gegeben durch

$$|a| = |b| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \tag{6}$$

und ihre Winkel durch

$$\varphi_a = \arcsin\left(\frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \tag{7}$$

$$\varphi_b = \arcsin\left(\frac{\mathrm{Im}(b)}{|b|}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}. \tag{8}$$

Mit Verwendung der Eulerschen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \tag{9}$$

und der Formel von de Moivre

$$[\cos(x) + i\sin(x)]^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \text{ für } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

und unter Beachtung der Periodizität der trigonometrischen Funktionen erhalten wir also für die Wurzeln von a und b

$$x_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \tag{11}$$

$$x_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \tag{12}$$

$$y_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \tag{13}$$

$$y_2 = \sqrt{2}e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \tag{14}$$

Entsprechend erhalten wir für den gesamten Wurzelausdruck z vier verschiedene Kombinationsmöglichkeiten:

$$z_1 = x_1 + y_1 = +\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = +2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}, \tag{15}$$

$$z_2 = x_1 + y_2 = +\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = +i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = i\sqrt{2}, \tag{16}$$

$$z_3 = x_2 + y_1 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = -i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -i\sqrt{2}, \tag{17}$$

$$z_4 = x_2 + y_2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{6}. \tag{18}$$

Welche von den vier Möglichkeiten ist nun das richtige Ergebnis? Die Tatsache, dass wir vier unterschiedliche Ausdrücke erhalten haben, liegt daran, dass wir die Zweideutigkeit der Quadratwurzelfunktion noch nicht beseitigt haben. Diese Zweideutigkeit zeigt sich hier an der Periodizität der trigonometrischen Funktionen, also daran, dass zu jeder komplexen Zahl $\neq 0$, welche Quadratwurzel einer anderen Zahl ist, eine weitere Quadratwurzel der ursprünglichen Zahl gefunden werden kann, indem man den Winkel um π erhöht oder vermindert.

Im Reellen wird die Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion gewöhnlich dadurch beseitigt, dass man sich auf die positive Quadratwurzel beschränkt. Im Komplexen entspricht dies dem Auszeichnen eines Hauptwertes. Diese Auszeichnung unterliegt nun aber prinzipiell einer konventionellen Festlegung.

Versteht man unter $\sqrt{w}$ den Hauptwert einer komplexen Zahl w und definieren wir als Hauptwert der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl $z = re^{i\theta}$ die Zahl $\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$ mit $0 \leq \frac{\theta}{n} < \frac{2\pi}{n}$, für die Quadratwurzel also $0 \leq \theta < 2\pi$, dann sind als Hauptwerte der Wurzeln von a und b die Zahlen x_1 und y_2 anzusehen. Im Sinne dieser Konvention des Hauptwertes wäre also z_2 die eindeutige Lösung der Summe $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ und der Leibnizsche Ausdruck ergäbe sich, anders als von Leibniz angegeben, eindeutig als

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = i\sqrt{2}. \tag{19}$$

Die Festlegung auf eine Definition des Hauptwerts ist prinzipiell willkürlich, solange die Definition die Eindeutigkeit der Wurzelfunktion herstellt. Eine andere oft verwendete Definition des Hauptwertes legt fest, dass man die Lösung mit positivem Realteil betrachtet, also $-\pi/2 < \theta/2 \leq \pi/2$. Bei dieser Konvention ergibt sich in der Tat Leibnizens Ausdruck.[4]

Will man die willkürliche Einschränkung der Quadratwurzelfunktion auf den eindeutigen Zweig des Hauptwertes vermeiden und stattdessen die volle Lösungsmannigfaltigkeit der Wurzelfunktion beibehalten, dann kann man die Mehrdeutigkeit durch Einführen Riemannscher Flächen beseitigen, wie dies in der Funktionentheorie gezeigt wird. Hier wird die komplexe Ebene gewissermassen verdoppelt und die zwei gleichen Argumente für die zwei unterschiedlichen Wurzelausdrücke liegen dann auf unterschiedlichen Blättern. Um die Stetigkeit der Abbildung zu gewährleisten, müssen die beiden Blätter so miteinander verknüpft werden, dass es, vom Mittelpunkt aus ins Unendliche gezogen, einen Schnitt gibt, so dass bei einem Übergang des Argumentvektors über die Schnittline das Blatt gewechselt wird.

4. Pieper (1985) ist an dieser Stelle inkonsistent. Seine Definition des Hauptwertes (S. 127) entspricht $0 \leq \theta < 2\pi$ und führt zu dem Ergebnis $i\sqrt{2}$ wie auf S. 238 angegeben, ohne dass beim Zitat der Leibnizischen Identität (S. 204) darauf hingewiesen wird.

Den verschiedenen Definitionen des Hauptwertes entsprechen dann unterschiedliche Schnitte der komplexen Ebene, in denen der Übergang zwischen den beiden Blättern passiert. Im Fall der ersten Definition liegt der Schnitt auf der positiven Realteilachse, im zweiten Fall auf der negativen Realteilachse. Für unser Problem der Addition zweier Wurzelausdrücke muss man bei beiden Summanden auf demselben Blatt bleiben. Im ersten Fall erhält man als zweite Lösung, also auf dem zweiten Blatt $z_3 = -i\sqrt{2}$, im zweiten Fall entsprechend $-\sqrt{6}$.

Bei einer konsequenten Beseitigung der Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion mithilfe Riemannscher Blätter wird also die volle Kombinationsvielfalt von 4 Lösungen z_1 bis z_4 in Gl. (15)–(18) derart eingeschränkt, dass wir nur jeweils zwei Lösungen erhalten, eine für jedes Blatt, und zwar im Falle, dass der Schnitt in der positiven Realteilachse liegt, $\pm\sqrt{6}$, im Fall, dass der Schnitt auf der negativen Realteilachse liegt, $\pm i\sqrt{2}$.

4 Herleitung des Leibnizschen Ausdrucks aus den Cardanischen Formeln

Betrachten wir die kubische Gleichung

$$\rho^3 - 8 = 0 \tag{20}$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$\rho_1 = 2, \tag{21}$$

dann erhalten wir mit Polynomdivision

$$(\rho - \rho_1)(\rho^2 + 2\rho + 4) = \rho^3 - 8 = 0. \tag{22}$$

Also sind die Ausdrücke

$$\rho_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3} \tag{23}$$

Nullstellen der Gleichung (20).

Bilden wir andererseits aus den vier Zahlen z_1 bis z_4 das Polynom vierten Grades

$$P(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \tag{24}$$

so erhalten wir das einfache Polynom

$$P(z) = (z-\sqrt{6})(z-i\sqrt{2})(z+\sqrt{6})(z+i\sqrt{2}) = (z^2-6)(z^2+2) = z^4-4z^2-12, \tag{25}$$

dessen Nullstellen per Konstruktion die z_i sind.

Betrachten wir nun andererseits die Gleichung

$$P(z) = z^4 - 4z^2 - 12 = 0 \tag{26}$$

als gegeben und fragen wir uns nach seiner Lösung, indem wir das Verfahren von Ferrari anwenden. Dieses verlangt in einem ersten Schritt, dass wir die allgemeine Polynomgleichung vierten Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit x, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ durch die Substitution $x = z - \frac{a}{4}$ auf die Form

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \tag{27}$$

reduzieren. Unser Polynom $P(z)$ hat aber bereits diese Form mit

$$p = -4, \quad q = 0, \quad r = -12. \tag{28}$$

Diese zerlegen wir nun in einem zweiten Schritt in zwei Gleichungen zweiten Grades. Dafür addieren wir zuerst auf beiden Seiten der Gleichung $2z^2u + u^2$, um eine quadratische Ergänzung durchführen zu können. Damit ergibt sich

$$(z^2 + u)^2 = (2u - p)z^2 - qz + (u^2 - r). \tag{29}$$

Als Nächstes wird rechts eine Null addiert, um eine weitere quadratische Ergänzung durchführen zu können

$$(z^2 + u)^2 = (2u - p)z^2 - qz + \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2 + (u^2 - r) - \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2 \tag{30}$$

$$= \left[\sqrt{2u - p}z - \frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right]^2 + (u^2 - r) - \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2. \tag{31}$$

Die rechte Seite wird ein Quadrat, wenn

$$(u^2 - r) = \left(\frac{q}{2\sqrt{2u - p}}\right)^2, \tag{32}$$

was auf eine Gleichung dritten Grades in u hinausläuft,

$$u^3 - \frac{p}{2}u^2 - ru + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0. \tag{33}$$

Falls wir eine reelle Lösung u_0 dieser Gleichung finden, können wir sie in Gleichung

(31) einsetzen und die Wurzel ziehen. Wir erhalten dann

$$z_1^2 + u_0 = + \left(\sqrt{2u_0 - p}\right) z_1 - \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}} \tag{34}$$

und

$$z_2^2 + u_0 = - \left(\sqrt{2u_0 - p}\right) z_2 + \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}} \tag{35}$$

mit den Lösungen

$$z_{1,\pm} = +\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2}\right)^2 - \left(u_0 + \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}}\right)} \tag{36}$$

$$z_{2,\pm} = -\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2u_0 - p}}{2}\right)^2 - \left(u_0 - \frac{q}{2\sqrt{2u_0 - p}}\right)}. \tag{37}$$

Um u_0 für unser Problem zu bestimmen, brauchen wir nun nicht die vollen Cardanischen Gleichungen für die Lösung der kubischen Gleichung (33), sondern wir nutzen aus, dass in unserem Fall (28) die Bedingung (32) lautet

$$u^2 + 12 = 0 \tag{38}$$

mit der Lösung

$$u_{0,\pm} = \pm 2\sqrt{-3}. \tag{39}$$

Setzt man nun $u_{0,\pm}$ und (28) in (36) oder in (37) ein, so erhält man jeweils die vier Kombinationen (15)–(18)

$$z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{-3}} \pm \sqrt{1 - \sqrt{-3}}, \tag{40}$$

also auch genau den Ausdruck, den Leibniz in seinen Briefen mehrfach erwähnt.

5 Historische Diskussion

Wir sehen also, dass die konsequente Anwendung des Verfahrens und der Regeln von Ferrari und Cardano auf die relativ einfache Gleichung vierten Grades (26) als Lösung genau den Leibnizschen Ausdruck (40) produziert. Das ist für uns nicht weiter verwunderlich, da wir das Polynom $P(z)$ ja gerade so gebildet haben, dass alle vier Wurzeln z_i seine Nullstellen sind. Da Cardano seine Formeln ja bereits publiziert hatte, ist also denkbar, dass Leibniz auf seinen Ausdruck durch

Anwendung dieser Formeln auf den Ausdruck (40) gekommen ist. Andererseits ist leicht nachzuprüfen, dass $\pm\sqrt{6}$ jeweils eine Lösung der Gleichung ist.

Es ist nun darauf hinzuweisen, dass wir z.B. bei dem Schritt von (34) zu (36) die Gültigkeit der Rechenregel

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a \cdot b} \tag{41}$$

vorausgesetzt haben, welche für komplexe Zahlen im Allgemeinen nicht gilt, wie man z.B. an folgendem Beispiel sieht

$$-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1. \tag{42}$$

Andererseits benutzt Leibniz gerade diese Rechenregel an anderer Stelle, um nachzurechnen, dass sein Ausdruck sich genau auf $\sqrt{6}$ reduziert. Er schreibt nämlich in seiner Schrift *De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium, de radicibus realibus, quae interventu imaginarium exprimuntur, deque sexta quadam operatione arithmetica*:

> Schliesslich kam es mir in den Sinn, ein Verfahren aufzustellen, welches ich hier mitteile:
>
> $$d \sqcap \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}}_{A} + \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}}_{B} \text{ oder } d \sqcap A + B.$$
>
> Also auf beiden Seiten quadriert
>
> $$d^2 \sqcap \overbrace{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}^{+A^2} + \overbrace{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}^{+B^2} + \overbrace{2c}^{+2AB},$$
>
> denn das Rechteck AB oder das Produkt von $\sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ mal $\sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ macht c, wie die Rechnung zeigt; es wird also $d^2 \sqcap b + 2c$ und daher $d \sqcap \sqrt{b + 2c}$. Setzt man also beide Werte von d einander gleich, ergibt dies
>
> $$\sqrt{b + 2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}};$$
>
> und daher, wenn wir als Zahlen einsetzen $b \sqcap 2$ und c auch $\sqcap 2$, ergibt

dies $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$.[5]

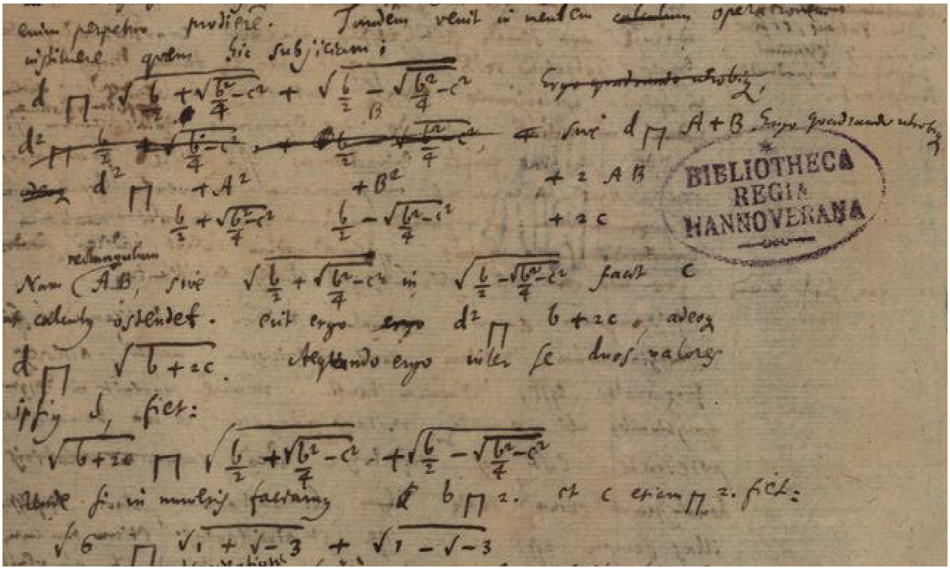


Abbildung 1: Facsimile des Leibnizschen Textes LH 35,4, 7, f2.

Wir sehen also, dass Leibniz hier ganz explizit in seinem „Verfahren“ die Rechen-

5. „Tandem venit in mentem operationem instituere quam hic subiciam:

$$d\sqcap \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}}_{A} + \underbrace{\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}}_{B} \text{ oder } d \sqcap A+B.$$

Ergo quadrando utrobique

$$d^2 \sqcap \overset{+A^2}{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}} + \overset{+B^2}{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}} \overset{+2AB}{+2c}.$$

Nam rectangulum AB, sive $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ in $\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ facit c ut calculus ostendet. Erit ergo $d^2 \sqcap b+2c$, adeoque $d \sqcap \sqrt{b+2c}$. Aequando ergo inter se duos valores ipsius d, fiet

$$\sqrt{b+2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}.$$

Unde si in numeris faciamus $b \sqcap 2$. et c etiam $\sqcap 2$. fiet $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$.“ (Leibniz 1971, S. 141, Gerhardt 1987, S. 553, Leibniz 1996, S. 683). Ein Facsimile des entsprechenden Textstücks im Originalmanuskript zeigt Abb. 1).

regel (41) implementiert und dass dieses Verfahren ihm die Identität (1) liefert. Andererseits ist es möglich, dass Leibniz auf seinen Ausdruck durch Lösung der quartischen Gleichung (26) gekommen ist und er die Identität (1) dadurch bestätigt sah, dass $\pm\sqrt{6}$ offenbar eine Lösung von (26) ist, wie man durch Einsetzen sofort sieht. Man muss sich aber klar machen, dass Leibniz in aller Wahrscheinlichkeit die quartische Gleichung (26) nicht durch Kenntnis ihrer Nullstellen erhalten hatte. Es ist auch zu beachten, dass zwar offenbar ein Polynom, das durch Kenntnis und Ausmultiplikation seiner n Nullstellen entsteht, vom n-ten Grade ist. Daraus folgt aber noch nicht umgekehrt, dass jedes Polynom n-ten Grades auch n Nullstellen besitzt, was wir erst seit dem Fundamentalsatz der Algebra sicher wissen.

Jedenfalls erwähnte Leibniz seine Identität einige Monate später nochmals. Am 27. August 1676 schrieb Leibniz nämlich einen wichtigen und später berühmten Brief, in welchem er seine eigenen bis dato erlangten Einsichten zusammenfasste, um sich seinem Konkurrenten Newton gegenüber zu behaupten. In einem Brief an Henry Oldenburg (ca. 1619–1677), den Sekretär der Royal Society, schrieb Leibniz unter Anderem:

> Ich glaube, dass die Hoffnung auf Aufhebung der imaginären Größen, die in den Ausdrücken realer Wurzeln enthalten sind, vergeblich ist, ja selbst die Suche danach. Jene sind nämlich weder den Rechnungen noch den Konstruktionen in irgendeiner Weise hinderlich: Und zwar sind Großen wahre und reale Größen, wenn sie miteinander verbunden werden, wegen der virtuellen Zerstörungen. Dies deckte ich durch viele elegante Beispiele und Beweise auf.
>
> Zum Beispiel: $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Obgleich nämlich weder aus dem Binom $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ noch aus dem Binom $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ die Wurzel gezogen werden wird, und daher auf diese Weise die imaginäre Größe $\sqrt{-3}$ nicht zerstört wird, ist dennoch anzunehmen, dass sie virtuell zerstört worden ist, was sich in Wirklichkeit zeigen würde, wenn die Wurzelausziehung stattfinden könnte. Jedoch wird auf einem anderen Weg ermittelt, dass diese Summe $\sqrt{6}$ ist.[6]

6. "Imaginarium quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem frustra puto sperari, imo quaeri. Neque enim illae ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt: Et verae Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis et Argumentis deprehendi.
Exempli gratia $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur, nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$ supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via haec summa reperitur esse $\sqrt{6}$." Leibniz an Oldenburg, 27.August 1676 (Leibniz 1976, 581); englische Übersetzung in (Hall und Hall 1986, Nr.2956).

Welches dieser andere Weg ist, auf dem die Identität (1) bewiesen werden kann, lässt Leibniz hier offen. Zwei Möglichkeiten haben wir vorgestellt: 1) als Lösung der Gleichung (26), oder 2) mittels seines „Verfahrens", bei dem die Rechenregel (41) zugrundegelegt wird.

Leibnizens Behauptungen blieben unter seinen Zeitgenossen nicht unwidersprochen. Oldenburg hatte nämlich als Sekretär der Royal Society die Aufgabe, Abschriften oder Exzerpte der ihm zugehenden Briefe auch an andere Mathematiker weiterzuleiten. So informierte er auch den englischen Mathematiker John Wallis (1616–1703), der sich ebenfalls viel mit der Lösung algebraischer Gleichungen beschäftigt hatte (Scriba 1966; Mayer 2004; Probst 2018). Oldenburgs Brief an Wallis ist nicht erhalten, aber in Reaktion auf Leibnizens Brief schrieb John Wallis an seinen Kollegen John Collins (1625–1683) am 16. September 1676:

> Was meiner Meinung nach über die unmögliche Zahl $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ zu sagen wäre, sollst Du aus dem sehen, was zum Brief an Herrn Tschirnhaus gesagt wurde. Im Ganzen ist es sicherlich wahr, dass $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ in sich geführt, das Quadrat 6 wieder herstellt und dass es deswegen gewissermaßen dessen Wurzel sei, jedoch nicht die Wurzel des wahren Quadrats, sondern nur eines monströsen und imaginären Quadrats, was nämlich das doppelte Rechteck hat und größer als die Summe der Quadrate der Teile der Wurzel ist. Schaue, ob nicht eher zu sagen wäre $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=-\sqrt{-6}$.[7]

Wallis gesteht Leibniz zwar die Gültigkeit der Identität (1) zu, aber er bezweifelt, ob dies die einzige oder vielleicht sogar die wahre Lösung sei. Seine alternative Lösung ist rätselhaft vor dem Hintergrund des mathematischen Sachverhalts, es handelt sich bei dem Minuszeichen in der Wurzel vielleicht um einen Schreibfehler. Interessant ist aber sein Versuch der geometrischen Deutung des Quadrats einer imaginären Zahl. Etwas früher hatte er an Collins dazu Folgendes geschrieben

7. „De numero impossibili $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ quid dicendum censeam, videas ex eis quae ad D. Tschirnhausii literas dicta sunt. Omnino quidem verum est $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ in se ductam restituere quadratum 6; adeoque hujus radicem quadantenus esse, non tamen quadrati veri, sed monstrosi et imaginarii tantum, utpote quod habeat duplum rectangulum, majus summa quadratorum partium radicis. Vide annon dicendum potius $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=-\sqrt{-6}$." (Rigaud 1965, Nr. CCCXLIII, S.599). In Rigaud's Edition wurde hier stillschweigend ein Fehler korrigiert. Es steht nämlich im Original bei der ersten Identität $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6$, also ohne das Wurzelzeichen auf der rechten Seite. Dagegen sind beide Minuszeichen auf der rechten Seite der zweiten Identität im Original so vorhanden, d.h. es handelt sich hier nicht um einen Transkriptionsfehler des Herausgebers Rigaud.

> [...] that a negative plane may as well be admitted in algebra as a negative length, both being in nature equally impossible; for there can no more be a line less than nothing than a plane less than nothing, both being but imaginable; and if we suppose such a negative square, we may as well suppose it to have a side, not indeed an affirmative, or a negative length, but a supposed mean proportional between a negative and positive thus designable, $\sqrt{-n}$, or rather $\sqrt{-n^2}$, that is $\sqrt{+n \times -n}$, a mean proportional between $+n$ and $-n$. Rigaud 1965, Nr.CCCXXXVI, S.577–8

In der geometrischen Deutung eines binomischen Quadrats $(a+b)^2$ ist für reelle a und b die Summe der Quadrate a^2+b^2 immer grösser als die Summe der Rechtecke $2ab$. Bei dem Quadrat des Leibnizschen Ausdrucks $\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)^2$ ist dies allerdings nicht der Fall. Daher spricht Wallis auch von einem "monströsen" oder "imaginären" Quadrat.

6 Eine Verallgemeinerung des Leibnizschen Ausdrucks

Betrachten wir abschliessend nochmals allgemein und aus heutiger Sicht die Summe

$$z = \sqrt{a} + \sqrt{\overline{a}} \tag{43}$$

der Wurzeln zweier konjugiert komplexer Zahlen $a = j+ik = re^{i\varphi}$ und $\overline{a} = j-ik = re^{-i\varphi}$ mit j, k, $\varphi \in \mathbb{R}$, $0 \leq r \in \mathbb{R}$, dann gilt wieder

$$r = |a| = |\overline{a}| = \sqrt{j^2+k^2} \tag{44}$$

und

$$\pm\,\varphi = \arcsin\left(\frac{\pm k}{r}\right). \tag{45}$$

Die Wurzeln lauten dann

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} \tag{46}$$

$$y_{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \tag{47}$$

und wir erhalten wieder vier Kombinationsmöglichkeiten

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + y_1 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ &= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} z_2 = x_1 + y_2 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ &= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\ &= 2i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} z_3 = x_2 + y_1 &= -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} = -(x_1 + y_2) \\ &= -2i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} z_4 = x_2 + y_2 &= -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{r}e^{-i\frac{\varphi}{2}} = -(x_1 + y_1) \\ &= -2\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Graphisch aufgetragen, sieht man die Zusammenhänge in Abb. (2). Die Zahlen a

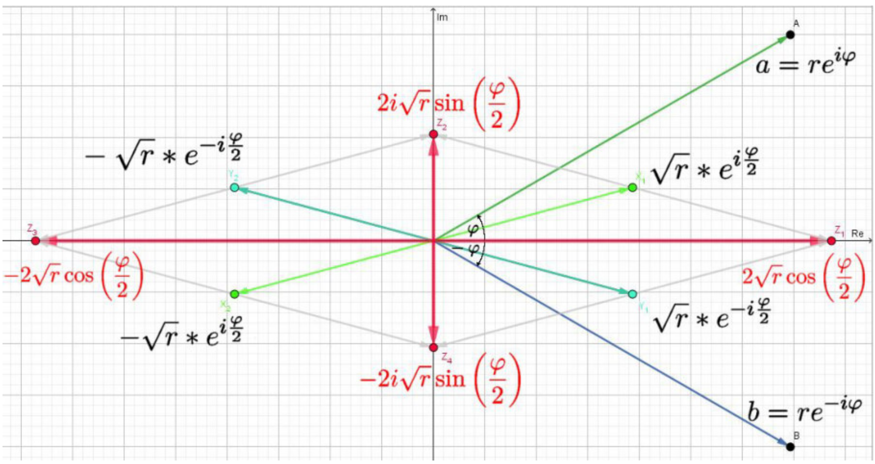


Abbildung 2: Grafische Darstellung der komplex konjugierten Zahlen a und b, deren Wurzeln x_1, x_2, y_1, y_2 sowie die Ergebnisse der Summen z_1, z_2, z_3 und z_4.

und $\overline{a}$ sind an der Reellen-Achse gespiegelt, da sie komplex konjugiert sind.

Zur Berechnung der Wurzel von a, stellen wir uns vor, wir bewegen den Punkt

A gegen den Uhrzeigersinn und mit Abstand r um das Zentrum, d.h. wir lassen φ kontinuierlich wachsen von 0 bis 4π, und betrachten als Wurzel den Ausdruck $\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$. Je nachdem, ob der Schnitt zwischen den Riemannschen Flächen auf der Realteilachse links oder rechts vom Zentrum gelegt wird, erhalten wir unterschiedliche Hauptwerte für die Wurzel.

Legen wir den Schnitt für den Übergang zwischen Riemannschen Blättern auf die positive Realteilachse, d.h. betrachten wir als Hauptwert den Winkel zwischen 0 und π, dann ist der Hauptwert der Summe $\sqrt{a}+\sqrt{\bar{a}}$ gleich der Summe von x_1 und y_2. Die Wurzeln mit den Hauptwerten haben beide $\sqrt{r}$ als Betrag und halbieren jeweils den positiven Winkel ihres Quadrats. Die Summe der Hauptwerte x_1 und y_2 ist dann rein imaginär (Fall z_2). Die Leibnizsche Identität müsste in diesem Fall also allgemein lauten

$$\sqrt{re^{i\varphi}}+\sqrt{re^{-i\varphi}}=2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{52}$$

Legt man den Schnitt allerdings auf die negative Realteilachse, d.h. betrachten wir als Hauptwert Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$, dann ist der Hauptwert der Summe rein reell (Fall z_1), und die Leibnizsche Identität müsste allgemein lauten

$$\sqrt{re^{i\varphi}}+\sqrt{re^{-i\varphi}}=2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \tag{53}$$

Danksagung. Wir danken Philip Beeley für eine Kopie des Briefes von Wallis an Collins vom 16.9.1676, Siegmund Probst und Steffen Fröhlich für hilfreiche Hinweise und Natalia Poleacova für die Übersetzung der Zitate.

Literaturverzeichnis

Gerhardt, C.I., Hrsg. 1987. *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Nachdruck der Ausgabe Berlin: Mayer und Müller, 1899. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.

Hall, A. Rupert, und Maria Boas Hall, Hrsg. 1986. *The Correspondence of Henry Oldenburg. Vol. XIII. July 1676–July 1681.* London / Philadelphia: Taylor / Francis.

Hofmann, Josef Ehrenfried. 1972. Bombellis Algebra—eine genialische Einzelleistung und ihre Einwirkung auf Leibniz. *Studia Leibnitiana* 4 (3/4): 196–252.

Huygens, Christiaan. 1899. *Oeuvres Complètes. Tome Huitième. Correspondance 1676-1684.* La Haye: Martinus Nijhoff.

Kästner, Abraham Gotthelf. 1794. *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1702. Extrait d'une lettre de M.Leibnitz a M.Varignon. *Journal des Scavans:* 183–186.

———. 1971. *Mathematische Schriften. Band VII. Die mathematischen Abhandlungen.* Nachdruck der Ausgabe Halle 1863. Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag.

———. 1976. *Sämtliche Schriften und Briefe. 3. Reihe. Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. 1. Band. 1672–1676.* Berlin: Akademie-Verlag.

———. 1996. *Sämtliche Schriften und Briefe. 7. Reihe. Mathematische Schriften. 2. Band. 1672–1676 Algebra (2. Teil).* Berlin: Akademie-Verlag.

———. 2011. *Die mathematischen Zeitschriftenartikel. Übersetzt und kommentiert von Heinz-Jürgen Heß und Malte-Ludolf Babin.* Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.

———. 2017. *Sämtliche Schriften und Briefe. 3. Reihe. Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. 9. Band. Januar 1702–Dezember 1705.* Online-Vorabdruck vom 21.9.2017 auf leibnizedition.de, eingesehen am 18.9.2018. Berlin: Akademie-Verlag.

Mayer, Uwe. 2004. "Neither unuseful nor absurd when rightly understood"—Imaginäre Zahlen und ihre Darstellung bei Wallis, Tschirnhaus und Leibniz. In *Mathematik im Fluss der Zeit. Tagung zur Geschichte der Mathematik in Attendorn / Neu-Listernohl (28.5. bis 1.6.2003),* 172–187. Augsburg: Dr. Erwin Rauner Verlag.

Pieper, Herbert. 1985. *Die komplexen Zahlen. Theorie—Praxis—Geschichte.* Thun und Frankfurt/Main: Harri Deutsch.

———. 1988. *Heureka. Ich hab's gefunden. 55 historische Aufgaben der Elementarmathematik.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Probst, Siegmund. 2018. The Relation between Leibniz and Wallis: An Overview from New Sources and Studies. *Quaderns d'Historia de l'Enginyeria* 16:189–208.

Remmert, Reinhold. 1983. Komplexe Zahlen. In *Zahlen,* herausgegeben von H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel und R. Remmert, 45–77. : Springer.

Rigaud, Stephen Jordan, Hrsg. 1965. *Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Vol. II.* Nachdruck der Ausgabe Oxford 1981. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung.

Scriba, Christoph J. 1966. *Studien zur Mathematik des John Wallis (1616–1703).* Wiesbaden: Franz Steiner Verlag.

Tropfke, Johannes. 1902. *Geschichte der Elementarmathematik. Erster Band. Rechnen und Algebra.* Leipzig: Von Veit & Comp.

„Feeling the essence of mathematics“ – Sokratische Gespräche im Mathematischen Haus in Isfahan

Shafie Shokrani, Susanne Spies

Das Mathematische Haus in Isfahan ist eine außerschulische Bildungseinrichtung, in der Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit eröffnet werden soll, eigenständige Erfahrungen im Umgang mit Mathematik und ihren Anwendungen zu machen. Abseits vom methodisch eher traditionell frontal ausgerichteten Schulunterricht soll dabei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern auch die Chance gegeben werden, mathematische Problemlösestrategien zu entwickeln und über Mathematik sprechen zu lernen. Ein Ansatz, an dem sich die Arbeit daher dort immer wieder orientiert, ist das sogenannte „Sokratische Gespräch“, eine nach dem Sokrates in Platons Dialogen benannte und u.a. von Leonard Nelson (1882-1927) ausgearbeitete Lehrmethode. Neben der Philosophie wird die Mathematik als besonders geeignetes Anwendungsgebiet dieser Methode immer wieder hervorgehoben und daher auch von Seiten der Mathematikdidaktik aufgegriffen. Die Methode und ihre Anwendung im Mathematischen Haus soll im Folgenden näher dargestellt und didaktisch reflektiert werden. Nach einer Vorstellung des Mathematischen Hauses und seines Kurssystems werden im Folgenden mit den Ansätzen Hartmut Spiegels und Martin Wagenscheins zwei zeitgenössische mathematikdidaktische Ansätze zur Anwendung des Sokratischen Gesprächs vorgestellt. Vor diesem Hintergrund können dann konkrete Beispiele aus der Arbeit im Mathematischen Haus skizziert und mit Blick auf die Methode analysiert werden. Dabei steht einerseits die Frage im Vordergrund, inwiefern die diskutierten Lehr-Lern-Situationen Beispiele für gelungene sokratische Gespräche darstellen. Darüber hinaus wird außerdem der Frage nachgegangen, inwiefern Mathematik als Gegenstand Sokratischer Gespräche eine besondere Herausforderung darstellt.

