

Das Spektrum der hadronisch invarianten
Masse in semileptonischen Zerfällen
 $B \rightarrow X_c \ell \nu$

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Michael Kraetz,
geboren am 20. Februar 1977 in Karlsruhe

eingereicht beim Fachbereich Physik
der Universität Siegen

Siegen
Januar 2006

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Thomas Mannel
Prof. Dr. Hans D. Dahmen
Datum der Disputation: 17. Februar 2006

Internetpublikation der Universitätsbibliothek Siegen: [urn:nbn:de:hbz:467-2102](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-2102)

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Spektrum der hadronisch invarianten Masse des inklusiven semileptonischen Zerfalls $B \rightarrow X_c \ell \nu$ präsentiert. Durch die Verwendung der Lichtkegelentwicklung ergibt die Berechnung ein glattes Spektrum, in dem zuverlässig physikalische Schnitte platziert werden können. Diese Entwicklung stellt eine Operatorproduktentwicklung dar, welche der kinematischen Situation, in der die Zerfallsprodukte die maximale Energie erhalten, angepasst ist. Dabei wird berücksichtigt, dass der numerische Wert der invarianten Masse des c-Quarks von der gleichen Größenordnung ist wie der Entwicklungsparameter. Der Verlauf des Spektrums wird durch Shapefunktionen beschrieben. Die Resultate stimmen mit publizierten Ergebnissen überein, wenn die Shapefunktionen entwickelt bzw. die Masse des c-Quarks vernachlässigt wird. Durch die genaue Kenntnis des Verlaufs des Spektrums können Momente in Abhängigkeit von einem Cutoff berechnet werden. Ein Vergleich der ersten Momente des gesamten Spektrums mit experimentellen Daten zeigt eine gute Übereinstimmung. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden die Ungenauigkeit von hadronischen Parametern verringern, die bei der Bestimmung von CKM-Matrixelementen benötigt werden. Dadurch wird eine präzise Analyse des Unitaritätsdreiecks möglich, die klärt, ob Diskrepanzen zwischen den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Daten existieren und wie die Theorie erweitert werden muss, damit die Effekte der neuen Physik exakt beschrieben werden.

Abstract

The dissertation at hand provides the spectrum of the hadronic invariant mass in the inclusive semileptonic decay $B \rightarrow X_c \ell \nu$. The calculation leading to this result was carried out using the lightcone expansion, which is an operator product expansion that is adjusted to properly describe the kinematics if all decay products reach their maximum energy. This method guarantees a smooth shape for the complete spectrum, which can then be used to introduce physical cuts. Furthermore it was taken into account that the invariant mass of the c quark is of the same order as the expansion parameter. The spectrum is described by shape functions. By expanding these shape functions or by examining the limit $m_c \rightarrow 0$, known results are reproduced. The knowledge of the exact shape of the spectrum can be used to calculate moments with a cutoff. The first moments in terms of the whole spectrum are in good agreement with experimental data. The results of this work will enhance the precision of hadronic parameters that describe inclusive decays of B mesons. These parameters are used to extract CKM matrix elements from experimental data. A smaller uncertainty concerning these matrix elements will allow for a more accurate analysis of the unitarity triangle which can clarify if there are discrepancies between experimental data and theoretical predictions and how the theory has to be enlarged to incorporate the effects of new physics beyond the standard model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Standardmodell	2
1.2	Flavourphysik	5
1.3	Motivation	10
2	Theoretische Grundlagen	15
2.1	Heavy Quark Effective Theory	18
2.2	Operatorproduktentwicklung	22
2.2.1	Effektive Theorie schwacher Zerfälle	24
2.2.2	Lokale $1/m_b$ -Entwicklung	26
2.3	Lichtkegelentwicklung	31
2.4	Soft Collinear Effective Theory	36
3	Das hadronische Spektrum im Zerfall $B \rightarrow X_c \ell \nu$	39
3.1	Partonisches Ergebnis	40
3.2	Lichtkegelentwicklung	45
3.2.1	Matrixelement ohne Gluonabstrahlung	47
3.2.2	Matrixelement mit Gluonabstrahlung	49
3.2.3	Resultat	52
3.3	Matrixelemente und Shapefunktionen	54
3.4	Resultate	57
3.5	Vergleich mit der $1/m_b$ -Entwicklung	60

4 Diskussion der Resultate	63
5 Zusammenfassung	77
A Matrixelemente der Lichtkegeloperatoren	79
B Momente der Shapefunktionen	85
C Herleitung der Zerfallsrate	91
Literaturverzeichnis	95

Kapitel 1

Einleitung

Die Theorie der Elementarteilchen befindet sich momentan in einer spannenden Situation und die Resultate in der nahen Zukunft werden das Erscheinungsbild dieser Theorie entscheidend prägen. Die Experimente der letzten Jahrzehnte sammelten hochpräzise Daten in großer Menge über das fundamentale Zusammenspiel der kleinsten Bausteine der Materie [1]. Parallel mit diesem Erfolg gelang es Arbeitsgruppen in der ganzen Welt kontinuierlich neue theoretische Methoden zu entwickeln und die Präzision der bekannten Vorgehensweisen stetig zu steigern. Das Resultat dieser Bemühungen spiegelt sich in dem heutigen Modell der Elementarteilchenphysik wider, das unter dem Namen Standardmodell bekannt ist [2,3,4,5,6]. Dieses Modell wurde mit Hilfe von großen Ringbeschleunigern, wie z.B. dem Large Electron Positron Collider (LEP) am CERN, so wie von kleineren, hoch spezialisierten, Experimenten untersucht und zeichnet sich jeweils durch eine verblüffende Genauigkeit der Vorhersagen aus. Die große Anzahl der Aspekte unter denen das Standardmodell seine Aussagekraft bewiesen hat, erklärt weshalb dieses Modell als die richtige Beschreibung der Natur der Elementarteilchen in dem momentan erreichbaren Energieintervall angesehen wird.

Trotz dieser Erfolge bei Energien unterhalb von 200 GeV gilt das Standardmodell nur als Näherung einer höherwertigen Theorie. Ein ganz wesentliches Argument, das diese These bestärkt, ist die hohen Anzahl von Parametern im Standardmodell. Neben den Massen der Teilchen müssen die Kopplungsstärke der drei fundamentalen Kräfte und die Mischungsmatrizen in der Flavourphysik bestimmt werden. Auch die genaue Art und Weise des Auftretens der spontanen Symmetriebrechung in der Natur ist noch nicht ermittelt. Ein detailliertes Verständnis ist mit der Suche nach dem Higgsboson verknüpft, dessen Quantenfeld für die Brechung der Symmetriegruppe des Standardmodells verantwortlich ist, aber bislang noch nicht entdeckt werden konnte. Es ist zusätzlich recht unwahrscheinlich, dass der Gültigkeitsbereich des Standardmodells bis zu Energien erweitert werden kann, bei denen die Gravitationskraft eine Rolle spielt. Diese Punkte haben dazu beigetragen, dass in den letzten Jahren einige grundlegende Erweiterungen zum Standardmodell entworfen wurden. Abgesehen von kleineren Anpassungen, wie z.B. der Berücksichtigung der

Neutrinomassen [7, 8] und der damit verbundenen Mischung im Leptonsektor, existieren Modelle, die mehrere neue Teilchen mit einer größeren Symmetrie postulieren bis hin zu Stringtheorien, welche die Natur in bis zu 12 Raumdimension beschreiben. Ein Großteil der Fragen, die diese neuen Theorien aufwerfen, werden erst beantwortet, wenn die nächste Beschleunigergeneration ihre Arbeit aufgenommen hat. Bis zu diesem Zeitpunkt werden hochpräzise Experimente und theoretische Berechnungen benötigt, da mögliche Abweichungen zwischen Experiment und Theorie detaillierte Rückschlüsse auf die exakte Beschreibung der Natur erlauben.

Die folgende Arbeit ist in fünf Abschnitte gegliedert. Die nächsten Seiten dieses Kapitels beginnen mit einer groben Erläuterung des Standardmodells und der darin enthaltenen Flavourphysik. Danach werden mögliche Erweiterungen skizziert und aufgezeigt, welchen Beitrag die hier beschriebene Arbeit leisten kann um neue Physik jenseits des Standardmodells zu entdecken. Danach werden die grundlegenden theoretischen Methoden zur Beschreibung der Zerfälle von Hadronen mit einem schweren Quark, wie z.B. dem b-Quark, erläutert. Hierbei erfolgt eine Einführung in die effektive Theorie von schweren Quarks, Heavy Quark Effective Theory. Im Anschluss wird die theoretische Beschreibung von inklusiven Zerfällen von schweren Hadronen und die Operatorproduktentwicklung besprochen. Abgeschlossen wird dieses Kapitel dann durch die Diskussion der Lichtkegentwicklung, einer besonderen Form der Operatorproduktentwicklung, die das hadronische Spektrum in dem betrachteten kinematischen Bereich sinnvoll darstellt. Danach werden die einzelnen Schritte der Berechnung des Spektrums beschrieben und die Resultate präsentiert. Es folgt eine Darstellung der numerischen Auswertung der Ergebnisse und der Vergleich dieser Daten mit den experimentellen Messungen. Abschließend wird ein Überblick über die Resultate im letzten Kapitel gegeben.

1.1 Das Standardmodell

Das Standardmodell hat seinen historischen Ursprung in der Zusammenführung der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik. Der erste erfolgreiche Schritt zu einer relativistischen Quantenmechanik gelang Paul Dirac in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts [9]. Schon die damals vorgestellte Theorie zeigte, dass die Verknüpfung von Relativistik und Quantenmechanik eine Vielteilchentheorie zur Folge hat. Durch die quantenmechanische Beschreibung der Abstrahlung von Teilchen und der damit nötigen Quantisierung des elektromagnetischen Feldes wurden erste quantenmechanische Feldtheorien aufgestellt. Später erfolgte auch die Quantisierung der fermionischen Freiheitsgrade, so dass einige Zeit später die Quantenelektrodynamik ihre ersten Erfolge feiern konnte. Diese Theorie konnte bereits in der Mitte des letzten Jahrhunderts sehr präzise Vorhersagen für Prozesse von elektrisch geladenen Teilchen liefern.

Die heutige Form des Standardmodells beinhaltet neben der bereits erwähnten elektromagnetischen Wechselwirkung noch zwei weitere fundamentale Wechselwirkungen: zum

einen die schwache Wechselwirkung, die besonders durch radioaktive β -Zerfälle bekannt wurde und zum anderen die starke Wechselwirkung, die die Bestandteile der Atomkerne zusammenhält. Keine Betrachtung erfährt die Gravitation im Standardmodell, da die Massen der beteiligten Teilchen sehr klein bzw. die Energien der Prozesse zu niedrig sind um einen nennenswerten Effekt zu erzeugen. An diesen drei Wechselwirkungen sind verschiedene Teilchen beteiligt, die durch das Standardmodell beschrieben werden. Die Tabellen 1.1, 1.2 listen diese Teilchen auf.

	1	2	3	el-mag.	schwach	stark
Leptonen	$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$	ja nein	ja ja	nein nein
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	ja ja	ja ja	ja ja

Tabelle 1.1: Die Elementarteilchen des Standardmodells mit Spin $1/2$

Wechselwirkung		el-mag.	schwach	stark
elektro-magnetisch	Photon γ	nein	nein	nein
schwach	Z^0 -Boson W^\pm -Boson	nein ja	ja	nein
stark	Gluon g	nein	nein	ja

Tabelle 1.2: Die Eichbosonen des Standardmodells

Wie in Tabelle 1.1 zu sehen ist, beinhaltet das Standardmodell drei Spin $1/2$ Teilchenfamilien. Die einzelnen Teilchen haben nach dem heutigen Kenntnisstand keine Struktur und stellen somit die elementaren Bausteine der Materie dar. Die Einteilung in Leptonen und Quarks trennt die Teilchen, die stark wechselwirken können von denen, die nur an elektromagnetischen oder schwachen Prozessen beteiligt sind. Die Physik, die sich mit den Unterschieden der drei Familien beschäftigt, wird Flavourphysik genannt. Dieser Teilbereich wird im nächsten Unterkapitel separat behandelt.

Die Kräfte, die zwischen den Teilchen ausgetauscht werden, übermitteln Eichbosonen, siehe Tabelle 1.2. Das bekannteste dieser Teilchen ist das Photon. Es trägt selbst keine elektrische Ladung, so dass es nicht selbst mit anderen Photonen wechselwirken kann. Ganz anders ist die Situation bei den übrigen Austauscheteilchen. Diese besitzen die Fähigkeit selbst an der Wechselwirkung teilzunehmen. So können beispielsweise Gluonen mit anderen Gluonen wechselwirken. Diese Prozesse spielen bei niedrigen Energien eine wichtige Rolle.

Die Berechnung von Vorhersagen kann im Standardmodell momentan noch nicht komplett analytisch durchgeführt werden. Somit müssen Verfahren angewandt werden, welche die gewünschte Lösung näherungsweise ermitteln. Die bislang erfolgreichste Methode,

mit der auch der Großteil der bisherigen Vorhersagen berechnet wurde, ist die Störungstheorie. Die Wechselwirkungen, der die Teilchen ausgesetzt sind, besitzen verschiedene Kopplungsstärken und diese Kopplungen können unter gewissen Voraussetzungen sehr klein sein. Diese Situation tritt beispielsweise für die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung bei den bisher untersuchten Prozessen ein. Dies rechtfertigt das jeweilige Problem in der Kopplung zu entwickeln um so eine berechenbare Näherungslösung zu erhalten. Die Untersuchungen dieser Störungstheorie zeigten allerdings auch, dass die Kopplungen keine Konstanten sind, sondern von der Energie, bei welcher der betrachtete Prozess stattfindet, abhängt. So nehmen die Kopplungen der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung mit ansteigender Energie leicht zu. Bei den momentan in den Experimenten erreichbaren Energien wird die Gültigkeit der Störungstheorie von diesem Umstand allerdings nicht berührt. Eine völlig andere Konstellation ergibt sich für die starke Wechselwirkung. Wie der Name bereits vermuten lässt, hat die starke Kopplung einen relativ hohen Wert. Dies gilt allerdings nur bis zu Energien der Größenordnung 1 GeV, da die Kopplung der starken Wechselwirkung mit wachsender Energie abnimmt. Für den Teil der Prozesse, der oberhalb dieser Schwelle stattfindet, kann somit die Störungsrechnung verwendet werden. Obwohl die Konvergenz der Entwicklung in den Kopplungen bisher nicht bewiesen ist, lassen die Ergebnisse keine Zweifel, dass diese Methode zumindest in dem Energieintervall bis etwa 200 GeV gerechtfertigt ist. Der Erfolg des Standardmodells ist hauptsächlich durch diese präzisen Rechnungen und ihrer Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Experimenten zu erklären.

Wie bereits erwähnt, können hadronische Prozesse, die bei Energien unterhalb von 1 GeV stattfinden, nicht mit den Methoden der Störungstheorie behandelt werden. Obwohl dieses Intervall verhältnismäßig klein ist, spielt es doch eine große Rolle. Aufgrund des Verhaltens der starken Kopplung können die Quarks und Gluonen nicht als freie Teilchen beobachtet werden. Die im Experiment, neben den Leptonen, auftretenden Teilchen, die Hadronen, stellen ein System von zwei Quarks (Meson) oder drei Quarks (Baryon) und einer Vielzahl von Gluonen und Quarkpaaren dar. In den Experimenten werden in einem elementaren Prozess zuerst Quarks und Gluonen bei einer hohen Energie erzeugt. Diese verhalten sich vorläufig wie freie Teilchen. Kurze Zeit später vereinigen sie sich in der Hadronisation zu Mesonen oder Baryonen. Bei diesem Vorgang spielen Anteile der starken Wechselwirkung mit einer relativ hohen Reichweite die entscheidende Rolle. Da diese Prozesse bei Energien unterhalb von 1 GeV stattfinden, wurden neuen Methoden entwickelt mit denen Vorhersagen für diesen nicht-perturbativen Bereich ermittelt werden können. Die üblich verwendete Methode um Resultate für Prozesse von Hadronen zu erhalten, besteht in der Anwendung einer Operatorproduktentwicklung [10]. Diese Entwicklung wird in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielen und wird in Kapitel 2.2 gesondert beschrieben. Die Basis dieser Methode ist die Möglichkeit einen bestimmten Prozess in einen nieder- und einen hochenergetischen Anteil aufzuspalten. Bei geschicktem Vorgehen können die Hochenergieterme perturbativ berechnet werden. Der Anteil, der bei niedrigen Energien gültig ist, kann zwar noch immer nicht analytisch ermittelt werden, es ist allerdings möglich hierzu Informationen aus Experimenten zu erhalten. Durch die Verwendung von experimentellen

Daten können diese Terme somit bestimmt und für andere Prozesse verwendet werden, so dass insgesamt eine Vorhersage mit geringem theoretischen Fehler entsteht.

Prozesse bei niedrigen Energien können auch mit Gittereichtheorien berechnet werden. Dabei wird der physikalische Phasenraum durch ein Gitter diskretisiert und die Werte der fermionischen Quantenfelder sind nur an den Gitterpunkten definiert. Eine Integration über die relevanten Feldkonfigurationen kann dann mit leistungsstarken Computern durchgeführt werden, womit Vorhersagen für Prozesse unterhalb von 1 GeV möglich sind. Allerdings treten durch die Diskretisierung auch neue Schwierigkeiten auf, so dass bei vielen Rechnungen Maßnahmen zur Vereinfachung durchgeführt werden, die jedoch die Präzision der Ergebnisse stark beeinflussen.

Auch die Methoden der Störungstheorie wurden stetig verbessert und verfeinert. Damit eine Vorhersage für einen Prozess ermittelt werden kann, müssen Feynmandiagramme berechnet werden. Diese Diagramme stellen die verschiedenen Möglichkeiten, wie Teilchen durch die Wechselwirkung ihren Zustand ändern, graphisch dar. Die Kopplungsstärken, in denen der Prozess entwickelt wird, treten jeweils an den Wechselwirkungs- bzw. Schnittpunkten der Linien des Diagramms auf. In höheren Ordnungen der Berechnung stehen genügend Schnittpunkte zur Verfügung, so dass deren Verbindungslinien Diagramme mit Schleifen bilden. Die Genauigkeit ist proportional zu der Anzahl dieser Schleifen. Für eine höhere Präzision müssen mehrere Schleifen betrachtet werden, wodurch die Anzahl der benötigten Diagramme stark zunimmt. Damit diese Zahl von Diagrammen berechnet werden kann, sind leistungsfähige Computeranlagen nötig. Aktuelle Arbeiten beschäftigen sich mit Diagrammen, die sich aus vier Schleifen zusammensetzen, und erreichen damit eine hohe Präzision für ausgewählte Observable.

1.2 Flavourphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik beinhaltet, wie bereits erwähnt, jeweils sechs Leptonen und Quarks, die in drei Familien untergliedert sind. Neben den zum Teil deutlichen Massendifferenzen unterscheiden sich die Teilchen auch innerhalb der Familien durch ihre Quantenzahlen. Die Tatsache, dass die Teilchen eine Masse besitzen, führte anfangs bei der Konstruktion des Standardmodells zu Schwierigkeiten, da die Existenz eines massiven Teilchens in der Theorie ein Symmetrieprinzip des Standardmodells verletzen würde. Eine Lösung wurde durch die spontanen Symmetriebrechung gefunden. Durch Postulierung eines neuen Teilchens ist es möglich massive Teilchen sehr natürlich in die Theorie einzufügen. Gleichzeitig erhält das Standardmodell durch diesen Eingriff die Möglichkeit der Flavourmischung. Da ein Parameter dieser Mischung für diese Arbeit von zentraler Rolle ist, wird in den folgenden Abschnitten auf die spontane Symmetriebrechung eingegangen. Zum Verständnis dieses Aspekts ist allerdings ein detaillierter Blick auf das Standardmodell nötig.

Es ist ausreichend das Standardmodell zur Erläuterung der spontanen Symmetriebrechung

auf den Teil zu reduzieren, der die elektromagnetische sowie die schwache Wechselwirkung beschreibt. Hierzu verwendet man eine Lagrangedichte, die unter Transformationen der Symmetriegruppe

$$\text{SU}(2) \otimes \text{U}(1) \quad (1.1)$$

invariant ist. Die dazugehörigen Eichfelder $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ und B_μ koppeln an den schwachen Isospin und an die Hyperladung durch die Kopplungskonstanten g bzw. g' . Die Lagrangedichte besteht aus einem kinetischen Teil für die Eichfelder

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_i^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

mit den Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (1.3)$$

und einen kinetischen Teil für die Quarks und Leptonen

$$\mathcal{L}_F = \sum_{\psi_L} \bar{\psi}_L \not{D} \psi_L + \sum_{\psi_R} \bar{\psi}_R \not{D} \psi_R \quad . \quad (1.4)$$

Die Fermionen mit dem Index L ψ_L werden linkshändig genannt und repräsentieren, wie in Tabelle 1.1, SU(2)-Dubletts des schwachen Isospins und koppeln außerdem an die Hyperladung. Damit die Lagrangedichte auch unter lokalen Transformationen der Symmetriegruppe (1.1) invariant bleibt, werden die üblichen Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt.

$$\partial_\mu \psi_L \longrightarrow D_\mu \psi_L = \left(\mathbf{1} (\partial_\mu + i\frac{g'}{2} Y B_\mu) + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{W}_\mu \right) \psi_L \quad (1.5)$$

Hierbei steht Y für den Generator der Symmetriegruppe der Hyperladung und $\vec{\tau}$ stellt die drei Generatoren des schwachen Isospins dar. Die rechtshändigen Fermionen ψ_R sind hingegen SU(2)-Singletts. Sie koppeln lediglich an die Hyperladung und die entsprechende kovariante Ableitung hat folgende Form:

$$\partial_\mu \psi_R \longrightarrow D_\mu \psi_R = \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2} Y B_\mu \right) \psi_R \quad . \quad (1.6)$$

Bis zu diesem Punkt beinhaltet das beschriebene Modell nur masselose Teilchen. Dieses Problem könnte durch das Einfügen eines Massenterms

$$\mathcal{L}_M = - \sum_{\psi} m_\psi (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (1.7)$$

in die Lagrangedichte behoben werden. Dieser Term würde aber die Invarianz der Lagrangedichte unter der Symmetriegruppe (1.1) brechen, da die Teilchenfelder ψ_L , ψ_R zu

verschiedenen $SU(2)$ -Repräsentationen gehören und außerdem unterschiedliche Hyperladungen tragen. Es wird deshalb eine Möglichkeit benötigt, Massenterme in der Lagrangedichte zu erzeugen ohne dabei die Invarianz zu verletzen.

Im Standardmodell ist dieses Problem mit Hilfe der spontanen Symmetriebrechung gelöst [11, 12, 13]. Hierzu wird ein weiteres komplexes Feld als $SU(2)$ -Dublett eingeführt.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Die Dynamik und die Selbstkopplung dieses Feldes wird durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \Phi)^* D_\mu \Phi - V(\Phi) \quad (1.9)$$

beschrieben. Die kovarianten Ableitungen sind dabei analog zu (1.5) und das Potential hat folgende Form:

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.10)$$

Zusätzlich zu diesen Termen koppelt das neue Feld auch an die Fermionen über einen Wechselwirkungsterm in der Lagrangedichte.

$$\mathcal{L}_M = -\lambda_u \bar{\psi}_L^q \tilde{\Phi} \psi_R^{q,u} - \lambda_d \bar{\psi}_L^q \Phi \psi_R^{q,d} - \lambda_e \bar{\psi}_L^l \Phi \psi_R^l + \text{h.c.} \quad (1.11)$$

Hier steht der Index q bzw. l bei den Fermionfeldern für Quarks und Leptonen und $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$. Die rechtshändigen Fermionfelder z.B. $\psi_R^{q,u}$ stellen Zeilenvektoren mit den jeweiligen Quarks aus den drei Familien dar. Der zusätzliche Index gibt dabei an, ob es sich um up-type Quarks, also (u_R, c_R, t_R) , oder down-type Quarks, (d_R, s_R, b_R) , handelt. Die Parameter λ_i verstehen sich als Matrizen, welche die jeweiligen Fermiondubletts mit den Singletts verbinden. Es wird dabei angenommen, dass keine rechtshändigen Neutrinos existieren bzw. Neutrinos keine Masse besitzen. Es wurde zwar durch Experimente der letzten Jahre gezeigt, dass Neutrinos massiv sind, doch die Änderungen im Bezug auf die spontane Symmetriebrechung sind analog zu dem Verhalten bei Quarks. Der Grundzustand des neuen Feldes wird durch das Minimum des Potentials bestimmt. Es existiert eine triviale Lösung mit $\langle \Phi \rangle = 0$ und eine nicht-triviale Lösung mit $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle = \frac{v^2}{2}$. Der Parameter v ist abhängig von den Koeffizienten λ und μ des Potentials. Die Symmetrie wird nun durch das Einsetzen eines nicht-trivialen Grundzustands gebrochen. Dieser kann auf Grund der $SU(2)$ -Symmetrie der Einfachheit halber zu

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \langle \tilde{\Phi} \rangle = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

gewählt werden. Setzt man diese spezielle Wahl des Grundzustands in die Lagrangedichte ein, so ergibt sich für (1.11)

$$\mathcal{L}_M = -\frac{v}{\sqrt{2}} \left(\lambda_u \bar{\psi}_L^q \psi_R^{q,u} + \lambda_d \bar{\psi}_L^q \psi_R^{q,d} + \lambda_e \bar{\psi}_L^l \psi_R^l \right) \quad (1.13)$$

Durch die Symmetriebrechung wurden Massenterme für die Fermionen generiert. Man erhält somit eine Massenmatrix für die Leptonen und Quarks.

$$m_\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}} \lambda_\alpha \quad (1.14)$$

Da die Eichfelder der Symmetriegruppe (1.1) in der kovarianten Ableitung des Φ -Feldes stehen, erzeugt die Verwendung des Grundzustands auch Massenterme für bestimmte Kombinationen dieser Felder. Aus diesem Vorgang, der als schwache Mischung bezeichnet wird, erhält man drei massive Felder, welche die W^\pm - und Z^0 -Bosonen darstellen, und ein masseloses Feld, welches das Photon repräsentiert. Zusätzlich erhält man noch ein weiteres masseloses Teilchen auf Grund der Form des Potentials (1.10). Durch die spezielle Wahl der Parameter, die zu einem nicht-trivialen Minimum führt, gleicht das Potential in der Form einem Sombrero. Das Minimum, das sich zwischen Hutkante und Erhebung in der Mitte befindet, ist entartet. Eine Drehung des Potentials um dessen Symmetrieachse ändert die physikalische Situation nicht. Es existiert somit eine Symmetriegruppe, deren Symmetrie durch dieses Minimum nicht gebrochen wird. Durch diese Situation entsteht ein zusätzliches masseloses Goldstone-Boson in der Lagrangedichte. Dieses Boson kann allerdings mittels der lokalen Eichinvarianz der Theorie wieder entfernt werden. In dieser so genannten unitären Eichung enthält die Lagrangedichte dann nur noch ein masseloses Eichfeld, welches die elektro-magnetische Wechselwirkung in Form der Photonen beschreibt. Das hier beschriebene Vorgehen kann noch erweitert werden indem Anregungen des Feldes Φ aus dem Vakuumzustand betrachtet werden.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Dieses Feld $h(x)$ beschreibt ein neues Teilchen mit dem Namen Higgs-Boson. Aufgrund von (1.11) hängt die Stärke der Kopplung dieses Teilchens von der Masse seiner Kopplungspartner ab. Dadurch tritt das Higgs-Boson besonders bei Prozessen mit schweren Teilchen auf.

Die Massenmatrix der Fermionen (1.14) wurde mit Hilfe der spontanen Symmetriebrechung erzeugt. Sie geht aus den Kopplungen des komplexen Feldes Φ mit den Fermionen hervor. Diese Kopplungen werden durch die λ -Matrizen beschrieben. Es gibt keinen Grund weshalb dieses Feld nur Fermionen derselben Sorte koppeln sollte. Somit sind die λ -Matrizen im Allgemeinen nicht diagonal und auf Grund der Definition (1.14) gilt das auch für die Massenmatrix. Dies lässt sich so interpretieren, dass die Teilchenfelder, die in der Lagrangedichte stehen nicht die tatsächlich beobachtbaren Teilchen sind. Es ist vielmehr eine Mischung dieser Wechselwirkungszustände, die als Massenzustand im Experiment als Teilchen detektiert wird. Mathematisch betrachtet handelt es sich um die Diagonalisierung der Massenmatrix durch eine unitäre Transformation.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_L^{q,u} &= U_L^{q,u} \psi_L^{q,u} & \tilde{\psi}_R^{q,u} &= U_R^{q,u} \psi_R^{q,u} & \dots \\ \tilde{m}_\alpha &= U_L^\alpha m_\alpha U_R^{\alpha\dagger} & & \dots & \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Diese Mischung hat Einfluss auf die Prozesse des Standardmodells. Die Wechselwirkungen des Photons und des Z-Bosons sind symmetrisch in der Fermionsorte. Deshalb ergibt die Transformation von der Wechselwirkungsbasis in die Massenzustände hier keine Unterschiede. Ein anderes Verhalten zeigt sich bei den Prozessen bei denen W-Bosonen beteiligt sind, da hier zwei Teilchen der Wechselwirkungsbasis aus dem gleichen SU(2)-Dublett gekoppelt werden.

$$J^\mu = \bar{\psi}_L^{q,u} \gamma^\mu \psi_L^{q,d} = \bar{\psi}_L^{q,u} \gamma^\mu U_L^{q,u\dagger} U_L^{q,d} \tilde{\psi}_L^{q,d} = \bar{\psi}_L^{q,u} \gamma^\mu \hat{\psi}_L^{q,d} \quad (1.17)$$

Die Felder, die mit einer Tilde gekennzeichnet sind, stellen dabei die Massenzustände der jeweiligen Teilchen dar. Aus Konventionsgründen werden die Transformationsmatrizen in den down-type Quarks absorbiert. Somit ist das im Experiment erzeugte d-Quark eine Mischung aus den Wechselwirkungszuständen der d-, s- und b-Quarks. Die dabei auftretende Transformationsmatrix zwischen der Basis der Wechselwirkungs- und Massenzuständen ist eine 3×3 Matrix und trägt den Namen CKM-Matrix [14, 15]. Unter der Annahme, dass Neutrino keine Masse besitzen, existiert eine Mischungsmatrix nur für Quarks, da die Auswirkungen der Basistransformation nur zu einer Redefinition der Neutrinofelder führt. Bei massiven Neutrinos ergibt sich eine Mischungsmatrix, ähnlich der CKM-Matrix, mit dem Namen MNS-Matrix für den Leptonsektor [16].

Die Mischungsmatrizen sind als Produkt zweier unitären Matrizen selbst unitär. Im Allgemeinen hat eine unitäre $n \times n$ -Matrix n^2 unabhängige, reelle Parameter. Davon können $n(n-1)/2$ als Winkel und $n(n+1)/2$ als Phasen dargestellt werden. Für die hier betrachteten Matrizen kann die Anzahl der Phasen allerdings noch reduziert werden, da nicht alle von physikalischer Bedeutung sind. Dadurch können $2n - 1$ Phasen durch eine Phasentransformation der Quarkfelder eliminiert werden. Somit verbleiben insgesamt $(n-1)(n-2)/2$ physikalisch relevante Phasen. Im Fall von drei Fermionengenerationen hat die Mischungsmatrix den Rang drei. Damit kann die Matrix durch drei Winkel, z.B. die Eulerwinkel, und eine Phase beschrieben werden. Diese Phase spielt eine sehr interessante Rolle, denn durch ihre Anwesenheit können Kopplungen imaginäre Anteile enthalten, wodurch eine Verletzung der Ladungs- und Spiegelsymmetrie CP, die in der Natur beobachtet wird, möglich ist. Die Matrixelemente der CKM-Matrix werden anhand der Kopplungen benannt bei denen sie auftreten.

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Eine andere Beschreibung der CKM-Matrix erfolgt durch die Verwendung von Mischungswinkeln. Definiert man $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ und δ als die physikalisch relevante Phase, so erhält man

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} . \quad (1.19)$$

Durch eine Phasentransformation der Quarkfelder kann erreicht werden, dass alle oben aufgeführten Mischungswinkel im ersten Quadranten liegen. Unter Berücksichtigung der

Größenverhältnisse der Matrixelemente wird häufig auch noch eine weitere Schreibweise mit dem Namen Wolfenstein-Parametrisierung [17] verwendet. Dabei wird ausgenutzt, dass die dominierenden Elemente auf der Hauptdiagonale zu finden sind. Mit den aktuellen Daten aus der Analyse der Experimente [18] ergeben sich folgende Absolutwerte der Matrixelemente:

$$\left(\begin{array}{l|l|l} |V_{ud}| \sim 0.9741_{-0.00023}^{+0.00023} & |V_{us}| \sim 0.2263_{-0.00102}^{+0.00098} & |V_{ub}| \sim 0.0039_{-0.000095}^{+0.000102} \\ |V_{cd}| \sim 0.2261_{-0.00100}^{+0.00100} & |V_{cs}| \sim 0.9732_{-0.00024}^{+0.00023} & |V_{cb}| \sim 0.0422_{-0.00093}^{+0.00043} \\ |V_{td}| \sim 0.0082_{-0.00041}^{+0.00046} & |V_{ts}| \sim 0.0416_{-0.00090}^{+0.00043} & |V_{tb}| \sim 0.9991_{-0.000019}^{+0.000039} \end{array} \right) \quad (1.20)$$

Man definiert $\lambda = |V_{us}| \approx 0.22$ und entwickelt die Matrixelemente gemäß der oben gezeigten Daten für die Absolutwerte. Mit diesem Vorgehen erhält man bis zur Ordnung λ^4

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & \lambda^3 A(\rho - \eta(1 - \frac{\lambda^2}{2})) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \eta A^2 \lambda^4 & \lambda^2 A(1 + \eta \lambda^2) \\ \lambda^3 A(1 - \rho - \eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Die Parameter A , ρ und η sind reelle Zahlen von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$. Aus oben genannter Analyse wurden folgende Werte ermittelt:

$$A \sim 0.825_{-0.19}^{+0.011} \quad \rho \sim 0.207_{-0.043}^{+0.036} \quad \eta \sim 0.340_{-0.023}^{+0.023} \quad \text{mit } \lambda \sim 0.226_{-0.001}^{+0.001} \quad (1.22)$$

1.3 Motivation

Das Standardmodell der Teilchenphysik liefert in der momentan erreichbaren Energieskala sehr verlässliche Vorhersagen zu den Prozessen der Elementarteilchen. Wie oben beschrieben, kann die Invarianz unter lokalen Transformationen der Symmetriegruppe (1.1) durch die spontane Symmetriebrechung, auch mit massiven Teilchen, erhalten werden. Die dabei auftretende Fermionmischung wurde in der Experimenten bestätigt. Die hohe Präzision zwischen Theorie und Experiment belegt, dass das Standardmodell die Natur bis zu Energien von 200 GeV richtig beschreibt.

Allerdings gibt es auch einige Gründe die Gültigkeit des Standardmodells bei höheren Energien anzuzweifeln. Aus theoretischer Sicht ist die große Anzahl von Parametern im Standardmodell unbefriedigend. Mit den Kopplungen der Wechselwirkungen, den Parametern der Mischungsmatrix und den Massen müssen eine Vielzahl von experimentellen Daten in das Standardmodell eingebracht werden. Somit liegt die Schlussfolgerung nahe, dass eine Theorie existiert in der diese Parameter berechnet werden können. Es ist dadurch plausibel, dass das Standardmodell lediglich eine effektive Theorie darstellt, die bei den momentan erreichbaren Energien gültig ist. Ein Hinweis auf diese Möglichkeit bieten die laufenden Kopplungen. Wie schon oben kurz erläutert, hängt die Stärke der Kopplung der Eichbosonen mit anderen Teilchen von der Energie ab. Verfolgt man die Abhängigkeit zu höheren Energien, so nähern sich die drei Kopplungen einander an. Dies

könnte bedeuten, dass eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie existiert, die nur eine Wechselwirkung besitzt. Dieses Szenario wird Grand Unification genannt. Aufgrund von Symmetriebrechung bei niedrigen Energien könnte sich dann daraus die aus dem Standardmodell bekannten Wechselwirkungen ergeben. In einem solchen Modell wären dann die drei Kopplungen des Standardmodells auf eine einzige Wechselwirkung zurückzuführen. Aktuelle Rechnungen zeigen allerdings, dass sich die Kopplungen auf Grund der Abhängigkeiten im Standardmodell nicht exakt in einem Punkt schneiden. Einen Ausweg bietet hier die häufig diskutierte Erweiterung durch die Supersymmetrie [19]. Durch Postulierung von neuen fermionischen, sowie bosonischen Partnerteilchen für die Bosonen und Fermionen kann ein Schnittpunkt aller drei Kopplungen erreicht werden. Auch im Fall des Hierarchieproblems [20] kann die Supersymmetrie die auftretende Schwierigkeit beheben. Durch die Berücksichtigung der Supersymmetrie wird allerdings auch die Anzahl der Elementarteilchen verdoppelt und damit steigt die Zahl der Parameter, die aus dem Experiment bestimmt werden müssen. Außerdem wurden die postulierten Partnerpartikelchen noch nicht im Experiment entdeckt und somit ist nicht bewiesen, ob dieses Modell überhaupt in der Natur von Bedeutung ist.

Auch im Bereich der Flavourphysik gibt es ungeklärte Fragen. In den letzten Jahren hat sich in verschiedenen Experimenten die Vermutung bestätigt, dass auch Neutrinos eine kleine Masse besitzen [21, 22, 23]. Dies führt, genau wie oben bei den Quarks, zu einer Mischungsmatrix im Leptonsektor. Interessant dabei ist wie die immensen Massendifferenzen, die einen Bereich von mehreren Größenordnungen abdecken, im Standardmodell entstehen. Außerdem könnten die Neutrinos, da sie keine elektrische Ladung besitzen, ihr eigenes Antiteilchen sein. Damit wäre alternativ eine Beschreibung dieser Teilchen mit Majoranaspinoren anstelle von Diracspinoren möglich [24]. Diese Änderung würde sich unter anderem durch das Auftreten von neutrinolosen Doppelbetazerfällen auswirken. Experimenten, z. B. [25], die auf diese Weise die Masse der Neutrinos bestimmen möchten, ist es allerdings noch nicht gelungen einen derartigen Zerfall nachzuweisen. Desweiteren ist der Prozess der spontanen Symmetriebrechung noch nicht vollständig verifiziert. Bisher fehlt beispielsweise noch jede Spur eines Higgs-Bosons. Experimentelle und theoretische Untersuchungen konnten die möglichen Werte für die Masse dieses Teilchen deutlich einschränken [26], aber die momentanen Experimente überschreiten gerade erst die untere Schwelle dieses Massenintervalls. Wenn in zukünftigen Experimenten ein Higgs-Boson gefunden wird, könnten die Kopplungen des Higgs an die entsprechenden Teilchen gemessen werden. Damit kann die Richtigkeit des Ansatz (1.11) verifiziert und geklärt werden, ob die Wechselwirkung zwischen Higgs-Boson und Fermionen nicht durch eine kompliziertere Anordnung der jeweiligen Felder beschrieben werden muss. Dies hätte auf Grund der Konstruktion Auswirkungen auf die Massenmatrix und damit auch auf die Mischung der Quarks. Da allerdings momentan die Existenz des oben gezeigten Higgs-Bosons nicht bewiesen ist, befinden sich eine Reihe von Modellen im Umlauf, die dieses Boson auf eine andere Weise implementieren und damit Austauschpartikelchen mit unterschiedlichen Eigenschaften postulieren. Neben diesen Punkten gibt es noch andere Bereiche in denen das Standardmodell zumindest kritisch geprüft wird. So werden Rechnungen mit der Annah-

me der Supersymmetrie durchgeführt um deren Auswirkungen bei den, im Experiment erreichbaren Energien zu erhalten. Allerdings werden zur Berechnung von supersymmetrischen Observablen eine Vielzahl von Parametern benötigt, die momentan überhaupt nicht oder nicht präzise aus experimentellen Daten ermittelt werden können. Zudem sind bis jetzt noch keine Hinweise gefunden worden, welche Positionen die Partnerteilchen im Massenspektrum einnehmen und somit sind viele verschiedene Szenarien denkbar. Aus experimenteller Sicht werden die Fragen bezüglich der Supersymmetrie und des Higgs-Bosons erst am neuen Beschleuniger am CERN, dem LHC, beantwortet. Trotzdem ist es bereits möglich durch den Vergleich von präzisen Rechnung im Standardmodell mit den experimentellen Daten Diskrepanzen aufzudecken. Diese Abweichungen würden die möglichen Erweiterungen des Standardmodells einschränken und noch vor der Inbetriebnahme der neuen Beschleuniger klären, welche Eigenschaften die Theorie bei höheren Energien besitzen muss.