1 Das Haus der Mathematik in Isfahan

In Vorbereitung auf das Jahr der Mathematik 2000 wurde 1996 die iranische Gesellschaft für Mathematiklehrkräfte (IMEC) gegründet und im Rahmen der Gründungskonferenz die Idee zur Einrichtung eines „Mathematischen Hauses“ ausgearbeitet. 1997 konnte die erste Einrichtung dieser Art in Isfahan eröffnet werden, die bald auch international Beachtung fand. Inzwischen gibt es iranweit in insgesamt 30 verschiedenen Städten ähnliche Institutionen. (Vgl. Kenderov et al. 2009, S. 88ff) Die vielfältigen Aufgaben und Ziele dieser außerschlulischen Einrichtung fasst der Gründer Ali Rejali wie folgt zusammen:

> „The Houses are meant to provide opportunities for students and teachers at all levels to experience team work by beeing involved in a deeper understanding of mathematics through the use of various media.
>
> These include information technology and independent studies, feeling the essence of mathematics and learning about the history and applications of mathematical sciences, playing mathmatics games and studying interdisciplinary ideas such as mathematics and art, studying mathematics and genetics, mathematics and social sciences, and medical or engineering mathematics.“ (Rejali 2018)

Im Mathematischen Haus werden dazu vielfältige Aktivitäten für die verschiedensten Zielgruppen – Schüler, Studierende, Lehrer und die interessierte Öffentlichkeit – angeboten. Dazu zählen Vorträge, Ausstellungen, Lehrerfortbildungen, Förderung für Sehbehinderte, Workshops für Studierende und extracurriculare Kurse für Schülerinnen und Schüler verschiedener Schulstufen.[1] Im Folgenden sollen mit den *Hastēhāye Pajūhēši* [2] (sog. Forschungskernen) längerfristige außerschulische Angebote für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe insbesondere mit Blick auf die methodische Gestaltung der Kurse genauer vorgestellt werden.

Im Rahmen von ca. fünf bis sechswöchigen *Vorstellungskursen* können sich die freiwillig teilnehmenden Schülerinnen und Schüler[3] ein Bild von verschiedenen möglichen inhaltlichen Vertiefungsrichtungen machen. In mehreren Sitzungen präsentieren die jeweils zur Verfügung stehenden Dozentinnen und Dozenten zentrale Gegenstände, interessante Forschungsfragen und Arbeitsweisen und stellen so die

1. Für eine ausführliche Darstellung siehe (Kenderov et al. 2009), S. 89ff sowie den Internetauftritt des mathematischen Hauses in Isfahan www.mathhouse.org.
2. هسته‌های پژوهشی
3. Im Mathematischen Haus werden die Kurse nach Geschlechtern getrennt angeboten. Die Dozentinnen und Dozenten wie auch die Inhalte und die verwendeten Methoden sind dabei für beide Gruppen gleich. Daher wird im Folgenden entweder von Schülerinnen *oder* Schülern gesprochen, wenn es um die Darstellung konkreter Situationen geht.

jeweiligen mathematischen Teildisziplinen ausführlich vor. Auf dieser Grundlage können sich die weiterhin Interessierten für die Teilnahme an einem *Vorbereitungskurs* entscheiden. Dort werden an elementaren Beispielen mathematische Denk- und Arbeitsweisen reflektiert und in Kleingruppen eingeübt (siehe Beispiel unten). Weiterführend finden sich die Teilnehmer in Gruppen von 3-4 Personen zusammen, um im Rahmen der *Hastēhāye Pajūhēši* betreut durch eine Dozentin oder einen Dozenten einer tiefergehenden mathematischen Forschungsfrage nachzugehen. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden im Anschluss auf einem jährlich stattfindenden *Festival* – hausintern oder auch landesweit – präsentiert und ggf. prämiert. Zu den Forschungsfragen der Preisträger zählten z.B. Forschungsarbeiten zu folgenden Themen: fraktalgeometrischen Muster in den Parkettierungen der Mosaike in Isfahan, Spieltheorie, Stochastik. Methodisch spielt insbesondere im Rahmen der Vorstellungs- und Vorbereitungskurse das Sokratische Gespräch eine besondere Rolle, welches im Folgenden zunächst allgemein vorgestellt und exemplarisch analysiert werden soll.

2 Das Sokratische Gespräch als Lehrmethode

Im Bereich der Mathematikdidaktik gibt es verschiedene Beispiele, die in der Tradition Leonard Nelsons das Sokratische Gespräch als bevorzugte Lehrmethode beschreiben und in der Anwendung darstellen. Dazu gehören die Ansätze von Hartmut Spiegel (Spiegel 1991), Rainer Loska (Loska 1995) und Martin Wagenschein (Wagenschein 1999), wobei sich die beiden erstgenannten auf den Nelsonschüler Gustav Heckmann (1898-1996) beziehen, während Wagenschein direkt die Ideen Nelsons aufgreift. Im Folgenden soll mit Spiegel und Wagenschein jeweils eine Position aus beiden Traditionen kurz skizziert werden, um dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede vor dem Hintergrund der Nelsonschen Philosophie herauszustellen.

Spiegel orientiert sich in seiner Verwendung von Sokratischen Gesprächen beim Mathematiklernen explizit an den von Heckmann aufgestellten Regeln. Diese betreffen einerseits das Verhalten der Teilnehmer im Dialog, und andererseits beschreiben Sie die Rolle des Gesprächsleiters. Für die Teilnehmer bedeutet sokratisches Gespräch in diesem Sinne, dass sie neben einer für alle verständlichen, klaren und kurzen Sprache das im Moment besprochene Thema beibehalten sollen. Wichtig ist außerdem, dass die Beiträge der anderen Teilnehmer gleichberechtigt zur Geltung kommen und in die Diskussion eingebunden werden sollen. Dabei werden Verständnisfragen aufgegriffen und Zweifel ausgesprochen mit dem Ziel zu einem Konsens zu gelangen (vgl. Spiegel 1989b, S. 54).

Für den Gesprächsleiter gelten die „sechs pädagogischen Maßnahmen“ nach Heckmann: 1. „Das Gebot der Zurückhaltung“, d.h. die eigene Position nicht zu explizieren, um den Teilnehmern Raum für eigene Urteilsversuche zu lassen. 2. „Im Konkreten Fuß fassen“ bedeutet, die Teilnehmer zur Formulierung von Beispielen anzuregen. Der Gesprächsleiter soll außerdem 3. „das Gespräch als Hilfsmittel des Denkens voll ausschöpfen“, in dem er auf echtes Verstehen und genaue Verständigung der Teilnehmer achtet. Wie die Teilnehmer auch, ist er 4. dazu aufgefordert an der „gerade erörterten Frage“ festzuhalten und 5. auf einen Konsens hinzuarbeiten. Dabei kommt dem Gesprächsleiter die Rolle zu, das Gespräch entsprechend der genannten Regeln zu lenken. (Vgl. Spiegel 1989b, S. 55) Den Wert für das Lehren und Lernen von Mathematik verdeutlicht Spiegel einerseits mit Hilfe eines Beispiels aus der Erwachsenenbildung.[4] An anderer Stelle (Spiegel 1989a) gibt er die Reaktionen von Studierenden, mit denen nach den oben beschriebenen Regeln gearbeitet wurde, wieder und kommentiert diese. Dabei stellt er zum einen fest, dass sich die Mathematik in besonderer Weise als Gegenstand sokratischer Gespräche eignet, da hier das „Selbstvertrauen in die Kraft des eigenen Denkens“ besonders deutlich werden könne (Spiegel 1989a, S. 169). Damit greift er eines der zentralen Elemente des sokratischen Paradigmas nach Nelson auf (vgl. Raupach-Strey 2012, S.49). Darüber hinaus stellt er fest, dass die im sokratischen Gespräch gemachten Erfahrungen die Auffassungen der Studierenden von Mathematik erweitern können, da so insbesondere deren Prozesshaftigkeit erlebbar wird. Auch stellt er fest, dass Uneindeutigkeiten im Verständnis und in der Verwendung der Begriffe explizit werden und damit ausgeräumt werden können. Dies geschieht im Gegensatz zu anderen Unterrichtsgesprächen nicht zufällig, sondern ist in den oben dargestellten Regeln des sokratischen Vorgehens angelegt. Dies gilt auch für die Erfahrung, dass im Verständigungsprozess das eigene Verstehen geschärft werden kann und der Wert von explizit gemachtem Unverständnis für den Verstehensprozess einer Gruppe wird erlebbar. Spiegel äußert weiter die Vermutung, dass die Erfahrungen von Studierenden mit sokratischen Gesprächen im Rahmen der Lehrbildung auch zum Überdenken der später angewendeten Methoden und Lehrerrollen führen könnten. (Vgl. Spiegel 1989a, S. 170f).

Von Spiegels Ausgestaltung Sokratischer Gespräche im Mathematikunterricht in gewissem Sinne abzugrenzend ist der Ansatz von Martin Wagenschein (Wagenschein 1999). Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist es, Schülerinnen und Schüler ausgehend von initialen Problemen der Erfahrungswelt zu einer „Wiederentdeckung“ mathematischer Grundannahmen anzuregen. Die initialen Probleme können dabei z.B. der Physik oder auch der mathematischen Anschauung entnom-

4. In mehreren Sitzungen wird der Frage nachgegangen, warum eine bestimmte Multiplikationstechnik allgemeingültig ist (vgl. Spiegel 1989b, S. 57ff).

men sein, sollten aber von den Schülerinnen und Schülern mindestens potentiell erlebbar sein. Wagenschein selbst beschreibt das Ziel dieses Vorgehens mit dem Schlagwort „aus dem Seltsamen das Selbstverständliche zu machen“ (S. 135) und stützt sich dabei auf das „Genetische Prinzip“ nach Freudenthal und Wittenberg. Dieses Vorgehen ist motiviert durch die Grundannahme, dass es im Mathematikunterricht nicht darum gehen sollte, den deduktiven Aufbau der Mathematik nachzuvollziehen, sondern diesen exemplarisch zu rekonstruieren. Dies entspricht in seinen Grundzügen dem, was Hilbert (Hilbert 1917) als Paradigma des „Axiomatischen Denkens“ im Bereich der Wissenschaft Mathematik bezeichnet. Außerdem fällt dieses Vorgehen unter den Begriff der „regressiven Methode“ und damit unter ein das Sokratische Gespräch nach Nelson auszeichnendes Prinzip (vgl. L. Nelson 1970).

Eine zentrale Stellung nimmt auch in Wagenscheins Methode die Rolle des Lehrenden bzw. des Gesprächsleiters ein, die er mit der Metapher des Flussufers beschreibt:

> „Dabei braucht nicht der Lehrer der Antreiber zu sein, der den Fluss des Verstehens-Prozesses in Gang hält. Er kann sich den Ufern vergleichen, zwischen denen jener Fluss seinen Weg sucht, bewegt allein vom Problem.“ (Wagenschein 1999, S. 125)

Wagenschein gibt im Gegensatz zu Spiegel keine expliziten Verhaltensregeln für den Gesprächsleiter vor, sondern orientiert sich an Fragen, wie Sie Nelson für ein Sokratisches Gespräch vorschlägt: z.B. „Wer hat verstanden, was eben gesagt worden ist?“ oder „Von welchen Fragen sprechen wir eigentlich?“. Da diese aber vom Paradigma eines strengen „Antidogmatismus“ (L. Nelson 1970-1973) getragen lediglich darauf gerichtet sind, das Gespräch der Teilnehmer immer wieder anzuregen, schlägt Wagenschein für die Anwendung im Mathematikunterricht in gewissem Sinne inhaltsspezifischere Fragen vor. Dabei denkt er an Fragen, deren Beantwortung auf dem Lösungsweg mathematischer Fragen hilfreich sein können, wie sie George Polya auflistet: „Was ist unbekannt? Was ist gegeben?“, „Kennst Du eine verwandte Aufgabe?“ usw. (Polya 1949, Umschlagseiten) Das heißt, der Gesprächsleiter soll zwar nicht direkt auf das konkrete Problem eingehen, schlägt jedoch durch solche Fragen erprobte mathematische Lösungsstrategien vor.

An diesen beiden Ansätzen zur Verwendung des Sokratischen Gesprächs im Mathematikunterricht werden exemplarisch die Unterschiede zwischen Nelsons Ansatz und dem seines Schülers Heckmann deutlich: Während Spiegel in Anlehnung an Heckmann explizite Gesprächsregeln für Teilnehmer und Leiter des Gesprächs vorgibt, beschreibt Wagenschein Nelson folgend lediglich eine dem Gespräch dienliche

Haltung des Gesprächsleiters und verdeutlicht diese an exemplarischen Fragen oder Regieanweisungen.

Darüber hinaus nehmen Beispiele in beiden Ansätzen verschiedene Rollen ein. Wagenschein und Nelson dienen Beispiele als „initiale Probleme", von denen die sogenannte „regressive Methode der Abstraktion" (L. Nelson 1970) ausgeht. Bei Spiegel dagegen beginnt ganz in der Heckmannschen Tradition das Gespräch mit einer bestimmten Thematik für die zunächst verschiedene Beispiele gesucht werden. Aus diesen wird dann im Gespräch von den Teilnehmern eines ausgewählt, von dem aus dann wiederum auf eine allgemeine Regel und grundlegende Prinzipien geschlossen werden soll (vgl. das sogenannte „Sanduhr-Modell" nach Kessels 1997).

Einen zentralen Unterschied zwischen Heckmanns und Nelsons Auffassung von sokratischen Gesprächen besteht im Ziel des Gesprächs. So soll Heckmann folgend ein Konsens der Gesprächsteilnehmer erreicht werden (vgl. auch die 5. Regel nach Spiegel, s.o.), wobei es sich dabei um eine Art demokratische Einigung der Gesprächsteilnehmer handelt, bei der es nicht zuerst auf die inhaltliche Korrektheit ankommt.[5] Für Nelson dagegen steht nicht der Konsens im Sinne einer Problemlösung im Vordergrund, sondern einerseits die Erkenntnis der zu Grunde liegenden Prinzipien und andererseits die Hinführung der Teilnehmer zu selbstständiger Implementierung der „*Methode* der Lösung" (vgl. L. Nelson 1970, S. 293f). Wagenschein, dessen Blick ausschließlich auf das Mathematiklernen gerichtet ist, nimmt hier eine Zwischenstellung ein. Auf der einen Seite lässt er den Gesprächsleiter mittels der Polyaschen Fragetechnik sehr lösungs- und damit implizit auch konsensorientiert agieren, wobei es selbstverständlich auf eine mathematisch korrekte Problemlösung abzielen soll. Auf der anderen Seite ist im Sinne des genetischen oder axiomatischen Vorgehens ebenfalls die Erkenntnis der zu Grunde liegenden Sätze und Prinzipien das Ziel des Gesprächs.

Hier zeigt sich eine Besonderheit der Anwendung der Sokratischen Methode im Bereich der Mathematik: Bezogen auf ein konkretes Problem ist dem Gesprächsleiter in der Regel eine mathematisch korrekte Lösung bekannt und damit der angestrebte inhaltliche „Konsens" ebenfalls. Eine Lösung könnte somit auch „dogmatisch" präsentiert werden. Jedoch stellt bereits Nelson selbst fest, dass „der beste mathematische Unterricht, wenn er nach dogmatischer Methode erfolgt, trotz aller seiner Klarheit gründliches Verständnis nicht erzwingen kann" (L. Nelson 1970, S. 312), was er nicht zuletzt mit dem Hinweis auf berühmte mathematisch durchaus

5. Dies ist mit Blick auf die Anwendung der Sokratischen Methode auf philosophische Fragestellungen auch nicht verwunderlich. Mit Blick auf den Mathematikunterricht kann dieser liberale Konsensbegriff allerdings zu schwer auflösbaren Schwierigkeiten führen (vgl. z.B. die von Anna Sfard beschriebenen Beispiele in (Sfard 2002)).

als begabt zu bezeichnende Schüler (etwa Du Bois-Reymond in der Nachfolge von Weierstrass) zu belegen versucht. Das eigentliche Ziel der Methode muss somit eher darin bestehen, den Schülerinnen und Schülern eine Erfahrung des Prozesses der mathematischen Problemlösung (heuristische Strategien usw.) und damit ein tieferes Verstehen zu ermöglichen.

Die Orientierung auf einen Konsens hin liegt bei mathematischen Problemen darüber hinaus im Gegenstand selbst, d.h. in der Aufforderung zu einer mathematisch korrekten Problemlösung, wobei „mathematisch korrekt“ bedeutet, dass ein Lösungsvorschlag mit mathematischen Mitteln begründbar bzw. beweisbar ist (und nicht etwa demokratisch abgestimmt oder sozial ausgehandelt wird). Der Gesprächsleiter muss also nicht im Sinne von Spiegels fünfter Gesprächsregel dafür sorgen, *dass* es zu einem Konsens kommt, sondern höchstens im Blick behalten, dass es sich um einen *Konsens im mathematischen Sinne* handelt (also z.B. zur Begründung auffordern oder gegebene Begründungen hinterfragen oder zur Präzisierung der Begriffe auffordern).

3 Sokratische Gespräche in der Praxis

Die Arbeit im Mathematischen Haus orientiert sich einerseits an den methodischen Regeln für sokratische Gespräche nach Spiegel (s.o.). Andererseits verwenden die Dozierenden Gesprächsanregungen, die sich, wie oben in Wagenscheins Herangehensweise beschrieben, auch an den Polyaschen Fragen orientieren, und das Gespräch beginnt im Sinne Wagenscheins mit Hilfe eines „initialen Problems“. Im Folgenden soll dies an drei Beispielen aus den Bereichen Vorstellungskurs Geometrie und der Vorbereitung auf die eigenen Forschungsprojekte exemplarisch dargestellt werden.

Neben einem Rückblick auf das aus der Schule bereits bekannte Wissen um Grundbegriffe der Geometrie ist es ein Anliegen des Vorstellungskurses, Anwendungen von Geometrie u.a. im Alltagsleben kennen zu lernen. Methodisch sollen die Teilnehmer von Beginn an die Erfahrung machen, sich aktiv auch in der Großgruppe am Lernprozess zu beteiligen. Dies ist für viele Teilnehmer eine neue Erfahrung, da die Unterrichtskultur im Fach Mathematik an iranischen Schulen häufig eher frontal geprägt ist.

Die (Wieder-)Entdeckung und Beschreibung geometrischer Grundkonzepte war das Hauptanliegen der ersten Sitzung. Dazu wurden zum Auftakt zwei Werke des Künstlers M. C. Escher („Circle Limit I“ und „Circle Limit II“) präsentiert, die die Teilnehmer möglichst mit Hilfe mathematischer Begriffe zu beschreiben sollten.

Um dazu erste Ideen zu sammeln, wurde die Gruppe zunächst in kleinere Gruppen

(a) Circle Limit I

(b) Circle Limit II

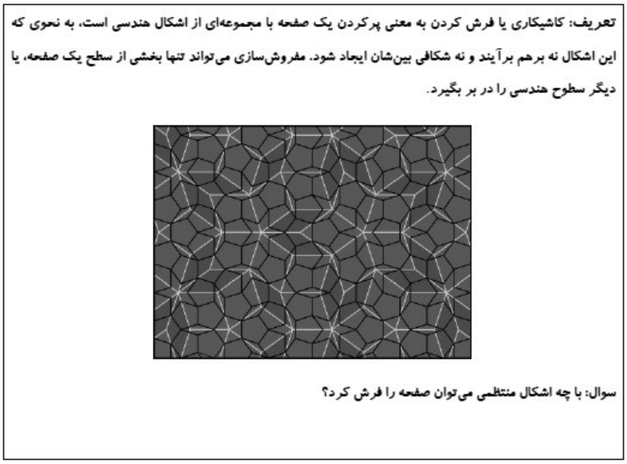
Abbildung 1

unterteilt, die jeweils von einer Dozentin oder einem Dozenten betreut wurde, deren Aufgabe darin bestand, die Ideen der Teilnehmer zu sammeln, zu genauen Beschreibungen und Begründungen herauszufordern, aber nicht zu bewerten. Im Anschluss wurden die Ergebnisse durch die Schülerinnen und Schüler selbst im Plenum vorgestellt und auf Rückfragen der anderen Gruppen eingegangen.

Zur Gesprächsleitung haben sich die Dozierenden in den Kleingruppen an den Spiegelschen Regeln der Gesprächsführung orientiert. Es gab mit den Eschersgrafiken einen „initialen Gegenstand" im Wagenscheinschen Sinne, wobei dieser nicht direkt auf eine mathematische Problemstellung führt, sondern der Auftrag im Auffinden bekannter mathematischer Begriffe bestand. Das Ziel der Beschreibung der den Grafiken zu Grunde liegenden mathematischen Ideen konnte somit auch zu einem in gewissem Sinne konsensoffenen Dialog führen: Die Schülerinnen müssen sich zwar darauf einigen, ob die Anwendung eines bestimmten Begriffs angemessen zur Beschreibung eines bestimmten Phänomens in der gegebenen Graphik ist (z.B. Symmetrie). Dabei gibt es jedoch nicht die eine vollständige oder eindeutige Lösung des Auftrags. In der Gruppe muss also ein Konsens gefunden werden, welcher aber nicht durch das mathematische Problem und seine Lösung vorgegeben ist. Der Dozent unterstützt diese Art der Konsensorientierung wie oben diskutiert, indem er zur Präzisierung des Beschriebenen auffordert.

Nach der Erinnerung an einige Grundbegriffe der Schulgeometrie widmet sich die zweite Sitzung des Vorstellungskurses exemplarisch einem Parkettierungsproblem initiiert durch die Frage, warum Bienenwaben immer aus regelmäßigen Sechsecken bestehen. Das Ziel der Sitzung war es einerseits einen Einblick in elementargeometrische Modellierungsprobleme zu bekommen und darüber hinaus an einem anschaulichen Beispiel sowohl (prä-)formale als auch experimentelle innermathematische Begründungsmuster zu erleben. Dabei handelt es sich bei dem gestellten

Einstiegsproblem zunächst um ein klassisches initiales Problem im Sinne Nelsons, da es um die Erklärung eines Naturphänomens geht. Allerdings wurde mit Blick auf die zur Verfügung stehende Zeit der Mathematisierungsschritt zunächst durch die Dozierenden vorgegeben. Die eigentliche Arbeit in Sokratischer Weise beginnt somit erst mit der innermathematischen Frage danach, mit welchen regelmäßigen Polygonen eine Ebene parkettiert werden kann (vgl. Abb. 2). Diesem Problem wird


تعریف: کاشیکاری یا فرش کردن به معنی پرکردن یک صفحه با مجموعه‌ای از اشکال هندسی است، به نحوی که این اشکال نه برهم برآیند و نه شکافی بین‌شان ایجاد شود. مفروش‌سازی می‌تواند تنها بخشی از سطح یک صفحه، یا دیگر سطوح هندسی را در بر بگیرد.

سوال: با چه اشکال منتظمی می‌توان صفحه را فرش کرد؟

Abbildung 2: Arbeitsauftrag

in Gruppen von drei bis vier Teilnehmern begleitet durch eine Dozentin oder einen Dozenten nachgegangen, wobei die Rolle des Dozenten insbesondere darin besteht, zusammenzufassen und zu mathematischen Begründungen aufzufordern, wie der folgende Auszug aus einem Gruppengespräch zeigt. Dem Auszug voraus geht die Überlegung der Gruppe, dass eine Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken und Quadraten möglich ist.

Schüler 1 zeichnet einige zusammengebundene Dreiecke (vgl. Abb. 3).

Schüler 1: Er ist da! ...

Schüler2: Diese müssen gleichseitige Dreiecke sein. Sie sind regelmäßig [er weist auf die Zeichnung]. Wenn wir auf diese Weise weitermachen, können wir die Ebene parkettieren.

Dozent: Mit welchen anderen [regelmäßigen] Polygonen kann man das machen?

Schüler2: So Herr, wenn es mit diesen möglich ist [zeigt auf regelmäßige Dreiecke], ist es mit Sechsecken auch möglich. Weil diese selbst die Sechsecke bilden.

Dozentin: Gut, diese zwei akzeptieren wir. Welche noch?

Schüler1: Herr, Dreieck, Quadrat, Sechseck.

Ein Schüler von einer Nebengruppe: Ihr müsst das beweisen!

Schüler1: Das haben wir schon.

Nun steht die Frage im Raum, ob das Pentagon dies auch leistet:

Dozentin: So dann... eine Anzahl von diesem Winkel muß 360° werden. Wie viele [regelmäßige] Fünfecke kann man hier zusammenbinden?

Schüler1: Gut... wir müssen zuerst sehen wie groß jeder Winkel ist. [Zu seinen Gruppenkameraden] Wie war die Formel?... $\frac{n-2}{n} \times 180°$?...120°?

Dozentin: Schreib es auf!

Schüler2: Es wird $\frac{5-2}{5} \times 180° = \dfrac{3}{5} \times 180° = 108°$.

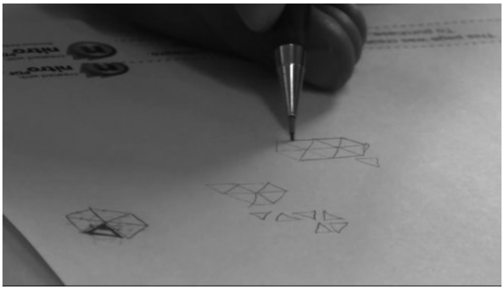


Abbildung 3: Annäherung mit Hilfe einer Skizze.

Nachdem die Gruppen herausgefunden haben, dass eine lückenlose Parkettierung nur mit regelmäßigen Drei-, Vier- und Sechsecken möglich ist, war noch die Frage zu beantworten, warum die Bienen nun die Sechseckform wählen. Dazu wurde wiederum von den jeweiligen Dozenten ein Gespräch über die physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Prismen sowie das Isoperimetrische Problem angeregt. Dies geschah durch ein neues aber einfacheres initiales Problem: Warum haben Rohre für Wasser-, Öl- und Gastransport einen kreisförmigen Querschnitt? Außerdem regten die Dozierenden jeweils dazu an, dabei speziell den Fragen nach Materialverbrauch und Stabilität nachzugehen. Um sich der Frage nach dem optimalen Querschnitt experimentell zu nähern, bekommen die Gruppen eine 36cm lange Schnur, ein Lineal und ein kariertes Blatt (zur näherungsweisen Bestimmung der Fläche).

Abbildung 4

Im auf die Gruppenarbeit folgenden Klassengespräch wurden die Lösungen der verschiedenen Problemstellungen wiederum im sokratischen Gespräch mit Blick auf das Ausgangsproblem der Bienenwabe zusammengebracht. Die Aufgabe des Gesprächsleiters bestand darin mit Fragen zunächst die Antworten auf das Parkettierungsproblem und die physikalischen Fragen zusammenzutragen und auszuschärfen und im Anschluss die Übertragung auf das Bienenwabenproblem anzuregen. Dabei kam es zur Begründung des Übergangs vom Kreis als optimalem Querschnitt zum Sechseck zu Argumentationen, die im Nelsonschen Sinne als „Aufweisung auf die unmittelbare Erkenntnis“ (vgl. Nelson 1927) beschrieben werden können.

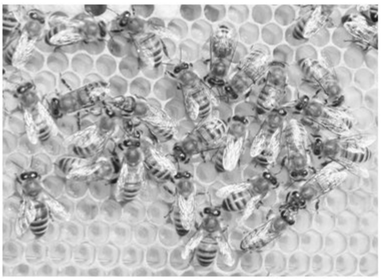


Abbildung 5

Dozentin: Dieses Mal ist der Sprecher jeder Gruppe derjenige, der rechts von vorigem Gruppensprecher sitzt. Gut, die Antwort zu der Frage: „Warum ist das Sechseck eine geeignete Gestalt für eine Bienenwabe?“.

Sprecher von Gruppe 1: Die Imker haben eine Ebene, die von Bienen benutzt wird. Um diese Ebene maximal benutzt wird, verwenden wir Sechsecke. Somit werden wir auf der Ebene, die von Bienen benutzt wird, die maximale Anwendung.

Dozentin: Gut. Kann die nächste Gruppe die Erklärung von der letzten Gruppe vervollständigen?

Sprecher von Gruppe 2: Erstens hat es mehr Stabilität. Es selber ... deckt mehr Raum. Noch eine Sache, ... weniger Material wird verwendet.

Dozentin: Warum wird weniger Material verbraucht?

Sprecher von Gruppe 2: Weil wenn es z. B. Quadrate wären ...

Dozentin: Ja ...

Sprecher von Gruppe 2: In einem Quadrat wird mehr Material verbraucht als in einer Gestalt wie dem Sechseck.

Dozentin: Warum? Ist es nicht besser wenn sie Quadrate verwenden?

Sprecher von Gruppe 2: So wird aber mehr Material verbraucht.

Dozentin: Gut! Lasst uns hören was die nächste Gruppe sagt.

Sprecher von Gruppe 3: Wir wollen zwei Gründe nennen. In dem Innenraum kann mehr Honig gespeichert werden im Vergleich mit einem Quadrat oder einem Dreieck. Dies auch ... je mehr die Anzahl der Seiten, desto mehr gilt diese Eigenschaft. Das auch, dass sie gesagt haben, dass weniger Material gebraucht wird. Je mehr Seiten, desto weniger Material wird gebraucht.

Dozentin: Warum kann die Anzahl der Seiten nicht mehr als 6 sein?

Sprecher von Gruppe 3: Weil die Binnenwabe-Ebene damit nicht lückenlos gedeckt werden kann.

Dozentin: Ihre Gruppe!

Sprecher von Gruppe 4: Die Frage war warum wurden hier Sechsecken verwendet.

Dozentin: Richtig.

Sprecher von Gruppe 4: Weil es mehr Stabilität hat,... und das auch, dass in wenigen Raum man mehr davon haben kann, deswegen wird weniger Material gebraucht ... und in der Einheit der Volumen, mehr Honig reinpasst.

Dozentin: Ihre Gruppe!

Sprecher von Gruppe 5: Wie sehen die Gestalten in einer Binnenwabe aus? Sechseckig. Warum sechseckig? Wegen der Parkettierung. Sie können mehr Druck aushalten. Es hat so mehr Volumen.

Dozentin: Sie!

Sprecher von Gruppe 6: Sechseckig, weil man damit Parkettieren kann und den Rest haben die anderen gesagt.

> **Dozentin:** Es war sehr gut Kinder! Lasst uns eine Zusammenfassung von dem was Sie gesagt haben machen.

Ein weiteres Beispiel, an dem die Wirkung Sokratischer Gespräche deutlich werden kann, stammt aus einem Vorbereitungskurs auf die spätere Arbeit in den *Hastēhāye Pajūhēši*. Nach einer eher angeleiteten Sitzung, in der es zunächst darum ging, überhaupt Fragen zu mathematischen Begriffen zu stellen und begründet zu beantworten, wurde in der Folgesitzung die Diskussion zunächst auch mit der Aufforderung zur Formulierung mathematikhaltiger Fragen zu einer vorgegebenen Zeichnung eingeleitet:

> „Formuliert ein Problem zu folgender Zeichnung (Abb. 6, das relevant für das Alltagsleben in Eurer Umgebung ist bzw. stellt Fragen zu Anwendungen außerhalb der Mathematik.“

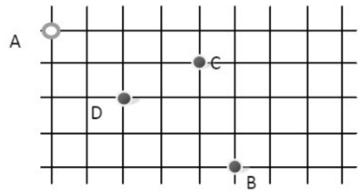


Abbildung 6

Nach einer ca. 15minütigen Diskussion in Kleingruppen wurden die dabei entstandenen Fragen an der Tafel gesammelt, um dann im Plenum weiter über die Art der Fragen nachzudenken.

Fragen aus der Schülerinnengruppe:

- Sind die Punkte in Bezug auf deren Stellung voneinander abhängig?
- Was ist der kürzeste Weg, der durch sie geht?
- Ist das ein Diagramm von einer Funktion?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Punkte und den Zellen?

- Kann man die nächste Konstellation der Punkte mit Hilfe einer Formel finden?
- Wie viele Wege von A gibt es, die durch C und D gehen und bei B enden?
- Was ist die Steigung von AD?
- Was kann man über Ähnlichkeit der Dreiecken ACB und ADB, ihre Kongruenz und ihre jeweiligen Winkeln sagen?
- Ist der Graph, der durch Verbinden der Knoten hergestellt wird, lösbar?
- Nach welcher Regel sind die Punkte positioniert?

Fragen aus der Gruppe der Schüler:

- Wie groß ist die Fläche vom größten Parallelogramm, das man mit den vier Punkten zeichnen kann und mit wie vielen Bewegungen kann man diese Gestalt zeichnen?
- Wenn jeder der vollen Punkten alle diese Pfade durchgehen soll um bei dem leeren Punkt anzukommen, welche von denen wird früher ankommen?
- Wie lang ist die Strecke zwischen dem Punkt A und dem Schwerpunkt von dem Dreieck BCD?
- Wenn A und B ein Intervall bilden, sind die Punkte C und D in diesem Intervall?
- Wenn dieser Graph ein Kartesisches Koordinatensystem wäre, wo liegt der Punkt, der von den gezeigten Punkten gleich weit entfernt ist?
- Wenn A der Anfang und B, C und D die Ziele sind, wie viele kürzeste Wege von A nach B, C und D existieren?
- Ein Flugzeug will von A nach B fliegen und unterwegs in C und D tanken. Was ist der kürzeste weg wenn es von A nach B und durch C und D fliegt?

Damit wird die entstandene Fragensammlung (Beispiele siehe Kasten) zum initialen Problem bzw. zum Ausgangspunkt für das folgende initiale Problem *Was ist eine gute mathematische Frage?* im anschließenden sokratischen Gespräch. Dieses wurde dabei durch den Gesprächsleiter durch Hinweise auf in gewissem Sinne problematische, also etwa unklare oder uneindeutige oder nicht lösbare, Beispiel-fragen angeregt. Dies führte über die Analyse der jeweiligen Schwierigkeiten im gemeinsamen Gespräch zu folgenden von den Teilnehmern formulierten Kriterien guter mathematischer Fragen:

> „Es muss klar sein, was gegeben ist. Es muss klar sein, was gesucht ist. Die Frage darf nicht mehrdeutig sein. Die Frage soll eine nützliche Lösung haben. Die Aussage muss verständlich ausgedrückt sein. Die Frage soll herausfordernd sein. Die Frage soll lösbar sein. Die Frage soll kurz und bündig formuliert sein. Die Frage soll aus der Anwendung stammen. usw.“

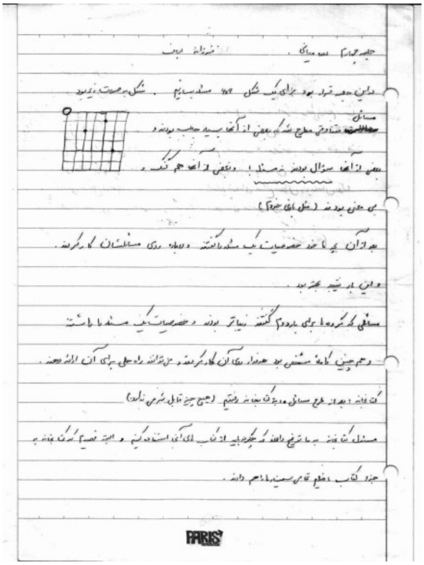
Diese Kriterienliste kann also als der im Gespräch angestrebten Konsens angesehen werden. Anders als bei Gesprächen über innermathematische Initialprobleme ist der Konsens jedoch weder vorher dem Gesprächsleiter bekannt noch kann er mittels mathematischer Beweisführung als wahr oder falsch evaluiert werden. Das Beispiel zeigt also, dass auch im Rahmen der Mathematik konsensoffene sokratische Gespräche denkbar sind. Dabei kommt es darauf an, ob es sich um ein innermathematisches oder ein eher metamathematisches Initialproblem handelt.

Auf der Grundlage der im Gespräch erstellten Kriterien wird die Einstiegsaufgabe erneut gestellt.

- Angenommen Punkt A sei eine Wohnung, Punkt B eine Schule, Punkt C eine Bank und Punkt D ein Bürgeramt. Was ist der kürzeste Weg von der Wohnung zur Schule, wenn wir unterwegs zur Bank und zum Bürgeramt gehen wollen? Sollen wir zuerst zur Bank gehen oder zum Bürgeramt?
- Angenommen A ist eine Wasserquelle, C und D Wasserraffinerien und B ein Wasserverteilungszentrum. In wie viele Wegen kann man Auf dem Gitter Rohre verlegen?
- Wenn wir von Punkt C zu anderen Punkten Stromkabel verlegen wollen und einige Wege gesperrt sind und das ganze Kabel 150 m lang und jede Seite 10 m lang ist, ist eine parallele Kabelverlegung besser oder eine serielle? Auf welchen Pfaden soll sie verlaufen?
- Wie kann ein Tourist die Stadt besichtigen, so dass er nur einmal durch die vier Punkte geht?

- Ein Känguru steht auf Punkt B, seine Nahrung liegt auf Punkt A, seine Kinder sind auf Punkt C und sein Nest ist auf Punkt D. Wenn es mit jedem Sprung ein Seitenlang vorgeht und mit keiner Priorität seine Kinder und sein Essen unterwegs abholt und zum Nest geht, was ist der kürzeste Weg, den es nehmen kann? Wenn seine Sprünge einmal eine-Seite-lang und einmal zwei-Seiten-lang ist, was ist der kürzeste Weg? Wenn es alleine mit jedem Sprung drei Schritte vorgehen kann und mit seinem Essen zwei Schritte und mit Kinder ein Schritt, was ist der kürzeste Weg für es?
- Wenn A unsere Wohnung, B Schule, C Bushaltestelle und D Taxihaltestelle ist und Taxi 3/2 mal schneller als Bus und Bus 2 mal schneller als Fußgänger fahren kann, welcher Weg dauert am kürzesten?
- A, B, C und D sind Gouverneur, Bürger, Stellvertreter von Gouverneur bzw. Bürgermeister. Stellvertreter von Gouverneur und Bürgermeister erhalten Weisungen von Gouverneur. Aber die Bürger können nicht direkt von ihm Weisungen erhalten. In welcher Weise können Weisungen im kürzesten Weg von Gouverneur bei Bürger ankommen?
- Wenn ein Ameise um 9 Uhr von A nach B geht und jede Einheit eine Stunde dauert und an jeder Kreuzung sie abbiegen müsste und zwischen 2 und 6 Uhr durch das Rechteck zwischen C und D gehen darf, wann kann sie am frühestens ankommen?
- Angenommen A ist ein Junge, der heiraten will, und B, C und D drei mögliche Kandidatinnen und die Lage ist in Kuwait [Metapher für Wohlstand, Freiheit oder Utopia in Farsi]. In einer Zeiteinheit kann der Junge zwei Längeneinheit und die Mädchen können eine Längeneinheit gehen. Wenn B die Bewegungen von A nachmacht, C um B auf Umfang eines Quadrats mit Seitenlänge von zwei Einheiten im Uhrzeigersinn rotiert und D um C rotiert, nach wie viele Bewegungen das Erwünschte wird erzielt?
- Ein Bus will einige Soldaten von dem Quartier A zum Quartier B bringen. Unterwegs muss der Bus in den Quartieren C und D einige andere Soldaten einsammeln. Wenn der Feind durch Verminung der Straßen den Weg für den Bus länger machen wollte, was ist die Mindestzahl der Minen?
- Wie lang ist die kürzeste Schleife von A zu sich selbst, wenn: a) sie durch B geht? b) sie durch C und D geht? c) sie durch C, D und B geht? d) sie durch C, B und nicht durch D geht?

Die so entstandenen Fragen zur Zeichnung unterscheiden sich deutlich vom ersten Versuch, was auch von den Teilnehmern selbst reflektiert und in Protokollen festgehalten wurde (vgl. Beispiel einer Gruppe von Teilnehmerinnen siehe Abb. 7).

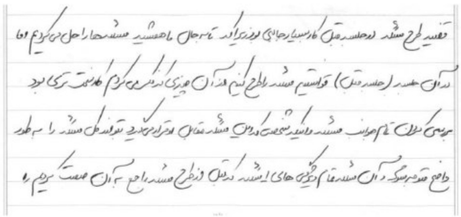


In dieser Sitzung wollten wir für eine 6×6 Figur [mathematische] Probleme bilden. Verschiedene Probleme wurden erwähnt und einige davon waren sehr interessant und einige davon waren Fragen und keine Probleme! Und einige davon waren unklar und sinnlos (wie z.B. mein Spiel).
Danach haben die Kinder selber die Eigenschaften eines [mathematischen] Problems gesagt und wieder an ihren Probleme gearbeitet.
Und diesmal war das Resultat besser.
Die Probleme, die die Gruppen beim zweiten Versuch vorstellten, waren schöner und hatten die Eigenschaften eines Problems. Es war auch klar, dass sie zielgerichtet darauf gearbeitet haben und dass sie dafür eine Lösung anbieten können.
Bibliothek: Nachdem Problembilden sind wir zur Bibliothek gegangen (es gibt keinen Grund zu schämen.)
Die Bibliothekarin hat uns erklärt, wie wir die dortigen Bücher benutzen können und ich habe erfahren, dass sie außer Bücher auch über Filme von Vorträgen verfügen.

Abbildung 7

Auf dieser Grundlage konnten dann in der Folgesitzung die Fragestellungen von den Teilnehmern weiter ausgearbeitet werden. Eine dieser Fragen wurde ausgewählt und im Anschluss an eine Präsentation zum wissenschaftlichen Arbeiten in der Mathematik geleitet durch die Polyasche Heuristik gemeinsam beantwortet. Der folgende Auszug aus dem Protokoll einer Teilnehmerin, zeigt die positive Resonanz auf den Umstand, dass so eine von den Teilnehmern selbst gestellte Frage zur Aufgabe im Kurs wurde.

Die im Rahmen dieser Einheit gemachten Erfahrungen waren nicht zuletzt eine gute Vorbereitung auf die eigenständige Arbeit im Rahmen der *Hastēhāye Pajūhēši*.



Die Problemstellung in der letzten Sitzung war eine sehr interessante Arbeit. Weil wir bisher immer Probleme gelöst haben aber in der Sitzung (letzte Sitzung) konnten wir ein Problem entwerfen. Das war schwieriger, als ich mir es vorgestellt habe. Betrachtung aller Aspekte des Problems und das, dass die Person, die dieses Problem vor sich hat, das ganze Problem klar verstehen kann und das Problem alle Eigenschaften besitzt, die wir vor der Problemstellung besprochen haben,...

Abbildung 8

4 Abschließende Reflexion

Die oben diskutierten Beispielsituationen aus der Arbeit im Mathematischen Haus zeigen die Umsetzung der Idee des Sokratischen Gesprächs in unterschiedlichen Lehr-Lern-Situationen mit verschiedenen Zielsetzungen: das Einüben mathematischer Problemlösefähigkeiten, die Entwicklung korrekter mathematischer Begründungen sowie die Entwicklung und Einschätzung eigener Fragestellungen. Gemeinsam haben diese inhaltlich zunächst verschiedenen Aspekte, dass sie in Nelsons Sinne das „Selbstvertrauen der Vernunft" voraussetzen *und* bezwecken und demnach das Sokratische Gespräch als Methode allerst sinnvoll erscheinen lassen. In dem sich die Dozierenden vor diesem Hintergrund an den beschriebenen Gesprächsregeln und der offenen Frageform nach Spiegel bzw. Wagenschein orientieren ermöglichen sie den Schülerinnen oder Schülern sich aktiv am Arbeitsprozess zu beteiligen und, wie die Beispiele oben auch zeigen, rückblickend zu reflektieren.

Die vorgestellten Beispiele zeigen außerdem eine große Vielfalt möglicher initialer Probleme und ihrer Anwendung. Zum einen können mathematikhaltige Objekte aus nichtmathematischen Kontexten, wie z.B. die Escher-Kunstwerke, dazu genutzt werden, innermathematische Begriffe zu thematisieren. Außerdem können auch Umweltphänomene (Sechseckform der Bienenwaben) als Ausgangsproblem dienen, das wiederum auf physikalische Fragestellungen ebenso verweist, wie auf innermathematische Problemstellungen, wie etwa das isoperimetrische Problem oder die Möglichkeit der Pakettierung mit regelmäßigen Vielecken. Darüber hinaus können initiale Probleme aber auch metamathematische Aspekte thematisieren (Formulieren einer eigenen Problemstellung) und so zum Sprechen über bestimmte Aspekte des Mathematiktreibens ebenso anregen wie zu neuen Aufgaben führen.

Die Wahl des jeweiligen initialen Problems hat dabei großen Einfluss darauf, inwiefern das anschließende Sokratische Gespräch konsensoffen geführt werden kann.

Liegt der Fokus auf einer korrekten mathematischen Lösung, so ist der angestrebte inhaltliche Konsens dem Gesprächsleiter im Vorhinein bekannt. In diesem Fall steht der eigentlich dogmatische Aufbau der Mathematik einer Sokratischen Diskussion der Teilnehmer zunächst im Weg und es besteht immer die Gefahr, dass aus dem offen angelegten Problem ein Gespräch nach dem „Trichtermuster“ wird. Dem Einwand, in einem solchen Fall lieber die Mathematik auch dogmatisch zu unterrichten, kann aber neben den schon von Nelson genannten lernpsychologischen Überlegungen auch entgegengehalten werden, dass eine Fokusverschiebung in Richtung Problemlösestrategien oder gelungenen Begründungen durchaus auch hier zu konsensoffenen Dialogen führen kann. Konsensoffene Gespräche, deren Ziel auch dem Gesprächsleiter nicht bekannt ist und bei denen die Antwort nicht mit mathematischen Mitteln mit wahr oder falsch evaluiert werden kann, sind darüber hinaus auch immer dann möglich, wenn der Fokus auf metamathematischen Fragestellungen liegt, wenn es sich also im weitesten Sinne um mathematikphilosophische Diskurse handelt.

Es kommt also auf die Art der Problemstellung wie auch auf die Haltung des Gesprächsleiters an, ob die Besonderheiten der Mathematik der erfolgreichen Anwendung Sokratischer Gespräche im Mathematikunterricht im Wege stehen oder nicht. Der Abgleich mit den oben dargestellten mathematikdidaktischen Überlegungen zeigt, dass die vorgestellten Beispielen aus der Arbeit im mathematischen Haus durchaus als Beispiele gelungener Sokratischer Gespräche angesehen werden können, die dies beherzigen und in besonderer Weise helfen die Ziele der außerschulischen Mathematikbildung in dieser Einrichtung zu erreichen.

Literaturverzeichnis

Hilbert, David. 1917. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen* 78 (1): 405–415.

Kenderov, Petar, Ali Rejali, Maria G Bartolini Bussi, Valeria Pandelieva, Karin Richter, Michela Maschietto, Djordje Kadijevich und Peter Taylor. 2009. Challenges beyond the classroom—Sources and organizational issues. In *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom,* 53–96. Springer.

Kessels, Jos. 1997. Das Sanduhr-Modell–Methodik des Dialogs–. *Dieter Krohn, Barbara Neißer, Nora Walter (Hg.): Neuere Aspekte des Sokratischen Gesprächs. Bd. IV der Schriftenreihe “Sokratisches Philosophieren” der Philosophisch-Politischen Akademie. Frankfurt a. M.: dipa:* 71–80.

Loska, Rainer. 1995. *Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung.* Bad Heilbrunn.

Nelson, Leonard. 1970. Die Sokratische Methode (Vortrag 1922). In *Gesammelte Schriften,* 1:269–316. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

———. 1970-1973. *Gesammelte Schriften in Neun Bänden. Hrsg. Von Paul Bernays [UA].* Herausgegeben von Gerhard Weißer. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Polya, George. 1949. *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematiscer Probleme.* Übersetzt von Elisabeth Behnke. Bern: Francke Verlag.

Raupach-Strey, Gisela. 2012. *Sokratische Didaktik: Die didaktische Bedeutung der Sokratischen Methode in der Tradition von Leonard Nelson und Gustav Heckmann.* Bd. 10. Berlin: LIT Verlag Münster.

Rejali, Ali. 2018. Teaching Mathematics through Non Formal Education Methods – Experiences of Isfahan Mathematics House. The International Forum on Science Education, Islamabad. http://www.mathhouse.org/VisitorPages/show.aspx?IsDetailList=true&ItemID=6855,1&Page=2.

Sfard, Anna. 2002. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* (Netherlands) 46 (1-3): 13–57.

Spiegel, Hartmut. 1989a. Sokratische Gespräche in der Mathematiklehrerausbildung. Herausgegeben von Dieter Birnbacher, (Hamburg): 167–171.

———. 1989b. Sokratische Gespräche über mathematische Themen mit Erwachsenen: Absichten und Erfahrungen. *mathematik lehren Heft 33* (März): 54–59.

———. 1991. Die sokratische Methode beim Mathematiklernen (Vortragsmanuskript für einen Vortrag in Karlsruhe am 5.6. 1991) (Juni).

Wagenschein, Martin. 1999. Entdeckung der Axiomatik (1974). In *Verstehen Lehren: Genetisch - Sokratisch - Exemplarisch. Mit einer Einführung von Hartmut von Hentig.* Weinheim und Basel.

Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition

Klaus Volkert

Zusammenfassung: In diesem Artikel wird dargelegt, wie wichtig die Polytechnika und ihre Dozenten, vor allem die der darstellenden Geometrie, für die Entwicklung der mathematischen Modelle in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. gewesen sind. Die Tradition dieser Bildungsanstalten, die den Einsatz von Modellen in den verschiedensten Fächern umfasste, bildete einen sehr günstigen Rahmen für die Konstruktion und die Verwendung mathematischer Modelle, insbesondere durch die hier in diversen Modellierwerkstätten vorhandene Expertise im Umgang mit Materialien wie Ton, Gips, Holz und Metall. Ein spezifischer Raum des Lernens waren hier die Sammlungen, die die eigenständige und lehrerlose, gewissermaßen experimentelle Aneignung von Wissen ermöglichten. Durch den Bau anspruchsvollerer Modelle konnten diese dann auch in den Forschungsprozess fortgeschrittener Studenten und ihrer Dozenten eingebunden werden. Schließlich ermöglichte die an Institutionen des technischen Bildungswesens ausgeprägte Ausstellungskultur auch, mathematische Modelle in der Öffentlichkeit zu präsentieren und damit die Wichtigkeit der Institution zu unterstreichen. Das konkrete Beispiel, das hier behandelt wird, ist die eidgenössische polytechnische Schule in Zürich, die heutige ETH (seit 1911), und ihr Professor für darstellende Geometrie und Geometrie der Lage, Otto Wilhelm Fiedler (1832 – 1912).

1 Vorbemerkung

Liest man die Frühgeschichte der mathematischen Modelle in Deutschland, wie sie beispielsweise Felix Klein bei mehreren Gelegenheiten berichtet[1], so fallen Namen wie Plücker und Kummer, Christian Wiener, Clebsch, Fiedler, Weiler, Klein,

1. Vgl. etwa die von Klein selbst verfasste Einleitung zu seinen Arbeiten über „Anschaulichen Geometrie“ im zweiten Band seiner Werke (1922).

Brill, Disteli; Dyck als Assistent, sowie Rohn und Rodenberg als Schüler von Klein finden Erwähnung. Auch Hermann Wiener und Peter Treutlein, beide zur nachfolgenden Generation gehörig, sind bekannt geblieben durch ihre von B.G. Teubner vertriebenen Modelle für den Schul- und Hochschulunterricht. Bei näherem Hinsehen fällt an dieser Liste auf, wie viele Mathematiker darin vertreten sind, die an einem Polytechnikum – zumindest zeitweise – wirkten.[2] Erst die Berücksichtigung dieser im Folgenden polytechnisch genannten Tradition zu der man auch die Schulen des gewerblich-technischen Bildungswesens[3] zählen sollte, liefert ein vollständiges Bild von der Entwicklung mathematischer Modelle;[4] erst sie erlaubt ein angemessenes Verständnis des Phänomens. Insbesondere wird der Eindruck relativiert, mathematische Modelle träten Mitte der 1860er Jahren, gewissermaßen aus dem Nichts kommend, plötzlich in der Mathematik auf. Zu diesem Zeitpunkt gab es eine lange und erfolgreiche Tradition der Verwendung mathematischer Modelle hauptsächlich zu Lehrzwecken.[5]

2 Mathematik an den Polytechnika

Zum Zeitpunkt der Reichsgründung (1871) gab es im deutschen Reichsgebiet 19 Universitäten[6], ihnen standen 9 Technische Hochschulen gegenüber.[7]An den meis-

2. Clebsch war am Polytechnikum Karlsruhe, Klein und Brill wirkten am Münchner Polytechnikum, wobei Brill schon zuvor am Polytechnikum seiner Vaterstadt Darmstadt Privatdozent gewesen war, Adolf Weiler kam vom Polytechnikum Zürich nach Göttingen (wohin er nach Klein Fiedlers Tradition mitbrachte) und dann nach Erlangen, von wo er wieder nach Zürich zurückkehrte, Christian Wiener war Professor für darstellende Geometrie am Polytechnikum in Karlsruhe, sein Sohn Hermann in Darmstadt. Auch Dyck, Rohn und Rodenberg wirkten später an Polytechnika, zu Fiedler vgl. man unten. Martin Disteli war ein Schüler und Assistent Fiedlers am Züricher Polytechnikum; er lehrte u.a. am Technikum in Winterthur und an den Technischen Hochschulen Karlsruhe und Dresden.

3. Die Herausbildung dieses Zweiges des Bildungswesens ist im deutschsprachigen Raum ein komplexer und langwieriger Vorgang gewesen, der hier nicht untersucht werden kann (vgl. Lipsmeier 1971). Es sei nur angemerkt, dass die Ausdifferenzierung eines technischen und eines kaufmännischen Bildungswesens erst im Laufe des 19. Jhs. geschah. Im Folgenden wird vom technischen Bildungswesen *tout court* gesprochen, was eine gewisse Vereinfachung darstellt.

4. Hierbei sind meist materiale Objekte gemeint. Es wird sich aber zeigen, dass auch die abstrakte Verwendung des Begriffes „Modell“, wie er dann im 20. Jh. wichtig werden sollte, in dieser Tradition angelegt ist. Zudem ist zu beachten, dass die Materialität der Modelle akzidentell war; ihre Anschaulichkeit war der genuin wichtige Punkt. Das zeigen übrigens auch die Versuche (z. B. von Chr. Wiener) materiale Modelle durch Stereofotografien zu ersetzen.

5. Eine der wenigen Veröffentlichungen zum Thema „Modelle“, die diesen Aspekt entsprechend berücksichtigen, ist Mehrtens 2004.

6. Vgl. Lorey 1916, 1. Im Jahr 1872 kam dann noch die neugegründete Kaiser-Wilhelm-Universität in Straßburg hinzu. Münster hatte bis 1902 keinen Universitätsstatus.

7. Darunter die erst 1870 gegründete Technische Hochschule in Aachen und die 1868 eingerichteten technischen Hochschulen in Darmstadt und München. Zu beachten ist aber, dass es oft Vorläufer dieser Institutionen gab, die nach und nach aufgewertet oder – wie im Falle Münchens

ten Universitäten gab es im letzten Drittel des 19. Jhs. zwei Lehrstühle für Mathematik, an manchen nur einen und an wenigen drei. Diese Ausstattung war etwa vergleichbar den Technischen Hochschulen, die allerdings neben den Lehrstellen für reine Mathematik in der Regel zusätzlich eine Professur für darstellende Geometrie hatten. Schon diese einfachen Zahlen machen deutlich, dass die Mathematik an Polytechnika eine wichtige Rolle gespielt hat. Während die Angebote für zukünftige Ingenieure im Bereich der reinen Mathematik sich inhaltlich nicht wesentlich von den entsprechenden für Studierende der Mathematik an den Universitäten unterschieden, Kernstück war hier wie dort die Differential- und Integralrechnung, war die darstellende Geometrie eine Besonderheit der polytechnischen Mathematik, ein Markenzeichen und Unterscheidungsmerkmal derselben.[8]Der Unterricht in darstellender Geometrie umfasste große praktische Anteile. Hier ging es darum, entweder im Zeichensaal oder zu Hause Zeichnungen mit Konstruktionen anzufertigen. Zur Unterstützung und Anleitung der Studierenden gab es Assistenten, eine Institution, die selbst im letzten Drittel des 19. Jhs. an den Universitäten noch weitgehend unbekannt war.[9]Die darstellende Geometrie erforderte, darin bestand immer Einigkeit, viel praktische Übung – man kann sie nur ganz oder gar nicht lernen (W. Fiedler); ihre Lehre unterschied sich wesensmäßig von derjenigen anderer mathematischer Gebiete. Anschauungs- und Problemorientierung sowie Schüleraktivität und Individualisierung, aus moderner Sicht wichtige didaktische Forderungen, waren ihr gewissermaßen in die Wiege gelegt. Kurz: Darstellende Geometrie war keine Katheterwissenschaft. Wesentlich ist, sich klarzumachen, dass es das Ziel der Ausbildung in darstellender Geometrie war, Grundlagen zu schaffen für andere konkretere Fächer wie Konstruktionszeichnen, Maschinenzeichnen, Linearzeichnen, Perspektive, Bauzeichnen usw., die ihrerseits eng an die jeweiligen Fächer wie Maschinenbau, Eisenbahnbau, Architektur angebunden waren. Zu diesen Grundlagen kann man auch die Förderung der Raumanschauung rechnen, eine zentrale Leistung, die stets mit dem Unterricht in darstellender Geometrie verbunden wurde. Dagegen war das Schema Axiom - Definition – Satz – Beweis der darstellenden Geometrie fremd. Sie hat vielmehr den Charakter einer Sammlung von Verfahren, die zur Lösung konkreter Probleme verwendet werden. Das

– wiederbelebt wurden. In der Schweiz stand drei Universitäten ein Polytechnikum (in Zürich) gegenüber, in dem Teil von österreich-Ungarn, der im Reichsrat vertreten war, kamen auf sieben Universitäten sechs Polytechnika (Prag, Brünn, Wien, Graz, Krakau, Lemberg).

8. Es gab Versuche, die darstellende Geometrie auch an Universitäten zu etablieren, etwa von Felix Klein in Leipzig und Göttingen. Vgl. dazu die demnächst erscheinende Dissertation von Nadine Benstein (Wuppertal).

9. Der erste bezahlte Assistent im Fach Mathematik an einer Universität dürfte Walter Dyck gewesen sein. Die entsprechende Stelle hatte Klein bei seiner Berufung vom Polytechnikum München an die Universität Leipzig ausgehandelt. Dyck wurde von Klein mit den übungen zur darstellenden Geometrie betraut, die letzterer in Leipzig einführte. Zu deren Inhalten vgl. man die oben genannte Dissertation von N. Benstein.

wiederum barg für den Unterricht die Gefahr, diesen recht mechanisch als Abfolge von Rezepten zu gestalten.[10]

Die wesentliche Ziele des Unterrichts in darstellender Geometrie fasste Christian Bleyel, ein Absolvent des Polytechnikums Zürich, Privatdozent daselbst und später Lehrer an der Kantonsschule, so zusammen:

1. Raumanschauung auf systematische Weise ausbilden;
2. Darstellungsmethoden, welche der Techniker braucht, kennenlernen;
3. diese Methoden anwenden können auf Formen, die in technischen Objekten vorkommen;
4. manuelle Fähigkeiten, insbesondere Genauigkeit, erwerben.[11]

Um die Wurzeln der Verwendung von Modellen in der mathematischen Ausbildung besser zu verstehen, ist es sinnvoll, sich über das Zeichnen allgemein – soweit es um dessen Verwendung in Technik und Architektur geht – zu informieren. Das liegt daran, dass Zeichnen der Kontext war, in dem sich die Verwendung von Modellen geradezu aufdrängte.

3 Zeichnen und Modelle

Ende des 18./Anfang des 19. Jhs. nahm die Wichtigkeit des Zeichnens im Rahmen der allmählich sich anbahnenden Industrialisierung erheblich zu.[12] Es entstanden Zeichenschulen, die oft Sonntagsschulen waren und von bereits berufstätigen Handwerkern zwecks Fortbildung besucht wurden.[13] Die Zeichenkurse vermittelten auch grundlegende geometrische Kenntnisse sowie Fertigkeiten im Umgang mit Instrumenten wie Zirkel und Lineal. Dominant war anfänglich die Perspektive, die besonders für das Bauhandwerk von Nutzen war. Andere Inhalte, etwa die Zweitafelprojektion, kamen hinzu in dem Maße, als andere Berufsgruppen – beispielsweise in der mechanisch-technischen Richtung – einbezogen wurden. Ein wichtiger Aspekt hierbei war, dass es mit den Anfängen des Patentwesens in vielen Situationen (etwa einem Patentantrag) notwendig wurde, geeignete Zeichnungen

10. Fiedler berichtet hiervon in der Skizze seines Werdeganges (Fiedler 1905), in der er auch von seiner Schulzeit spricht.
11. Vgl. Beyel 1899, 401 – 402.
12. Diese Aussage ist auf den deutschsprachigen Raum zu beziehen, mit gewissen Modifikationen auch auf Frankreich.
13. Vgl. Klinger 2014, König 1999, Lipsmeier 1971.

anfertigen zu können. Neben dem konstruktiven Zeichnen wurde auch das Freihandzeichnen unterrichtet – für Ingenieure „Aufnehmen" genannt. Es diente dazu, rasch Eindrücke von einem Objekt, einer Maschine etwa, festzuhalten – z. B. mit der Idee, diese dann später nachzubauen.[14] Ziel des Zeichenunterrichts war es, die Fähigkeit über technische Artefakte vermöge von Zeichnungen kommunizieren zu können, insbesondere durch Exaktheit beim Zeichnen, zu verbessern: Die Zeichnung wurde zur Sprache der Technik, wie es ein weitverbreitetes Schlagwort formulierte. Andererseits ging es aber auch um die „Veredelung des Geschmacks"[15] oder die Meisterung der Form. Im Katalog der Schweizerischen Landesausstellung in Zürich 1883 heißt es beispielsweise:

> Das Erkennen, daß unser Volk zum Bestehen im gewerblichen Wettkampf der richtigen Erfassung und Beherrschung der Form ebenso sehr bedarf, wie des Verstandes und der Muskelkraft, und daß darin auch eine Hauptaufgabe der Schule liege und zwar von der ersten Stufe an, hat seit etwa einem Jahrzehnt sich tiefer und weiter als früher Bahn gebrochen. Ein hervorragendes Zeugniß dieser Bewegung sind die Zeichnungsvorlagen – Tafeln und Gyps-Stoff-Modelle [sic!] – für die Zürcher Primar- und Sekundarschulen: [. . .][16]

Hier wird ein wichtiger Aspekt angesprochen: Zeichnen bedarf in der Regel der Vorlagen, die gerne auch „Modelle" genannt wurden und werden. Diese können Gegenstände aus der belebten oder unbelebten Natur inklusive des Menschen[17] wie beim „Zeichnen nach der Natur" sein oder eben Artefakte wie Maschinenteile oder geometrische Gebilde wie Polyeder oder allgemeiner Flächen:

> Der für den Unterricht – nicht nur für den Zeichenunterricht – eingesetzte Körper wurde mit dem Begriff „Modell" belegt, ohne daß der diesem Begriff beigegebene Inhalt wie „Muster; Typ; Vorbild; Nachbildung; Gußform"[18] oder „räumliche Vorstellung unvorstellbarer Naturformen"[19] diese Bezeichnung gerechtfertigt hätte; denn vielfach wurden auch die „Naturalien" und Originalgegenstände, die zu Unterrichtszwecken eingesetzt wurden, mit diesem Wort belegt.