Im Kontext von neuer Physik rückte in den letzten Jahren die Physik der b-Quarks in den Mittelpunkt. So konnte beim Zerfall von B-Mesonen die, bereits für diese Teilchen vorhergesagte, Verletzung der CP-Symmetrie gemessen werden [27]. Dieser bisher nur bei Prozessen von Kaonen beobachtete Effekt ist ein wichtiger Bestandteil bei der Überprüfung der Mischungsmatrix. Außerdem ermöglicht die Verletzung der Symmetrie ein Ungleichgewicht bei der Produktion von Materie und Antimaterie und kann grob erklären, weshalb im Universum fast ausschließlich Materie und kaum Antimaterie zu finden ist. Der gefundene Wert im Standardmodell ist allerdings für die heutigen Verhältnisse im Universum zu klein. Auch bei der Mischung der Quarks könnten sich Anzeichen von neuer Physik zeigen. Hierzu wurde in den letzten Jahren eine Vielzahl von Möglichkeiten [28] betrachtet um den Ansatz der CKM-Matrix zu testen. In den meisten Fällen wird untersucht, ob es sich bei der Mischungsmatrix tatsächlich um eine unitäre Matrix handelt. Sollte sich herausstellen, dass dies nicht der Fall ist, müssen noch weitere Prozesse an der Flavormischung beteiligt sein. Innerhalb der B-Physik hat man durch Zerfälle von B-Mesonen Zugriff auf die Matrixelemente V_{ub} und V_{cb} . Zudem können anhand der Oszillationen von B_d - und B_s -Mesonen die Elemente V_{td} und V_{ts} bestimmt werden. Setzt man die Unitarität der CKM-Matrix voraus, so ergeben sich Bedingungen zwischen den Elementen der Matrix. Eine dieser Relationen beinhaltet alle Matrixelemente, die im Rahmen der Physik der B-Mesonen auftreten können und eignet sich somit hervorragend für die Überprüfung des Ansatz der Mischung im Standardmodell:

$$V_{ub}V_{ud}^* + V_{cb}V_{cd}^* + V_{tb}V_{td}^* = 0 \quad . \quad (1.23)$$

Dabei sind die Matrixelemente V_{ud} , V_{cd} und V_{tb} schon sehr genau bestimmt worden [1], so dass die restlichen Elemente allesamt aus Experimenten mit B-Mesonen bestimmt werden können. Betrachtet man die Matrixelemente als komplexe Vektoren, so lässt sich die Unitaritätsbedingung (1.23) in der komplexen Ebene als Dreieck darstellen. Dies ist in Abbildung 1.1 gezeigt. Die Prüfung der Unitarität kann durch eine kombinierte Messung der Seitenlängen und Winkel erfolgen. In den letzten Jahren wurden eine Vielzahl von Prozessen zur Ermittlung der Seiten bzw. der Winkel vorgeschlagen. An den speziell für

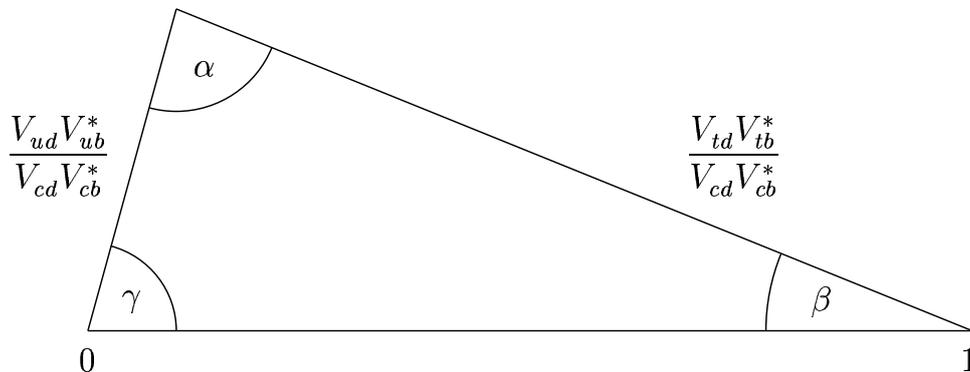


Abbildung 1.1: Unitaritätsdreieck

Experimente mit B-Mesonen gebauten Beschleunigern Belle [29] und Babar [30] wurden eine große Anzahl dieser Zerfallskanäle untersucht und Daten gesammelt. Die momentane Situation bei der Bestimmung des Unitaritätsdreiecks ist in Abbildung 1.2 und 1.3 zu sehen. In diesem Plot wurde die Wolfensteinparametrisierung verwendet. Für diese Darstellung lautet (1.23) in führender Ordnung

$$V_{ub} - \lambda V_{cb} + V_{td}^* = 0 \quad (1.24)$$

mit

$$V_{cb} = A\lambda^2, \quad V_{ub} = \lambda^3 A(\rho - i\eta), \quad V_{td} = \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) \quad . \quad (1.25)$$

Der Ansatz der Flavormischung des Standardmodells, der in diesem Kapitel vorgestellt wurde, stimmt gut mit den Daten überein. Allerdings können noch immer kleine Abweichungen auftreten, so dass kein Dreieck zustande kommt und die CKM-Matrix nicht unitär ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Spektrum der hadronisch invarianten Masse des inklusiven Zerfalls $B \rightarrow X_c \ell \nu$ errechnet. Die Momente dieses Spektrums werden verwendet um Parameter zu bestimmen, die für die Ermittlung von CKM-Matrixelementen wichtig sind. Die Ungenauigkeit der Matrixelemente wird in naher Zukunft hauptsächlich durch theoretische Fehler zustande kommen. Durch die genaue Kenntnis des hadronischen Spektrums, gerade bei kleinen invarianten Massen, können Momente in Abhängigkeit von einer oberen Integrationsgrenze berechnet werden. Durch diesen Schnitt im Spektrum kann die Präzision von experimentellen Daten, vorallem von höheren Momenten und somit auch die der Parameter verbessert werden. Dies führt zu einer gesteigerten Genauigkeit der CKM-Matrixelemente, die in die Konstruktion des Unitaritätsdreiecks eingehen. Dadurch können Diskrepanzen zwischen dem Standardmodell und den gemessenen Daten gefunden werden, die über die Eigenschaften einer neuen Theorie Aufschluss geben und somit klären, welche Erweiterungen tatsächlich nötig sind um die Physik jenseits des Standardmodells zu beschreiben.

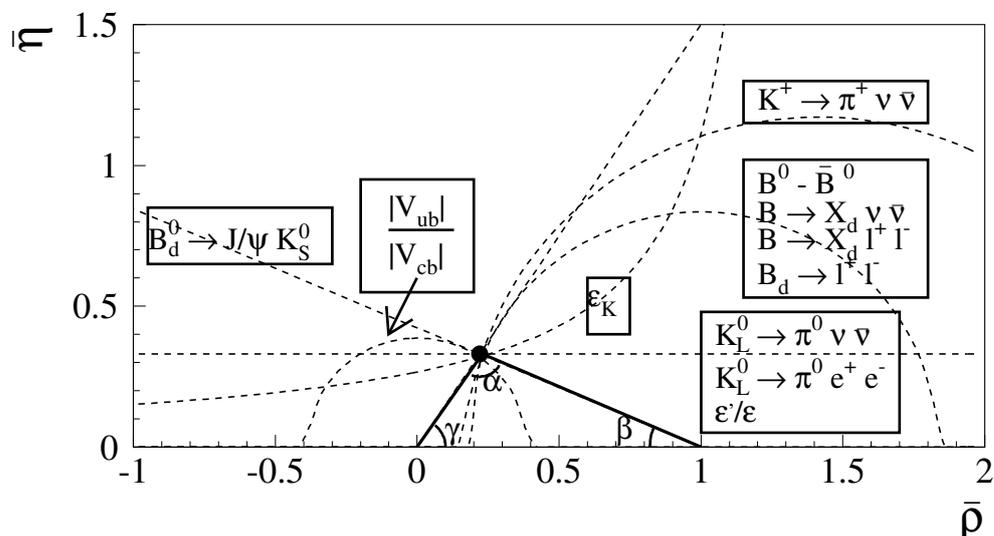


Abbildung 1.2: Zerfallsprozesse, die zur Überbestimmung des Unitaritätsdreiecks verwendet werden [31]

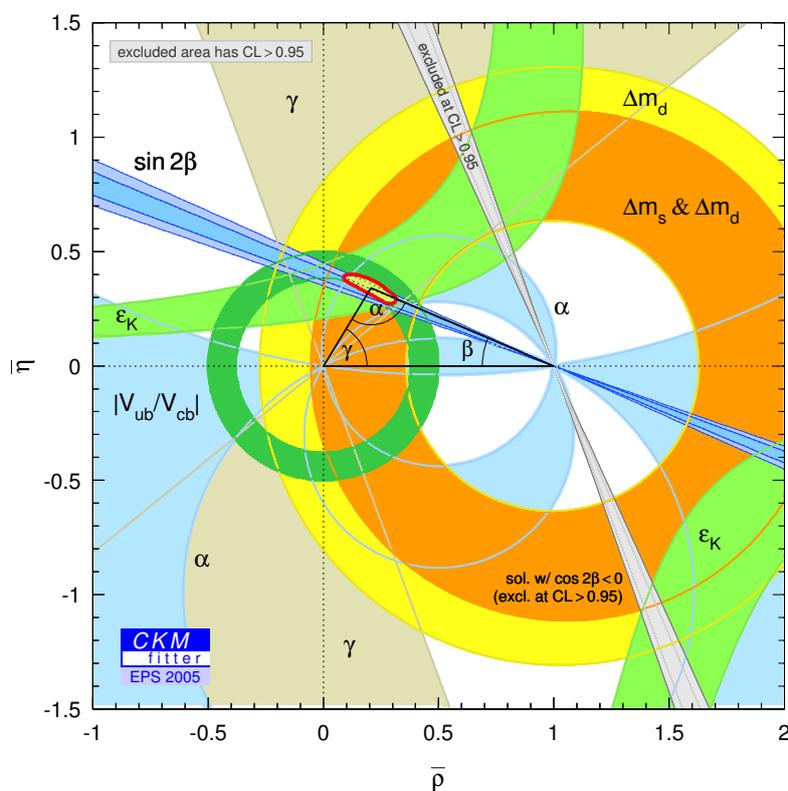


Abbildung 1.3: Bestimmung des Unitaritätsdreiecks aus aktuellen experimentellen Daten [18]

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Im folgenden Kapitel wird das theoretische Werkzeug erläutert, das notwendig ist, Zerfälle von B-Mesonen zu beschreiben. Dabei stehen die Methoden im Vordergrund, die eine Diskussion von inklusiven Zerfällen erlauben. Unter inklusiven Zerfällen versteht man die Summe aller Zerfallskanäle, die einem partonischen Prozess zugeordnet werden können. In dieser Arbeit wird dabei hauptsächlich der semileptonische Zerfall eines b-Quarks in ein c-Quark und ein Lepton-Neutrino-Paar betrachtet. Inklusive Prozesse schwerer Quarks können in der Theorie gut beschrieben werden. Wie unten aufgezeigt wird, kann durch das optische Theorem die Übergangsamplitude durch den Imaginärteil eines Vorwärtsmatrixelementes ersetzt werden. Dadurch verlieren die Einzelheiten der Zerfallsprodukte, wie die Hadronisierung der im Prozess entstandenen Quarks, ihre Bedeutung. Somit kann im Vergleich zu exklusiven, also einzelnen, Zerfallskanälen die theoretische Genauigkeit erheblich verbessert werden. Allerdings besteht bei dieser Methode die Schwierigkeit, dass das Sammeln von inklusiven Daten im Experiment wesentlich aufwendiger ist. Die Genauigkeit der Messung der inklusiven Zerfallsbreite hängt davon ab, ob im Detektor tatsächlich alle, vom Prozess stammende Teilchen detektiert werden. So sind z.B. Photonen mit niedriger Energie, die von dem untersuchten Zerfallsprozess stammen, sehr schwer von Photonen zu unterscheiden, welche durch andere unerwünschte Reaktionen entstehen. Somit enthalten die gemessenen inklusiven Raten zwangsläufig einen höheren Fehler als exklusive Raten. In den letzten Jahren wurden Möglichkeiten entwickelt um die inklusive Zerfälle mit kleineren Ungenauigkeiten zu bestimmen. Durch den Bau und die Inbetriebnahme von speziell auf Zerfälle von B-Mesonen zugeschnittenen Experimenten in Japan (Belle) und den USA (Babar) konnte die Genauigkeit der experimentellen Daten in der B-Physik nochmals gesteigert werden. So ist es nicht verwunderlich, dass beispielsweise bei der Bestimmung von CKM-Matrixelementen in absehbarer Zeit die auftretende Ungenauigkeit hauptsächlich von den theoretischen Methoden stammen wird. Es besteht dadurch das Interesse, das theoretische Vorgehen zu verfeinern bzw. neue Verfahren bei Zerfällen von B-Mesonen anzuwenden.

B-Mesonen bestehen aus einem b-Quark, manchmal auch beauty- oder bottom-Quark

genannt, und einem weiteren Quark, ausgenommen b- oder t-Quark. Die Hadronen mit einem b-Quark nehmen eine besondere Stellung ein. Das b-Quark ist das schwerste starkwechselwirkende Teilchen, das zusammen mit anderen Quarks hadronisieren kann. Das t-Quark, das mehr als die 30-fache Masse des b-Quarks besitzt, hat eine zu kurze Lebensdauer, so dass es kein Bindungszustand realisiert werden kann. Wie in Kapitel 1 erläutert, existieren in einem Meson zusätzlich zu den zwei Quarks noch eine Anzahl von Gluonen und Quark-Antiquarkpaare. Die Wechselwirkungen dieser Teilchen sind dabei durch die Größenordnung der starken Kopplung nicht unterdrückt und tragen somit einen wesentlichen Teil zur Dynamik der Mesonen bei. Die Masse der B-Mesonen, die durch die Relativitätstheorie auch von den Bindungsenergien innerhalb der Mesonen abhängt, wurde zu 5.27 GeV bestimmt [1]. Auf Grund der Anzahl der Wechselwirkungen der Quarks und Gluonen in den Hadronen, enthalten die gemessenen Werte der Masse des b-Quarks perturbative Ungenauigkeiten, die von den jeweiligen Rechenverfahren abhängen, siehe z.B. [32]. Subtrahiert man das Intervall der möglichen Massen des b-Quark von der Masse des B-Mesons, so erhält man einen Wert zwischen 0.5 GeV und 1 GeV. Dies ist ein entscheidender Unterschied zu den Hadronen mit leichteren Quarks, wie z.B. den Pionen. Während bei diesen Hadronen die Bindungseffekte das Verhalten dominieren, spielt das b-Quark durch seine große Masse die bestimmende Rolle bei der Dynamik der B-Mesonen. Die Bewegung des B-Mesons und des b-Quarks ist somit fast identisch. Für die detaillierte theoretische Beschreibung des Zerfalls ist allerdings neben der gesamten Bewegung des Mesons auch die Wechselwirkung zwischen b-Quark und dem zweiten, leichten Quark von Bedeutung. Auf Grund der verschiedenen Größenordnungen der Bindungsenergie und der Masse der b-Quarks kann eine effektive Theorie verwendet werden. Hierzu werden die Anteile, die durch die Masse des b-Quarks zur Dynamik des gesamten Systems beitragen, entfernt. Dadurch erhält man ein Feld, das nur noch die Kopplung an das leichte Quark innerhalb des Mesons beschreibt. Physikalisch wurde das b-Quark in eine statische Quelle der starken Wechselwirkung verwandelt [33]. Dies ist gleichbedeutend mit der Betrachtung des statischen Grenzfalles in dem die Masse des b-Quarks als unendlich schwer angenommen wird. Die Methode steht in Analogie zu der Beschreibung des Wasserstoffatoms, bei dem das Proton die Rolle des b-Quarks übernimmt. Die Abhängigkeit von der Masse ist dabei weiterhin in einer Entwicklung, deren Entwicklungskoeffizient $1/m_b$ ist, enthalten. Die Herleitung, sowie ausgewählte Ergebnisse dieser effektiven Theorie mit dem Namen Heavy Quark Effective Theory werden im nächsten Unterkapitel erläutert.

Durch die Verwendung der effektiven Theorie kann die Berechnung der Zerfalls, wie unten gezeigt wird, zwar vereinfacht werden, aber die Bestimmung des Vorwärtselementes, das durch die Verwendung des optischen Theorems auftritt, kann noch nicht durchgeführt werden. Die Zustände des Matrixelements repräsentieren ein B-Meson und die Bindung der Quarks kommt durch Anteile der starken Wechselwirkung zustande, die sich durch eine lange Reichweite auszeichnen. Gerade diese Anteile sind aber mit der Störungstheorie nicht greifbar. Deshalb wird eine Operatorproduktentwicklung durchgeführt, mit deren Hilfe die Komponenten der starken Wechselwirkung mit unterschiedlichen Reichweiten getrennt werden. Die Anteile mit kurzer Reichweite, die bei hohen Energien auftreten, ge-

hen bei dieser Entwicklung in Koeffizienten über. Diese Koeffizienten können bei Zerfällen von B-Mesonen mit perturbativen Rechenstechniken ermittelt werden, wodurch der theoretische Fehler dieser Beiträge kontrollierbar wird. Die Wechselwirkungsterme mit langer Reichweite, die niederenergetische Abläufe beschreiben, treten in Form von Operatoren auf. Die Berechnung des Vorwärtsmatrixelements lässt sich mit dieser Entwicklung in zwei Schritte unterteilen. Zuerst werden die Koeffizienten bestimmt. In dieser Arbeit geschieht dies in führender Ordnung der Störungstheorie. In einem zweiten Schritt werden dann die Matrixelemente der Operatoren aus der Entwicklung mit den Zuständen des B-Mesons berechnet. Diese Elemente werden als hadronische Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bezeichnet.

Da die hadronischen Parameter aus Operatoren entstehen, welche die niederenergetischen Wechselwirkungen beschreiben, können sie nicht mit Hilfe der Störungstheorie bestimmt werden. Es existieren zwar Methoden, die eine Berechnung innerhalb der Theorie erlauben, doch zeichnen sich deren Resultate durch große Ungenauigkeiten aus. Deshalb werden bevorzugt experimentelle Daten verwendet um die Werte der Parameter zu bestimmen. Da die Messungen der totalen Zerfallsrate schon für die Bestimmung von CKM-Matrixelementen verwendet wird, werden hierzu die an den Experimenten ermittelten Momente von Zerfallsspektren benutzt. Als Beispiele sind hier das Energiespektrum des geladenen Leptons oder das Spektrum der hadronisch invarianten Masse in semileptonischen Zerfällen zu nennen. Durch Schnitte im Spektrum, d.h. durch Vernachlässigung bestimmter Daten, kann die Genauigkeit der Momente gesteigert werden. Diese Präzision kann aber nur dann genutzt werden, wenn in der theoretischen Vorhersage dieselben Schnitte berücksichtigt werden können. Dies ist aber in den meisten bereits berechneten Zerfallsspektren nicht möglich. Der Grund hierfür ist die Verwendung einer bestimmten Form der Operatorproduktentwicklung, der $1/m_b$ -Entwicklung, die innerhalb dieses Kapitels vorgestellt wird. Diese Entwicklung erzeugt ein tree-level Spektrum, das sich durch das Auftreten von Deltafunktionen und deren Ableitungen auszeichnet. Da diese Deltafunktionen physikalisch nicht interpretiert werden können, kann nur das gesamte Spektrum zur Berechnung von Momenten genutzt werden. Dieses Problem kann durch die Verwendung einer modifizierten Operatorproduktentwicklung, der Lichtkegelentwicklung, behoben werden. Als Ergebnis dieser Entwicklung erhält man ein glattes, physikalisch sinnvolles Spektrum mit dem die Berechnung von Momenten, die sich auf ein beschnittenes Spektrum beziehen, möglich ist. Dadurch kann die Präzision der Bestimmung der hadronischen Parameter weiter gesteigert werden.

Eine verringerte Ungenauigkeit der Werte der hadronischen Parameter ist besonders für die Ermittlung von CKM-Matrixelementen wichtig. Bei den Elementen V_{ub} und V_{cb} , die durch die Betrachtung von semileptonischen Zerfällen bestimmt werden können, dominiert in naher Zukunft der theoretische Fehler. Damit eine Verbesserung erzielt werden kann, ist es notwendig die Präzision sämtlicher Bestandteile, z.B. der Strahlungskorrekturen und der hadronischen Parameter, zu erhöhen. Wie in [34] beschrieben wird, sind die theoretischen Methode soweit verfeinert worden, dass eine Bestimmung des Matrixelements V_{cb} mit einem relativen theoretischen Fehler von etwa 1% möglich ist.

Das nächste Unterkapitel beschreibt die Herleitung der Heavy Quark Effective Theory und einige, für diese Arbeit relevante, Ergebnisse. Darauf folgt ein Abschnitt über die Operatorproduktentwicklung, wobei sich die Erläuterungen stark an dem für die Rechnungen relevanten Fall orientieren werden. Dieses Kapitel wird dann durch die Vorstellung der Lichtkegelentwicklung abgeschlossen.

2.1 Heavy Quark Effective Theory

Innerhalb eines B-Mesons trägt das b-Quark den größten Impulsanteil. Der Zerfall des Mesons erfolgt somit in ähnlicher Weise wie der partonische Zerfall eines b-Quarks. Die Details des Zerfalls, die für eine präzise Analyse des Standardmodells benötigt werden, sind in den Bindungseffekten im Meson verborgen. Deshalb wird auf den folgenden Seiten die starke Wechselwirkung zwischen den beiden Quarks innerhalb des Mesons genauer betrachtet. Aus der Massendifferenz kann abgelesen werden, dass diese Wechselwirkung im Falle eines B-Mesons zu einer Bindungsenergie von rund 0.5 GeV führt. Dieser Zahlenwert ist in etwa so groß wie die Energieskala der nicht-perturbativen starken Wechselwirkung Λ_{QCD} . Bei Energien, die etwas höher, etwa 1 GeV, liegen, kann die Störungstheorie angewandt werden. Unterhalb dieser Schwelle kann eine effektive Theorie ermittelt werden, die für schwere Quarks gültig ist. In der folgenden Arbeit wird ein Quark als schwer angesehen, wenn für seine Masse gilt $m \gg \Lambda_{QCD}$. Im Fall eines b-Quarks ist diese Ungleichung erfüllt und der Impuls des Quarks kann als

$$p_b^\mu = m_b v^\mu + k^\mu \quad (2.1)$$

geschrieben werden. Das b-Quark bewegt sich damit bis auf die kleine Abweichung k^μ genau wie das Meson mit der Geschwindigkeit v^μ , die durch den Mesonimpuls $p_B^\mu = m_B v^\mu$ definiert ist. Der Restimpuls k^μ ist folglich für die Bildung des Bindungszustands verantwortlich. Das Ziel lautet nun, eine effektive Theorie zu finden, in der die Dynamik der Quantenfelder durch den Restimpuls k^μ beschrieben wird. Hierzu betrachtet man die Lagrangedichte eines freien b-Quarks.

$$\mathcal{L} = \bar{b} (i\not{D} - m_b) b. \quad (2.2)$$

In der Fourierdarstellung des Quantenfeldes sieht man, dass durch eine Phasentransformation bestimmte Anteile des Impuls zwischen Teilchen und Antiteilchen umverteilt werden kann. So erreicht man durch die Transformation

$$b(x) = e^{-im_b v \cdot x} b_v(x) \quad , \quad (2.3)$$

dass die Teilchen, die durch das Feld mit dem Index v beschrieben werden, nur noch von dem Restimpuls k^μ abhängen. Dies würde prinzipiell schon ausreichen um Bindungseffekte innerhalb eines B-Mesons zu beschreiben. Doch trotz der Phasentransformation enthält das Feld b_v noch immer eine Abhängigkeit von der Quarkmasse m_b , die noch entfernt

werden kann. Bis zu diesem Punkt sind die Felder b_v im gesamten Standardmodell gültig. Mit den folgenden Schritten wird der Übergang zu einer effektiven Theorie vollzogen, die nur noch für Energien von der Größenordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD})$ gültig ist. Das Quantenfeld wird hierzu mittels Projektoren, P_+ und P_- , in zwei Anteile aufgespalten.

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + \not{v}) \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - \not{v}) \quad (2.4)$$

Die zwei neuen Felder

$$\begin{aligned} h_v &= P_+ b_v(x) \\ H_v &= P_- b_v(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

entsprechen im Ruhesystem des Quarks, d.h. $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$, Teilchen und Antiteilchen. Sie besitzen folgende Eigenschaften, die hauptsächlich auf die Projektoren zurückzuführen sind:

$$b_v = h_v + H_v \quad , \quad \not{v} h_v = h_v \quad , \quad \not{v} H_v = -H_v \quad , \quad h_v = P_+ b_v \quad , \quad H_v = P_- b_v \quad (2.6)$$

Eingesetzt in die Lagrangedichte erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{b} (\not{v} \not{D} - m_b) b \\ &= (P_+ + P_-) \bar{b}_v e^{im_b v \cdot x} (\not{v} \not{D} - m_b) e^{-im_b v \cdot x} (P_+ + P_-) b_v \\ &= (\bar{h}_v + \bar{H}_v) (\not{v} \not{D} - m_b (1 - \not{v})) (h_v + H_v) \\ &= \bar{h}_v \not{v} \not{D} h_v - m_b \bar{h}_v \underbrace{(1 - \not{v}) h_v}_{=0} + \bar{h}_v \not{v} \not{D} H_v + \bar{H}_v \not{v} \not{D} h_v - \bar{H}_v (2m_b - \not{v} \not{D}) H_v, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Damit wurde das Quarkfeld b_v in einen Teil mit schweren, H_v , und leichten Freiheitsgraden, h_v , aufgespalten. Die Ergebnisse können noch weiter vereinfacht werden, indem man die Richtung senkrecht zur Bewegungsrichtung des Quarks betrachtet. Ein beliebiger Vektor kann nun durch Projektionen auf die Richtungen, die senkrecht und parallel zu v^μ stehen, beschrieben werden. Die Komponente senkrecht zur Geschwindigkeit lautet

$$a_\perp^\mu = a^\mu - v^\mu (v \cdot a) \quad . \quad (2.8)$$

Nun können die Gammamatrizen γ^μ , die zwischen schweren und leichten Felder stehen durch senkrechte Vektoren ersetzt werden, da der Term proportional zu zur Geschwindigkeit v^μ verschwindet. Für die Terme mit Gammamatrizen zwischen zwei gleichen Feldern gilt

$$\bar{h}_v \gamma^\mu h_v = \bar{h}_v v^\mu h_v \quad , \quad \bar{H}_v \gamma^\mu H_v = -\bar{H}_v v^\mu H_v \quad . \quad (2.9)$$

Dadurch erhält die Lagrangedichte folgende Form:

$$\mathcal{L} = \bar{h}_v (i v \cdot D) h_v + \bar{h}_v \not{v} \not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v \not{v} \not{D}_\perp h_v - \bar{H}_v (2m_b + (i v \cdot D)) H_v \quad (2.10)$$

Die schweren Freiheitsgrade können nun in einem nächsten Schritt ausintegriert werden. Dieser Ausdruck stammt aus dem Pfadintegralformalismus. Hier wird das Funktional, das

die Greenschen Funktionen liefert, über die Komponenten des schweren Feldes integriert. Den gleichen Effekt erhält man auch indem man aus der Lagrangedichte die Bewegungsgleichungen für das Feld H_v ermittelt und diese dann in Gleichung (2.10) einsetzt. Durch die Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt sich

$$H_v = \frac{1}{2m_b + (v \cdot D)} \not{D}_\perp h_v \quad . \quad (2.11)$$

Dieses Resultat wird nun wieder in die Lagrangedichte eingesetzt. Dadurch erhält man eine nicht-lokale Theorie.

$$\mathcal{L} = \bar{h}_v (v \cdot D) h_v + \bar{h}_v \not{D}_\perp \frac{1}{2m_b + v \cdot D} \not{D}_\perp h_v \quad (2.12)$$

Auf Grund der Phasentransformation beschreibt das Feld h_v ein statisches Quark mit dem Restimpuls k^μ . In einem B-Meson ist dieser Impuls aber von der Größenordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD})$ und somit viel kleiner als die Masse des b-Quarks. Die kovariante Ableitung repräsentiert den Impulsoperator in der Ortsdarstellung und ist damit, angewandt auf ein Quarkfeld h_v , ebenfalls von der Größenordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD})$. Somit kann der Nenner des zweiten Terms entwickelt werden. In führender Ordnung erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{h}_v (v \cdot D) h_v + \bar{h}_v \frac{\not{D}_\perp \not{D}_\perp}{2m_b} h_v + \dots \\ &= \bar{h}_v (v \cdot D) h_v + \frac{1}{2m_b} \bar{h}_v (\not{D})^2 h_v + \frac{1}{2m_b} \bar{h}_v s^{\mu\nu} G_{\mu\nu} h_v + \dots \\ &= \bar{h}_v (v \cdot D) h_v + \delta\mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit $s^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}$ und dem Gluon-Feldstärketensor $-igG_{\mu\nu} = [iD_\mu, iD_\nu]$. Hier wurden die Kennzeichen für die senkrechten Komponenten entfernt, da alle Beiträge in Richtung der Geschwindigkeit v^μ auf Grund von $s^{\mu\nu}$ verschwinden und die Anteile proportional zu v^μ im quadratischen Term, wie weiter unten zu sehen ist, auf Grund der Bewegungsgleichungen keinen Beitrag liefern. Dies ist die Lagrangedichte der Heavy Quark Effective Theory (HQET) [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 32, 42, 43]. Der führende Term wird zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen verwendet, während die weiteren Terme wie Wechselwirkungen behandelt werden. Betrachtet man den Fall eines unendlich schweren Quarks, $m_b \rightarrow \infty$, so verschwinden alle Beiträge bis auf den der führenden Ordnung. Dieser Term unterscheidet weder den Flavour des Quarks, beispielsweise durch die Masse, Ladung, etc., noch ist der Spin des Quarks von Bedeutung. Dies führt zu der Heavy Flavour- und der Heavy Spin-Symmetrie. Diese wird häufig bei exklusiven Zerfällen ausgenutzt um beispielsweise Zerfälle von B-Mesonen mit denen von D-Mesonen in Verbindung zu bringen. Diese Symmetrien werden allerdings schon durch die Terme der nächsten Ordnung in der Lagrangedichte durch die Abhängigkeit von der Masse und das Auftreten der Diracmatrizen gebrochen.

Die Felder der HQET werden in den Rechnungen mit den entsprechenden HQET Zuständen benutzt. Diese Zustände sind normiert und beinhalten alle Wechselwirkungen der effektiven Lagrangedichte. In der vorliegenden Arbeit werden die HQET Zustände nicht durch

eine besondere Schreibweise gekennzeichnet, da alle Rechnungen im Rahmen der HQET durchgeführt werden.

Ein für diese Arbeit relevantes Ergebnis der HQET ist die Berechnung der Massenunterschiede zwischen Hadronen und Quarks. Die Masse des Hadrons kann ebenfalls als eine Entwicklung in der Quarkmasse geschrieben werden. Wie in [44] nachzulesen ist, muss dazu das Matrixelement der Wechselwirkungsterme der Lagrangedichte berechnet werden. Wie oben erwähnt ist es momentan nicht möglich diese Matrixelemente analytisch anzugeben. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/m_b^3)$ wurden deshalb folgende Parameter definiert [44, 45]:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \langle B | \bar{h}_v (\not{D})^2 h_v | B \rangle \\
3\lambda_2 &= \langle B | \bar{h}_v s^{\mu\nu} G_{\mu\nu} h_v | B \rangle \\
\frac{1}{3}\rho_1(g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta)v_\mu &= \langle B | \bar{h}_v (\not{D})_\alpha (\not{D})_\mu (\not{D})_\beta h_v | B \rangle \\
\frac{1}{2}\rho_2 \epsilon_{\nu\alpha\beta\delta} v^\nu v_\mu &= \langle B | \bar{h}_v (\not{D})_\alpha (\not{D})_\mu (\not{D})_\beta \gamma_5 h_v | B \rangle
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Auf Grund der Definitionen werden die Parameter λ_1 und λ_2 oft die kinetische Energie bzw. das chromomagnetische Moment des schweren Quarks genannt. Da λ_2 vom Spin des B-Mesons abhängt, kann dieser Parameter durch den Massenunterschied zwischen den B- und B*-Mesonen ermittelt werden. Als Zahlenwert ergibt sich $\lambda_2 = 0.12 \text{ GeV}^2$. Die Größe von λ_1 kann nicht so einfach aus einem Experiment extrahiert werden. Theoretische Abschätzungen ergeben einen relativ ungenauen Wert von $\lambda_1 \approx (0.25 \pm 0.1) \text{ GeV}^2$ [44, 46]. Mit diesen Größen kann die Masse eines Mesons mit einem schweren Quark als eine Entwicklung in der Quarkmasse geschrieben werden.

$$m_B = m_b + \Lambda - \frac{1}{2m_b}(\lambda_1 + 3\lambda_2) + \dots \tag{2.15}$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden alle Korrekturterme zur Quarkmasse der Einfachheit im Parameter Λ absorbiert, so dass gilt

$$m_B = m_b + \tilde{\Lambda} \quad . \tag{2.16}$$

Im Folgenden wird die Tilde unterdrückt, da Λ in sämtlichen Rechnungen die Korrekturterme enthält. Eine weitere interessante Eigenschaft der HQET ist die Bewegungsgleichung für das Feld h_v . Da alle Terme in der Lagrangedichte, die eine Abhängigkeit von der Quarkmasse aufweisen, wie Wechselwirkungsterme behandelt werden, lautet die Bewegungsgleichung

$$(v \cdot D)h_v = 0 \tag{2.17}$$

Diese Gleichung hat weitreichende Folgen für die Parametrisierung von Matrixelementen. Beispielsweise kann ein Matrixelement eines HQET-Operators mit einer kovarianten Ableitung

$$\langle B | \bar{h}_v \not{D} h_v | B \rangle = A v^\mu \tag{2.18}$$

nur durch eine Konstante und die Geschwindigkeit v^μ des Mesons beschrieben werden. Die Konstante kann bestimmt werden indem die Gleichung mit v_μ kontrahiert wird. Dabei kann allerdings die Bewegungsgleichung ausgenutzt werden, so dass die Konstante verschwinden muss. Somit liefern die Matrixelemente dieses Operators generell keinen Beitrag. Dieses Resultat wirkt sich auf die Berechnung von inklusiven Zerfallsspektren aus. Da die Operatoren mit einer kovarianten Ableitung jeweils in Verbindung mit $1/m_b$ auftreten und deren Matrixelement verschwindet, existieren keine Korrekturen, die durch die erste Potenz der Masse unterdrückt sind. Dass diese Feststellung für alle Prozesse, die innerhalb der HQET berechnet werden, gilt, zeigt das Theorem [47].

2.2 Operatorproduktentwicklung

In Quantenfeldtheorien muss zur Berechnung von Prozessen oftmals das Produkt aus zwei Operatoren betrachtet werden. Dabei handelt es sich um lokale Operatoren, d.h. die Quantenfelder aus denen der jeweilige Operator aufgebaut ist, werden alle an der selben Raumzeitkoordinate ausgewertet. Das Produkt der Operatoren wird in diesem Zusammenhang keine lokale Größe beschreiben, da die Operatoren an unterschiedlichen Punkten in der Raumzeit auftreten. Da das Standardmodell invariant unter Translations-Transformationen ist, spielt allerdings nur der relative Abstand der beiden Operatoren eine Rolle. Unter der Annahme, dass dieser Abstand klein ist, können, wegen der Verbindung zwischen Orts- und Impulskoordinaten, nur hochenergetische Teilchen die Wirkung der beiden Operatoren einzeln auflösen. Ein niederenergetisches Teilchen hingegen wird die Wirkung eines effektiven Operators erfahren. Dies ist Teil eines wesentlich allgemeineren Ergebnisses, das Wilson bereits 1969 herleitete [10]. Demnach ist ein Produkt aus Operatoren äquivalent zu einer Summe aus lokaler Operatoren mit geeigneten Koeffizienten.

$$\mathcal{O}_a(x)\mathcal{O}_b(0) = \sum C_{abi}(x)\mathcal{O}_i(0) \quad (2.19)$$

Die Koeffizienten $C_{abi}(x)$ werden Wilsonkoeffizienten genannt. Die Summe beinhaltet alle lokalen Operatoren, die aus den Quantenfeldern, die prinzipiell an dem Prozess beteiligt sind, konstruiert werden können. So treten für ein Produkt aus zwei Quarkströmen die Felder von Quarks und Gluonen in den lokalen Operatoren auf. Da die Felder eine bestimmte Massendimension besitzen, können auch die Operatoren danach kategorisiert werden. Dies ist sinnvoll, da die linke Seite von (2.19) eine feste Dimension besitzt. Die Wilsonkoeffizienten müssen den Unterschied in der Dimension der beiden Seiten der Gleichung aufheben. Auch die gesamte Abhängigkeit der Raumzeitkoordinate x^μ ist in den Koeffizienten zu finden. Anhand einer Dimensionsanalyse kann gezeigt werden [2], dass sich die Koeffizienten für kleine Abstände x bis auf Logarithmen wie

$$C_{abi}(x) \sim |x|^{d_i-d_a-d_b} \quad (2.20)$$

verhalten. Auf Grund dieser Struktur ergeben sich für kleine Abstände x^μ die größten Beiträge für die Operatoren mit den kleinsten Dimensionen d_i . Der Operator mit der kleinsten

Dimension, der für diese Arbeit relevant ist, besteht aus zwei Quarkfeldern. Diese haben jeweils die Massendimension $3/2$ und somit trägt der führende Operator die Dimension 3. Den nächsten Operator erhält man durch das Einfügen einer kovarianten Ableitung, die die Massendimension 1 hat. Mit diesem Prinzip kann eine Basis von Operatoren aufgebaut werden über die sich die Summe von (2.19) erstreckt. Unter der Annahme, dass ein niederenergetisches Teilchen mit dem lokalen Operator wechselwirkt, sind die kovarianten Ableitungen von der Größenordnung des Impuls des Teilchens. Das Produkt der Wilsonkoeffizienten mit den Matrixelementen der lokalen Operatoren ist von der Größenordnung xk , wobei k^μ den Impuls des Teilchens repräsentiert, dass mit den Operatoren wechselwirkt. Der Impuls k^μ ist dabei so zu verstehen, dass k^μ durch eine Fouriertransformation in den Ortsraum überführt werden kann. Wenn der Abstand x^μ der Operatoren $\mathcal{O}_a(x)\mathcal{O}_b(0)$ und auch der Impuls k^μ klein sind, ist auch der Beitrag des Produkts aus Wilsonkoeffizient und Operator klein. Höhere Terme in der Entwicklung (2.19) beinhalten Operatoren mit höherer Dimension, so dass deren Matrixelement proportional zu k^{d_i} ist. Diese Operatoren werden mit Wilsonkoeffizienten multipliziert, die sich wie in (2.20) verhalten. Dadurch sind beispielsweise Terme der nächstführenden Ordnung gegenüber der führenden Ordnung um den Faktor xk unterdrückt und die Entwicklung kann ab einer bestimmten Ordnung abgebrochen werden. Dies führt allerdings nur bei kleinen Abständen zwischen den Operatoren zu sinnvollen Ergebnissen. Die Abhängigkeit von der Raumzeitkoordinate x^μ wird bei der Entwicklung vollständig in den Wilsonkoeffizienten absorbiert. Die Effekte mit kurzer Reichweite, die zwischen den Operatoren auftreten, werden durch Teilchen mit hoher Energie hervorgerufen. Somit können die Wilsonkoeffizienten mit Hilfe der Störungsrechnung ermittelt werden. Die Koeffizienten erhalten dadurch eine Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ , die bei der perturbativen Rechnung verwendet wurde. Da das Produkt aus lokalem Operator und Koeffizient nicht von der unphysikalischen Skala abhängen darf, müssen die Operatoren auch eine solche Abhängigkeit besitzen, die sicherstellt, dass das Produkt keine Terme proportional zu μ enthält. Aus physikalischer Sicht stellt die Skala μ in der Operatorproduktentwicklung die Trennungslinie zweier Bereiche dar. Prozesse, die bei Energien größer als μ stattfinden, tragen zu den Wilsonkoeffizienten bei. Wechselwirkungen mit langer Reichweite, also bei niedrigen Energien, werden durch die lokalen Operatoren repräsentiert. Dies ist eine wichtige Eigenschaft für die unten folgenden Beispiele. Mit Hilfe einer Operatorproduktentwicklung kann der für diese Arbeit grundlegende Zerfallsprozess vereinfacht und im Rahmen der effektiven Theorie als eine Vier-Fermion-Wechselwirkung dargestellt werden. Schließlich können aus dieser Wechselwirkung dann die Anteile extrahiert werden, die nicht perturbativ berechnet werden können.