14. Also genau das, was man heute mit einem Handyfoto machen würde. Im übrigen kam so die Wattsche Dampfmaschine kostengünstig nach Preussen.
15. Lipsmeier 1971, 87.
16. Officieller Katalog 1883, 116.
17. Heute dann nur noch mit einem „l".
18. Duden, Bd. 1. 15. Aufl. Mannheim 1961, S. 460 [Quellenangabe bei Lipsmeier].
19. Mackensen, L.: Das „Fach" – eine Wortbetrachtung (DbS, 14 (62), 1, 2 – 6) [Quellenangabe bei Lipsmeier].

> Für den Zeichenunterricht sind diese „Modelle" jedoch in der Regel eigens, d.h. unter didaktisch-methodischen Gestaltungsgrundsätzen, hergestellte Lehrmittel.[20]

Deren Verwendung im Unterricht hat eine lange Tradition;[21] im Zuge der breiten Etablierung eines technischen Bildungswesens wuchs der Bedarf an Modellen für alle Arten von Zeichenunterricht. Verbreitet waren Modelle (und damit verbunden Methodiken) nach Dupuis und nach Heimerdinger.[22] Eine wichtige Frage in den methodisch-didaktischen Diskussionen jener Zeit war, ob die Modelle als Vorlagen für die Zeichnungen dienen sollten oder eher als Kontrolle für diese. So heißt es beispielsweise pointiert in einem Schulprogramm von 1847:

> So ist über den Gebrauch der sogenannten Modelle beim Unterricht in der descriptiven Geometrie von den besten Mathematikern in einer Weise geurtheilt worden, welche die Unzulänglichkeit solcher Hilfsmittel außer allen Zweifel setzt. Da ich es nun unternommen habe, in diesen wenigen Zeilen ebenfalls Einiges über Modelle zu sagen, so muß ich mich gleich anfangs gegen die Meinung verwahren, als wollte ich einer solchen Unterrichtsmethode das Wort reden. [...]
>
> So wie den Gedanken die That folgt, und nicht umgekehrt, so könnte man für jede gelöste Aufgabe ein Modell anfertigen, welches aber genau der Zeichnung entsprechen muß; und derartige Modelle sind es, welche einzig und allein beim Unterrichte der descripitven Geometrie zulässig sind.[23]

Die Bezeichnung „deskriptive (oder auch: beschreibende) Geometrie" ist eine wörtliche übertragung von Monge's „Géométrie descriptive" ins Deutsche, die in der

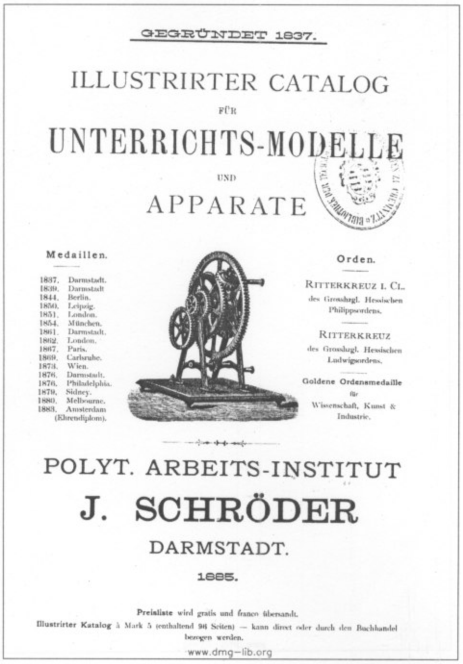
20. Lipsmeier 1971, 196 – 197.

21. Vgl. auch Dressler 1913, 190, der die Verwendung von Modellen im mathematischen Unterricht auf Joachim Jungius (1587 - 1657) zurückführt und in diesem Zusammenhang auch auf die Klosterschulen des Mittelalters mit ihren astronomisch-geographischen übungen unter Zuhilfenahme von einfachen Messinstrumenten verweist.

22. Vgl. Lipsmeier 1971, 185 – 196. Die Modellsammlung von Dupuis umfasste fünf Gruppen, die Modelle waren aus verschiedenen Materialien (Draht, Holz, Blech, ...) gefertigt. Es gibt bei Lipsmeier zahlreiche weitere Verweise auf die Verwendung von Modellen, u.a. von Herzberg (1780) und von Peter Schmid (1821) [Lipsmeier 1971, 184 bzw. 176]. Wichtig dabei ist, dass deren Konstruktion und Einsatz im Unterschied zu den Naturalien, die man immer schon als Vorlagen benutzte, didaktisch reflektiert wurde.

Eine ausführliche Methodik zum Einsatz von Modellen im Schulunterricht ist Fink 1896. Fink spricht vom „Schauspiel der Geometrie", mit „wechselnden Gestalten" – in Gestalt der reinen „Figur" oder in der meist „lebensvolleren" des „Modells"." (Fink 1896, XI)

23. Harter, Fr.: Ueber die Auflösung der Körperschnitte in Modellen, als Beitrag zum Unterrichte in der descriptiven Geometrie (Programm der Landwirthschafts- und Gewerbeschule Amberg (Amberg 1844)). Ähnlich äußert sich auch Beyel 1899, 406.



GEGRÜNDET 1837.

ILLUSTRIRTER CATALOG

FÜR

UNTERRICHTS-MODELLE

UND

APPARATE

Medaillen.

1837. Darmstadt.
1839. Darmstadt
1844. Berlin.
1850. Leipzig.
1851. London.
1854. München.
1861. Darmstadt.
1862. London.
1867. Paris.
1869. Carlsruhe.
1873. Wien.
1876. Darmstadt.
1876. Philadelphia.
1879. Sidney.
1880. Melbourne.
1883. Amsterdam (Ehrendiplom).

Orden.

RITTERKREUZ I. CL. des Grosshzgl. Hessischen Philippsordens.

RITTERKREUZ des Grosshzgl. Hessischen Ludwigsordens.

Goldene Ordensmedaille für Wissenschaft, Kunst & Industrie.

POLYT. ARBEITS-INSTITUT

J. SCHRÖDER

DARMSTADT.

1885.

Preisliste wird gratis und franco übersandt.
Illustrirter Katalog à Mark 5 (enthaltend 96 Seiten) — kann direct oder durch den Buchhandel bezogen werden.

Abbildung 1: Titelblatt des Katalogs der Firma J. Schröder (1885)

zweiten Hälfte des 19. Jhs. vollständig durch den heute noch gebräuchlichen Begriff „darstellende Geometrie“ verdrängt wurde. Im schulischen Bereich war auch die Bezeichnung „Projektionslehre“ gängig. In dieser Bezeichnung wird deutlich, dass die darstellende Geometrie mehr war als bloßes regelkonformes Zeichnen, mehr als konstruktive Geometrie oder Linearzeichnen.

Es ist deshalb nicht erstaunlich, dass sich schon bald eine Firma etablierte, die genau diesen Bedarf an Lehrmitteln kommerziell abdeckte. Es handelte sich um den Verlag von Jakob Schröder in Darmstadt; dieser wurde 1837 als „J. Schröder. Nähmaschinen, polytechnisches Institut und polytechnisches Arbeitsinstitut“ gegründet. Jakob Peter Schröder (1809 – 1862), der nach einer Schreiner-Lehre und Wanderschaft durch Mitteleuropa 1837 eine private Zeichen- und Modellierschule in Darmstadt gründete, wurde 1839 Lehrer für darstellende Geometrie an der Höheren Gewerbeschule Darmstadt.[24] Eine Spezialität seines Verlags waren – wenig

24. Vgl. Lipsmeier 1971, 217 für mehr Informationen über Schröder sowie https://www.hessischeswirtschaftsarchiv.de/bestaende/einzeln/2005.php (29.7.2018). Ich danke Nadine Benstein für den wertvollen Hinweis auf diese Quelle.

erstaunlich – Holzmodelle (vgl. Abbildung 4).[25]

Die auf dem Titelblatt (vgl. Abbildung 1) der Firma Schröder mit Stolz vermerkten Medaillen wurden bei Ausstellungen gewonnen. Das belegt einerseits die Ausstellungskultur der zweiten Hälfte des 19. Jhs., zeigt anderseits die Präsenz der Firma Schröder bei solchen Veranstaltungen und schließlich die Wertschätzung, welche ihren Produkten entgegen gebracht wurde. Letztere drückt sich wohl auch in den aufgeführten Orden aus. Aus der Sicht der Firmen boten Ausstellungen die Möglichkeit, Reklame für ihre Produkte zu machen, was umsatzsteigernd wirken sollte.[26]

Die hohe Wertschätzung von Schröders Modellen spiegelt sich auch in einem Bericht über die Wiener Weltausstellung (1873) wider:

> Den Glanzpunkt der hessischen Unterrichtsausstellung bildete in Wien wie schon auf allen vorhergehenden Weltausstellungen die Exposition von Lehrmitteln des polytechnischen Arbeitsinstitutes von J. Schröder in Darmstadt. [...] Die ähnlichen Ausstellungen der früher erwähnten preußischen Firmen wurden [...] gänzlich verdunkelt. Das Interesse des einheimischen Fachpublicums wandte sich dieser Ausstellung umso lebhafter zu, als Schröder, welcher nach den meisten Ländern Westeuropas und Amerikas seine Lehrmittel exportiert, in neuester Zeit auch in Österreich ein Absatzgebiet gewonnen hat. Und dies sicher nicht zum Schaden unseres gewerblichen Unterrichtes.[27]

Im Schröderschen Katalog ist ausdrücklich von „Unterrichts-Modellen“ die Rede, der Bezug zum Unterricht erscheint also an prominenter Stelle. „Apparate“ und „Unterrichtsmodelle“ kommen bei Schröder gleichberechtigt daher (vgl. auch Abbildung 2).

25. Zu Schröders Verlag und Modellen vgl. man Dressler 1913, 198 – 199 und 209 - 210 sowie Lipsmeier 1971, 216 – 217, insbesondere n. 601, in der der Verfasser Belege für die weite Verbreitung der Schröderschen Modelle liefert. Dem wird weiter unten ein weiterer hinzugefügt.

26. Vgl. Dressler 1913, 190.

27. Dummreicher, A. Freiherr von: Das gewerbliche Unterrichtswesen. In: Officieller Ausstellungs-Bericht, hg. durch den General-Direction der Weltausstellung 1873 (Wien, 1873), 18 – zitiert nach Lipsmeier 1971, 217. Man beachte die feine Volte gegen Preußen, das ja sieben Jahre zuvor den Krieg gegen österreich gewonnen hatte.

An der angegebenen Stelle bei Lipsmeier finden sich weitere Belege für die weite Verbreitung der Schröderschen Modelle.

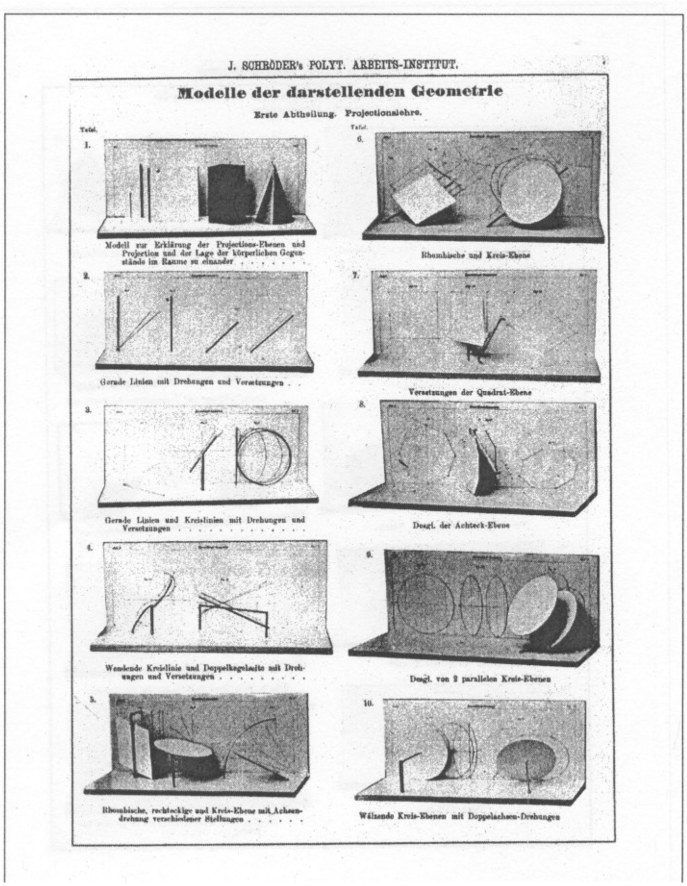


Abbildung 2: Eine Seite aus Schröders Katalog mit Modellen der darstellenden Geometrie[28]

J. Schröder hatte übrigens einen Apparat erfunden, der Grund-, Seit- und Aufriss eines Objekts verdeutlichte sowie die Umklappung (auch Umlegung genannt) dieser Risse in die Grundrissebene (vgl. Abbildung 3).[29] Th. Olivier, ein Schüler von Monge, der am heutigen *Conservatoire National des Arts et des Métiers* in Paris als Professor für Geometrie wirkte, hatte einen ähnlichen Apparat, den „Omnibus", bereits vor Schröder entwickelt.[30] Schröder soll eine Parisreise unternommen

28. Die Objekte sind so angeordnet, dass man ihren Grund- und ihren Auf- bzw. Seitriss (je nach Ausrichtung des Modells) erkennen kann. Die Risse lassen sich durch geeignete Beleuchtung zumindest teilweise erzeugen.
29. Vgl. auch Dressler 209 – 210 zu „ J. Schröders Konstruktionstafeln".
30. Vgl. Xavier/Pinho 2017.

Fig 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

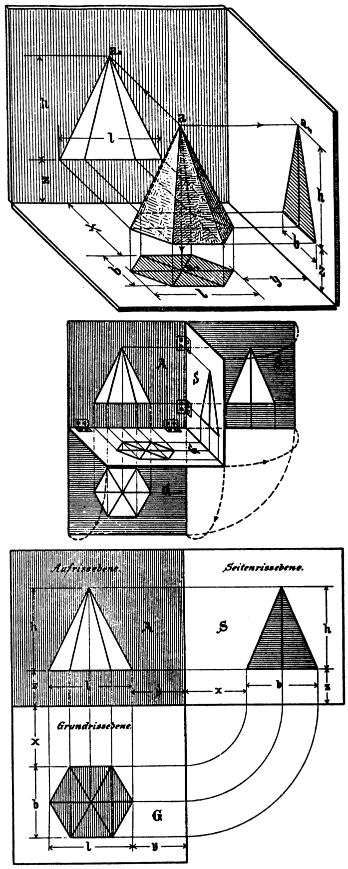


Abbildung 3: Apparat zur Dreitafelprojektion nebst Umklappung[32]

haben, könnte sich also dort die Inspiration zu seiner Erfindung geholt haben.[31]

Die Firma Schröder produzierte eine breite Palette von Modellen, vor allem Maschinen- und Gebäudemodelle aber auch Modelle für den Unterricht in darstellender Geometrie. In Abbildung 4 sind zwei Beispiele für geometrische Modelle dieser Firma zu sehen.

31. Vgl. Lipsmeier 1971, 216.
32. Lipsmeier 1971, 291.

Abbildung 4: Zwei Modelle von Schröder: Ein Torus (links) und eine Durchdringung von Zylinder und Kegel (rechts).
(ETH-Bibliothek Zürich, Mathematische Modelle / Fotograf: André Rodoni / CC BY-SA 4.0)

Am Karlsruher Polytechnikum wurden schon früh – nämlich unter Guido Schreiber[33] – mathematische Modelle produziert:

> Schon unter Schreiber waren Modelle sowohl in Glas und Metall, als in Fäden über Elementarkonstruktionen und über einige Regelflächen von "Zöglingen" hergestellt worden (20 Nummern). Wiener richtete ein Seminar für die Konstruktion und Ausführung solcher Modelle ein und fand dafür Interesse unter den Studirenden. Es sind Modelle in Metall, Karton und Gyps, besonders aber Fadenmodelle im Rahmen von ausgesägtem Holz zu erwähnen, bei denen die Schnittlinie zweier Flächen durch umgelegte stärkere Fäden hervorgehoben werden, oder durch Perlen, welche an den Begegnungsstellen zweier den verschiedenen Flächen angehörigen Fäden eingezogen sind. Die Modellsammlung besitzt gegenwärtig 146 Nummern.[34]

Als Fazit hieraus kann man festhalten, dass erstens die Produktion von mathematischen Modellen schon in der ersten Hälfte des 19. Jhs. an den Polytechnika begann, und dass diese von Anfang an eng mit der Lehre verknüpft gewesen ist; insbesondere wurde schon früh die Idee verwirklicht, Studierende in die Produktion von Modellen einzubinden. Letztere konnte man in Sammlungen präsentieren und

33. Schreiber unterrichte von 1827 bis 1851 darstellende Geometrie an der polytechnischen Schule in Karlsruhe, vgl. Entwicklung 1892, XXIV.
34. Entwicklung 1892, XXV. Ich danke N. Benstein für den Hinweis auf diese interessante Quelle.

so dem autodidaktischen Lernen zugänglich machen – insbesondere wenn – wie oft geschehen – die Modelle von ausführlichen schriftlichen Erläuterungen begleitet wurden. Zudem konnten Modelle auf Ausstellungen präsentiert werden. So vermochte es die Mathematik, sich in der Blütezeit der Ausstellungen einzubringen, welche für die zweite Hälfte des 19. Jhs. anzusetzen ist. Sie gewann Anschluss an die visuelle Kultur der Zeit. Vor allem die um Aufwertung bemühten Polytechnika konnten in den Ausstellungen, den „spaces of modernity“[35], ihren Anspruch als Vorreiter und Speerspitze der technisch-industriellen Moderne unterstreichen.

Zudem war, wie das Beispiel des Karlsruher Polytechnikums unterstreicht, der Übergang von elementaren zu mathematisch anspruchsvollen Modellen fließend; die Expertise in der Herstellung ersterer kam letzterer zugute. Darstellende Geometer wie Wiener und Fiedler waren immer auch forschende Geometer, die sich mit aktuellen Fragen der Forschung beschäftigten.

4 Modelle am Polytechnikum in Zürich

Schröders Modelle wurden bereits 1869 von Wilhelm Fiedler für den Unterricht in darstellender Geometrie am Züricher Polytechnikum gekauft, wie eine Eintragung in seinem Verzeichnis der Beschaffungen zeigt (vgl. Abbildung 5 und 6).[36] Demzufolge wurden vier Serien von Modellen, zwei aus Holz, eine aus Draht und eine aus Blech, erworben für insgesamt 200 sfr.[37]

Polytechnika verfügten neben Modellen auch über sogenannte Modellierwerkstätten, in denen Studierende unter Anleitung von qualifiziertem Fachpersonal Modelle herstellten – meist aus Holz, Ton oder Metall.[38] Zukünftige Architekten und Bauingenieure konstruierten Modelle von Häusern, Brücken und dergleichen, Maschinenbauer solche von Maschinenteilen oder ganzen Maschinen usw.[39] Für die

35. Geppert 2002, 10.

36. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196 : 50. 1900 notierte Fiedler allerdings am Rand, dass diese Modelle nie unter seiner Kontrolle gewesen seien und dass er sie nicht in seinen Vorlesungen benutzt habe. Einige dieser Modelle sind heute noch an der ETH vorhanden und sollen demnächst allgemein zugänglich gemacht werden. Auch an der Kantonsschule Rämibühl in Zürich, die traditionell eng mit der ETH verknüpft war (z. B. war Fiedlers Sohn Ernst an dieser Schule Direktor), verfügt über eine größere Zahl von hölzernen Schröder-Modellen.

37. Zum Vergleich: Fiedlers Anfangsgehalt (1867) in Zürich betrug 4300 sfr. jährlich; es stieg in den Jahren bis 1880 auf 8700 sfr.

38. In Karlsruhe gab es auch eine „Gypsmodellirwerkstatt“, die „vorzugsweise den Zweck“ hatte, „durch Modelle in Gyps die wichtigsten Steinverbindungen und Constructionen, insbesondere aber den Gewölbebau, zur Klarheit zu bringen“ (Die Residenzstadt Karlsruhe 1858, 148).

39. In Hassler/Meyer 2014 findet man Fotografien, auf denen die Arbeit in Modellierwerkstätten zu sehen ist – beispielsweise zukünftige Architekten, die Holzmodelle von Gebäuden und Brücken bauen.

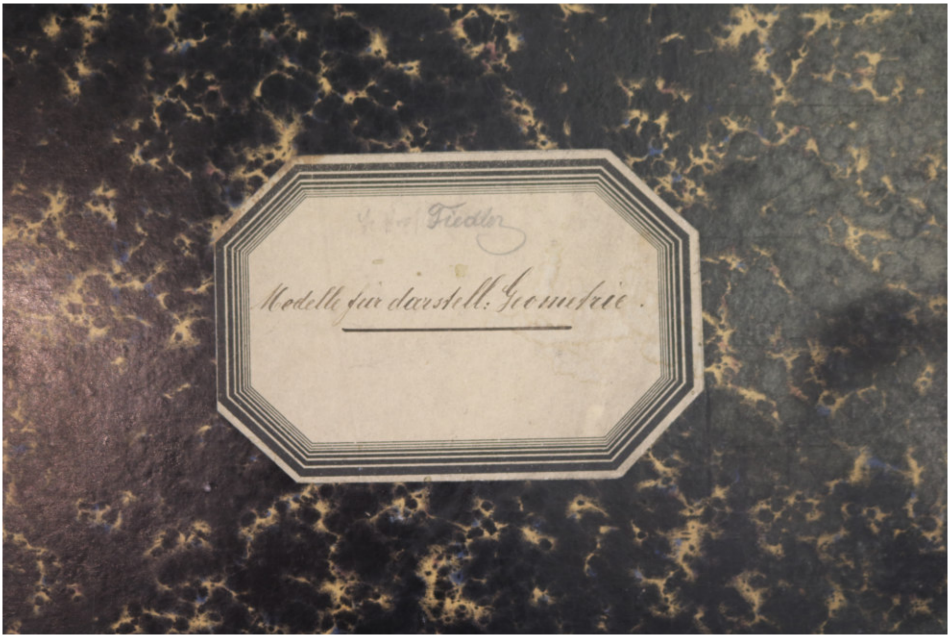


Abbildung 5: Inventar der Sammlung für darstellende Geometrie der polytechnischen Schule Zürich[40]

Benutzung der Modellierwerkstätten war eine Gebühr zu entrichten. Man bemerkt, wie tief die Erstellung und Verwendung von Modellen in der polytechnischen Tradition verankert war.

Im Weiteren werde ich mich auf die 1855 gegründete Eidgenössische polytechnische Schule in Zürich und auf Wilhelm Fiedler (1832 – 1912) konzentrieren, der dort von 1867 bis 1907 als Professor der darstellenden Geometrie und der Geometrie der Lage wirkte. Diese Schule wurde nach einer gewissen Übergangsphase in dem von Gottfried Semper entworfenen Gebäude an der Rämistrasse untergebracht, der auch heute noch einen Teil der seit 1911 Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) genannten Institution beherbergt.[41] In diesem Gebäude spielten Sammlungen, insbesondere solche von Modellen, eine sehr wichtige Rolle, welche wiederum eng mit den Vorstellungen Sempers von technischer Bildung verwoben war. Betrat man das Gebäude vom – damals stadtseitig gelegenen – Haupteingang, so gelangte

40. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196 : 30.

41. Allerdings wurde der Sempersche Bau ab 1910 durch Umbaumaßnahmen, welche auf Entwürfe von Fr. Gull zurückgehen, massiv verändert. Bis 1914 war übrigens in dem Gebäude auch noch die Universität Zürich untergebracht.

man in die zentrale Halle, die die Skulpturensammlung beherbergte.[42]

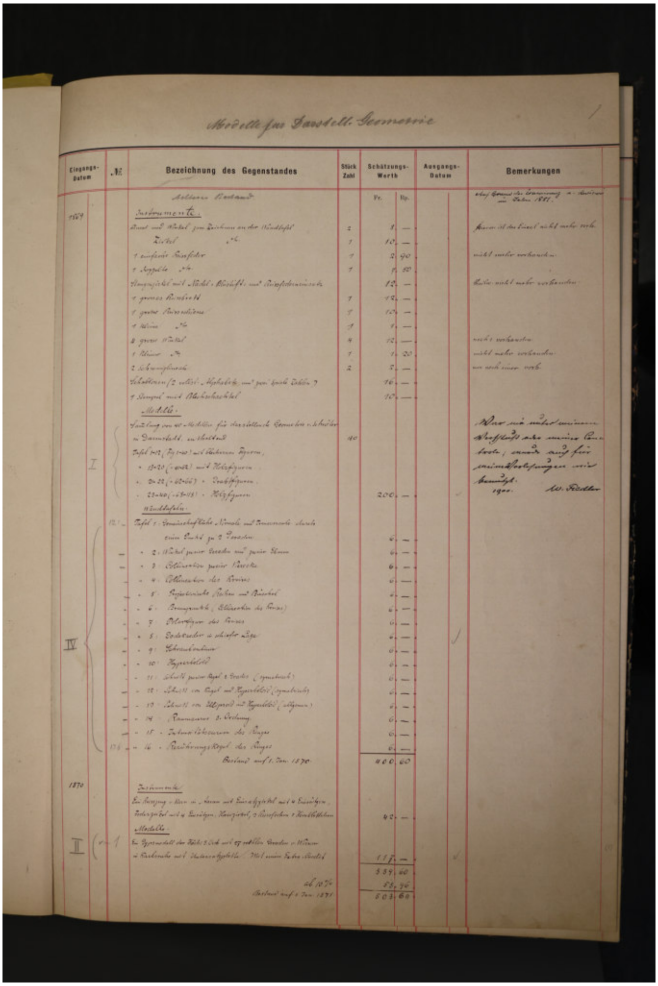


Abbildung 6: Die erste Seite aus Fiedlers Ausgabenbuch: Anschaffungen in den Jahren 1869 und 1870[43]

Die größte Sammlung, die auch den höchsten Betrag im Budget für die Sammlungen verschlang, das beachtliche 10% des Gesamtbudgets der Schule ausmachte, war die Maschinensammlung. Modelle von Maschinen waren im Laufe des 19. Jhs.

42. Darunter sind Nachbildungen antiker Skulpturen zu verstehen.
43. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196: 50. In der letzten Zeile wird der Kauf des Wienerschen Modells dokumentiert.

für Ausbildungszwecke immer wichtiger geworden. Der Hauptgrund hierfür lag in der zunehmenden Komplexität der Maschinen: Während es noch relativ einfach ist, die Funktionsweise eines Flaschenzugs mit Hilfe einer Zeichnung zu erläutern, ist dies bei einer komplexen Maschine – etwa einer Dampfmaschine – kaum noch zielführend. Es gab zudem wichtige Ansätze zur Theoretisierung des Maschinenbaus, die sich der Modellvorstellungen und der konkreten Modelle bedienten. Man denke hier nur an die Kinematik im Sinne von Reuleaux, insbesondere an seine Getriebesystematik. Hier zeigen sich deutliche Parallelen zur Entwicklung der mathematischen Modelle, die ja auch mit der zunehmenden Komplexität der Objekte zu tun hatte. Funktion und Bedeutung der Sammlungen des Züricher Polytechnikums und damit für die polytechnische Tradition allgemein werden im offiziellen Bericht über das Polytechnikum, der 1889 anlässlich der Pariser Weltausstellung im Auftrag des Schulrates verfasst wurde,[44] deutlich gemacht:

> Dieselben [die Sammlungen des Polytechnikums; K. V.] sind in erster Linie für den Unterricht und das Studium in den betreffenden Fächern bestimmt, wofür sie den Studirenden jederzeit zum Privatstudium offen stehen; daneben dienen sie auch den wissenschaftlichen Fortschritten der Lehrkräfte, vorgerückter Studirender und von Gelehrten ausserhalb der Anstalt; endlich sind sie noch der Belehrung des Publikums gewidmet, indem wenigstens die wichtigeren Sammlungen zu bestimmten Stunden jedermann geöffnet und deren Gegenstände so aufgestellt und etiquettirt sind, dass auch der Laie, ohne fachmännische Führung, daraus Belehrung schöpfen kann.[45]

Man beachte, dass der konservatorische – gewissermaßen der museale – Aspekt, den heutige Modellsammlungen deutlich zeigen, historische gesehen kaum eine Rolle gespielt hat. Es ging nicht um das Aufbewahren sondern um den lernenden Umgang.

Neben der Maschinensammlung gab es zahlreiche weitere Sammlungen, auch eine für Modelle der darstellenden Geometrie. Die Arbeit an und mit Modellen gehörte zum Ausbildungskonzept des Polytechnikums und der polytechnischen Tradition – vermutlich auch, um sich von den Universitäten abzusetzen.[46] Sie waren Kern eines didaktischen Konzepts, das den Polytechnika eigen war und das sich durch

44. ähnliche Berichte gab es schon 1873 (Wien) und 1878 (Paris) für die jeweiligen Weltausstellungen. Diese Berichte sind wahre Fundgruben für organisatorische und administrative Informationen über das Züricher Polytechnikum

45. Die Eidgenössische Polytechnische Schule in Zürich 1889, 59.

46. Zumindest im 18. Jh. gab es auch dort Sammlungen, die aber eher den Charakter von „Wunderkammern“ hatten. Sie regten mehr zum Staunen denn zum Lernen an. Daneben existierten gelegentlich auch private Instrumentensammlungen, etwa astronomischer Instrumente, von Professoren – gewissermaßen Schatzkammern.

Anschaulichkeit und Eigenaktivität von dem an den Universitäten praktizierten sozusagen scholastischen (Vorlesungs-)Stil abhob. Mathematische Modelle, insbesondere jene der darstellenden Geometrie, fügten sich hier nahtlos ein.[47] Ein deutlicher Hinweis auf die Verwendung mathematischer Modelle zum Selbststudium in einer Sammlung ist auch, dass diese oft mit begleitenden Erklärungen geliefert wurden. Diese ersetzten den Dozenten und konnten von den Studierenden in eigener Regie durchgearbeitet werden. Hinzukam, dass man solche Modelle wirkmächtig ausstellen konnte – und die zweite Hälfte des 19. Jhs. war eine Zeit der Ausstellungen, welche sich oft als „spaces of modernity“[48] inszentierten.[49] Es gibt verschiedene Quellen zur Sammlung von Modellen für den Unterricht in darstellender Geometrie – wie die offizielle Bezeichnung war - am Züricher Polytechnikum. Zu nennen ist hier neben den bereits erwähnten Verzeichnissen vor allem eine Darstellung im Jahresbericht des Schulrats an den Bundesrat[50] aus dem Jahre 1876:

> Der Sammlung mathematischer Modelle, welche wir hier zum erstenmal erwähnen,[[51]] ist durch Erwerbung der meisten neuern käuflichen Modelle dieser Art immer angemessen vervollständigt worden; doch mag die Aufzählung der einzelnen Stüke unterbleiben. Ueberdies aber sind seit einer Reihe von Jahren von den jeweiligen Assistenten der darstellenden Geometrie unter Leitung des Professors [das war W. Fiedler; K. V.] Stab- oder Drahtmodelle algebraischer Flächen usw. gefertigt worden, welche als Specialität [sic!] hier einmal Erwähnung finden mögen. Es ist in der großen regelmäßigen Arbeitsbelastung der Assistenten begründet, daß diese Modellarbeiten nur langsam gefördert werden können und daß die Zahl der Modelle nur langsam wächst.
>
> 1. Ein Drahtmodell des Orthogonalsystems im Bündel, welches von den Projektionsebenen und den Projektionsaxen, den Halbirungsebenen und den Halbirungslinien der Axenwinkel, den Halbirungs-

47. Vgl. Hassler/Meyer 2014 und Hassler/Wilkening-Aumann 2014.
48. Geppert 2002, 10. Bei Geppert findet man einen überblick zum Forschungsstand zum Thema „Ausstellungen“. Ich danke V. Remmert (Wuppertal) für seinen Hinweis auf diese Quelle.
49. So war etwa das Zürcher Polytechnikum präsent auf Schweizerischen Landesausstellungen aber auch auf Weltausstellungen. Im Buch von Lipsmeier findet man zahlreiche Belege für Ausstellungen (auch auf lokaler Ebene) und die Beteiligung von Institutionen des technischen Bildungswesens an denselben. Dressler gibt einen überblick zu Ausstellungen, bei denen mathematische Modelle präsentiert wurden (Dressler 1913, 190 – 196).
50. Das Leitungsgremium des Polytechnikums war der Schulrat. Dessen Mitglieder versammelten sich mehrmals jährlich (vergleichbar einem Aufsichtsrat); das operative Geschäft wurde vom Präsidenten des Schulrats geführt. Dieser war hauptamtlich tätig und hatte sein Büro im Gebäude des Polytechnikums. Viele Jahre war dies Carl Kappeler, der sich um den Ausbau der theoretischen Mathematik große Verdienste erwarb. Da das Polytechnikum eine Institution der Eidgenossenschaft war, war der Schulrat dem Bundesrat Rechenschaft schuldig. Insbesondere legte letzterer das Budget der Schule fest.
51. Es war auch das letzte Mal, soweit feststellbar.

axen und ihren Normalebenen gebildet wird, nebst Darstellung seiner Beziehung zu den Orthogonalprojektionen eines ebenen Systems.

2. Ein Modell der Hauptpunkte und Hauptebenen der centrischen Collineation der Räume im Zusammenhang mit der Centralprojection ebener Systeme.
3. Ein Fadenmodell der entwickelbaren Flächen einer cylindrischen Schraubenlinie mit ihren Evolventen und den Doppelkurven, sowie mit einem schräg zur Axe geführten ebenen Querschnitt.
4. Drahtmodelle von Flächen dritter Ordnung mit 27 reellen Graden mit Systemen paralleler Querschnitte, nämlich:
   a. Einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung, mit Angabe der asymptotischen Punkte in den Geraden und der 10 Ovale der parabolischen Curve der Fläche;
   b. Einer Fläche dritter Ordnung mit nur hyperbolischen Punkten, der sog. Diagonalfläche;
   c. Einer Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten.
5. Modelle von Flächen vierter Ordnung, nämlich:
   a. Ein Fadenmodell der Regelfläche vierten Grades mit einer Doppelkurve dritten Grades;
   b. Ein Drahtmodell der Fläche vierter Ordnung mit einer reellen Knotenlinie zweiten Grades und sechszehn reellen Geraden.

Ein Modell der Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiten Grades und ihrer entwickelbaren Fläche mit Darstellung ihrer Doppelcurven ist in Arbeit.[52]

Die Sammlung der Modelle für Mathematik und darstellende Geometrie am Polytechnikum war nicht öffentlich, das heißt, nur Fachleute, insbesondere Dozenten und Studierende, hatten Zutritt zu ihr.[53] Sie wurde allmählich durch eine Bibliothek ergänzt, die im Assistentenzimmer untergebracht war. Zudem gab es mehrere

52. Bericht des Eidgenössischen Polytechnikums an den Bundesrath 1876 (ETH-Bibliothek, Hochschularchiv), 10 - 11.

53. Einige Sammlungen des Züricher Polytechnikums waren – wie bereits erwähnt - für die Allgemeinheit zugänglich, etwa die berühmte entomologische Sammlung, die Kupferstich- und Handzeichnungssammlung und die Sammlung ingenieurwissenschaftlicher Modelle und Vorlagen. Vgl. etwa Eidgenössische Technische Hochschule. Programm und Stundenplan für das Wintersemester 1927/28, 74. Öffentliche Sammlungen verfügten über Aufseher.

Zeichensäle (in Zürich „Zeichnungssäle“ genannt), die dem Unterricht in darstellender Geometrie vorbehalten waren. Man erkennt hier schon, dass die darstellende Geometrie Merkmale eines Instituts im heutigen Sinne des Wortes aufwies.

Aus den Verzeichnissen wissen wir, dass die Sammlung viel umfangreicher war, als dies der oben zitierte Bericht vielleicht vermuten lässt. Dieser konzentriert sich auf einige herausragende Stücke, und zwar solche, die in Zürich hergestellt wurden. Er verschweigt die wenig spektakulären Alltagsmodelle, die gekauften werden nur am Rande erwähnt. Die Verzeichnisse zeigen auch, dass die Züricher Sammlung – wie vermutlich alle Sammlungen dieser Art – mehr und anders geartete Modelle umfasste, als man dies heute auf Grund der erhaltenen Exemplare erwartet. Die Erhaltung von Modellen erfolgte offensichtlich stark selektiv.

Von besonderem Interesse sind die Modelle der Flächen dritten Ordnung mit 27 reellen Geraden, unter ihnen die so genannte Clebsche Diagonalfläche. Das waren Objekte, mit denen sich die damals aktuelle Forschung beschäftigte.[54] Fiedler war vermutlich der erste, der solche Modelle in Angriff nahm, wir werden darauf zurückkommen. In seinem Ausgabenbuch vermerkt Fiedler für Dezember 1873/Februar 1874, dass für die Herstellung der fraglichen Modelle zirka 90 sfr. ausgegeben wurden. Auch die anderen Modelle in obiger Auflistung finden sich, teilweise mit etwas anderen Benennungen, in Fiedlers Ausgabenbuch. Das zuerst genannte Modell hat mit einer Fiedlerschen Spezialität zu tun, nämlich mit seiner Einführung der Dualität in der projektiven Ebene.[55] Hierzu betrachte man eine Bildebene und ein Zentrum C, das nicht in der Bildebene liegt. Ist P ein Punkt der Bildebene, so wird diesem folgendermaßen eine Gerade dieser Bildebene zugeordnet: Man verbinde P mit C, errichte in C die auf der Verbindungsgeraden senkrechte Ebene und betrachte diejenige Gerade p, in der die senkrechte Ebene die Bildebene schneidet. Diese ist die zu P duale[56] Gerade. Offensichtlich lässt sich der Vorgang umkehren; er führt dann von der Geraden p zum Punkt P. Dem Lotfußpunkt C_1 des Lotes von C auf die Bildebene wird die Ferngerade als duales Objekt zugeordnet und umgekehrt. Fiedler nennt diese Konstruktion „Orthogonalsystem im projizierenden Bündel“, wobei er sich eng an Steiner und von Staudt anlehnt und nebenbei die Sprache der darstellenden Geometrie ganz nach seinem Motto „Alle Geometrie muss darstellend werden“ einbringt. Die Geraden, welche die Punkte der Bildebene mit dem Zentrum verbinden, gehören zu einem Geradenbündel; dieses bildet den Schein der Ebene als Punktfeld, projiziert diese also. Die Quintessenz der Konstruktion lautet in Fiedlerscher Ausdrucksweise:

54. Vgl. Labs 2017, Lê 2013 und Rowe 2017.
55. Vgl. etwa Fiedler 1883, 113 – 115, eine moderne Darstellung findet sich bei Stiefel 1971, 82.
56. Fiedler spricht in der Regel von „reziprok“.

> Jedem Punkte der Bildebene als Spur eines projicierenden Strahls entspricht eine Gerade in derselben als Spur einer projicierenden Ebene, welche zu jenem normal ist.[57]

Diese (und andere) Erläuterungen werden bei Fiedler von einer Abbildung (vgl. Abbildung 7) begleitet:

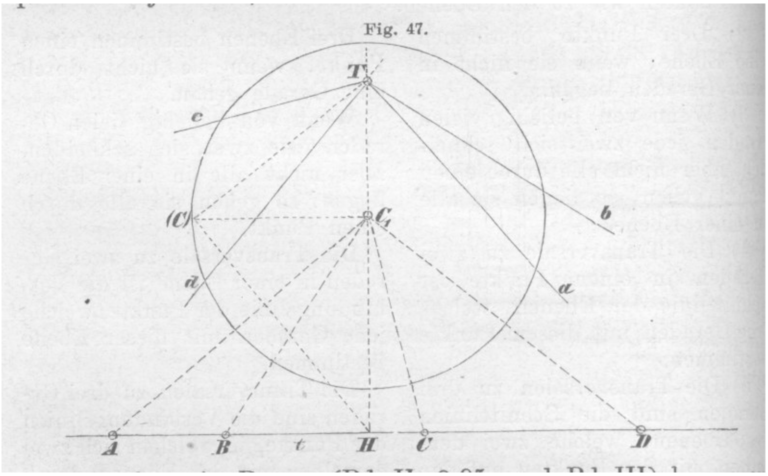


Abbildung 7: Orthogonalsystem im projizierenden Bündel (Fiedler 1883, 114)

Man lernt hier ein räumliches Modell zu schätzen, denn die Entschlüsselung der ebenen Abbildung ist nicht einfach. Das fragliche Modell ist in Fiedlers Verzeichnis als Nr. 29 festgehalten:

> Zu dem Modell des Orthogonalsystem im Würfel ist der ebene Schnitt in Draht einmodellirt worden. 10.-[58]

Es wird hier deutlich, wie eng bei Fiedler manche Modelle mit der Lehre verbunden waren. Deshalb erstaunt es nicht, dass Modelle über Jahrzehnte hinweg eine Konstante in Fiedlers Schaffen bildeten.

Assistenten von Fiedler im Zeitraum von 1867 bis 1876 waren übrigens Fliegner (wurde Professor für Mechanik am Polytechnikum), Hemmig, Alexander Beck (wurde Professor für darstellende Geometrie in Riga), Adolf Weiler (wurde Profes-

57. Fiedler 1883, 113 – 114.
58. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196: 50, S. 4. Das Modell wird vorher im Aufgabenbuch nicht genannt, was man vielleicht auf Grund von Fiedlers Formulierung erwarten würde.

sor für Geometrie an der Universität Zürich)[59] und Johannes Keller. Auf Weiler werden wir noch ausführlicher zu sprechen kommen.

Um die Wichtigkeit der Züricher Modellsammlung speziell und der polytechnischen Tradition allgemein zu unterstreichen, sei hier abschließend Dressler zitiert:[60]

> Auf seiten der Hochschulen entstanden schon früh Modellsammlungen, erklärlicherweise zuerst an den technischen Hochschulen. Bahnbrechend waren da die Bestrebungen von Chr. Wiener in Karlsruhe, Fiedler in Zürich, Brill und Sturm in Darmstadt, Brill und Klein in München. Die Universitäten folgten bald nach, zuerst 1872 Erlangen unter F Klein.

5 Wilhelm Fiedler

Otto Wilhelm Fiedler wurde 1832 in Chemnitz, einem sehr wichtigen Zentrum der Textilindustrie in jener Zeit, als Sohn eines Schusters geboren. Trotz guter Schulleistungen konnte er kein Gymnasium besuchen, vielmehr absolvierte er die niedere und die mittlere Bürgerschule und dann die höhere Gewerbeschule. Im Anschluss hieran ging Fiedler nach Freiberg an die Bergschule, die er 1852 abschloss. In Freiberg wurde Fiedler vor allem von Julius Weisbach beeinflusst, dem Begründer der modernen Markscheidekunst. Fiedler hat diesen bei praktischen Vermessungsarbeiten unterstützt und auch sonstige Arbeiten – u.a. als Broterwerb – geleistet. Im Anschluss wurde Fiedler zwanzigjährig Lehrer an der Meisterschule in Freiberg, die aber schon nach einem Jahr nach Chemnitz verlegt und in die dortige höhere Gewerbeschule integriert wurde. An dieser unterrichtete Fiedler Mathematik, nach Ausscheiden des für darstellende Geometrie zuständigen Lehrers auch darstellende Geometrie. 1859 promovierte Fiedler in Leipzig mit der Arbeit „Die Zentralprojektion als geometrische Wissenschaft“. Gutachter war A. F. Möbius, der sich mit der Arbeit zufrieden zeigte. Allerdings merkte er an, dass man deren Inhalt wohl auch auf der Hälfte der Seiten hätte darstellen können. Fiedler war weitgehend Autodidaktik, sein Wissen erwarb er sich durch ausgedehnte Literaturstudien. Da Fiedler weder Gymnasium noch Universität besucht hatte, gab es bei seiner Promotion einen gewissen Erklärungsbedarf. Es gelang allerdings Moritz Wilhelm Drobisch, Vertreter des Faches Mathematik, die bestehenden Bedenken auszuräumen.

59. Nicht zu verwechseln mit August Weiler, Mathematiklehrer in Mannheim und Autor von Lehrbüchern. Zu Adolf Weiler cf. Nachruf auf Adolf Weiler 1917. Universität Zürich. Rektoratsrede und Jahresbericht. April 1916 bis März 1917 (Zürich: Orell Füssli, 1917), 54 – 55.

60. Dressler 1913, 195.

Fiedler wurde 1864 ans Polytechnikum in Prag als Professor der darstellenden Geometrie berufen. Dort geriet er in die Auseinandersetzungen zwischen dem „tschechischen“ und dem „deutschen“ Lager, wobei er zu einem exponierten Vertreter des letzteren wurde. 1867 folgte Fiedler dem Ruf an das Polytechnikum in Zürich, wo er als Nachfolger von W. von Deschwanden bis 1907 als Professor der darstellenden Geometrie und der Geometrie der Lage wirkte; sein Nachfolger wurde sein Schüler M. Grossmann. Fiedler starb 1912 in Zürich.

Eine Besonderheit von Fiedlers Ausbildung ist, dass sie sich vollständig im Bereich des technischen Bildungswesens abspielte. Das unterschied ihn von fast allen Dozenten der Mathematik oder der darstellenden Geometrie an Polytechnika in der zweiten Hälfte des 19. Jhs., denn diese hatten in der großen Mehrzahl der Fälle an einer Universität studiert.[61] Nicht selten war eine Professur an einem Polytechnikum nur eine Station in der Karriere, ein Sprungbrett zu einer ordentlichen Professur an einer Universität. Man denke etwa an Felix Klein (Professor am Polytechnikum München von 1875 bis 1880) und Alfred Clebsch (Professor für Mechanik am Polytechnikum in Karlsruhe von 1858 bis 1863). Interessant ist es in dieser Hinsicht auch, Fiedlers Kollegen in Zürich zu betrachten. Fiedler war in der VI. Abteilung, der Fachlehrer- oder allgemeinen Abteilung, angestellt. Deren Aufgabe war es, Fachlehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften (was konkret nur Physik meinte) auszubilden und die Grundlagenfächer (in Fiedlers Falle hauptsächlich die darstellende Geometrie) für die Studierenden der anderen Abteilungen zu lehren. Diese VI. Abteilung verfügte zu Fiedlers Zeiten über zwei Lehrstühle für reine Mathematik in deutscher Sprache; ihre Inhaber waren:[62]

Bruno Elwin Christoffel (1862 – 1869), Friedrich Prym (1865 – 1869), Hermann Amandus Schwarz (1869 – 1875), Heinrich Weber (1870 – 1875), Georg Frobenius (1875 – 1892), Friedrich Schottky (1882 – 1892), Adolf Hurwitz (1892 – 1919), Hermann Minkowski (1898 – 1902).

Hinzu kamen Professoren ohne Lehrstuhl wie Carl Friedrich Geiser (1873 – 1913) und Ferdinand Rudio (1889 – 1929)[63] sowie Privatdozenten. Es gab zudem eine Professur für Mathematik in französischer Sprache sowie eine französischsprachige für darstellende Geometrie.

In der imposanten Liste, die oben zu sehen ist, fällt auf, dass nur Adolf Hurwitz bis zu seiner Pensionierung in Zürich blieb. Alle anderen Professoren für reine Mathematik, viele davon wurden sehr jung berufen, blieben eine Zeitlang in Zürich und

61. Eine weitere Ausnahme war Ludwig Burmester, der eine Handwerkerlehre absolviert hat.
62. Die Jahreszahlen geben den Zeitraum an, während dessen die Genannten am Züricher Polytechnikum wirkten.
63. Rudio war auch Direktor der Bibliothek des Polytechnikums.

verließen es dann wieder.[64] Der einzige Kollege Fiedlers, der einen gewissen Bezug zur polytechnischen Welt hatte, war Herrmann Amandus Schwarz, denn dieser hatte sein Studium mit Chemie als Fach am Gewerbeinstitut in Charlottenburg begonnen; Schwarz hat zudem einige Jahre als Mathematiklehrer an einem Gymnasium gewirkt. Neben Schwarz waren mit Frobenius und Schottky noch zwei weitere Vertreter der Berliner Schule in Zürich tätig. In seiner Züricher Zeit beschäftigte sich Schwarz u.a. mit Minimalflächen, von denen er auch Modelle herstellte. Diese fanden beim Mathematikertreffen 1873 in Göttingen Beachtung und werden auch sonst des öfteren erwähnt. Schwarz und Fiedler scheinen sich gut verstanden zu haben; u.a. erlaubte es Schwarz Fiedler, einen Text über Minimalflächen von ihm als Anhang zu seiner Bearbeitung der „Analytischen Geometrie des Raumes“ von G. Salmon zu veröffentlichen.[65]

Die Möglichkeit, Fachlehrer in Mathematik ausbilden zu können, machte das Züricher Polytechnikum aus Sicht der Mathematiker attraktiv, denn so konnte die sonst an Polytechnika gängige Beschränkung auf Fachvorlesungen für zukünftige Ingenieure umgangen werden. In Zürich hatte man die Möglichkeit, anspruchsvolle mathematische Vorlesungen zu halten. Auch Fiedler hat hiervon profitiert. Neben den Standardveranstaltungen zur darstellenden Geometrie für Ingenieure, anfänglich noch ergänzt durch solche über Geometrie der Lage, hielt Fiedler anspruchsvolle Vorlesungen über Geometrie in der VI. Abteilung.[66]

Um die Ansprüche, die im Bereich Geometrie im Rahmen der Fachlehrerabteilung in Zürich gestellt wurden, etwas konkreter zu machen, sei hier kurz der 1873 veröffentlichte sogenannte Normallehrplan,[67] soweit es in ihm um Geometrie geht, vorgestellt. Auf acht Semester verteilt sollten die Studierenden fast 140 Stunden belegen, darunter: analytische Geometrie der Ebene (4 + 1)[68], Darstellende Geometrie mit Übungen (4 + 2), Analytische Geometrie des Raumes (2 + 1), Synthetische Geometrie (3 + 1), Darstellende Geometrie mit Übungen (4 + 3),

64. Dieses Phänomen wurde als „Wartesaal“ (Gustav Holzmüller) bezeichnet. Gemeint war, dass die Polytechnika nur als Sprungbrett für universitäre Stellen betrachtet wurden. Abgesehen von Zürich war dieses Phänomen aber lange nicht so ausgeprägt, wie man vermuten könnte. Das haben Untersuchungen von N. Benstein (Wuppertal) ergeben, die demnächst veröffentlicht werden.

65. Ab der zweiten Auflage 1874.

66. Lehrer wurden in Deutschland nur an den Polytechnika in München und Dresden ausgebildet. Bzgl. der Wichtigkeit der Lehrerausbildung für Fiedler vgl. man dessen Briefentwurf an Kick, ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 87: 498a.

67. Dieser war nur fakultativ. Die Studierenden der Fachlehrerabteilung genossen im Unterschied zu allen anderen Studierenden des Polytechnikums Lehrfreiheit, das heißt, sie konnten die Veranstaltungen, die sie besuchen wollten, auswählen. Es fand jedoch jedes Jahr ein Beratungsgespräch mit dem Vorstand der Abteilung, über viele Jahre hinweg war dies Fiedler, statt, in dem die Wahl der Studierenden besprochen und ein individueller Studienplan erstellt wurde.

68. Heißt vier Stunden Vorlesung und eine Stunde Repertorium.

Geometrie der Lage (4 + 1), Technisches Zeichnen (2), Determinanten in geometrischer Anwendung (2), Geographische Ortsbestimmung (3), Determinanten in geometrischer Anwendung (2), Flächen 2. und 3. Grades (2), algebraische Kurven (2), algebraische Kurven (4).

Ein viersemestriger Geometriekurs sah konkret bei Fiedler beispielsweise so aus:

Darstellende Geometrie. Teil I: Parallelprojektion (3 Stunden pro Woche)

Darstellende Geometrie. Teil II: Zentralprojektion (3 Stunden pro Woche)

Geometrie der Lage (4 Stunden pro Woche)

Projektive Koordinaten (2 Stunden pro Woche)[69]

Im Folgenden seien einige Modelle geschildert, die von Fiedler oder in seiner Umgebung – insbesondere von seinen Assistenten und Studenten – konstruiert wurden. Diese zeigen das hohe, sowohl fachliche als auch technische Niveau, das insbesondere am Polytechnikum in Zürich herrschte, aber auch, wie selbstverständlich der Bau und die Arbeit mit Modellen im polytechnischen Umfeld waren; zudem wird ein weit verbreiteter Irrtum korrigiert.

Bislang ist leider nicht viel über Fiedlers Lehrtätigkeit in Chemnitz bekannt; hier könnte eine inhaltliche Auswertung seines Nachlasses in Zürich Aufschlüsse liefern. Es ist aber anzunehmen, dass er dort Modelle in seinem Unterricht verwendet hat, einfach weil dies – wie wir gesehen haben – allgemeiner Brauch war. Aus Fiedlers Prager Zeit (1864 – 67) hingegen gibt es zwei bemerkenswerte Fälle zu vermelden. Zum einen ist da das Modell einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden zu nennen, das Fiedler mit Hilfe seines Assistenten Rafael Morstadt baute. Dies

69. Dieser Zyklus wurde zwischen 1879 und 1881 gelesen; Fiedlers ältester Sohn Ernst war Hörer dieser Vorlesungen, die er minutiös ausarbeitete. Ernst Fiedlers Ausarbeitungen befinden sich heute im Archiv der ETH (ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 108, 109, 110); vgl. Abbildung 7. Ernst Fiedler schrieb seine Aufzeichnungen in Gabelsberger Kurzschrift (vgl. Abbildung 8). Es gibt daneben noch mehrere andere Mitschriften von Vorlesungen Fiedlers, z. B. von Marcel Grossmann, der Assistent bei Fiedler war und bei ihm promovierte (1902 – formal an der Universität Zürich mit Gutachten von Fiedler und Weiler) und 1907 schließlich sein Nachfolger wurde. Die Themen der Vorlesungen konnten auch leicht variieren (vor allem die der vierten im Zyklus). Fiedler hat schon früh über nichteuklidische Geometrie gelesen, auch für die vierte Dimension zeigte er Interesse. Guiseppe Veronese, ein Pionier der höherdimensionalen Geometrie, war ein Schüler von Fiedler; beide unterhielten eine umfangreiche Korrespondenz miteinander.

Fiedler hat schon recht früh (1870) Autographen in seiner Lehre verwendet, die er an seine Studierenden verteilte. In den 90er Jahren entstanden auch autographierte Skripten seiner Vorlesungen (z. B. Fiedler 1894). Vgl. Ausgabenbuch ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196: 50.

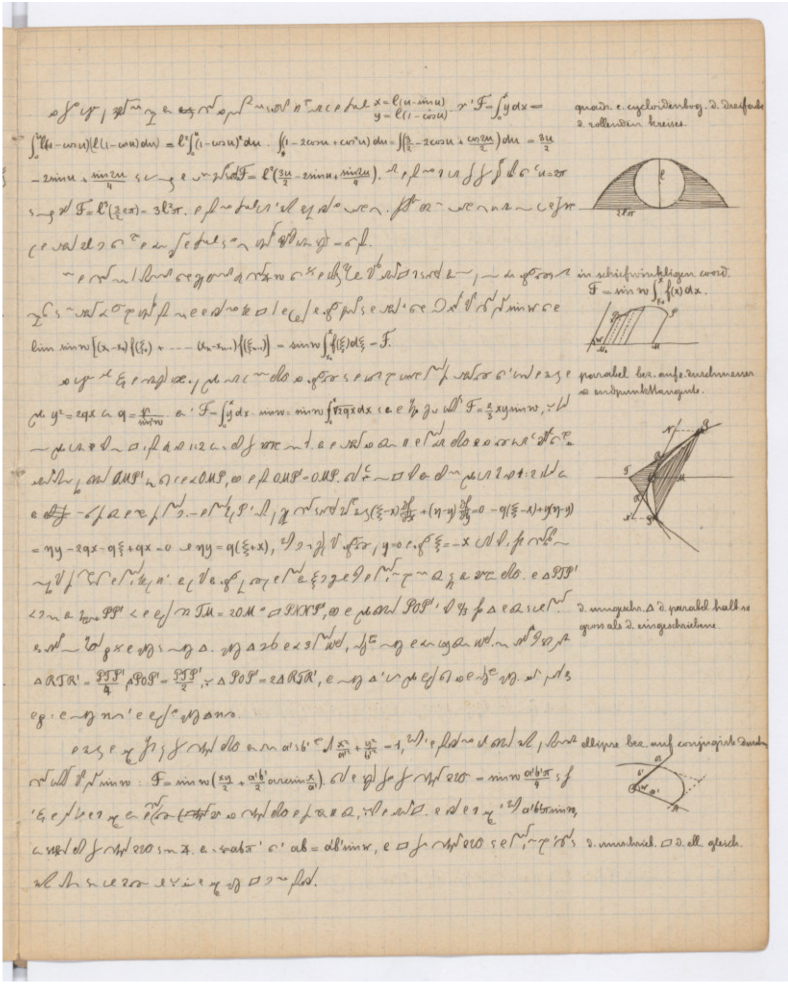


Abbildung 8: Seite aus einer Vorlesungsausarbeitung von Ernst Fiedler[70]

und nicht das Modell von Chr. Wiener, das meist genannt wird, war das erste Modell überhaupt diese Objektes, das in jener Zeit großes Interesse fand.[71] Fiedler hat seine Errungenschaft in einer Besprechung des Modells von Wiener, das 1868

70. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 107. Es handelte sich um die Vorlesung „Differential- und Integralrechnung“ von G. Frobenius am Polytechnikum in Zürich (WS 79/80 und SoSe 80).

71. Vgl. Labs 2017 und Rowe 2017 für mehr Informationen zu dieser Fläche. Zu beachten ist, dass die Betrachtungen fast immer im projektiven Raum durchgeführt werden. Dieser kann sowohl komplex als auch reell sein. Speziell bei der Fläche dritter Ordnung ist die Realitätsfrage interessant, wie die Aufmerksamkeit, die man der Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden widmete, zeigt.

publiziert wurde, der Öffentlichkeit mitgeteilt:

> Mein Streben nach einem solchen Modell ward im Sommer 1861 durch die mehrseitigen Mittheilungen in den „*Comptes rendus*“[72] der Pariser Akademie lebhaft erregt und ich unternahm im Ferienmonat zunächst die Berechnung des ganzen Systems nach der Schläfli'schen Doppelsechs. Ich suchte eine solche Anordnung zu erlangen, dass die 135 Schnittpunkte des Systems in einem Parallelepiped von nicht zu ungleichen Dimensionen untergebracht und zugleich in den einzelnen Geraden selbst so vertheilt wären, dass die Abstände der zehn Punkte unter einander nirgends zu klein bleiben; ich wollte sodann zwei grosse stereoskopische Centralprojectionen des Systems construiren und dieselben, wenn ich ihre Combination zur räumlichen Anschauung nicht zu schwierig fände, vervielfältigen lassen; ich hatte mich gewöhnt, ohne Vermittlung des Stereoskopkästchens[73] zu combiniren und war durch größere Dimensionen der Bilder, als dasselbe sie erlaubt, nicht gestört gewesen. Aber es glückte mir bei dreimaliger Berechnung des ganzen Systems nicht, jene Ziele zu erreichen und ich verzichtete ermüdet. Aus dem laufenden (X.) Bande des „*Quaterly Journal of Mathematics*“ (pag. 58 – 71), wo Sir A. Cayley eine solche Berechnung mittheilt, ersehe ich, dass auch ihm das nicht gelungen ist; ich benutze den Anlass, auf seine Formeln aufmerksam zu machen, wer etwa die Berechnungen unternehmen möchte. Mit den Vorbereitungen zur deutschen Bearbeitung von G. Salmon's „*Tratise on the analytic geometry of three dimensions*“, besonders mit der Ausarbeitung des zweiten Theiles (Leipzig, Teubner 1865)[74], während deren ich nach Prag übersiedelte, kam ich auf das Vorhaben zurück, jedoch nicht auf den Plan der Berechnung, Construction und stereoskopischen Combination zweier Centralprojectionen des Systems; es ward nun auf dem Wege der Modellirung ausgeführt, freilich mit Verzicht auf die volle durch Rechnung und Construction erreichbare Genauigkeit, doch mit sehr befriedigendem Erfolg.

72. Vermutlich handelte es sich bei diesen Mitteilungen um Sylvester 1861, Cayley 1861 und Chasles 1861. Genaue Angaben fehlen leider bei Fiedler. Es erstaunt eigentlich, dass Fiedler offensichtlich in Chemnitz Zugang zu den Publikationen der Pariser Akademie der Wissenschaften hatte.

73. Eine Vorrichtung – vergleichbar einem Halter für Dias – um die zwei Fotografien, die den räumlichen Eindruck vermitteln sollen, mit Hilfe einer Optik so zu betrachten, dass ein räumlicher Eindruck entsteht. Geübte Betrachter vermögen stereoskopische Fotografien auch ohne Gerät räumlich zu sehen. Ich danke W. Weiser (Wuppertal) für seine Auskünfte in Sachen Stereofotografie.

74. Dieser behandelt auf fast 700 Seiten die Flächentheorie, Grundlagen und Kurventheorie finden sich im ersten Band.

> Der Assistent der darstellenden Geometrie am Prager Polytechnikum, Herr R. Morstadt, als geschickter Constructeur und Modelleur durch seine relief-perspectivischen Modelle auch weiter bekannt, löthete nach meinen Angaben aus 27 geraden schwachen Drähten[75] – nachdem es nach einigen Versuchen gelungen war, eine genügende Anordnung auszuprobieren – das System zusammen.[76]

Dieser Bericht ist in mehrerer Hinsicht interessant. Zum einen dokumentiert er die Schwierigkeiten, die mit dem Bau eines Modells verbunden sein konnten. Man vermochte ein solches ja nicht dadurch erhalten, dass man eine genügende Anzahl von Punkten, die auf der Fläche liegen, ausrechnete. Also brauchte man nähere Informationen über die interne Struktur der Fläche. Eine solche lieferte die Schläflische Doppelsechs, die die Aufteilung der 27 Geraden genau beschreibt.[77] Mit ihrer Hilfe gewinnt man auch Punkte der Fläche. Das nächste Problem ist, die Parameter so zu bestimmen, dass derjenige Teil der Fläche, der interessiert, in einem Raumteil liegt, den man modellieren kann. Um ein räumliches Bild zu bekommen, hat sich Fiedler Methoden der Stereofotografie bedient. Diese ermöglichen es, zwei Bilder – sie entsprechen zwei Projektionen der zu konstruierenden Fläche – so zu kombinieren, dass ein räumlicher Eindruck entsteht (vgl. Abbildung 9).[78] Da Fiedler die mit diesem Weg verbundenen Schwierigkeiten nicht überwinden konnte, verwandte er letztlich einen anderen Zugang, die Reliefperspektive. Auf sie kommen wir noch zu sprechen.

Fiedlers Modell bestand aus verlöteten Stäben (vgl. Abbildungen 10 und 11 für Beispiele); sie repräsentieren die 27 reellen Geraden der Fläche, welche in Form einer Doppelsechs angeordnet sind. Dieser Art von Modellen, Fiedler spricht von Stabmodellen, wird er, entgegen dem Trend der Zeit im deutschen Raum, der Gipsmodelle favorisierte, treu bleiben. Stabmodelle haben den Vorteil, einen Blick ins Innere und damit auch auf die rückwärtigen Teile der Fläche zu ermöglichen. Man kann die Stäbe auch beweglich miteinander verbinden durch Nieten o. dgl. Sie sind haltbarer als Fadenmodelle, aber natürlich auch schwerer und der Gefahr von Verbiegung ausgesetzt. Stabmodelle sind nur für Flächen sinnvoll, die eine genügende Zahl von Geraden enthalten. Allerdings entsteht bei der Verwendung von Stäben nicht der Eindruck einer lückenlosen glatten Fläche wie beim Gipsmodell.