Oftmals werden die Berechnungen nicht im Ortsraum sondern im Impulsraum durchgeführt. Die benötigte Fouriertransformation lautet

$$\int d^4x e^{iQ \cdot x} T [\mathcal{O}_a(x)\mathcal{O}_b(0)] = \sum C_{abi}(Q)\mathcal{O}_i(0) \quad . \quad (2.21)$$

Der Operator T kennzeichnet dabei, dass das Produkt der Operatoren $\mathcal{O}_a(x)\mathcal{O}_b(0)$ zeitgeordnet ist. Die Rolle des kleinen Abstandes zwischen den Operatoren wird nun durch

den großen Impulsübertrag Q übernommen. Dadurch erhält man eine Entwicklung mit einem Koeffizienten proportional zu k/Q , da die Wilsonkoeffizienten nun proportional zu $1/Q$ sind. Je kleiner dieser Term ist, desto schneller verschwinden die Beiträge von Operatoren höherer Dimensionen.

Bei der Herleitung der effektiven Lagrangedichte in vorangegangenen Abschnitt wurde aus formeller Sicht eine Operatorproduktentwicklung nach dem Einsetzen der Bewegungsgleichung durchgeführt. Als Resultat entsteht ein führender Term der Lagrangedichte und weitere Wechselwirkungsterme. Diese Wechselwirkungsterme enthalten Operatoren, deren Massendimension größer als vier ist und somit stellt sich die Frage nach der Renormierbarkeit. Für praktische Zwecke spielt dies allerdings keine Rolle, da die Entwicklung nach einer bestimmten Ordnung nicht mehr fortgeführt wird und somit eine endliche Anzahl von Operatoren entsteht. Diese Operatoren können nun durch eine endliche Anzahl von Bedingungen renormiert werden. Die Berechnung der Strahlungskorrekturen bringt allerdings noch andere Schwierigkeiten mit sich. Die Renormierungsgruppengleichung definiert die Abhängigkeit der Wilsonkoeffizienten von der Renormierungsskala μ . Bei der Berücksichtigung von höheren Ordnungen der Störungstheorie kommt es zu einer Mischung der Wilsonkoeffizienten und somit auch zu einer Mischung der lokalen Operatoren. Da in dieser Arbeit nur die führende Ordnung der Störungstheorie betrachtet wird, wirkt sich diese Tatsache nicht auf die Berechnungen aus.

2.2.1 Effektive Theorie schwacher Zerfälle

Die im folgenden betrachteten Zerfälle von B-Mesonen werden allesamt von der schwachen Wechselwirkung induziert. Im Standardmodell werden diese Prozesse durch den Austausch von W- und Z-Bosonen beschrieben. Wie oben gesehen vermittelt das Z-Boson nur Kräfte zwischen der gleichen Sorte von Fermionen. Somit kann es nicht zu einem Prozess kommen, bei dem sich der Flavour ändert und die theoretische Beschreibung ist folglich auch nicht abhängig von einem CKM-Matrixelement. Für die relevanten Prozesse ist somit der Austausch von mindestens einem W-Boson erforderlich. Auf Grund der großen Masse dieses Bosons findet die Wechselwirkung nur bei relativ kleinen Abständen statt. Bei Zerfällen von Mesonen sind die typischen Energien, die dem Prozess zur Verfügung stehen von der Größenordnung der Masse des zerfallenden Teilchens. Somit ist der Impuls des B-Mesons von der Ordnung $\mathcal{O}(m_B)$ und damit viel kleiner als die Masse des W-Bosons, welche die Größe des Impulsübertrags repräsentiert. Deshalb kann eine Operatorproduktentwicklung bei der Energie $\mu = m_b$ durchgeführt werden. Die schwachen semileptonischen Prozesse, die für diese Arbeit relevant sind, kommen durch den einfachen Austausch eines W-Bosons zwischen zwei Fermionendoublets zustande. Aus praktischer Sicht wird die Operatorproduktentwicklung durch das Entwickeln des kleinen Impuls im Verhältnis zur großen W-Bosonmasse erreicht. In führender Ordnung erhält man beispielsweise für den

Zerfall eines b-Quarks in ein c-Quark einen effektiven Hamiltonoperator der Form:

$$\mathcal{H}_{eff}^{b \rightarrow c} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (\bar{c} \gamma_\mu P_L b) (\bar{l} \gamma^\mu P_L \nu_l) \quad . \quad (2.22)$$

Dies ist die bekannte Form, wie sie Fermi schon vor dem Entstehen des Standardmodells gefunden hatte [6]. Die physikalische Deutung entspricht den Erläuterungen im Kapitel 2.2. Das niederenergetische b-Quark kann die kleine Strecke, die durch den Austausch eines W-Bosons überbrückt wird nicht auflösen und sieht somit nur eine Punktwechselwirkung von vier Fermionen. Daraus wird deutlich, dass diese Beschreibung des Prozesses nur solange gültig ist, wie der Impuls des b-Quarks gegenüber der Masse des W-Bosons vernachlässigbar ist. Der Wilsonkoeffizient ist bei diesem Beispiel durch den Vorfaktor gegeben, der proportional zur Fermikonstante G_F ist. In dieser Konstante geht die Dynamik des W-Bosons über der Masse ein. Auf Grund der einfacheren Form der Wechselwirkung können die Rechnungen mit wesentlich weniger Aufwand durchgeführt werden. Da die Masse des b-Quarks nur etwa 5% der W-Bosonmasse entspricht, können auch die Korrekturen zu (2.22) vernachlässigt werden.

Deutlich schwieriger als das oben gezeigte Beispiel ist die Operatorproduktentwicklung bei der Betrachtung von Flavour Changing Neutral Currents. Diese elektrisch neutralen Ströme sorgen für eine Änderung der Quarksorte während des Prozesses. Dieser Vorgang ist im Standardmodell stark unterdrückt und tritt in führender Ordnung der Störungstheorie überhaupt nicht auf. Der Grund hierfür liegt in der Eigenschaft des Z-Bosons, dass nur an Ströme mit Quarks der gleichen Sorte koppelt. Damit dieser Prozess überhaupt auftreten kann, muss ein W-Boson beteiligt sein. In Feynmandiagrammen kann beispielsweise ein b-Quark an ein W-Boson und ein t-Quark koppeln, die zusammen eine Schleife bilden. Diese Kombination bildet auch im Allgemeinen den dominierenden Beitrag, da die Rechnungen proportional zu dem Verhältnis aus den Massen des t-Quarks und des W-Bosons sind. Die entsprechenden Diagramme für den Zerfall eines b-Quarks in ein s-Quark und ein Photon sind in Abbildung 2.1 zu sehen. Die Berechnung der Operatorproduktentwicklung ist nun komplexer als im zuvor erläuterten Beispiel. Die schweren Anteile des

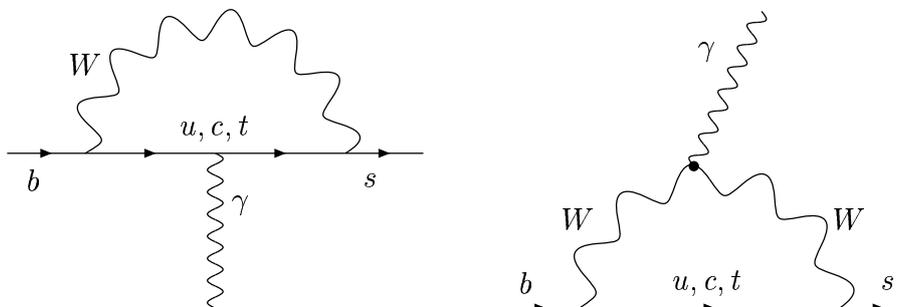


Abbildung 2.1: Feynmandiagramme für den radiativen Zerfall eines b-Quarks in ein s-Quark

W-Bosons müssen nun ausintegriert werden. Nach dieser Berechnung erhält man wieder einen lokalen Operator mit einem Wilsonkoeffizient. Dabei finden sich die Beiträge der schweren Teilchen, also des t-Quarks und W-Bosons, in den Koeffizienten, während der Operator den eigentlichen Zerfall beschreibt. Für das zuvor genannte Beispiel ergibt sich

$$\mathcal{H}_{eff}^{b \rightarrow s} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{tb} V_{ts}^* \frac{e}{16\pi^2} m_b \bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R F_{\mu\nu} \quad . \quad (2.23)$$

Dabei bezeichnet $F_{\mu\nu}$ den elektromagnetischen Feldstärketensor. Die Flavour Changing Neutral Currents wurden in den letzten Jahren verstärkt untersucht, da auch hier die Chance besteht, Effekte neuer Physik finden zu können. Obwohl diese Prozesse stark unterdrückt sind, treten die Signaturen der Zerfälle in den Detektoren auf und es können Daten gesammelt werden. Es ist anzunehmen, dass sich die Effekte neuer Physik nur durch äußerst kleine Abweichungen vom Standardmodell bemerkbar machen. Die Prozesse, die durch neutrale Ströme verursacht werden, sind bereits im Standardmodell unterdrückt und somit sollten sich Diskrepanzen in diesen Kanälen besonders deutlich zeigen.

2.2.2 Lokale $1/m_b$ -Entwicklung

Nachdem ein Beispiel für eine Operatorproduktentwicklung bei Energien von der Größenordnung der Masse des b-Quarks erläutert wurde, wird in diesem Abschnitt eine weitere Entwicklung demonstriert. Diese findet an der Schwelle zur nicht-perturbativen Region statt. Bei Energien von der Größenordnung Λ_{QCD} sind die Wilsonkoeffizienten einer Operatorproduktentwicklung noch mit den Methoden der Störungstheorie zu berechnen. Alle Effekte mit langer Reichweite treten durch lokale Operatoren in Erscheinung. Im Folgenden wird die Entwicklung des semileptonischen Zerfalls eines b-Quarks in ein c-Quark ausführlich beschrieben, da diese Rechnung für die vorliegende Arbeit relevant ist.

Ausgangspunkt ist der effektive Hamiltonoperator (2.22). Mit Hilfe des optischen Theorems können die hadronischen Anteile des Zerfalls als Imaginärteil eines Matrixelementes in Vorwärtsrichtung ausgedrückt werden. Dadurch erhält man das Produkt von zwei Quarkströmen, die gemäß der Operatorproduktentwicklung behandelt werden können [43].

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[-\int d^4x e^{iQ \cdot x} \langle B | T [J_\mu^\dagger(x) J_\nu(0)] | B \rangle \right] \quad (2.24)$$

Die Größe $W_{\mu\nu}$ gibt den hadronischen Beitrag zur Übergangsamplitude des Prozesses an. Da der Zerfall eines B-Mesons betrachtet wird, werden Matrixelemente des Operatorprodukts mit den entsprechenden Zuständen berechnet. Die Operatorproduktentwicklung ist eine Relation zwischen Operatoren. Dies soll im folgenden ausgenutzt werden. Dazu werden die Zustände der B-Mesonen für die eigentliche Operatorproduktentwicklung durch b-Quark-Zustände ersetzt. Das hat den Vorteil, dass Matrixelemente der Ströme mit den Zuständen freier Quarks leicht zu berechnen sind. Das Matrixelement wird daraufhin

entwickelt und jeder Term der Entwicklung wird als ein Matrixelement eines lokalen Operators der Operatorproduktentwicklung identifiziert. Daraus können dann die Operatoren der Operatorproduktentwicklung extrahiert werden. So ist es möglich über die Berechnung von Matrixelementen das Produkt der Operatoren zu entwickeln. Werden die Zustände der B-Mesonen in (2.24) durch die Zustände von b-Quarks ersetzt, so entspricht der eingeklammerte Term im Impulsraum einem Feynmandiagramm, das in Abbildung 2.2 gezeigt ist. Die Γ -Symbole stehen für die Diracstruktur des Quarkstroms, der für den Zerfall verantwortlich ist. Über diese Diracstruktur koppeln auch die leptonen Anteile an das Diagramm, die allerdings nicht betrachtet werden, da sie für die Operatorproduktentwicklung nicht von Bedeutung sind. Die gestrichelte Linie deutet an, dass nach der Berechnung des Matrixelementes noch der Imaginärteil des Resultats ermittelt werden muss. Doppelte Linien beschreiben ein b-Quark und die einfache Linie stellt das c-Quark dar. Der Impuls des b-Quarks wird zur Entwicklung des Matrixelementes als Summe der Masse des b-Quarks multipliziert mit der Geschwindigkeit v^μ des B-Mesons und des Restimpuls k^μ geschrieben.

$$p_b^\mu = m_b v^\mu + k^\mu \quad (2.25)$$

Wie bereits gesehen, zeigt der Vergleich der Meson- und Quarkmasse, dass die Bindungsenergie, die durch der Restimpuls k^μ beschrieben wird, von der Größenordnung Λ_{QCD} ist. Da die Masse des b-Quarks sehr viel größer ist als die QCD-Skala Λ_{QCD} kann eine Entwicklung in Λ_{QCD}/m_b erfolgen. Auf Grund der Struktur des Diagramms in Abbildung 2.2 ist dies im Wesentlichen eine Taylorentwicklung des c-Quark-Propagators. Aus dem Diagramm erhält man anhand der Feynmanregeln folgenden Ausdruck:

$$\bar{u}_b \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_c - m_c}{p_c^2 - m_c^2} \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \quad . \quad (2.26)$$

Der Impuls des c-Quarks kann durch die Differenz aus dem Impuls des b-Quarks und dem Leptonimpuls q^μ geschrieben werden. Definiert man diese Größe als $Q^\mu = m_b v^\mu - q^\mu$ und entwickelt in k^μ , so erhält man

$$\frac{\not{p}_c - m_c}{p_c^2 - m_c^2} = \frac{\not{Q}}{Q^2 - m_c^2} + \frac{\not{k}(Q^2 - m_c^2) - 2Qk \cdot Q}{(Q^2 - m_c^2)^2} + \frac{2(k \cdot Q)^2 \not{Q} - \not{k}(Q^2 - m_c^2)}{(Q^2 - m_c^2)^3} \quad . \quad (2.27)$$

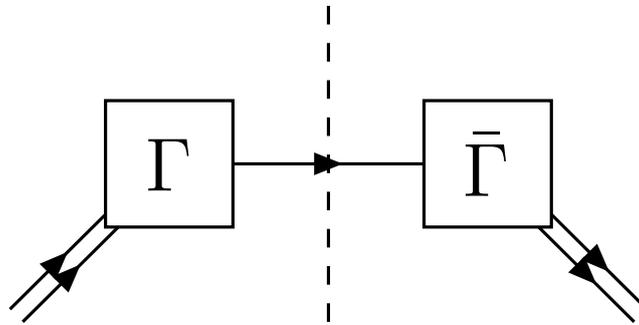


Abbildung 2.2: Feynmandiagramm für den partonischen Anteil des semileptonischen Zerfalls $b \rightarrow c$

Die linke Seite stellt bis auf konstante Faktoren den Propagator des c -Quarks im Standardmodell dar und damit das Matrixelement eines zeitgeordneten Produkt zweier Operatoren. Die rechte Seite entspricht der Entwicklung des Propagators und die einzelnen Terme werden nun als Matrixelemente von lokalen Operatoren identifiziert. Hierzu muss zuerst eine Basis von Operatoren erarbeitet werden und danach deren Feynmanregeln. In dem hier besprochenen Fall müssen die Operatoren lediglich zwei schwere Quarks und den Austausch von Gluonen repräsentieren. Sie bestehen deshalb aus zwei Quarkfeldern mit beliebigen Einsetzungen von kovarianten Ableitungen. Gelistet nach aufsteigender Massendimension erhält man [45]

$$\begin{aligned}
O_0 &= \bar{b}_v \Gamma b_v \\
O_1^\mu &= \bar{b}_v \not{\partial} D^\mu \Gamma b_v \\
O_3^{\mu\nu} &= \bar{b}_v \{ \not{\partial} D^\mu, \not{\partial} D^\nu \} \Gamma b_v \\
O_4^{\mu\nu} &= \bar{b}_v [\not{\partial} D^\mu, \not{\partial} D^\nu] \Gamma b_v \quad .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Operatorbasis wurde mit kovarianten Ableitungen definiert, damit die lokale Eichinvarianz der Theorie erhalten bleibt. Da die starke Wechselwirkung durch eine nicht-abelsche Symmetriegruppe repräsentiert wird, ist die Unterscheidung der Operatoren mit einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Anordnung der kovarianten Ableitungen nötig. Die Quarkfelder in (2.28) sind die Felder des Standardmodells, die durch die Phasentransformation (2.3) nur noch vom Restimpuls k^μ abhängig sind. Da die kovariante Ableitung im Ortsraum den Impulsoperator darstellt, erhält man durch Anwenden der Ableitung auf ein solches Feld den Restimpuls k^μ . Dadurch können die Matrixelemente bzw. Feynmanregeln dieser Operatoren bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\langle b | O_0 | b \rangle &\sim \Gamma \\
\langle b | O_1^\mu | b \rangle &\sim k^\mu \Gamma \\
\langle b | O_3^{\mu\nu} | b \rangle &\sim k^\mu k^\nu \Gamma \\
\langle b | O_4^{\mu\nu} | b \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Da das betrachtete Diagramm in Abbildung 2.2 keine Gluonen enthält, verschwindet das Matrixelement des Operators mit antisymmetrischer Anordnung der kovarianten Ableitungen. Der Wilsonkoeffizient dieses Operators kann also nur bestimmt werden, wenn ein weiteres Diagramm mit Gluonabstrahlung herangezogen wird. Hierzu wird das Diagramm aus Abbildung 2.3 verwendet. Darin wurde die gestrichelte Linie, die die Ermittlung des Imaginärteils visualisiert, entfernt um die Übersichtlichkeit zu verbessern. Für die weitere Berechnung spielt wiederum nur der Imaginärteil dieses Diagramms eine Rolle. Da die Operatorproduktentwicklung eine Relation zwischen Operatoren ist, muss die Entwicklung dieses Diagramms dieselben Operatoren und Wilsonkoeffizienten liefern wie in (2.27). Dabei wird angenommen, dass ein weiches Gluon mit einem Impuls der Größenordnung Λ_{QCD} abgestrahlt wird. Die entsprechenden Matrixelemente für die Operatoren (2.28)

lauten

$$\begin{aligned}
\langle b|O_0|bg\rangle &= 0 \\
\langle b|O_1^\mu|bg\rangle &\sim \epsilon^\mu\Gamma \\
\langle b|O_3^{\mu\nu}|bg\rangle &\sim (\epsilon^\mu(2k^\nu + l^\nu) + \epsilon^\nu(2k^\mu + l^\mu))\Gamma \\
\langle b|O_4^{\mu\nu}|bg\rangle &\sim (\epsilon^\nu l^\mu - \epsilon^\mu l^\nu)\Gamma \quad .
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Der Vierervektor ϵ^μ beschreibt die Polarisierung des Gluons während l^μ dessen Impuls darstellt. Mit diesem Matrixelement kann der Beitrag des Operators mit antisymmetrischer Anordnung von kovarianten Ableitungen abgelesen und somit der Wilsonkoeffizient eindeutig bestimmt werden. So lautet beispielsweise der Operator mit Massendimension drei

$$C_0(Q)O_0^{\mu\alpha\nu} = \frac{Q^\alpha}{Q^2 - m_c^2} \bar{b}_\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) b_\nu \quad . \tag{2.31}$$

Dieser Operator enthält die Quarkfelder des Standardmodells. Diese können nun durch die Felder der HQET ersetzt werden. Dies hat zwei Vorteile: die Quarkfelder der HQET haben keinerlei Abhängigkeit von der Masse des b-Quarks, so dass durch die Ersetzung eine vollständige Entwicklung in der Masse m_b entsteht. Zudem können durch die Verwendung von HQET-Feldern die Diracmatrizen in den Operatoren auf zwei mögliche Kombinationen reduziert werden. Diese helfen später die Matrixelemente zu identifizieren, die tatsächlich für den Prozess von Bedeutung sind. Es gilt

$$P_+ \Gamma P_+ = \frac{1}{2} \text{Tr}[P_+ \Gamma] P_+ - \frac{1}{2} \text{Tr}[s^\alpha \Gamma] s_\alpha \tag{2.32}$$

mit $s_\alpha = P_+ \gamma_\alpha \gamma_5 P_+$. Diese Ersetzung bewirkt allerdings, dass nun noch mehr Terme in der Entwicklung betrachtet werden müssen. So sind die Felder der HQET nur in führender Ordnung mit denen des Standardmodells identisch. Das Quantenfeld im Standardmodell kann als die Summe der Felder h_ν und H_ν , siehe Abschnitt 2.1, geschrieben werden. Durch Einsetzen der Bewegungsgleichung des Feldes H_ν und anschließender Entwicklung kann

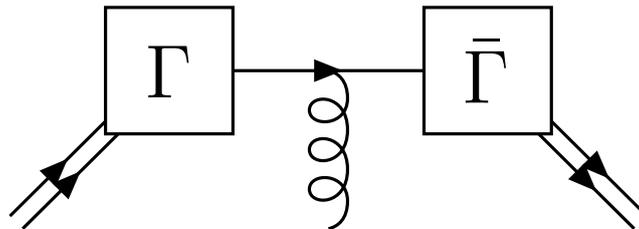


Abbildung 2.3: Feynmandiagramm für den partonischen Anteil des semileptonischen Zerfalls $b \rightarrow c$ mit Gluonabstrahlung

das Feld b_v durch

$$b_v = \left[1 + \frac{i\not{D}}{2m} + \dots \right] h_v \quad (2.33)$$

ersetzt werden. Außerdem beinhaltet die Lagrangedichte der HQET bis zu einer bestimmten Ordnung der Entwicklung noch endlich viele Wechselwirkungsterme, die ebenfalls beachtet werden müssen. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}^2/m_b^2)$ ist nur der Operator mit einer kovarianten Ableitung hiervon betroffen. Der führende Operator ist proportional zu $\bar{b}_v b_v$ und damit zum Anzahloperator des b-Quarks. Dadurch kann das Matrixelement auch im Standardmodell berechnet werden und das Ersetzen der Quarkfelder b_v durch die Felder der HQET entfällt. Die Korrekturen, die durch den Operator mit einer kovarianten Ableitung auftreten, können durch die Bewegungsgleichungen der HQET relativ einfach eingefügt werden. Zu diesem Zweck werden die Wechselwirkungsterme der effektiven Lagrangedichte bei der Berechnung der Euler-Lagrange-Gleichungen mitberücksichtigt. In (2.18) wurde gezeigt, dass das Matrixelement des Operators mit einer kovarianten Ableitung proportional zur Geschwindigkeit v^μ ist. Somit enthält dieser Operator nur Komponenten, die parallel zu Geschwindigkeit liegen und er kann in der Form $\bar{h}_v(v \cdot D)h_v$ geschrieben werden. Wendet man nun die modifizierte Bewegungsgleichung auf diesen Operator an, so erhält man Terme mit zwei kovarianten Ableitungen, welche die Korrekturterme der Lagrangedichte darstellen. Wie oben beschrieben, verschwinden dadurch die Matrixelemente der Operatoren mit einer kovarianten Ableitung. Damit können die lokalen Operatoren samt Wilsonkoeffizienten bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}^2/m_b^2)$ bestimmt werden, siehe z.B. [48, 49, 50].

Prinzipiell können auch die Quarkfelder des Standardmodells verwendet werden, da die Matrixelemente mit einer nicht berechenbaren Größe parametrisiert werden. Dieser Ansatz wird z.B. in [51, 52, 53, 54] angewandt. Als unmittelbare Folge verschwinden die Korrekturterme, die durch die Verwendung der HQET berücksichtigt werden müssten, aber die Diracstruktur der Operatoren kann nicht vereinfacht werden. Es ist möglich die Parameter der Matrixelemente dieser Operatoren, z.B. μ_π , μ_G , etc., mit den Parametern der Operatoren, die HQET-Felder verwenden, in Beziehung zu setzen.

Da das weitere Vorgehen zur Ermittlung eines Zerfallspektrums für das nächste Kapitel relevant ist, werden die folgenden Schritte noch erläutert. Da der Zerfall eines B-Mesons betrachtet wird, müssen die Matrixelemente der gerade gefundenen Operatoren mit B-Meson-Zuständen berechnet werden. Durch die Parametrisierung in (2.14) können Matrixelemente von Operatoren mit beliebigen Kombinationen von bis zu drei kovarianten Ableitungen bestimmt werden. Da die Quarkfelder der HQET verwendet werden, treten nur Operatoren mit den Diracmatrizen 1 und s^α auf.

$$\begin{aligned} \langle B | \bar{h}_v(iD_\mu)(iD_\nu)h_v | B \rangle &= \frac{\lambda_1}{3}(g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu) \\ \langle B | \bar{h}_v(iD_\mu)(iD_\nu)s_\alpha h_v | B \rangle &= \frac{\lambda_2}{2}v\epsilon_{\beta\mu\nu\alpha}v^\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle B | \bar{h}_v(iD_\mu)(iD_\nu)(iD_\beta)h_v | B \rangle &= \frac{\rho_1}{3}(g_{\mu\beta} - v_\mu v_\beta)v_\nu \\
\langle B | \bar{h}_v(iD_\mu)(iD_\nu)(iD_\beta)s_\alpha h_v | B \rangle &= \frac{\rho_2}{2}v_\alpha \epsilon_{\rho\mu\beta\alpha} v^\rho v_\nu
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Im Anschluss muss noch der Imaginärteil dieser Beiträge bestimmt werden. In (2.27) wurde der Propagator des c -Quarks im Nenner ohne den infinitesimalen Imaginärteil $i\epsilon$ geschrieben um die Übersichtlichkeit zu verbessern. Zur Ermittlung des Imaginärteils ist diese Größe allerdings maßgeblich. Durch die Relation

$$\frac{1}{x - i\epsilon} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} P(x) - i\pi\delta(x) \tag{2.35}$$

können die Nenner in (2.27) durch Deltafunktionen $\delta(Q^2 - m_c^2)$ ersetzt werden. Höhere Potenzen der Nenner ergeben Ableitungen der Deltafunktionen. Zur Ermittlung der totalen Zerfallsrate muss nun noch über den Phasenraum integriert werden. Durch diese Integration verschwinden die Deltafunktionen. Betrachtet man allerdings die Spektren so sind die Deltafunktionen spätestens bei den nächstführenden Ordnungen präsent. Dies führt zu einem physikalisch unbefriedigenden Verhalten. Da die totale Rate, also die Integration des Spektrums, durch diesen Umstand nicht beeinflusst wird, scheinen die Deltafunktionen durch eine Umverteilung der Fläche unter der Kurve zustande zu kommen. Im nächsten Unterkapitel wird gezeigt, dass durch eine leicht modifizierte Operatorproduktentwicklung diese Deltafunktionen verschwinden und so ein physikalisches Spektrum entsteht.

2.3 Lichtkegelentwicklung

Im vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass die $1/m_b$ -Entwicklung gute Ergebnisse bei der Berechnung der totalen Zerfallsrate liefert. Allerdings sind die durch diese Methode ermittelten Spektren mit Problemen behaftet. Das Auftreten von Deltafunktionen und deren Ableitungen verhindern eine physikalische Deutung. Diese Spektren sind allerdings für die Bestimmung der HQET-Parameter, z.B. Λ , λ_1 , etc., von Bedeutung. Durch den Vergleich der Momente der Spektren mit den experimentellen Daten können diese Größen extrahiert werden. Die experimentelle Genauigkeit kann dabei verbessert werden, wenn Daten mit großen invarianten Massen vernachlässigt werden. In diesem Zusammenhang führt das Auftreten der Deltafunktionen in der theoretischen Vorhersage zu falschen Ergebnissen. Durch die Lichtkegelentwicklung können die Deltafunktionen in glatte Funktionen aufsummiert werden. Mit diesen Funktionen entsteht ein physikalisches Spektrum, das auch bei der Berechnung von Momenten bezüglich eines Teilintervalls, richtige Ergebnisse liefert.

Die Untersuchung der Deltafunktionen ergibt [55, 56, 57, 58], dass diese jeweils bei bestimmten kinematischen Situationen auftreten. So befinden sich die Deltafunktionen im Energiespektrum des geladenen Leptons im semileptonischen Zerfall eines B-Mesons bei hohen Energien. Der Bereich in dem die Deltafunktionen auftreten, trägt deshalb den

Namen Endpunktbereich. Dieser Teil des Spektrums kommt durch eine extreme kinematische Situation zustande. Wie erwähnt besitzt das geladene Lepton die maximale Energie und auch das hadronische Zerfallsprodukt erhält die höchstmögliche Energie, die theoretisch zur Verfügung steht. Allerdings ist damit auch die invariante Masse des Zerfallsprodukt sehr klein. Dieses Szenario widerspricht dem Größenordnungen, die für die $1/m_b$ -Entwicklung angenommen wurde. Hier sollte $Q^\mu = m_b v^\mu - q^\mu$ größer sein als der Restimpuls und damit größer als Λ_{QCD} . Wenn das geladene Lepton die maximale Energie erreicht, dominiert der Impuls dieses Leptons den Vektor des Leptonpaares q^μ . Der Vektor Q^μ ist dann in guter Näherung $Q^\mu = m_b v^\mu - p_l^\mu$. Nimmt das geladene Lepton ungefähr die Energie $m_b/2$ an, so ist Q^μ klein und von der gleichen Größenordnung wie der Restimpuls k^μ und die Entwicklung bricht zusammen. Somit wird im Endpunktbereich deutlich, dass der Entwicklungsparameter nicht durch $1/m_b$ sondern durch das Inverse einer Komponente des Vektors Q^μ gegeben ist, die nicht über den gesamten Phasenraum als klein betrachtet werden kann. In der zuvor beschriebenen kinematischen Konfiguration verhalten sich sowohl das Lepton als auch das Quark wie ein Teilchen mit lichtartigem Impuls. Das Lepton wird auf Grund der Vernachlässigung seiner Masse exakt durch einen lichtartigen Impuls beschrieben und das Quark besitzt zwar eine invariante Masse, die aber von Größenordnung $m_b \Lambda_{QCD}$ ist. Für die Beschreibung dieser Situation ist es somit hilfreich die Beiträge von lichtartigen Komponenten von den restlichen zu trennen. Hierzu werden zwei Lichtkegelvektoren n^μ und \bar{n}^μ definiert. Die Methode der Lichtkegelentwicklung wird im Folgenden anhand des Zerfalls eines B-Mesons in ein Photon und ein Hadron mit einem s-Quark erläutert, da dabei die Verwendung von Lichtkegelvektoren intuitiver ist. Obwohl dieser Zerfall durch einen anderen effektiven Hamiltonoperator beschrieben wird, sind die Ergebnisse auf den semileptonischen Prozess leicht zu übertragen. Die zwei zu definierenden Vektoren orientieren sich an der Versuchsanordnung. So wird ein Vektor über die Geschwindigkeit des B-Mesons definiert, der andere beispielsweise durch den Impulsvektor des Photons. Hier zeigt sich der Vorteil bei der Betrachtung dieses Zerfalls, da der Impuls des Photons q^μ bereits lichtartig ist.

$$n^\mu = 2v^\mu - \bar{n}^\mu \quad \bar{n}^\mu = \frac{q^\mu}{n \cdot q} \quad n^2 = \bar{n}^2 = 0 \quad n \cdot \bar{n} = 2 \quad (2.36)$$

Die konkrete Wahl der Vektoren ist innerhalb dieser Bedingungen beliebig. Jeder Vektor kann in Anteile entlang und senkrecht zu diesen Lichtkegelvektoren geschrieben werden. Dies ist gleichzeitig als die Definition der senkrechten Komponenten zu verstehen.

$$A^\mu = \frac{1}{2}(\bar{n} \cdot A)n^\mu + \frac{1}{2}(n \cdot A)\bar{n}^\mu + A_\perp^\mu \quad (2.37)$$

Die Schreibweise kann etwas vereinfacht werden indem die Projektion eines Vektors auf die Lichtkegelimpulse als

$$(n \cdot A) = A_+ \quad (\bar{n} \cdot A) = A_- \quad (2.38)$$

bezeichnet werden. Auf Grund der Lorentzinvarianz der Übergangsamplituden kann die Berechnung der totalen Zerfallsrate in einem bestimmten Bezugssystem durchgeführt werden. Im Ruhesystem des B-Mesons beispielsweise lautet der Vierervektor der Geschwindigkeit des B-Mesons $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Nun kann auch das räumliche Koordinatensystem

so gedreht werden, dass die Emission des Photons in z-Richtung erfolgt. Unter diesen Bedingungen können die Lichtkegelvektoren wie folgt gewählt werden:

$$n^\mu = (1, 0, 0, 1) \quad \bar{n}^\mu = (1, 0, 0, -1) \quad . \quad (2.39)$$

Wie bereits im vorangegangenen Kapitel erläutert, werden inklusive Zerfälle mit Hilfe des optischen Theorems berechnet. Dabei tritt das Produkt aus zwei Operatoren auf. Im Impulsraum erhält man durch eine Fouriertransformation

$$\int d^4 x e^{iQ \cdot x} \langle B | T [J_\mu^\dagger(x) J_\nu(0)] | B \rangle \quad . \quad (2.40)$$

Dabei sind die Ströme J^μ durch den effektiven Hamiltonoperator (2.23) für der Zerfall $b \rightarrow s\gamma$ gegeben. Der Impulsübertrag Q^μ stellt die Differenz aus dem Impuls des b-Quark und dem Photonimpuls dar.

$$Q^\mu = m_b v^\mu - q^\mu \quad (2.41)$$

Mit Hilfe der Lichtkegelvektoren kann das Skalarprodukt im Argument der Exponentialfunktion auf das Verhalten nahe des Lichtkegels untersucht werden [59].

$$Q \cdot x = \frac{1}{2} Q_+ x_- + \frac{1}{2} Q_- x_+ + Q_\perp \cdot x_\perp = \frac{1}{2} (m_b - 2q_+) x_- + \frac{m_b}{2} x_+ \quad (2.42)$$

Für hohe Photonenergien, also genau für den Bereich in dem die $1/m_b$ -Entwicklung zusammenbricht und Deltafunktionen im Spektrum auftreten, wird der Term in der Klammer auf der rechten Seite klein. Da die Exponentialfunktion mit einem imaginären Argument eine oszillierende Funktion darstellt, finden sich die dominierenden Beiträge in der Nähe von kleinen x_- und somit nahe dem Lichtkegel. Dadurch erhält die Entwicklung ihren Namen. Anhand dieses Beispiels kann erkannt werden, wie das Powercounting für diese Entwicklung lauten muss. In dieser kinematischen Situation, die zum Zusammenbruch der $1/m_b$ -Entwicklung führt, ist die Projektion des Impulsübertrags Q^μ auf den einen Lichtkegelvektor von der Ordnung $\mathcal{O}(m_b)$, während die Projektion auf den anderen Vektor eine Größe der Ordnung $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD})$ ergibt. Falls ein semileptonischer Zerfall betrachtet wird, treten prinzipiell zusätzlich noch Komponenten von q^μ auf, die senkrecht auf die Lichtkegelvektoren stehen. Durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems kann erreicht werden, dass sich der Vektor q^μ nur durch die Lichtkegelvektoren n^μ und \bar{n}^μ ausdrücken lässt. Somit kann dieses Resultat ohne Änderungen auch für semileptonische Zerfälle verwendet werden. Zusammenfassend muss also eine Entwicklung mit folgendem Powercounting durchgeführt werden [60]:

$$\begin{aligned} (m_b v - q) \cdot \bar{n} &\sim \mathcal{O}(m_b) \\ (m_b v - q) \cdot n &\sim \mathcal{O}(\Lambda_{QCD}) \\ k^\mu &\sim \mathcal{O}(\Lambda_{QCD}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ähnlich wie im vorangegangenen Kapitel soll nun die Operatorproduktentwicklung für den semileptonischen Zerfall eines B-Mesons in ein Hadron mit einem u-Quark, dessen

Masse vernachlässigt wird, skizziert werden. Der Ausgangspunkt ist auch hier wieder der effektive Hamiltonoperator (2.22), wobei das Feld des c-Quarks durch das eines u-Quarks ersetzt wird. Dieser Operator tritt, da ein inklusiver Zerfall betrachtet wird, an die Stelle der Ströme J^μ in (2.40). Wie zuvor gesehen, wird die Operatorproduktentwicklung anhand des Matrixelements von (2.40) mit den Zuständen von b-Quarks durchgeführt. Die Berechnung erfolgt ebenfalls anhand des Diagramms in Abbildung 2.2. Wieder besteht die Aufgabe der Operatorproduktentwicklung im Wesentlichen in der Entwicklung des Propagators des u-Quarks. Nun wird allerdings das Powercounting (2.43) verwendet. Damit ergibt sich

$$\frac{\not{p}_u}{p_u^2} = \frac{\not{p}P_-}{2\Delta} + \frac{\not{k}_\perp}{\Delta} + \frac{\not{p}}{2P_-} - \frac{\not{p}P_-k_\perp^2}{2\Delta^2} + \dots \quad (2.44)$$

mit $P^\mu = m_b v^\mu - q^\mu$ und $\Delta = P_-(P_+ + k_+)$. Zuerst wird der erste und führende Term der rechten Seite untersucht. Hierzu ist nur der Nenner von Interesse, da nur hier eine Komponente des Restimpuls auftritt. Die Abhängigkeit von dieser Impulskomponente wird in einem ersten Schritt durch eine Integration über eine Deltafunktion umgeschrieben.

$$P_-(P_+ + k_+) = \int d\omega \delta(\omega + k_+) P_-(P_+ - \omega) \quad (2.45)$$

Wenn der führende Term als Matrixelement eines Operators geschrieben wird und dabei die phasentransformierten Felder aus (2.3) verwendet werden, kann die +-Komponente des Restimpuls durch die entsprechende Komponente der kovarianten Ableitung im Operator repräsentiert werden. Der führende Operator lautet also

$$\mathcal{C}_0 \mathcal{O}_0 = \int d\omega \frac{n^\alpha P_-}{2\Delta_\omega} \bar{b}_v \delta(\omega + iD_+) \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) b_v \quad (2.46)$$

mit $\Delta_\omega = P_-(P_+ - \omega)$. Da die +-Komponente des Restimpuls nur innerhalb von Δ auftritt, kann dieses Vorgehen auch für die weiteren Terme benutzt werden. Zuerst muss allerdings eine Operatorbasis aufgestellt werden, die sich am führenden Operator orientiert. Mit den Matrixelementen folgender Operatoren können die Terme der Entwicklung im semileptonischen Zerfall $b \rightarrow ul\nu$ beschrieben werden.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0^\lambda(\omega) &= \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega) \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_3^\lambda(\omega) &= \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (iD_\perp)^2 \delta(iD_+ + \omega_1) \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_4^\lambda(\omega) &= -\frac{g}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (\epsilon \cdot G)_\perp \delta(iD_+ + \omega_1) \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega) &= \bar{b}_v \{iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)\} \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega) &= \bar{b}_v [iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)] \Gamma b_v \end{aligned} \quad (2.47)$$

Die Größe $(\epsilon \cdot G)_\perp$ steht stellvertretend für $\epsilon_{\mu\nu}^\perp G^{\mu\nu}$ mit $\epsilon_{\mu\nu}^\perp = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha n^\beta$. Genau wie im Fall der $1/m_b$ -Entwicklung, werden die Matrixelemente der Operatoren für ein Diagramm ohne bzw. mit Gluonabstrahlung benötigt. Nur so ist es möglich die Wilsonkoeffizienten

der Operatoren $\mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)$ und $\mathcal{O}_4^\lambda(\omega)$ eindeutig zu ermitteln. Die entsprechenden Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned}
\langle b|\mathcal{O}_0^\lambda(\omega)|b\rangle &= \delta(\hat{k}_+ + \omega)\bar{u}_b\bar{\Gamma}\gamma^\lambda\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_0^\lambda(\omega)|bg\rangle &= 0 \\
\langle b|\mathcal{O}_3^\lambda(\omega)|b\rangle &= -\hat{k}_\perp^2\delta'(\omega + \hat{k}_+)\bar{u}_b\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_3^\lambda(\omega)|bg\rangle &= -g\hat{\epsilon}_\perp \cdot \left(2\hat{k} + \hat{l}\right)_\perp \frac{\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)}{\hat{l}_+}\bar{u}_b\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_4^\lambda(\omega)|b\rangle &= 0 \\
\langle b|\mathcal{O}_4^\lambda(\omega)|bg\rangle &= -\frac{g}{2}\left(\hat{\epsilon} \cdot \hat{G}\right)_\perp \frac{\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)}{\hat{l}_+}\bar{u}_b\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega)|b\rangle &= 2\hat{k}^\kappa\delta(\hat{k}_+ + \omega)\bar{u}_b\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega)|bg\rangle &= -g\hat{\epsilon}^\kappa(\delta(\omega + \hat{k}_+) + \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+))\bar{u}_b\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)|b\rangle &= 0 \\
\langle b|\mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)|bg\rangle &= -g\hat{\epsilon}^\kappa(\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+))\bar{u}_b\Gamma u_b \quad . \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen ϵ und l die Polarisation bzw. den Impuls des Gluons. Beim Vergleich der Matrixelemente mit den Ergebnissen der Entwicklung sieht man, dass die Terme proportional zu \hat{k}_\perp und \hat{k}_\perp^2 von den Operatoren \mathcal{O}_S und \mathcal{O}_3 stammen. Der Term, der nicht proportional zu Δ ist, muss nicht berücksichtigt werden, da er später bei der Berechnung des Imaginärteils verschwindet. Durch die Entwicklung des Diagramms mit Gluonabstrahlung können auch die Wilsonkoeffizienten der Operatoren \mathcal{O}_A und \mathcal{O}_4 ermittelt werden.

Genau wie bei der $1/m_b$ -Entwicklung müssen bei der Betrachtung des Zerfalls eines B-Mesons die Matrixelemente der Operatoren mit den Zuständen der Mesonen berechnet werden. Da die Operatoren von der dimensionsbehafteten Variable ω abhängen, ergeben sich keine Parameter sondern Funktionen. Diese Funktionen haben den Namen Struktur- bzw. Shapefunktionen. Die Definition der führenden Shapefunktion lautet

$$f(\omega) = \langle B|\bar{h}_v\delta(\omega + \not{D}_+)h_v|B\rangle \quad . \quad (2.49)$$

Für die anderen Operatoren sind entsprechend Funktionen definiert. Da die Shapefunktionen durch Operatoren gegeben sind, welche die Physik unterhalb von 1 GeV beschreiben, ist eine Berechnung der Funktionen mit den Methoden der Störungstheorie nicht möglich. Deshalb werden für die Darstellung des Spektrums Modellfunktionen verwendet.

Eine genaue Betrachtung des Operators der führenden Ordnung der Lichtkegentwicklung ergibt, dass dieser eine unendliche Anzahl von Termen beschreibt, die das gleiche Verhalten nahe des Lichtkegels aufweisen. Zur Kategorisierung dieser Terme ist die Massendimension nicht mehr ausreichend. Vielmehr muss eine Größe namens Twist verwendet werden, die aus der tief inelastischen Streuung bekannt ist. Der Twist ist definiert als die Differenz aus der Massendimension und dem Spin. Der Spin gibt dabei an zu welcher

Repräsentation der homogenen Lorentzgruppe der Operator gehört. Die Terme, die zu einer festen Ordnung des Twist beitragen, können als die Momente der Shapefunktion interpretiert werden. Im Rahmen einer entsprechenden Entwicklung erhält man für die führende Shapefunktion folgendes Ergebnis [60]:

$$f(\omega) = \delta(\omega) - \frac{\lambda_1}{6} \delta''(\omega) - \frac{\rho_1}{18} \delta'''(\omega) + \dots \quad (2.50)$$

Durch die Verwendung der Shapefunktionen werden also die Deltafunktionen des Spektrums der $1/m_b$ -Entwicklung aufsummiert. Dadurch erhält das Spektrum eine glatte Form und zeigt auch im Endpunktbereich ein physikalisch sinnvolles Ergebnis [61, 62, 63, 64, 58, 60]. In der kinematischen Situation, die durch das Powercounting der Lichtkegelentwicklung beschrieben wird, sind Terme aus verschiedenen Ordnungen der $1/m_b$ -Entwicklung von der gleichen Größenordnung und somit entscheidend für den Verlauf des Spektrums, so dass höhere Ordnungen nicht vernachlässigt werden dürfen. Die Lichtkegelentwicklung resummiert die Beiträge der $1/m_b$ -Entwicklung gemäß des Twists so, dass im Endpunktbereich die Größenverhältnisse richtig wiedergegeben werden.

Im letzten Berechnungsschritt muss noch der Imaginärteil der Produkte aus Wilsonkoeffizienten und Matrixelementen der Operatoren gebildet werden. Hierzu erinnert man sich, dass Δ aus dem Propagator des u-Quarks stammt. In diesem Propagator steht auch ein infinitesimaler Imaginärteil der bisher nicht berücksichtigt wurde und somit auch zu Δ hinzuaddiert werden muss. Dadurch lässt sich der Imaginärteil des gesamten Ergebnisses mit Hilfe von (2.35) relativ einfach berechnen. Da die durch diesen Schritt entstandenen Deltafunktionen die kinematischen Variablen, hier P_- und P_+ , sowie die Variable ω enthalten, kann eine Phasenraumintegration sofort ausgeführt werden.

2.4 Soft Collinear Effective Theory

Bei der Untersuchung von Strahlungskorrekturen zu den Ergebnissen, die mittels der HQET und der Lichtkegelentwicklung errechnet wurden, wurde offensichtlich, dass Beiträge einer weiteren Skala beachtet werden müssen, damit die effektive Theorie das Standardmodell bei kleinen Energien richtig beschreibt. Diese Skala liegt zwischen der Masse des b-Quarks und der Skala der starken Wechselwirkung Λ_{QCD} und tritt auf Grund von Teilchen, deren Impuls parallel zu dem des hadronischen Zerfallsprodukts ausgerichtet ist, in Erscheinung. Diese kollinearen Moden werden in einer weiteren effektiven Theorie mit dem Namen Soft Collinear Effective Theory berücksichtigt [65, 66, 67, 68]. In dieser Theorie tritt damit im Vergleich zur HQET eine weitere Größenordnung auf. Die übliche Notation verwendet die skalierte Größe $\lambda^2 = \Lambda_{QCD}/m_b$, so dass die Skalen $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(\lambda)$ und $\mathcal{O}(\lambda^2)$ betrachtet werden müssen. Die zusätzliche Größenordnung tritt in Erscheinung, da die hadronisch invariante Masse im Endpunktbereich von der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^2)$ ist. Im Allgemeinen gilt für diese Masse

$$p^2 = p_- p_+ + p_\perp^2 \quad . \quad (2.51)$$

Unter Verwendung des Powercountings (2.43) mit $p^\mu = m_b v^\mu - q^\mu$ müssen die Komponenten p_\perp^μ , die senkrecht auf die Lichtkegelvektoren stehen, von der Größenordnung λ sein, wodurch das Auftreten einer weiteren Ordnung deutlich wird. Auf die Ergebnisse dieser Arbeit hat diese Tatsache allerdings keine Auswirkungen, da durch die Vernachlässigung von Strahlungskorrekturen immer ein Koordinatensystem gefunden werden kann, in dem die senkrechten Komponenten p_\perp^μ verschwinden. In Analogie zur HQET und der Lichtkegelentwicklung erhält man in SCET Koeffizienten, welche den hochenergetischen Anteil des Prozess beschreiben, und Shapefunktionen. Durch die Erweiterung um die dritte Skala treten bei der Verwendung der SCET auch so genannte Jetfunktionen auf, die perturbativ berechnet werden können und die Auswirkungen der kollinearen Teilchen repräsentieren.

Die Soft Collinear Effective Theory ist besonders erfolgreich bei der Beweisführung der Faktorisierung. So konnte in allen Ordnungen der Störungstheorie gezeigt werden, dass zwischen den Endzuständen im Zerfall $B \rightarrow D\pi$ keine niederenergetischen Wechselwirkungen stattfinden [69]. Dadurch können die Zerfallsprodukte unabhängig betrachtet und beispielsweise als Zerfallskonstanten definiert werden. Außerdem ist es gelungen die nächstführenden Korrekturen von semileptonischen Prozessen, bei denen ein schweres Quark in leichte Teilchen zerfällt, zu ermitteln [70]. Die Ergebnisse dieser Publikation zeigen, dass bei der Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen eine Vielzahl von Shapefunktionen betrachtet werden müssen. In der führenden Ordnung der Störungstheorie reduziert sich die Anzahl der Funktionen. Diese Funktionen stimmen bis auf den Beitrag eines Operators mit vier Quarkfeldern mit den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Shapefunktionen überein. Da in dieser Arbeit keine Strahlungskorrekturen betrachtet werden, können die Resultate als Modell einer Rechnung in der SCET angesehen werden.

Kapitel 3

Das hadronische Spektrum im Zerfall $B \rightarrow X_c \ell \nu$

In den vorangegangenen Kapiteln wurde erläutert, dass die Berechnung von inklusiven Zerfallsspektren für die Bestimmung der nicht-perturbativen Parameter der HQET von Bedeutung sind. Die genaue Kenntnis dieser Parameter ist unbedingt notwendig um eine präzise Ermittlung der CKM-Matrixelemente V_{ub} und V_{cb} zu ermöglichen. Dadurch kann im Detail geprüft werden, ob sich die Messgrößen zu dem Unitaritätsdreieck kombiniert werden können. Ist eine solche Konstruktion mit experimentellen Daten nicht möglich, wäre dies ein konkreter Hinweis auf neue Physik jenseits des Standardmodells.

Die hadronischen Parameter werden mit Hilfe der an den Experimenten gemessenen Momenten der Zerfallsspektren bestimmt. Der experimentelle Fehler dieser Momente kann reduziert werden, wenn an Stelle des gesamten Spektrums nur ein Intervall in die Ermittlung eingeht. Solche physikalischen Schnitte verursachen allerdings Probleme bei der Berechnung der theoretischen Vorhersage. Da die Spektren, die durch die $1/m_b$ -Entwicklung ermittelt wurden, einen physikalisch nicht interpretierbaren Verlauf besitzen, führt die Betrachtung von Teilintervallen zu hohen Ungenauigkeiten. Eine Lösung für dieses Problem bietet die Lichtkegelentwicklung. Durch ein modifiziertes Powercounting, das die kinematische Situation im Endpunktbereich beschreibt, erhält man ein glattes Spektrum in dem zuverlässig Schnitte gesetzt werden können.

Zwei der möglichen Spektren für semileptonische Zerfälle sind das Energiespektrum des geladenen Leptons und das hadronische Massenspektrum. Die Experimente, die speziell zur Untersuchung der Physik von B-Mesonen gebaut worden sind, haben im Laufe der Jahre eine große Menge von Daten sammeln können [1]. Somit verbesserte sich auch die Genauigkeit der Messungen von hohen Momenten des Spektrums, die wiederum Aufschluss auf Parameter der HQET geben [71]. Der Zerfall eines b-Quarks in ein c-Quark und Leptonpaar hat das größte Verzweungsverhältnis der semileptonischen Prozesse. Dies ist hauptsächlich auf die Größe des CKM-Matrixelementes V_{cb} zurückzuführen. Während

dieser Zerfall bei der Extraktion des Elements V_{ub} als störender Hintergrund angesehen wird, stellt gerade der dominierende Charakter dieses Prozesses sehr große Datenmengen zur Verfügung mit denen V_{cb} und die hadronischen Parameter sehr präzise bestimmt werden können.

Im Energiespektrum des Leptons treten unphysikalische Deltafunktionen durch die $1/m_b$ -Entwicklung bei hohen Energien, also im Endpunktbereich des Spektrums, auf. Dies ist besonders für die Bestimmung von V_{ub} problematisch, da nur in diesem Bereich keine Hintergrundereignisse des Prozesses $b \rightarrow c \ell \nu$ auftreten. Die gleiche kinematische Situation findet man im hadronischen Spektrum bei kleinen Massen und auch hier bricht die $1/m_b$ -Entwicklung zusammen. Die Rate ist an dieser Stelle hauptsächlich durch die zwei dominierenden Resonanzen der D- und D*-Mesonen gegeben. Die Analyse von inklusiven Zerfällen kann zwar diese Struktur nicht genau nachbilden, da über die Einzelheiten der Zerfallsprodukte summiert wird, aber der Großteil des Spektrums befindet sich in diesem Bereich. Der Verlauf des Spektrums an dieser Stelle ist hauptsächlich durch die Effekte der Lichtkegelentwicklung gegeben, da das Powercounting auf die kinematische Situation in diesem Intervall abgestimmt ist.

Dieses Kapitel ist wie folgt untergliedert: Zuerst werden die Ergebnisse für die hadronisch invariante Masse, die sich aus dem partonischen Zerfall ergeben, berechnet. Obwohl das Spektrum der partonischen Masse durch eine Deltafunktion beschrieben wird, findet man für die hadronische Masse eine endliche Verteilung. Danach wird die Lichtkegelentwicklung für den Prozess vorgestellt. Nach der Ermittlung der Matrixelemente mit den Zuständen der B-Mesonen, die zur Beschreibung des Resultats benötigt werden, werden die auftretenden Shapefunktionen diskutiert. Das darauf folgende Unterkapitel präsentiert das Spektrum der hadronisch invarianten Masse. Abschließend wird anhand einer Entwicklung der Shapefunktionen gezeigt, dass die berechneten Ergebnisse mit denen der $1/m_b$ -Entwicklung kompatibel sind.

3.1 Partonisches Ergebnis

Die einfachste Methode eine theoretische Vorhersage für das Massenspektrum zu erhalten, ist die Betrachtung des partonischen Prozesses. Hierbei wird das B-Meson durch ein b-Quark ersetzt, das durch den effektiven Hamiltonoperator (2.22) zerfällt. Das c-Quark, das in diesem Prozess entsteht, kann nach der Produktion mit anderen Quarks hadronisieren. Dies stellt eine sehr grobe Vereinfachung der Problematik dar, ist aber für das prinzipielle Verständnis der Vorgänge nützlich. Man unterscheidet zwischen der partonisch invarianten Masse, die durch das Quadrat des Impuls des c-Quark gegeben ist

$$s_0 = p_c^2 = m_c^2 \quad (3.1)$$

und der hadronisch invarianten Masse, die durch das Quadrat des Impulsvektors des hadronischen Zerfallsprodukts definiert ist.

$$s_H = P^2 = (m_B - q)^2 \quad (3.2)$$

Das Spektrum der partonisch invarianten Masse ist, wie nachfolgend diskutiert, durch eine Deltafunktion gegeben, welche die kinematische Bedingung (3.1) beschreibt. Die doppelt differentielle Rate für den semileptonischen Zerfall eines b-Quarks in ein c-Quark lautet

$$d\Gamma = \frac{4}{m_b^6} \Gamma_0 (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) W_{\mu\nu} (q_- - q_+)^2 \theta(q_-) \theta(q_+ - q_-) dq_+ dq_- \quad (3.3)$$

Die Größen q_+ und q_- stellen die Projektionen auf die Lichtkegelvektoren n^μ und \bar{n}^μ , siehe Kapitel 2.3, des Impulsübertrags zwischen b-Quark und den Leptonen, q^μ , dar, während $W_{\mu\nu}$ den partonischen Zerfallsprozess beschreibt. Die Größe Γ_0 repräsentiert eine Kombination von Konstanten

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_b^5}{192\pi^3} \quad (3.4)$$

Zur Herleitung der differentiellen Rate wurden einige Annahmen über den Zerfall getroffen, die aber die Allgemeinheit des Resultats nicht einschränken. Das Koordinatensystem wurde so gedreht, dass der Impulsübertrag q^μ nur durch die zwei Lichtkegelvektoren n^μ und \bar{n}^μ ausgedrückt wird. Bei der Wahl dieser Vektoren wie in (2.39) kann dies durch eine Rotation erreicht werden, welche die z-Achse in Richtung des Impulsübertrags ausrichtet. Da im partonischen Grenzfall nur ein Zerfallskanal existiert, kann die Rate mit Hilfe der Methoden für die Berechnung von inklusiven Zerfällen ermittelt werden. Damit ist der Tensor $W_{\mu\nu}$ gegeben durch [43]

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(-i \int d^4x e^{-iQ \cdot x} \langle b | T [J^{\dagger\mu}(x) J^\nu(0)] | b \rangle \right) \quad (3.5)$$

Der Strom J^μ beschreibt die Wechselwirkung der Quarks und ist bis auf Konstanten mit dem effektiven Hamiltonoperator aus (2.22) identisch. Da in dieser Arbeit die Korrekturen von höheren Ordnungen der Störungstheorie vernachlässigt werden, kann (3.5) durch ein einziges Feynmandiagramm dargestellt werden. Dieses Diagramm wird in Abbildung 3.1 gezeigt. Dabei sind auch die Anteile der Leptonen eingezeichnet. Über diese Freiheitsgrade wurde bei der Berechnung der differentiellen Rate bereits integriert, so dass nur noch der Impulsübertrag q^μ über die Lorentzindizes an den Tensor $W^{\mu\nu}$ koppelt. Entfernt man die Leptonen vom Diagramm erhält man

$$\bar{u}_b \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_c - m_c}{p_c^2 - m_c^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \quad (3.6)$$

Die Diracmatrizen des Ausdrucks (3.6) können in eine Summe von bilinearen Kovarianten umgeschrieben werden. Dabei entstehen nur Terme proportional zu γ_β und $\gamma_5 \gamma_\beta$.

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma^\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right] \gamma_\beta - \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right] \gamma_5 \gamma_\beta \quad (3.7)$$

Die Kombination der Diracmatrizen $\gamma_5 \gamma_\beta$ repräsentiert zwischen den Spinoren u_b den Spin des b-Quarks. Da keine Polarisationsanalyse erfolgt und damit über sämtlich Spinkonfigurationen summiert wird, verschwindet dieser Term. Die verbleibende Kombination aus Diracmatrix γ_β und den Spinoren kann mit Hilfe der Gordonidentität vereinfacht werden.

$$\bar{u}_b(p, \epsilon) \gamma^\beta u_b(p, \epsilon) = 2p_b^\beta = 2m_b v^\beta \quad (3.8)$$

Da im partonischen Fall ein freies b-Quark zerfällt, ist dessen Impuls durch die Masse m_b und die Geschwindigkeit v^μ gegeben. Eingesetzt erhält man

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\frac{p_c^\alpha}{p_c^2 - m_c^2 + i\epsilon} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma^\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right] 2m_b v^\beta \right) \quad (3.9)$$

Das einzige imaginäre Objekt dieses Terms ist der infinitesimale Parameter $i\epsilon$. Dadurch ist die Ermittlung des Imaginärteils mittels (2.35) eine einfache Aufgabe. Man erhält eine Deltafunktion, die das Quadrat des Impuls mit dem Quadrat der Masse des c-Quarks verbindet.

$$W_{\mu\nu} = p_c^\alpha \delta(p_c^2 - m_c^2) \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma^\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right] 2m_b v^\beta \quad (3.10)$$

Dieser Term wird nun in die differentielle Rate eingesetzt und mit den Vektoren des Impulsübertrags q^μ kontrahiert. Auf Grund der Identität (3.1) kann das Quadrat des Impuls des c-Quarks als die partonisch invariante Masse s_0 geschrieben werden.

$$d\Gamma = \frac{4}{m_b^5} \Gamma_0 \delta(s_0 - m_c^2) (p_c \cdot v q^2 + 2p_c \cdot q v \cdot q) (q_- - q_+)^2 \theta(q_-) \theta(q_+ - q_-) dq_+ dq_- \quad (3.11)$$

Mit Hilfe der Impulserhaltung können die Komponenten des Impulsübertrags q^μ durch den Impuls des b-Quarks und des c-Quarks p_c^μ ausgedrückt werden. Da der Impulsübertrag nur durch die Lichtkegelvektoren geschrieben werden kann und der Impuls des b-Quarks

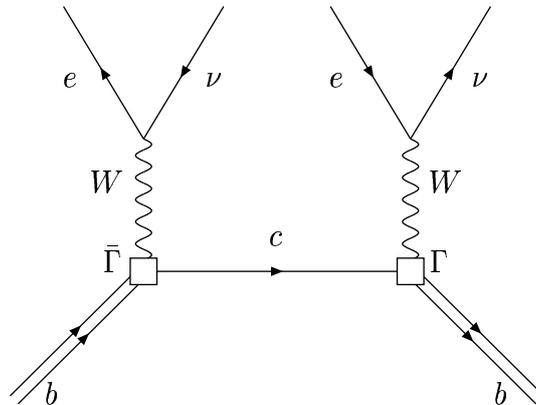


Abbildung 3.1: Feynmandiagramm für den semileptonischen Zerfall eines b-Quarks

auch nur von der Geschwindigkeit v^μ und damit von einer Kombination der Lichtkegelvektoren abhängt, ist auch der Impuls der c-Quarks eine Summe von n^μ und \bar{n}^μ mit entsprechenden Vorfaktoren. Dadurch ist die partonisch invariante Masse durch das Produkt der Projektionen von p_c^μ auf den Lichtkegel gegeben. Im Folgenden wird der Impuls des c-Quarks als p^μ bezeichnet.

$$\begin{aligned} q_+ &= (m_b v - p) \cdot n = m_b - n \cdot p = m_b - p_+ \\ q_- &= (m_b v - p) \cdot \bar{n} = m_b - \bar{n} \cdot p = m_b - p_- \\ p_+ &= \frac{s_0}{p_-} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Durch diese Variablentransformation erhält die differentielle Rate folgende Form:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{2\Gamma_0}{m_b^5} \frac{(s_0 - p_-^2)^2}{p_-^5} (s_0^2(3p_- - 2m_b) + s_0(p_-^3 - 8m_b p_-^2 + 3m_b^2 p_-) - 2m_b p_-^4 + 3m_b^2 p_-^3) \\ &\quad \delta(s_0 - m_c^2) \theta(m_b - p_-) \theta(m_b - \frac{s_0}{p_-}) \theta(p_- - \frac{s_0}{p_-}) ds_0 dp_- \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Eine Integration über die Lichtkegelkomponente $\sqrt{s_0} \leq p_- \leq m_b$ liefert das Spektrum der partonisch invarianten Masse.

$$\frac{d\Gamma}{ds_0} = \Gamma_0 \delta(s_0 - m_c^2) \left(1 - \frac{8s_0}{m_b^2} - \frac{12s_0^2 \log\left(\frac{s_0}{m_b^2}\right)}{m_b^4} + \frac{8s_0^3}{m_b^6} - \frac{s_0^4}{m_b^8} \right) \quad (3.14)$$

Das Spektrum zeigt eine Abhängigkeit von einer Deltafunktion, welche den Wert der partonisch invariante Masse auf das Quadrat der Masse des c-Quarks fixiert. Die restlichen Terme sind Ausdrücke, die auf Grund der Kinematik auftreten. Das Resultat ist identisch mit dem Ergebnis aus [49].

Aus diesem Resultat lässt sich das Spektrum der hadronisch invarianten Masse s_H im partonischen Grenzfall ermitteln. Die hadronisch invariante Masse ist definiert durch das Quadrat des Impuls P^μ eines Mesons, das ein c-Quark enthält. Damit die differentielle Rate in Abhängigkeit von s_H geschrieben werden kann, wird der partonische Impuls p^μ durch P^μ ersetzt. Hierzu wird der Zerfall eines B-Mesons betrachtet, bei dem, auf Grund der Impulserhaltung, der Impuls des B-Mesons p_B der Summe des Impuls der Leptonen q^μ und P^μ entspricht. Der Massenunterschied zwischen Meson und Quark kann in der HQET berechnet werden und dadurch kann der Impuls des B-Mesons mit dem des b-Quarks in Verbindung gebracht werden.

$$p_B^\mu = m_B v^\mu = (m_b + \Lambda) v^\mu = p_b^\mu + \Lambda v^\mu \quad (3.15)$$

Der Impuls des Mesons unterscheidet sich also nur durch den Vektor Λv^μ von dem Impuls des b-Quarks. Da die Verschiebung nur in Richtung der Geschwindigkeit v^μ geschieht, besitzt auch der Impuls des hadronischen Jets keine Komponenten, die senkrecht auf den

Lichtkegelvektoren stehen. Damit erhält man für die Aufspaltung von P^μ in Lichtkegelkomponenten

$$\begin{aligned} P_+ &= (m_B v - q) \cdot n = m_b + \Lambda - q_+ = p_+ + \Lambda \\ P_- &= (m_B v - q) \cdot \bar{n} = m_b + \Lambda - q_- = p_- + \Lambda \end{aligned} \quad (3.16)$$

In (3.13) kann nun die partonisch invariante Masse $s_0 = p_+ p_-$ durch die hadronisch invariante Masse $s_H = P_+ P_-$ ersetzt werden.

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{2\Gamma_0 (s_H - P_-^2)^2}{m_b^5 P_-^5} \delta((P_- - \Lambda) \left(\frac{s_H}{P_-} - \Lambda\right) - m_c^2) \{s_H^2 [3(P_- - \Lambda) - 2m_b] \\ &\quad + s_H P_- [3m_b^2 + m_b(12\Lambda - 8P_-) + 3(P_- - 3\Lambda)(P_- - \Lambda)] \\ &\quad + P_-^2 [3(P_- - 2\Lambda)m_b^2 + 2(P_-^2 - 6\Lambda P_- + 6\Lambda^2)m_b + 3(P_- - 2\Lambda)(P_- - \Lambda)\Lambda]\} \\ &\quad \theta(m_b - P_- + \Lambda) \theta(m_b - \frac{s_H}{P_-} + \Lambda) \theta(P_- - \frac{s_H}{P_-}) ds_H dP_- \end{aligned} \quad (3.17)$$

Im Vergleich zu (3.13) enthält das Argument der Deltafunktion die Variablen s_H und P_- und somit verschwindet die Deltafunktion durch eine Integration über P_- . Dadurch erhält das Spektrum der hadronisch invarianten Masse einen kontinuierlichen Verlauf. Dieses Ergebnis wird später mit dem Resultat der Lichtkegelentwicklung verglichen. Da dieser Entwicklung ein bestimmtes Powercounting zu Grunde liegt, macht es Sinn im Folgenden das partonische Resultat ebenfalls unter den Annahmen der Lichtkegelentwicklung zu untersuchen. Wie in Kapitel 2.3 beschrieben, wird bei dieser Entwicklung eine bestimmte kinematische Situation betrachtet. In dieser Situation besitzen die Zerfallsprodukte die maximal mögliche Energie. Der Wert der hadronisch invarianten Masse ist in diesem Fall von der Ordnung $m_b \Lambda_{QCD}$. Genau wie bei der $1/m_b$ -Entwicklung kann auch hier das Problem in zwei Größenordnungen, m_b und Λ_{QCD} , eingeordnet werden. Diese Ordnungen beschreiben das Verhältnis der Lichtkegelkomponenten P_- und P_+ . Die hadronisch invariante Masse ist durch das Produkt der beiden Komponenten definiert und somit gilt $s_H = P_- P_+ \sim \mathcal{O}(m_b \Lambda_{QCD})$. Dies ist keine neue Größenordnung des Zerfalls sondern lediglich eine Konsequenz der kinematischen Verhältnisse. Da das b-Quark relativ schwer ist, kann der Quotient dieser Ordnungen als Entwicklungsparameter verwendet werden. Das Powercounting für die Lichtkegelentwicklung wird deshalb mit skalierten Größen beschrieben. Äquivalent zu (2.43) sind die Projektionen des Impulsvektors des hadronischen Zerfallsprodukt von verschiedenen Größenordnungen.

$$\begin{aligned} \hat{P}_- &= \frac{1}{m_b} P_- = ((1 + \hat{\Lambda})v - \hat{q}) \cdot \bar{n} \sim \mathcal{O}(1) \\ \hat{P}_+ &= \frac{1}{m_b} P_+ = ((1 + \hat{\Lambda})v - \hat{q}) \cdot n \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \\ \hat{s}_H &= \frac{s_H}{m_b^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Eine besondere Rolle spielt die Masse des c-Quarks, die im Argument der Deltafunktion auftritt. Wie bereits erwähnt, ist es auf Grund der Struktur der starken Wechselwirkung

nicht möglich, die Masse eines Quarks direkt im Experiment zu messen. Die theoretischen Vorhersagen für diese Werte basieren auf perturbativen Rechnungen, die je nach verwendetem Schema von einander abweichen. Das Intervall der möglichen Werte für die Masse des c-Quarks befindet sich in einem Bereich, der zwischen der Skala der starken Wechselwirkung und der Masse des D-Mesons liegt. Der numerische Wert von m_c^2 ist genau wie die hadronisch invariante Masse von der Größenordnung $m_b \Lambda_{QCD}$ und damit ist \hat{m}_c^2 vergleichbar mit dem Entwicklungsparameter $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}/m_b)$. Das Powercounting wird somit um einen Eintrag erweitert:

$$\hat{m}_c^2 = \frac{m_c^2}{m_b^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \quad . \quad (3.19)$$

Nun kann das Ergebnis in (3.17) gemäß des Powercountings entwickelt werden. In führender Ordnung ergibt sich

$$d\Gamma = \frac{2\Gamma_0}{m_b^4} \delta(s_H - m_c^2 - P_- \Lambda) \theta(m_b - P_-) \theta(P_-) P_-^2 (3m_b - 2P_-) ds_H dP_- \quad . \quad (3.20)$$

Die Integration über die Impulskomponente P_- kann mit Hilfe der Deltafunktion durchgeführt werden. Eine bessere Übersicht kann erreicht werden, indem die hadronisch invariante Masse durch die Größe $S = s_H - m_c^2$ ersetzt wird. Das Spektrum lautet dann in führender Ordnung

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \frac{2\Gamma_0}{m_b^4 \Lambda^4} S^2 (3m_b \Lambda - 2S) \theta(m_b \Lambda - S) \theta(S) \quad . \quad (3.21)$$

Wird S als die hadronisch invariante Masse ohne Verschiebung um m_c^2 definiert, stimmt das Ergebnis mit der partonischen Rechnung aus [62] für den semileptonischen Zerfall eines b-Quarks in ein u-Quark überein.

3.2 Lichtkegelentwicklung

Der partonische Grenzfall des betrachteten Prozesses, der Zerfall eines b-Quarks, führte, wie im vorangegangenen Unterkapitel gezeigt, zu einem kontinuierlichen Spektrum. Dieses Resultat stellt den Verlauf des Spektrums in einer groben Näherung dar. Vorallem das abrupte Ende des Spektrums an der oberen Grenze $s_H = m_c^2 + m_b \Lambda$ entspricht nicht der physikalischen Situation. Zwar wurde gezeigt, dass sich das Spektrum durch das Einbeziehen von perturbativen Korrekturen auch auf höhere Werte der hadronisch invarianten Masse ausdehnt, doch auch dann bleibt an dieser Stelle ein unphysikalischer Sprung [72]. Die Lichtkegelentwicklung beseitigt durch ein verändertes Powercounting diesen Umstand und liefert ein glattes Spektrum.

In diesem Unterkapitel wird das Spektrum der hadronisch invarianten Masse berechnet. Ausgangspunkt ist wie oben bei der Betrachtung des partonischen Grenzfalls die doppelt

differentielle Rate

$$d\Gamma = \frac{4}{m_b^6} \Gamma_0 (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) W_{\mu\nu} (q_- - q_+)^2 \theta(q_-) \theta(q_+ - q_-) dq_+ dq_- \quad . \quad (3.22)$$

Hierbei wurde wieder das Koordinatensystem so definiert, dass der Impulsübertrag q^μ lediglich Komponenten in Richtung von n^μ und \bar{n}^μ besitzt. Im Gegensatz zur Definition bei der Betrachtung des partonischen Grenzfalles (3.5), beschreibt der hadronische Tensor $W^{\mu\nu}$ den inklusiven Zerfall eines B-Mesons und ist somit abhängig von den Zuständen dieser Mesonen.

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(-i \int d^4x e^{-iQ \cdot x} \langle B | T [J^{\dagger\mu}(x) J^\nu(0)] | B \rangle \right) \quad (3.23)$$

Der Austausch der Zustände führt zu folgender Komplikation. Da das B-Meson einen aus Quarks und Gluonen zusammengesetzten Zustand darstellt, kann das Matrixelement des Produkts der Operatoren $T[J^{\dagger\mu}(x) J^\nu(0)]$ nicht mehr innerhalb der Störungsrechnung bestimmt werden. Deshalb wird das Produkt mit Hilfe der Lichtkegelentwicklung in Wilsonkoeffizienten, die mit der Störungsrechnung ermittelt werden können, und Operatoren, welche die Bindungseffekte innerhalb des Mesons beschreiben, aufgespalten. Die verwendete Methode ist eine Operatorproduktentwicklung und stellt damit eine Relation zwischen Operatoren dar. Die konkrete Berechnung der Wilsonkoeffizienten ist somit unabhängig von dem betrachteten Prozess und kann auch im partonischen Grenzfall durchgeführt werden. Dies vereinfacht das weitere Vorgehen erheblich. Zuerst wird eine Operatorbasis bestimmt, welche die Operatoren der Lichtkegelentwicklung darstellen. Danach werden die Wilsonkoeffizienten ermittelt, indem das partonische Matrixelement des Operatorprodukts aus (3.23) mit den Matrixelementen der Operatorbasis verglichen werden. Wie in vorangegangene Arbeiten [62, 64], die sich mit Lichtkegelentwicklungen im Bereich der Zerfälle von B-Mesonen beschäftigen, wählt man folgende Operatorbasis:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0^\lambda(\omega) &= \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_1^{\kappa\lambda}(\omega) &= \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega_2) iD^\kappa \delta(iD_+ + \omega_1) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_3^\lambda(\omega) &= \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (iD_\perp)^2 \delta(iD_+ + \omega_1) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_4^\lambda(\omega) &= \\ &\quad -\frac{g}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \bar{b}_v \delta(iD_+ + \omega_2) \left(\epsilon \cdot \hat{G} \right)_\perp \delta(iD_+ + \omega_1) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \gamma_5 \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega) &= \bar{b}_v \{ iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega) \} \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma b_v \\ \mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega) &= \bar{b}_v [iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)] \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \gamma_5 \Gamma b_v \end{aligned} \quad (3.24)$$

Genau wie in Kapitel 2.3 stellt $\epsilon \cdot \hat{G} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha n^\beta G^{\mu\nu}$ die Kontraktion des Gluonfeldstärke-tensor mit dem Levi-Civita Tensor dar. Im Gegensatz zu der Operatorbasis, die im vorangegangenen Kapitel definiert wurde, befindet sich nun ein weiterer Operator, $\mathcal{O}_1^{\kappa\lambda(\omega)}$ in der

Aufzählung. Dieser Operator muss in der Rechnung auf Grund der Größenordnung der invarianten Masse des c -Quarks berücksichtigt werden. Er tritt nur bei inklusiven Zerfällen auf, bei denen ein c -Quark beteiligt ist, da die Massen der restlichen Quarks entweder wesentlich kleiner oder größer sind. Bei der Berechnung des Leptonenergiespektrums in [64] für den hier betrachteten Prozess, ist neben dem hier aufgeführten noch ein weiterer Operator nötig, um das Spektrum komplett beschreiben zu können. Die neu hinzugefügten Operatoren haben Auswirkungen auf das Ergebnis des Leptonenergiespektrums im Zerfall $B \rightarrow X_u \ell \nu$. Da in [64] nicht der Propagator des c -Quarks sondern ein Diagramm mit einer Schleife entwickelt wurde, werden die Ergebnisse momentan noch hinsichtlich ihrer Gültigkeit diskutiert, z.B. [73, 63]. In der vorliegenden Arbeit wird für die Ermittlung des Spektrums der hadronisch invarianten Masse der Propagator des c -Quarks entwickelt und diese Methode hat bereits in anderen Prozessen richtige Ergebnisse geliefert, z.B. [61]. Als weiteren Beleg dafür, dass dieser Operator in der Entwicklung auftritt, ist die Tatsache zu werten, dass der Wilsonkoeffizient des Operators, wie weiter unten zu sehen ist, eine Proportionalität zur Masse des c -Quarks aufweist. Somit ist das Auftreten nur auf Zerfälle beschränkt, in denen die Quarkmasse des Zerfallsprodukt nicht vernachlässigt wird. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit reproduzieren daher die publizierten Ergebnisse des Spektrums der hadronisch invarianten Masse für den Zerfall $B \rightarrow X_u \ell \nu$ [62], falls die Masse des c -Quarks vernachlässigt wird.