75. Sonst spricht Fiedler immer von seinem Stabmodell. Draht- und Stabmodelle unterscheiden sich durch die Stärke der verwendeten Drähte, die zudem bei letzterem abgeplattet sein können.
76. Fiedler 1869, 33; ähnlich in Salmon – Fiedler 1874, 662 – 663 (Anm. 118). Wie bereits festgestellt, wird Fiedlers Modell in der Literatur fast nicht erwähnt, eine Ausnahme ist Meyer 1928, 1504.
77. Vgl. Labs 2017, 19.
78. Wiener, um dessen Modell es ja in Fiedlers Besprechung geht, hatte auch stereofotografische Aufnahmen seines Modells gemacht. Eine derartige Aufnahme Wieners ist bei Labs 2017, 20

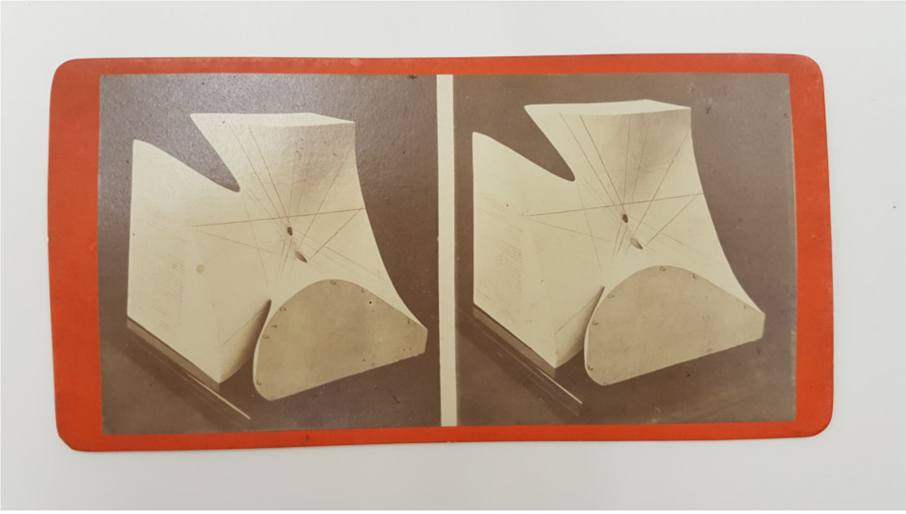


Abbildung 9: Stereoskopische Aufnahmen einer Fläche dritter Ordnung mit Geraden (ETH-Bibliothek, Hochschularchiv Hs 87a : 27)[79]

Die Tatsache, dass die Mehrzahl der heute noch erhaltenen Modelle solche aus Gips aus dem Bestand der Firmen Brill bzw. Schilling sind, sollte nicht zu dem Trugschluss verleiten, dass Gipsmodelle in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. dominant gewesen seien. Dass dem nicht immer so war, belegen das Aufgabenbuch Fiedlers aber auch das Inventar. Die professionellen Gipsmodelle der Firmen waren vergleichsweise teuer und wurden wohl deshalb nicht einfach so entsorgt; zudem waren sie haltbarer als beispielsweise Faden- oder Kartonmodelle.[80]

Es ist anzumerken, dass Jahrzehnte später Draht- und Stabmodelle wieder vermehrt auftreten werden, nämlich in den Sammlungen von Hermann Wiener und Peter Treutlein (vgl. Abbildungen 10 und 11).

wieder abgedruckt.

79. Dank an Lucien Rasmus Frisch-Volkert (Zürich) für diese Aufnahme.

80. Dank an D. Rowe (Mainz) für diesen Hinweis.

Abbildung 10: Drahtmodell eines bewegliches Ellipsoids mit Ständer (Sammlung Wiener Nr. 425)[81]

Fiedler geht in seiner Besprechung noch genauer in die Details seiner Konstruktion. Schließlich heißt es:

> So giebt das Modell als Stabmodell doch die vollständige Anschauung der Fläche mit ihren höchst merkwürdigen Oeffnungen. Es ist circa 0,8 Meter breit, lang und hoch.[82] Ich habe es immer ganz vortrefflich brauchbar gefunden, um die allgemeinen Anschauungen der Theorie algebraischer Flächen zu verdeutlichen; seine Genauigkeit reicht völlig dafür aus. Ich habe gelegentlich ein Paar der Steiner'schen conjugirten Trieder markirt; ich habe die Doppelpunkte der Involutionen auf den Geraden einer dreifach berührenden Ebene bestimmt und dadurch anschaulich gemacht, wie solche sechs parabolische Punkte der Fläche in derselben Ebene viermal zu dreien in einer Geraden liegen etc.
>
> Die verhältnissmässige Leichtigkeit der Herstellung macht eine Wiederholung derselben behufs Bildung von Varietäten und Specialfällen möglich; vielleicht regt diese Mittheilung mehrfach dazu an. Möge sie wenigstens nicht verfehlen, für die Modelle und Photographien des Herrn

81. Vgl. Wiener/Treutlein 1912 , 15. Quelle: Universitätssammlungen in Deutschland (http://www.universitaetssammlungen.de/modell/241). Das Original befindet sich in der Sammlung der Technischen Universität Dresden.

82. Dieses Modell war also um einiges größer als das später von Brill und Schilling verkaufte Gipsmodell.

Professor Wiener vielseitig Interesse zu erwecken.[83]

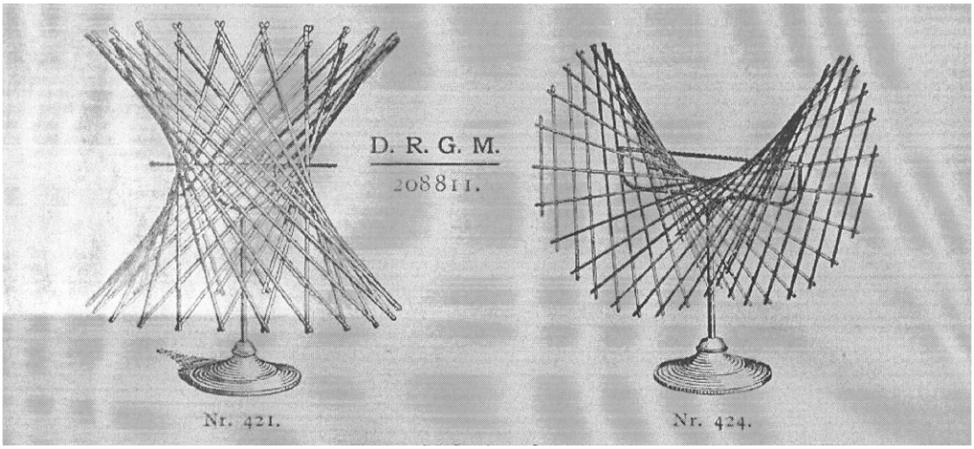


Abbildung 11: Zwei Stabmodelle aus der Sammlung von H. Wiener: Einschaliges Hyperboloid (links) und hyperbolisches Paraboloid (rechts)[84]

Offensichtlich hat Fiedler sein Modell zu Unterrichtszwecken genutzt und „vernutzt“ – ob in Vorlesungen oder in der Sammlung oder in beiden, wird hier nicht klar.

Der von Fiedler lobend erwähnte Assistent Rafael Morstadt wurde auch in eigener Regie als Modellbauer tätig. 1867, also zur Zeit von Fiedlers Weggang aus Prag, veröffentlichte er eine Arbeit mit dem Titel „Ueber die räumliche Projection (Reliefperspective), insbesondere diejenige der Kugel“.[85] Es geht dabei um eine Darstellungsart, wie sie beispielsweise bei Bühnenbildern und bei Reliefs Verwendung findet. Mathematisch gesehen kann man diese als räumliche Zentralkollineation bezeichnen (vgl. Abbildung 12). Zu einer solchen gehören die Angabe eines Punktes Z, Zentrum genannt, und einer Ebene e, Kollineationsebene genannt. Die Eigenschaften sind dann:

1. Punkt, Bildpunkt und Zentrum sind stets kollinear.
2. Die Punkte von e sind Fixpunkte.
3. Die Bilder von Geraden sind Geraden.

83. Fiedler 1869, 34.
84. Wiener/Treutlein 1912, 13. Es handelt sich hier um Regelflächen, was die Herstellung eines Stabmodells einfach macht. Dünne Drähte konnte man biegen, massivere Drähte (Stäbe genannt) blieben geradlinig.
85. Morstadt 1867.

4. Die Abbildung ist bijektiv.[86]

Die Wichtigkeit der Reliefperspektive hat Fiedler in einer Vorlesung über darstellende Geometrie folgendermaßen geschildert:

> Die Bedeutung dieser Construction liegt darin, dass sie die geometrische Grundlage künstlerischer d. h. auf angenehme Täuschung ausgehende Modellirung mit enthält, und dass sie alle anderen technisch brauchbaren Modellirungsmethoden u. schliesslich die Darstellungsmethoden durch Zeichnungen auf Ebenen als spezielle Fälle umfasst. [...] Wenn dem entsprechend hergestellte Modelle noch beleuchtet werden durch Licht, das von einem geeignet gewählten Punkte der Gegenebene Q ausgeht, so glaubt das Auge C statt seiner collinearen Umformung das mit dem richtigen Sonnenschatten ausgestattete Object selbst zu sehen. (Decoration der Schaubühne – der Raum zwischen den Ebenen S und Q ist Raum der Bühne, S die Vorhangebene.)[87]

Dieser Abschnitt stammt aus einer autographierten Ausarbeitung von Fiedlers Vorlesung, die 1894 entstanden ist. In seinem Lehrbuch der darstellenden Geometrie ist Fiedler mit solchen Hintergrundinformationen ziemlich sparsam. Im Falle der Reliefperspektive geht die künstlerische Praxis der mathematischen Theorie natürlich voraus, denn Reliefs etwa sind viel älter als die Reliefperspektive.

Die Reliefperspektive ist das Analogon der Zentralprojektion einer Ebene auf eine andere, die man bekanntlich durch Umklappung als Zentralkollineation in der Ebene realisieren kann. Im vierdimensionalen Raum könnte man die analoge Situation herstellen, im Dreidimensionalen gibt es diverse Schwierigkeiten. Jean Victor Poncelet hatte sich mit dem Problem beschäftigt und auch den Namen eingeführt; bildet man einen Körper per Reliefperspektive ab, so nannte man das Resultat auch ein Modell und den Vorgang Modellieren[88]. Dieses Modell war somit ein abstraktes, wir würden heute sagen: Es war das Bild unter einer Abbildung (nämlich einer Zentralkollineation des Raumes). Natürlich kann man vom abstrakten Modell als Vorlage ausgehend konkret-materielle Modelle konstruieren. Genau das

86. Dies ist natürlich eine moderne Formulierung, die man im 19. Jh. so nicht findet. Sie ist an Schaal 1981 angelehnt. Übrigens kann man zeigen, dass sich Geraden und Bildgeraden, Ebenen und Bildebenen immer in der Ebene e schneiden – in strikter Analogie zur Zentalkollineation in der Ebene.

87. Fiedler 1894, 48. Hervorhebungen wie im Original. Ein Exemplar dieser Autographie findet sich in der Bibliothek der ETH (Rar 9099). Ich danke Herrn U. Stammbach (Zürich) dafür, mir ein Exemplar dieser Autographie zugänglich gemacht zu haben.

88. Poncelet selbst verwendet den Terminus „Modell" nicht, er spricht vom Homologen eines Objekts. Dank an Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) für Informationen über Poncelet.

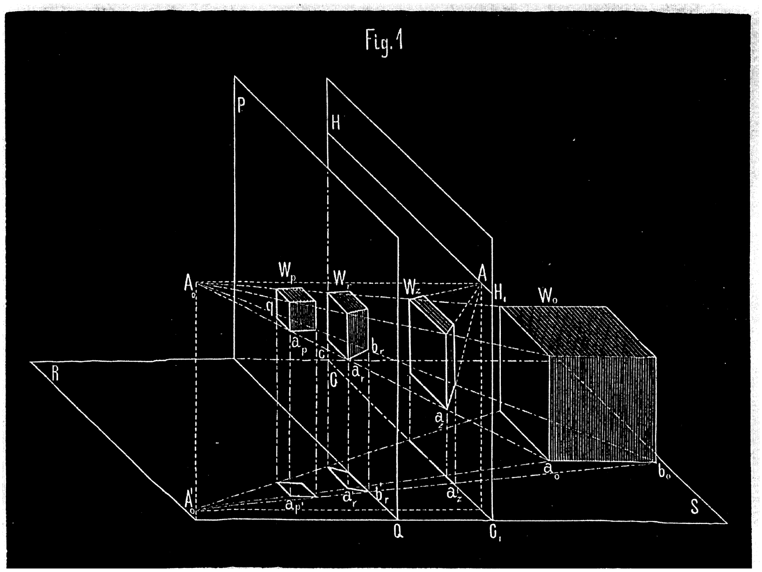


Abbildung 12: Reliefperspektivische Modelle eines Würfels[90]

tat Morstadt „Assistent der descriptiven Geometrie am Polytechnikum Prag“, der zudem W. Fiedler für das in seinen Vorlesungen erworbene Wissen dankte.[89]

> Der Verfasser hat vor mehreren Jahren nach den Principien der räumlichen Darstellungsmethode Modelle einfacher geometrischer Körperformen, sowie ein größeres architektonisches Relief gefertigt.
>
> Da sich binnen Kurzem diese Arbeiten [die von Morstadt gebauten Modelle; K.V.] an mehreren Lehranstalten beifälliger Aufnahme erfreuten und mehrfach die Mittheilung der den Modellen zu Grunde liegenden Constructionen gewünscht wurde, sowie deshalb, dass die Methoden der Reliefprojection als die allgemeinste Darstellungsmethode überhaupt in den Lehrbüchern über darstellende Geometrie bisher keinen Platz haben, bereitete der Verfasser eine Abhandlung zum Drucke vor, [. . .].[91]

Die Arbeit von Morstadt ist eine kurzgefasste Einleitung in die Reliefperspektive, ergänzt noch um Ausführungen zum Schattenwurf. Dieser ist ja ein wichtiges Mittel, um Darstellungen plastischer erscheinen zu lassen.

89. Morstadt 1867, 327.
90. Staudigl 1868, 3.
91. Morstadt 1867, 326.

Abbildung 13: Modell einer Bogenhalle in Reliefperspektive von Ludwig Burmester[92]

Das Morstadtsche Modell ist leider nicht mehr auffindbar, bekannt geblieben sind Modelle, die L. Burmester später konstruierte (vgl. Abbildung 13).

Ein Jahr nach Morstadts Veröffentlichung publizierte R. Staudigl, der ein führender Vertreter der Wiener Schule der darstellenden Geometrie werden sollte,[93] ein ganzes Buch zur Thematik „Grundzüge der Reliefperspective“.

Bezüglich Fiedlers Beschäftigung mit Modellen verfügen wir für seine Züricher Zeit über einige Quellen. Dies sind seine umfangreiche bislang nur bruchteilhaft ausgewertete Korrespondenz[94], seine Publikationen und die bereits mehrfach zitierten Verzeichnisse – oben als Fiedlers Ausgabenbuch[95] und als Inventar[96] der Sammlung von Modellen für den Unterricht in darstellender Geometrie bezeichnet. Es soll hier nicht der Versuch gemacht werden, diese Quellen erschöpfend auszuwerten; einige Hinweise mögen genügen, um Fiedlers Leistungen im Zusammenhang mit Modellen und deren Beziehung zur polytechnischen Tradition zu verdeutlichen.

Betrachtet man die Eintragungen in den genannten Verzeichnissen, so findet man über 150 Modelle darunter. Davon sind viele von Fiedler angeschafft worden (gut die Hälfte), Namen von Zuliefern waren Schröder, Chr. Wiener, Eigel & Sohn,

92. Quelle: Universitätssammlungen in Deutschland (http://www.universitaetssammlungen.de/modell/280). Die Konstruktion wird in Burmester 1884 ausführlich erklärt. Burmesters Modelle konnten „durch Herrn C. Lehmann, Inspektor und Konservator am königlichen Museum der Gypsabdrücke in Dresden“ bezogen werden (Burmester 1884, 54 n. *). Burmester hat auch ein Lehrbuch der Reliefperspektive mit ausdrücklichem Bezug zur Konstruktion von Modelle geschrieben: Vgl. Burmester 1883.

93. Er hatte sich übrigens auch in Zürich auf die Stelle beworben, die Fiedler dort bekam.

94. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 87 – etwa 1700 Briefe an Fiedler.

95. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196: 50.

96. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196: 30.

L. Brill, Lobde, Spiess, A. Brill, Björling, H. Wiener über L. Brill, Schilling/Brill, Horn, Stäckel und Hauck[97]. Im Laufe der Zeit nehmen die Bestellungen zu und das Unternehmen L. Brill, später M. Schilling, spielt eine immer wichtigere Rolle. Die verbleibenden Modelle – also mehr als 50 Stück – dürften in Fiedlers Umgebung entstanden sein. Hier erfahren wir leider nur zwei Namen: Adolf Weiler und Béla Tötössy. Aber allein schon die Zahl der hausgemachten Modelle zeigt, wie wichtig die Beschäftigung mit Modellen am Züricher Polytechnikum war. Sie dienten sicher auch dazu, Studenten in den Forschungsprozess einzubinden, denn es ist ja der Herstellungsprozess eines Modells, der einen Forschungsprozess in Gang setzt, selten das fertige Modell.

Weitere Aufschlüsse liefern Fiedlers zahlreiche Publikationen. Diese zerfallen in Bücher, bei denen Fiedler selbst Autor war[98], in die Publikationen von Salmon-Fiedler[99] und in Artikel, welche Fiedler veröffentlicht hat. Während seiner Züricher Zeit war Fiedler ein aktives Mitglied der Naturforschenden Gesellschaft Zürich; er nutzte deren Organ, die Vierteljahrsschrift, für zahlreiche Publikationen. Dabei muss man in Erinnerung behalten, dass die naturforschende Gesellschaft Mitglieder aus allen möglichen Fachrichtungen hatte, unter denen die Mathematiker eine verschwindend kleine Minderheit bildeten: also eigentlich eine gute Gelegenheit, Modelle vorzuführen. Einen ersten Hinweis finden wir 1883, wo vermerkt wird: „Herr Prof. Fiedler hält einen Vortrag über Geometrisches mit Vorweisungen.“[100] Dabei führte der Vortragende zwei Modelle für die Durchdringung zweier Kegel zweiter Ordnung und deren Durchdringungskurven vor. Die beiden Modelle hatten unterschiedliche Größen, das Material waren in einem Fall Stäbe und Fäden, im andern Fall nur Stäbe. Der knappe Bericht über Fiedlers Beitrag wurde von R. Billweiler, dem seinerzeitigen Sekretär der Gesellschaft, verfasst. Das ist eher ungewöhnlich, in aller Regel schrieb Fiedler selbst den Artikel.[101] Kurze Zeit später, im Februar 1883 finden wir einen zweiten Bericht “Herr Prof. Fiedler spricht unter Vorweisung von Modellen über eine Singularität algebraischer Oberflächen”.[102] Bei dieser Gelegenheit stellte Fiedler mehrere Modelle vor, nämlich eines der Clebschen Diagonalfläche und ein Fadenmodell einer Fläche vierten Grades. In beiden Fällen bezog sich Fiedler auf Diplomarbeiten seiner Studenten, im letzten Fall nennt er

97. Bei Hauck ist nicht klar, ob er selbst die Modelle geliefert hat oder ob er diese nur inspiriert hat.
98. In unserem Kontext hier kommt vor allem sein Lehrbuch der darstellenden Geometrie in Frage (Fiedler 1872, 1875, 1883-1885, 1904).
99. Hier ist vor allem die analytische Geometrie des Raumes zu nennen (Salmon-Fiedler 1865, 1874).
100. Fiedler 1883.
101. Diese hatten meist den Charakter wissenschaftlicher Veröffentlichungen, nicht den von Berichten über Vorträge oder Darbietungen.
102. Fiedler 1883a.

sogar den Namen des Studenten: Béla Tötössy.[103] Er erwähnt zudem, dass Tötössy seine Resultate im mathematischen Seminar vorgestellt habe. All dies belegt die intensive Arbeit an Modellen in Fiedlers Umgebung.

In Fiedlers umfangreicher Korrespondenz tritt das Thema Modelle an verschiedenen Stellen auf. Kaum überraschend ist, dass F. Klein Modelle mehrfach anspricht. Sein Versuch, Fiedler zur Teilnahme am Mathematikertreffen in Göttingen (1873) zu bewegen und die geplante Ausstellung von Modellen mit eigenen Exemplaren zu ergänzen, blieb allerdings erfolglos. Dennoch behielt er Fiedlers Modelle im Auge. Am 22.10. 1876 schrieb er von München aus:

> Ich sah, als ich vor einem Jahr in Zürich war, die Fadenmodelle der F_3 und der F_n und dazugeh. $\widetilde{C}_2$. Ich möchte für unser Institut sehr gerne diese ebenfalls haben.[104]

F_3 bedeutet eine Fläche vom Grad 3, F_n analog eine vom Grad n, C ist ein Kegel. Der Index 2 gibt an, dass die Klasse der Fläche um 2 erniedrigt wird, weil Knotenpunkte vorhanden sind. Diese Bezeichnungsweisen waren in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. weitgehend standardisiert. Die Entwicklung geeigneter Bezeichnungsweisen war allgemein eine wichtige Vorbedingung für die Organisation von Sammlungen und Ausstellungen.[105] Man entnimmt zudem dieser brieflichen Äußerung, dass Klein Fiedlers Modelle geschätzt hat. Zudem wird deutlich, dass anfänglich Modelle unter den Konstrukteuren ausgetauscht wurden, der kommerzielle Vertrieb durch L. Brill hat dem später weitgehend ein Ende gesetzt.

Ein ähnliches Anliegen wie Klein hatte später W. Dyck, der für die DMV-Versammlung 1892 in Nürnberg eine Modellausstellung organisieren wollte. Auch er wandte sich brieflich an Fiedler mit der Bitte, ihm Modelle für die Ausstellung zu überlassen. Dieses Mal war zudem ein Katalog geplant. Dyck schlug Fiedler vor, für diesen einen Bericht über die Modellsammlung des Polytechnikums zu verfassen. Mit beiden Anliegen scheiterte Dyck, Fiedler machte auch dieses Mal nicht mit. Weil in Nürnberg eine Epidemie ausbrach, konnte die Versammlung nicht stattfinden. Die Ausstellung wurde im Jahr danach, also 1893, in München präsentiert mit Katalog und Kommentarband, aber ohne Fiedler.

Im Laufe der Jahrzehnte hatte Fiedler eine größere Anzahl von Assistenten und Schülern. Verließen diese Zürich, so blieb er oft mit ihnen brieflich in Kontakt. Ein besonders interessanter Fall dieser Art ist Guiseppe Veronese, mit dem Fiedler u.a.

103. Tötössy wurde später Professor am Polytechnikum in Budapest.
104. Bibliothek ETH-Archiv Hs 87: 583. Zur Frage der Bezeichnungen cf. Hassler/Meyer, *Sammlung als Archiv*, 10.
105. Man denke an die Etikette, die im offiziellen Bericht des Züricher Polytechnikums von 1889 erwähnt wurden (siehe oben).

über n-dimensionale Geometrie korrespondierte. Bezüglich der Modelle ist Fiedlers Briefwechsel mit Adolf Weiler bemerkenswert. Weiler war ja – wie wir oben in Kleins Zitat schon gesehen haben – ein Pionier des Modellbaus. Weiler hatte an der Fachlehrerabteilung des Züricher Polytechnikums studiert und 1872 sein Fachlehrerdiplom für Mathematik erworben. Das Polytechnikum lobte Preisaufgaben aus. In Fiedlers Ausgabenbuch findet sich folgende Notiz (unter 1872):

> Modell einer Regelfläche 4. Grades mit Doppelcurve 3. Ord. allgemeiner Fall (von H. Weiler ausgeführt in Begleit. seiner Preisbewerbungsschrift 1872).[106]

Für das Jahr 1872 hatte der Schulrat, wie üblich, Preisaufgaben für die Studenten des Polytechnikums gestellt. Eine davon betraf die VI. Abteilung; in ihr ging es um Flächen vierten Grades. „Herr Adolf Weiler aus Winterthur“ bekam den Preis (eine Medaille und 50 sfr.) zugesprochen, für das von ihm eingesandte Modell wurde ihm eine Aufwandsentschädigung von 20 sfr. ausbezahlt.[107]

Weiler ging nach bestandenem Examen nach Göttingen. Es liegt nahe anzunehmen, dass Fiedler ihm dazu geraten hatte, denn dieser stand schon lange mit A. Clebsch im brieflichen Austausch. Clebsch war in Fiedlers Augen (und natürlich nicht nur in seinen) eine große Autorität und wohl der führende Mathematiker seiner Zeit. Clebschs Interesse an Modellen war einschlägig, u.a. hatte er ja Christian Wiener, mit dem er seit seiner Karlsruher Zeit (1858 – 1863) befreundet war, zum Bau seines Modells der Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden angeregt.

Fiedlers erhaltene Korrespondenz mit Klein beginnt mit einem Brief Kleins aus Göttingen, datiert 4.2.1872[108] – gegen Ende des Jahres übersandte Klein dann seine „Vergleichende Betrachtungen …“, also die Schrift, die später als Erlanger Programm bekannt werden sollte. Es lag für Klein vermutlich nahe, diese an Fiedler als einen der führenden Geometer seiner Zeit zu senden. Klein registrierte den Neuankömmling Weiler aus Zürich mit Wohlwollen:

> Unter den Zuhörern ist namentlich auch Herr Weiler, den Sie ja wohl hierher dirigirt haben. Er hat ausgesprochen geometrisches Talent, und hat mich allen Halben wiederholt durch Modelle entzückt, die er angefertigt hat.[109]

106. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 1196: 50, S. 2. Als Kosten veranschlagte Fiedler 10 sfr.
107. Schulratsprotokolle 1872, Seite 135„ Sitzung vom 8. August 1872, Traktandum 140.
108. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 87: 574. Insgesamt sind 22 Briefe und Karten von Klein an Fiedler erhalten, der letzte Brief datiert vom 11.11.1893. Dank an Peter-Maximilian Schmidt (Zürich) für seine Transkription der Briefe Kleins an Fiedler.
109. Klein an Fiedler, Göttingen, 20. Juli 1872 (ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 87: 585).

In Göttingen angekommen, wurde Weiler sogleich wieder in Sachen Modelle aktiv. Er berichtete seinem „sehr geehrten Herrn Professor" am 15. Juni 1872:

> Letzte Woche sprach ich im Colloquium[110] über Regelflächen & verfertigte dazu Modelle. Diese waren ziemlich klein & bestanden aus Zigarrenkistchen, in denen Blätter in Löchern steckten & dazwischen Fäden durchgezogen [?].
>
> Das führte mich darauf, ein solches Modell in etwas größeren Dimensionen auszuführen & und Ihnen zu übersenden & es stellt dasselbe die erste Gattung dar, durch Ueberlegen und Probieren habe ich ziemlich günstige Verhältnisse erhalten. Auf der Fläche sind die Doppelcurven mit zwei Cuspidalstellen sowie zwei stationären Tangentialebenen deutlich sichtbar.[111]

Es könnte gut sein, dass ein Modell in Fiedlers Sammlung dasjenige ist, das Weiler hier erwähnt. Jedenfalls wurde Weilers Können von Clebsch geschätzt und genutzt; dieser regte ihn dazu an, ein Modell der von ihm entdeckten Diagonalfläche zu konstruieren. Wenige Monate später (4. August 1872) konnte Clebsch dieses der Akademie in Göttingen präsentieren:

> Herr Clebsch legte zwei Modelle vor, welche Herr stud. math. Adolf Weiler hierselbst dargestellt hatte, und welche sich auf eine besondere Classe von Flächen dritter Ordnung beziehen. [...] Das eine der beiden Modelle stellte die 27 Geraden dieser Fläche dar, das andere die Fläche selbst, ein Gypsmodell, auf welchem die 27 Geraden gezeichnet waren.[112]

Bei dieser Gelegenheit präsentierte auch Privatdozent Klein ein Modell einer Fläche dritter Ordnung vor, das Neesen in Bonn konstruiert hatte.[113] Weiler folgte Klein im Herbst 1872 nach Erlangen; er promovierte dort noch 1873 mit einer Arbeit über Liniengeometrie. Zuvor jedoch hatte Ostern 1873 das von Clebsch angeregte, nach dessen Tod durch Klein organisierte Mathematikertreffen in Göttingen stattgefunden. Weiler informierte Fiedler darüber:

> Die folgenden Tage hatten alle ungefähr denselben Charakter: Auf Spaziergängen & bei den Modellen lernte man sich kennen: jeder konnte

110. Gemeint ist wohl das mathematische Seminar, das von Clebsch und Klein gemeinsam organisiert wurde.
111. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 87: 1491
112. Clebsch/Klein 1872, 402 – 403.
113. Neesen war ein Physiker und Privatdozent, der in Bonn arbeitete, und den Klein vermutlich aus seiner Bonner Zeit kannte

> leicht zu jedem andern gelangen. Vorträge fanden kaum statt. Alles war sehr gut angeordnet, auch das Wetter war gut, [...]. Neben den anwesenden Leuten interessirten mich vor allem die Modelle von Eigel in Bonn [...], die Modelle von Herrn Prof. Schwarz der Minimalflächen gefallen allgemein sehr gut.[114]

Die Modelle bildeten also einen beliebten Treffpunkt und die günstige Gelegenheit, mit anderen Mathematikern ins Gespräch zu kommen. Weiler berichtet weiter, dass drei Modelle von ihm ausgestellt wurden, auch das Modell von Neesen wurde gezeigt. Man beachte, dass Schwarz im obigen Zitat als ein Protagonist des Modellbaus auftritt. Nach der Promotion kehrte Weiler in die Schweiz zurück. Nach einem kurzen Zwischenspiel als Mathematiklehrer in Stäfa wurde er Assistent bei Fiedler am Polytechnikum, später dann dort Privatdozent und schließlich Professor an der Universität Zürich. Diese hatte übrigens auch eine Modellsammlung und es könnte gut sein, dass Weiler sie aufgebaut und betreut hat.

Schließlich sei erwähnt, dass G. Veronese, ebenfalls ein Schüler von Fiedler in Zürich und späterer Korrespondenzpartner, in seiner Heimat Italien eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit Modellen spielte.[115]

Man sieht, dass der Bau von Modellen im Kontext der Polytechnika ein wichtiges Thema gewesen ist. Dafür gibt es in Fiedlers Briefwechsel viele andere Belege, auf deren Betrachtung hier verzichtet werden muss. Insbesondere finden sich natürlich auch Briefe im Zusammenhang mit dem Ankauf von Modellen vor allem bei Martin Schilling und bei Konstrukteuren wie Christian und Hermann Wiener.

6 Fazit

Das Beispiel von Wilhelm Fiedler macht deutlich, wie eng die Beziehung der polytechnischen Tradition zum Modellbau allgemein und zur Konstruktion von mathematischen Modellen insbesondere gewesen ist. Polytechnika waren in vieler Hinsicht die geeignetsten Orte um Modell zu produzieren, aber auch, um sie in der Lehre einzusetzen und in der Öffentlichkeit zu präsentieren. Insofern erstaunt es nicht, dass viele Mathematiker, die sich im 19. Jh. mit Modellen beschäftigten, zumindest zeitweise an Polytechnika wirkten. Eine Geschichte der Modelle, welche die Polytechnika nicht ausführlich beachtet, bleibt notwendig unvollständig.

114. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 87: 1495. Die Firma Johann Eigel (eigentlich in Köln) produzierte und vertrieb Modelle von J. Plücker und F. Klein; vgl. Rowe 2017, 6.

115. Vgl. http://www.dma.unina.it/~nicla.palladino/catalogo/Italia_Index.html (N. Palladino). Ich danke S. Confalonieri (Wuppertal) für ihre Übersetzungen zu Fiedler.

Die mathematischen Modelle waren, wie bereits erwähnt, eng verknüpft mit den großen Anstrengungen der Moderne, so wie sie von den Zeitgenossen damals verstanden wurde, also mit der Entfaltung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Welt, kurz: dem Fortschritt. ähnlich wie die Maschinenmodelle wurden sie zu Ikonen, deren Präsentation auch eine Selbstinszenierung des anbrechenden neuen Zeitalters im Rahmen seiner Ausstellungskultur bedeutete. Die Mathematik präsentierte sich mit ihrer Hilfe als ein Protagonist der allgemeinen Fortschrittsbewegung. Andererseits bleiben die mathematischen Modelle aber verhaftet einer Auffassung von Mathematik, für die Anschauung eine zentrale Kategorie war – denn genau das war ja die Leistung der Modelle. Nicht deren Materialität zählte, sondern die „Versinnlichung“[116], welche sie leisteten. Insofern bleiben sie vom Geist der Mathematik des frühen 19. Jhs. geprägt und es erstaunt nicht, dass sie im 20. Jh. schließlich nach vollendeter „Arithmetisierung der Mathematik“[117] verschwanden, um in allerdings erstaunlicher Weise im 21. Jh. wieder aufzutauchen.

Schließlich zeigen die Modelle der polytechnischen Tradition einerseits einen engen Bezug zur Lehre (wenn auch nicht zu derjenigen in Form klassischer Vorlesungen), andererseits aber auch, dass ihre Konstrukteure an der Front der mathematischen Forschung standen – und damit, dass die polytechnische Mathematik, insbesondere die dort gepflegte Geometrie, mehr war als eine elementarisierte Universitätsmathematik. Von den elementaren Modellen im Stile Jakob Schröders bis hin zu anspruchsvollen Modellen wie demjenigen der Diagonalfläche spannt sich ein Kontinuum, dessen Leitlinie die Anschauung ist.

Literatur

Beyel, Chr.: Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie (Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 30 (1899), 401 – 410).

Burmester, L.: Grundzüge der Reliefperspektive nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspektivischer Modelle (Leipzig: Teubner, 1883).

116. Diesen viel gebrauchten Begriff hatte Gauß in seiner Selbstanzeige der zweiten Abhandlung über biquadratische Reste verwendet im Zusammenhang mit der von ihm gefundenen geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen. Als Erwiderung auf das Bedenken, die Begründung der Arithmetik habe sich von der Anschaulichkeit ganz entfernt, entgegnet Gauß:

„Im Gegentheil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, ...“ (Gauß 1831, 632).

117. Ein Schlagwort geprägt von F. Klein (vgl. Klein 1895). Letztlich geht es um die überführung der Mathematik in eine axiomatisch-deduktive Theorie.

—— : Grundlehren der Theaterperspektive (Allgemeine Bauzeitung 49 (1884), 39 – 40, 44 – 49, 53 – 57 sowie Tafeln 25 – 27).

Cayley, A.: Note relative aux droites en involution de M. Sylvester (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 52 (1861),1039 – 1042).

Chasles, M.: Remarques à l'occassion d'une communication de M. Cayley (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 52 (1861), 745 – 746).

Clebsch, A./Klein, F.: Ueber Modelle von Flächen dritter Ordnung (Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaft und der Georg August Universität aus dem Jahre 1872 (Göttingen: Dieterisch, 1872), 402 – 404).

Die Eidgenössische Polytechnische Schule in Zürich. Hg. im Auftrage des Schweizerischen Schulrathes bei Anlass der Weltausstellung in Paris 1889 (Zürich: Zürcher & Furrer, 1889).

Die Residenzstadt Karlsruhe ihre Geschichte und Beschreibung. Festgabe der Stadt zur 34. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte (Karlsruhe: Müller, 1858).

Dressler, H.: Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen. In: Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. No. XI (Leipzig/Berlin:Teubner 1913), 187 – 217.

Entwicklung der Technischen Hochschule von der Gründung bis zur Gegenwart 1825 – 1892. In. Festgabe zum Jubiläum der vierzigjährigen Regierung seiner Königlichen Hoheit des Grossherzogs Friedrich von Baden (Karlsruhe: Braun, 1892).

Fiedler, W., Besprechung von „Stereographische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuternden Texten von Dr. Chr. Wiener, Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe", (Zeitschrift für Mathematik und Physik 14 (1869), Literaturzeitung, 34).

—— : Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Leipzig: Teubner, 1871; zweite Auflage Leipzig: Teubner, 1875; dritte Auflage in drei Bänden: Band I Leipzig, 1883, Band II Leipzig, 1885, Bd. III Leipzig, 1888; vierte Auflage des ersten Bandes Leipzig, 1904. – Übersetzung ins Italienische: Trattato di geometria descrittiva, tradotto da Antonio Sayno e Ernesto Padova. – Versione migliorata coi consigli e le osservazioni dell'Autore e liberamente eseguita per meglio adattarla all'insegnamento negli istituti tecnici del Regno d'Italia. Firenze: Successori Le Monnier, 1874.

—— : Vortrag über Geometrisches mit Vorweisungen (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 28 (1883), 289 – 290).

—— , Vortrag über eine Singularität algebraischer Oberflächen unter Vorweisung von Modellen (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 28 (1883): 290 – 293).

—— : Darstellende Geometrie. Autographierte Ausarbeitung einer Vorlesung (Zürich: E. Zimmer, 1894).

—— : Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit. Schreiben gerichtet an den Herausgeber dieser Zeitschrift (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 14 (1905), 493 – 503).

Fink, K.: Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Kurs für die Hand des Lehrers bearbeitet (Tübingen: Laupp, 1896).

Gauß, C. F.: Selbstanzeige der „Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda" (Göttinger gelehrte Anzeigen (23. April 1831), 625 – 638).

Geppert, A. C. T.: Welttheater: Die Geschichte des europäischen Ausstellungswesens im 19. und 20. Jahrhundert. Ein Forschungsbericht (Neue Politische Literatur 47 (2002), 10 – 61).

Hassler, U./Meyer, Th.: Die Sammlung als Archiv paradigmatischer Fälle. In: Kategorien des Wissens: die Sammlung als epistemisches Objekt, hg. von U. Hassler und T. Meyer (Zürich: Institut für Denkmalpflege und Bauforschung der ETH, 2014), 7 – 74.

Hassler, U./Wilkening-Aumann, Chr.: „„„Den Unterricht durch Anschauung fördern": Das Polytechnikum als Sammlungshaus." In: *Kategorien des Wissens: die Sammlung als epistemisches Objekt,* ed. by U. Hassler and T. Meyer (Zürich: Institut für Denkmalpflege und Bauforschung der ETH, 2014): 75 – 98.

Klein, F.: Ueber Arithmetisierung der Mathematik (Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 2 (1895), 82 – 91).

Klinger, K.: Zwischen Gelehrtenwissen und handwerklicher Praxis. Zum mathematischen Unterricht in Weimar um 1800 (München: Fink, 2014).

König, W.: Künstler und Strichezeichner. Konstruktions- und Technikkulturen im deutschen, britischen, amerikanischen und französischen Maschinenbau zwischen 1850 und 1930 (Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1999).

Labs, O.: Straight Lines on Models of Curved Surfaces (The Mathematical Intelligencer 39 no. 2 (2017), 15 – 26).

Lê, Fr. : Entre géométrie et théorie des substitutions : une étude de cas autour des vingt-sept droites d'une surface cubique (Confluentes Mathematici 5 (2013), 23-71).

Lipsmeier, A.: Technik und Schule (Wiesbaden: Franz Steiner, 1971).

Lorey, W.: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts (Leipzig und Berlin: Teubner, 1916).

Mehrtens, H.: Mathematical models. In: Models. The third dimension of science, ed. by S. de Chadarevian and N. Hopwood (Stanford: Stanford University Press, 2004), 276 – 306.

Meyer, Fr.: Spezielle algebraische Flächen. Flächen dritter Ordnung. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band III. 2. Teil, 2. Hälfte, Teilband B (Leipzig: Teubner, 1921 - 1934), 1439 – 1531; abgeschlossen September 1928.

Morstadt, R.: Ueber die räumliche Projection (Reliefperspective) insbesondere diejenige der Kugel (Zeitschrift für Mathematik und Physik 12 (1867), 326 – 339).

Nachruf auf Adolf Weiler. In: Universität Zürich. Rektoratsrede und Jahresbericht. April 1916 bis März 1917 (Zürich: Orell Füssli, 1917), 54 – 55.

Officieller Katalog der Schweizerischen Landesausstellung Zürich 1883. Verlag des Centralcomité (Zürich: Orell Füssli & Cie, 1883).

Rowe, D. E.: On building and Interpreting Models: Four Historical Case Studies (The Mathematical Intelligencer 39 no. 2 (2017), 6 – 14).

Salmon, G. – Fiedler, W. : Analytische Geometrie des Raumes. II. Theil. Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. (Leipzig : Teubner, 1865, ^{2}1874).

Schaal, H.: Reliefperspektive (Der Mathematikunterricht 27 Heft 3 (1981), 69 – 90).

Staudigl, R., Grundzüge der Reliefperspective (Wien: Seidel & Sohn, 1868).

Stiefel, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Basel/Stuttgart: Birkhäuser, ^{3}1971).

Sylvester, J. J. : Sur les vingt-cinq droites d'une surface du troisième degré (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 52(1861), 977 – 980).

Verzeichnis mathematischer Modelle. Sammlungen von Hermann Wiener und Peter Treutlein (Leipzig und Berlin: Teubner, ^{2}1912).

Xavier, O./Pinho, E. M.: Olivier string models and the teaching of descriptive geometry. In: "Dig where you stand" 4, hg. von K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, M. Menghini, J. Prytz und G. Schubring (Torino: Edizioni nuova cultura, 2017), 399 – 413.

›so müssen sie auch geschehen können‹ — Über die philosophischen Sinnbedingungen deontologischer Modellbildung

Matthias Wille

1 Vorbemerkung[1]

Mittels deontologischer Modellbildung können normative Argumentationen, evaluative Terminologien und ganze Wertesysteme auf ihre ethischen sowie moralphilosophischen Voraussetzungen hin untersucht werden. Das hierfür erforderliche Analysewerkzeug einer deontischen Logik muss für eine erfolgreiche Anwendung eine Vielzahl von Voraussetzungen erfüllen. Aussagekraft und Adäquatheit gehören dazu.

Im Folgenden benennen wir einzelne grundlegende philosophische Sinnbedingungen für die Möglichkeit einer anwendungsorientierten deontologischen Modellbildung. Dies betrifft bereits eine optionale Einbettung der Deontik in die ontische Modallogik, weil normative Aussagen stets im Horizont von Möglichkeiten und Bedingungsgefügen operieren, in deren Kontext sie allererst handlungswirksam werden können. Normativität operiert stets in einer Welt der Faktizität, denn Handeln

1. Die vorliegenden Untersuchungen sind Bestandteil der philosophischen Begleitforschung des an der Universität Paderborn durchgeführten EFRE-Projektes „Leichtbau durch neuartige Hybridwerkstoffe“ (LHybS), das von der Europäischen Union und dem Land Nordrhein-Westfalen im Rahmen des Europäischen Fonds für Regionale Entwicklung unter der Projektträgerschaft der LeitmarktAgentur.NRW finanziert wurde. Die hier in Auszügen vorgestellten modallogischen Analysemittel gehören zu einer im Projekt entwickelten modalen Diskurslogik, mit Hilfe derer die Wertesysteme der im Projekt tätigen Fachwissenschaftler durch einen Normenkatalog technischer Rationalität expliziert, modelliert und evaluiert werden konnten, damit diese für eine gesellschaftliche Reflexion besser zugänglich sind.

unterliegt stets bestimmten Beschränkungen und Limitationen, die es mittels einschlägiger Wahrheitskriterien festzustellen gilt. Bei diesen handelt es sich nicht nur um die allgegenwärtig durch die Naturgesetze gesetzten Grenzen in der Welt, sondern auch und vor allem durch einschränkende Bedingungen, die empirisch kontingent, aber dennoch für uns unabänderlich sind und mit denen ökonomische oder andere kulturelle sowie technische Zwänge zum Ausdruck gebracht werden. Zeit, Geld, Material, Möglichkeiten der technischen Umsetzung gehören hier etwa dazu.

2 Das Sollen präsupponiert das Können

Es herrscht keine Einigkeit darüber, ob eine deontische Logik auf eine ontische Modallogik aufbauen oder vielmehr von dieser unabhängig sein sollte.[2] Häufig wird gegen eine systematische Verbindung ins Feld geführt, dass mittels deontischer Modalitäten eben keine wahrheitswertfähigen Aussagen, sondern Normen, Vorschriften, Erlaubnisse, Verbote und dergleichen gebildet werden, die es zu rechtfertigen gilt. Schließlich sind die Geltungsbedingungen rechtfertigungspflichtiger Handlungen zu unterscheiden von den Geltungsbedingungen wahrheitswertfähiger Behauptungen. Auf der anderen Seite finden sich wiederum Versuche der Zurückführung, bei denen etwa die deontischen auf die alethischen Modalitäten gegründet werden sollen. Hier trifft man unter anderem auf das Verständnis, „deontic logic need not be regarded as an autonomous branch of formal logic, but may be viewed simply as a special branch of alethic modal logic“.[3] Immerhin lassen sich Verpflichtungen und Sollens-Sätze als präskriptive Notwendigkeiten verstehen, durch die eine Form von Zwang zum Ausdruck gebracht wird, ebenso wie Erlaubnisse wiederum als präskriptive Möglichkeiten gedeutet werden können. „Dasjenige, was man tun darf, ist das, von dem die Möglichkeit besteht, daß es getan werden kann – etwa ohne in Konflikt mit Normen oder Geboten zu gelangen“.[4] Diese Form der Rekonstruktion weist bereits in eine vielversprechende Richtung, weil kein deontischer Atomismus vorherrscht, sondern der dezente Versuch einer lebensweltlichen Kontextualisierung unternommen wird.

Die soeben aufgezeigten modallogischen Begründungswege mögen zwar disjunkt sein, aber sie liefern bei Weitem keine vollständige Alternativenbildung, denn weder folgt aus der Ablehnung einer voneinander unabhängigen Begründung die Zurückführbarkeitsthese (des einen auf den anderen Teil) noch folgt aus der Ableh-

2. Vgl. u.a. Hansson (2013), Hilpinen/McNamara (2013).
3. Anderson (1958), 100.
4. von Wright (1974), 9.

nung eines Reduktionismus sogleich die Separation beider Bereiche voneinander. Bereits eine sprachphänomenologisch unverbindliche Betrachtung unserer Sprachpraxen lässt erkennen, dass weder normative noch deskriptive Satzsysteme isoliert auftreten, sondern vielmehr mit ungleich größeren Satzklassen ein einheitliches Ganzes bilden, zu denen in der Regel sowohl Behauptungen wie auch Gebote, Vorschriften und Regeln gehören. Es verbleibt also im Mindesten die Möglichkeit, nach einem modallogischen Begründungsweg zu fragen, mit dem die ontischen wie auch deontischen Modalitäten gleichberechtigt aus einem kohärenten gemeinsamen Ausgangspunkt heraus entwickelt werden können.

Auch wenn logikhistorisch die Geschichte der ontischen Modallogik zu unterscheiden ist von der Entwicklung der deontischen Modallogik, weil die Untersuchung ihrer Gegenstände, der alethischen Modalitäten „notwendig", „möglich" und „unmöglich" auf der einen Seite sowie der deontischen Modalitäten „geboten", „erlaubt" und „verboten" auf der anderen, prima facie eben nicht zusammenfallenfällt, so folgt aus diesen wissenschaftsgeschichtlichen Unterschieden erst einmal keine kategoriale Unterscheidung der Untersuchungsgegenstände. Sowohl im Alltag wie in den Wissenschaften gebrauchen wir die ontischen wie auch deontischen Modalitäten nicht nur innerhalb derselben Sprachspiele gleichermaßen, sondern auch vollkommen unproblematisch innerhalb einzelner Aussagensequenzen und Argumente, bis hinein in einzelnen Aussagen selbst. Ontische Modalaussagen können ebenso deontisch bewertet werden, wie deontische Modalaussagen einer ontischen Beurteilung zugänglich sind. Wir sprechen von der Notwendigkeit des Sollens, der Möglichkeit des Erlaubten, dem Erfordernis von Notwendigkeiten und dem Dürfen von so manch Möglichem – um nur einige zu nennen. Das wechselweise Iterieren ist nicht nur sprachpraktisch allgegenwärtig, sondern sollte auch sprachpragmatisch zwanglos möglich sein. Für die Begründung der Modallogik ist dies ein durchaus verwertbares Kriterium.

Diese Hinweise mögen zwar das Plädoyer unterstützen, deontische Belange nicht aus dem Blick zu verlieren, während man eine ontische Modallogik begründet, und vice versa, aber sie verpflichten eben noch nicht auf einen einheitlichen Begründungsansatz. Mehr Nachdruck gewinnt das Anliegen, wenn die fraglichen Aussagenklassen einer präsuppositionalen Analyse unterzogen werden, wir also danach fragen, wie es um die sinnkritische Konsistenz zwischen Aussagengehalt und Äußerungsvollzug bestellt ist[5] und unter welchen Ermöglichungsbedingungen der fragliche Sprechakt als solcher überhaupt erkannt werden kann. Immerhin setzen etwa Aufforderungen voraus, dass der fragliche Sachverhalt, zu dessen Realisierung aufgefordert wird, noch nicht realisiert ist, oder dass man der Aufforderung

5. Ausführlich hierzu Wille (2011), 61–105.

prinzipiell überhaupt nachkommen könnte. Behauptungen setzen wiederum voraus, dass es einen Unterschied macht, ob sie wahr oder falsch sind, und dass der Behauptende auf Nachfrage hin dazu verpflichtet werden kann, Gründe für das Behauptete vorzutragen. Regeln und Gesetze indes setzen ihrerseits voraus, dass man sie überhaupt befolgen kann und dass es eine Sanktionspraxis für den Fall von Verstößen gibt (unabhängig davon, ob sie im Fall eines Verstoßes auch zur Anwendung kommt) usw. Die Liste ließe sich beliebig weiterführen, es galt jedoch nur zu illustrieren, dass es ohne Normativität keine Faktizität gibt und ohne Faktizität auch keine Normativität. Fraglos ist das Faktische vom Normativen zu unterscheiden, gleichwohl erweisen sie sich beide gleichermaßen als Ermöglichungsbedingungen für die Etablierung intentionaler Strukturen überhaupt. Man bekommt das eine nur, indem man auch für das andere sorgt.

In keiner Formel wird dies so prägnant zum Ausdruck gebracht, wie in der fundamentalen Sinnbedingung für Normativität überhaupt. Die Praxis des Formulierens und in Geltung Setzens von Normen, Regeln, Gesetzen sowie allen weiteren Manifestationen von Normativität ist nur dann sinn- und gehaltvoll, wenn auch die Möglichkeit zur Verwirklichung des Geforderten besteht. So war sich bereits Kant vollkommen im Klaren darüber, dass die Vernunft nur dann das Handeln nach sittlichen Vorschriften gebieten kann, wenn dieses Handeln nach sittlichen Vorschriften auch möglich ist. „Denn, da sie [die reine theoretische Vernunft, MW] gebietet, daß solche [Handlungen nach sittlicher Vorschrift, MW] geschehen sollen, so müssen sie auch geschehen können“.[6] Das Sollen impliziert das Können (SiK), denn was unmöglich ist, kann nicht sinnvoll gesollt werden. Dieses Kantische Sinnprinzip kann – sofern man es einmal formuliert hat – in einer ersten Näherung sogleich regelhaft gefasst werden, womit in aller Deutlichkeit das Wechselspiel zwischen den ontischen und den deontischen Modalitäten hervortritt:

($\mathrm{R_{SiK}}$) $\Box!\mathfrak{A} \Rightarrow \Diamond\mathfrak{A}$ Wenn es geboten ist, $\mathfrak{A}$ zu tun, dann muss es auch möglich sein, dass $\mathfrak{A}$ der Fall ist.

Das ausgedrückte Verhältnis zwischen dem Sollen und dem Können ist streng betrachtet das einer Präsupposition, bei der die Anführung des Sollens-Teils im Kontext der Apophansis zu verstehen ist: Wenn es wahr ist, dass sich die Frage nach der Geltung eines Sollens-Satzes stellt, dann ist es bereits der Fall, dass der fragliche Sachverhalt auch realisiert werden kann.[7] Wahr ist hier freilich nicht das Gesollte, das seinerseits selbstverständlich zu rechtfertigen ist. Aber wahrheitswertfähig ist die über das Gesollte vorgetragene Behauptung, dass sich die Rechtfertigungsfrage

6. Kant (*KrV*) B 835. Vgl. ders. (*KpV*), § 6/Aufgabe II: „Er urtheilt also, daß er etwas kann, darum weil er sich bewußt ist, daß er es soll, und erkennt in sich die Freiheit, die ihm sonst ohne das moralische Gesetz unbekannt geblieben wäre“.

7. Vgl. hierzu Wille (2011), 61–105, insb. 75f.

des Gesollten überhaupt stellt. Mit diesem Wechsel in die Metasprache verlassen wir zwar den konventionellen Rahmen einer objektsprachlichen Verhältnisbestimmung zwischen den beiden Aussagen, aber Präsuppositionen lassen sich eben nicht gleichermaßen darstellen, wie regelhafte Beziehungen bzw. Implikationen. Das sollte nicht überraschen, weil mit Sinnbedingungen exklusive Geltungsbedingungen der Rede selbst zum Ausdruck gebracht werden, im Besonderen jene zwischen den Äußerungsgehalten und den Bedingungen ihrer sinnhaften Artikulierbarkeit. Hat man auf diesem Weg den besonderen Geltungscharakter dieses Sinnprinzips eingesehen – eine für epistemologische Präsuppositionen bzw. transzendentale Ermöglichungsbedingungen übliche Verfahrensweise – dann lässt sich nachfolgend selbstverständlich auch eine regelhafte Formulierung des Sinnprinzips wie etwa ($\mathrm{R_{SiK}}$) vortragen. Mit der Darstellung von ($\mathrm{R_{SiK}}$) wird aber zugleich deutlich, dass bereits zur Explikation grundlegender epistemologischer Strukturmerkmale von Sprache die Verfügbarkeit beider modallogischer Ausdrucksklassen erforderlich ist, weshalb wir nun die ersten Schritte eines Weges aufzeigen, wie modale Ontik und modale Deontik gemeinsam begründet werden können.

3 Grundlagen des logischen Werkzeugs: Semantik

Vorgelagert soll lediglich kurz Erwähnung finden, dass für den hier verfochtenen begründungstheoretischen Zugang sowie die mit ihm einhergehenden philosophischen Gelingensbedingungen ein standardsemantischer Zugang ausgeschlossen ist. Die Mögliche-Welten-Semantik ist aus verschiedenen Gründen nicht geeignet, hier Verwendung zu finden. Ganz davon abgesehen, dass stets unklar wird, was exakt eine mögliche Welt ist, sobald man nur genau genug hinsieht, stellen sich umgehend begründungstheoretische Probleme. Wenn eine mögliche Welt prima facie als Menge aller wahren Aussagen in einer bestimmten Sprache verstanden werden soll, dann setzt diese Semantik die Möglichkeit verschränkter Quantifikationen über indefinite Mengen voraus, da jede mögliche Welt durch indefinit viele wahre Aussage konstituiert bzw. repräsentiert werden soll und es wiederum indefinit viele mögliche Welten gibt, über deren Erreichbarkeit untereinander die Semantik wiederum Aussagen zu treffen hat. Ob notwendige Wahrheit dabei sogleich Wahrheit in allen möglichen Welten meint, ist ebenso fraglich wie die mögliche Geltung in irgendeiner möglichen Welt. Darüber hinaus gilt es umgehend eine fehlende Adäquatheit festzustellen, da die Standardsemantik so gut wie überhaupt keinen iterierten Gebrauch von Modalitäten erlaubt, die ihrerseits aus verschiedenen Sprachspielen stammen. Letzteres ist aber ein unverzichtbares Erfordernis, wenn die Ausdrucksmöglichkeiten natürlichsprachlicher Aussagen auch nur im Ansatz gewahrt werden sollen. Doch schreiten wir zum konstruktiven Teil.

Die einfachste Form, einen gemeinsamen Begründungszugang anzuzeigen, besteht in der Angabe eines Definitionsschemas, mit dem alle erforderlichen Modaloperatoren eingeführt werden können. Damit geben wir zu erkennen, dass als Ausgangspunkt kein semantisch unbestimmter Operator stehen sollte. Wir verzichten mithin auf geradezu kanonisch gewordene Prologwendungen der Form „Wir wählen die Notwendigkeit zum *undefinierten Grundbegriff*“[8] oder „As an undefined deontic category we introduce the concept of permission“.[9] Es hilft schließlich wenig, Sätzen dieses Typs unmittelbar die Erklärung nachfolgen zu lassen, „It is the only undefined deontic category which we need“[10], weil ausnahmslos alle, auf einem undefinierten Ausdruck aufbauenden Definitionen keine semantische Klärung leisten können. Wenn es Aufgabe eines Begriffsbildungsverfahrens (wie etwa von Definitionen) ist, die Bedeutung eines, bis dato unbekannten Ausdrucks durch den Rückgriff auf andere Ausdrücke zu erklären, dann setzt dies die Bekanntschaft mit der Bedeutung dieser weiteren Ausdrücke voraus. Steht bereits am Anfang der Begriffsbildung ein unbekannter Ausdruck, dann verbleiben auch alle definitorisch auf ihm aufbauenden Ausdrücke im Unbekannten. Das terminologisch Unklare vererbt sich semantisch.

Wir verpflichten uns also nicht nur auf eine Bedeutungsbestimmung bereits der grundlegenden ontischen und deontischen Modalität, sondern wir legen darüber hinaus Wert auf die Bedingung, dass beide – bei aller Verschiedenheit ihrer Satzklassen – aus demselben semantischen Grundverständnis heraus entwickelt werden, sie repräsentieren Instanzen desselben Definitionsschemas. Inspiriert wird dieser Zugang durch eine fast unscheinbare Bemerkung Gottlob Freges, die er im Vollzug der Bereitstellung von Syntax und Semantik seiner Begriffsschrift festhält. Dort lautet es im Kontext der Terminologie der klassischen philosophischen Logik: „Wenn ich einen Satz als nothwendig bezeichne, so gebe ich dadurch einen Wink über meine Urtheilsgründe“.[11] Es wird durch eine Notwendigkeitsaussage also kein neuer Gegenstand geschaffen, im Besonderen keine metaphysische Entität, sondern es wird ein Hinweis auf Geltungsbedingungen gegeben. Obgleich Frege nachfolgend keine weiteren Überlegungen zu einer modernen formalen Logik der Notwendigkeit anstellt, so erweist sich diese Bemerkung im Horizont der *Begriffsschrift* als weitreichend, weil sie von jemandem vorgetragen wird, der nicht nur über ein umfassendes Verständnis des Begriffs der formal-logischen Gültigkeit verfügt, sondern der für diesen Begriff auch noch den ersten modernen logischen Kalkül der

8. Becker (1952), 9.
9. von Wright (1951), 60.
10. von Wright (1951), 60.
11. Frege (*BS*), §4.

Geschichte bereitstellt.[12] Als „notwendig“ bezeichnete Sätze müssen sich also mit Bezug auf ihre Urteilsgründe als solche erweisen lassen. D.h. Sätze gelten notwendig relativ zu ihren Begründungsbedingungen und dies besagt wiederum nichts anderes als ihre rein logische Ableitbarkeit aus einer geeigneten Prämissenmenge. Letztere variiert – die prinzipielle Begründungsfähigkeit vorausgesetzt – unter anderem in Abhängigkeit des Satztyps der zu begründenden Aussage.

Was Frege hier auf den Fall der Notwendigkeit bezieht, lässt sich umgehend allgemeiner fassen, denn die Urteilsgründe notwendiger Wahrheiten in der Logik, der Philosophie, den Einzelwissenschaften, der Lebenswelt usw. mögen nicht nur untereinander verschieden ausfallen, sondern sie sollten ebenso unterschieden werden von Urteilsgründen für bedingte Gebote im Alltag, unbedingte Pflichten in der Moral, strikte Verbote im Recht usw. Frege bezieht sich mit der Anführung von Urteilsgründen auf die allgemeinen Geltungsgründe und hierbei handelt es sich um einen übergeordneten Klassifikationsausdruck für Begriffe wie Begründung, begründete Behauptbarkeit, gerechtfertigter Wissensanspruch, Wahrheit, Bewiesenheit, Rechtfertigung usw. Schließlich sind nicht nur wahre Aussagen in Geltung, sondern gleichermaßen auch Regeln, Normen und Gesetze – nur eben aus anderen Geltungsgründen. Berücksichtigen wir diese geltungstheoretische Perspektive, dann fällt es vergleichsweise leicht, Freges Hinweis in eine Definitionsform für modale Operatoren zu gießen. Bezeichne Ψ eine Satzklasse(nvariable) der Sprache $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}$ eine Aussage, die sich mit den Mitteln von $\mathfrak{L}$ ausdrücken lässt und $\#$ den Platzhalter für ein zu definierendes Zeichen. Damit können wir das Definitionsschema formulieren:

$\#_\Psi \mathfrak{A} \leftrightharpoons \Psi \vDash \mathfrak{A}$	Genau dann, wenn die Aussage $\mathfrak{A}$ aus Ψ rein logisch folgt, besitzt die Aussage $\mathfrak{A}$ relativ zu Ψ die $\#$-Geltung.

Definitorisch normiert wird also – je nach Wahl von Ψ – die Bedeutung des für $\#$ eingesetzten Zeichens. Das vorliegende Definitionsschema erfüllt ausnahmslos alle definitionstheoretischen Bedingungen, um durch Instanzen explizite Definitionen bilden zu dürfen, weil mit Ausnahme des Platzhalters $\#$ für das zu definierende Zeichen ausnahmslos alle anderen Ausdrücke bekannt sind. Im Besonderen treten alle freien Variablen links vom Definitionszeichen auch rechts auf, das Definiendum ist darüber hinaus logisch atomar und die rechts des Definitionszeichens auftretende Konstante „$\vDash$“ ist dank Frege in ihrer Bedeutung vollständig bestimmt. Welcher Operator an der Stelle von $\#$ nun also definiert werden kann, hängt wesentlich davon ab, welche Satzklasse im Einzelnen an die Stelle der Variablen Ψ gesetzt wird. Rein deskriptive Satzmengen können ebenso Verwendung finden wie rein präskriptive, aber auch gemischte Satzklassen sind ebenso zulässig wie der

12. Umfassend hierzu Wille (2018), 1–197.

Bezug auf Aussagensysteme, die einzelne wissenschaftliche Theorien repräsentieren. Bevor wir nun aber so etwas wie logische Notwendigkeit oder moralisches Gebotensein definieren können, benötigen wir vorgelagert die allgemeine Definition der grundlegenden Modaloperatoren. Die alethischen/ontischen Modalitäten folgen definitorisch hier exakt denselben Weg wie die deontischen:

basale alethische/ontische Modalität	basale deontische Modalität
$\Box_{\Sigma}\mathfrak{A} \leftrightharpoons \Sigma \vDash \mathfrak{A}$	$\Box_{\Omega}!\mathfrak{A} \leftrightharpoons \Omega \vDash !\mathfrak{A}$
Ein durch eine Aussage $\mathfrak{A}$ ausgedrückter Sachverhalt gilt relativ zu Σ *notwendig* genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ eine logische Folge der deskriptiven Satzmenge Σ ist.	Ein durch eine Aussage $\mathfrak{A}$ ausgedrückter Sachverhalt ist relativ zu Ω *geboten* genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ eine logische Folge der normativen Satzmenge Ω ist.