3.2.1 Matrixelement ohne Gluonabstrahlung

Zur Berechnung der Wilsonkoeffizienten der Operatoren in (3.24) wird also wie im Unterkapitel zuvor der Zerfall eines b -Quarks betrachtet. In Kapitel 2.3 wurde das prinzipielle Vorgehen bei dieser Operatorproduktentwicklung bereits beschrieben. Da die Operatorproduktentwicklung unabhängig von den Zuständen ist, kann ein beliebiges Diagramm betrachtet werden, das durch den hadronischen Tensor (3.23) definiert ist. Das einfachste Diagramm ist ein Vorgang ohne die Abstrahlung von Gluonen, das in Abbildung 3.1 gezeigt ist. Genau wie zuvor erhält man durch Anwenden der Feynmanregeln

$$\bar{u}_b \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_c - m_c}{p_c^2 - m_c^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \quad . \quad (3.25)$$

Im nächsten Schritt wird dieser Term entwickelt um aus den entstehenden Summanden die Wilsonkoeffizienten zu bestimmen. Zuerst werden dazu die Vektoren in Anteile parallel und senkrecht zu den Lichtkegelvektoren n^μ und \bar{n}^μ aufgespalten. Außerdem wird der Impuls des c -Quarks p_c^μ als die Differenz aus dem Impuls des b -Quarks p_b^μ und des Leptonpaares q^μ geschrieben. Der Impuls des b -Quarks kann daraufhin wie in (2.1) durch die Geschwindigkeit v^μ und den Restimpuls k^μ ausgedrückt werden. Man erhält dadurch

$$\bar{u}_b \gamma_\mu \frac{\frac{1}{2}(p_- + k_-)\not{v} + \frac{1}{2}(p_+ + k_+)\not{v} + \not{k}_\perp}{(p_- + k_-)(p_+ + k_+) + k_\perp^2 - m_c^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \quad (3.26)$$

mit $p^\mu = m_b v^\mu - q^\mu$. Dieser Term wird nun gemäß des Powercountings der Lichtkegelentwicklung bearbeitet. Wie oben bereits erwähnt, liegen die Werte der skalierten Masse des

c-Quarks $\hat{m}_c = m_c^2/m_b^2$ in einem Bereich, der von der gleichen Größenordnung wie der Entwicklungsparameter Λ_{QCD}/m_b ist. Somit lautet das Powercounting in der hier verwendeten Notation:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_- &= \frac{1}{m_b} p_- = (v - \hat{q}) \cdot \bar{n} \sim \mathcal{O}(1) \\
\hat{p}_+ &= \frac{1}{m_b} p_+ = (v - \hat{q}) \cdot n \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \\
\hat{k}^\mu &= \frac{1}{m_b} k^\mu \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \\
\hat{m}_c^2 &= \frac{m_c^2}{m_b^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \\
\hat{\Lambda} &= \frac{\Lambda}{m_b} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) .
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Die hier gezeigte Rechnung wird nicht mit skalierten Größen durchgeführt um später die Ergebnisse mit Hilfe einer Dimensionsanalyse prüfen zu können. Die Entwicklung ergibt somit folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_b \gamma_\mu \left[\frac{p_-}{2(\Delta - m_c^2 + i\epsilon)} \not{p} + \frac{\Delta}{2p_-(\Delta - m_c^2 + i\epsilon)} \not{p} + \frac{1}{\Delta - m_c^2 + i\epsilon} \not{k}_\perp \right. \\
\left. - \frac{k_- m_c^2 + p_- k_\perp^2}{2(\Delta - m_c^2 + i\epsilon)^2} \not{p} + \dots \right] \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \tag{3.28}
\end{aligned}$$

mit $\Delta = p_-(p_+ + k_+)$. Damit die Bestimmung der Wilsonkoeffizienten der Operatoren in (3.24) gelingt, muss das Ergebnis noch leicht modifiziert werden. Hierzu wird die $+$ -Komponente des Restimpuls anhand einer Integration über eine Deltafunktion durch die Größe ω ersetzt. Dadurch wird Δ zu $\Delta_\omega = p_-(p_+ - \omega)$.

$$\begin{aligned}
\bar{u}_b \int d\omega \delta(\omega + k_+) \gamma_\mu \left[\frac{p_-}{2(\Delta_\omega - m_c^2 + i\epsilon)} \not{p} + \frac{\Delta_\omega}{2p_-(\Delta_\omega - m_c^2 + i\epsilon)} \not{p} + \frac{1}{\Delta_\omega - m_c^2 + i\epsilon} \not{k}_\perp \right. \\
\left. - \frac{k_- m_c^2 + p_- k_\perp^2}{2(\Delta_\omega - m_c^2 + i\epsilon)^2} \not{p} + \dots \right] \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung des partonischen Resultats wurden zuerst die Matrixelemente und danach deren Imaginärteil ermittelt um so ein Ergebnis für den Tensor $W^{\mu\nu}$ zu erhalten. Zur Bestimmung der Wilsonkoeffizient wird nun zuerst der Imaginärteil der Terme betrachtet. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\bar{u}_b \int d\omega \delta(\omega + k_+) \gamma_\mu \left[\left(\frac{p_-}{2} \not{p} + \frac{\Delta_\omega}{2p_-} \not{p} + \not{k}_\perp \right) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \right. \\
\left. + \frac{k_- m_c^2 + p_- k_\perp^2}{2} \not{p} \delta'(\Delta_\omega - m_c^2) + \dots \right] \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Diese Terme müssen mit den partonischen Matrixelementen der Operatorbasis in Verbindung gebracht werden. Nun wird der Vorteil der Betrachtung des partonischen Grenzfalls deutlich. Die Matrixelemente der Operatoren in (3.24) können mit den Zuständen von freien Quarks relativ einfach berechnet werden. Die Entwicklung des Diagramms wird sich als eine Summe aus Matrixelementen

$$\begin{aligned}
\langle b|\mathcal{O}_0^\lambda(\omega)|b\rangle &= \delta(\hat{k}_+ + \omega)\bar{u}_b\bar{\Gamma}\gamma^\lambda\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_1^{\kappa\lambda}(\omega)|b\rangle &= -\hat{k}^\kappa\delta'(\hat{k}_+ + \omega_1)\bar{u}_b\bar{\Gamma}\gamma^\lambda\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_3^\lambda(\omega)|b\rangle &= -\hat{k}_\perp^2\delta'(\omega + \hat{k}_+)\bar{u}_b\bar{\Gamma}\gamma^\lambda\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_4^\lambda(\omega)|b\rangle &= 0 \\
\langle b|\mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega)|b\rangle &= 2\hat{k}^\kappa\delta(\hat{k}_+ + \omega)\bar{u}_b\bar{\Gamma}\gamma^\lambda\Gamma u_b \\
\langle b|\mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)|b\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

mit geeigneten Wilsonkoeffizienten schreiben lassen. Dies ist möglich nach einer partiellen Integration der Terme proportional zu $\delta'(\Delta_\omega - m_c^2)$ bezüglich der Integrationsvariable ω .

$$\begin{aligned}
\bar{u}_b \int d\omega \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \gamma_\mu \left[\left(\frac{p_-}{2} \not{n} + \frac{\Delta_\omega}{2p_-} \not{n} + \not{k}_\perp \right) \delta(\omega + k_+) \right. \\
\left. + \frac{k_- m_c^2 + p_- k_\perp^2}{2p_-} \not{n} \delta'(\omega + k_+) + \dots \right] \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Durch den Vergleich mit (3.31) sieht man, dass mit dem Diagramm die Koeffizienten der Operatoren, deren Matrixelement nicht verschwindet, bestimmt werden können. Damit erhält man für einen Teil der Operatoren aus (3.24) die Wilsonkoeffizienten.

$$\begin{aligned}
C_0^\lambda(\omega) &= \left(\frac{p_-}{2} n^\lambda + \frac{\Delta_\omega}{2p_-} \bar{n}^\lambda \right) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_1^{\kappa\lambda}(\omega) &= -\frac{\bar{n}^\kappa m_c^2}{2p_-} n^\lambda \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_3^\lambda(\omega) &= -\frac{1}{2} n^\lambda \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_S^{\kappa\lambda}(\omega) &= \frac{1}{2} g_\perp^{\kappa\lambda} \delta(\Delta_\omega - m_c^2)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dabei stellt $g_\perp^{\kappa\lambda}$ die senkrechten Komponenten des metrischen Tensors dar, die definiert sind als $a_\perp^\kappa = g_\perp^{\kappa\lambda} a_\lambda$ mit der Definition von a_\perp^κ aus (2.37).

3.2.2 Matrixelement mit Gluonabstrahlung

Mit dem verwendeten Diagramm konnte nur ein Teil der Wilsonkoeffizienten bestimmt werden. Deshalb muss noch das Matrixelement mit der Abstrahlung eines Gluons betrachtet werden, da die noch nicht bestimmten Koeffizienten zu Operatoren gehören, die

antisymmetrische Kombinationen der kovarianten Ableitung beinhalten. Die starke Wechselwirkung beruht auf einer nicht-abelschen Symmetriegruppe und somit tritt in diesen Operatoren zumindest einmal das Quantenfeld des Gluons auf. Diese Operatoren tragen dadurch aber nur zu Prozessen bei, die ein Gluon im Endzustand aufweisen. Deshalb muss das gleiche Vorgehen wie im letzten Abschnitt noch einmal für das Diagramm in Abbildung 3.2 durchgeführt werden. Hierzu erhält man durch Anwenden der Feynmanregeln

$$\bar{u}_b \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \frac{i(\not{p}_c + m_c)(-ig\not{\epsilon})i(\not{p}_c + \not{l} + m_c)}{(p_c^2 - m_c^2 + i\epsilon)((p_c + l)^2 - m_c^2 + i\epsilon)} \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \quad . \quad (3.34)$$

Der Impuls und die Polarisation des Gluons werden mit l^μ bzw. ϵ^μ bezeichnet. Die Abstrahlung des Gluons darf dabei die kinematischen Voraussetzungen des Powercountings nicht verändern. Wie in dem Diagramm in Abbildung 3.2 zu sehen ist, wird das Gluon von dem c-Quark emittiert. Das Quark trägt in der kinematischen Situation, die durch das Powercounting beschrieben wird, einen Impuls der Größenordnung m_b . Daher muss das Gluon mit einer Energie der Ordnung Λ_{QCD} abgestrahlt werden, damit der Impuls des c-Quarks seine Größenordnung beibehält. Somit wird das Powercounting in (3.27) um eine Bedingung erweitert

$$\hat{l}^\mu = \frac{1}{m_b} l^\mu \sim \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}\right) \quad . \quad (3.35)$$

Nun werden wieder die Vektoren durch ihre Komponenten parallel und senkrecht zu der Lichtkegelvektoren ausgedrückt. Die anschließende Entwicklung anhand des erweiterten Powercountings liefert folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \bar{u}_b \int d\omega \delta(\omega + k_+) \frac{ig}{4(\Delta_\omega - m_c^2 + i\epsilon)(\Delta_\omega + p_- l_+ - m_c^2 + i\epsilon)} \gamma_\mu \left[-2\not{\epsilon}(2\Delta_\omega + p_- l_+ - 2m_c^2) \right. \\ \left. + 2(\epsilon_- m_c^2 + p_- (2k_\perp + l_\perp) \cdot \epsilon_\perp) \not{\epsilon} + p_- \epsilon_\perp^{\alpha\beta} (2l_\alpha \epsilon_\beta \not{\epsilon} \gamma_5 + 2l_+ \epsilon_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) + \dots \right] \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \end{aligned} \quad (3.36)$$

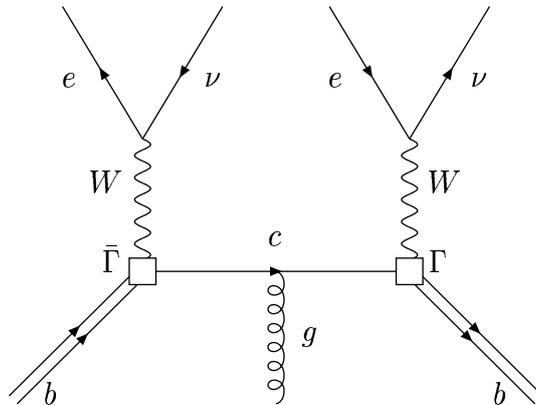


Abbildung 3.2: Feynmandiagramm des Prozesses $b \rightarrow cl\nu$ mit Abstrahlung eines Gluons

Wie zuvor wird der Imaginärteil dieses Ausdrucks bestimmt. Da der einzige imaginäre Term wie oben durch die infinitesimale Größe $i\epsilon$ gegeben ist, gilt

$$\text{Im} \left(\frac{1}{(\Delta_\omega - m_c^2 + i\epsilon)} \right) \left(\frac{1}{(\Delta_\omega + p_- l_+ - m_c^2 + i\epsilon)} \right) = \frac{\delta(\Delta_\omega - m_c^2) - \delta(\Delta_\omega + p_- l_+ - m_c^2)}{p_- l_+}. \quad (3.37)$$

Die imaginären Terme von (3.36) können nun mit den Matrixelementen der Operatoren aus (3.24) verglichen werden um so die Wilsonkoeffizienten ermitteln zu können. Die Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned} \langle b | \mathcal{O}_0^\lambda(\omega) | bg \rangle &= 0 \\ \langle b | \mathcal{O}_1^{\kappa\lambda}(\omega) | bg \rangle &= -g\hat{\epsilon}^\kappa \frac{\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)}{\hat{l}_+} \bar{u}_b \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma u_b \\ \langle b | \mathcal{O}_3^\lambda(\omega) | bg \rangle &= -g\hat{\epsilon}_\perp \cdot \left(2\hat{k} + \hat{l} \right)_\perp \frac{\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)}{\hat{l}_+} \bar{u}_b \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma u_b \\ \langle b | \mathcal{O}_4^\lambda(\omega) | bg \rangle &= -\frac{g}{2} \left(\hat{\epsilon} \cdot \hat{G} \right)_\perp \frac{\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)}{\hat{l}_+} \bar{u}_b \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \gamma_5 \Gamma u_b \\ \langle b | \mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega) | bg \rangle &= -g\hat{\epsilon}^\kappa (\delta(\omega + \hat{k}_+) + \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)) \bar{u}_b \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma u_b \\ \langle b | \mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega) | bg \rangle &= -g\hat{\epsilon}^\kappa (\delta(\omega + \hat{k}_+) - \delta(\omega + \hat{k}_+ + \hat{l}_+)) \bar{u}_b \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \gamma_5 \Gamma u_b \quad . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Diese Resultate enthalten auch Matrixelemente von Operatoren deren Wilsonkoeffizient schon durch die Berechnung des Diagramms ohne Gluonabstrahlung bestimmt wurden. Diese Koeffizienten müssen für beide Diagramme identisch sein und so kann das Ergebnis (3.33) des ersten Diagramms aus Abbildung 3.1 überprüft werden. Durch Umformen der Deltafunktionen kann das entwickelte Diagramm in die Form der Matrixelemente gebracht werden, da

$$\delta(\omega + k_+) \delta(\Delta_\omega + p_- l_+ - m_c^2) = \delta(\omega + k_+ + l_+) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \quad (3.39)$$

gilt. Mit Hilfe von

$$(\epsilon \cdot G)_\perp = 2\epsilon_\perp^{\alpha\beta} l_\alpha \epsilon_\beta \quad (3.40)$$

können die restlichen Wilsonkoeffizienten extrahiert und die bereits bekannten überprüft werden. Der Anteil des Tensors $W^{\mu\nu}$, der durch das Diagramm mit Gluonabstrahlung repräsentiert wird, lautet somit

$$\begin{aligned} &\bar{u}_b \int d\omega \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \gamma_\mu \frac{g}{4} [-2\not{\epsilon}(\delta(\omega + k_+) + \delta(\omega + k_+ + l_+)) \\ &+ 2\epsilon_- m_c^2 \not{\epsilon} \frac{\delta(\omega + k_+) - \delta(\omega + k_+ + l_+)}{p_- l_+} + 2\not{\epsilon} (2k_\perp + l_\perp) \cdot \epsilon_\perp \frac{\delta(\omega + k_+) - \delta(\omega + k_+ + l_+)}{l_+} \\ &\quad + 2\epsilon_\perp^{\alpha\beta} l_\alpha \epsilon_\beta \not{\epsilon} \gamma_5 \frac{\delta(\omega + k_+) - \delta(\omega + k_+ + l_+)}{l_+} \\ &+ 2\epsilon_\perp^{\alpha\beta} \epsilon_\alpha \gamma_\beta \gamma_5 (\delta(\omega + k_+) - \delta(\omega + k_+ + l_+)) + \dots] \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_b \quad . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Durch den Vergleich mit den Matrixelementen erhält man die noch fehlenden Wilsonkoeffizienten. Die Terme in den ersten zwei Zeilen entsprechen den Matrixelementen der Operatoren $\mathcal{O}_1^{\kappa\lambda}(\omega)$, $\mathcal{O}_3^\lambda(\omega)$ und $\mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega)$. Die Wilsonkoeffizienten, die sich dabei ergeben, stimmen mit den bereits zuvor ermittelten Koeffizienten überein und bestätigen somit dieses Resultat. Die letzten zwei Terme in der Klammer werden verwendet um die noch unbekanntenen Koeffizienten der Operatoren $\mathcal{O}_4^\lambda(\omega)$ und $\mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)$ zu bestimmen. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} C_4^\lambda(\omega) &= -\frac{1}{2}n^\lambda\delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\ C_A^{\kappa\lambda}(\omega) &= \frac{1}{2}i\epsilon_\perp^{\kappa\lambda}\delta(\Delta_\omega - m_c^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2.3 Resultat

Mit diesem Ergebnis sind die Operatoren und die dazugehörigen Wilsonkoeffizienten bis zur nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung bestimmt. Damit kann der Tensor $W^{\mu\nu}$ als eine Summe von Matrixelementen der Operatoren aus (3.24) geschrieben werden. Da die Lichtkegelentwicklung, wie jede Operatorproduktentwicklung, eine Relation zwischen Operatoren darstellt, sind die Ergebnisse nicht von den Zuständen abhängig und es kann für den betrachteten Prozess geschrieben werden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}Im \left(-i \int d^4x e^{-iQ \cdot x} \langle B | T [J^\dagger{}^\mu(x) J^\nu(0)] | B \rangle \right) &= \int d\omega \langle B | [C_{0\lambda}(\omega) \mathcal{O}_0^\lambda(\omega) \\ &+ C_{1\kappa\lambda}(\omega) \mathcal{O}_1^{\kappa\lambda}(\omega) + C_{3\lambda}(\omega) \mathcal{O}_3^\lambda(\omega) + C_{4\lambda}(\omega) \mathcal{O}_4^\lambda(\omega) + C_{S\kappa\lambda}(\omega) \mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega) \\ &+ C_{A\kappa\lambda}(\omega) \mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)] | B \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Operatoren sind dabei mit den Quarkfeldern b_v definiert, die sich von denen des Standardmodells lediglich durch eine Phasentransformation (2.3) unterscheiden. Damit die Vorteile der HQET genutzt werden können, werden die Felder b_v durch die der HQET, h_v , ersetzt. Dadurch vereinfacht sich die Diracstruktur der Operatoren erheblich, da (2.32) verwendet werden kann. Somit treten nur noch Operatoren auf, die als Diracmatrix entweder die Einheitsmatrix oder $\gamma_\alpha \gamma_5$ besitzen. Die hierzu notwendigen Spuren der ursprünglichen Matrixstruktur werden in den Wilsonkoeffizienten absorbiert. Der Wechsel von den Feldern b_v zu den Feldern der HQET bewirkt, dass weitere Operatoren im Ergebnis berücksichtigt werden müssen. Wie schon in (2.33) gesehen, stimmen die Felder nur in führender Ordnung überein. Dies hat zur Folge, dass der führende Operator Korrekturen durch die Entwicklung der Felder bzw. der Spinoren erhält. Da im Operator $\mathcal{O}_0^\lambda(\omega)$ dabei entweder auf der linken bzw. rechten Seite eine kovariante Ableitung eingefügt wird, können diese Terme in den Wilsonkoeffizienten der Operatoren $\mathcal{O}_S^{\kappa\lambda}(\omega)$ und $\mathcal{O}_A^{\kappa\lambda}(\omega)$ aufgenommen werden. Eine weitere Veränderung des bisherigen Ergebnisses wird auf Grund der Korrekturen zur Lagrangedichte der HQET (2.13) notwendig. Die Terme enthalten mindestens zwei kovariante Ableitungen und somit treten bis zur nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung nur Korrekturen zum Operator der führenden Ordnung

auf. Da die Korrekturterme der Lagrangedichte wie Wechselwirkungen behandelt werden, erhält man

$$\mathcal{O}_T^\lambda(\omega) = i \int d^4y T[(\bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma h_v)(0) \delta\mathcal{L}(y)] \quad . \quad (3.44)$$

Dieser Term stellt eine Korrektur des führenden Operators dar und dadurch erhält der Operator $\mathcal{O}_T^\lambda(\omega)$ den gleichen Wilsonkoeffizienten wie der Operator $\mathcal{O}_0^\lambda(\omega)$. Zusammengefasst erhält man folgendes Ergebnis der Lichtkegelentwicklung:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(-i \int d^4x e^{-iQ \cdot x} \langle B | T[J^\dagger{}^\mu(x) J^\nu(0)] | B \rangle \right) &= \int d\omega \langle B | \left[\tilde{C}_0(\omega) (O_0(\omega) + O_T(\omega)) \right. \\ &+ \tilde{C}_{1\kappa}(\omega) O_1^\kappa(\omega) + \tilde{C}_3(\omega) O_3(\omega) + \tilde{C}_4(\omega) O_4(\omega) + \tilde{C}_{S\kappa}(\omega) O_S^\kappa(\omega) + \tilde{C}_{A\kappa}(\omega) O_A^\kappa(\omega) \\ &+ \tilde{C}_{0\lambda}(\omega) (P_0^\lambda(\omega) + P_T^\lambda(\omega)) + \tilde{C}_{1\kappa\lambda}(\omega) P_1^{\kappa\lambda}(\omega) + \tilde{C}_{3\lambda}(\omega) P_3^\lambda(\omega) \\ &\left. + \tilde{C}_{4\lambda}(\omega) P_4^\lambda(\omega) + \tilde{C}_{S\kappa\lambda}(\omega) P_S^{\kappa\lambda}(\omega) + \tilde{C}_{A\kappa\lambda}(\omega) P_A^{\kappa\lambda}(\omega) \right] | B \rangle \quad . \quad (3.45) \end{aligned}$$

Die Operatoren sind bis auf die Matrizenstruktur identisch mit den Operatoren (3.24). Die mit O benannten Operatoren besitzen anstelle der Diracmatrizen die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$, während die Operatoren, die durch P gekennzeichnet sind, an dieser Stelle die Kombination $\gamma^\lambda \gamma_5$ aufweisen. Die Wilsonoperatoren unterscheiden sich nur durch die Spur über die Diracmatrizen bzw. ein Vorzeichen von den bisher genannten Koeffizienten. Die Abhängigkeit des Ausdrucks von den Lorentzindizes μ, ν befindet sich in den Diracmatrizen Γ .

$$\begin{aligned} C_0(\omega) &= \text{Tr}[P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \left(\frac{p_-}{2} n^\lambda + \frac{\Delta_\omega}{2p_-} \bar{n}^\lambda \right) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\ C_1^\kappa(\omega) &= -\text{Tr}[P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \frac{\bar{n}^\kappa m_c^2}{2p_-} n^\lambda \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\ C_3(\omega) &= -\text{Tr}[P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \frac{1}{2} n^\lambda \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\ C_4(\omega) &= -\text{Tr}[P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \frac{1}{2} n^\lambda \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\ C_S^\kappa(\omega) &= \left(\text{Tr}[P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \frac{1}{2} g_\perp^{\kappa\lambda} + \frac{1}{8m_b} \text{Tr}[P_+ \gamma^\kappa \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma + P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma \gamma^\kappa] \frac{p_-}{2} n^\lambda \right) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\ C_A^\kappa(\omega) &= \left(\text{Tr}[P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \frac{1}{2} i\epsilon_\perp^{\kappa\lambda} + \frac{1}{8m_b} \text{Tr}[P_+ \gamma^\kappa \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma - P_+ \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma \gamma^\kappa] \frac{p_-}{2} n^\lambda \right) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0^\lambda(\omega) &= -Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma] \left(\frac{p_-}{2} n^\alpha + \frac{\Delta_\omega}{2p_-} \bar{n}^\alpha \right) \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_1^{\kappa\lambda}(\omega) &= Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma] \frac{\bar{n}^\kappa m_c^2}{2p_-} n^\alpha \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_3^\lambda(\omega) &= Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\lambda \Gamma] \frac{1}{2} n^\lambda \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_4^\lambda(\omega) &= Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma] \frac{1}{2} n^\alpha \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_S^{\kappa\lambda}(\omega) &= - \left(Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma] \frac{1}{2} g_\perp^{\kappa\alpha} + \frac{1}{8m_b} Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\kappa \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma + \gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma \gamma^\kappa] \frac{p_-}{2} n^\alpha \right) \\
&\quad \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \\
C_A^{\kappa\lambda}(\omega) &= - \left(Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma] \frac{1}{2} i\epsilon_\perp^{\kappa\alpha} + \frac{1}{8m_b} Tr[\gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\kappa \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma - \gamma^\lambda \gamma_5 \bar{\Gamma} \gamma_\alpha \Gamma \gamma^\kappa] \frac{p_-}{2} n^\alpha \right) \\
&\quad \delta(\Delta_\omega - m_c^2) \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis (3.45) stellt die Operatorproduktentwicklung des Tensors $W^{\mu\nu}$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\hat{\Lambda}_{QCD}^2)$ dar. Weitere Operatoren, die durch Einfügen von kovarianten Ableitungen bzw. Deltafunktionen $\delta(iD_+ + \omega)$ entstehen, sind mindestens um einen Faktor Λ_{QCD} unterdrückt. Bei dem Einsetzen einer kovarianten Ableitung ist dies leicht nachzuvollziehen, da die Ableitung selbst von der Ordnung Λ_{QCD} ist. Die Deltafunktionen sind zwar proportional zu $\mathcal{O}(1/\Lambda_{QCD})$, doch können sie nur in Verbindung mit einer Integration auftreten und das Integrationselement $d\omega$ ist von der Ordnung Λ_{QCD} . Somit führt das Einfügen einer Deltafunktion samt Integration nicht zu einem weiteren Faktor Λ_{QCD} . Trotzdem ist die in (3.24) vorgestellte Operatorbasis ausreichend um den betrachteten Prozess zu beschreiben. Von dieser Basis abweichende Operatoren würden im Diagramm mit Gluonabstrahlung andere Kombinationen aus Deltafunktionen mit Quark- und Gluonimpulsen im Argument erzeugen. Da aber alle auftretenden Terme auf die Matrixelemente von (3.24) abgebildet werden konnten, sind in dieser Ordnung der Lichtkegelentwicklung alle Operatoren und Wilsonkoeffizienten gefunden.

3.3 Matrixelemente und Shapefunktionen

Das Produkt der Operatoren, das den semileptonischen Zerfall beschreibt, wurde anhand der Lichtkegelentwicklung durch Wilsonkoeffizienten und der Operatorbasis (3.24) ausgedrückt. Diese Trennung von Koeffizienten und Operatoren hat zwei Vorteile. Zum einen können die Wilsonkoeffizienten mit Hilfe der Störungsrechnung ermittelt werden, wodurch die Präzision der Berechnung kontrollierbar wird. Die Matrixelemente der Operatoren, die in den hadronischen Tensor $W^{\mu\nu}$ eingehen, können dagegen nicht präzise im Standardmodell bestimmt werden. Allerdings hängen sie lediglich von dem Anfangszustand, der in diesem Fall ein B-Meson ist, ab und treten dadurch in verschiedenen inklusiven Zerfällen auf. Dieser universelle Charakter kann ausgenutzt werden um die Werte der

Matrixelemente aus experimentellen Daten zu ermitteln. Dadurch erhält man sowohl für die Wilsonkoeffizienten als auch für die Matrixelemente Werte, die sich durch akzeptable und abschätzbare Fehlerbalken auszeichnen.

Die Operatoren der Lichtkegelentwicklung für den semileptonischen Zerfall eines B-Mesons sind im letzten Abschnitt gezeigt worden. Diese Operatoren ersetzen den Tensor $W^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} = \langle B | \int d\omega \left[\tilde{C}_0(\omega) (O_0(\omega) + O_T(\omega)) \right. \\
+ \tilde{C}_{1\kappa}(\omega) O_1^\kappa(\omega) + \tilde{C}_3(\omega) O_3(\omega) + \tilde{C}_4(\omega) O_4(\omega) + \tilde{C}_{S\kappa}(\omega) O_S^\kappa(\omega) + \tilde{C}_{A\kappa}(\omega) O_A^\kappa(\omega) \\
+ \tilde{C}_{0\lambda}(\omega) (P_0^\lambda(\omega) + P_T^\lambda(\omega)) + \tilde{C}_{1\kappa\lambda}(\omega) P_1^{\kappa\lambda}(\omega) + \tilde{C}_{3\lambda}(\omega) P_3^\lambda(\omega) + \tilde{C}_{4\lambda}(\omega) P_4^\lambda(\omega) \\
\left. + \tilde{C}_{S\kappa\lambda}(\omega) P_S^{\kappa\lambda}(\omega) + \tilde{C}_{A\kappa\lambda}(\omega) P_A^{\kappa\lambda}(\omega) \right] | B \rangle \quad . \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Es gilt somit die Matrixelemente der Operatoren zu bestimmen um die Phasenraumintegrationen ausführen und das Spektrum der hadronisch invarianten Masse berechnen zu können. Die Operatoren beschreiben, wie bereits erläutert, eine unendliche Anzahl von Beiträgen eines bestimmten Twists, die entlang des Lichtkegels dieselbe Größenordnung besitzen. Diese Beiträge können als Momente einer Funktion interpretiert werden. Aus diesem Grund stellen die Matrixelemente im Gegensatz zur $1/m_b$ -Entwicklung Funktionen dar, die bereits in Kapitel 2.3 mit dem Namen Shapefunktionen kurz erläutert wurden. Das Matrixelement des Operators der führenden Ordnung definiert die Funktion $f(\omega)$

$$\langle B | O_0(\omega) | B \rangle = \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega) h_v | B \rangle = f(\omega) \quad . \quad (3.48)$$

Dies ist in führender Ordnung die einzige Funktion, da das Matrixelement bzgl. $P_0(\omega)^\lambda$ verschwindet. Dies ist dadurch zu erklären, dass bei der Parametrisierung keine geeignete Kombination von Lorentztensoren zur Verfügung steht um die Eigenschaften des Matrixelements zu repräsentieren. Ähnlich verhalten sich die Matrixelemente der Operatoren $P_1^{\kappa\lambda}(\omega)$, $P_3^\lambda(\omega)$, $O_4(\omega)$, $P_S^{\kappa\lambda}(\omega)$, $O_A^\kappa(\omega)$ und $P_T^\lambda(\omega)$. Sie verschwinden durch das Fehlen geeigneter Größen zur Parametrisierung oder auf Grund der Bewegungsgleichungen der HQET. Eine detaillierte Beschreibung hierzu befindet sich im Anhang A. Die restlichen Matrixelemente können mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Vektoren und Tensoren und durch Definition neuer Shapefunktionen bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\langle B | O_1^\kappa(\omega) | B \rangle &= \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) iD^\kappa \delta(iD_+ + \omega_1) h_v | B \rangle \\
&= -(\omega f(\omega)(n^\kappa - v^\kappa) + r_1(\omega)n^\kappa)' \\
\langle B | O_3(\omega) | B \rangle &= \\
&\int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (iD_\perp)^2 \delta(iD_+ + \omega_1) h_v | B \rangle \\
&= G_3(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle B|P_4^\alpha(\omega)|B\rangle &= \\
& -\frac{g}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B|\bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (\epsilon \cdot \hat{G})_\perp \delta(iD_+ + \omega_1) s^\alpha h_v|B\rangle \\
& = (v^\alpha - n^\alpha) H_4(\omega) \\
\langle B|O_S^\kappa(\omega)|B\rangle &= \langle B|\bar{h}_v \{iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)\} h_v|B\rangle \\
& = (n^\kappa - \bar{n}^\kappa) \omega f(\omega) \\
\langle B|P_A^{\kappa\alpha}(\omega)|B\rangle &= \langle B|\bar{h}_v [iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)] s^\alpha h_v|B\rangle \\
& = -i\epsilon^{\kappa\alpha\rho\sigma} v_\rho n_\sigma h_1(\omega) \\
\langle B|O_T(\omega)|B\rangle &= \langle B|i \int d^4y T[(\bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma h_v)(0) \delta\mathcal{L}(y)]|B\rangle = \frac{1}{2} t(\omega) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Das Matrixelement des Operators $O_1^\kappa(\omega)$ wurde durch eine Ableitung zweier Shapefunktionen definiert, da auf diese Weise eine Verbindung zur führenden Shapefunktion hergestellt werden konnte. Auch das genaue Betrachten des Matrixelements von $O_S^\kappa(\omega)$ zeigt, dass sich die Definition von $f(\omega)$ nutzen lässt.

Die Shapefunktion $f(\omega)$ beschreibt das Verhalten der differentiellen Rate in der führenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung. Der Operator $O_0(\omega)$, dessen Matrixelement $f(\omega)$ repräsentiert, ist durch eine Deltafunktion zwischen den Feldern des b-Quarks definiert. Das Matrixelement liefert somit nur einen Beitrag, falls die +-Komponente des Restimpuls, der durch die Anwendung der kovarianten Ableitung auf h_v entsteht, genau mit ω übereinstimmt. Da die Integration der Shapefunktion über ω auf Grund der Deltafunktion auf eins normiert ist, kann $f(\omega)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Physikalisch beschreibt die führende Shapefunktion somit die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Existenz eines b-Quarks innerhalb des B-Mesons, das gerade in Richtung des Vektors \bar{n}^μ den Restimpuls ω besitzt. Damit wird klar, dass in der Shapefunktion die entscheidenden Anteile der Bindungseffekte kodiert sind. Allerdings repräsentieren die Shapefunktionen Objekte, die nicht perturbativ berechnet werden können. Informationen über diese Funktionen können nun entweder durch Methoden, die nicht auf der Störungsreihe basieren, oder mit Hilfe von experimentelle Daten ermittelt werden. So ist z.B. das Energiespektrum des Photons im seltenen Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ in führender Ordnung direkt durch $f(\omega)$ gegeben [60]. Somit kann die führende Shapefunktion aus einer Messung dieses Prozesses ermittelt werden um sie dann für die Berechnung des hadronischen Spektrums zu verwenden. Das Spektrum der hadronisch invarianten Masse kann nicht so einfach für die Extraktion der Shapefunktion herangezogen werden, da das Spektrum, wie weiter unter bei der Präsentation des Resultats zu sehen ist, durch eine Faltung dieser Funktion entsteht.

Die Auswirkungen durch die Shapefunktion auf die hadronisch invariante Masse können bereits abgeschätzt werden. In der $1/m_b$ -Entwicklung ist die hadronische Masse durch eine Deltafunktion festgelegt, die durch die Entwicklung des Propagators und die Ermittlung des Imaginärteils entsteht. Die gleiche Deltafunktion tritt auch in (3.17) der partonischen

Rechnung auf, die bei Ersetzung von $s_H = P_- P_+$ in

$$\delta(s_H - \Lambda(P_- + P_+) + \Lambda^2 - m_c^2) \quad (3.50)$$

übergeht. Durch eine ähnliche Rechnung erhält man auch eine Deltafunktion für die Lichtkegelentwicklung

$$\delta(\Delta_\omega - m_c^2) = \delta(s_H - \Lambda(P_- + P_+) - \omega(P_- - \Lambda) + \Lambda^2 - m_c^2) \quad . \quad (3.51)$$

Die Größen ω und k_+ unterscheiden sich gemäß der Definition lediglich im Vorzeichen. Der Term proportional zu ω beschreibt eine partonischen Impulskomponente $P_- - \Lambda = p_-$. Auf Grund der Wahl des Koordinatensystems, die dazu führt dass P^μ nur Lichtkegelkomponenten besitzt, ist diese Komponente positiv, da die hadronisch invariante Masse und die hadronische Energie positiv sind. Somit nimmt die hadronisch invariante Masse ab, wenn die +-Komponente des Restimpuls einen positiven Wert annimmt. Wie nachfolgend in Kapitel 4 zu sehen ist, hat die führende Shapefunktion keinen symmetrischen Verlauf sondern ist leicht zu positiven k_+ verschoben. Dadurch wird sich das Maximum der partonischen Rechnung zu kleineren Werten von s_H verschieben.

3.4 Resultate

Mit den Ergebnissen der letzten beiden Abschnitte kann das Spektrum der hadronisch invarianten Masse angegeben werden. Der Tensor $W^{\mu\nu}$ wird durch eine Summe aus Shapefunktionen und Wilsonkoeffizienten ausgedrückt. Die Wilsonkoeffizienten enthalten eine Spur über die Diracstruktur und somit die Kopplungen an den Leptonsektor über die Lorentzindizes μ und ν . Zur Berechnung des Spektrums müssen daher die Spuren ermittelt und die hadronischen Anteile mit den leptonischen kontrahiert werden. Dadurch erhält man die differentielle Rate in Abhängigkeit von zwei Phasenraumvariablen und der zusätzlich eingeführten Variable ω .

Ausgangspunkt ist wieder die doppelt differentielle Rate aus (3.3)

$$d\Gamma = \frac{4}{m_b^6} \Gamma_0 (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) W_{\mu\nu} (q_- - n \cdot q)^2 \theta(q_-) \theta(q_+ - q_-) dn \cdot q dq_- \quad . \quad (3.52)$$

Damit das Powercounting der Lichtkegelentwicklung angewandt werden kann, werden die leptonischen Impulskomponenten q_+ und q_- in die Impulskomponenten des c-Quarks p_- und p_+ mittels $q_\pm = m_b - p_\pm$ transformiert. Die Größenverhältnisse dieser Variablen sind im Powercounting (3.27) angegeben. Da die Lichtkegelentwicklung mit diesem Powercounting durchgeführt wurde, ist es sinnvoll die gleiche Entwicklung auch auf den

leptonischen Anteil anzuwenden.

$$\begin{aligned}
(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) (q_- - q_+)^2 &= \frac{p_-^2}{4} [\{(m_b - p_-)n^\mu + m_b \bar{n}^\mu\} \{(m_b - p_-)n^\nu + m_b \bar{n}^\nu\} \\
&\quad - 4m_b(m_b - p_-)g^{\mu\nu}] \\
&\quad + \frac{p_- p_+}{4} [\bar{n}^\mu \{(p_-^2 + m_b p_- - 2m_b^2)n^\nu - 2m_b(m_b + p_-)\bar{n}^\nu\} \\
&\quad - (m_b - p_-)n^\mu \{2(m_b - p_-)n^\nu + (2m_b + p_-)\bar{n}^\nu\} + 4(m_b - p_-)(2m_b + p_-)g^{\mu\nu}] + \dots
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Diese Terme werden nun gemäß ihrer Größenordnung mit den Wilsonkoeffizienten der Lichtkegelenwicklung kontrahiert. Dabei wird nur der Koeffizient der führenden Shapefunktion mit dem gesamten Resultat (3.53) kontrahiert, für die Terme der nächstführenden Funktionen sind die Beiträge der führenden Ordnung von Bedeutung. Dadurch erhält man ein Ergebnis für die doppelt differentielle Rate. Aus Gründen der Übersicht wird für die Erläuterung der weiteren Schritte die führende Ordnung des Spektrums verwendet, bevor das Resultat einschließlich der nächstführenden Funktionen präsentiert wird.

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{2(3m_b - 2p_-)p_-^3}{m_b^4} \delta(p_-(p_+ - \omega) - m_c^2) f(\omega) \theta(m_b - p_-) \theta(p_- - p_+) dp_- dp_+ d\omega \tag{3.54}$$

Eine Dimensionsanalyse, die zur Überprüfung des Resultats dient, zeigt auf beiden Seiten eine dimensionslose Größe. Auf der rechten Seite kommt dieses Ergebnis zustande, da die Deltafunktion und die Shapefunktion zusammen die Massendimension $[M] = -3$ besitzen, die gerade durch dp_- , dp_+ und $d\omega$ wieder aufgehoben wird. Das in (3.54) gezeigte Resultat ist identisch mit dem des partonischen Grenzfalls (3.13), wenn man die Shapefunktion durch ihr erstes Moment, $\delta(\omega)$ siehe Anhang B, ersetzt und das Powercounting, also $s_0 \sim m_b \Lambda_{QCD}$, angewandt wird. Das Spektrum der hadronisch invarianten Masse kann errechnet werden, nachdem hadronische Variablen eingesetzt wurden. Deshalb wird wiederum eine Variablentransformation durchgeführt, die die Variablen des partonischen Prozesses durch die des Mesonzerfalls ersetzt.

$$p_- = (m_b v - q) \cdot n = (m_B v - \Lambda v - q) \cdot n = P_- - \Lambda \quad p_+ = (m_b v - q) \cdot \bar{n} = P_+ - \Lambda \tag{3.55}$$

Die Masse m_B beschreibt die Masse eines B-Mesons und die hadronisch invariante Masse s_H ist durch das Quadrat des Impuls P^μ , $s_H = P_+ P_-$, gegeben. Das Spektrum der hadronisch invarianten Masse lautet mit einer Verschiebung in der Variable ω

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{ds_H} &= \frac{2(3m_b + 2\Lambda - 2P_-)(P_- - \Lambda)^3}{P_- m_b^4} f(\omega - \Lambda) \\
&\quad \delta((P_- - \Lambda) \left(\frac{s_H}{P_-} - \omega\right) - m_c^2) \theta(m_B - P_-) \theta(P_- - \frac{s_H}{P_-}) dP_- d\omega \quad . \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Durch eine Integration über die Impulskomponente P_- erhält das Spektrum seine abschließende Form. Die Deltafunktion, die zur Integration ausgewertet werden muss, besitzt

dabei zwei Lösungen für die Ersetzung von P_- . Dies entspricht der Wahl im Powercounting, welche Komponente, P_+ oder P_- , von der Größenordnung Λ_{QCD} ist. Somit ist hier diejenige Ersetzung zu verwenden bei der P_- von der Ordnung m_b ist. Nach der Integration sind nicht alle Terme des Spektrums von der gleichen Größenordnung, da das Argument der Deltafunktion nicht entwickelt wurde. Deshalb wird wieder das Powercounting angewandt um die Terme der führenden Ordnung zu identifizieren. Die Thetafunktionen werden von dieser Entwicklung ausgenommen. Der Grund hierfür basiert darauf, dass das Argument der Thetafunktion eine Wurzel enthält, die laut Powercounting vernachlässigt werden müsste. Diese Wurzel sorgt aber durch die Bedingung, dass die Variable \tilde{P} (3.58) reell sein muss, zu einer weiteren Einschränkung bei der Integration über die Variable ω . Wie sich bei den Korrekturen der nächsten Ordnung der Lichtkegelentwicklung zeigen wird, sind diese Bedingungen wichtig, damit man ein physikalisch sinnvolles Spektrum erhält. In führender Ordnung ergibt sich mit $S = s_H - m_c^2$

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{dS} = \frac{2(3m_b\omega - 2S)S^2}{m_b^4\omega^4} f(\omega - \Lambda)\theta(m_B - \tilde{P})\theta(\tilde{P} - \frac{s_H}{\tilde{P}}) d\omega \quad . \quad (3.57)$$

Die Größe \tilde{P} ist dabei die Kombination aus $S = s_H + m_c^2$ und ω bei der das Argument der Deltafunktion verschwindet.

$$\tilde{P} = \frac{S + \Lambda\omega + \sqrt{(S - \Lambda\omega)^2 - 4m_c^2\Lambda\omega}}{2\omega} \quad (3.58)$$

Da \tilde{P} eine reelle Größe darstellen muss, ist das Argument der Wurzel eine positive Zahl. Aus dieser Bedingung folgt dann:

$$s_H \geq (m_c + \sqrt{\Lambda\omega})^2 \quad . \quad (3.59)$$

Der partonische Grenzfall ergibt sich aus der Lichtkegelentwicklung, wenn die Shapefunktion durch eine Deltafunktion $f(\omega - \Lambda) \rightarrow \delta(\omega - \Lambda)$ ersetzt wird. Durch diese Ersetzung beschreibt (3.59) die physikalische Bedingung, dass die hadronisch invariante Masse mindestens so groß wie $m_D^2 = (m_c + \Lambda)^2$ sein muss. Dies ist aus physikalischer Sicht der Beschränkungen der entwickelten Thetafunktionen, $s_H \geq m_c^2$ vorzuziehen, da das D-Meson das leichteste, im Experiment auftretende Teilchen mit einem c-Quark ist.

Die Korrekturen zur nächsten Ordnung werden in der gleichen Vorgehensweise ermittelt. Der einzige Unterschied ergibt sich bei den Shapefunktionen des Operators $O_1^k(\omega)$. Dessen Matrixelement ist durch eine Ableitung von Funktionen gegeben. Diese Terme werden durch eine partielle Integration über ω und eine anschließende partielle Integration über die Impulskomponente P_- umgeschrieben. Dadurch erhält man auch Terme mit zwei Deltafunktionen, die durch die partielle Integration aus den Thetafunktionen $\theta(m_B - P_-)$ und $\theta(P_- - P_+)$ entstehen. Im ersten Fall ergibt sich die Deltafunktion $\delta(m_B - P_-)$, die P_- auf die Masse des B-Mesons fixiert. Die zweite Deltafunktion lautet $\delta(P_- - P_+)$ und beschreibt den Zustand, dass beide Impulskomponenten von gleicher Größe sind. Da das Produkt der Komponenten die hadronisch invariante Masse ergibt und diese von der

Größenordnung $m_b \Lambda_{QCD}$ ist, sind P_- und P_+ von der Ordnung $\sqrt{m_b \Lambda_{QCD}}$. Der Vorfaktor der Deltafunktion ist unter dieser kinematischen Bedingung allerdings vernachlässigbar gegenüber den anderen Termen und somit tritt nur die Deltafunktion $\delta(m_B - \tilde{P}_-)$ im Resultat auf. Mit dem gleichen Vorgehen, wie zuvor bei der Ermittlung der führenden Ordnung, erhält man nun das Spektrum der hadronisch invarianten Masse mit $S = s_H - m_c^2$ bis zur nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{dS} = \frac{2}{m_b^5 \omega^4} \{ & [(4(\omega - \Lambda) - 2m_b)S^3 + (3\omega m_b^2 - \omega(\omega - 7\Lambda)m_b + 3m_c^2\omega)S^2 \\
& - (6m_b^2\omega^3 + 8m_b m_c^2\omega(\omega - \Lambda))S - 6m_b^2 m_c^2 \Lambda \omega^2] f(\omega - \Lambda) \\
& + [2m_b \omega S^2 - 3m_b^2 \omega^2 S] G_3(\omega - \Lambda) - [2m_b \omega^2 S^2 - m_b^2 \omega^2 S] H_4(\omega - \Lambda) \\
& + [2m_b S^3 + m_b \omega S^2 - 2m_b^2 \omega^2 S] h_1(\omega - \Lambda) - 2m_c^2 [3m_b^2 \omega^2 - 4m_b \omega S] r_1(\omega - \Lambda) \\
& - \left[m_b S^3 - \frac{3}{2} m_b^2 \omega S^2 \right] t(\omega - \Lambda) \} \theta(m_B - \tilde{P}) \theta(\tilde{P} - \frac{S + m_c^2}{\tilde{P}}) d\omega \\
& + \frac{2m_c^2}{m_b^4 \omega^2} (3m_b \omega - 2S)((\omega - \Lambda)f(\omega - \Lambda) + 2r_1(\omega - \Lambda)) \\
& \theta(m_B - \tilde{P}) \delta(\tilde{P} - \frac{S + m_c^2}{\tilde{P}}) d\omega \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Dieses Resultat kann mit dem publizierten Ergebnis für den Zerfall $B \rightarrow X_u \ell \nu$ verglichen werden. Man erhält durch die Ersetzung $m_c = 0$ genau die gleichen Terme wie in [62].

3.5 Vergleich mit der $1/m_b$ -Entwicklung

Eine Möglichkeit das Resultat (3.60) zu testen, bietet der Vergleich mit dem bekannten Ergebnis der $1/m_b$ -Entwicklung. Wie schon in Abschnitt 2.3 beschrieben, können die Shapefunktionen durch eine Entwicklung in ihren Momenten mit den Parametern der $1/m_b$ -Entwicklung ausgedrückt werden. Die dabei verwendete Entwicklung lautet

$$f(\omega) = \sum_n \frac{(-1)^n M_n}{n!} \delta^{(n)}(\omega) \quad (3.61)$$

mit den Momenten

$$M_n = \int d\omega \omega^n f(\omega) \quad . \quad (3.62)$$

Damit können die Shapefunktionen in (3.60) durch die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ geschrieben werden. Dies liegt an der Struktur der Operatoren, welche die Shapefunktionen definieren. Diese Operatoren sind proportional zu Deltafunktionen, welche die Variable ω mit kovarianten Ableitungen verknüpfen. Damit können Ausdrücke der Form ω^n durch die entsprechende Anzahl von kovarianten Ableitungen ersetzt und die Integration über ω

ausgeföhrt werden. Die verbleibenden Matrixelemente beinhalten nur noch die Quarkfelder und Ableitungen und können mit den Parametern der HQET (2.14) geschrieben werden. Für die führende Shapefunktion $f(\omega)$ ergibt sich, siehe (2.50) und Anhang B

$$f(\omega) = \delta(\omega) - \frac{\lambda_1}{6}\delta''(\omega) - \frac{\rho_1}{18}\delta'''(\omega) + \dots \quad .$$

Damit erhält man die erste Ordnung der $1/m_b$ -Entwicklung durch die Ersetzung von $f(\omega)$ durch $\delta(\omega)$. Die erste Ordnung ist jedoch das Ergebnis des partonischen Grenzfalls. Ersetzt man in (3.60) die führende Shapefunktion durch $\delta(\omega - \Lambda)$ und damit auch ω mit Λ , so erhält man das partonische Resultat. Dies ist identisch mit dem Resultat aus (3.21), falls auch für letzteres das Powercounting (3.27) beachtet wird. Für die weiteren Shapefunktionen ergeben sich folgende Entwicklungen:

$$\begin{aligned} t(\omega) &= -(\lambda_1 + 3\lambda_2)\delta'(\omega) + \dots \\ G_3(\omega) &= -\frac{2\lambda_1}{3}\delta'(\omega) + \dots \\ h_1(\omega) &= \lambda_2\delta'(\omega) + \frac{\rho_2}{2}\delta''(\omega) + \dots \\ H_4(\omega) &= -\lambda_2\delta'(\omega) + \dots \\ r_1(\omega) &= -\frac{\rho_1}{18}\delta''(\omega) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Durch die Ersetzung der Shapefunktionen durch diese Terme kann die Integration über ω ausgeföhrt werden. Durch partielle Integrationen kann das Ergebnis auf Summanden proportional zu Thetafunktionen und Deltafunktionen reduziert werden. Die entstandenen Terme müssen nun mit Hilfe des Powercountings (3.27) entwickelt werden, damit die führenden Ordnungen ermittelt werden können.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{d\hat{s}_H} &= \theta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2))\theta(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2) \left[\frac{2(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)^2}{\hat{\Lambda}^4} (3\hat{\Lambda} - 2(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{\hat{\Lambda}^3} (2(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)(\hat{s}_H - \hat{\Lambda})(\hat{\Lambda} + \hat{m}_c^2) + \hat{m}_c^2(\hat{s}_H(\hat{s}_H - 4\hat{\Lambda}) + \hat{m}_c^4)) \right] \\ &\quad + 2(\hat{\Lambda} + \hat{m}_c^2)\delta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \\ &\quad + \hat{\lambda}_1 \left\{ \theta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2))\theta(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2) \left[\frac{4(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)^2}{3\hat{\Lambda}^6} (9\hat{\Lambda} - 10(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3\hat{\Lambda}^5} (\hat{s}_H(56\hat{s}_H^2 - 129\hat{s}_H\hat{\Lambda} + 36\hat{\Lambda}^2) - \hat{s}_H\hat{m}_c^2(204\hat{s}_H - 210\hat{\Lambda}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{m}_c^4(240\hat{s}_H - 81\hat{\Lambda}) - 92\hat{m}_c^6 \right] + \left(\frac{2}{3\hat{\Lambda}^2} + \frac{11}{3\hat{\Lambda}} \right) \delta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{\lambda}_2 \left\{ \theta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \theta(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2) \left[\frac{1}{\hat{\Lambda}^5} (\hat{s}_H (40\hat{s}_H^2 - 9\hat{s}_H \hat{\Lambda} - 12\hat{\Lambda}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. - \hat{m}_c^2 (120\hat{s}_H^2 - 18\hat{s}_H \hat{\Lambda} - 12\hat{\Lambda}^2) + \hat{m}_c^4 (120\hat{s}_H - 9\hat{\Lambda}) - 120\hat{m}_c^6 \right] - \frac{1}{\hat{\Lambda}} \delta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \right\} \\
& + \hat{\rho}_1 \left\{ \theta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \theta(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2) \left[\frac{20(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)^2}{3\hat{\Lambda}^7} (4(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2) - 3\hat{\Lambda}) \right. \right. \\
& \quad + \frac{4}{3\hat{\Lambda}^6} (\hat{s}_H (20\hat{s}_H^2 - 33\hat{s}_H \hat{\Lambda} + 3\hat{\Lambda}^2) - \hat{m}_c^2 (75\hat{s}_H^2 - 50\hat{s}_H \hat{\Lambda} - 6\hat{\Lambda}^2) \\
& \quad \left. \left. + \hat{m}_c^4 (90\hat{s}_H - 17\hat{\Lambda}) - 35\hat{m}_c^6 \right] + \left(\frac{6}{\hat{\Lambda}^2} + \frac{16\hat{m}_c^2}{3\hat{\Lambda}^3} \right) \delta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \right\} \\
& + \hat{\rho}_2 \left\{ \theta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \theta(\hat{s}_H - \hat{m}_c^2) \left[\frac{4}{\hat{\Lambda}^6} (\hat{s}_H (10\hat{s}_H^2 + 3\hat{s}_H \hat{\Lambda} - 3\hat{\Lambda}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3\hat{m}_c^2 (10\hat{s}_H^2 + 2\hat{s}_H \hat{\Lambda} - \hat{\Lambda}^2) + 3\hat{m}_c^4 (10\hat{s}_H + \hat{\Lambda}) - 10\hat{m}_c^6 \right] - \frac{8}{\hat{\Lambda}^2} \delta(\hat{\Lambda} - (\hat{s}_H - \hat{m}_c^2)) \right\} \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Der Resultate der $1/m_b$ -Entwicklung sind in [74, 44] veröffentlicht worden. Diese geben die differentielle Rate in den partonisch invarianten Masse und der partonischen Energie an. Durch eine Variablentransformation und Integration über die partonische Energie erhält man ein Resultat für das Spektrum der hadronisch invarianten Masse. Schließlich wird das Ergebnis noch gemäß des Powercountings (3.27) entwickelt. Durch diese Schritte erhält man genau (3.64), wodurch die Richtigkeit des Resultats der Lichtkegelentwicklung gezeigt ist.

Kapitel 4

Diskussion der Resultate

Das Spektrum der hadronisch invarianten Masse wurde im letzten Kapitel mit Hilfe der Lichtkegelentwicklung berechnet. In diesem Kapitel wird dieses Resultat nun numerisch ausgewertet. Wie in (3.60) zu sehen, beinhaltet das Spektrum eine Integration über die Variable ω , die bis auf ein Vorzeichen die $+$ -Komponente des Restimpuls beschreibt. Damit diese Integration durchgeführt werden kann, müssen die Shapefunktionen bekannt sein. Diese Funktionen stellen aber Objekte dar, die nicht mit den Methoden der Störungstheorie ermittelt werden können. Eine Möglichkeit zur quantitativen Betrachtung der Auswirkungen der Shapefunktionen, stellt die Verwendung von Modellfunktionen dar. Dieses Vorgehen führt zwar zu einer Abhängigkeit von einem bestimmten Modell, doch diese Abhängigkeit kann durch experimentelle Ergebnisse und theoretische Abschätzungen eingeschränkt werden. Das Spektrum wird von der Shapefunktion der führenden Ordnung, $f(\omega)$, dominiert. Diese Funktion kann, wie im letzten Abschnitt des vorangehenden Kapitel gesehen, mit den Parametern der $1/m_b$ -Entwicklung geschrieben werden. Diese Parameter wurden bereits in den Experimenten bestimmt. Zwar sind die Werte auch auf Grund von theoretischen Ungenauigkeiten nicht hochpräzise, doch die Messungen eignen sich um die möglichen Modellfunktionen einzuschränken. In [58] wurde beschrieben, dass die führende Shapefunktion eine ungefähre Breite von 200-300 MeV besitzt, um den Wert $\omega = 0$ zentriert und leicht zu negativen Werten von ω verschoben ist. Der Definitionsbereich der Funktion ist durch das Intervall $-\Lambda \leq \omega \leq \infty$ gegeben. Durch diese Kenntnisse lassen sich nun einfache Modellfunktionen erstellen, die sich an diesen Eckpunkten orientieren. Zusätzlich zu diesen Bedingungen muss die Modellfunktion auch die gleichen Momente liefern, wie die führende Shapefunktion. Ein Blick auf die Momentenentwicklung dieser Funktion (2.50) zeigt, dass das nullte Moment eins ergeben und das erste Moment verschwinden muss. Die Proportionalität des zweiten Moments zum Parameter λ_1 wird verwendet, um die Modellfunktion an die Ergebnisse der Experimente anzupassen. Mit diesen Bedingungen können einfache Modellfunktionen entwickelt werden. Zwei der möglichen Funktionen werden nun im folgenden verwendet. Sie sind in den

Publikationen [58, 72] vorgeschlagen worden.

$$f^{MN}(\omega) = \frac{32}{\pi^2 \Lambda} \left(1 + \frac{\omega}{\Lambda}\right)^2 e^{-\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\omega}{\Lambda}\right)^2} \theta \left(1 + \frac{\omega}{\Lambda}\right) \quad (4.1)$$

$$f^N(\omega) = \frac{a^{ab}}{\Lambda \Gamma(ab)} \left(1 + \frac{\omega}{\Lambda}\right)^{ab-1} e^{-a \left(1 + \frac{\omega}{\Lambda}\right)} \theta \left(1 + \frac{\omega}{\Lambda}\right) \quad (4.2)$$

Die erste Funktion besitzt nur einen Parameter, Λ , durch den experimentelle Resultate einfließen können. Die zweite Funktion hängt dagegen von drei Parametern ab. Die Größen a und b werden so gewählt, dass das erste Moment der Funktion verschwindet und das zweite Moment mit den experimentellen Daten übereinstimmt. Die ersten Momente der Funktionen lauten

$$\begin{aligned} M_0^{MN} &= 1, M_1^{MN} = 0, M_2^{MN} = \frac{1}{8}(3\pi - 8)\Lambda^2, M_3^{MN} = \frac{1}{8}(16 - 5\pi)\Lambda^3 \\ M_0^N &= 1, M_1^N = (b - 1)\Lambda, M_2^N = \frac{a(b - 1)^2 + b}{a}\Lambda^2, \\ M_3^N &= \frac{a^2(b - 1)^3 + 3ab(b - 1) + 2b}{a^2}\Lambda^3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Momente der ersten Funktion entsprechen den Erwartungen. Aus dem zweiten Moment kann der Wert von λ_1 in diesem Modell ermittelt werden, $\lambda_1 = -3\frac{1}{8}(3\pi - 8)\Lambda^2$, sowie ρ_1 mit Hilfe des dritten Moments, $\rho_1 = -3\frac{1}{8}(16 - 5\pi)\Lambda^3$. Da Λ von der Größenordnung Λ_{QCD} ist, besitzen die Parameter in diesem Modell die richtige Größenordnung. Die Momente der zweiten Funktion entsprechen noch nicht den Forderungen und so muss $b = 1$ gesetzt werden, damit das erste Moment verschwindet. Im zweiten Moment sind damit noch die Parameter a und Λ vorhanden. Die Beziehung dieses Moments mit λ_1 wird genutzt um a durch λ_1 auszudrücken. Somit wird $a = \frac{3\Lambda^2}{\lambda_1}$ gesetzt. Damit ist diese Funktion von den zwei hadronischen Parametern Λ und λ_1 abhängig. Die beiden Modellfunktionen werden in Abbildung 4.1 gezeigt. Die Funktionen unterscheiden sich in ihrem Verlauf, so dass die Modellabhängigkeit deutlich zu erkennen ist. Die nächste Ordnung der Lichtkegelentwicklung beinhaltet fünf weitere Shapefunktionen, die auch modelliert werden müssen. Die Operatoren, welche die Funktionen definieren, sind gegenüber dem führenden Operator um die Größenordnung Λ_{QCD} unterdrückt und damit befinden sich die Korrekturen, die durch diese Funktionen beschrieben werden, im Bereich von 10% bis 15%. Dadurch ist es gerechtfertigt im Rahmen der Modellabhängigkeit die Shapefunktionen der nächstführenden Ordnung durch Ableitungen der führenden Ordnung und entsprechenden Vorfaktoren zu beschreiben, so dass die so entstandenen Modellfunktionen die ersten Momente richtig reproduzieren. Da der erste Term in der Momentenentwicklung der führenden Shapefunktion eine Deltafunktion ist, sieht man in der nachfolgender Aufzählung, dass die ersten Momente der Modellfunktionen identisch mit (3.63) sind. Mit

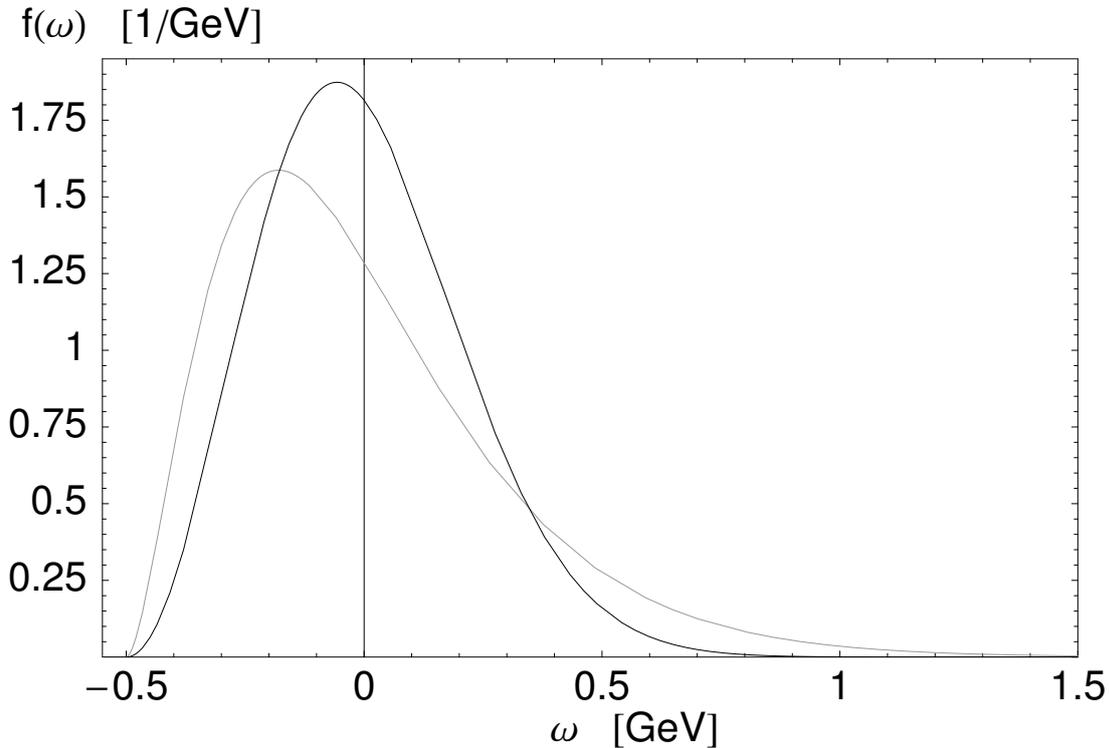


Abbildung 4.1: Modellfunktionen für die führende Shapefunktion. Die schwarze Linie beschreibt den Verlauf des ersten Modells, die graue Linie die des zweiten Modells.

diesem Verfahren werden die Shapefunktionen modelliert zu

$$\begin{aligned}
 h_1(\omega) &= \lambda_2 f'(\omega) \\
 G_3(\omega) &= -\frac{2\lambda_1}{3} f'(\omega) \\
 H_4(\omega) &= -\lambda_2 f'(\omega) \\
 r_1(\omega) &= -\frac{\rho_1}{18} f''(\omega) \\
 t(\omega) &= -(\lambda_1 + 3\lambda_2) f'(\omega) \quad .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Durch dieses Vorgehen sind damit alle Shapefunktion, die bis zur betrachteten Ordnung der Lichtkegentwicklung auftreten, modelliert. Für die nachfolgenden Auswertungen wurden für die zwei Modellfunktionen unterschiedliche Parametersätze verwendet. Die erste Modellfunktion ist nur von einem Parameter abhängig. Wird also $\Lambda = 0.5$ GeV gesetzt, so folgen daraus durch (2.50) die Parameter λ_1 und ρ_1 . Deren Werte werden dann auch für die Modellierung (4.4) der weiteren Shapefunktionen verwendet. Die zweite Modellfunktion besitzt eine Abhängigkeit von zwei Parametern, Λ und λ_1 . Für die Berechnung des Spektrums anhand dieser Modellfunktion muss somit Λ und auch λ_1 vorgegeben werden. Der Parameter ρ_1 kann dann aus dem dritten Moment der führenden Shapefunktion ermittelt werden. Dieses Vorgehen hat zur Folge, dass sich die Parame-

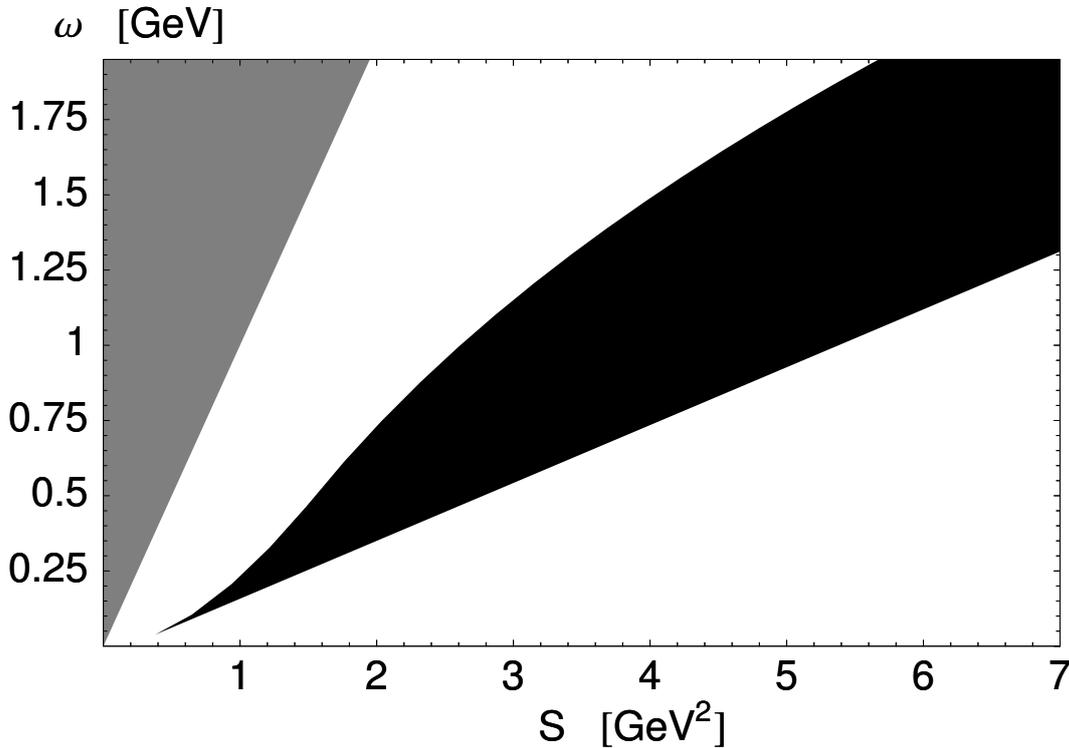


Abbildung 4.2: Zulässige Bereiche für die Integration über ω . Die graue Fläche zeigt die erlaubten Werte für entwickelte Thetafunktionen, die schwarze gilt für die kompletten Thetafunktionen

ter für die zwei Modellfunktionen unterscheiden. Λ stimmt für beide Funktionen überein, während λ_1 und ρ_1 in den zwei Modellen unterschiedliche Werte annehmen, wobei sich die Parameter in beiden Modellen stets innerhalb der von experimentellen Messungen vorgegebenen Größenordnung befinden. Die Parameter λ_2 und ρ_2 können mit Hilfe des Massenunterschieds von B- und B*-Mesons bestimmt werden [46]. Damit nehmen diese Parameter die Werte $\lambda_2 = 0.12 \text{ GeV}^2$ und $\rho_2 = -0.05 \text{ GeV}^3$ an.

Bevor das Spektrum gezeichnet werden kann, muss noch eine Integration über die Variable ω in (3.60) erfolgen. Die Thetafunktionen des Resultats bestimmen dabei die Integrationsgrenzen. Diese Funktionen bzw. ihre Argumente wurden nicht gemäß des Powercountings (3.27) entwickelt. Obwohl einige Terme im Argument der Thetafunktionen um einen Faktor der Ordnung Λ_{QCD} unterdrückt sind, spielen diese Terme eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung der Integrationsgrenzen von ω . Dies liegt daran, dass einer der Terme eine Wurzel enthält, die zusätzlich zu einer Einschränkung von ω führt, da das Argument der Wurzel positiv sein muss. Durch die Entwicklung der Thetafunktionen erhält man $\theta(S)\theta(\omega - S)$. Der Vergleich der möglichen Werte von ω bei der Integration zeigt Abbildung 4.2. Dabei wird nur ein Ausschnitt des gesamten Bereichs gezeigt. Dieser Abschnitt ist entscheidend, da auf Grund der Form der führenden Shapefunktion, die Beiträge von hohen Werten von ω nicht beitragen. Dabei wird deutlich dass sich der schwarze Bereich,

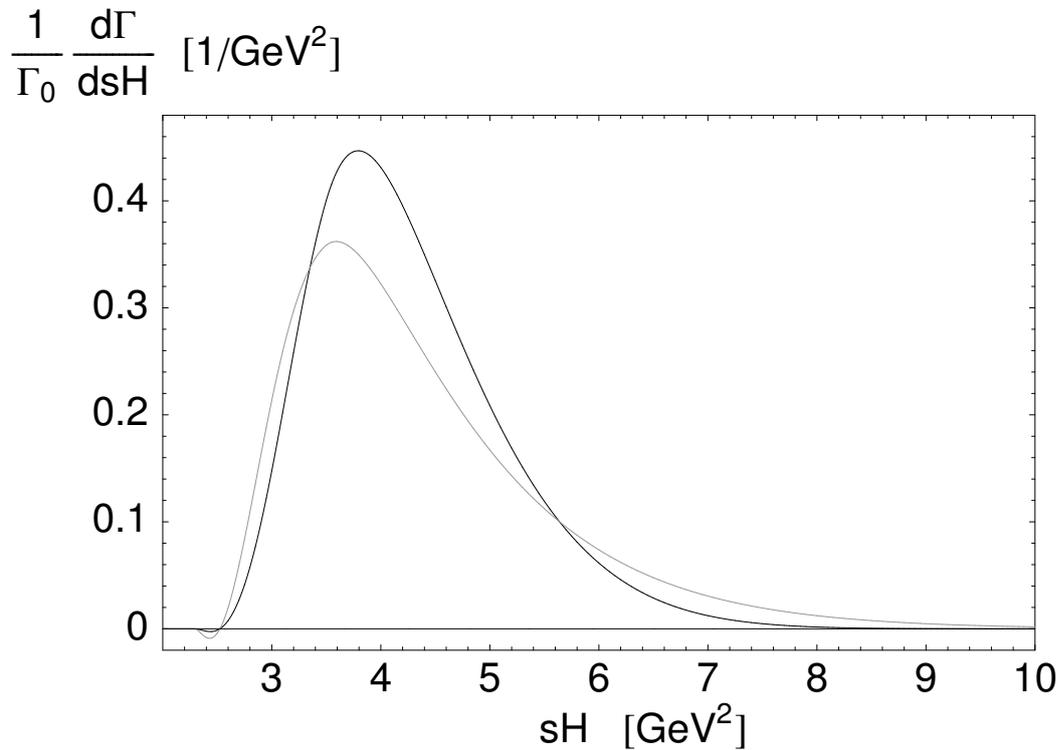


Abbildung 4.3: Spektrum der hadronisch invarianten Masse in der führenden Ordnung der Lichtkegelenwicklung. Die schwarze Kurve zeigt das Spektrum, das durch die Verwendung der ersten Modellfunktion entsteht, die graue Kurve beschreibt den Verlauf gemäß der zweiten Modellfunktion

der durch die kompletten Thetafunktionen beschrieben wird, wesentlich von dem Bereich der entwickelten Funktionen unterscheidet. Der Bereich, der von den entwickelten Thetafunktionen stammt, führt bei der Integration über ω zu einem stark negativen Spektrum bei kleinen invarianten Massen. Dies ist aus physikalischer Sicht nicht akzeptabel und somit müssen die kompletten Argumente der Thetafunktionen verwendet werden, damit ein sinnvolles Resultat entsteht. Ein weiterer Grund der gegen eine Entwicklung der Thetafunktionen spricht, ist in (3.59) gezeigt. Man erhält im partonischen Grenzfall mit dem kompletten Argument das Quadrat der D-Mesonmasse als untere Grenze für die hadronisch invariante Masse. Im Vergleich hierzu liefert das entwickelte Argument der Thetafunktionen als untere Grenze das Quadrat der Quarkmasse.

Mit diesem Integrationsintervall kann das Spektrum der hadronisch invarianten Masse in führender Ordnung, wie in Abbildung 4.3, dargestellt werden. Für die Erzeugung dieser Spektren wurde für die hadronischen Parameter die Werte $\Lambda = 0.5 \text{ GeV}$ und $\lambda_1 = -0.27 \text{ GeV}^2$ verwendet. Eine wichtige Größe für das Spektrum ist das Quadrat der Masse des D-Mesons, da das Spektrum an dieser Stelle einen dominierenden Peak besitzt. Das D-Meson ist das Teilchen mit der kleinsten Masse, das in dem betrachteten Prozess auftreten kann. Die Masse nimmt den Wert $m_D = 1.87 \text{ GeV}$ [1] an und somit befindet

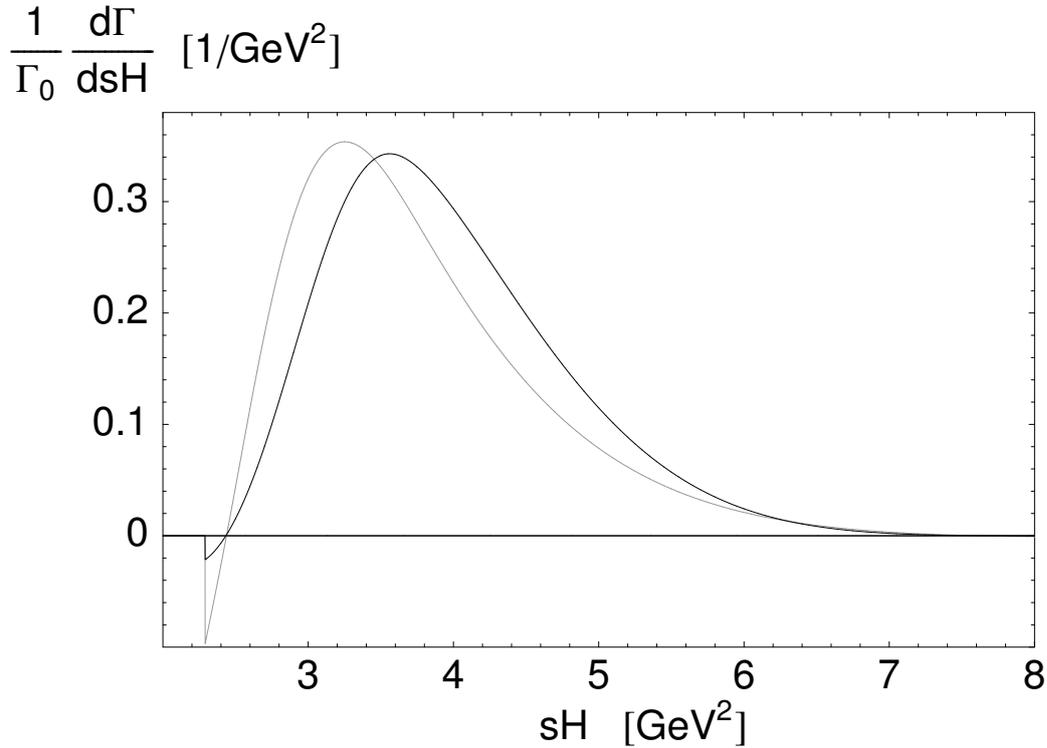


Abbildung 4.4: Spektrum der hadronisch invarianten Masse mit Korrekturen der nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung. Erneut zeigt die schwarze Kurve den Verlauf gemäß der ersten Modellfunktion und die graue Kurve, die der zweiten Modellfunktion

sich diese Resonanz im Spektrum der hadronisch invarianten Masse bei $s_H = 3.50 \text{ GeV}^2$. Die beiden Modellfunktionen besitzen ihr Maximum im Rahmen der Modellabhängigkeit an dieser Stelle. Für größere Massen ergibt sich ein exponentiell abfallendes Spektrum, dass den experimentellen Ergebnissen entspricht, z.B. [75].

Nach dem gleichen Prinzip können nun auch die Korrekturen der nächsten Ordnung der Lichtkegelentwicklung betrachtet werden. Das Spektrum mit diesen Beiträgen zeigt Abbildung 4.4. Daraus wird ersichtlich, dass die gezeigten Spektren eine Modellabhängigkeit im Bereich von 10 - 20% aufweisen. Bei kleinen Massen zeigen die Modellfunktionen einen negativen Abfall in unterschiedlicher Ausprägung. Dies ist ausschließlich der Effekt der Beiträge des Operators $O_1(\omega)$. Das Matrixelement dieses Operators besteht unter anderem aus Termen, die proportional zu Deltafunktionen sind und es zeigt sich, dass diese Terme für das Auftreten des negativen Verlaufs verantwortlich sind. Das Modell, das bei der zweiten Funktion verwendet wird, verstärkt das Auftreten von negativen Werten. Die Ursache für diesen Verlauf bei kleinen invarianten Masse wird weiter unten bei der Diskussion der Modellabhängigkeit erläutert. In Abbildung 4.5 sind die Änderungen, die durch die Korrekturen der nächsten Ordnung der Lichtkegelentwicklung entstehen, gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die größten Änderungen bei kleinen Massen auftreten. Dies

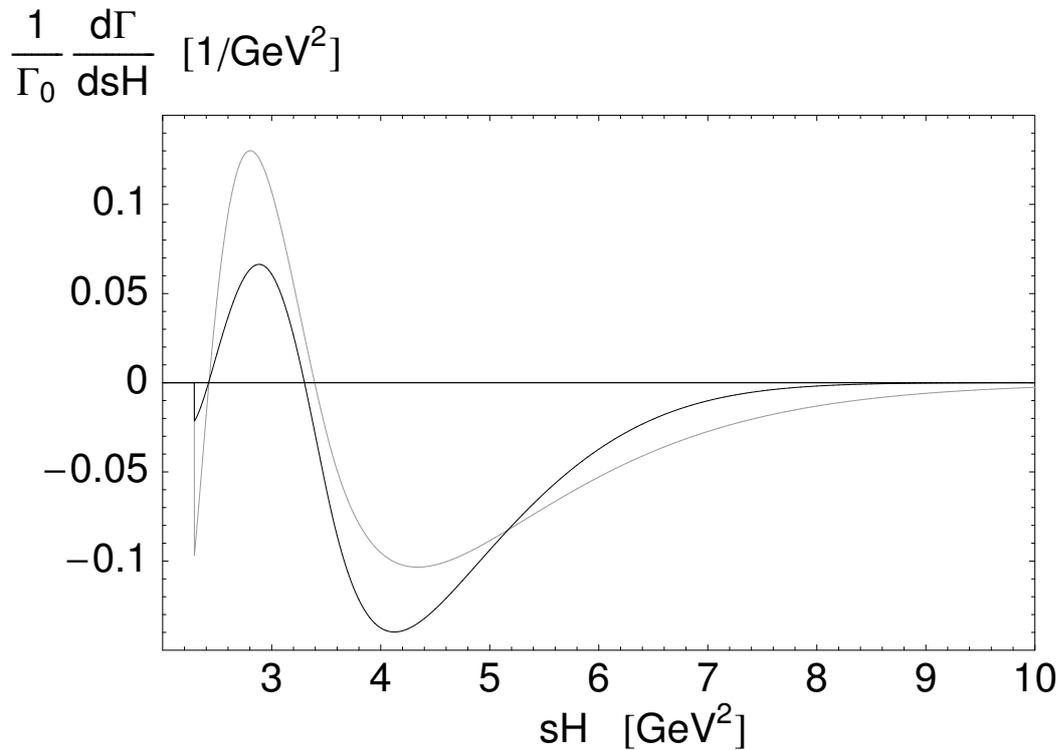


Abbildung 4.5: Effekte der nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung. Die schwarze Kurve stellt die Korrekturen bezüglich der ersten Modellfunktion dar, während die graue Kurve die Korrekturen der zweiten Modellfunktion zeigt

ist der Bereich in dem die Shapefunktionen ausschlaggebend für den Verlauf des Spektrums sind. Das Powercounting (3.27) wurde gerade so ausgelegt, dass die Entwicklung dort besonders sensitiv ist.

Die Lichtkegelentwicklung liefert somit, auch im Fall der hadronisch invarianten Masse für den Zerfall $B \rightarrow X_c \ell \nu$, ein glattes Spektrum. Dies muss mit dem Ergebnis der $1/m_b$ -Entwicklung verglichen werden. Das Resultat der $1/m_b$ -Entwicklung zeichnet sich durch das Auftreten von Deltafunktionen bei hadronischen Massen $s_H = m_c^2 + m_b \Lambda$ aus. Diese Stelle, die etwas größer ist als die Resonanzen der D- und D*-Mesonen, befindet sich mitten im Intervall der möglichen invarianten Massen, das im Experiment gemessen wird [75]. Zusätzlich endet das Spektrum der $1/m_b$ -Entwicklung genau an dieser Stelle. Das Resultat der Lichtkegelentwicklung stellt im Vergleich dazu ein physikalisch sinnvolles Spektrum dar. Obwohl die Betrachtung von inklusiven Zerfällen nicht die Resonanzstruktur bei kleinen Masse nachbilden kann, befindet sich das Maximum der Verteilung im richtigen Bereich und auch Prozesse mit großen Massen werden vernünftig dargestellt. Durch die Lichtkegelentwicklung erhält man somit ein physikalisch sinnvolles Spektrum des inklusiven Zerfalls mit dem verlässliche Berechnungen von Momenten möglich sind.

Die Modellabhängigkeit der Funktionen (4.1) kann untersucht werden, indem die Para-

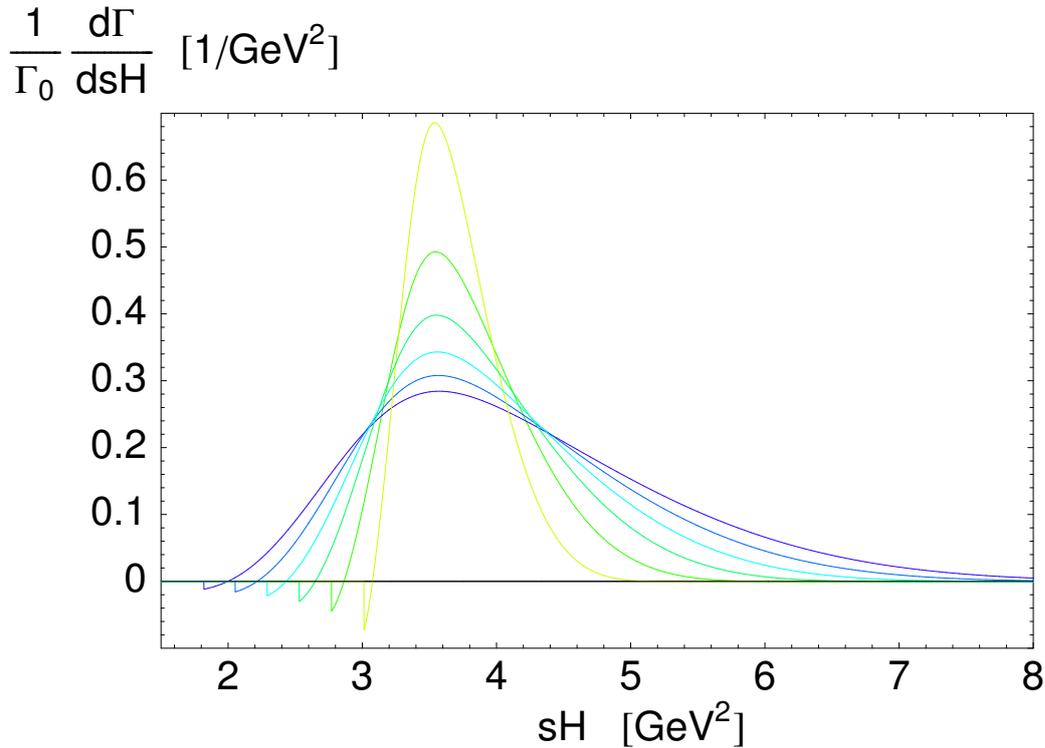


Abbildung 4.6: Die Abhängigkeit des Spektrums von der c -Quarkmasse bzw. Λ . Diese Abbildung zeigt das Spektrum, das mit der ersten Modellfunktion berechnet wurde, für Werte von Λ zwischen $0.2 \text{ GeV} \leq \Lambda \leq 0.7 \text{ GeV}$ im Abstand von $\Delta\Lambda = 0.1 \text{ GeV}$. Die Spektren mit den großen Breiten gehören dabei zu den hohen Werten von Λ .

meter Λ und λ_1 leicht verändert werden. Die erste Modellfunktion ist von nur einem Parameter, Λ , abhängig. Dieser Parameter legt auch, durch den Zusammenhang zwischen der Hadron- und Quarkmasse (2.15), den Wert der Masse des c -Quarks fest. Somit ist die Betrachtung der Modellabhängigkeit der Funktion gleichbedeutend mit der Untersuchung der Abhängigkeit des Spektrums von der Masse des c -Quarks. Der Wert der Masse des D -Mesons wird dabei konstant gehalten. Anders stellt sich die Situation bei der zweiten Modellfunktion dar. Sie besitzt zwei Parameter, Λ und λ_1 , und somit kann eine getrennte Untersuchung der Massenabhängigkeit durch verschiedene Werte von Λ und der Modellabhängigkeit durch Variation von λ_1 stattfinden. Die jeweiligen Resultate sind in den Abbildungen 4.6, 4.7 und 4.8 zu sehen. Für die Abbildungen der zweiten Modellfunktion wurde jeweils ein Parameter variiert, während der zweite Parameter konstant gehalten wurde. Die beiden Schaubilder, die in den Abbildungen 4.6 und 4.7 zu sehen sind, zeigen folgendes Verhalten: Für einen relativ kleinen Wert von Λ und damit einer großen Masse des c -Quarks erhält man für beide Modellfunktionen ein schmales Spektrum. Dies ist damit zu erklären, dass bei diesem Parameterwert die Bindung auf Grund der starken Wechselwirkung, die mit Λ umschrieben wird, eine untergeordnete Rolle spielt. Für kleine Werte von Λ verschwinden die Unterschiede zwischen partonischen und hadronischen

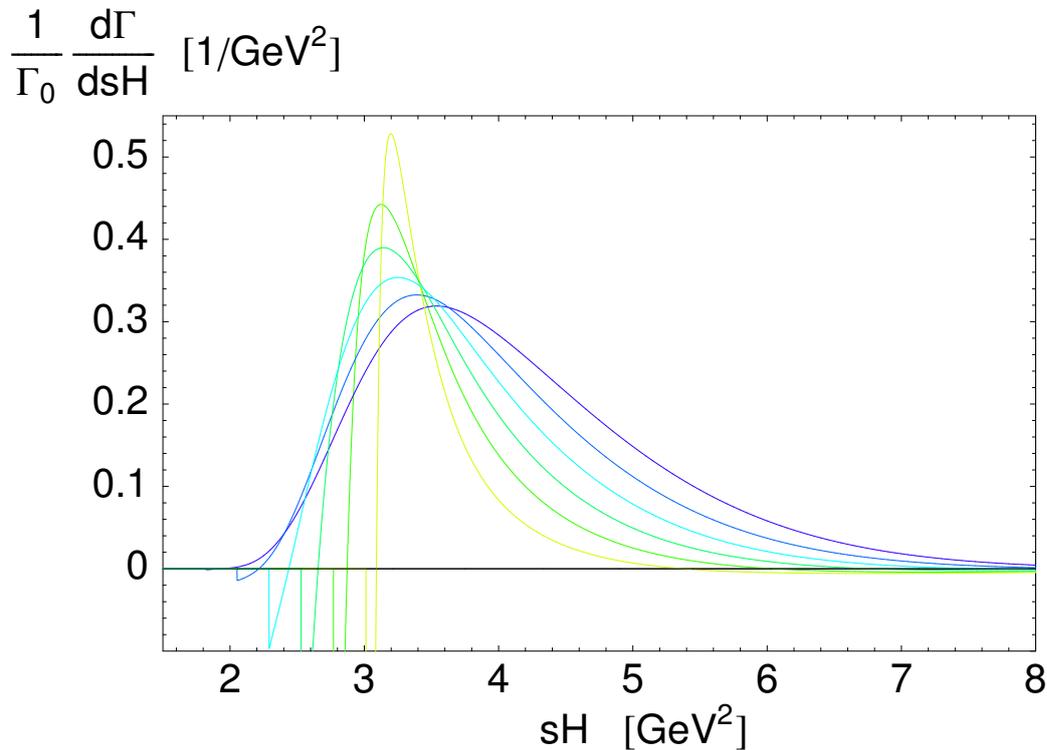


Abbildung 4.7: Die Abhängigkeit des Spektrums von der c -Quarkmasse. Diese Abbildung zeigt das Spektrum, das mit der zweiten Modellfunktion berechnet wurde, für Werte von Λ zwischen $0.2 \text{ GeV} \leq \Lambda \leq 0.7 \text{ GeV}$ im Abstand von $\Delta\Lambda = 0.1 \text{ GeV}$. Genau wie zuvor gehören die Spektren mit den großen Breiten zu den hohen Werten von Λ .

Größen und das Spektrum nähert sich dem Spektrum der partonisch invarianten Masse im partonischen Grenzfall an, welches, wie in Abschnitt 3.1, durch eine Deltafunktion an der Stelle $s_H = m_c^2$ bzw. im Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ bei $s_H = m_D^2$ gegeben ist. Die Kurve mit der kleinsten Breite in beiden Abbildungen gehört zu dem Parameterwert $\Lambda = 0.2 \text{ GeV}$. Da die Masse des D -Mesons auf den experimentell gemessenen Wert fixiert wurde, erhält damit die Masse des c -Quarks den Wert $m_c = 1.67 \text{ GeV}$. Besonders im Schaubild der zweiten Modellfunktion fällt auf, dass der Ausschlag zu negativen Werten bei kleinen invarianten Masse stärker wird. Dies liegt an der Parametrisierung des Matrixelements des Operators $O_1^\kappa(\omega)$. Dieses Matrixelement wird durch die Ableitung zweier Shapefunktionen beschrieben. Im Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ nähert sich das Spektrum einer Deltafunktion an und durch die Definition des Matrixelements durch die Ableitung von Shapefunktionen treten auch Anteile proportional zu der Ableitung einer Deltafunktion auf. Vergrößert man den Parameter bis zu $\Lambda = 0.7 \text{ GeV}$, so nimmt die Masse des c -Quarks ab. Die Bindungseffekte nehmen wieder eine stärkere Rolle ein. Da nun mehr kinematische Möglichkeiten bestehen aus Quarks ein Meson zu bilden, vergrößert sich der Phasenraum und man erhält ein breiteres Spektrum. Außerdem fällt auf, dass die Position des Maximums des ersten Schaubildes stabil gegenüber der Variation von Λ ist, während sich das Maximum des

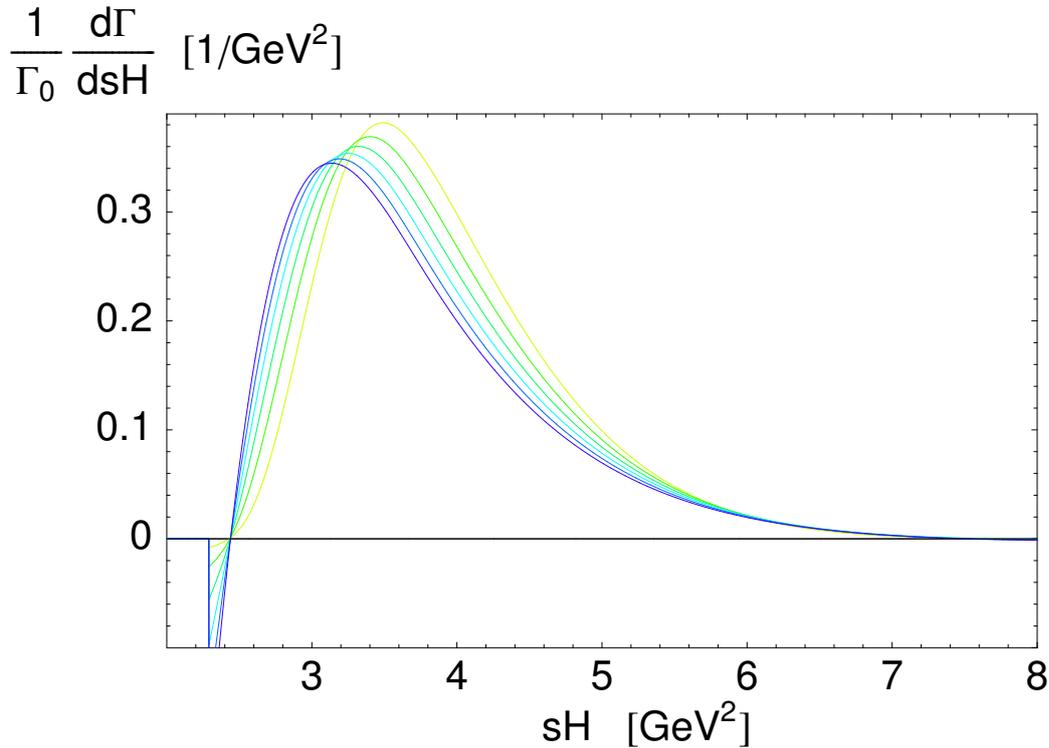


Abbildung 4.8: Abhängigkeit des Spektrums der zweiten Modellfunktion von λ_1 . Der Parameter λ_1 wurde dabei innerhalb des Intervalls $-0,35 \text{ GeV}^2 \leq \lambda_1 \leq -0,15 \text{ GeV}^2$ mit einem Abstand von $\Delta\lambda_1 = 0,04 \text{ GeV}^2$ variiert. Die dunklen Kurven entsprechen den niedrigen Werten von λ_1

zweiten Spektrums verschiebt.

In Abbildung 4.8 wird die Abhängigkeit des Spektrums von dem Parameter λ_1 für die zweite Modellfunktion gezeigt. Es ist zu sehen, dass die Ungenauigkeit auf Grund der unpräzisen Kenntnis dieses Parameters etwa 10% ausmacht. Die Abbildung wurde durch Variation von λ_1 innerhalb des Intervalls $-0,35 \text{ GeV}^2 \leq \lambda_1 \leq -0,15 \text{ GeV}^2$ erreicht, wobei die dunklen Kurven die Spektren mit kleinen Werten von λ_1 kennzeichnen. Bei diesen Werten von λ_1 erhält man einen größeren negativen Ausschlag bei kleinen invarianten Massen. Dies liegt daran, dass der Faktor, der das Matrixelement des Operators $O_1(\omega)$ multipliziert, negativ ist. Bei kleineren Werten von λ_1 wird der Beitrag der führenden Shapfunktion zu diesem Vorfaktor größer, wodurch sich ein stärkerer Ausschlag zu negativen Werten ergibt.

Mit diesen Modellfunktionen können nun auch die Momente des Spektrums berechnet werden, die für die Bestimmung der hadronischen Parameter eine wichtige Rolle spielen. Zur Überprüfung der Resultate werden die Momente mit Modellfunktionen numerisch bestimmt, um diese dann mit den im Experiment gemessenen Daten bzw. anderen Publikationen zu vergleichen. Auf Grund von experimentellen Einschränkungen sind nur Daten

verfügbar, die nicht den gesamten Phasenraum einbeziehen. So werden in den Experimenten die Momente mit Hilfe von Messungen bestimmt, bei denen der Impuls des geladenen Leptons eine vorgegebene Schwelle übersteigt. Damit die Ergebnisse mit den errechneten Momenten verglichen werden können, müssen die experimentellen Daten extrapoliert werden, so dass das Resultat das gesamte Intervall der möglichen Leptonimpulse beinhaltet. Mit Hilfe von [76] erhält man so für das erste Moment $\langle s_H \rangle \sim 4.6 \pm 0.1 \text{ GeV}^2$ und für das zweite Moment $\langle s_H^2 \rangle \sim 24 \pm 1.5 \text{ GeV}^4$. Die angegebenen Fehler beziehen sich dabei auf die publizierten Werte bei einem Schnitt des Leptonimpuls bei $p_{min}^* = 0.9 \text{ GeV}$. In führender Ordnung der Lichtkegelentwicklung ergibt sich in Abhängigkeit von dem Parameter Λ für die beiden Modellfunktionen die Werte in Tabelle 4.1. Durch die Beachtung

	Λ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f^{MN}(\omega)$	$\langle s_H \rangle$	4.11	4.26	4.42	4.58	4.74
	$\langle s_H^2 \rangle$	17.37	18.95	20.65	22.48	24.44
$f^N(\omega)$	$\langle s_H \rangle$	4.37	4.40	4.46	4.55	4.67
	$\langle s_H^2 \rangle$	20.67	20.83	21.44	22.36	23.52

Tabelle 4.1: Momente des Spektrums in führender Ordnung der Lichtkegelentwicklung

der nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung werden diese Werte, wie in Tabelle 4.2 gezeigt, leicht nach unten korrigiert. Die Momente der beiden Modellfunktionen

	Λ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f^{MN}(\omega)$	$\langle s_H \rangle$	3.90	4.00	4.10	4.21	4.32
	$\langle s_H^2 \rangle$	15.78	16.83	17.97	19.22	20.61
$f^N(\omega)$	$\langle s_H \rangle$	3.79	3.82	3.96	4.16	4.38
	$\langle s_H^2 \rangle$	14.61	15.44	16.86	18.67	20.72

Tabelle 4.2: Momente des Spektrums in nächstführender Ordnung der Lichtkegelentwicklung

zeigen eine leichte Modellabhängigkeit und stimmen im Rahmen dieser Abhängigkeit gut überein. Die geringen Änderungen der Momente bei der Variation von Λ bzw. m_c ist darauf zurückzuführen, dass die Masse des D-Mesons $m_D = m_c + \Lambda$ konstant gehalten wurde und in guter Näherung $\langle s_H \rangle \sim m_D^2$ bzw. $\langle s_H^2 \rangle \sim m_D^4$ gilt. Die Momente entsprechen den gemessenen Daten mit einer zufriedenstellenden Genauigkeit. Die errechneten Momente $\langle s_H^2 \rangle$ weichen von den gemessenen Daten stärker ab, da sie sehr sensitiv auf die Korrekturen der Lichtkegelentwicklung reagieren und somit eine größere Modellabhängigkeit aufweisen. Zwei Argumente sind für die Erläuterung der Differenz zu den experimentellen Werten zu beachten. Das errechnete Resultat enthält keinerlei Korrekturen der nächsten Ordnung der Störungstheorie. Die Strahlungskorrekturen zu dem partonischen Prozess sind bereits errechnet worden und könnten in einem weiteren Schritt eingebaut werden. Bei Berücksichtigung dieser Korrekturen wird das Auftreten von großen Massen verstärkt, wodurch die Momente zu größeren Werten verschoben werden. Der zweite Punkt bezieht sich auf

das Powercounting (3.27). Auf Grund der theoretischen Abschätzungen der Masse des c -Quarks besitzt das Quadrat dieser Masse die Größenordnung m_b/Λ_{QCD} . Dies hat zu Folge, dass die Faktoren, die aus der Kinematik des Zerfalls stammen, auch in der Masse entwickelt werden. Wenn die Korrekturen zu beiden Punkten in einer weiteren Rechnung hinzugefügt werden, wird sich der Unterschied zwischen Experiment und Theorie weiter verringern.

Auch mit publizierten Resultaten der $1/m_b$ -Entwicklung können die oben genannten Ergebnisse verglichen werden. In [71] wurden die ersten Momente des Spektrums der hadronisch invarianten Masse berechnet. Verwendet man für die dort angegebenen Resultate die Werte der hadronischen Parameter aus dieser Arbeit und vernachlässigt die Korrekturen der nächsten Ordnung der Störungstheorie, so erhält man die Werte aus Tabelle 4.3. Die

Λ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\langle s_H \rangle$	4.13	4.26	4.41	4.56	4.72
$\langle s_H^2 \rangle$	17.62	18.82	20.15	21.59	23.16

Tabelle 4.3: Momente des Spektrums aus [71]

recht gute Übereinstimmung der Werte der führenden Ordnung mit den publizierten Ergebnissen ist zufällig. Die Resultate der nächstführenden Ordnung stimmen bis auf einige Prozent mit den Werten aus [71] überein. Auch hier muss beachtet werden, dass eine Entwicklung in der Masse des c -Quarks durchgeführt wurde, während die publizierten Werte die komplette Massenabhängigkeit enthalten.

Eine weitere Prüfung des Resultats kann durch die Bestimmung des Verzweigungsverhältnisses eines exklusiven Zerfallskanals erfolgen. Das Spektrum wird bei kleinen invarianten Massen durch die exklusiven Zerfälle in D - bzw. D^* -Mesonen dominiert. Die Resonanz des D -Mesons hat eine sehr scharfe Signatur und ist somit klar getrennt von dem restlichen Teil des Spektrums. Im berechneten Spektrum finden sich auch im Bereich unterhalb der invariante Masse des D -Mesons Beiträge. Dies kommt durch die Verschmierung der Resonanz des D -Mesons im Zusammenhang mit der Betrachtung von inklusiven Zerfällen zustande. Somit entspricht ein Vergleich des prozentualen Verhältnisses des Spektrums von der kleinsten auftretenden Masse bis zur Masse des D -Mesons gerade dem gemessenen Verzweigungsverhältnis. Eine Integration des Spektrums von der kleinsten invarianten Masse bis zum Quadrat der Masse des D -Mesons, $m_D = m_c + \Lambda$, ergibt im Verhältnis zur totalen Rate die in Tabelle 4.4 gezeigten Werte. Der experimentelle Wert des Verzweigungsverhältnisses lässt sich aus [1] ermitteln. Aus diesen Zahlen ergibt sich ein Verzweigungsverhältnis von

$$\frac{\Gamma^{B \rightarrow D \ell \nu}}{\Gamma^{B \rightarrow X_c \ell \nu}} = 20.2 \pm 2\% \quad . \quad (4.5)$$

Dieses Ergebnis weicht von den errechneten Werten ab. Besonders auffällig ist das unterschiedliche Verhalten der beiden Modellfunktionen. Die Erklärung hierfür ist in den Abbildungen 4.6 und 4.7 zu sehen. Während die Position des Maximum der ersten Modellfunktion keine Abhängigkeit von der Wahl des Parameters Λ besitzt, verschiebt sich

Λ		0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f^{MN}(\omega)$	führende	18.93	19.00	19.05	19.11	19.16
	nächstführende	30.89	30.93	30.86	30.69	30.44
$f^N(\omega)$	führende	24.49	24.06	22.42	20.13	18.87
	nächstführende	49.21	44.13	37.65	30.95	24.86

Tabelle 4.4: errechnetes Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $B \rightarrow D\ell\nu$

das Maximum der zweiten Funktion für große Werte von Λ deutlich zu größeren invarianten Massen. Da die Masse des D-Mesons in diesen Berechnungen konstant gehalten wurde, verändert sich das Integrationsintervall nicht. Auf Grund der Abhängigkeit der zweiten Modellfunktion von Λ verschiebt sich das Maximum der Funktion in Richtung der oberen Integrationsgrenze m_D^2 . Dadurch nimmt das Verzweigungsverhältnis für große Werte von Λ ab. Bei der Diskussion der Modellabhängigkeit, die in Abbildung 4.7 zu sehen ist, wurde erläutert, dass sich das Spektrum im Grenzfall $\Lambda \rightarrow 0$ einer Deltafunktion an der Position $s_H = m_D^2$ annähert. Dadurch sind die hohe Werte des Verzweigungsverhältnisses der zweiten Modellfunktion bei kleinen Werten von Λ zu erklären. Der Übergang zu einer Deltafunktion geschieht bei der ersten Funktion dagegen durch eine Umverteilung der Fläche unter der Kurve, so dass sich das Verzweigungsverhältnis nur minimal ändert.

Die Diskrepanz zwischen den errechneten und den gemessenen Werten lassen sich durch folgende Punkte erklären: Bei der Betrachtung von inklusiven Zerfällen werden die Eigenschaften der hadronischen Zerfallsprodukte nicht berücksichtigt. Die Resonanzen einzelner Teilchen werden durch die Faltung mit der Shapefunktion über einen Bereich der Größe Λ_{QCD} gemittelt. Dadurch werden auch Anteile der Resonanz des D^* -Mesons in dem Integrationsbereich auftreten, wodurch das berechnete Verzweigungsverhältnis einen zu großen Wert erhält. Zudem liegt die untersuchte Resonanz gerade in dem Bereich der kleinen invarianten Massen, der stark von den Effekten der Shapefunktionen abhängt. Die Auswirkungen der Variation des Parameter Λ wird besonders bei der zweiten Modellfunktion deutlich. Außerdem würde die zusätzliche Betrachtung von Strahlungskorrekturen das Auftreten von großen invarianten Massen verstärken, wodurch sich der Wert des Verzweigungsverhältnisses weiter verringert. Abschließend wurden im Spektrum Massenterme auf Grund der Entwicklung in m_c^2 vernachlässigt, die sich ebenfalls auf das errechnete Ergebnis auswirken. Unter diesen Umständen wurde das Verzweigungsverhältnis der Resonanz des D-Mesons innerhalb der Ungenauigkeit richtig bestimmt.

Die Diskussion der berechneten Resultate zeigt, dass die Lichtkegelentwicklung im Fall des Spektrums der hadronisch invarianten Masse im Zerfall $B \rightarrow X_c\ell\nu$ sehr gute Ergebnisse liefert. Unter Berücksichtigung der Modellabhängigkeit und der Möglichkeit das Spektrum durch Strahlungskorrekturen weiter zu verbessern, führt der Vergleich mit experimentellen Daten und theoretischen Rechnungen zu einer überzeugenden Übereinstimmung. Die genaue Kenntnis des Verlaufs auch bei kleinen invarianten Massen kann nun dazu verwendet werden, die Genauigkeit der hadronischen Parameter zu steigern. Hierzu können zuerst mit Hilfe von Modellfunktionen die Auswirkungen von Schnitten im Spektrum untersucht

werden. Durch diese Analyse kann eine große invariante Masse so als Schnitt gewählt werden, dass sowohl die experimentellen als auch die theoretischen Fehler möglichst klein sind. Ohne Verwendung von Modellfunktionen kann das Spektrum auch über die invariante Masse in Abhängigkeit von einer oberen Grenze integriert werden. Durch die The tafunktionen ergeben sich hierfür verschiedene Integrationsintervalle bezüglich s_H , die von dem Wert von ω abhängen. In dieses Resultat kann nun die Momentenentwicklung der Shapefunktionen eingesetzt werden, welche die Variable ω auf einen bestimmten Wert fixiert. Damit erhält man eine theoretische Vorhersage für die Momente des Spektrums in Abhängigkeit der hadronischen Parameter, die dadurch bestimmt werden können. Sämtliche Informationen gehen dann in die Berechnung der totalen Zerfallsraten ein mit deren Hilfe die CKM-Matrixelemente V_{cb} und V_{ub} ermittelt werden können.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Das Standardmodell der Teilchenphysik blickt einer interessanten und aufschlussreichen Zukunft entgegen. Auf der einen Seite zeigen die Präzisionsrechnungen eine erstaunliche Übereinstimmung mit den im Experiment gefundenen Daten. Dies lässt darauf schließen, dass dieses theoretische Modell die Natur der Elementarteilchen sehr gut beschreibt. Auf der anderen Seite existieren Argumente, die belegen, dass das Standardmodell bei höheren Energien seine Gültigkeit verlieren wird. Somit wird das Standardmodell als eine effektive Beschreibung einer höherwertigen Theorie verstanden. Die Effekte einer übergeordneten Theorie werden kleine Diskrepanzen zwischen den experimentellen Daten und den theoretischen Vorhersagen erzeugen. In den letzten Jahren wurden deshalb einige Schritte unternommen um verschiedene Bereiche des Standardmodells genau unter die Lupe zu nehmen. Einer dieser Bereiche, der dabei stark in den Vordergrund getreten ist, ist die Physik der B-Mesonen. Von besonderem Interesse ist in diesem Bereich die Vermessung der CKM-Matrix, die sowohl entscheidend für die Verletzung der CP-Symmetrie ist, als auch die Effekte der Flavormischung im Standardmodell beschreibt. Aus Zerfällen und Oszillationen von B-Mesonen können wichtige Daten über die Struktur dieser Matrix gesammelt werden. Damit ist eine Überprüfung des Ansatzes, der zum Auftreten der unitären CKM-Matrix führt, möglich. Die Auswertung der experimentellen Daten ist allerdings auf Grund der Struktur der starken Wechselwirkung problematisch. Im Experiment treten nicht die elementaren Teilchen, die Quarks und Gluonen, auf sondern es sind Hadronen, die Bindungszustände von Quarks und Gluonen darstellen, zu beobachten. Die theoretische Beschreibung dieser Bindungszustände ist außerordentlich kompliziert und momentan im Rahmen des Standardmodells nicht möglich. Einen Ausweg aus dieser Situation bietet nur eine vernünftige Parametrisierung oder die Verwendung von Näherungsverfahren, die allerdings nur eine grobe Berechnung zulassen. Für die Überprüfung des CKM-Ansatzes sind aber gerade die Auswirkungen der Bindungszustände entscheidend und deshalb müssen die einzelnen Verfahren verfeinert werden um eine Möglichkeit zu erhalten, Physik jenseits des Standardmodells zu finden.

Die Elemente der CKM-Matrix können beispielsweise in inklusiven Zerfällen von B-

Mesonen bestimmt werden. Die Betrachtung von inklusiven Zerfällen hat aus Sicht der theoretischen Beschreibung den Vorteil, dass die Details der Zerfallsprodukte nicht bekannt sein müssen. Dadurch kann diese Methode eine höhere Präzision bei den Vorhersagen dieser Zerfälle liefern. Da bisher beim CKM-Ansatz keine Abweichungen zwischen dem Standardmodell und der Natur gefunden wurden, müssen sowohl die theoretischen Vorhersagen als auch die experimentellen Messungen noch genauer werden. Die Bestimmung der Matrixelemente V_{cb} und V_{ub} wird anhand der totalen Zerfallsraten durchgeführt. Diese besitzen eine Abhängigkeit von den hadronischen Parametern $\Lambda, \lambda_1, \dots$. Eine präzise Ermittlung eines Matrixelements ist somit nur möglich, wenn auch die Parameter mit einer hohen Genauigkeit bekannt sind. Da die Parameter nicht mit den Methoden der Störungstheorie berechnet werden können, erfolgt deren Bestimmung durch experimentelle Daten. Dazu werden neben der totalen Zerfallsrate auch Momente von Zerfallsspektren an den Experimenten extrahiert. Durch die Kombination von theoretischen Vorhersagen und gemessenen Daten dieser Momente können die hadronischen Parameter bestimmt werden. Auf Grund des universellen Charakters treten die Parameter in vielen inklusiven Zerfällen auf und können dadurch auch aus dem Zerfall $B \rightarrow X_c \ell \nu$ bestimmt werden. Für diesen Zerfall wurden auf Grund des hohen Verzweigungsverhältnisses und der klaren Signatur der Leptonen schon eine große Menge an Daten gesammelt, wodurch eine hohe experimentelle Präzision möglich ist. Die theoretische Genauigkeit wird durch die in dieser Arbeit verwendete Lichtkegelentwicklung gewährleistet. Diese Methode liefert ein physikalisch sinnvolles Spektrum der inklusiven Zerfälle. Dadurch können die Momente auch für einen Ausschnitt des Phasenraums berechnet werden, wodurch die theoretische Vorhersage besser der experimentellen Situation angepasst werden kann.

Die vorliegende Arbeit zeigt das Spektrum der hadronisch invarianten Masse des semileptonischen Zerfalls $B \rightarrow X_c \ell \nu$. Die Berechnung dieses Resultats wurde mit Hilfe der Heavy Quark Effective Theory, einer effektiven Theorie für Quarks mit einer großen Masse, und der Lichtkegelentwicklung, die als eine Operatorproduktentwicklung die Anteile des Zerfalls mit hoher Energie von den niederenergetischen Terme trennt, berechnet. Durch die Verwendung dieser Methode können die Bindungseffekte des Mesons durch universelle Funktionen, so genannte Shapefunktionen, beschrieben werden. Diese Funktionen liefern ein glattes und somit physikalisch sinnvolles Spektrum, das für die Berechnung von Momenten geeignet ist. Durch die Verwendung von Modellfunktionen wurde der Verlauf des Spektrum abgebildet. Mit Hilfe einer Entwicklung der Shapefunktionen konnte gezeigt werden, dass das Resultat mit publizierten Ergebnissen, die eine andere Form der Operatorproduktentwicklung verwenden, verträglich ist. Obwohl bei der Berechnung des Spektrums keine Strahlungskorrekturen betrachtet wurden, zeigen die ermittelten Momente eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Arbeitsgruppen sowie mit den experimentellen Daten. Das Spektrum erlaubt die theoretische Vorhersage von Momenten, die ein beliebiges Teilintervall der invarianten Masse beinhalten. Damit wird die Präzision bei der Bestimmung der hadronischen Parameter $\Lambda, \lambda_1, \dots$ sowie der CKM-Matrixelemente V_{cb} und V_{ub} verbessert und die Unitaritätsbedingung der CKM-Matrix kann genauer auf mögliche Effekte neuer Physik untersucht werden.

Anhang A

Matrixelemente der Lichtkegeloperatoren

In den vorangegangenen Kapiteln wurde das Spektrum der hadronisch invarianten Masse errechnet. Der Verlauf dieses Spektrums ist dabei hauptsächlich durch die Shapefunktionen gegeben, die durch die Matrixelemente der Lichtkegeloperatoren definiert sind. In den folgenden Abschnitten wird die Definition aus (3.49) detaillierter erläutert.

In führender Ordnung erhält man aus der Lichtkegelentwicklung zwei Operatoren, $O_0(\omega)$ und $P_0^\alpha(\omega)$. Wie bereits gesehen, definiert das Matrixelement von $O_0(\omega)$ die führende Shapefunktion $f(\omega)$

$$\langle B|O_0(\omega)|B\rangle = \langle B|\bar{h}_v\delta(iD_+ + \omega)h_v|B\rangle = f(\omega) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Der Unterschied der Operatoren $O_0(\omega)$ und $P_0^\alpha(\omega)$ ist lediglich durch die Matrixstruktur gegeben.

$$P_0^\alpha(\omega) = \bar{h}_v\delta(iD_+ + \omega)\gamma^\alpha\gamma_5h_v \quad (\text{A.2})$$

Auf Grund der Diracmatrix $\gamma^\mu\gamma_5$ transformiert der Operator unter der Parität wie ein Pseudovektor. Diese Eigenschaft muss bei der Parametrisierung des Matrixelements berücksichtigt werden. Ein Pseudovektor kann durch die Kontraktion eines Vektors mit dem Levi-Civita-Tensor konstruiert werden. Damit dieser Tensor aber einen Beitrag liefert, muss er mit vier linear unabhängigen Vektoren kontrahiert werden. Das Matrixelement von $P_0^\alpha(\omega)$ hängt aber nur vom Anfangszustand, der in diesem Fall ein B-Meson ist, und damit von einer Kombination der Vektoren v^μ und n^μ ab. Somit stehen nur zwei Vektoren zur Verfügung und es kann kein Pseudovektor konstruiert werden. Dadurch steht keine passende Größe zur Parametrisierung bereit und der Beitrag des Matrixelements muss verschwinden

$$\langle B|P_0^\alpha(\omega)|B\rangle = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

In der nächstführenden Ordnung der Lichtkegelentwicklung treten 12 weitere Operatoren auf, deren Matrixelement bestimmt werden muss. Die ersten Operatoren gemäß

der Aufzählung (3.24) sind $O_1^\mu(\omega)$ und $P_1^{\mu\alpha}(\omega)$. Diese Operatoren treten nach bisherigem Kenntnisstand nur auf, wenn die Masse des Quarks, welches bei dem Zerfall entsteht, nicht vernachlässigt wird. Das Matrixelement des Operators $O_1^\mu(\omega)$ besitzt eine Abhängigkeit zu der führenden Shapefunktion. Dieser Zusammenhang kann gezeigt werden, wenn der Operator mit dem Vektor n^μ kontrahiert wird.

$$n \cdot O_1(\omega) = \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega_2) \imath D_+ \delta(\imath D_+ + \omega_1) h_v \quad (\text{A.4})$$

Durch eine Variablentransformation $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (h, \omega_2)$ mit $h = \omega_1 - \omega_2$ und die anschließende Integration erhält man

$$\begin{aligned} n \cdot O_1(\omega) &= \int dh d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_2 - h) - \delta(\omega - \omega_2)}{h} \bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega_2) \omega_2 \delta(\imath D_+ + \omega_2 + h) h_v \\ &= \int dh d\omega_2 \frac{(\omega - h) \delta(\omega - \omega_2 - h) - \omega \delta(\omega - \omega_2)}{h} \bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega_2) \delta(h) h_v \\ &= \int dh \bar{h}_v \frac{(\omega - h) \delta(\omega + \imath D_+ - h) - \omega \delta(\omega + \imath D_+)}{h} \delta(h) h_v \\ &= -\bar{h}_v (\omega \delta(\omega + \imath D_+))' h_v \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Das Matrixelement des Operators entlang \bar{n}^μ ist somit proportional zu der Ableitung des Produkts aus führender Shapefunktion und ω . Genau wie zuvor bei der führenden Ordnung stehen zur Parametrisierung nur die Vektoren v^μ und n^μ zur Verfügung. Die restlichen Beiträge müssen somit proportional zu v^μ sein. Die Kontraktion des Operators mit v^μ führt zu keinen weiteren Vereinfachungen und so wird dieser Anteil mit einer neuen Shapefunktion parametrisiert. Analog wird dieser Beitrag durch die Ableitung der neuen Shapefunktion definiert.

$$\langle B | O_1^\mu(\omega) | B \rangle = -(\omega f(\omega)(n^\mu - v^\mu) + r_1(\omega) n^\mu)' \quad (\text{A.6})$$

Der Operator $P_1^{\mu\alpha}(\omega)$ unterscheidet sich vom Operator $O_1^\mu(\omega)$ nur durch das Auftreten der Diracmatrix $\gamma^\mu \gamma_5$. Prinzipiell kann das Matrixelement des Operators unter Berücksichtigung der Transformationseigenschaften unter der Parität durch den Levi-Civita-Tensor parametrisiert werden.

$$\langle B | P_1^{\mu\alpha}(\omega) | B \rangle \sim \epsilon_\perp^{\mu\alpha} \quad (\text{A.7})$$

Dabei gilt $\epsilon_\perp^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_\alpha v_\beta$. Der Wilsonkoeffizient zu diesem Operator, der durch die Operatorproduktentwicklung entsteht, enthält nur den Vektor \bar{n}^μ . Das Matrixelement von $P_1^{\mu\alpha}(\omega)$ könnte also mit einer neuen Shapefunktion repräsentiert werden, jedoch verschwindet dieser Beitrag bei der Kontraktion mit dem Wilsonkoeffizient und spielt somit für den hier betrachteten Fall keinerlei Rolle. Damit die Übersicht erhalten bleibt, wurde deshalb für diesen Term in (3.49) keine neue Shapefunktion definiert.

Der Operator $O_3(\omega)$ verhält sich wie ein Lorentzskalar und somit kann das Matrixelement

einfach als eine weitere Shapefunktion definiert werden.

$$\begin{aligned} \langle B|O_3(\omega)|B\rangle = \\ \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B|\bar{h}\delta(\imath D_+ + \omega_2) (\imath D_\perp)^2 \delta(\imath D_+ + \omega_1)h|B\rangle = G_3(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Das Pendant dieses Operators, $P_3^\alpha(\omega)$, verhält sich unter einer Paritätstransformation wie ein Pseudovektor und damit genau wie der Operator $P_0^\alpha(\omega)$. Somit kann das Matrixelement von $P_3^\alpha(\omega)$ aus dem oben genannten Grund nicht parametrisiert werden und verschwindet deshalb.

Auch bei dem Matrixelement des Operators $O_4(\omega)$ spielt das Verhalten unter Paritätstransformationen die entscheidende Rolle. Auf den ersten Blick kann das Matrixelement genau wie $\langle B|O_3(\omega)|B\rangle$ parametrisiert werden. Die Definition von $O_4(\omega)$ enthält aber bereits einen Levi-Civita-Tensor, der bei einer Paritätstransformation ein zusätzliches Minuszeichen erzeugt. Das Matrixelement verhält sich daher wie ein Pseudoskalar. Dies kann aber mit den zur Verfügung stehenden Größen nicht parametrisiert werden. Deshalb verschwindet auch dieser Beitrag. Für das Matrixelement des Operators $P_4^\alpha(\omega)$ kann die gleiche Argumentationskette verwendet werden um zu zeigen, dass es einen Beitrag zum Prozess liefert. Die Kombination des Levi-Civita-Tensors mit $\gamma^\mu\gamma_5$ bewirkt, dass das Matrixelement unter der Parität wie ein Vektor transformiert. Es wird deshalb durch eine Shapefunktion und die Vektoren n^μ und v^μ beschrieben. An dieser Stelle gilt es zu beachten, dass $\gamma^\mu\gamma_5$ den Spin des b-Quarks repräsentiert. Da das Skalarprodukt des Spins mit dem Impuls des b-Quarks bzw. der Geschwindigkeit v^μ verschwindet, muss auch dasselbe für das Matrixelement gelten.

$$\begin{aligned} \langle B|P_4^\alpha(\omega)|B\rangle = \\ -\frac{g}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B|\bar{h}\delta(\imath D_+ + \omega_2) (\epsilon \cdot \hat{G})_\perp \delta(\imath D_+ + \omega_1) s^\alpha h|B\rangle \\ = (v^\alpha - n^\alpha) H_4(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Der Operator $O_S^\mu(\omega)$ stellt unter Paritätstransformationen einen Vektor dar. Deshalb kann das Matrixelement des Operators mit einer Kombination der Vektoren n^μ und v^μ geschrieben werden. Es muss aber keine neue Shapefunktion definiert werden, da das Matrixelement, ähnlich wie für den Operator $O_1(\omega)$, von der führenden Shapefunktion abhängig ist. Dies kann durch eine Kontraktion mit n^μ gezeigt werden.

$$n \cdot O_S(\omega) = \bar{h} \{ \imath D_+, \delta(\imath D_+ + \omega) \} h = -2\omega \bar{h} \delta(\imath D_+ + \omega) h \quad (\text{A.10})$$

Mit diesem Resultat lautet das Matrixelement

$$\langle B|O_S^\mu(\omega)|B\rangle = \langle B|\bar{h} \{ \imath D^\mu, \delta(\imath D_+ + \omega) \} h|B\rangle = (n^\mu - \bar{n}^\mu) \omega f(\omega) \quad . \quad (\text{A.11})$$

Das Matrixelement des Operators $P_S^{\mu\alpha}(\omega)$ trägt nicht zum Ergebnis bei, da alle Momente des Matrixelements und somit auch das Matrixelement selbst verschwindet. Für das nullte Moment ist dies leicht nachzuvollziehen, da in diesem Fall die Bewegungsgleichung der HQET angewandt werden kann.

$$M_0 = \int d\omega \langle B | \bar{h} \{ \imath D^\mu, \delta(\imath D_+ + \omega) \} s^\alpha h | B \rangle = 2 \langle B | \bar{h} \imath D^\mu s^\alpha h | B \rangle = 0 \quad (\text{A.12})$$

Für die Berechnung von höheren Momenten wird in das oben stehende Integral der Faktor ω^n eingefügt. Auf Grund der Deltafunktion können diese Terme dann als kovariante Ableitungen geschrieben werden. Da der Operator mit einem Antikommutator definiert ist, entstehen dadurch symmetrische Kombinationen von Ableitungen.

$$M_1 = \int d\omega \omega \langle B | \bar{h} \{ \imath D^\mu, \delta(\imath D_+ + \omega) \} s^\alpha h | B \rangle = - \langle B | \bar{h} \{ \imath D^\mu, \imath D_+ \} s^\alpha h | B \rangle \quad (\text{A.13})$$

Die dabei entstehenden Matrixelemente müssen, damit das richtige Verhalten unter Paritätstransformationen erhalten bleibt, mit einem Levi-Civita-Tensor definiert werden. Dadurch wird ein antisymmetrisches Objekt mit einem symmetrischen kontrahiert und auch die höheren Momente tragen nicht bei. Somit verschwindet das gesamte Matrixelement des Operators $P_S^{\mu\alpha}(\omega)$.

Die zwei folgenden Operatoren, $O_A^\mu(\omega)$ und $P_A^{\mu\alpha}(\omega)$, unterscheiden sich von den vorangegangenen nur durch die Ersetzung des Antikommutators durch einen Kommutator. Das Verhalten der Matrixelemente verändert sich allerdings grundlegend. Der Operator $O_A^\mu(\omega)$ muss sich, genau wie $O_S^\mu(\omega)$, gemäß den Bewegungsgleichungen der HQET verhalten und das Matrixelement ist somit proportional zu

$$\langle B | O_S^\mu(\omega) | B \rangle = \langle B | \bar{h} [\imath D^\mu, \delta(\imath D_+ + \omega)] h | B \rangle = (v^\mu - n^\mu) A(\omega) \quad (\text{A.14})$$

Die Funktion $A(\omega)$ kann extrahiert werden, indem das Matrixelement mit n^μ kontrahiert wird. Auf Grund des Kommutators trägt diese Kombination aber nicht zum Ergebnis bei und daher muss auch das Matrixelement von $O_A^\mu(\omega)$ nicht weiter betrachtet werden.

$$n \cdot O_S(\omega) = \bar{h} [\omega, \delta(\imath D_+ + \omega)] h = 0 \quad (\text{A.15})$$

Das Matrixelement des Operator $P_A^{\mu\alpha}(\omega)$ kann unter Berücksichtigung der Transformationseigenschaften durch eine weitere Shapefunktion beschrieben werden.

$$\langle B | P_A^{\kappa\alpha}(\omega) | B \rangle = \langle B | \bar{h} [\imath D^\kappa, \delta(\imath D_+ + \omega)] s^\alpha h | B \rangle = -i \epsilon^{\kappa\alpha\rho\sigma} v_\rho n_\sigma h_1(\omega) \quad (\text{A.16})$$

Schließlich bleiben noch die Operatoren zu betrachten, welche die Korrekturterme der Lagrangedichte der HQET beinhalten. Diese Operatoren treten immer in der gleichen Weise in Verbindung mit den führenden Operatoren auf. Zudem besitzen sie die jeweils gleichen Transformationseigenschaften wie $O_0(\omega)$ und $P_0^\alpha(\omega)$. Mit der gleichen Begründung,

die auch zu den Ergebnissen dieser Operatoren führte, werden die Matrixelemente der Operatoren $O_T(\omega)$ und $P_T^\alpha(\omega)$ parametrisiert. Man erhält

$$\begin{aligned} \langle B|O_T(\omega)|B\rangle &= \langle B|i \int d^4y T[(\bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega) \bar{\Gamma} \gamma^\lambda \Gamma h_v)(0) \delta\mathcal{L}(y)]h_v|B\rangle = \frac{1}{2}t(\omega) \\ \langle B|P_T^\alpha(\omega)|B\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Anhang B

Momente der Shapefunktionen

Die Möglichkeit die Shapefunktionen in Momente zu entwickeln, verdeutlicht die Tatsache, dass die Lichtkegelentwicklung Terme der $1/m_b$ -Entwicklung resummiert, die in einer bestimmten kinematischen Situation von derselben Größenordnung sind. Diese Entwicklung wird hauptsächlich dazu verwendet die Resultate der Lichtkegelentwicklung mit denen der $1/m_b$ -Entwicklung zu vergleichen. Es wird gleichzeitig sichergestellt, dass die Shapefunktionen abseits der speziellen kinematischen Situation die gleichen Ergebnisse liefern.

Die Berechnung der Momente ist durch das Auftreten der Deltafunktion $\delta(\omega + \imath D_+)$ in den meisten Operatoren der Lichtkegelentwicklung relativ einfach. Die Faktoren ω , die bei der Ermittlung der höheren Momente auftreten, können so durch kovariante Ableitungen ersetzt werden. Die Integration über die verbleibende Deltafunktion ergibt ein Matrixelement, das mit Hilfe der HQET parametrisiert werden kann. Die Entwicklung der Funktionen ist durch

$$f(\omega) = \sum_n \frac{(-1)^n M_n}{n!} \delta^{(n)}(\omega) \quad (\text{B.1})$$

definiert.

Für die führende Shapefunktion $f(\omega)$ ist die Berechnung der ersten Momente sehr übersichtlich. Die Funktion ist durch das Matrixelement des führenden Operators $O_0(\omega)$ definiert.

$$f(\omega) = \langle B | \bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega) h_v | B \rangle \quad (\text{B.2})$$

Daraus ergeben sich die Momente

$$\begin{aligned} M_0 &= \int d\omega \langle B | \bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega) h_v | B \rangle = \langle B | \bar{h}_v h_v | B \rangle = 1 \\ M_1 &= \int d\omega \omega \langle B | \bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega) h_v | B \rangle = -\langle B | \bar{h}_v \imath D_+ h_v | B \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \int d\omega \omega^2 \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega) h_v | B \rangle = \langle B | \bar{h}_v iD_+ iD_+ h_v | B \rangle = -\frac{1}{3} \lambda_1 \\
M_3 &= \int d\omega \omega^3 \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega) h_v | B \rangle = -\langle B | \bar{h}_v iD_+ iD_+ iD_+ h_v | B \rangle = \frac{1}{3} \rho_1 \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Shapefunktion $f(\omega)$ ist das Verschwinden des ersten Moments. Durch das Theorem von Luke [47] wurde gezeigt, dass inklusive Raten in der HQET keine Korrekturterme proportional zur inversen Masse besitzen. Das Ergebnis des ersten Moments ist also eine grundlegende Bedingung an die führende Shapefunktion, welche die Menge der möglichen Modellfunktionen einschränkt. Die Entwicklung der Funktion $f(\omega)$ lautet somit

$$f(\omega) = \delta(\omega) - \frac{\lambda_1}{6} \delta''(\omega) - \frac{\rho_1}{18} \delta'''(\omega) + \dots \quad (\text{B.4})$$

Die nächstführende Shapefunktion $G_3(\omega)$ entsteht durch das Matrixelement des Operators $O_3(\omega)$. Auch hier ist der Ausgangspunkt ein skalarer Operator, wodurch die Funktion direkt proportional zu dem Matrixelement ist.

$$G_3(\omega) = \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (iD_\perp)^2 \delta(iD_+ + \omega_1) h_v | B \rangle \quad (\text{B.5})$$

In Anhang A wurde für den Operator $O_1(\omega)$ gezeigt, dass durch die Integration über ω_1 und ω_2 eine Ableitung der Deltafunktion $\delta(iD_+ + \omega)$ entsteht. Damit das Integral über diese Ableitung einen Beitrag liefert, muss also mindestens ein Faktor ω vorhanden sein. Somit verschwindet das nullte Moment M_0 . Das erste Moment lautet

$$\begin{aligned}
M_1 &= \int d\omega \omega \\
&\int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (iD_\perp)^2 \delta(iD_+ + \omega_1) h_v | B \rangle \\
&= - \int d\omega \omega \langle B | \bar{h}_v \delta'(iD_+ + \omega) (iD_\perp)^2 h_v | B \rangle \\
&= \langle B | \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v | B \rangle = \frac{2}{3} \lambda_1 \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Der Vorfaktor des hadronischen Parameters entsteht durch $g_\perp^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 2$. Der nächste Term in der Entwicklung verschwindet, da in dem zu berechnenden Matrixelement die mittlere kovariante Ableitung nur senkrechte Komponenten enthält. Die Parametrisierung der HQET (2.14) lässt aber nur Komponenten parallel zu der Geschwindigkeit v^μ zu. Die Entwicklung der Shapefunktion $G_3(\omega)$ lautet damit bis zur betrachteten Ordnung

$$G_3(\omega) = -\frac{2\lambda_1}{3} \delta'(\omega) + \dots \quad (\text{B.7})$$

Eine ähnliche Situation ergibt sich bei den Momenten der Funktion $H_4(\omega)$. Die Definition der Shapefunktion erhält man, wenn man das Matrixelement mit dem Vektor n^α

kontrahiert.

$$H_4(\omega) = -\frac{g}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) (\epsilon \cdot \hat{G})_{\perp} \delta(iD_+ + \omega_1) n \cdot sh_v | B \rangle \quad (\text{B.8})$$

Durch die gleiche Vorgehensweise wie bei $G_3(\omega)$, ergibt sich

$$M_1 = -\frac{g}{2} \langle B | \bar{h}_v (\epsilon \cdot \hat{G})_{\perp} n \cdot sh_v | B \rangle = \lambda_2 \quad . \quad (\text{B.9})$$

Der darauf folgende Term trägt, genau wie zuvor, nicht bei, da auch der Gluontensor $G^{\mu\nu}$ nur senkrechte Komponenten vorweist und die Entwicklung lautet

$$H_4(\omega) = -\lambda_2 \delta'(\omega) + \dots \quad . \quad (\text{B.10})$$

Eine ähnlich Struktur wie die letzten beiden Operatoren, besitzt auch der Operator $O_1(\omega)$. Das Matrixelement dieses Operators wird durch die Ableitungen der Funktionen $f(\omega)$ und $r_1(\omega)$ dargestellt. Da die Momentenentwicklung von $f(\omega)$ bereits bekannt ist, verbleiben noch die Momente von $r_1(\omega)$ zu berechnen. Die Ableitung dieser Funktion erhält man durch Kontraktion des Matrixelements mit v^μ .

$$r'_1(\omega) = - \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \langle B | \bar{h}_v \delta(iD_+ + \omega_2) v \cdot D \delta(iD_+ + \omega_1) h_v | B \rangle \quad (\text{B.11})$$

Da durch diese Kontraktion der Term $v \cdot D$ entsteht, verschwinden das nullte und erste Moment auf Grund der Bewegungsgleichung der Felder h_v . Das zweite Moment trägt auch nicht bei, da das Integral über die Ableitung der Deltafunktion verschwindet. Das dritte Moment von $r'_1(\omega)$ lautet

$$M_3 = - \langle B | \bar{h}_v iD_+ v \cdot D iD_+ h_v | B \rangle = \frac{1}{3} \rho_1 \quad . \quad (\text{B.12})$$

Die Entwicklung von $r'_1(\omega)$ beginnt somit mit dem dritten Moment. Daraus ergibt sich für $r_1(\omega)$

$$r_1(\omega) = -\frac{\rho_1}{18} \delta''(\omega) + \dots \quad . \quad (\text{B.13})$$

Die Shapefunktion $h_1(\omega)$ ist definiert durch das Matrixelement des Operators $P_A^{\kappa\alpha}(\omega)$

$$h_1(\omega) = i\epsilon_{\kappa\alpha}^{\perp} \langle B | \bar{h}_v [iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)] s^\alpha h_v | B \rangle \quad . \quad (\text{B.14})$$

Das nullte Moment dieser Funktion verschwindet auf Grund der Bewegungsgleichung der HQET. Die Berechnung der nächsten Momente ergibt

$$\begin{aligned} M_1 &= i\epsilon_{\kappa\alpha}^{\perp} \int d\omega \omega \langle B | \bar{h}_v [iD^\kappa, \delta(iD_+ + \omega)] s^\alpha h_v | B \rangle \\ &= -i\epsilon_{\kappa\alpha}^{\perp} \int d\omega \langle B | \bar{h}_v [iD^\kappa, iD_+] s^\alpha h_v | B \rangle \\ &= \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \imath \epsilon_{\kappa\alpha}^\perp \int d\omega \omega^2 \langle B | \bar{h}_v [\imath D^\kappa, \delta(\imath D_+ + \omega)] s^\alpha h_v | B \rangle \\
&= \imath \epsilon_{\kappa\alpha}^\perp \int d\omega \langle B | \bar{h}_v [\imath D^\kappa, \imath D_+ \imath D_+] s^\alpha h_v | B \rangle \\
&= \rho_2 \quad .
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Damit lautet die Momentenentwicklung der Funktion $h_1(\omega)$

$$h_1(\omega) = \lambda_2 \delta'(\omega) + \frac{\rho_2}{2} \delta''(\omega) + \dots \quad . \tag{B.16}$$

In einem letzten Schritt bleibt nun noch die Entwicklung der Funktion $t(\omega)$. Diese Funktion ist definiert durch den Operator $O_T(\omega)$, der durch die Korrekturterme der Lagrangedichte der HQET aus dem führenden Operator $O_0(\omega)$ entsteht.

$$t(\omega) = 2 \langle B | \imath \int d^4 y T[(\bar{h}_v \delta(\imath D_+ + \omega) h_v)(0) \delta \mathcal{L}(y)] | B \rangle \tag{B.17}$$

Der erste Term in der Entwicklung ist proportional zur Deltafunktion $\delta(\omega)$. Da ω die Massendimension eins besitzt, ist dieser Term antiproportional zur Masse. Diese Korrekturterme dürfen allerdings laut Luke's Theorem nicht auftreten. Somit muss das nullte Moment dieser Funktion verschwinden. Das erste Moment errechnet sich aus folgendem Ausdruck:

$$M_1 = 2 \langle B | \imath \int d^4 y T[(\bar{h}_v \imath D_+ h_v)(0) \delta \mathcal{L}(y)] | B \rangle \quad . \tag{B.18}$$

Die einzige Möglichkeit ein Matrixelement eines lokalen Operators zu erhalten, ist gegeben durch die Verknüpfung des Zeitordnungsoperator T mit den Quarkfeldern. Diese Kombination ergibt den Propagator $S(y)$ des Feldes h_v .

$$M_1 = 2 \langle B | \imath \int d^4 y \bar{h}_v(0) \imath D_+ \imath S(0 - y) \delta \tilde{\mathcal{L}}(y) | B \rangle \tag{B.19}$$

Dabei beschreibt $\delta \tilde{\mathcal{L}}(y) = \frac{1}{2m} (\imath D)^2 h_v(y) + \frac{1}{2m} s^{\mu\nu} G_{\mu\nu} h_v(y)$. Damit ein lokaler Operator entsteht muss die kovariante Ableitung auf den Propagator wirken. Diese Berechnung kann am einfachsten im Ruhesystem des Mesons durchgeführt werden. Der Vektor n^μ wird so gewählt, dass $\imath D_+ = \imath(\partial_0 - \partial_3)$ gilt. Der Propagator kann im Impulsraum bestimmt werden.

$$\tilde{S}(k) = \frac{1}{v \cdot k} = \frac{1}{k_0} \tag{B.20}$$

Die Ableitung ∂_0 auf $S(y)$ ist somit proportional zu

$$\partial_0 \int d^4 k e^{\imath k \cdot y} \frac{1}{k_0} \sim \delta^4(y) \quad . \tag{B.21}$$

Dieses Resultat bestätigt, dass der Propagator $S(y)$ die Greensche Funktion des Differentialoperators $v \cdot D = \imath \partial_0$ der Bewegungsgleichung von h_v ist. Bei dem zweiten Term, der

durch die Ableitung $\imath\partial_3$ entsteht, ist es ausreichend nur die Komponente y_0 zu betrachten.

$$\partial_3 \int d^4k e^{\imath k \cdot y} \frac{1}{k_0} \sim \theta(y_0) - \theta(-y_0) \quad (\text{B.22})$$

Die Ableitung ist somit proportional zum Vorzeichen von y_0 . Die Felder h_v besitzen auf Grund der Bewegungsgleichung $v \cdot D = \imath\partial_0 h_v = 0$ keine Zeitabhängigkeit und das Integral in (B.17) reduziert sich auf

$$\int dy_0 (\theta(y_0) - \theta(-y_0)) = 0 \quad (\text{B.23})$$

Damit erhält man eine Deltafunktion, die nur Quarkfelder an der gleichen Ortskoordinate miteinander verknüpft. Das erste Moment kann dadurch aus folgendem Matrixelement ermittelt werden:

$$M_1 = 2\langle B | \delta\mathcal{L} | B \rangle = \lambda_1 + 3\lambda_2 \quad (\text{B.24})$$

Die Entwicklung für die Funktion $t(\omega)$ lautet somit

$$t(\omega) = -(\lambda_1 + 3\lambda_2)\delta'(\omega) + \dots \quad (\text{B.25})$$

Anhang C

Herleitung der Zerfallsrate

Die differentielle inklusive Zerfallsrate für den Prozess $B \rightarrow X_c \ell \nu$ ist gegeben durch

$$d\Gamma = \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2p_\ell^0} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2p_\nu^0} \sum_{X_c} |\langle X_c \ell \nu | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta(p_B - p_\ell - p_\nu - p_{x_c}) \quad (C.1)$$

mit dem effektiven Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (\bar{c} \gamma_\alpha P_L b) (\bar{\ell} \gamma^\alpha P_L \nu) \quad . \quad (C.2)$$

Das Matrixelement des effektiven Hamilton-Operator ergibt

$$\langle X_c \ell \nu | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (\bar{u}_\ell \gamma^\alpha u_\nu) \langle X_c | (\bar{c} \gamma_\alpha P_L b) | B \rangle = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (\bar{u}_\ell \gamma^\alpha u_\nu) \langle X_c | J_H^\alpha | B \rangle \quad . \quad (C.3)$$

Dadurch kann die Zerfallsrate in einen rein leptonischen und einen hadronischen Term aufgeteilt werden.

$$d\Gamma = 16\pi G_F^2 |V_{cb}|^2 L^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} d^4 q \quad (C.4)$$

Der leptonische Teil $L^{\alpha\beta}$ ist dabei definiert als

$$L^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2p_\ell^0} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2p_\nu^0} \delta(q - p_\ell - p_\nu) (\bar{u}_\ell \gamma^\alpha u_\nu) (\bar{u}_\nu \gamma^\beta u_\ell) \quad . \quad (C.5)$$

Summiert man über alle Spineinstellungen der Leptonen und vernachlässigt man deren Massen, muss folgendes Integral gelöst werden

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta} = \int d^4 p_\ell d^4 p_\nu \delta(p_\ell^2) \theta(p_\ell^0) \delta(p_\nu^2) \theta(p_\nu^0) \delta(q - p_\ell - p_\nu) \text{Tr} [\not{p}_\nu \gamma^\alpha P_L \not{p}_\ell \gamma^\beta P_L] \quad . \quad (C.6)$$

Aufgrund der Eigenschaften der Spur und der Tatsache, dass über beide Leptonimpulse integriert wird, ist das Integral total symmetrisch bezüglich der Indizes α und β . Es muss also folgende Form haben.

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta} = A g^{\alpha\beta} + B q^\alpha q^\beta \quad (C.7)$$

Die Variablen A und B können bestimmt werden, indem C.7 mit $g_{\alpha\beta}$ bzw. $q_\alpha q_\beta$ kontrahiert wird.

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} \mathcal{I}^{\alpha\beta} &= 4A + q^2 B = -2q^2 \int d^4 p_\ell d^4 p_\nu \delta(p_\ell^2) \theta(p_\ell^0) \delta(p_\nu^2) \theta(p_\nu^0) \delta(q - p_\ell - p_\nu) = -2q^2 \mathcal{I} \\ q_\alpha q_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta} &= q^2 A + q^4 B = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Die noch zu bestimmende Phasenraumintegration löst man im Ruhesystem des Impulsübertrags $q = p_\ell + p_\nu$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2p_\ell^0} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2p_\nu^0} \delta(q - p_\ell - p_\nu) = \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^3 2p_\ell^0} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2p_\nu^0} \delta(E_q - p_\ell^0 - p_\nu^0) \delta(\vec{p}_\ell + \vec{p}_\nu) \\ &= \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^6 4p_\ell^0} \delta(E_q - p_\ell^0 - p_\nu^0) = \pi \int \frac{d^3 p_\ell}{(2\pi)^6} \delta((E_q - 2p_\ell^0) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Die Lösung des Gleichungssystem ergibt für den leptonen Anteil

$$L^{\alpha\beta} = \frac{1}{6(2\pi)^5} (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \quad . \quad (\text{C.10})$$

Damit erhält man für die Zerfallsrate

$$d\Gamma = \frac{16}{\pi m_b^5} \Gamma_0 (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) W_{\alpha\beta} d^4 q \quad (\text{C.11})$$

mit $\Gamma_0 = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_b^5}{192\pi^3}$. Für die Lichtkegelentwicklung werden zwei Lichtkegelvektoren n und \bar{n} benötigt. Sie haben die Eigenschaften $n \cdot \bar{n} = 2$ und $v = \frac{1}{2}(n + \bar{n})$, wobei v die Geschwindigkeit des B-Mesons ist. Zur Vereinfachung der Terme wird das Koordinatensystem so gedreht, dass der Impulsübertrag \vec{q} gerade in Richtung von \vec{n} zeigt. Mit der Bedingung $q^2 \neq 0$ besitzt q Komponenten in n - und \bar{n} - Richtung.

$$q^\mu = \frac{1}{2} \bar{n} \cdot q n^\mu + \frac{1}{2} n \cdot q \bar{n}^\mu \quad (\text{C.12})$$

Somit kann die Integration über $d^4 q$ durch eine Integration über $dn \cdot q$ und $d\bar{n} \cdot q$ geschrieben werden. Zur Vereinfachung wird in das Bezugssystem gewechselt indem die räumliche Komponenten von $q = (q_0, 0, 0, q_3)$ gerade in z-Richtung zeigen. Dies kann erreicht werden indem man die Lichtkegelvektoren $n = (1, 0, 0, 1)$ und $\bar{n} = (1, 0, 0, -1)$ wählt. Damit gilt

$$\begin{aligned} d^4 q &= |\vec{q}|^2 dq_0 d\Omega_3 d|\vec{q}| \\ &= 4\pi q_3^2 dq_0 dq_3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

In diesem speziellen Koordinatensystem gilt außerdem

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{2} (\bar{n} \cdot q + n \cdot q) \\ q_3 &= \frac{1}{2} (\bar{n} \cdot q - n \cdot q) \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Nach Berechnung der Funktionaldeterminante erhält man

$$d^4q = \frac{\pi}{2}(\bar{n} \cdot q - n \cdot q)^2 dn \cdot q d\bar{n} \cdot q \quad . \quad (\text{C.15})$$

Allerdings muss man wegen der bestimmten Wahl des Koordinatensystems noch Bedingungen an $n \cdot q$ und $\bar{n} \cdot q$ stellen. So muss die invariante Masse des Leptonpaares $q^2 \geq 0$ sein. Außerdem sollte das Koordinatensystem so gewählt sein, dass $\vec{q} = (0, 0, q_3)$ in die Richtung von \vec{n} zeigt. Somit muss $q_3 < 0$ gelten. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} q^2 \geq 0 &\Rightarrow \theta(q_0^2 - q_3^2) = \theta((q_0 - q_3)(q_0 + q_3)) = \theta(n \cdot q \bar{n} \cdot q) \\ q_3 < 0 &\Rightarrow \theta(-q_3) = \theta(n \cdot q - \bar{n} \cdot q) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Damit erhält man für die Integration über den Impulsübertrag

$$d^4q = \frac{\pi}{2}(\bar{n} \cdot q - n \cdot q)^2 \theta(\bar{n} \cdot q) \theta(n \cdot q - \bar{n} \cdot q) dn \cdot q d\bar{n} \cdot q \quad . \quad (\text{C.17})$$

Fügt man alle Teile zusammen, lautet das Ergebnis für die differentielle Zerfallsrate

$$d\Gamma = \frac{8}{m_b^5} \Gamma_0 (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) W_{\alpha\beta} (\bar{n} \cdot q - n \cdot q)^2 \theta(\bar{n} \cdot q) \theta(n \cdot q - \bar{n} \cdot q) dn \cdot q d\bar{n} \cdot q \quad . \quad (\text{C.18})$$

Literaturverzeichnis

- [1] S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 1 (2004). [1](#), [12](#), [16](#), [39](#), [67](#), [74](#)
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Reading, USA: Addison-Wesley, 1995). [1](#), [22](#)
- [3] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations* (1995), cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p. [1](#)
- [4] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications* (1996), cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p. [1](#)
- [5] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model* (Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol., 1992). [1](#)
- [6] P. Renton, *Elektroweak Interactions: An introduction to the physics of quarks and leptons* (Cambridge, UK: Univ. Pr., 1990). [1](#), [25](#)
- [7] N. Schmitz (1997), stuttgart, Germany: Teubner (1997) 478 p. [2](#)
- [8] N. Schmitz (2002), www.mppmu.mpg.de/english/ns_maria_laach_web.pdf. [2](#)
- [9] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik* (Bibliogr. Inst., 1966), ISBN 3-411-00098-8, 3-411-0098-8f. [2](#)
- [10] K. G. Wilson, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969). [4](#), [22](#)
- [11] S. L. Glashow, Rev. Mod. Phys. **52**, 539 (1980). [7](#)
- [12] A. Salam, Rev. Mod. Phys. **52**, 525 (1980). [7](#)
- [13] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **52**, 515 (1980). [7](#)
- [14] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963). [9](#)
- [15] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973). [9](#)
- [16] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962). [9](#)

-
- [17] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51**, 1945 (1983). 10
- [18] J. Charles *et al.* (CKMfitter Group), Eur. Phys. J. **C41**, 1 (2005), updated results and plots available at: <http://ckmfitter.in2p3.fr>, hep-ph/0406184. 10, 14
- [19] H. Kalka and G. Soff (1997), stuttgart, Germany: Teubner (1997) 444 p. 11
- [20] H. K. Dreiner (1998), hep-ph/9902347. 11
- [21] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande), Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998), hep-ex/9807003. 11
- [22] Q. R. Ahmad *et al.* (SNO), Phys. Rev. Lett. **87**, 071301 (2001), nucl-ex/0106015. 11
- [23] Q. R. Ahmad *et al.* (SNO), Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002), nucl-ex/0204008. 11
- [24] T. Yanagida (1979), in Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 13-14 Feb 1979. 11
- [25] H. V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.* (2004), hep-ph/0404062. 11
- [26] LEP-collaboration (LEP) (2003), hep-ex/0312023. 11
- [27] B. Aubert *et al.* (BABAR), Phys. Rev. Lett. **87**, 091801 (2001), hep-ex/0107013. 12
- [28] A. J. Buras and R. Fleischer, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **15**, 65 (1998), hep-ph/9704376. 12
- [29] *Belle Kollaboration* (1994), <http://belle.kek.jp/>. 13
- [30] *BaBar Kollaboration* (1995), <http://www.slac.stanford.edu/BFROOT>. 13
- [31] M. Battaglia *et al.* (2003), hep-ph/0304132. 14
- [32] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, and N. Uraltsev, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **47**, 591 (1997), hep-ph/9703290. 16, 20
- [33] E. Eichten and B. Hill, Phys. Lett. **B234**, 511 (1990). 16
- [34] D. Benson, I. I. Bigi, T. Mannel, and N. Uraltsev, Nucl. Phys. **B665**, 367 (2003), hep-ph/0302262. 17
- [35] N. Isgur and M. B. Wise, Phys. Lett. **B232**, 113 (1989). 20
- [36] N. Isgur and M. B. Wise, Phys. Lett. **B237**, 527 (1990). 20
- [37] M. A. Shifman and M. B. Voloshin, Sov. J. Nucl. Phys. **47**, 511 (1988). 20
- [38] B. Grinstein, Nucl. Phys. **B339**, 253 (1990). 20

-
- [39] H. Georgi, Phys. Lett. **B240**, 447 (1990). [20](#)
- [40] A. F. Falk, H. Georgi, B. Grinstein, and M. B. Wise, Nucl. Phys. **B343**, 1 (1990). [20](#)
- [41] M. Neubert, Phys. Rept. **245**, 259 (1994a), hep-ph/9306320. [20](#)
- [42] T. Mannel, Rept. Prog. Phys. **60**, 1113 (1997). [20](#)
- [43] A. V. Manohar and M. B. Wise, *Heavy quark physics* (Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol., 2000). [20](#), [26](#), [41](#)
- [44] M. Gremm and A. Kapustin, Phys. Rev. **D55**, 6924 (1997), hep-ph/9603448. [21](#), [62](#)
- [45] A. F. Falk, M. E. Luke, and M. J. Savage, Phys. Rev. **D49**, 3367 (1994), hep-ph/9308288. [21](#), [28](#)
- [46] C. W. Bauer, Z. Ligeti, M. Luke, and A. V. Manohar, Phys. Rev. **D67**, 054012 (2003), hep-ph/0210027. [21](#), [66](#)
- [47] M. E. Luke, Phys. Lett. **B252**, 447 (1990). [22](#), [86](#)
- [48] J. Chay, H. Georgi, and B. Grinstein, Phys. Lett. **B247**, 399 (1990). [30](#)
- [49] A. V. Manohar and M. B. Wise, Phys. Rev. **D49**, 1310 (1994), hep-ph/9308246. [30](#), [43](#)
- [50] T. Mannel, Nucl. Phys. **B413**, 396 (1994), hep-ph/9308262. [30](#)
- [51] I. I. Y. Bigi, N. G. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, Phys. Lett. **B293**, 430 (1992), hep-ph/9207214. [30](#)
- [52] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, Phys. Rev. Lett. **71**, 496 (1993), hep-ph/9304225. [30](#)
- [53] I. I. Y. Bigi, B. Blok, M. A. Shifman, and A. I. Vainshtein, Phys. Lett. **B323**, 408 (1994a), hep-ph/9311339. [30](#)
- [54] I. I. Y. Bigi, R. D. Dikeman, and N. Uraltsev, Eur. Phys. J. **C4**, 453 (1998), hep-ph/9706520. [30](#)
- [55] M. Neubert, Phys. Rev. **D49**, 4623 (1994b), hep-ph/9312311. [31](#)
- [56] M. Neubert, Phys. Rev. **D49**, 3392 (1994c), hep-ph/9311325. [31](#)
- [57] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 2467 (1994b), hep-ph/9312359. [31](#)
- [58] T. Mannel and M. Neubert, Phys. Rev. **D50**, 2037 (1994), hep-ph/9402288. [31](#), [36](#), [63](#), [64](#)

-
- [59] T. Mannel, *Effective field theories in flavour physics* (2004), berlin, Germany: Springer (2004) 175 P. [33](#)
- [60] C. W. Bauer, M. E. Luke, and T. Mannel (2001a), hep-ph/0102089. [33](#), [36](#), [56](#)
- [61] C. W. Bauer, M. Luke, and T. Mannel (2002a), hep-ph/0205150. [36](#), [47](#)
- [62] C. N. Burrell, M. E. Luke, and A. R. Williamson, Phys. Rev. **D69**, 074015 (2004), hep-ph/0312366. [36](#), [45](#), [46](#), [47](#), [60](#)
- [63] F. J. Tackmann, Phys. Rev. **D72**, 034036 (2005), hep-ph/0503095. [36](#), [47](#)
- [64] T. Mannel and F. J. Tackmann, Phys. Rev. **D71**, 034017 (2005), hep-ph/0408273. [36](#), [46](#), [47](#)
- [65] C. W. Bauer, S. Fleming, D. Pirjol, and I. W. Stewart, Phys. Rev. **D63**, 114020 (2001b), hep-ph/0011336. [36](#)
- [66] C. W. Bauer, D. Pirjol, and I. W. Stewart, Phys. Rev. **D65**, 054022 (2002b), hep-ph/0109045. [36](#)
- [67] M. Beneke, A. P. Chapovsky, M. Diehl, and T. Feldmann, Nucl. Phys. **B643**, 431 (2002), hep-ph/0206152. [36](#)
- [68] M. Beneke and T. Feldmann, Phys. Lett. **B553**, 267 (2003), hep-ph/0211358. [36](#)
- [69] C. W. Bauer, D. Pirjol, and I. W. Stewart, Phys. Rev. Lett. **87**, 201806 (2001c), hep-ph/0107002. [37](#)
- [70] M. Beneke, F. Campanario, T. Mannel, and B. D. Pecjak, JHEP **06**, 071 (2005), hep-ph/0411395. [37](#)
- [71] A. F. Falk and M. E. Luke, Phys. Rev. **D57**, 424 (1998), hep-ph/9708327. [39](#), [74](#)
- [72] F. De Fazio and M. Neubert, JHEP **06**, 017 (1999), hep-ph/9905351. [45](#), [64](#)
- [73] K. S. M. Lee and I. W. Stewart, Nucl. Phys. **B721**, 325 (2005), hep-ph/0409045. [47](#)
- [74] A. F. Falk, M. E. Luke, and M. J. Savage, Phys. Rev. **D53**, 2491 (1996), hep-ph/9507284. [62](#)
- [75] S. E. Csorna *et al.* (CLEO), Phys. Rev. **D70**, 032002 (2004), hep-ex/0403052. [68](#), [69](#)
- [76] B. Aubert *et al.* (BABAR), Phys. Rev. **D69**, 111103 (2004), hep-ex/0403031. [73](#)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Thomas Mannel bedanken, der mich mit dieser interessanten und anspruchsvollen Aufgabe betraute. In zahlreichen Diskussionen profitierte ich von seinem Wissen und seiner Erfahrung auf dem Gebiet der theoretischen Physik. Er ermöglichte mir außerdem einen Teil dieser Arbeit außerhalb seiner Arbeitsgruppe anzufertigen, indem er mich auch über die räumliche Distanz bei Problemen unterstützte.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Hans D. Dahmen für die Übernahme des Korreferats.

Ein Dank gilt der Fakultät für Physik der Universität Siegen für die Möglichkeit diese Arbeit einreichen und die Prüfung in Siegen abhalten zu können. Ich danke den Mitarbeitern des Instituts „Theoretische Physik I“ für die Unterstützung während der Erstellung dieser Dissertation. Die anregenden Diskussionen zu den verschiedensten Themen werden mir in guter Erinnerung bleiben. Besonders möchte ich dabei Martin Melcher und Heike Boos für den freundschaftlichen Umgang und die netten Abende danken.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Johann H. Kühn, Prof. Dr. Hans-Martin Staudenmaier und Prof. Dr. Matthias Steinhauser vom „Institut für Theoretische Teilchenphysik“ der Universität Karlsruhe für deren Unterstützung. Durch die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes und die Integration in das Institutsleben konnte ich meine beruflichen und privaten Bedürfnisse auf einander abstimmen. Ich danke allen Mitarbeitern des Instituts für die nette Atmosphäre. Besonderer Dank gilt dabei Dr. Michael Faisst, Dr. Bernd Jantzen und Dr. Christian Sturm, die mich über fast die komplette Zeit am Institut begleitet haben und für meine Probleme und Sorgen stets ein offenes Ohr hatten. Ich danke zudem Prof. Dr. Robert Harlander und Burkhardt Zittel für die interessanten Diskussionen über physikalische und private Themen.

Ein Dank gilt der Landesgraduiertenförderung des Landes Baden-Württemberg, die meine Arbeit über zwei Jahre hinweg finanziell unterstützte.

Ein großer Dank gilt meiner Lebenspartnerin Jasmin Weber ohne deren Unterstützung diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre. Durch ihre Lebensfreude und ihren Tatendrang schaffte sie einen Kontrast zu meiner theoretischen Arbeit. Sie zeigte Verständnis für meine Situation und motivierte mich stets in schwierigen Phasen.

Darüber hinaus danke ich Jasmin und Martin für das Korrekturlesen meines Manuskripts.

Abschließend bedanke ich mich bei meiner Familie sowie der Familie meiner Lebenspartnerin für deren Unterstützung. Besonders hervorheben möchte ich dabei meine Eltern, die durch die Finanzierung meines Studiums mir die Möglichkeit eröffneten diese Arbeit anzufertigen und mir darüberhinaus bei materiellen und geistigen Problemen zur Seite standen.