Handelt es sich bei Σ etwa um die klassische Aussagenlogik, so repräsentiert die Formel „$\vDash_{\mathrm{AL}}\mathfrak{A}$“ nichts anderes als „$\mathfrak{A}$ ist eine aussagenlogische Wahrheit“ bzw. „$\mathfrak{A}$ ist eine Tautologie“. $\mathfrak{A}$ gilt entsprechend notwendigerweise bereits aufgrund der Bedeutung der logischen Partikel allein. Ist Σ indes eine physikalische Theorie, inklusive der Entfaltung ihrer gesamten Terminologie, so repräsentieren logischen Ableitungen aus dieser Theorie Theoreme derselben, die entsprechend relativ zu dieser Theorie mit Notwendigkeit gelten, Wahrheiten der klassischen Mechanik, der relativistischen Physik usw. Analoges gilt für normative Satzsysteme. Repräsentiert Ω etwa einen Gesetzestext, inklusive aller bereits vollzogenen einschlägigen Rechtsprechungen, dann führen logische Ableitungen zur Begründung verbindlicher Verpflichtungen, die juristisch abgesichert gesollt werden. Handelt es sich bei Ω indes um eine philosophische Ethik, so repräsentieren daraus abgeleitete Theoreme Gebote dieser Ethik. Wird Ω indes konstituiert durch einen Lebensratgeber, dann mögen daraus abgeleitete Einsichten als Lebensweisheiten verstanden werden, deren Befolgung relativ zum Ratgeber geboten ist.

Dieser beweistheoretische Zugang[13], mit dem der jeweils grundlegende Modaloperator über Ableitbarkeitsbedingungen definiert wird, ist nicht neu. Obwohl bei Weitem nicht gleichermaßen weitläufig genutzt wie die Standardsemantik, tritt sie spätestens vor einem halben Jahrhundert erstmals in der Modallogik auf. So verwendet Paul Lorenzen diese beweistheoretische Semantik in *Normative Logic and Ethics* zur Bereitstellung erster Modaloperatoren im Rahmen seiner konstruktiven Logikbegründung.[14] Hat man auf diesem Weg die Notwendigkeit und das Gebotensein bzw. das Sollen erst einmal eingeführt, folgen alle weiteren ontischen sowie

13. Eine umfassendere relevanzlogische Analyse dieser beweistheoretischen Semantik findet sich bei Hartmann (2003), §25, vor allem 334f.
14. Vgl. Lorenzen (1969), 62.

deontischen Modaloperatoren umgehend definitorisch – und zwar semantisch vollständig bestimmt.

Weitere ontische Modalitäten	Weitere deontische Modalitäten
$\Diamond_\Sigma \mathfrak{A} \leftrightharpoons \neg\Box_\Sigma\neg\mathfrak{A}$ ($\Sigma \nvDash \neg\mathfrak{A}$)	$\Diamond_\Omega !\mathfrak{A} \leftrightharpoons \neg\Box_\Omega !\neg\mathfrak{A}$ ($\Omega \nvDash !\neg\mathfrak{A}$)
$\mathfrak{A}$ ist *möglich* relativ zu Σ genau dann, wenn $\neg\mathfrak{A}$ nicht abgeleitet werden kann aus Σ. („Etwas ist möglich, wenn das Gegenteil nicht notwendigerweise gilt.“)	$\mathfrak{A}$ ist *erlaubt* relativ zu Ω genau dann, wenn $\neg\mathfrak{A}$ relativ zu Ω nicht geboten ist. („Etwas ist freigestellt, wenn das Gegenteil nicht gesollt wird.“)
Und	
$\neg\Diamond_\Sigma \mathfrak{A} \leftrightharpoons \Box_\Sigma\neg\mathfrak{A}$ ($\Sigma \vDash \neg\mathfrak{A}$)	$\neg\Diamond_\Omega !\mathfrak{A} \leftrightharpoons \Box_\Omega !\neg\mathfrak{A}$ ($\Omega \vDash !\neg\mathfrak{A}$)
$\mathfrak{A}$ ist *unmöglich* relativ zu Σ genau dann, wenn $\neg\mathfrak{A}$ aus Σ abgeleitet werden kann. („Etwas ist unmöglich, wenn das Gegenteil notwendigerweise gilt.“)	$\mathfrak{A}$ ist *verboten* relativ zu Ω genau dann, wenn $\neg\mathfrak{A}$ relativ zu Ω geboten ist („Etwas ist verboten, wenn das Gegenteil ein Gebot ist.“)

Was oben bereits für die Fälle „notwendig relativ zu Σ“ und „geboten relativ zu Ω“ in einer ersten Näherung plausibilisiert wurde, lässt sich entsprechend auch für „möglich relativ zu Σ“, „unmöglich relativ zu Σ“, „erlaubt relativ zu Ω“ sowie „verboten relativ zu Ω“ kurz exemplifizieren. Da es relativ zur Verfassung der Bundesrepublik Deutschland geboten ist, die Würde des Menschen zu achten, ist es entsprechend relativ zu unserer Verfassung verboten, die Würde des Menschen zu missachten. Zudem ist es relativ zu unserer Verfassung erlaubt, über Mathematikerwitze zu lachen, weil aus der Verfassung nicht folgt, dass über Mathematikerwitze nicht gelacht werden dürfte. Ebenso gilt, dass die Existenz eines Perpetuum mobile relativ zur klassischen Thermodynamik unmöglich ist, weil in der klassischen Thermodynamik deren Hauptsätze notwendigerweise in Geltung sind, die ihrerseits der Annahme von der Möglichkeit eines Perpetuum mobile widersprechen. Aber es ist relativ zur klassischen Thermodynamik möglich, dass es eine Maschine mit einem Wirkungsgrad von nahezu 100% gibt, weil aus der Theorie nicht folgt, dass es eine solche Maschine nicht geben kann.

4 Erste Folgerungen

Weitaus interessanter als das Anführen von Beispielen, deren Liste sich selbstverständlich beliebig verlängern ließe, sind allgemeine Einsichten, die sich umgehend aus der beweistheoretischen Semantik ergeben. Zu allererst kommen wir auf das oben bereits vorgetragene Sinnprinzip „das Sollen impliziert das Können“ zurück, bei dem nunmehr die erforderlichen Subskripte nachgetragen werden können. Es handelt sich hierbei nicht bloß um eine Formalie, bei der es um das Nachjustieren syntaktischer Erfordernisse geht, sondern um den essentiellen Ausdruck eines ersten Σ-Ω-Wechselspiels:

($\mathrm{R_{SiK}}^{*}$) $\Box_{\Omega}!\mathfrak{A} \Rightarrow \Diamond_{\Sigma}\mathfrak{A}$ Wenn es relativ zu Ω geboten ist, $\mathfrak{A}$ zu tun, dann muss es auch relativ zu Σ möglich sein, dass $\mathfrak{A}$ der Fall ist.

Durch die Neufassung wird also nicht nur zum Ausdruck gebracht, dass die Möglichkeit von Normativität und die Möglichkeit von Faktizität unauflöslich miteinander verbunden sind, sondern es wird in aller Explizitheit deutlich gemacht, dass die investierten Hintergrundwissensbestände bei allen geltungstheoretischen Unterschieden, die zwischen ihnen bestehen mögen, epistemische Auszüge aus ein und derselben Welt sind. Die Verknüpfung zwischen beiden wird nicht zuletzt durch die Variable $\mathfrak{A}$ angezeigt. Sachverhalte in der Welt können sowohl eine deskriptive wie eine präskriptive Relevanz besitzen.

Darüber hinaus lassen sich aus den beiden basalen Definitionen unmittelbar Folgerungen ableiten, die aufschlussreiche Verwendungsbedingungen der Modalausdrücke akzentuieren. Da im Besonderen für alle $\#_{\Psi}\mathfrak{A}$-Vorkommnisse ein Definiendum der Form $\Psi \models \mathfrak{A}$ gegeben sein muss, erweist sich ausnahmslos jede $\#_{\Psi}\mathfrak{A}$-Aussage als modal relativ zu Ψ (und kann jederzeit in die nicht-modale Rede $\Psi \models \mathfrak{A}$ zurückübersetzt werden). Selbst dort, wo wir aus Gründen der Einfachheit oder der Schreibersparnis (wie etwa im Fall der Wahrheiten der klassischen Logik) auf die explizite Angabe des einschlägigen Hintergrundwissens verzichten, gelten alle Modalaussagen bedingt, bedingt relativ zu einem Ψ. Es folgt damit:

Lemma 1: Es gibt keine unbedingten notwendigen Wahrheiten/Gebote.

Diese Einsicht ist als Lemma zu formulieren, weil unsere Sprachpraxen im Gebrauch von Modalausdrücken häufig genug verkürzen, d.h. ohne jede weitere explizite Erläuterung schlicht von der Notwendigkeit von-dem-und-dem oder dem Gebot so-und-so sprechen. Dies lässt leicht den Eindruck entstehen, als ob es sich um unbedingte Notwendigkeiten oder Gebote handeln würde, wenngleich in der Regel durch den Redekontext selbst bestimmt ist, auf welches Hintergrundwissen zur Geltungssicherung der Modalaussage Bezug zu nehmen ist. Des Weiteren folgt aus der Definition der basalen deontischen Modalität sogleich und mit Selbstverständlichkeit die Möglichkeit der Diversität von Normensystemen:

Lemma 2: Eine Handlung kann relativ zu einem bestimmten Normensystem Ω geboten sein ($\Box_{\Omega}!\mathfrak{A}$) und *zugleich* relativ zu einem anderen Ω^{*} verboten sein ($\Box_{\Omega^{*}}!\neg\mathfrak{A}$).

Es ist überhaupt nichts Geheimnisvolles oder gar Widerspruchsvolles an dem geradezu alltäglichen Phänomen, dass ein und dasselbe Tun, relativ zu verschiedenen Wertesystemen verschieden bewertet wird. Mit diesem Lemma wird natürlich nichts darüber zum Ausdruck gebracht, ob oder unter welchen Umständen im Einzelfall die beiden normativen Satzsysteme Ω und Ω^{*} in Lebenswelt oder Wissenschaft kohärent koexistieren können. Aber vor allem dort, wo Normensysteme vornehmlich eine lokale, regionale oder kulturvariante Geltung beanspruchen, spricht überhaupt nichts gegen eine konsistente Koexistenz. Für eine Vielzahl von Normensystemen – angefangen von tradierten Sitten und Bräuchen, bis hin zu juristischen Besonderheiten des nationalen Rechts – ist dies sogar der Standard.

Wesentlich dasselbe gilt selbstverständlich auch für die ontischen Modalitäten. So kann eine Aussage problemlos relativ zu einem bestimmten Hintergrundwissen mit Notwendigkeit gelten und relativ zu einem anderen eben nicht. Damit wird nicht nur dem Phänomen eines Theorienpluralismus entsprochen, das sich mit unserem modallogischen Zugang in seinen allgemeinen Zügen zwanglos rekonstruieren lässt, sondern auch dem wissenschaftstheoretisch unprätentiösen Fall, dass modale Geltung häufig erst durch kumulativen Wissenszuwachs festgestellt werden kann. Man betrachte etwa die Aussage, dass jeder Gegenstand mit sich selbst identisch ist. Zieht man als Hintergrundwissen lediglich die klassische Aussagen- oder Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität heran, so handelt es sich bei der fraglichen Aussage lediglich um ein erfüllbares Urteil, eine Behauptung mit möglicher, aber keinesfalls notwendiger Geltung. Mit den verfügbaren Formalisierungs- und Beweismöglichkeiten der klassischen Aussagen- oder Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität lässt sich eben nicht mehr feststellen. Erweitert man aber diesen Hintergrundwissensbestand um Regeln für den logischen Umgang mit Identitätsurteilen, so folgt umgehend die notwendige Geltung relativ zu diesem erweiterten Wissensbestand. Allgemein gilt:

Lemma 3: Eine Behauptung kann relativ zu einem bestimmten Hintergrundwissen Σ notwendigerweise in Geltung sein ($\Box_{\Sigma}\mathfrak{A}$) und *zugleich* relativ zu einem abweichenden Hintergrundwissen Σ^{*} nicht notwendigerweise in Geltung sein ($\neg\Box_{\Sigma^{*}}\mathfrak{A}$).

Schließlich sei noch eine letzte allgemeine Einsicht aus den grundlegenden Definitionen erwähnt. Auch wenn wir in der komparativen Betrachtung verschiedener Hintergrundwissensbestände üblicherweise Minimalbedingungen wie Konsistenz und Kohärenz gewährleistet sehen wollen, so sind diese Mindestforderungen nicht einmal zu postulieren, wenn es um die Möglichkeit deskriptiver sowie präskriptiver Erweiterungen von Hintergrundwissensbeständen geht. Dies bezieht sich auf den allgemeinen Fall, dass ein Sachverhalt sowohl ontische wie auch deontische Geltung erfahren kann, wenn das Hintergrundwissen, auf das man sich bezieht, nur hinreichend reichhaltig ist. Schließlich erlauben bereits unsere grundlegenden Definitionen unter anderem die Vereinigungsmengenbildung von Σ und Ω, weil durch die Definitionen eben keine einschränkenden Bedingungen formuliert werden. Entsprechend gilt:

Lemma 4: Gilt ein durch eine Aussage $\mathfrak{A}$ ausgedrückter Sachverhalt relativ zu einem deskriptiven Hintergrundwissen Σ als notwendig ($\Box_\Sigma \mathfrak{A}$) und ist das Bestehen dieses Sachverhalts relativ zu einem normativen Hintergrundwissen Ω geboten ($\Box_\Omega !\mathfrak{A}$), dann gilt sowohl $\Sigma \cup \Omega \vDash \mathfrak{A}$ ($\Box_{\Sigma \cup \Omega} \mathfrak{A}$) als auch $\Sigma \cup \Omega \vDash !\mathfrak{A}$ ($\Box_{\Sigma \cup \Omega} !\mathfrak{A}$).

Damit gewährleistet unser Zugang die angemessene Modellierung von Konstellationen der Form, dass ein faktisch bestehender Sachverhalt auch bestehen sollte, dass ein faktisch nicht bestehender Sachverhalt gleichwohl bestehen sollte, dass ein faktisch bestehender Sachverhalt nicht bestehen sollte, dass ein faktisch nicht bestehender Sachverhalt auch nicht bestehen sollte usw. Wir kommen hierauf kurz zurück im Kontext der ontisch-deontischen Konnexe.[15]

Durch den Zugang über die beweistheoretische Semantik ändert sich übrigens nichts grundlegend an der verfügbaren Vielfalt der modallogischen Kalküle[16], die prinzipiell alle erreichbar bleiben, wenngleich für die hier verfochtenen Anliegen einer deontologischen Modellbildung bereits vergleichsweise voraussetzungsarme Kalküle genügen[17], die dann durch entsprechende materiale Regeln für Normen der technischen Vernunft[18] ergänzt werden können. Formal ist einzig eine syntaktische Metaregel erforderlich, die den Umgang mit den Satzmengenindizes regelt:

($R\#_\gamma$) $\#\mathfrak{A} \Rightarrow \#_\gamma \mathfrak{A}$ Jedes Vorkommnis eines Modaloperators $\#$ ist zu ersetzen durch seine mit einem Subskript indizierte Version $\#_\gamma$, wodurch die γ-Variabilitätsbedingungen des Operators definiert werden.

15. Siehe Abschnitt 5.
16. Für die Diversität der ontischen Modalkalküle siehe etwa Hughes/Cresswell (1968), passim.
17. Das haben die Fallbeispieluntersuchungen in der philosophischen Begleitforschung des LHybS-Projektes gezeigt.
18. Siehe Abschnitt 5.

An den grundlegenden Regeln für die wichtigsten ontischen wie deontischen Modalkalküle ändert sich nichts substantiell. Ebenso wie die konstitutiven Regeln für die ontischen Modalsysteme

(K)	$[\mathfrak{A}_1], \ldots, [\mathfrak{A}_n] \ldots \mathfrak{B}, \Box_\Sigma \mathfrak{A}_1, \ldots, \Box_\Sigma \mathfrak{A}_n \Rightarrow \Box_\Sigma \mathfrak{B}$	
(D)	$\Box_\Sigma \mathfrak{A} \Rightarrow \Diamond_\Sigma \mathfrak{A}$	(Σ ist konsistent)
(T)	$\Box_\Sigma \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$	(Σ ist wahr)
(S4)	$\Box_\Sigma \mathfrak{A} \Rightarrow \Box_\Sigma \Box_\Sigma \mathfrak{A}$	(Σ ist positiv vollständig)
(S5)	$\neg \Box_\Sigma \mathfrak{A} \Rightarrow \Box_\Sigma \neg \Box_\Sigma \mathfrak{A}$	(Σ ist negativ vollständig)

mit Subskripten zu versehen sind (wobei sich im Einzelnen weiterführende Forderungen für die Beschaffenheit von Σ ergeben), müssen auch die beiden deontischen Mindestbedingung von Wrights[19] mit einer Indexvariablen versehen werden:

$$\Box_\Omega !(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}), \Box_\Omega !\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_\Omega !\mathfrak{B}$$

$$\Box_\Omega !\mathfrak{A} \Rightarrow \Diamond_\Omega !\mathfrak{A}$$

5 Normen technischer Rationalität – ontisch-deontische Konnexe

Logische Modalkalküle sind minimale Erzeugendensysteme im Umgang mit den Modalitäten. Nicht weniger, aber auch nicht mehr. Sie regeln die elementaren Gebrauchsbedingungen für modale Operatoren, die bereits aus formalen Gründen legitimiert werden können. Deshalb sind alle beweisbaren modallogischen Implikationen logisch gültig und damit gültig aufgrund der Semantik der involvierten logischen Partikel allein. Die Konstruktion von Gegenmodellen ist aufgrund der logischen Form der betroffenen Aussagen ausgeschlossen, alle Instanzen liefern Modelle. Bekanntlich führt diese strenge Form von Gültigkeit aber zu keinen sonderlich gehaltvollen Folgerungen, weshalb die Analysewerkzeuge für eine deontologische Modellbildung mehr umfassen sollten, als formal-analytische Instrumente. Um normative Argumentationen – etwa in den technischen Praxen der Ingenieurwissenschaften oder den politischen Praxen kritischer Gesellschaftswissenschaften – rekonstruieren sowie evaluieren zu können, bedarf es zudem material-analytischer Werkzeuge. Diese unterscheiden sich von den formal-analytischen dahingehend,

19. Siehe etwa von Wright (1951), 72.

dass sie nicht mehr allein durch einen Rekurs auf die investierte Semantik gerechtfertigt werden können. Es bedarf zudem der Bezugnahme auf eine zugrundeliegende Rationalität, relativ zu der als Regeln gefasste Normen formuliert und legitimiert werden können. Erst durch diese substantielle Erweiterung wird eine formal-deontische Modallogik zu einer material-deontischen Diskurslogik.

Innerhalb unseres modallogischen Zugangs drücken sich diese material-analytischen Erweiterungen durch sogenannte ontisch-deontische Konnexe aus, die regelhaft das Zusammenspiel von einzelnen deskriptiven wie präskriptiven Hintergrundwissensbeständen zum Ausdruck bringen. Es handelt sich hierbei um Modellierungen von Normen technischer Rationalität, wie sie etwa zur diskurstheoretischen Analyse relevanter Argumentationen in der hybriden Leichtbauforschung zur Anwendung kommen können. Dies sei hier durch die Angabe einzelner dieser Normen technischer Rationalität exemplifiziert.

$\Box_E!\mathfrak{A}, \Diamond_T\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_T!\mathfrak{A}$	Wenn $\mathfrak{A}$ ethisch geboten und zugleich technisch möglich ist, dann ist die Realisierung von $\mathfrak{A}$ auch technisch geboten. (Beispiel: Wenn es aus Gründen der Nachhaltigkeit ethisch geboten ist, Hybridwerkstoffe in Fahrzeugkarosserien zu verbauen und dies auch technisch möglich ist, dann sollten Hybridwerkstoffe in Fahrzeugkarosserien verbaut werden.)
$\Box_E!\neg\mathfrak{A}, \Diamond_T\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_T!\neg\mathfrak{A}$	Wenn $\mathfrak{A}$ ethisch verboten, aber technisch möglich ist, dann ist die technische Realisierung von $\mathfrak{A}$ gleichwohl verboten. (Beispiel: Wenn es ethisch verboten ist, an Menschen pharmazeutische Tests durchzuführen, obwohl es medizintechnisch möglich wäre, dann ist es gleichwohl medizintechnisch verboten, an Menschen pharmazeutische Tests durchzuführen.)
$\Box_T\mathfrak{A}, \Diamond_W!\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_T!\mathfrak{A}$	Ist $\mathfrak{A}$ technisch notwendig und zudem wirtschaftlich erlaubt, dann ist die technische Realisierung von $\mathfrak{A}$ auch geboten. (Beispiel: Erweist es sich etwa als technisch notwendig, die Dämmung von Hochhäusern aus feuerfesten Materialien zu fertigen und ist dies auch wirtschaftlich umsetzbar, dann muss dies in jedem Fall auch technisch umgesetzt werden.)

$\Diamond_T\mathfrak{A}, \Diamond_W!\mathfrak{A} \Rightarrow \Diamond_T!\mathfrak{A}$	Ist $\mathfrak{A}$ technisch möglich und darüber hinaus auch wirtschaftlich umsetzbar, dann darf der fragliche Sachverhalt $\mathfrak{A}$ auch realisiert werden. (Beispiel: Wenn es etwa technisch möglich ist, Supersportwagen herzustellen und dieses kleine Segment auch wirtschaftlich tragbar ist, dann dürfen solche Fahrzeuge auch hergestellt werden.)

Um die Angemessenheit der ontisch-deontischen Konnexe zu demonstrieren, betrachten wir als Fallbeispiel die wahrscheinlich wichtigste der benannten Rationalitätsnormen, dass aus dem ethischen Gebot und der technischen Möglichkeit auch das technische Gebot zur Realisierung folgt: $\Box_{\mathrm{E}}!\mathfrak{A}$, $\Diamond_{\mathrm{T}}\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_{\mathrm{T}}!\mathfrak{A}$.

Wir betrachten im Besonderen diese Norm, weil bei einem Großteil ethischer und moralphilosophischer Einsichten, die theorieimmanent durchaus gut begründet sein mögen, häufig die Durchsetzung fehlt, da es schlicht an der Möglichkeit zu ihrer Verwirklichung mangelt. Theorieimmanente Kohärenz gewährleistet eben noch nicht praktische Umsetzbarkeit. Ein klassisches Problem, mit dem vor allem anspruchsvolle Ethiken zu ringen haben, weil des Öfteren die geforderten Rahmen- und Randbedingungen im Erfahrungswirklichen unrealisiert verbleiben. Es ist mithin wichtig, relativ zu einem Gebot auch die Möglichkeit für seine Durchsetzung zu prüfen und gegebenenfalls explizit festzustellen, damit über einen vermittelnden Schritt dem Gebot auch zur Wirklichkeit verholen werden kann. Das gilt es gleichermaßen in der deontologischen Modellierung zu berücksichtigen. Die Logik kann selbstverständlich den implementierenden Schritt von der Theorie hin zur Praxis nicht gewährleisten, aber sie kann das Erfordernis dieser Gelingensbedingung formal abbilden und ihrerseits in die Evaluierung mit einbeziehen. In unserem Fall betrifft dies die ergänzende Norm, dass aus der begründeten Feststellung in das technisch Gebotene auch dessen Verwirklichung folgt:

$\Box_{\mathrm{T}}!\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$	Wenn $\mathfrak{A}$ technisch geboten ist, dann ist $\mathfrak{A}$ auch der Fall. (Beispiel: Wenn es technisch geboten ist, Hybridwerkstoffe in Fahrzeugkarosserien zu verbauen, dann werden auch Hybridwerkstoffe in Fahrzeugkarosserien verbaut.)

Die besagte Ergänzung gilt gleichermaßen und geradezu symmetrisch gelagert auch für Verbote, so wie wir dies unter anderem in der Rationalitätsnorm ausgedrückt haben, dass aus dem ethisch Verbotenen $\mathfrak{A}$, das aber technisch möglich ist, gleichwohl das technisch Verbot zur Realisierung von $\mathfrak{A}$ folgt: $\Box_{\mathrm{E}}!\neg\mathfrak{A}$, $\Diamond_{\mathrm{T}}\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_{\mathrm{T}}!\neg\mathfrak{A}$.

Dieser Normativität wird ebenfalls zur Faktizität verholfen durch:

$\Box_T!\neg\mathfrak{A} \Rightarrow \neg\mathfrak{A}$	Wenn $\mathfrak{A}$ technisch verboten ist, dann ist $\mathfrak{A}$ auch nicht der Fall. (Beispiel: Wenn es medizintechnisch verboten ist, an Menschen pharmazeutische Tests durchzuführen, dann werden auch an Menschen keine pharmazeutischen Tests durchgeführt.)

Es sollte für die Faktizitätsforderungen noch einmal in allgemeiner Diktion betont werden, dass es sich bei diesen nicht um Behauptungen die Faktizität betreffend handelt, sondern um Forderungen bezüglich derselben. Faktizitätsforderungen fordern mithin eine bestimmte Beschaffenheit der Welt, damit diesen als eine rationale angesehen werden kann. Eine vernünftig organisierte Welt sollte mithin derart beschaffen sein, wie durch die Faktizitätsforderungen postuliert. Es wird indes nicht konstatiert, dass die Welt derart beschaffen ist. Letzteres kann durchaus nicht der Fall sein – dann aber eben zu dem Preis, dass die Welt, zumindest in den fraglichen Punkten, nicht vernünftig organisiert ist. Unter Verwendung der soeben formulierten Faktizitätsforderungen können die zugrundeliegenden Rationalitätsnormen mit mehr Nachdruck formuliert werden:

$\Box_E!\mathfrak{A}, \Diamond_T\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$	Wenn $\mathfrak{A}$ ethisch geboten und zugleich technisch möglich ist, dann ist $\mathfrak{A}$ auch der Fall (Faktizität für: $\Box_E!\mathfrak{A}, \Diamond_T\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_T!\mathfrak{A}$).
$\Box_E!\neg\mathfrak{A}, \Diamond_T\mathfrak{A} \Rightarrow \neg\mathfrak{A}$	Wenn $\mathfrak{A}$ ethisch verboten, aber technisch möglich ist, dann ist $\mathfrak{A}$ auch nicht der Fall (Faktizität für: $\Box_E!\neg\mathfrak{A}, \Diamond_T\mathfrak{A} \Rightarrow \Box_T!\neg\mathfrak{A}$).

In beiden Fällen folgt also aus dem ethischen Gebot die Verwirklichung, aus der Normativität der ethischen Werte deren Faktizität. Das gelingt jedoch nur, weil in beiden Fällen die unverzichtbare Bedingung der Möglichkeit ($\Diamond_T\mathfrak{A}$) explizit festgestellt wurde. Wie wir bereits festgestellt hatten, gilt ohne diese Möglichkeitsbedingung keinesfalls: $\Box_E!\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A}$. In dieser unbedingten Form ist die Regel ungültig und wäre auch alles andere als adäquat gegenüber den moralphilosophischen und wertethischen Möglichkeiten in Lebenswelt und Wissenschaft.

Literatur

Anderson, Alan Ross (1958): „Reduction of Deontic Logic to Alethic Modal Logic“, in: *Mind* 67(265), 100–103.

Becker, Oskar (1952): *Untersuchungen über den Modalkalkül*, Westkulturverlag Anton Hain, Meisenheim am Glan.

Frege, Gottlob (*BS*): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert, Halle A/S. 1879. Mit textkritischen Anm. nachgedruckt in u. zit. n. M. Wille, *Gottlob Frege. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg 2018, 199–303.

Hansson, Steve Ove (2013): „Alternative Semantics for Deontic Logic“, in: D. Gabbay et al. (ed.), *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*, College Publications, London, 445–497.

Hartmann, Dirk (2003): *On Inferring. An Enquiry into Relevance and Validity*, mentis, Paderborn.

Hilpinen, Risto/McNamara, Paul (2013): „Deontic Logic: A Historical Survey and Introduction“, in: D. Gabbay et al. (ed.), *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems*, College Publications, London, 3–136.

Hughes, George Edward /Cresswell, Maxwell J. (1968): *An Introduction to Modal Logic*, Methuen and Co Ltd, London 1972.

Kant, Immanuel (*KrV*, B): *Kritik der reinen Vernunft* (B = 1787²), [*Kant's gesammelte Schriften. Band III*], Georg Reimer, Berlin 1911.

Kant, Immanuel (*KpV*): *Kritik der praktischen Vernunft*, [*Kant's gesammelte Schriften. Band V*], Georg Reimer, Berlin 1913.

Lorenzen, Paul (1969): *Normative Logic and Ethics*, Bibiographisches Institut, Mannheim/Zürich.

von Wright, Georg Henrik (1951): „Deontic Logic“, in: *Mind* 60, 1–15; zit. n. ders., *Logical Studies*, Routledge and Kegan Paul, London 1957, 58–74.

von Wright, Georg Henrik (1974): „Handlungslogik“, in: H. Lenk (ed.), *Normenlogik. Grundprobleme der deontischen Logik*, Verlag Dokumentation, Pullach bei München, 9–24.

Wille, Matthias (2011): *Transzendentaler Antirealismus. Grundlagen einer Erkenntnistheorie ohne Wissenstranszendenz* [Reihe „Quellen und Studien zur

Philosophie", Band 106], Walter de Gruyter, Berlin/Boston.

Wille, Matthias (2018): *Gottlob Frege. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Reihe „Klassische Texte der Wissenschaft"], Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.

Adressen der Autoren

Edward Kanterian
Department of Philosophy
School of European Culture and Languages
University of Kent
Canterbury, CT2 7NF
United Kingdom
E.Kanterian@kent.ac.uk

Karl Kuhlemann
Fakultät für Mathematik und Physik
Gottfried Wilhelm Leibniz
Universität Hannover
Welfengarten 1
D-30167 Hannover
kus.kuhlemann@t-online.de

Andrea Reichenberger
Universität Paderborn
Center for the History of Women Philosophers & Scientists
Technologiepark 21
D-33098 Paderborn
andrea.reichenberger@upb.de

Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Mathematik
AG Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften
Staudinger Weg 9
D-55099 Mainz
tsauer@uni-mainz.de

Shafie Shokrani
Universität Siegen
Naturwiss.-Technische Fakultät
Department Mathematik
Walter-Flex-Str. 3
57068 Siegen
shokrani@mathematik.uni-siegen.de

Susanne Spies
Universität Siegen
Naturwiss.-Technische Fakultät
Department Mathematik
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
spies@mathematik.uni-siegen.de

Klaus Volkert
AG Didaktik und Geschichte der Mathematik
Fakultät 4 Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
42199 Wuppertal
klaus.volkert@math.uni-wuppertal.de

Matthias Wille
Institut für Humanwissenschaften: Philosophie
Fakultät für Kulturwissenschaften
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn
willem@mail.uni-paderborn.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro. Mit Beiträgen von G. Nickel, I. Witzke, A.-S. Heinemann, M. Wille, Ph. Karschuck, R. Krömer & D. Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies: Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von P. Ullrich, N. Oswald, T. Hamann, S. Schorcht, E. Ficara, T. Räz & T. Sauer, G. Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von Th. Bedürftig, A. Binder, M. Janßen, E. Pernkopf, M. Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb: George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von K. Kuhlemann, N. Milkov, G. Nickel, M. Rathgeb, L. Schulte, H. Schwaetzer, Ch. Thiel, M. Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro. Mit Beiträgen von Th. Gruber, A.-S. Heinemann, E. Kanterian, D. Koenig, M. Rathgeb, A. Vohns, M. Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro

Tanja Hamann: Die „Mengenlehre" im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 10 (2018)

Mit Beiträgen von

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN