

Quantenmechanische Phasenoperatoren im
Zusammenhang mit orthogonalen Polynomsystemen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Thomas Appl
aus Heilig Blut

eingereicht beim Fachbereich Physik
der Universität Siegen

Siegen 2005

Gutachter der Dissertation:

Prof. Dr. Diethard H. Schiller

Prof. Dr. Fritz W. Bopp

Prof. Dr. Matthias Freyberger

Datum der Disputation: 10. April 2006

Promotionskommission:

Prof. Dr. Diethard H. Schiller

Prof. Dr. Fritz W. Bopp

Prof. Dr. Claus Grupen

Internetpublikation der Universitätsbibliothek Siegen: **urn:nbn:de:hbz:467-2150**

Zusammenfassung

Der Ansatz von Susskind und Glogower für das quantenmechanische Phasenproblem definiert hermitesche Operatoren, die als Kosinus- und Sinusoperatoren interpretierbar sind. Deren Eigenzustände in der Fock-Darstellung sind die Chebyshev-Polynome zweiter Art. Auf dieser Grundlage werden allgemeinere Kosinus- und Sinusoperatoren eingeführt, deren Eigenzustände in der Fock-Darstellung mit beliebigen Polynomen gebildet sind, die im Intervall $[-1, +1]$ bezüglich einer Gewichtsfunktion ein Orthogonalsystem bilden. Jedem Satz Polynome ist ein Paar Kosinus- und Sinusoperatoren zugeordnet. Je nachdem ob die Gewichtsfunktionen symmetrisch oder unsymmetrisch sind, wird zwischen verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren unterschieden. Es werden auch korrespondierende Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren vom verallgemeinerten und erweiterten Type eingeführt. Die Eigenzustände der trigonometrischen und inversen trigonometrischen Operatoren werden untersucht und dazu verwendet, um Darstellungen beliebiger Quantenzustände sowie entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu definieren. Für die klassischen orthogonalen Polynome werden Beispiele explizit angegeben.

Weiterhin werden Exponentialoperatoren als Verallgemeinerung der exponentiellen Phasenoperatoren von Susskind und Glogower eingeführt, die mit den verallgemeinerten bzw. erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren in Beziehung stehen. Die Eigenzustände der als Absteigeoperatoren wirkenden Exponentialoperatoren sind innerhalb des Einheitskreises definiert und bilden, sofern sie die Darstellung des Einheitsoperators ermöglichen, verallgemeinerte kohärente Zustände. In diesem Fall können damit zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen innerhalb des Einheitskreises und daraus resultierende Phasenverteilungen definiert werden. Im Fall der klassischen orthogonalen Polynome haben die Eigenzustände der verallgemeinerten und erweiterten Exponentialoperatoren als Normierungsfunktionen die hypergeometrischen ${}_2F_1$ - bzw. ${}_4F_3$ -Funktionen. Die Darstellung des Einheitsoperators erfordert eine spezielle Grenzbetrachtung.

Schließlich werden die Eigenzustände der Exponentialoperatoren, die mit den klassischen orthogonalen Polynomen im Zusammenhang stehen, erweitert, indem verallgemeinerte hypergeometrische Zustände eingeführt werden, deren Normierungsfunktionen die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen ${}_pF_q$ sind. In Abhängigkeit vom Konvergenzradius der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen wird zwischen verallgemeinerten hypergeometrischen Zuständen in der gesamten Ebene, innerhalb des Einheitskreises und auf dem Einheitskreis unterschieden. Diejenigen verallgemeinerten hypergeometrischen Zustände, die die Darstellung des Einheitsoperators ermöglichen, werden als kohärente verallgemeinerte hypergeometrische Zustände definiert. Diese können als Basis zur Darstellung beliebiger Zustände im Bargmann- bzw. Hardy-Raum verwendet werden und definieren verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Verteilungen und daraus resultierende Phasenverteilungen.

Quantum Phase Operators Related to Orthogonal Polynomial Sets

Thomas Appl

2005

Abstract

The approach of Susskind and Glogower to the quantum phase problem defines Hermitian operators, which may be interpreted as cosine and sine operators. Their eigenstates in the Fock representation are the Chebyshev polynomials of the second kind. On the basis of this approach more general cosine and sine operators are introduced, whose eigenstates in the Fock representation are given by arbitrary orthogonal polynomial sets on the interval $[-1, +1]$ with respect to a weight function. To every polynomial set there corresponds a pair of cosine and sine operators. Depending on the symmetry of the weight function one distinguishes between generalized and extended cosine and sine operators. Corresponding arccosine and arcsine operators of the generalized and extended type are introduced. The eigenstates of the trigonometric and inverse trigonometric operators are studied and used to define corresponding representations of an arbitrary quantum state as well as corresponding probability distributions. Explicit examples are given for the classical orthogonal polynomials.

Further, exponential operators generalizing the Susskind-Glogower exponential phase operators are introduced in terms of the cosine and sine operators. The eigenstates of the lowering exponential operators are defined on the unit disk and yield generalized coherent states if they admit a resolution of unity. In this case they can be used to define two-dimensional probability distributions (Q-functions) on the unit disk and corresponding phase distributions as marginal distributions. In the case of the classical orthogonal polynomials the eigenstates of the generalized (extended) operators are normalized to the hypergeometric functions ${}_2F_1$ (${}_4F_3$); the resolution of unity needs a special treatment as a limiting case.

Finally, extending the class of states encountered above, generalized hypergeometric states normalized to the generalized hypergeometric functions ${}_pF_q$ are introduced. Depending on the radius of convergence of ${}_pF_q$, one distinguishes between generalized hypergeometric states on the (whole) plane, on the unit disk and on the unit circle. The states yielding a resolution of unity define the generalized hypergeometric coherent states. They can be used to define representations of an arbitrary state in the appropriate Bargmann and Hardy spaces, respectively, as well as corresponding generalized hypergeometric Husimi distributions and (marginal) phase distributions.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Operatoren von Susskind und Glogower	3
2.1	Der quantenmechanische harmonische Oszillator	3
2.2	Eigenschaften der Susskind-Glogower-Operatoren	4
2.3	Eigenzustände des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower	7
2.4	Eigenschaften der Chebyshev-Polynome zweiter Art	9
2.5	Fock-Darstellung der Kosinus- und Sinuszustände und -operatoren	10
2.6	Kosinus- und Sinuszustände als Basis	12
2.7	Kosinus- und Sinusverteilungen	13
2.7.1	Kosinus- und Sinusverteilungen für Fock-Zustände	14
2.7.2	Kosinus- und Sinusverteilungen für kohärente Zustände	15
2.7.3	Kosinus- und Sinusverteilungen für gestauchte Zustände	18
3	Verallgemeinerung der Kosinus- und Sinuszustände	20
3.1	Eigenschaften der orthogonalen Polynome	20
3.2	Verallgemeinerung der Kosinus- und Sinuszustände	22
3.3	Verallgemeinerte und erweiterte Kosinus- und Sinusverteilungen	25
3.3.1	Kosinus- und Sinusverteilungen für Fock-Zustände	26
3.3.2	Kosinus- und Sinusverteilungen für kohärente Zustände	30
3.4	Bestimmung der Kosinus- und Sinusoperatoren	30
3.5	Kosinus- und Sinusoperatoren nach Lerner	34
3.6	Eigenschaften der Kosinus- und Sinusoperatoren	36
3.7	Erwartungswerte der Kosinus- und Sinusoperatoren	38
3.7.1	Erwartungswerte der erweiterten Operatoren für Fock-Zustände	41
3.7.2	Erwartungswerte der erweiterten Operatoren für kohärente Zustände	42
4	Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren	46
4.1	Definition der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren	46
4.2	Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen	48
4.2.1	Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen für Fock-Zustände	49
4.2.2	Arcusverteilungen für kohärente Zustände	52
5	Exponentialoperatoren	55
5.1	Verallgemeinerte und erweiterte Exponentialoperatoren	55
5.2	Eigenzustände der Exponentialoperatoren	58
5.3	Photonenzahlstatistik der Exponentialzustände erster Art	62
5.4	Eigenzustände von \hat{E} auf dem Einheitskreis	65
5.5	Darstellung des Einheitsoperators mit $ \epsilon\rangle$ -Zuständen	66
5.6	Modifizierte Exponentialzustände	67
5.7	Verteilungen aus den (modifizierten) Exponentialzuständen	69

5.8	Phasenverteilungen aus den Exponentialzuständen	70
5.8.1	Phasenverteilungen für die kohärenten Zustände	73
5.8.2	Phasenverteilungen für die überlagerten Fock-Zustände $ 0, 1\rangle$ und $ 0, 2\rangle$	75
6	Verallgemeinerte hypergeometrische Zustände	78
6.1	Definition der VHG-Zustände	78
6.2	Kohärente VHG-Zustände	80
6.2.1	Die Zustände $ \alpha\rangle = 0; 0; \alpha\rangle$	84
6.2.2	Die Zustände $ 0; 1; \alpha\rangle$	84
6.2.3	Die Zustände $ 1; 1; \alpha\rangle$	85
6.2.4	Die Zustände $ 1; 0; \epsilon\rangle$	85
6.2.5	Die Zustände $ 2; 1; \epsilon\rangle$	86
6.3	VHG-Zustände als Eigenzustände von Absteigeoperatoren	86
6.4	Photonenzahlstatistik der VHG-Zustände	88
6.4.1	Photonenzahlstatistik der Zustände $ \alpha\rangle = 0; 0; \alpha\rangle$	90
6.4.2	Photonenzahlstatistik der Zustände $ 0; 1; \alpha\rangle$	90
6.4.3	Photonenzahlstatistik der Zustände $ 1; 1; \alpha\rangle$	90
6.4.4	Photonenzahlstatistik der Zustände $ 1; 0; \epsilon\rangle$	92
6.4.5	Photonenzahlstatistik der Zustände $ 2; 1; \epsilon\rangle$	94
6.5	Phasenverteilungen für die VHG-Zustände	95
6.5.1	Phasenverteilungen aus der Husimi-Verteilung	95
6.5.2	Phasenverteilungen von Pegg und Barnett	98
6.5.3	Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion	100
7	Verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Verteilungen	102
7.1	Definition der VHG-Husimi-Verteilungen	102
7.2	VHG-Husimi-Phasenverteilungen	102
7.3	VHG-Husimi-Phasenverteilungen für kohärente Zustände	104
8	Schlussbetrachtung	107

1 Einleitung

In der klassischen Physik sind die Amplitude und Phase des harmonischen Oszillators bekannte und einfache Größen. Ebenso sind in der klassischen Optik die Amplitude und Phase des Strahlungsfeldes auf einfache Weise darstellbar. Die Intensität des Lichtes entspricht dem Quadrat der Amplitude des elektromagnetischen Feldes [1, 2]. Im klassischen Phasenraum werden das Amplitudenquadrat und die Phase durch die Wirkungsvariable I bzw. Winkelvariable ϕ beschrieben, die zueinander kanonisch konjugiert sind. Die Wirkungsvariable I und Winkelvariable ϕ erfüllen die klassische Poisson-Klammer-Beziehung $\{I, \phi\} = 1$.

Dem klassischen Amplitudenquadrat entsprechen in der Quantenoptik der Photonenzahloperator und in der Quantenmechanik der Teilchenzahloperator des harmonischen Oszillators. Hier wird stets der Begriff des Photonenzahloperators verwendet, wobei der Sachverhalt auch für alle Teilchenzahloperatoren von bosonischen Oszillatoren gilt.

Es ist jedoch kein geeigneter quantenmechanischer Ausdruck bekannt, der der klassischen Phase entspricht und der befriedigende Eigenschaften aufweist [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Insbesondere ist es unmöglich, einen Phasenoperator $\hat{\phi}$ zu definieren, der die Kommutatorbeziehung $[\hat{N}, \hat{\phi}]_- = i\hat{1}$ erfüllt. Seit dem Beginn der Quantenmechanik in den zwanziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurden zahlreiche Versuche unternommen, einen Phasenoperator zu definieren [7, 8].

Beispielsweise wurde von Dirac [9] ein Phasenoperator eingeführt, indem der Absteigeoperator \hat{a} und der Aufsteigeoperator \hat{a}^\dagger des harmonischen Oszillators jeweils in einen Amplitudenanteil und einen Phasenanteil zerlegt wurden. Dabei wurde der Phasenwinkel im Argument der beiden Exponentialfunktionen als Phasenoperator interpretiert.

Eine ähnliche Zerlegung der Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger wurde von London [10] durchgeführt. Dabei wurden jedoch die beiden Exponentialfunktionen als Exponentialoperatoren interpretiert, die zueinander hermitesch konjugiert sind. Diese Exponentialoperatoren wirken ebenfalls als Absteige- und Aufsteigeoperatoren [11], deren Anwendung auf einen Fock-Zustand diesen um Eins vermindert bzw. erhöht.

Unabhängig von Londons früherer Arbeit [11] wurden in den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts die Exponentialoperatoren so definiert, indem die von Dirac eingeführte Zerlegung des Aufsteige- und Absteigeoperators umgestellt wurde. Dadurch wurden die Exponentialoperatoren durch den Aufsteige- bzw. Absteigeoperator und eine Funktion des Photonenzahloperators dargestellt. Von Louisell [12] wurde die Möglichkeit erwähnt, aus den Exponentialoperatoren hermitesche Kosinus- und Sinusoperatoren zu konstruieren. Unabhängig davon wurden von Susskind und Glogower [13] mit Verwendung der beiden Exponentialoperatoren hermitesche Kosinus- und Sinusoperatoren eingeführt.

In den achtziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurde von Pegg und Barnett [15] ein Phasenoperator eingeführt, der in einem endlich-dimensionalen Fock-Raum definiert ist. Dabei wird die vollständige Berechnung der Erwartungswerte innerhalb des endlich-dimensionalen Fock-Raumes durchgeführt. Sobald diese Berechnung abgeschlossen ist, wird eine Grenzbetrachtung durchgeführt, so dass die Anzahl der Dimensionen des Fock-Raumes gegen Unendlich geht. Auf der Grundlage dieser Operatordefinition lassen sich auch Pha-

senverteilungen für beliebige normierte Zustände angeben, die stets positiv-definit sind.

Weiterhin wurden bekannte Verteilungen und Quasiverteilungen im Phasenraum, wie zum Beispiel die Husimi-Verteilung und die Wigner-Funktion, verwendet, um daraus Phasenverteilungen [16] zu bestimmen. Dabei wurde die Phasenraumverteilung in Polarkoordinaten, d.h. in eine radiale Variable und eine Winkelvariable, transformiert. Anschließend wurde über die radiale Variable integriert und so die Phasenverteilung erhalten.

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit sind die Kosinus- und Sinusoperatoren sowie die Exponentialoperatoren von Susskind und Glogower [13]. Die Eigenzustände der Kosinus- und Sinusoperatoren in der Fock-Darstellung sind durch die Chebyshev-Polynome zweiter Art darstellbar. Diese Polynome gehören zu einer größeren Klasse von Polynomen, die ebenfalls in dem Intervall $[-1, +1]$ ein Orthonormalsystem bezüglich einer Gewichtsfunktion bilden. Bei den Eigenzuständen der Kosinus- und Sinusoperatoren werden an Stelle der Chebyshev-Polynome zweiter Art allgemeinere Polynome im Intervall $[-1, +1]$ verwendet. Es werden *verallgemeinerte* Kosinus- und Sinuszustände eingeführt, die orthonormierte Polynome mit symmetrischen Gewichtsfunktionen aufweisen, sowie *erweiterte* Kosinus- und Sinuszustände, die orthonormierte Polynome mit unsymmetrischen Gewichtsfunktionen aufweisen.

Einen Schwerpunkt bilden dabei die sogenannten klassischen orthogonalen Polynome im Intervall $[-1, +1]$. Die allgemeinsten klassischen Polynome im Intervall $[-1, +1]$ sind die bekannten Jacobi-Polynome, deren Gewichtsfunktionen im Allgemeinen unsymmetrisch sind. Der Spezialfall der Jacobi-Polynome mit symmetrischen Gewichtsfunktionen sind die bekannten Gegenbauer-Polynome. Es werden entsprechende verallgemeinerte und erweiterte Kosinus- und Sinusoperatoren definiert, deren Eigenzustände die verallgemeinerten bzw. erweiterten Kosinus- und Sinuszustände sind. Deren Eigenschaften werden untersucht und deren Erwartungswerte bestimmt. Außerdem werden Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren und deren Eigenfunktion eingeführt.

Weiterhin werden verallgemeinerte und erweiterte Exponentialoperatoren eingeführt, die mit den verallgemeinerten bzw. erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren in Beziehung stehen. Von den als Absteigeoperatoren wirkenden Exponentialoperatoren werden die Eigenzustände bestimmt und untersucht. Um im Fall der klassischen Polynome die Darstellung des Einheitsoperators zu ermöglichen, werden modifizierte Exponentialzustände konstruiert. Deren Modulquadrat ergibt in Analogie zur Husimi-Verteilung eine zweidimensionale Verteilung innerhalb des Einheitskreises. Daraus lassen sich Phasenverteilungen für beliebige Zustände bestimmen.

Schließlich werden die Eigenzustände der als Absteigeoperator wirkenden Exponentialoperatoren, die mit den klassischen orthogonalen Polynomen im Zusammenhang stehen, weiter verallgemeinert, indem als Normierungsfunktionen die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen verwendet werden. Diese Zustände werden als verallgemeinerte hypergeometrische Zustände (VHG-Zustände) bezeichnet. Die VGH-Zustände ermöglichen die Definition allgemeinerer Husimi-Verteilungen und daraus resultierender Phasenverteilungen.

Die Erwartungswerte für die obigen Operatoren und die Verteilungen werden insbesondere für die Fock-Zustände und die kohärenten Zustände angegeben.

2 Die Operatoren von Susskind und Glogower

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften der Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower [13] untersucht. Von zentraler Bedeutung ist dabei das Eigenwertproblem der Kosinus- und Sinusoperatoren. Die Eigenwerte und Eigenzustände werden ausschließlich durch die Werte der Kosinusfunktion c bzw. Sinusfunktion s gebildet. Die Phase θ selbst ist im Eigenwert nicht enthalten. Auf die Einführung einer Phase θ , $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ wird vorerst verzichtet. Die Eigenzustände der Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower sind in der Fock-Darstellung durch bekannte orthogonale Polynome darstellbar.

2.1 Der quantenmechanische harmonische Oszillator

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Eigenschaften des quantenmechanischen harmonischen Oszillators zusammengefasst. Die Hamilton-Funktion des klassischen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2) \quad (1)$$

mit der Ortsvariable q und der Impulsvariable p korrespondiert mit dem Hamilton-Operator des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2) \quad (2)$$

mit dem Ortsoperator \hat{q} und dem Impulsoperator \hat{p} . Der Hamilton-Operator des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2} \hat{1} \quad (3)$$

ist auch durch den Photonenzahloperator darstellbar

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n|. \quad (4)$$

Die Eigenzustände des Photonenzahloperators $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ sind die Fock-Zustände $|n\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$, welche die Orthonormalitätsrelation

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'} \quad (5)$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{1} \quad (6)$$

erfüllen. Die Fock-Darstellungen der Eigenzustände des Orts- und Impulsoperators in (2) enthalten jeweils ein Hermite-Polynom

$$\langle n|q\rangle = h_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(q) e^{-\frac{q^2}{2}}, \quad (7a)$$

$$\langle n|p\rangle = i^n h_n(p) = \frac{i^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(p) e^{-\frac{p^2}{2}}. \quad (7b)$$

Deren konjugiert komplexe Ausdrücke sind die Ortsdarstellungen bzw. Impulsdarstellungen für die Fock-Zustände und somit für die Eigenzustände des quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

Der Absteigeoperator \hat{a} und der Aufsteigeoperator \hat{a}^\dagger in (4) sind durch deren Wirkung auf die Fock-Zustände definiert

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (8)$$

Die Eigenzustände des Absteigeoperators

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (9)$$

sind die kohärenten Zustände

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (10)$$

die durch einen komplexen Verschiebungsparameter $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi_\alpha}$ charakterisiert sind. Der Betrag $|\alpha|$ des Verschiebungsparameters beschreibt die Verschiebungsintensität und dessen Phase φ_α die Verschiebungsrichtung im quantenmechanischen Phasenraum, wobei φ_α dem Winkel zwischen der q -Achse (Ort) und der Verschiebungsrichtung entspricht. Der Spezialfall $\alpha = 0$ entspricht dem Vakuumzustand.

2.2 Eigenschaften der Operatoren von Susskind und Glogower

Der Ansatz von Susskind und Glogower [13] basiert auf der Zerlegung des Absteige- und Aufsteigeoperators (8) des quantenmechanischen harmonischen Oszillators in jeweils einen Amplitudenanteil und einen Phasenanteil

$$\hat{a} = \sqrt{\hat{N} + 1} \hat{e}^{+i\theta}, \quad \hat{a}^\dagger = \hat{e}^{-i\theta} \sqrt{\hat{N} + 1} \quad (11)$$

in Analogie zur Zerlegung einer komplexen Zahl. In den Gleichungen (11) ist nicht die Phase θ selbst als Operator definiert, sondern die beiden exponentiellen Funktionen der Phase θ werden als Exponentialoperatoren betrachtet

$$\hat{E}_{\text{SG}} \equiv \hat{e}^{+i\theta} = (\hat{N} + 1)^{-\frac{1}{2}} \hat{a}, \quad \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger \equiv \hat{e}^{-i\theta} = \hat{a}^\dagger (\hat{N} + 1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Die beiden Exponentialoperatoren wirken ebenfalls als Absteige- und Aufsteigeoperator. Deren Matrizen in der Fock-Darstellung

$$\langle\langle n | \hat{E}_{\text{SG}} | n' \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \langle\langle n | \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger | n' \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

verdeutlichen, dass die Exponentialoperatoren nicht hermitesch sind

$$\hat{E}_{\text{SG}} \neq \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger. \quad (13)$$

Die Matrizen der Exponentialoperatoren \hat{E}_{SG} und $\hat{E}_{\text{SG}}^\dagger$ haben die gleiche Struktur wie die Matrizen des Absteigeoperators \hat{a} bzw. des Aufsteigeoperators \hat{a}^\dagger des harmonischen Oszillators. Sämtliche nicht-verschwindenden Matrixelemente befinden sich auf jeweils einer Nebendiagonalen. Im Gegensatz zum Absteigeoperator \hat{a} und Aufsteigeoperator \hat{a}^\dagger haben jedoch alle nicht-verschwindenden Matrixelemente der Exponentialoperatoren \hat{E}_{SG} und $\hat{E}_{\text{SG}}^\dagger$ den gleichen Wert. Der Vergleich der Produkte der beiden Exponentialoperatoren

$$\hat{E}_{\text{SG}} \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger = \hat{1}, \quad \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger \hat{E}_{\text{SG}} = \hat{1} - |0\rangle\langle 0|. \quad (14)$$

zeigt, dass die Exponentialoperatoren von Susskind und Glogower nicht unitär sind

$$\hat{E}_{\text{SG}} \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger \neq \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger \hat{E}_{\text{SG}}. \quad (15)$$

Die Fock-Darstellungen der Matrizen für die Operatorprodukte (14)

$$\langle\langle n | \hat{E}_{\text{SG}} \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger | n' \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \langle\langle n | \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger \hat{E}_{\text{SG}} | n' \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

verdeutlichen, dass die Vakuumkomponente die Unitarität zerstört. Da die Exponentialoperatoren nicht unitär sind, kann die im Exponenten auftretende Phase θ auch kein hermitescher Operator sein, so dass $\hat{e}^{\pm i\theta} \neq e^{\pm i\theta}$.

Auf der Grundlage der klassischen Beziehungen zwischen den trigonometrischen und exponentiellen Funktionen

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{+i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{+i\theta} - e^{-i\theta}), \quad (16)$$

wurden mit Verwendung der Exponentialoperatoren (12) ein hermitescher Kosinusoperator

$$\hat{C}_{\text{SG}} \equiv \frac{1}{2} (\hat{E}_{\text{SG}} + \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger) = \frac{1}{2\sqrt{\hat{N} + 1}} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \frac{1}{2\sqrt{\hat{N} + 1}} \quad (17)$$

und ein hermitescher Sinusoperator

$$\hat{S}_{\text{SG}} \equiv \frac{1}{2i} (\hat{E}_{\text{SG}} - \hat{E}_{\text{SG}}^\dagger) = \frac{1}{2i\sqrt{\hat{N} + 1}} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \frac{1}{2i\sqrt{\hat{N} + 1}} \quad (18)$$

eingeführt [13]. Deren nicht-verschwindende Matrixelemente im Fock-Raum befinden sich ausschließlich auf den beiden Nebendiagonalen, wie die Matrixdarstellungen für den Kosinusoperator und Sinusoperator verdeutlichen

$$\langle\langle n | \hat{C}_{\text{SG}} | n' \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \langle\langle n | \hat{S}_{\text{SG}} | n' \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & \dots \\ +\frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & \dots \\ 0 & +\frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & +\frac{i}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hinsichtlich der nicht-verschwindenden Matrixelemente haben die Matrizen des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower die gleiche Struktur wie die Matrizen des Orts- und Impulsoperators.

Der Kommutator des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower

$$[\hat{C}_{\text{SG}}, \hat{S}_{\text{SG}}]_- \equiv \hat{C}_{\text{SG}}\hat{S}_{\text{SG}} - \hat{S}_{\text{SG}}\hat{C}_{\text{SG}} = \frac{i}{2} |0\rangle\langle 0| \quad (19)$$

korrespondiert nicht mit der entsprechenden klassischen Poisson-Klammer

$$\{\cos \theta, \sin \theta\} = 0. \quad (20)$$

Die Poisson-Klammer zweier Variablen A und B ist definiert durch

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}, \quad (21)$$

wobei $A \equiv A(q, p)$ und $B \equiv B(q, p)$ Funktionen von Ort q und Impuls p im klassischen Phasenraum sind. Die Kosinus- und Sinusfunktion im klassischen Phasenraum sind gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}, \quad \sin \theta = \frac{p}{\sqrt{q^2 + p^2}}. \quad (22)$$

Die Fock-Darstellung der Matrix für den Kommutator des Kosinus- und Sinusoperators

$$\langle n | [\hat{C}_{\text{SG}}, \hat{S}_{\text{SG}}]_- | n' \rangle = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

enthält ein einziges nicht-verschwindendes Matrixelement, nämlich den Erwartungswert für den Kommutator im Vakuumzustand.

Dagegen korrespondieren die Kommutatoren des Photonenzahloperators (4) einerseits und des Kosinusoperators (17) bzw. Sinusoperators (18) andererseits

$$[\hat{N}, \hat{C}_{\text{SG}}]_- = -i \hat{S}_{\text{SG}}, \quad [\hat{N}, \hat{S}_{\text{SG}}]_- = i \hat{C}_{\text{SG}} \quad (23)$$

mit den entsprechenden klassischen Poisson-Klammern

$$\{H, \cos \theta\} = -\sin \theta, \quad \{H, \sin \theta\} = \cos \theta. \quad (24)$$

Die Hamilton-Funktion (1) des klassischen harmonischen Oszillators entspricht dem Photonenzahloperator (4) des quantenmechanischen harmonischen Oszillators (3).

Die klassische trigonometrische Beziehung

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (25)$$

und die entsprechende Beziehung der Quadrate des Kosinus- und des Sinusoperators von Susskind und Glogower

$$\hat{C}_{\text{SG}}^2 + \hat{S}_{\text{SG}}^2 = \hat{1} - \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| \quad (26)$$

korrespondieren ebenfalls nicht miteinander. Wie die Fock-Darstellung der Matrix für die trigonometrische Beziehung (26)

$$\langle\langle n|\hat{C}_{\text{SG}}^2 + \hat{S}_{\text{SG}}^2|n'\rangle\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

zeigt, weicht auch in diesem Fall lediglich das Matrixelement für den Vakuumzustand vom klassischen Wert ab. Das Matrixelement für den Vakuumzustand ist sowohl beim Kommutator (19) des Kosinus- und Sinusoperators als auch bei der obigen trigonometrischen Beziehung (26) der einzige Grund, dass die entsprechenden quantenmechanischen und klassischen Ausdrücke nicht miteinander korrespondieren.

Die von Susskind und Glogower [13] eingeführten Kosinus- und Sinusoperatoren sind auch durch die Fock-Zustände $|n\rangle$ darstellbar

$$\hat{C}_{\text{SG}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right), \quad (27a)$$

$$\hat{S}_{\text{SG}} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n| \right). \quad (27b)$$

Die Exponentialoperatoren von Susskind und Glogower sind ebenfalls durch Fock-Zustände $|n\rangle$ darstellbar

$$\hat{E}_{\text{SG}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|, \quad (28a)$$

$$\hat{E}_{\text{SG}}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|. \quad (28b)$$

Weitere Eigenschaften der Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower werden in den nachfolgenden Abschnitten untersucht. In einem späteren Kapitel werden auch die Exponentialoperatoren von Susskind und Glogower näher untersucht.

2.3 **Eigenzustände des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower**

Die Eigenwertprobleme des Kosinus- und des Sinusoperators von Susskind und Glogower

$$\hat{C}_{\text{SG}} |c\rangle_{\text{SG}} = c |c\rangle_{\text{SG}}, \quad \hat{S}_{\text{SG}} |s\rangle_{\text{SG}} = s |s\rangle_{\text{SG}} \quad (29)$$

sind Gegenstand dieses Abschnitts. Die Eigenwerte c und s werden stets als eigenständige Variablen oder Koordinaten im Phasenraum betrachtet. Die Phase wird dabei nicht berücksichtigt.

Die Eigenzustände $|c\rangle_{\text{SG}}$ des Kosinusoperators werden nach Fock-Zuständen entwickelt

$$|c\rangle_{\text{SG}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|c\rangle_{\text{SG}} |n\rangle, \quad (30)$$

mit den zunächst unbekanntenen Koeffizienten $\langle n|c\rangle_{\text{SG}}$. Die Anwendung des Kosinusoperators (27a) auf einen angeregten Fock-Zustand $|n\rangle$ ergibt eine lineare Überlagerung zweier Fock-Zustände

$$\hat{C}_{\text{SG}}|n\rangle = \frac{1}{2} |n-1\rangle + \frac{1}{2} |n+1\rangle. \quad (31)$$

Das Einsetzen der entwickelten Zustände (30) in die Eigenwertgleichung (29) und die anschließende Anwendung des Operators (31) führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|c\rangle_{\text{SG}} |n-1\rangle + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|c\rangle_{\text{SG}} |n+1\rangle = c \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|c\rangle_{\text{SG}} |n\rangle. \quad (32)$$

Die Projektion der Gleichung (32) auf einen Fock-Zustand $\langle n'|$ ergibt eine Rekursionsbeziehung für drei aufeinanderfolgende Fock-Komponenten der Eigenzustände des Kosinusoperators

$$\frac{1}{2} \langle n+1|c\rangle_{\text{SG}} + \frac{1}{2} \langle n-1|c\rangle_{\text{SG}} = c \langle n|c\rangle_{\text{SG}}. \quad (33)$$

Auf ähnliche Weise lässt sich aus der Wirkung des Kosinusoperators auf den Vakuumzustand $\hat{C}_{\text{SG}}|0\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle$ eine Startbedingung $\langle 1|c\rangle_{\text{SG}} = 2c\langle 0|c\rangle_{\text{SG}}$ ableiten, welche die Beziehung zwischen den beiden niedrigsten Fock-Komponenten der Eigenzustände des Kosinusoperators definiert.

Sowohl die Rekursionsbeziehung (33) als auch die vorgenannte Startbedingung werden von den bekannten Chebyshev-Polynomen zweiter Art $U_n(x)$ erfüllt, so dass die Eigenzustände des Kosinusoperators in der Fock-Darstellung mit Verwendung der Chebyshev-Polynome zweiter Art gebildet werden können. Die bekannten Chebyshev-Polynome erster Art $T_n(x)$ erfüllen zwar auch die Rekursionsbeziehung (33), aber nicht die Startbedingung.

Zur Lösung der Eigenwertgleichung (29) für die Eigenzustände $|s\rangle_{\text{SG}}$ des Sinusoperators werden diese nach Fock-Zuständen entwickelt

$$|s\rangle_{\text{SG}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|s\rangle_{\text{SG}} |n\rangle \quad (34)$$

mit den zunächst unbekanntenen Koeffizienten $\langle n|s\rangle_{\text{SG}}$. Die Anwendung des Sinusoperators (27b) auf einen angeregten Fock-Zustand $|n\rangle$ ergibt eine lineare Überlagerung zweier Fock-Zustände

$$\hat{S}_{\text{SG}}|n\rangle = \frac{1}{2i} |n-1\rangle - \frac{1}{2i} |n+1\rangle. \quad (35)$$

Entsprechend der obigen Vorgehensweise führt das Einsetzen der entwickelten Zustände (34) in die Eigenwertgleichung (29) und die anschließende Anwendung des Operators (35) auf die Gleichung

$$\frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|s\rangle_{\text{SG}} |n-1\rangle - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|s\rangle_{\text{SG}} |n+1\rangle = s \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|s\rangle_{\text{SG}} |n\rangle. \quad (36)$$

Die anschließende Projektion auf einen Fock-Zustand $\langle n'|$ ergibt eine Rekursionsbeziehung für drei aufeinanderfolgende Fock-Komponenten der Eigenzustände $|s\rangle_{\text{SG}}$ des Sinusoperators

$$\frac{1}{2i} \langle n+1|s\rangle_{\text{SG}} - \frac{1}{2i} \langle n-1|s\rangle_{\text{SG}} = s \langle n|s\rangle_{\text{SG}}. \quad (37)$$

Ebenso lässt sich eine Beziehung zwischen den beiden niedrigsten Fock-Komponenten der Eigenzustände des Sinusoperators $\langle 1|s\rangle_{\text{SG}} = 2is\langle 0|s\rangle_{\text{SG}}$ ableiten. Die Rekursionsbeziehung (37) und die Startbedingung werden von Chebyshev-Polynomen zweiter Art $U_n(x)$ erfüllt, die jeweils zusätzlich den Faktor i^n aufweisen. Die mit dem Faktor i^n beaufschlagten Chebyshev-Funktionen zweiter Art $u_n(x)$ sind somit als Fock-Darstellung der Sinuszustände geeignet.

2.4 Eigenschaften der Chebyshev-Polynome zweiter Art

Die wesentlichen Eigenschaften der Chebyshev-Polynome zweiter Art werden in diesem Abschnitt zusammengefasst. Die Chebyshev-Polynome zweiter Art sind beispielsweise mittels trigonometrischer Funktionen definiert

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sin(\arccos x)}. \quad (38)$$

Es gilt für $n \geq 1$ die Rekursionsbeziehung

$$\frac{1}{2} U_{n+1}(x) + \frac{1}{2} U_{n-1}(x) = x U_n(x), \quad (39)$$

auf die bereits oben hingewiesen worden ist. Mit Verwendung der Konvention $U_{-1}(x) \equiv 0$ geht die Rekursionsbeziehung für $n = 0$ in die Startbedingung

$$\frac{1}{2} U_1(x) = x U_0(x) \quad (40)$$

über. Die Chebyshev-Polynome zweiter Art bilden ein vollständiges Orthogonalsystem

$$\int_{-1}^{+1} dx \omega(x) U_n(x) U_{n'}(x) = \frac{\pi}{2} \delta_{n,n'} \quad (41)$$

bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ im Intervall zwischen -1 und $+1$. Der Normierungsfaktor $\frac{\pi}{2}$ ist unabhängig vom Grad n des Polynoms. Im Allgemeinen ist der Normierungsfaktor orthogonaler Polynome eine Funktion des Grades n . Die orthonormierten Funktionen

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1-x^2} U_n(x) \quad (42)$$

werden als Chebyshev-Funktionen zweiter Art bezeichnet. Die Orthogonalitätsrelation für die Chebyshev-Funktionen zweiter Art hat eine besonders kompakte Form

$$\int_{-1}^{+1} dx u_n(x) u_{n'}(x) = \delta_{n,n'}. \quad (43)$$

Die orthonormierten Chebyshev-Funktionen zweiter Art erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_{n'}(x) = \delta(x - x') \quad (44)$$

und ebenfalls die Rekursionsbeziehung

$$\frac{1}{2} u_{n+1}(x) + \frac{1}{2} u_{n-1}(x) = x u_n(x) \quad (45)$$

und die Startbedingung

$$\frac{1}{2} u_1(x) = x u_0(x). \quad (46)$$

Die Definitionsbereiche der orthonormierten Chebyshev-Funktionen $n = 0, 1, 2, \dots$ und $-1 \leq x \leq +1$ entsprechen den Eigenwertspektren der Fock-Zustände bzw. der Kosinus- und Sinuszustände.

2.5 Fock-Darstellung der Kosinus- und Sinuszustände sowie der Kosinus- und Sinusoperatoren

Die Eigenschaften der orthonormierten Chebyshev-Funktionen zweiter Art $u_n(x)$ erfüllen die Anforderungen an die Eigenzustände des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower. Somit sind die Fock-Darstellungen der Eigenzustände des Kosinusoperators

$$\langle n|c\rangle_{\text{SG}} = u_n(c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{1-c^2} U_n(c) \quad (47)$$

und des Sinusoperators

$$\langle n|s\rangle_{\text{SG}} = i^n u_n(s) = i^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{1-s^2} U_n(s) \quad (48)$$

von Susskind und Glogower durch die Chebyshev-Funktionen zweiter Art $u_n(x)$ darstellbar, wobei die Sinuszustände den zusätzlichen Faktor i^n aufweisen. Die Eigenzustände des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower werden nachfolgend auch als Kosinus- und Sinuszustände nach Susskind und Glogower bezeichnet.

Es besteht eine Analogie zu den Fock-Darstellungen der Eigenzustände des Orts- und Impulsoperators (7). Die Eigenzustände des Orts- und Impulsoperators sind in der Fock-Darstellung orthonormierte Hermite-Funktionen, wobei die Impulszustände ebenso wie die

Sinuszustände mit einem Faktor i^n beaufschlagt sind. Die darin auftretenden Hermite-Polynome $H_n(x)$ bilden ein System orthogonaler Polynome in dem Intervall $[-\infty, +\infty]$, das dem Spektrum der Orts- und Impulsoperatoren entspricht.

Der Kosinus c und der Sinus s spielen im klassischen Phasenraum eine ähnliche Rolle wie der Ort q und der Impuls p . Jedoch reicht die alleinige Angabe von c und s nicht aus, um einen Punkt im Phasenraum eindeutig festzulegen. Dazu wäre beispielsweise die zusätzliche Angabe des Abstands r zwischen dem Punkt und dem Koordinatenursprung des Phasenraums erforderlich. Dagegen kann durch die Angabe des Ortes q und des Impulses p ein Punkt im Phasenraum eindeutig bestimmt werden. Es besteht jedoch die Möglichkeit, durch die Angabe des Koordinatenpaares c und p einen Punkt im Phasenraum eindeutig festzulegen. Auch durch die Angabe des Koordinatenpaares s und q kann ein Punkt im Phasenraum eindeutig festgelegt werden.

Mit Verwendung der orthonormierten Chebyshev-Funktionen sind die Matrixelemente von Funktionen des Kosinusoperators im Fock-Raum

$$\langle n|F(\hat{C}_{\text{SG}})|n'\rangle = \int_{-1}^{+1} dc \langle n|c\rangle_{\text{SG}} F(c) {}_{\text{SG}}\langle c|n'\rangle \quad (49)$$

und des Sinusoperators im Fock-Raum

$$\langle n|F(\hat{S}_{\text{SG}})|n'\rangle = \int_{-1}^{+1} ds \langle n|s\rangle_{\text{SG}} F(s) {}_{\text{SG}}\langle s|n'\rangle \quad (50)$$

durch Integration über c bzw. s bestimmbar. Insbesondere können die Matrixelemente von Potenzen des Kosinusoperators im Fock-Raum

$$\langle n|\hat{C}_{\text{SG}}^k|n'\rangle = \int_{-1}^{+1} dc \langle n|c\rangle_{\text{SG}} c^k {}_{\text{SG}}\langle c|n'\rangle \quad (51)$$

und des Sinusoperators im Fock-Raum

$$\langle n|\hat{S}_{\text{SG}}^k|n'\rangle = \int_{-1}^{+1} ds \langle n|s\rangle_{\text{SG}} s^k {}_{\text{SG}}\langle s|n'\rangle \quad (52)$$

auf diese Weise bestimmt werden. Dieses Verfahren ist eine effiziente Alternative zur k -maligen Anwendung des Kosinus- bzw. Sinusoperators auf Fock-Zustände.

Die nacheinander ausgeführte k -malige Anwendung der Rekursionsbeziehung (45) ergibt den Ausdruck

$$x^k u_n(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_{n+k-2j}(x), \quad (53)$$

wobei auf der rechten Seite auch Chebyshev-Funktionen negativer Ordnung $n < 0$ auftreten können. Gemäß der Definition (38) verschwindet zwar das Chebyshev-Polynom $U_{-1}(x)$,

aber die übrigen Chebyshev-Polynome negativer Ordnung mit $n \leq -2$ verschwinden dagegen nicht. Da die Chebyshev-Funktionen zweiter Art mit $n \geq 0$ gemäß (44) ein vollständiges System bilden, müssen die Chebyshev-Funktionen negativer Ordnung auch durch die Chebyshev-Funktionen positiver Ordnung darstellbar sein. Zwischen den Chebyshev-Polynomen bzw. -Funktionen positiver und negativer Ordnung bestehen die Beziehungen

$$U_{-n}(x) = -U_{n-2}(x), \quad u_{-n}(x) = -u_{n-2}(x). \quad (54)$$

Mit Verwendung von (53) und (54) und lassen sich aus (51) und (52) die Erwartungswerte der k -ten Potenz des Kosinusoperators im Fock-Raum

$$\langle n | \hat{C}_{\text{SG}}^k | n' \rangle = \frac{1}{2^k} \binom{k}{\frac{n-n'+k}{2}} - \frac{1}{2^k} \binom{k}{\frac{n+n'+k}{2} + 1} \quad (55)$$

und des Sinusoperators im Fock-Raum

$$\langle n | \hat{S}_{\text{SG}}^k | n' \rangle = \frac{i^{n-n'}}{2^k} \binom{k}{\frac{n-n'+k}{2}} - \frac{i^{n-n'}}{2^k} \binom{k}{\frac{n+n'+k}{2} + 1} \quad (56)$$

bestimmen, wobei für die beiden Terme auf der rechten Seite in (55) bzw. (56) die Auswahlregeln

$$\frac{n-n'+k}{2} = 0, 1, 2, \dots, k \quad \text{bzw.} \quad \frac{n+n'+k}{2} + 1 = 1, 2, 3, \dots, k \quad (57)$$

zu berücksichtigen sind. Wird eine der beiden Auswahlregeln (57) nicht erfüllt, so verschwindet der entsprechende Term in (55) bzw. (56). Werden beide Auswahlregeln (57) nicht erfüllt, so verschwindet das Matrixelement (55) bzw. (56).

2.6 Kosinus- und Sinuszustände als Basis

Aus der Orthogonalitätsrelation (43) der Chebyshev-Polynome zweiter Art lassen sich die Darstellungen des Einheitsoperators ableiten

$$\int_{-1}^{+1} dc |c\rangle_{\text{SG}} {}_{\text{SG}}\langle c| = \int_{-1}^{+1} ds |s\rangle_{\text{SG}} {}_{\text{SG}}\langle s| = \hat{1}, \quad (58)$$

die durch Kosinus- bzw. Sinuszustände nach Susskind und Glogower gebildet sind. Weiterhin gelten für die Kosinus- und Sinuszustände nach Susskind und Glogower die Vollständigkeitsrelationen

$${}_{\text{SG}}\langle c|c\rangle_{\text{SG}} = \delta(c - c'), \quad {}_{\text{SG}}\langle s|s\rangle_{\text{SG}} = \delta(s - s'). \quad (59)$$

Dies lässt sich durch Einsetzen der nach Fock-Zuständen entwickelten Kosinus- und Sinuszustände

$$|c\rangle_{\text{SG}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{1-c^2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(c) |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(c) |n\rangle, \quad (60a)$$

$$|s\rangle_{\text{SG}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{1-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n U_n(s) |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} i^n u_n(c) |n\rangle \quad (60b)$$

in (58) verifizieren. Die Kosinus- und Sinuszustände nach Susskind und Glogower sind somit als Basis für beliebige quantenmechanische Zustände geeignet. Insbesondere bilden die konjugiert komplexen Ausdrücke der Zustände (47) und (48) die Fock-Zustände in der Kosinusdarstellung

$$\text{sg}\langle c|n\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{1-c^2} U_n(c) \quad (61)$$

bzw. Sinusdarstellung

$$\text{sg}\langle s|n\rangle = (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt[4]{1-s^2} U_n(s) \quad (62)$$

nach Susskind und Glogower. Die Fock-Zustände weisen in der Sinusdarstellung, ebenso wie in der Impulsdarstellung, den Faktor $(-i)^n$ auf. Jeder beliebige quantenmechanische Zustand $|\psi\rangle$, dessen Fock-Darstellung $\langle n|\psi\rangle$ bekannt ist, ist auch in der Basis der Kosinus- und Sinuszustände nach Susskind und Glogower darstellbar

$$\text{sg}\langle c|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sg}\langle c|n\rangle \langle n|\psi\rangle, \quad (63a)$$

$$\text{sg}\langle s|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sg}\langle s|n\rangle \langle n|\psi\rangle. \quad (63b)$$

2.7 Kosinus- und Sinusverteilungen

Die Modulquadrate quantenmechanischer Zustände stellen eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar. Die Kosinus- und Sinusverteilungen nach Susskind und Glogower

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{SG})}(c) = |\text{sg}\langle c|\psi\rangle|^2, \quad (64a)$$

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{SG})}(s) = |\text{sg}\langle s|\psi\rangle|^2 \quad (64b)$$

geben für einen Zustand $|\psi\rangle$ die Wahrscheinlichkeit an, den Wert der Kosinusfunktion c bzw. Sinusfunktion s vorzufinden. Für einen beliebigen quantenmechanischen Zustand $|\psi\rangle$, dessen Fock-Darstellung $\langle n|\psi\rangle$ bekannt ist, sind die Kosinus- und Sinusverteilungen im Allgemeinen mittels zweier unendlicher Summen darstellbar

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{SG})}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle \psi|n\rangle \langle n|c\rangle_{\text{SG}} \text{sg}\langle c|n'\rangle \langle n'|\psi\rangle, \quad (65a)$$

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{SG})}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle \psi|n\rangle \langle n|s\rangle_{\text{SG}} \text{sg}\langle s|n'\rangle \langle n'|\psi\rangle. \quad (65b)$$

Bei einigen wichtigen Zuständen weist die Fock-Darstellung eine besondere Form

$$\psi_n \equiv \langle n|\psi\rangle = |\langle n|\psi\rangle| e^{in\gamma} \equiv b_n^{(\psi)} e^{in\gamma} \quad (66)$$

auf, die eine Vereinfachung der Kosinusverteilungen

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{SG})}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n^{(\psi)} u_n(c)]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n-1} b_{n'}^{(\psi)} b_n^{(\psi)} u_n(c) u_{n'}(c) \cos[(n-n')\gamma] \quad (67)$$

und der Sinusverteilungen

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{SG})}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n^{(\psi)} u_n(s)]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n-1} b_{n'}^{(\psi)} b_n^{(\psi)} u_n(s) u_{n'}(s) \cos[(n-n')(\gamma - \frac{\pi}{2})] \quad (68)$$

ermöglicht. Diese Darstellungsform der Kosinus- und Sinusverteilungen weist nur noch eine unendliche Summe pro Term auf und ist beispielsweise für die kohärenten und gestauchten Zustände geeignet.

2.7.1 Kosinus- und Sinusverteilungen für Fock-Zustände

Die Kosinus- und Sinusdarstellungen für Fock-Zustände sind derart normiert, dass deren Modulquadrate als Kosinus- bzw. Sinusverteilungen

$$\int_{-1}^{+1} dc \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{SG})}(c) = \int_{-1}^{+1} dc |\text{SG}\langle c|n\rangle|^2 = 1, \quad (69a)$$

$$\int_{-1}^{+1} ds \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{SG})}(s) = \int_{-1}^{+1} ds |\text{SG}\langle s|n\rangle|^2 = 1 \quad (69b)$$

für Fock-Zustände geeignet sind. Dagegen sind die Modulquadrate keine normierten Photonenzahlverteilungen für einen bestimmten Kosinus- bzw. Sinuszustand

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{SG})}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n|c\rangle_{\text{SG}}|^2 \neq 1, \quad (70a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{SG})}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n|s\rangle_{\text{SG}}|^2 \neq 1. \quad (70b)$$

Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Kosinus- und Sinuszustände nicht normierbar sind. Für einen Kosinus- oder Sinuszustand, der einem Eigenwert c bzw. s zugeordnet ist, ist dessen Modulquadrat somit keine normierte Photonenzahlverteilung. Es besteht eine Analogie zu den bekannten Skalarprodukten $\langle q|n\rangle$ und $\langle p|n\rangle$. Deren Modulquadrate sind zwar eine normierte Ortsverteilung bzw. Impulsverteilung für einen Fock-Zustand, aber keine normierte Photonenzahlverteilung für den Orts- oder Impulszustand, der einem bestimmten Eigenwert q bzw. p zugeordnet ist.

Die Kosinus- und Sinusverteilungen nach Susskind und Glogower für einen bestimmten Fock-Zustand

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{SG})}(c) = [u_n(c)]^2 = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-c^2} [U_n(c)]^2, \quad (71a)$$

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{SG})}(s) = [u_n(s)]^2 = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-s^2} [U_n(s)]^2 \quad (71b)$$

sind identisch, da die komplexen Kosinus- und Sinuszustände sich lediglich in der Phase unterscheiden. Die Kosinus- und Sinusverteilungen hängen von der Anregung des Fock-Zustands $|n\rangle$ und damit von der Energie des quantenmechanischen Oszillators ab. Dagegen

sind die Kosinus- und Sinusverteilungen des klassischen harmonischen Oszillators [29]

$$\mathcal{P}_{\text{kl}}(c) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}, \quad \mathcal{P}_{\text{kl}}(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \quad (72)$$

unabhängig von der Energie des Oszillators. Die klassischen Kosinus- und Sinusverteilungen sind ebenfalls miteinander identisch.

Die Kosinusverteilungen und auch die damit identischen Sinusverteilungen für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|5\rangle$ und $|10\rangle$ sind im Vergleich mit der klassischen Kosinus- bzw. Sinusverteilung in der Abbildung 1 dargestellt. An den Stellen $c = \pm 1$ bzw. $s = \pm 1$ verschwindet der Wert der quantenmechanischen Verteilungen, während der Wert der klassischen Verteilungen an diesen Stellen gegen Unendlich geht. Die Anzahl der Maxima bei den quantenmechanischen Verteilungen hängt von der Anregung des Zustands ab und beträgt $n+1$, und die Anzahl der Nullstellen beträgt $n+2$. Die Konturen der quantenmechanischen Verteilungen nähern sich für hohe Anregungen n denen der klassischen Verteilungen.

Sowohl die klassischen als auch die quantenmechanischen Kosinus- und Sinusverteilungen weisen Parallelen zu den bekannten klassischen bzw. quantenmechanischen Orts- und Impulsverteilungen des harmonischen Oszillators auf. In beiden Fällen oszilliert die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsverteilung um die klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung und nähert sich dieser mit zunehmender Anregung n .

2.7.2 Kosinus- und Sinusverteilungen für kohärente Zustände

Die Anwendung des Verschiebungsoperators [22]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (73)$$

auf den Vakuumzustand $\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$ ergibt die kohärenten Zustände (10).

Die Fock-Darstellung der kohärenten Zustände ist in der Form (66) darstellbar

$$\langle n|\alpha\rangle = b_n^{(\alpha)} e^{in\varphi_\alpha}, \quad b_n^{(\alpha)} \equiv e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}, \quad (74)$$

so dass die Kosinus- und Sinusverteilungen für die kohärenten Zustände durch die Gleichungen (67) bzw. (68) mit der Abkürzung $b_n^{(\alpha)}$ aus (74) gegeben sind. Die Abbildung 2 zeigt die Kosinus- und Sinusverteilungen für die kohärenten Zustände mit den Parameterkonstellationen $|\alpha| = 1$ und $\varphi_\alpha = 0$, $\varphi_\alpha = 1$ bzw. $\varphi_\alpha = 2$ im Vergleich mit der Kosinus- bzw. Sinusverteilung für den Vakuumzustand. Bei den Kosinus- und Sinusverteilungen für die kohärenten Zustände bildet sich bei hinreichend großem $|\alpha|$ ein Maximum an der Stelle $c = \cos \varphi_\alpha$ bzw. $s = \sin \varphi_\alpha$. Je größer die Verschiebungsintensität $|\alpha|$ ist, umso deutlicher bildet sich ein Peak an diesen Stellen.

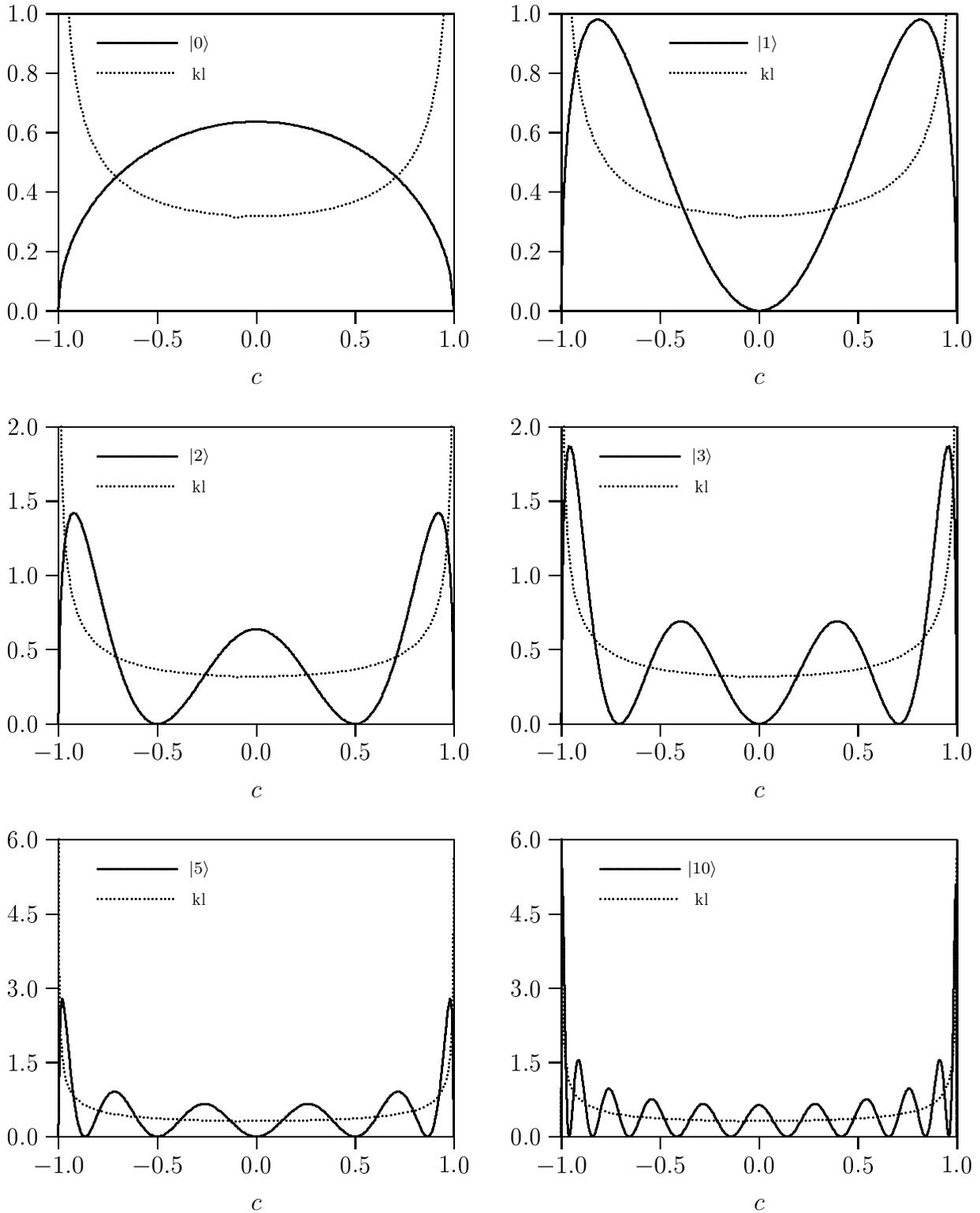


Abbildung 1: Kosinusverteilungen (Sinusverteilungen) für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|5\rangle$ und $|10\rangle$ im Vergleich mit der Kosinusverteilung (Sinusverteilung) des klassischen harmonischen Oszillators.

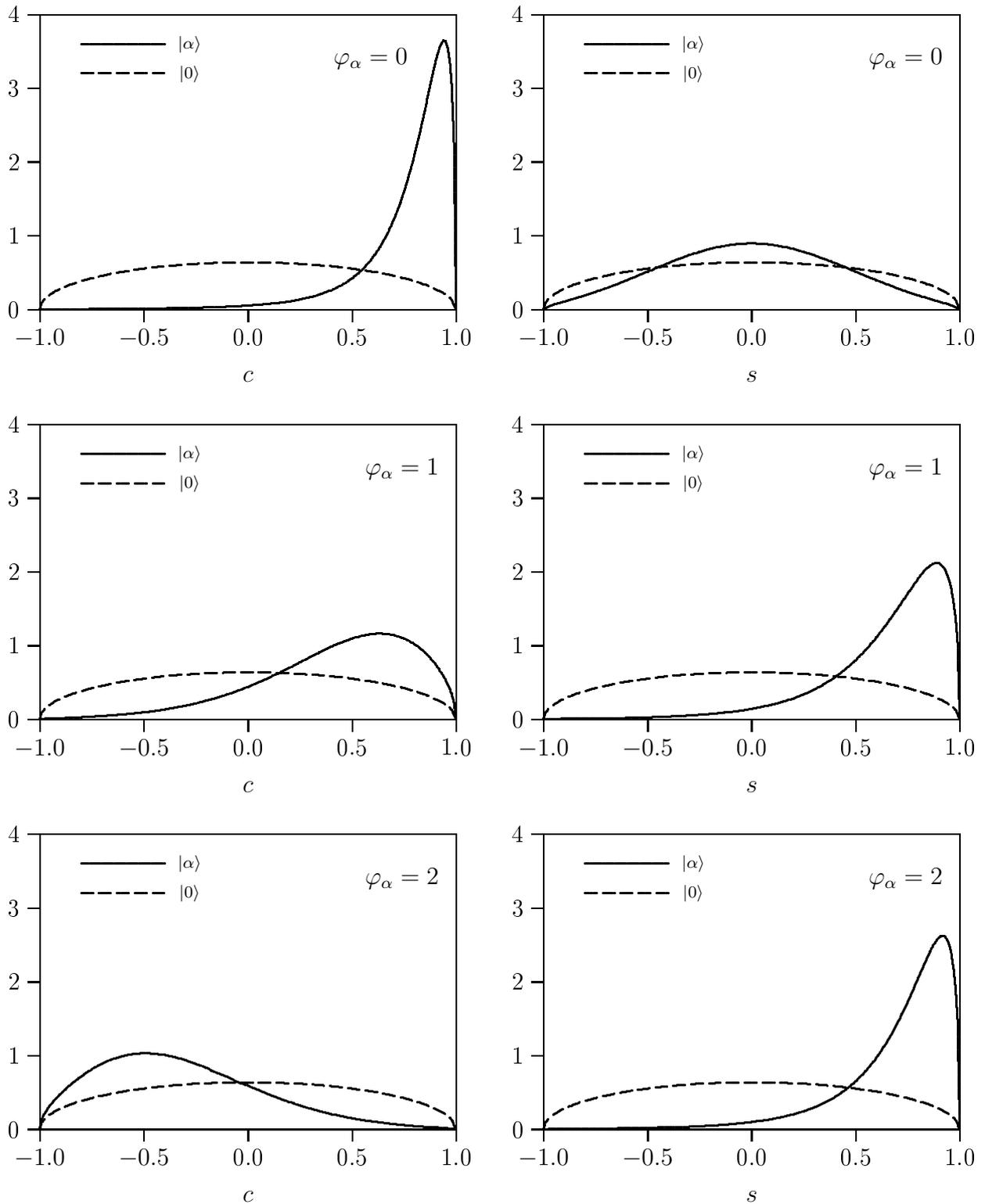


Abbildung 2: Kosinus- und Sinusverteilungen für die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ mit $|\alpha| = 1$ und $\varphi_\alpha = 0, \varphi_\alpha = 1, \varphi_\alpha = 2$ sowie für den Vakuumzustand $|0\rangle$.

2.7.3 Kosinus- und Sinusverteilungen für gestauchte Zustände

Der quantenmechanische Stauchoperator [23, 24, 26] ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\hat{S}(\xi) &= \exp\left\{\frac{1}{4}(\xi\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}\hat{a})\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}(e^{i\varphi_z}\tanh\frac{|\xi|}{2})\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right\} \exp\left\{-[\ln(\cosh\frac{|\xi|}{2})](\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(e^{-i\varphi_z}\tanh\frac{|\xi|}{2})\hat{a}\hat{a}\right\}\end{aligned}\quad (75)$$

mit dem komplexen Parameter $\xi = |\xi|e^{i\varphi_z}$. Mit $z \equiv e^{i\varphi_z}\tanh\frac{|\xi|}{2}$ ergibt die Anwendung des Stauchoperators (75) auf den Vakuumzustand $\hat{S}(z)|0\rangle = |z\rangle$ die gestauchten Zustände

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\Gamma(2n+1)}}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n |2n\rangle, \quad (76)$$

die durch den komplexen Stauchparameter $z = |z|e^{i\varphi_z}$ mit $0 \leq |z| < 1$ charakterisiert sind. Der Betrag $|z|$ beschreibt die Stauchintensität im quantenmechanischen Phasenraum. Die Phase φ_z des Parameters z ist ein Maß für die Stauchrichtung, wobei der Wert $\frac{\varphi_z}{2}$ dem Winkel zwischen der p -Achse (Impuls) und der Stauchrichtung im quantenmechanischen Phasenraum entspricht. Da im Stauchoperator (75) der Absteigeoperator \hat{a} und Aufsteigeoperator \hat{a}^\dagger jeweils paarweise auftreten, sind bei der Stauchoperation stets zwei Photonen involviert, so dass die gestauchten Zustände lineare Überlagerungen geradzahlgiger Fock-Zustände sind. Der Spezialfall $z = 0$ entspricht dem Vakuumzustand.

Die Fock-Darstellung des gestauchten Zustands liegt ebenfalls in der oben genannten Form (66) vor

$$\begin{aligned}\langle n|z\rangle &= b_n^{(z)} e^{in\frac{\varphi_z}{2}}, & n = 0, 2, 4, \dots \\ \langle n|z\rangle &= 0, & n = 1, 3, 5, \dots\end{aligned}$$

so dass die Kosinus- und Sinusverteilungen nach Susskind und Glogower für die gestauchten Zustände ebenfalls durch die Gleichung (67) bzw. (68) gegeben sind, wobei die Abkürzung

$$b_n^{(z)} \equiv \frac{\sqrt{\Gamma(2n+1)}}{\Gamma(n+1)} \frac{(|z|/2)^n}{\sqrt{1-|z|^2}}, \quad (77)$$

verwendet wird. Da die ungeradzahlgigen Fock-Komponenten der gestauchten Zustände stets verschwinden, wird bei den Kosinus- und Sinusverteilungen (67) bzw. (68) ausschließlich über die geradzahlgigen Indizes n und n' summiert.

Die Abbildung 3 zeigt Kosinus- und Sinusverteilungen für die gestauchten Zustände mit der Stauchintensität $|z| = \frac{1}{2}$ und den Stauchrichtungen $\varphi_z = 0$, $\varphi_z = 1$ und $\varphi_z = 2$ im Vergleich mit den Kosinus- bzw. Sinusverteilungen für den Vakuumzustand. Im gestauchten Zustand bilden sich bei hinreichender Stauchintensität $|z|$ zwei Maxima an den Stellen $c = \pm \cos\frac{\varphi_z}{2}$ bzw. $s = \pm \sin\frac{\varphi_z}{2}$. Im Grenzfall der totalen Stauchung $|z| \rightarrow 1$ entstehen an den vorgenannten Stellen deutlich ausgebildete Peaks.

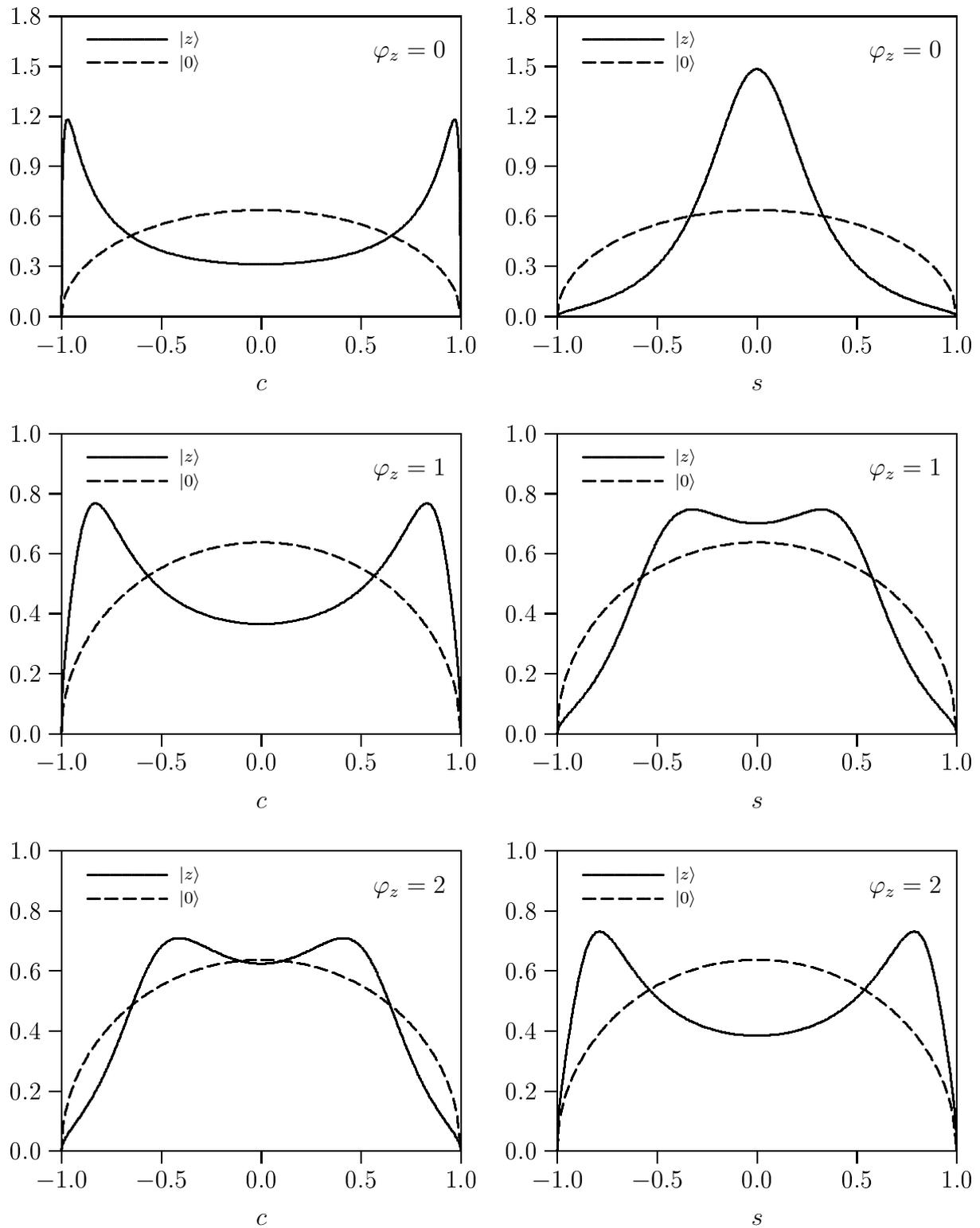


Abbildung 3: Kosinus- und Sinusverteilungen für die gestauchten Zustände $|z\rangle$ mit $|z| = \frac{1}{2}$ und $\varphi_z = 0, \varphi_z = 1, \varphi_z = 2$ sowie für den Vakuumzustand $|0\rangle$.

3 Verallgemeinerung der Kosinus- und Sinuszustände

Die Eigenzustände des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower werden in diesem Kapitel verallgemeinert. An Stelle der Chebyshev-Polynome zweiter Art $U_n(x)$ werden allgemeinere orthogonale Polynomsysteme in dem Intervall $x \in [-1, +1]$ verwendet. Diese Verallgemeinerung gilt im Prinzip für beliebige orthonormierbare Polynome in dem Intervall $x \in [-1, +1]$. Schwerpunktmäßig werden Resultate für die sogenannten klassischen orthogonalen Polynome im Intervall $x \in [-1, +1]$ angegeben.

3.1 Eigenschaften der orthogonalen Polynome

In diesem Abschnitt werden die relevanten Eigenschaften der orthogonalen Polynome zusammengefasst. Es sei $w(x)$ eine nicht-negative reellwertige Gewichtsfunktion in dem Intervall $x \in [-1, +1]$, deren Momente alle existieren und endlich sind

$$\mu_n = \int_{-1}^{+1} dx w(x) x^n < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (78)$$

Weiterhin sei $P_n(x)$ ein reellwertiges Polynom des Grades n . Ein Satz oder System von Polynomen $\{P_n(x)\}$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ ist bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x)$ orthogonal, wenn

$$\int_{-1}^{+1} dx w(x) P_n(x) P_m(x) = d_n \delta_{n,m}, \quad (79)$$

wobei $d_n > 0$ eine endliche Normierungskonstante und $\delta_{n,m}$ das Kronecker-Symbol sind. Die Gewichtsfunktion $w(x)$ bestimmt den Satz von Polynomen $\{P_n(x)\}$ bis auf einen konstanten Faktor in jedem Polynom $P_n(x)$. Folglich werden verschiedene Polynomsysteme durch die Wahl verschiedener Gewichtsfunktionen erhalten. Jeder Satz von Polynomen $\{P_n(x)\}$ wird aus dem vollständigen Satz der Potenzen $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt erhalten. Die Vollständigkeitsrelation für orthogonale Polynome lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_n} P_n(x) P_n(x') = \frac{\delta(x-x')}{w(x')}. \quad (80)$$

Alle Polynomsysteme erfüllen eine Rekursionsbeziehung für drei aufeinanderfolgende Polynome der Form [18]

$$P_{n+1}(x) = (\alpha_n + x\beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad (81)$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$ und per Definition mit $\gamma_0 = 0$. Die übrigen Rekursionskoeffizienten sind gegeben durch

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} \right), \quad \beta_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n+1} a_{n-1} d_n}{a_n^2 d_{n-1}}, \quad (82)$$

wobei a_n und b_n die Koeffizienten der beiden höchsten Potenzen x^n und x^{n-1} in dem Polynom

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots \quad (83)$$

sind. Von besonderem Interesse sind diejenigen Polynome, die von symmetrischen Gewichtsfunktionen $w(x) = w(-x)$ erzeugt werden. In diesem Fall verschwinden die Momente (78) mit ungerader Ordnung n , was zur Folge hat, dass die Polynome von geradem Grad n ausschließlich geradzahle Potenzen von x und umgekehrt die Polynome von ungeradem Grad n nur ungeradzahle Potenzen von x enthalten. Außerdem gilt für die Polynome mit $w(x) = w(-x)$ die Paritätsbeziehung

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (84)$$

Es werden normierte Polynome eingeführt

$$\bar{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} P_n(x), \quad (85)$$

in denen die Normierungskonstante d_n implizit enthalten ist. Außerdem werden orthonormierte Funktionen eingeführt

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{w(x)}{d_n}} P_n(x) = \sqrt{w(x)} \bar{P}_n(x), \quad (86)$$

die sowohl die Normierungskonstante d_n als auch die Gewichtsfunktion $w(x)$ implizit enthalten und die im Allgemeinen keine Polynome sind. Die orthonormierten Funktionen erfüllen die Orthonormalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dx p_n(x) p_m(x) = \delta_{n,m}, \quad (87)$$

die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) p_n(x') = \delta(x - x') \quad (88)$$

und die Rekursionsbeziehung in orthonormierter Form

$$\frac{f_n}{2} p_{n+1}(x) + \frac{f_{n-1}}{2} p_{n-1}(x) + g_n p_n(x) = x p_n(x), \quad f_{-1} \equiv 0. \quad (89)$$

Letztere gilt auch für die normierten Polynome (85). Die Rekursionsbeziehung (89) enthält lediglich zwei unabhängige Rekursionskoeffizienten

$$f_n = 2 \frac{a_n}{a_{n+1}} \sqrt{\frac{d_{n+1}}{d_n}}, \quad g_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}. \quad (90)$$

Für diejenigen Polynome, die von symmetrischen Gewichtsfunktionen $w(x) = w(-x)$ erzeugt werden, verschwindet der zweite Rekursionskoeffizient g_n in (90), so dass in diesem Fall die Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Polynomen durch den einen Rekursionskoeffizienten f_n charakterisiert ist.

3.2 Verallgemeinerung der Kosinus- und Sinuszustände

In diesem Abschnitt werden die orthogonalen Polynome $P_n(x)$ im Intervall $x \in [-1, +1]$ für quantenmechanische Zustände verwendet. Die im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Eigenschaften verdeutlichen, dass die orthonormierten Funktionen $p_n(x)$ im Intervall $x \in [-1, +1]$, ebenso wie die orthonormierten Chebyshev-Funktionen der zweiten Art $u_n(x)$, als Zustände verwendet werden können. Außerdem können diese Zustände auch als Basis zur Darstellung beliebiger anderer Zustände verwendet werden. Die Zustände, in denen $U_n(x)$ durch ein allgemeineres Polynom im Intervall $x \in [-1, +1]$ ersetzt wird, werden als Kosinus- bzw. Sinuszustände bezeichnet. Die Resultate in den nächsten Kapiteln werden verdeutlichen, dass diese Bezeichnungen berechtigt sind.

Dabei werden diejenigen Kosinus- und Sinuszustände, bei denen die Polynome symmetrische Gewichtsfunktionen $w(x) = w(-x)$ aufweisen, als *verallgemeinerte* Kosinus- und Sinuszustände bezeichnet. Die Kosinus- und Sinuszustände, bei denen die Polynome unsymmetrische Gewichtsfunktionen $w(x) \neq w(-x)$ aufweisen, werden als *erweiterte* Kosinus- und Sinuszustände bezeichnet.

Die orthonormierten Funktionen $p_n(x)$ werden als Kosinus- und Sinuszustände in der Fock-Darstellung interpretiert

$$\langle n|c \rangle = p_n(c) = \sqrt{\frac{w(c)}{d_n}} P_n(c) = \sqrt{w(c)} \bar{P}_n(c), \quad (91a)$$

$$\langle n|s \rangle = i^n p_n(s) = i^n \sqrt{\frac{w(s)}{d_n}} P_n(s) = i^n \sqrt{w(s)} \bar{P}_n(s), \quad (91b)$$

wobei die Sinuszustände ebenfalls mit dem Faktor i^n beaufschlagt sind. Die dazu konjugiert komplexen Ausdrücke $\langle c|n \rangle$ und $\langle s|n \rangle$ sind Kosinus- und Sinusdarstellungen der Fock-Zustände. Die darstellungsunabhängigen Kosinus- und Sinuszustände sind nach Fock-Zuständen mit den orthonormierten Funktionen $p_n(x)$ als Koeffizienten entwickelbar

$$|c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(c)|n\rangle, \quad |s\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} i^n p_n(s)|n\rangle. \quad (92)$$

Aus der Vollständigkeitsrelation (88) folgt, dass die Kosinus- und Sinuszustände ein orthogonales System bilden

$$\langle c|c' \rangle = \delta(c - c'), \quad \langle s|s' \rangle = \delta(s - s'). \quad (93)$$

Aus der Orthogonalitätsrelation (87) folgt, dass der Einheitsoperator durch die Kosinuszustände und Sinuszustände (92) darstellbar ist

$$\int_{-1}^{+1} dc |c\rangle\langle c| = \int_{-1}^{+1} ds |s\rangle\langle s| = \hat{1}. \quad (94)$$

Die Kosinus- und Sinuszustände (92) sind über eine Transformation miteinander verknüpft

$$|s\rangle = e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \left[|c\rangle \right]_{c=s}, \quad |c\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \left[|s\rangle \right]_{s=c}. \quad (95)$$

Dies verdeutlicht den obigen Faktor i^n bei den Sinuszuständen. Die Transformationen (95) entsprechen jeweils einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Phasenraum. Die bisherigen Beziehungen in diesem Abschnitt gelten für alle orthonormierbaren Polynome in dem Intervall $x \in [-1, +1]$. Nachfolgend werden die sogenannten klassischen orthogonalen Polynome in dem Intervall $x \in [-1, +1]$ näher untersucht.

Die allgemeinsten klassischen orthogonalen Polynome in dem Intervall $x \in [-1, +1]$ sind die bekannten Jacobi-Polynome [19]

$$P_n^{(\mu, \nu)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n+\mu}{m} \binom{n+\nu}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m, \quad (96)$$

die durch zwei Parameter $\mu, \nu > -1$ charakterisiert sind. Diese umfassen sämtliche klassischen orthogonalen Polynome in dem Intervall $x \in [-1, +1]$. Die wesentlichen Eigenschaften der Jacobi-Polynome $P_n^{(\mu, \nu)}(x)$ sind in der Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1: Gewichtsfunktion $w(x)$, Normierungskonstante d_n und Rekursionskoeffizienten f_n und g_n für die Jacobi-Polynome $P_n^{(\mu, \nu)}(x)$.

$P_n^{(\mu, \nu)}(x) :$	$(\mu > -1, \nu > -1)$
$w(x) = (1-x)^\mu (1+x)^\nu$	
$d_n = \frac{2^{\mu+\nu+1} \Gamma(n+\mu+1) \Gamma(n+\nu+1)}{n! (2n+\mu+\nu+1) \Gamma(n+\mu+\nu+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	
$f_n = \frac{2}{2n+\mu+\nu+2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+\mu+1)(n+\nu+1)(n+\mu+\nu+1)}{(2n+\mu+\nu+1)(2n+\mu+\nu+3)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	
$g_n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{(2n+\mu+\nu)(2n+\mu+\nu+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	
$g_0 = \frac{\nu - \mu}{\mu + \nu + 2}$	

In dem Fall $\mu = \nu$ verschwinden die Koeffizienten g_n für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ und im Fall $\mu = -\nu$ verschwindet g_n für $n = 1, 2, 3, \dots$, abgesehen von $g_0 = \nu$. In dem besonderen Fall $\mu = \nu$ ist die Gewichtsfunktion symmetrisch $w(x) = w(-x)$. Es besteht daher ein Zusammenhang zwischen dem Verschwinden der Koeffizienten g_n und der Symmetrie der Gewichtsfunktionen $w(x)$. Für die Jacobi-Polynome gilt außerdem die Beziehung $P_n^{(\mu, \nu)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\nu, \mu)}(x)$, die in dem Fall $\mu = \nu$ in die Paritätsbeziehung (84) übergeht.

Der Fall $\mu = \nu$ entspricht weiterhin den bekannten Gegenbauer-Polynomen [19]

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)} {}_2F_1(2\lambda+n, -n; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}), \quad (97)$$

die durch einen Parameter λ mit $\lambda > -\frac{1}{2}$ und $\lambda \neq 0$ charakterisiert sind. Der Parameter λ wird als Gegenbauer-Parameter bezeichnet. Zwischen den Jacobi-Polynomen (96) und den Gegenbauer-Polynomen (97) besteht der Zusammenhang [19]

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x). \quad (98)$$

Alle klassischen orthogonalen Polynome im Intervall $x \in [-1, +1]$ mit symmetrischer Gewichtsfunktion sind als Gegenbauer-Polynome darstellbar.

Die Gegenbauer-Polynome wiederum enthalten weitere bekannte orthogonale Polynome als Spezialfälle. Die Gegenbauer-Polynome mit $\lambda = \frac{1}{2}$ sind die bekannten Legendre-Polynome $P_n(x)$.

Zwischen den Chebyshev-Polynomen erster Art $T_n(x)$ und den Gegenbauer- bzw. Jacobi-Polynomen besteht die Beziehung [18]

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (99)$$

Für den Fall $n = 0$ gilt dagegen

$$T_0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} C_0^{(\lambda)}(x) = P_0^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x). \quad (100)$$

Schließlich entspricht der Spezialfall $\lambda = 1$ den Chebyshev-Polynomen zweiter Art $U_n(x)$. Somit sind auch die Eigenzustände der Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower ein Spezialfall dieser Verallgemeinerung.

Die charakteristischen Eigenschaften der klassischen Polynome, die aus den Jacobi-Polynomen $P_n^{(\mu, \nu)}(x)$ mit gleichen Parametern ($\mu = \nu$) hervorgehen, sind in der Tabelle 2 zusammengefasst. Bei diesen Polynomen verschwindet stets der Koeffizient $g_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \dots$, so dass deren Rekursionsbeziehungen (81) jeweils nur einen Rekursionskoeffizienten f_n aufweisen.

Die konkreten Resultate betreffen stets die klassischen Polynome. Daher werden die verallgemeinerten Kosinus- und Sinuszustände ($g_n = 0$) durch den Gegenbauer-Parameter λ charakterisiert. Die erweiterten Kosinus- und Sinuszustände ($g_n \neq 0$) werden durch die beiden Parameter μ und ν , die in den Jacobi-Polynomen $P_n^{(\mu, \nu)}(x)$ auftreten, charakterisiert.

Die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinuszustände können zur Darstellung beliebiger quantenmechanischer Zustände $|\psi\rangle$, deren Fock-Darstellungen $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$ bekannt sind, verwendet werden

$$\psi^{(C)}(c) = \langle c|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(c) \psi_n, \quad \psi^{(S)}(s) = \langle s|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n p_n(s) \psi_n. \quad (101)$$

Die Ausdrücke $\psi^{(C)}(c)$ und $\psi^{(S)}(s)$ werden als Kosinus- bzw. Sinusdarstellung des Zustands $|\psi\rangle$ bezeichnet.

Tabelle 2: Gewichtsfunktion $w(x)$, Normierungskonstante d_n und Rekursionskoeffizient f_n für die Jacobi-Polynome $P_n^{(\mu,\mu)}(x)$, Gegenbauer-Polynome $C_n^{(\lambda)}(x)$, Legendre-Polynome $P_n(x)$ und Chebyshev-Polynome erster Art $T_n(x)$ und zweiter Art $U_n(x)$.

Polynom:	$w(x)$:	d_n :	f_n :
$P_n^{(\mu,\mu)}(x)$	$(1-x^2)^\mu$	$\frac{2^{2\mu+1}[\Gamma(n+\mu+1)]^2}{n!(2n+2\mu+1)\Gamma(n+2\mu+1)}$	$\sqrt{\frac{(n+1)(n+2\mu+1)}{(n+\mu+\frac{1}{2})(n+\mu+\frac{3}{2})}}$
$C_n^{(\lambda)}(x)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}$	$\sqrt{\frac{(n+2\lambda)(n+1)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda)}}$
$P_n(x)$	1	$\frac{2}{2n+1}$	$\frac{n+1}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}}$
$T_n(x)$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{2} \tau_n \quad (\tau_0 = 2, \tau_{n \geq 1} = 1)$	$\sqrt{\tau_n}$
$U_n(x)$	$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{2}$	1

3.3 Verallgemeinerte und erweiterte Kosinus- und Sinusverteilungen

Für einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$ sind die Modulquadrate $|\psi^{(C)}(c)|^2$ und $|\psi^{(S)}(s)|^2$ der Darstellungen (101) dessen verallgemeinerte bzw. erweiterte Kosinus- und Sinusverteilungen. Die Kosinus- und Sinusverteilungen geben die Wahrscheinlichkeiten an, den Wert c bzw. s in dem Zustand $|\psi\rangle$ vorzufinden. Allgemein haben die Kosinus- und Sinusverteilungen für ein System, das durch den Dichteoperator $\hat{\rho}$ beschrieben wird, die Form

$$\mathcal{P}_\rho^{(C)}(c) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{nm} p_m(c) p_n(c), \quad (102a)$$

$$\mathcal{P}_\rho^{(S)}(s) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-i)^{m-n} \rho_{nm} p_m(s) p_n(s). \quad (102b)$$

Das Integral über diese Verteilungen ist stets auf Eins normiert. Da der Ausdruck $p_m(x)p_n(x)$ symmetrisch bezüglich m und n ist, tragen nur die symmetrischen Anteile der verbleibenden Faktoren zu der Doppelsumme in (102) bei. Die Berücksichtigung der Hermitizität der Dichtematrix ergibt die symmetrischen Anteile $\Re[\rho_{m,n}]$ für die Kosinusverteilungen und

$\Re[(-i)^{m-n}\rho_{m,n}]$ für die Sinusverteilungen

$$\mathcal{P}_\rho^{(C)}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n} p_n^2(c) + 2 \sum_{m>n=0}^{\infty} \Re[\rho_{m,n}] p_m(c) p_n(c), \quad (103a)$$

$$\mathcal{P}_\rho^{(S)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n} p_n^2(s) + 2 \sum_{m>n=0}^{\infty} \Re[\rho_{m,n} e^{-i\frac{\pi}{2}(m-n)}] p_m(s) p_n(s). \quad (103b)$$

Formal ergeben sich die Sinusverteilungen aus den Kosinusverteilungen, indem der Realteil der Dichtematrixelemente $\rho_{m,n}$ durch den Realteil der phasenverschobenen Dichtematrixelemente $\tilde{\rho}_{m,n} = \rho_{m,n} \exp[-i\frac{\pi}{2}(m-n)]$ ersetzt wird. Für zahlreiche Zustände, insbesondere die kohärenten und gestauchten Zustände, haben die Dichtematrixelemente $\rho_{m,n}$ eine Phasenabhängigkeit der Form $\exp[i(m-n)\varphi]$. In diesem Fall ergeben sich die Sinusverteilungen durch die Ersetzungen $c \rightarrow s$ und $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\pi}{2}$ aus den Kosinusverteilungen.

3.3.1 Kosinus- und Sinusverteilungen für Fock-Zustände

Die Kosinus- und Sinusverteilungen für die Fock-Zustände

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(C)}(c) = p_n^2(c) = w(c) [\bar{P}_n(c)]^2 = \frac{w(c)}{d_n} [P_n(c)]^2, \quad (104a)$$

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(S)}(s) = p_n^2(s) = w(s) [\bar{P}_n(s)]^2 = \frac{w(s)}{d_n} [P_n(s)]^2, \quad (104b)$$

geben die Wahrscheinlichkeiten an, den Wert c bzw. s in dem Fock-Zustand $|n\rangle$ vorzufinden. Für die Fock-Zustände sind die Kosinusverteilungen mit den Sinusverteilungen identisch und stimmen exakt mit den quadratischen orthonormierten Funktionen $p_n^2(c)$ bzw. $p_n^2(s)$ überein, wobei der Grad des Polynoms dem Fock-Zustand entspricht. Falls die Polynome gemäß $P_0(x) = 1$ definiert sind, ist die Verteilung für den Vakuumzustand durch die normierte Gewichtsfunktion $w(x)/d_0$ gegeben. In diesem Fall sind die Verteilungen für die angeregten Zustände $n \neq 0$ mit $d_0 P_n^2(x)/d_n$ moduliert. Die Verteilungen verschwinden bei den n Nullstellen des jeweiligen Polynoms $P_n(x)$ und oszillieren mit $n+1$ Peaks.

Die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusverteilungen sind für Fock-Zustände symmetrisch, während die erweiterten Kosinus- und Sinusverteilungen für Fock-Zustände unsymmetrisch sind. Die Symmetrie ergibt sich aus der Paritätsbeziehung (84). Das Verhalten an den Stellen $c = \pm 1$ bzw. $s = \pm 1$ hängt ausschließlich von der Gewichtsfunktion $w(\pm 1)$ ab, da das Polynom an diesen Stellen $P_n(\pm 1)$ stets einen endlichen Wert hat.

Die Abbildung 4 zeigt die Kosinusverteilungen und die damit identischen Sinusverteilungen für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|5\rangle$ mit dem negativen Gegenbauer-Parameter $\lambda = -\frac{1}{4}$ im Vergleich mit der klassischen Kosinus- und Sinusverteilung (72). Die klassische Kosinus- und Sinusverteilung entspricht einer gleichförmigen Phasenverteilung [29]. An den Endpunkten $c = \pm 1$ und $s = \pm 1$ divergieren die Werte der quantenmechanischen und klassischen Verteilung. Die Anzahl der Peaks und Nullstellen bei den quantenmechanischen Verteilungen hängt von der Anregung des jeweiligen Fock-Zustandes $|n\rangle$ ab. Die quantenmechanischen Verteilungen haben $n+1$ Peaks und n Nullstellen für $n \geq 1$.

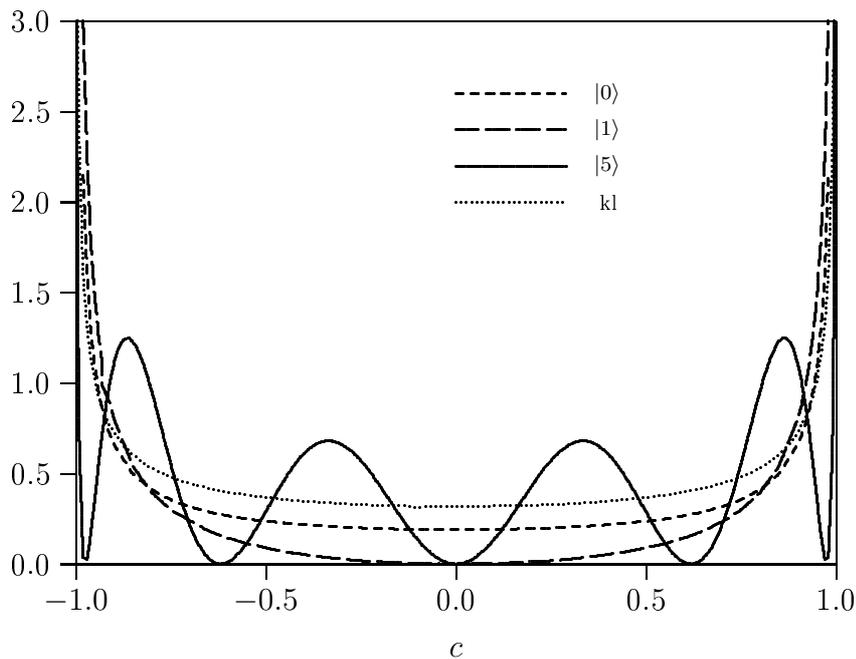


Abbildung 4: Kosinusverteilungen (Sinusverteilungen) $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(C)}(c)$, $\mathcal{P}_{|1\rangle}^{(C)}(c)$ und $\mathcal{P}_{|5\rangle}^{(C)}(c)$ für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|5\rangle$ mit $\lambda = -\frac{1}{4}$ sowie die Kosinusverteilung (Sinusverteilung) $\mathcal{P}_{kl}^{(C)}(c)$ für den klassischen Oszillator.

In der Abbildung 5 sind die Kosinus- und Sinusverteilungen für die gleichen Fock-Zustände wie in der Abbildung 4, jedoch mit dem positiven Gegenbauer-Parameter $\lambda = 1$ dargestellt. Zum Vergleich ist auch die klassische Kosinus- und Sinusverteilung (72) dargestellt. An den Endpunkten $c = \pm 1$ und $s = \pm 1$ verschwinden die Werte der quantenmechanischen Verteilungen, während die Werte der klassischen Verteilung an den Endpunkten gegen Unendlich gehen. Die quantenmechanischen Verteilungen mit $\lambda = 1$ haben $n + 1$ Peaks und $n + 2$ Nullstellen. In den beiden Abbildungen 4 und 5 oszillieren die quantenmechanischen Verteilungen um die klassische Verteilung. Dabei werden die Konturen der quantenmechanischen Verteilungen bei hohen Anregungen n der Kontur der klassischen Verteilung ähnlich. Der Vergleich zwischen den klassischen und quantenmechanischen Kosinus- und Sinusverteilungen ist ähnlich dem bekannten Vergleich zwischen klassischen und quantenmechanischen Orts- und Impulsverteilungen für die Zustände des harmonischen Oszillators. In allen diesen Fällen oszilliert die quantenmechanische Verteilung um die entsprechende klassische Verteilung.

Als nächstes wird der Einfluss des Gegenbauer-Parameters λ untersucht. Die Abbildung 6 zeigt die Kosinus- und Sinusverteilungen für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ im Vergleich mit den klassischen Kosinus- und Sinusverteilungen. Bei den Gegenbauer-Parametern $\lambda < \frac{1}{2}$ divergieren die Kosinus- und Sinusverteilungen an den Stellen $c = \pm 1$ bzw. $s = \pm 1$. Das einzige Minimum dieser Kosinus- und Sinusverteilungen befindet sich an der Stelle $c = 0$ bzw. $s = 0$. Bei dem Gegenbauer-Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$ ist die Kosinus- und Sinusverteilung für den Vakuumzustand eine Gleichverteilung. Bei den Gegenbauer-Parametern $\lambda > \frac{1}{2}$ ver-

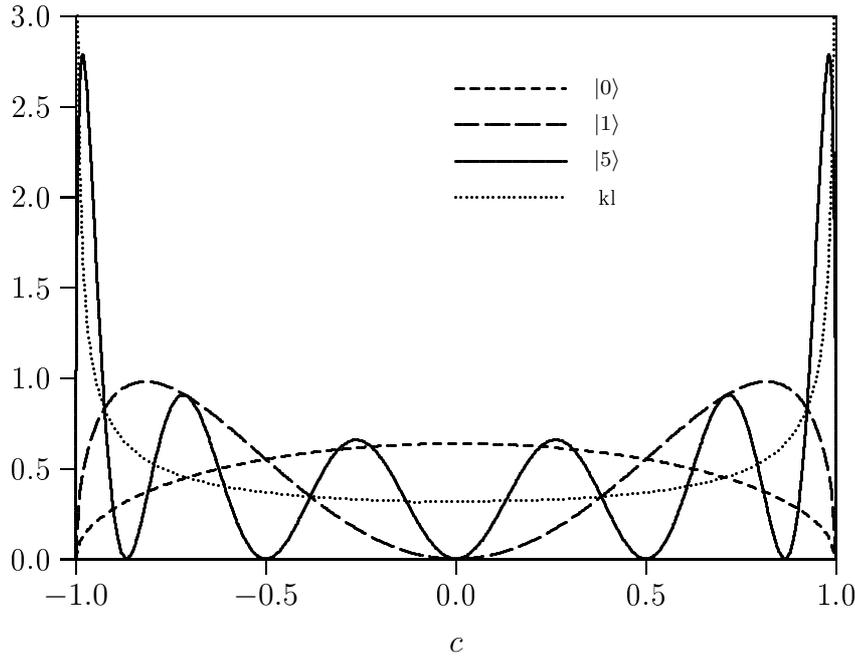


Abbildung 5: Kosinusverteilungen (Sinusverteilungen) $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(C)}(c)$, $\mathcal{P}_{|1\rangle}^{(C)}(c)$ und $\mathcal{P}_{|5\rangle}^{(C)}(c)$ für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|5\rangle$ mit $\lambda = 1$ sowie die Kosinusverteilung (Sinusverteilung) $\mathcal{P}_{kl}^{(C)}(c)$ für den klassischen Oszillator.

schwinden die Kosinus- und Sinusverteilungen an den Stellen $c = \pm 1$ und $s = \pm 1$, die auch die einzigen Nullstellen sind. Dieses unterschiedliche Verhalten ist auf die Gewichtsfunktion $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ der Gegenbauer-Polynome zurückzuführen, die insbesondere vom Gegenbauer-Parameter λ abhängt. An den Stellen $c = 0$ und $s = 0$ nehmen die Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit zunehmendem Gegenbauer-Parameter λ zu.

Die Verteilungen mit dem Gegenbauer-Parameter $\lambda = 0$ sind nicht definiert. Es besteht jedoch der Zusammenhang (99) bzw. (100) zwischen den Gegenbauer-Polynomen im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ und den Chebyshev-Polynomen erster Art, so dass die Verteilungen für diesen Grenzfall durch die Chebyshev-Polynome erster Art darstellbar sind. Die Verteilung für den Vakuumzustand $|0\rangle$ in dem Fall $\lambda \rightarrow 0$ ist mit der klassischen Verteilung identisch.

Einige beispielhafte erweiterte Kosinus- und Sinusverteilungen ($\mu \neq \nu$) zeigt die Abbildung 7. Es sind die Kosinus- bzw. Sinusverteilungen für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit den Jacobi-Parameterpaaren $(\mu, \nu) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ dargestellt. Die Verteilungen sind unsymmetrisch, was für Fock-Zustände ein unerwartetes Resultat ist. Das Verhalten an den Stellen $c = \pm 1$ bzw. $s = \pm 1$ wird von der Gewichtsfunktion $w(x) = (1 - x)^\mu (1 + x)^\nu$ der Jacobi-Polynome bestimmt, wobei der Faktor $(1 - x)^\mu$ das Verhalten an der Stelle $c = +1$ bzw. $s = +1$ und der Faktor $(1 + x)^\nu$ das Verhalten an der Stelle $c = -1$ bzw. $s = -1$ bestimmt.

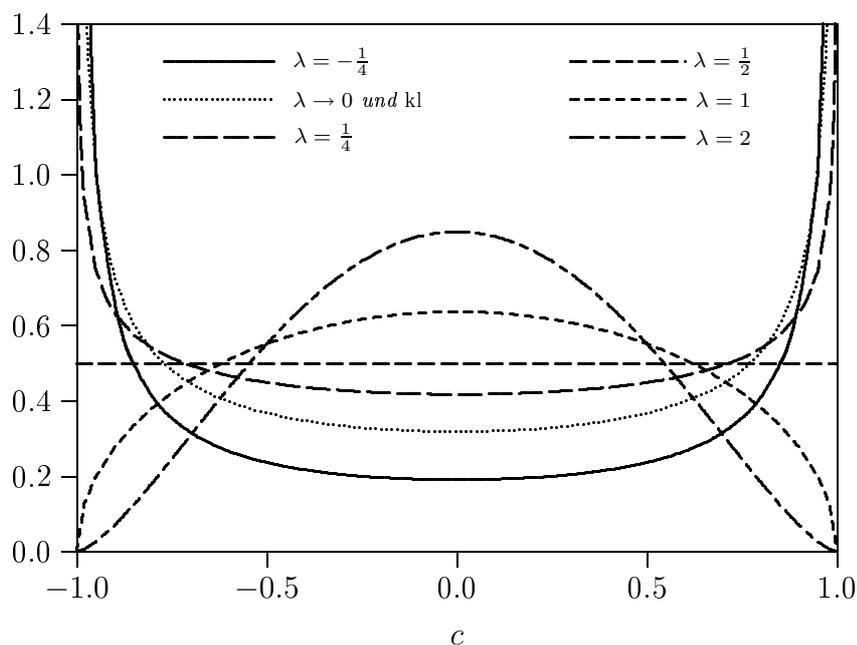


Abbildung 6: Kosinusverteilungen (Sinusverteilungen) $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(C)}(c)$ für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ sowie die Kosinusverteilung (Sinusverteilung) $\mathcal{P}_{\text{kl}}^{(C)}(c)$ für den klassischen Oszillator.

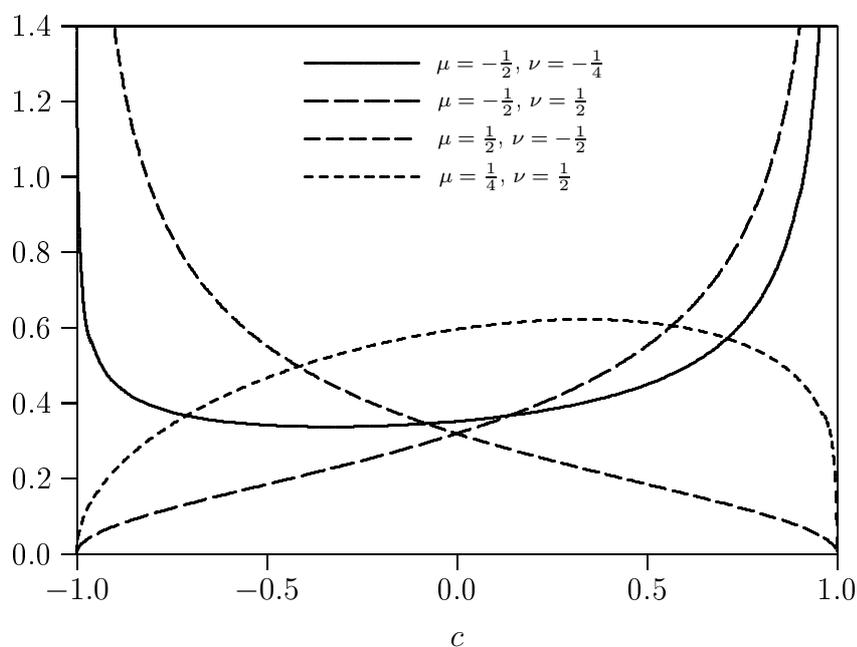


Abbildung 7: Kosinusverteilungen (Sinusverteilungen) $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(C)}(c)$ für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit den Jacobi-Parameterpaaren $(\mu, \nu) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

3.3.2 Kosinus- und Sinusverteilungen für kohärente Zustände

Die Kosinus- und Sinusverteilungen für kohärente Zustände sind gegeben durch

$$\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(C)}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n^{(\alpha)} p_n(c)]^2 + 2 \sum_{n>n'=0}^{\infty} b_n^{(\alpha)} b_{n'}^{(\alpha)} p_n(c) p_{n'}(c) \cos[(n - n')\varphi_\alpha], \quad (105a)$$

$$\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(S)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n^{(\alpha)} p_n(s)]^2 + 2 \sum_{n>n'=0}^{\infty} b_n^{(\alpha)} b_{n'}^{(\alpha)} p_n(s) p_{n'}(s) \cos[(n - n')(\frac{\pi}{2} - \varphi_\alpha)]. \quad (105b)$$

Die Sinusverteilung (105b) ergibt sich formal aus der Kosinusverteilung (105a) durch die Ersetzungen $c \rightarrow s$ und $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\pi}{2}$. Die Abbildung 8 zeigt die Kosinusverteilungen für die kohärenten Zustände $|\alpha = 1\rangle$, $|\alpha = i\rangle$ und $|\alpha = 1 + i\rangle$ im Vergleich mit den Kosinusverteilungen für den Vakuumzustand $|\alpha = 0\rangle$, jeweils mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 1$. Die Sinusverteilungen für die vorgenannten kohärenten Zustände mit den gleichen Parametern sind in der Abbildung 9 dargestellt.

In den Bereichen um die Stellen $\varphi_\alpha = 0$ ($c = 1$), $\varphi_\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c = 0$) und $\varphi_\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c = \frac{1}{\sqrt{2}}$) haben die Kosinusverteilungen für die kohärenten Zustände in der Abbildung 8 mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda > 0$ und $\lambda \rightarrow 0$ erwartungsgemäß ein Maximum. Auch die Sinusverteilungen für die kohärenten Zustände in der Abbildung 9 haben in den Bereichen um die Stellen $\varphi_\alpha = 0$ ($s = 0$), $\varphi_\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($s = 1$) und $\varphi_\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c = \frac{1}{\sqrt{2}}$) mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda > 0$ und $\lambda \rightarrow 0$ das erwartete Maximum. Dagegen bildet sich an diesen Stellen mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda < 0$ ein ungewöhnliches Gefälle. Von einer Verteilung für einen kohärenten Zustand wird erwartet, dass sie sich mit zunehmender Verschiebung $|\alpha|$ den entsprechenden klassischen Resultaten nähert. Die Kosinus- und Sinusverteilungen für die kohärenten Zustände sind ein Indiz dafür, dass die verallgemeinerten Kosinus- und Sinuszustände mit einem nicht-negativen Gegenbauer-Parameter $\lambda > 0$ bzw. $\lambda \rightarrow 0$ als Kosinus- und Sinuszustände geeignet sind.

3.4 Bestimmung der Kosinus- und Sinusoperatoren

In diesem Abschnitt werden Verallgemeinerungen der Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower eingeführt. Dabei werden verallgemeinerte und erweiterte Kosinus- und Sinusoperatoren so definiert, dass deren Eigenzustände die im vorhergehenden Kapitel eingeführten verallgemeinerten bzw. erweiterten Kosinus- und Sinuszustände sind. Die Eigenschaften und Erwartungswerte der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren werden untersucht. Außerdem werden die Kosinus- und Sinusoperatoren mit den Operatoren von Lerner *et al.* [27, 28] verglichen, die ebenfalls eine Verallgemeinerung des Kosinus- und Sinusoperators von Susskind und Glogower sind.

Die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren werden so definiert, dass deren Eigenzustände durch die im Abschnitt 3.2 eingeführten verallgemeinerten und erweiterten Kosinuszustände (91a) und Sinuszustände (91b) gegeben sind

$$\hat{C} |c\rangle = c |c\rangle, \quad -1 \leq c \leq +1, \quad (106a)$$

$$\hat{S} |s\rangle = s |s\rangle, \quad -1 \leq s \leq +1. \quad (106b)$$

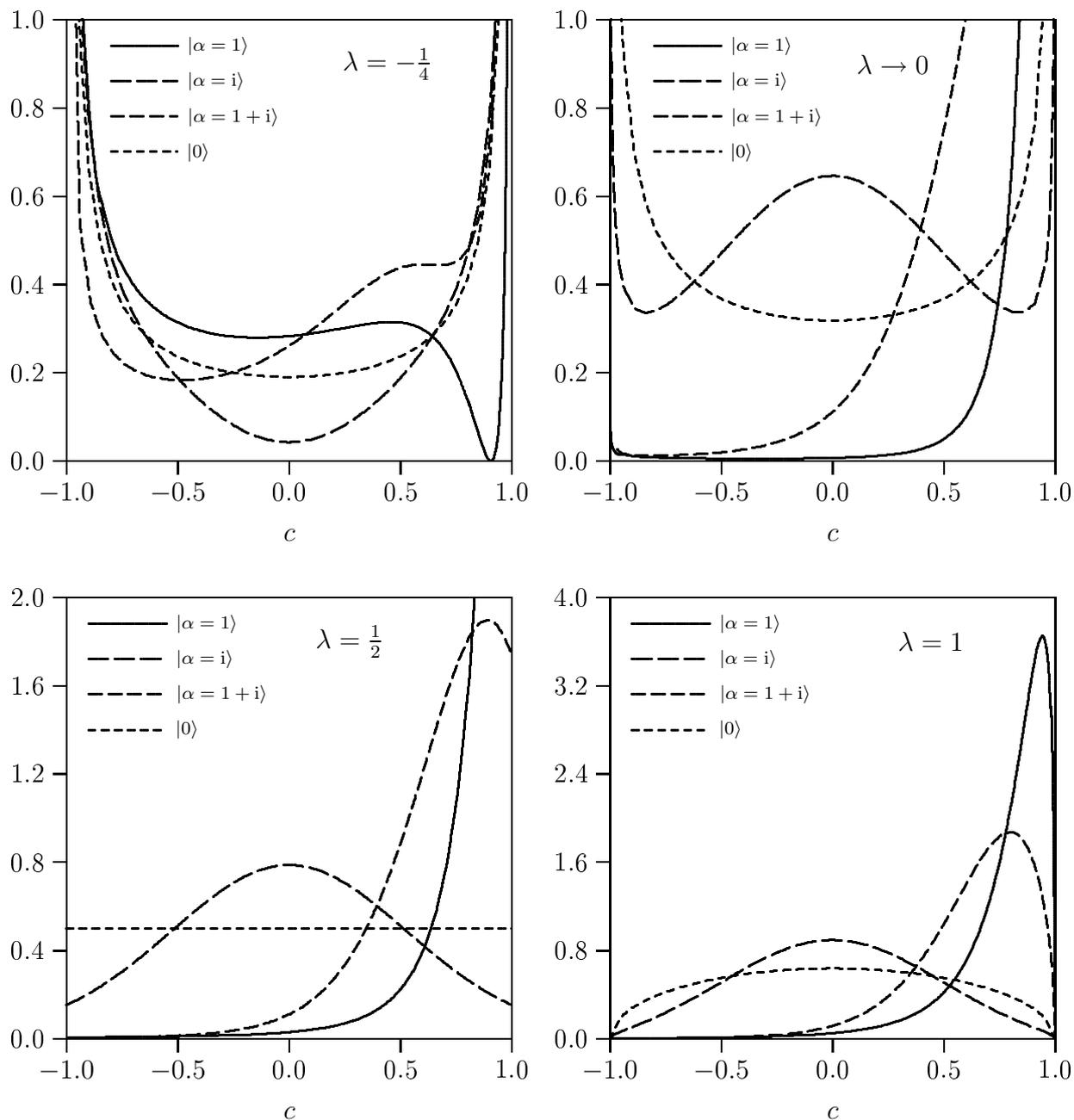


Abbildung 8: Kosinusverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(C)}(c)$ für die kohärenten Zustände $|\alpha = 1\rangle$, $|\alpha = i\rangle$ und $|\alpha = 1 + i\rangle$ sowie die Kosinusverteilungen $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(C)}(c)$ für den Vakuumzustand $|0\rangle$, jeweils mit den Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 1$.

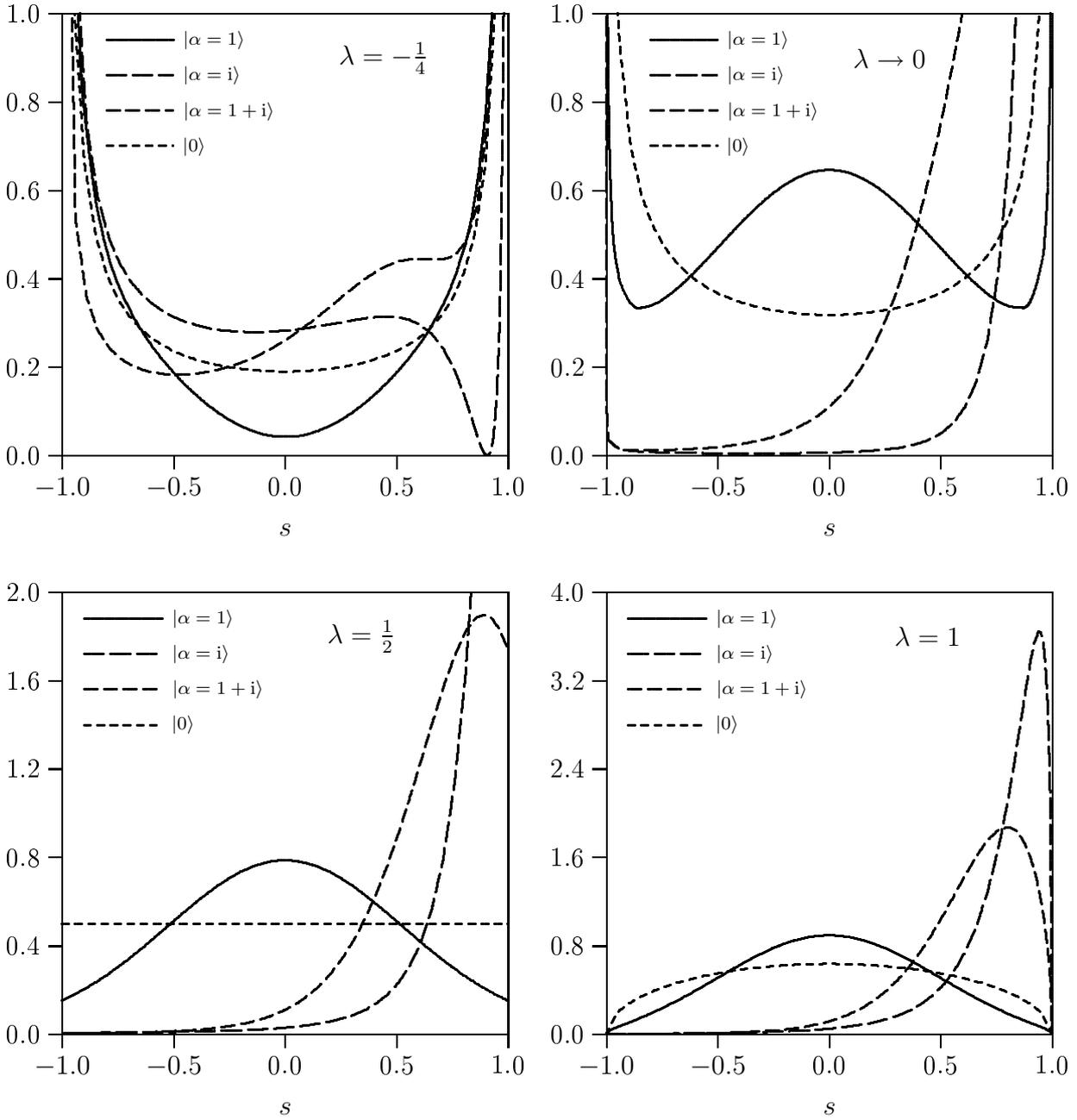


Abbildung 9: Sinusverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(S)}(s)$ für die kohärenten Zustände $|\alpha = 1\rangle$, $|\alpha = i\rangle$ und $|\alpha = 1 + i\rangle$ sowie die Sinusverteilungen $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(S)}(s)$ für den Vakuumzustand $|0\rangle$, jeweils mit den Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 1$.

Die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren müssen so beschaffen sein, dass deren Einsetzen in die Eigenwertgleichungen (106a) bzw. (106b) und die anschließende Projektion auf den Fock-Zustand $\langle n|$ die Rekursionsbeziehungen

$$\frac{f_n}{2} \langle n+1|c\rangle + \frac{f_{n-1}}{2} \langle n-1|c\rangle + g_n \langle n|c\rangle = c \langle n|c\rangle, \quad (107a)$$

$$\frac{f_n}{2i} \langle n+1|s\rangle - \frac{f_{n-1}}{2i} \langle n-1|s\rangle + g_n \langle n|s\rangle = s \langle n|s\rangle \quad (107b)$$

ergeben. Der Vergleich mit der Bestimmung der Eigenzustände der Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower im Abschnitt 2.3 führt auf die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren

$$\hat{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2} \left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle\langle n|, \quad (108a)$$

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2i} \left(|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n| \right) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle\langle n|. \quad (108b)$$

Die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) bestehen jeweils aus zwei nicht-diagonalen Termen, die als Absteige- bzw. Aufsteigeoperatoren wirken. Die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n \neq 0$) haben zusätzlich einen diagonalen Term, der für Kosinus- und Sinusoperatoren ungewöhnlich ist.

Die Eigenzustände der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) weisen die Polynome mit den symmetrischen Gewichtsfunktionen $w(x) = w(-x)$ auf. In diesem Fall gilt für die Polynome auch die definierte Parität (84). Die Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower (27a) und (27b) werden erhalten, indem in (108a) bzw. (108b) die Rekursionskoeffizienten $f_n = 1$ und $g_n = 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gesetzt werden.

Eine weitere Möglichkeit zum Bestimmen der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ist die Berechnung von deren Matrixelementen im Fock-Raum durch Integration über die Kosinus- bzw. Sinuszustände in der Fock-Darstellung

$$\langle n|\hat{C}|n'\rangle = \int_{-1}^{+1} dc \langle n|c\rangle c \langle c|n'\rangle, \quad (109a)$$

$$\langle n|\hat{S}|n'\rangle = \int_{-1}^{+1} ds \langle n|s\rangle s \langle s|n'\rangle. \quad (109b)$$

Dazu ist die Kenntnis der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren (108) nicht erforderlich. Die entsprechenden Kosinus- bzw. Sinuszustände reichen aus, um die Matrixelemente der Operatoren zu berechnen. Die Matrix für den Kosinusoperator in

der Fock-Darstellung ist gegeben durch

$$\left(\langle n|\hat{C}|n'\rangle\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2g_0 & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ f_0 & 2g_1 & f_1 & 0 & \dots \\ 0 & f_1 & 2g_2 & f_2 & \dots \\ 0 & 0 & f_2 & 2g_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

und die Matrix für den Sinusoperator durch

$$\left(\langle n|\hat{S}|n'\rangle\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2g_0 & -if_0 & 0 & 0 & \dots \\ +if_0 & 2g_1 & -if_1 & 0 & \dots \\ 0 & +if_1 & 2g_2 & -if_2 & \dots \\ 0 & 0 & +if_2 & 2g_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Aus den Matrixelementen lassen sich die Fock-Darstellungen für den Kosinusoperator (108a) und für den Sinusoperator (108b) unmittelbar ableiten.

Weiterhin sind die Operatoren (108a) und (108b) auch durch den Absteigeoperator \hat{a} und den Aufsteigeoperator \hat{a}^\dagger sowie durch Funktionen des Photonenzahloperators darstellbar

$$\hat{C} = \frac{f(\hat{N})}{2\sqrt{\hat{N}+1}} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \frac{f(\hat{N})}{2\sqrt{\hat{N}+1}} + g(\hat{N}), \quad (110a)$$

$$\hat{S} = \frac{f(\hat{N})}{2i\sqrt{\hat{N}+1}} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \frac{f(\hat{N})}{2i\sqrt{\hat{N}+1}} + g(\hat{N}). \quad (110b)$$

Dabei hängen die Funktionen $f(\hat{N})$ und $g(\hat{N})$ in derselben Weise vom Photonenzahloperator \hat{N} ab wie die Rekursionskoeffizienten f_n bzw. g_n vom Index n . Der Spezialfall $f(\hat{N}) = 1$ und $g(\hat{N}) = 0$ ergibt den Kosinus- und Sinusoperator von Susskind und Glogower.

3.5 Kosinus- und Sinusoperatoren nach Lerner

In diesem Abschnitt werden die Kosinus- und Sinusoperatoren von Lerner [27, 28] untersucht und mit den verallgemeinerten sowie den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren verglichen. Die Operatoren von Lerner sind ebenfalls eine Verallgemeinerung der Operatoren von Susskind und Glogower und werden als Lerner-Operatoren bezeichnet. Die Lerner-Operatoren sind definiert durch

$$\hat{C}_L = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{n+1} \left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right), \quad (111a)$$

$$\hat{S}_L = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{n+1} \left(|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n| \right), \quad (111b)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\xi_n^2 = 4(1 - \chi_{n-1})\chi_n, \quad (112)$$

wobei

$$0 \leq \chi_0 < 1, \quad 0 < \chi_n < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (113)$$

Die Nebenbedingungen (113) mit (112) sind eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich das Spektrum von \hat{C}_L nicht über das Intervall $[-1, +1]$ hinaus erstreckt. Die Lerner-Operatoren (111a) und (111b) sind durch eine unitäre Transformation [28] miteinander verknüpft

$$\hat{S}_L = e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \hat{C}_L e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}}, \quad \hat{C}_L = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \hat{S}_L e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}}. \quad (114)$$

Folglich befindet sich auch das Spektrum von \hat{S}_L innerhalb des Intervalls $[-1, +1]$.

Die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren (108a) und (108b) werden nun mit den entsprechenden Lerner-Operatoren (111a) bzw. (111b) verglichen. Die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren (108a) und (108b) unterscheiden sich aufgrund $g_n \neq 0$ durch den Diagonalterm von den Lerner-Operatoren (111a) und (111b). Somit existieren keine erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren, die zugleich auch Lerner-Operatoren sind.

Dagegen umfassen die Lerner-Operatoren (111a) und (111b) sämtliche verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$). Da die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren mit den Gegenbauer-Polynomen im Zusammenhang stehen, können sie durch den Gegenbauer-Parameter λ mit $\lambda > -\frac{1}{2}$ und $\lambda \neq 0$ charakterisiert werden. Mit Verwendung der Koeffizienten f_n für die Gegenbauer-Polynome $C_n^{(\lambda)}(x)$ aus der Tabelle 2 und der Beziehung (113) ergibt sich der Zusammenhang zwischen ξ_n und dem Gegenbauer-Parameter λ

$$\xi_n^2 = f_{n-1}^2 = \frac{n(n+2\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}. \quad (115)$$

Der Vergleich des Ausdrucks (115) mit der Nebenbedingung (112) ergibt

$$\chi_n = \frac{1}{2} \frac{n}{n+\lambda} \quad \Rightarrow \quad 0 < \chi_n < 1. \quad (116)$$

Daraus folgt, dass die Nebenbedingungen (113) für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren (108a) und (108b) mit $g_n = 0$ erfüllt werden. Das Spektrum der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ist somit auf das Intervall $[-1, +1]$ beschränkt.

Die Operatoren von Susskind und Glogower (27a) und (27b) sind ein Spezialfall der Lerner-Operatoren (111a) und (111b) mit $\xi_n = 1$ und $\chi_n = \frac{1}{2}$.

Weiterhin können auch der Orts- und Impulsoperator

$$\hat{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right), \quad (117a)$$

$$\hat{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n| \right) \quad (117b)$$

als Spezialfälle der Lerner-Operatoren (111a) und (111b) mit $\xi_n = \sqrt{n+1}$ aufgefasst werden. Jedoch erfüllen die Orts- und Impulsoperatoren erwartungsgemäß nicht die Nebenbedingung (112), da sich deren Spektren über das Intervall $[-\infty, +\infty]$ erstrecken und nicht auf das Intervall $[-1, +1]$ beschränkt sind.

3.6 Eigenschaften der Kosinus- und Sinusoperatoren

In diesem Abschnitt werden Operatorbeziehungen angegeben, welche die Kosinus- und Sinusoperatoren sowie den Photonenzahloperator betreffen. Die Operatorbeziehungen werden für die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n \neq 0$) explizit angegeben. Für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren werden daraus die entsprechenden Operatorbeziehungen erhalten, indem $g_n = 0$ gesetzt wird.

Der quadratische erweiterte Kosinusoperator

$$\begin{aligned} \hat{C}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2) |n\rangle\langle n| + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} (|n\rangle\langle n+2| + |n+2\rangle\langle n|) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|). \end{aligned} \quad (118)$$

und der quadratische erweiterte Sinusoperator

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2) |n\rangle\langle n| - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} (|n\rangle\langle n+2| + |n+2\rangle\langle n|) \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) (|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n|). \end{aligned} \quad (119)$$

umfassen sowohl diagonale als auch nicht-diagonale Matrixelemente. Dies gilt auch für die Summe der quadratischen erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{C}^2 + \hat{S}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2) |n\rangle\langle n| + \frac{1+i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) |n+1\rangle\langle n| \\ &\quad + \frac{1-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) |n\rangle\langle n+1|. \end{aligned} \quad (120)$$

In dem Fall $g_n = 0$ verschwinden die nicht-diagonalen Matrixelemente für $\hat{C}^2 + \hat{S}^2$. Es ist jedoch nicht möglich, die Operatorbeziehung $\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{1}$, die mit der trigonometrischen Beziehung $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ korrespondiert, durch eine geeignete Wahl von f_n und g_n zu erhalten. Es besteht zwar die Möglichkeit, mit den Rekursionskoeffizienten $f_{2n} = \sqrt{2}$, $f_{2n+1} = 0$ und $g_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) das Resultat $\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{1}$ zu erhalten, aber diese erfüllen nicht die Rekursionsbeziehung (89). Die Differenz der quadratischen erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{C}^2 - \hat{S}^2 &= \frac{1-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) |n+1\rangle\langle n| + \frac{1+i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) |n\rangle\langle n+1| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} |n\rangle\langle n+2| + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} |n+2\rangle\langle n| \end{aligned} \quad (121)$$

enthält dagegen keine diagonalen Matrixelemente.

Der Kommutator der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren

$$\begin{aligned}
[\hat{C}, \hat{S}]_- &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 - f_{n-1}^2) |n\rangle \langle n| - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n - g_{n+1}) (|n\rangle \langle n+1| - |n+1\rangle \langle n|) \\
&\quad - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n - g_{n+1}) (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n+1|)
\end{aligned} \tag{122}$$

weist ebenfalls diagonale und nicht-diagonale Matrixelemente auf. Für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) hat der Kommutator dagegen nur diagonale Matrixelemente. Es ist jedoch nicht möglich, durch eine geeignete Wahl der Koeffizienten f_n und g_n die Kommutatorbeziehung $[\hat{C}, \hat{S}]_- = 0$ zu erhalten, die mit der klassischen Poisson-Klammer $\{\cos \theta, \sin \theta\} = 0$ korrespondiert. Auch der Antikommutator der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren

$$\begin{aligned}
[\hat{C}, \hat{S}]_+ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n^2 |n\rangle \langle n| - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} (|n\rangle \langle n+2| - |n+2\rangle \langle n|) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_{n+1} + g_n) (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) \\
&\quad - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_{n+1} + g_n) (|n\rangle \langle n+1| - |n+1\rangle \langle n|)
\end{aligned} \tag{123}$$

hat sowohl diagonale als auch nicht-diagonale Matrixelemente, während der Kommutator der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) nur diagonale Matrixelemente aufweist. Die Kommutatorbeziehungen der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren mit dem Photonenzahloperator

$$[\hat{N}, \hat{C}]_- = -i\hat{S} + i \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|, \quad [\hat{N}, \hat{S}]_- = i\hat{C} - i \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n| \tag{124}$$

korrespondieren nicht mit den entsprechenden klassischen Poisson-Klammern

$$\{H, \cos \theta\} = -\sin \theta, \quad \{H, \sin \theta\} = \cos \theta. \tag{125}$$

Dagegen erfüllen die Kommutatoren (124) der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) dieses Korrespondenzprinzip. Die Kommutatorbeziehungen (124) mit \hat{N} als Hamilton-Operator führen auf die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\hat{C}} + \hat{C} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|, \quad \ddot{\hat{S}} + \hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|. \tag{126}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen für einen verschobenen harmonischen Oszillator mit der Gleichgewichtsposition $\sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|$ in dem Fall $g_n \neq 0$. Dagegen befindet sich in dem Fall $g_n = 0$ die Gleichgewichtsposition im Ursprung. Dies ermöglicht die physikalische Interpretation der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren als Koordinaten für eine normale bzw. verschobene Schwingungsmode.

Die Antikommutatorbeziehungen der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren mit dem Photonenzahloperator sind gegeben durch

$$[\hat{N}, \hat{C}]_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} f_n (|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n|) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n g_n |n\rangle\langle n|, \quad (127)$$

$$[\hat{N}, \hat{S}]_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2i} f_n (|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n|) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n g_n |n\rangle\langle n|. \quad (128)$$

Schließlich werden für die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren noch die folgenden Kommutatorbeziehungen mit dem Photonenzahloperator angegeben

$$\begin{aligned} [\hat{N}, [\hat{C}, \hat{S}]_-]_- &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n - g_{n+1}) [(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \\ &\quad + i (|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n|)], \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{C}^2 + \hat{S}^2]_- &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) [(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \\ &\quad + i (|n\rangle\langle n+1| - |n+1\rangle\langle n|)]. \end{aligned} \quad (130)$$

Für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) verschwinden die Kommutatorbeziehungen (129) und (130).

Die Kosinus- und Sinusoperatoren (108a) und (108b) sind durch die unitären Transformationen miteinander verknüpft

$$\hat{S} = e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \hat{C} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}}, \quad \hat{C} = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \hat{S} e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}}. \quad (131)$$

Diese Transformationen entsprechen einer Drehung im Phasenraum um den Winkel $\frac{\pi}{2}$. Der Photonenzahloperator \hat{N} erzeugt dabei die Drehung.

3.7 Erwartungswerte der Kosinus- und Sinusoperatoren

In diesem Abschnitt werden Erwartungswerte der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren für beliebige quantenmechanische Zustände angegeben. Insbesondere die Erwartungswerte für die Fock-Zustände und für die kohärenten Zustände untersucht.

Der Erwartungswert eines Operators \hat{A} ist auch durch

$$\langle \hat{A} \rangle_{\rho} = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{A}) \quad (132)$$

gegeben, wobei $\hat{\rho}$ der Dichteoperator des Systems ist. Für geeignet definierte Funktionen $F(\hat{C})$ und $F(\hat{S})$ der Operatoren (108a) und (108b), können deren Erwartungswerte auch durch Integration über die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- bzw. Sinusverteilung berechnet werden

$$\langle F(\hat{C}) \rangle_{\rho} = \int_{-1}^{+1} dc F(c) \mathcal{P}_{\rho}^{(C)}(c), \quad \langle F(\hat{S}) \rangle_{\rho} = \int_{-1}^{+1} ds F(s) \mathcal{P}_{\rho}^{(S)}(s). \quad (133)$$

Die Mittelwerte des Kosinus- und Sinusoperators sind gegeben durch

$$\langle \hat{C} \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Re(\rho_{n+1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \rho_{n,n}, \quad (134a)$$

$$\langle \hat{S} \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Im(\rho_{n+1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \rho_{n,n}, \quad (134b)$$

wobei \Re und \Im den Realteil bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl darstellen. Die Mittelwerte der verallgemeinerten ($g_n = 0$) und erweiterten ($g_n \neq 0$) Operatoren unterscheiden sich durch einen additiven Term, der vom Zustand abhängt. Die Erwartungswerte der quadratischen Kosinus- und Sinusoperatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}^2 \rangle_\rho &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2) \rho_{n,n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} \Re(\rho_{n+2,n}) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) \Re(\rho_{n+1,n}), \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}^2 \rangle_\rho &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2) \rho_{n,n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} \Re(\rho_{n+2,n}) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) \Im(\rho_{n+1,n}), \end{aligned} \quad (136)$$

wobei $f_{-1} = 0$. Mit (134a) und (135) bzw. (134b) und (136) lassen sich insbesondere die Schwankungsquadrate der Kosinus- und Sinusoperatoren bestimmen

$$\sigma_{CC}^\rho = \langle \hat{C}^2 \rangle_\rho - \langle \hat{C} \rangle_\rho^2, \quad \sigma_{SS}^\rho = \langle \hat{S}^2 \rangle_\rho - \langle \hat{S} \rangle_\rho^2. \quad (137)$$

Für die Summe und Differenz der quadratischen Kosinus- und Sinusoperatoren sind die Erwartungswerte gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}^2 + \hat{S}^2 \rangle_\rho &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2) \rho_{n,n} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) + \Im(\rho_{n+1,n})], \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}^2 - \hat{S}^2 \rangle_\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} \Re(\rho_{n+2,n}) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) - \Im(\rho_{n+1,n})], \end{aligned} \quad (139)$$

wobei $f_{-1} = 0$. Die Erwartungswerte von Funktionen gemischter Terme sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}\hat{S} - \hat{S}\hat{C} \rangle_\rho &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 - f_{n-1}^2) \rho_{n,n} \\ &\quad - i \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n - g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) + \Im(\rho_{n+1,n})], \end{aligned} \quad (140a)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}\hat{S} + \hat{S}\hat{C} \rangle_\rho &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n^2 \rho_{n,n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} \Im(\rho_{n+2,n}) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n - g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) + \Im(\rho_{n+1,n})], \end{aligned} \quad (140b)$$

wobei $f_{-1} = 0$. Die Gleichung (140a) entspricht dem Erwartungswert des Kommutators der Kosinus- und Sinusoperatoren. Die Gleichung (140b) kann insbesondere für die quantenmechanische Korrelation der Kosinus- und Sinusoperatoren verwendet werden

$$\sigma_{CS}^\rho = \frac{1}{2} \langle \hat{C}\hat{S} + \hat{S}\hat{C} \rangle_\rho - \langle \hat{C} \rangle_\rho \langle \hat{S} \rangle_\rho. \quad (141)$$

Die Erwartungswerte von Kommutatorbeziehungen der Kosinus- und Sinusoperatoren mit dem Photonenzahloperator sind gegeben durch

$$\langle [\hat{N}, \hat{C}]_- \rangle_\rho = -i \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Im(\rho_{n+1,n}), \quad (142a)$$

$$\langle [\hat{N}, \hat{S}]_- \rangle_\rho = i \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Re(\rho_{n+1,n}), \quad (142b)$$

$$\langle [\hat{N}, [\hat{C}, \hat{S}]_-]_- \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n - g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) - \Im(\rho_{n+1,n})], \quad (142c)$$

$$\langle [\hat{N}, \hat{C}^2 + \hat{S}^2]_- \rangle_\rho = i \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n + g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) - \Im(\rho_{n+1,n})]. \quad (142d)$$

Die in diesem Abschnitt untersuchten Erwartungswerte enthalten ausschließlich die benachbarten Dichtmatrizelemente $\rho_{n,n}$, $\rho_{n+1,n}$ und $\rho_{n+2,n}$. Dies ergibt sich aus der tridiagonalen Struktur der Kosinus- und Sinusoperatoren sowie aus der Tatsache, dass die Terme in den obigen Erwartungswerten meist quadratische oder zwei gemischte Operatoren enthalten.

Auch die Unschärfebeziehung zwischen dem erweiterten Kosinus- und Sinusoperator

$$\sigma_{CC}^\rho \sigma_{SS}^\rho \geq \frac{1}{16} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[(f_n^2 - f_{n-1}^2) \rho_{n,n} - 2f_n (g_n - g_{n+1}) [\Re(\rho_{n+1,n}) - \Im(\rho_{n+1,n})] \right] \right)^2 \quad (143)$$

enthält sowohl Diagonalelemente $\rho_{n,n}$ als auch Nebendiagonalelemente $\rho_{n+1,n}$ der Dichtematrix. Für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren treten in der Unschärfebeziehung (143) sämtliche Diagonalelemente $\rho_{n,n}$ der Dichtematrix auf, während bei den Operatoren von Susskind und Glogower die rechte Seite in (143) nur das Vakuumelement

$\rho_{0,0}$ der Dichtematrix enthält. Die Unschärfebeziehungen zwischen dem Photonenzahloperator einerseits und dem erweiterten Kosinus- bzw. Sinusoperator andererseits

$$\sigma_{NN}^\rho \sigma_{CC}^\rho \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Im(\rho_{n+1,n}) \right)^2, \quad \sigma_{NN}^\rho \sigma_{SS}^\rho \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Re(\rho_{n+1,n}) \right)^2 \quad (144)$$

sind unabhängig von g_n und den Diagonalelementen $\rho_{n,n}$ der Dichtematrix. Die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (144) enthalten stets die Mittelwerte des verallgemeinerten Sinus- bzw. Kosinusoperators.

3.7.1 Erwartungswerte der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren für Fock-Zustände

Für die Fock-Zustände $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ entsprechen die Mittelwerte der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren

$$\langle n|\hat{C}|n\rangle = \langle n|\hat{S}|n\rangle = g_n, \quad (145)$$

dem Rekursionskoeffizienten g_n , während die Mittelwerte der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren verschwinden. Dies sind auch die erwarteten Resultate für den normalen bzw. verschobenen Oszillator. Für hohe Werte von n geht der Rekursionskoeffizient g_n gegen Null.

Die Schwankungsquadrate der Kosinus- und Sinusoperatoren für die Fock-Zustände sind sowohl für die verallgemeinerten als auch für die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren identisch und hängen von dem Rekursionskoeffizienten f_n ab

$$\sigma_{CC}^{[n]} = \sigma_{SS}^{[n]} = \frac{1}{4}(f_n^2 + f_{n-1}^2). \quad (146)$$

Auch für die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren sind die Schwankungsquadrate unabhängig von dem Rekursionskoeffizienten g_n . Für große n gehen die Schwankungsquadrate gegen den klassischen Wert $\frac{1}{2}$.

Die quantenmechanische Korrelation zwischen den Kosinus- und Sinusoperatoren für Fock-Zustände $\sigma_{CS}^{[n]} = 0$ verschwindet sowohl für die verallgemeinerten als auch für die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren.

Die Erwartungswerte im Fock-Raum für den Kommutator der Kosinus- und Sinusoperatoren sind gegeben durch

$$\langle n|[\hat{C}, \hat{S}]_-|n\rangle = \frac{i}{2}(f_n^2 - f_{n-1}^2). \quad (147)$$

Für große n verschwindet der Kommutator (147) und korrespondiert dann mit der entsprechenden klassischen Poisson-Klammer. Die Kommutatoren der Kosinus- und Sinusoperatoren mit dem Photonenzahloperator sowie die entsprechenden quantenmechanischen Korrelationen verschwinden für alle Fock-Zustände

$$\langle n|[\hat{N}, \hat{C}]_-|n\rangle = \langle n|[\hat{N}, \hat{S}]_-|n\rangle = 0, \quad \sigma_{NC}^{[n]} = \sigma_{NS}^{[n]} = 0. \quad (148)$$

Die Erwartungswerte der trigonometrischen Beziehung für Fock-Zustände sind gegeben durch

$$\langle n | \hat{C}^2 + \hat{S}^2 | n \rangle = \frac{1}{2}(f_n^2 + f_{n-1}^2 + 4g_n^2). \quad (149)$$

Bei den verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) entsprechen die Erwartungswerte (149) den doppelten Schwankungsquadraten $\langle n | \hat{C}^2 + \hat{S}^2 | n \rangle = 2\sigma_{CC}^{(n)} = 2\sigma_{SS}^{(n)}$. Für große n gehen die Erwartungswerte der trigonometrischen Beziehung (149) gegen den klassischen Wert Eins.

Die Abbildung 10 zeigt die Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ als Funktion des Gegenbauer-Parameters λ . Bei den niedrigeren Fock-Zuständen ist der Einfluss des Parameters λ auf die Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ größer als bei den höheren Fock-Zuständen.

In dem Fall $\lambda = 1$, der den Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower entspricht, haben die Schwankungsquadrate für alle angeregten Fock-Zustände $|1\rangle, |2\rangle, \dots$ den gleichen Wert, nämlich $\sigma_{CC}^{(n)} = \sigma_{SS}^{(n)} = \frac{1}{2}$, und für den Vakuum-Zustand $|0\rangle$ den Wert $\sigma_{CC}^{(n)} = \sigma_{SS}^{(n)} = \frac{1}{4}$.

In dem Fall $\lambda \rightarrow 0$, der den Chebyshev-Polynomen erster Art entspricht, haben die Schwankungsquadrate für alle Fock-Zustände außer dem ersten angeregten Fock-Zustand $|1\rangle$ ebenfalls den gleichen Wert, nämlich $\sigma_{CC}^{(n)} = \sigma_{SS}^{(n)} = \frac{1}{2}$, und für den ersten angeregten Fock-Zustand $|1\rangle$ den Wert $\sigma_{CC}^{(n)} = \sigma_{SS}^{(n)} = \frac{3}{4}$. In allen anderen Fällen $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq 1$ haben die Schwankungsquadrate für unterschiedliche Fock-Zustände bei einem festgehaltenen λ verschiedene Werte.

In dem Bereich $\lambda > 1$ sind die Schwankungsquadrate für alle Fock-Zustände stets kleiner als $\frac{1}{2}$. Bei einem festgehaltenen λ in dem Bereich $\lambda > 1$ nehmen die Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ mit zunehmenden n zu. Für sehr große λ gehen die Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ gegen Null.

Die Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ für den zweiten angeregten Fock-Zustand $|2\rangle$ und höhere Fock-Zustände haben ein Maximum in dem Bereich $0 < \lambda < 1$, wobei das Maximum für große n gegen $\frac{1}{2}$ geht. Für diese Zustände liegt der Wert der Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ in dem Bereich $0 < \lambda < 1$ oberhalb von $\frac{1}{2}$ und in dem Bereich $\lambda < 0$ unterhalb von $\frac{1}{2}$. Ist der Wert der Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ größer als $\frac{1}{2}$, so sind auch die Erwartungswerte der trigonometrischen Beziehung $\langle n | \hat{C}^2 + \hat{S}^2 | n \rangle$ größer als 1. Ist dagegen der Wert der Schwankungsquadrate $\sigma_{CC}^{(n)}$ und $\sigma_{SS}^{(n)}$ kleiner als $\frac{1}{2}$, so sind auch die Erwartungswerte der trigonometrischen Beziehung $\langle n | \hat{C}^2 + \hat{S}^2 | n \rangle$ kleiner als 1.

3.7.2 Erwartungswerte der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren für kohärente Zustände

Für die kohärenten Zustände (10) sind die Mittelwerte der Kosinus- und Sinusoperatoren gegeben durch

$$\langle \alpha | \hat{C} | \alpha \rangle = F_1 \cos \varphi_\alpha + G_1, \quad \langle \alpha | \hat{S} | \alpha \rangle = F_1 \sin \varphi_\alpha + G_1. \quad (150)$$

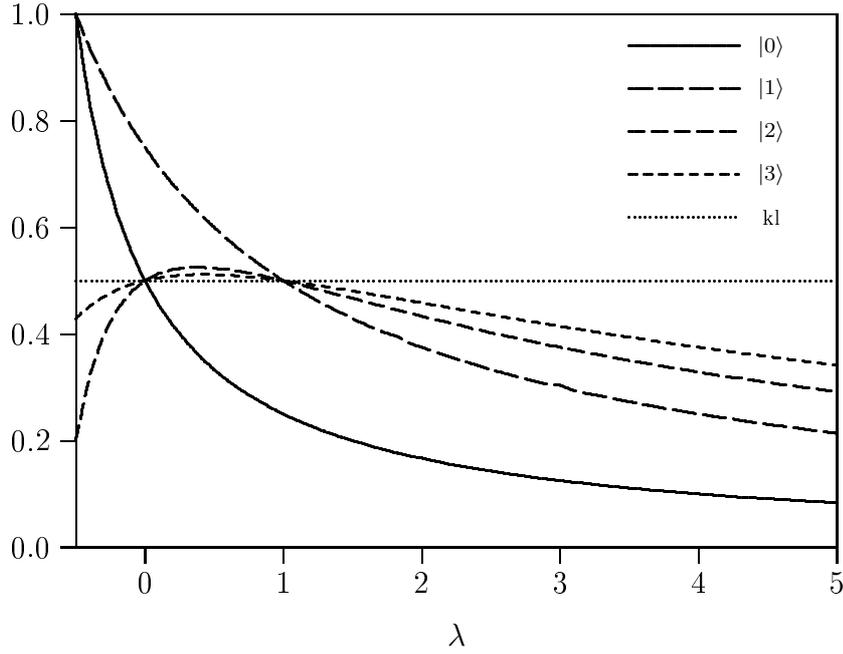


Abbildung 10: Schwankungsquadrate des Kosinusoperators $\sigma_{CC}^{|\alpha\rangle}$ und des Sinusoperators $\sigma_{SS}^{|\alpha\rangle}$ für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ als Funktion von λ im Vergleich mit dem klassischen Wert $\frac{1}{2}$.

Deren Schwankungsquadrate und quantenmechanische Korrelation sind:

$$\sigma_{CC}^{|\alpha\rangle} = (F_2 - F_1^2) \cos^2 \varphi_\alpha + \frac{F_+ - F_2}{2} + (G_+ - 2F_1G_1) \cos \varphi_\alpha + G_2 - G_1^2, \quad (151a)$$

$$\sigma_{SS}^{|\alpha\rangle} = (F_2 - F_1^2) \sin^2 \varphi_\alpha + \frac{F_+ - F_2}{2} + (G_+ - 2F_1G_1) \sin \varphi_\alpha + G_2 - G_1^2, \quad (151b)$$

$$\sigma_{CS}^{|\alpha\rangle} = (F_2 - F_1^2) \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha + \frac{G_+ - 2F_1G_1}{2} (\cos \varphi_\alpha + \sin \varphi_\alpha) + G_2 - G_1^2. \quad (151c)$$

Die darin verwendeten Abkürzungen F_1 , F_2 und F_\pm sind sowohl für die verallgemeinerten als auch für die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren relevant

$$F_1(|\alpha\rangle) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n! \sqrt{n+1}}, \quad (152)$$

$$F_2(|\alpha\rangle) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n f_{n+1} \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{n! \sqrt{(n+1)(n+2)}}, \quad (153)$$

$$F_\pm(|\alpha\rangle) = \frac{1}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 \pm f_{n-1}^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (154)$$

Die weiteren Abkürzungen G_1 , G_2 und G_\pm verschwinden für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren und sind somit ausschließlich für die erweiterten Kosinus- und Sinus-

operatoren von Bedeutung

$$G_1(|\alpha|) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (155)$$

$$G_2(|\alpha|) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n^2 \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (156)$$

$$G_{\pm}(|\alpha|) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (g_n \pm g_{n+1}) \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n! \sqrt{n+1}}. \quad (157)$$

In dem klassischen Grenzfall $|\alpha| \rightarrow \infty$ gehen die Mittelwerte (150) der Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$)

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \langle \alpha | \hat{C} | \alpha \rangle = \cos \varphi_{\alpha}, \quad \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \langle \alpha | \hat{S} | \alpha \rangle = \sin \varphi_{\alpha} \quad (158)$$

gegen den Wert der Kosinus- bzw. Sinusfunktion der Verschiebungsrichtung φ_{α} , da in diesem Grenzfall $F_1(|\alpha|) \rightarrow 1$ und $G_1(|\alpha|) \rightarrow 0$. Für die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) ist der Ausdruck $F_1(|\alpha|)$ ein Faktor, der den quantenmechanischen mit dem entsprechenden klassischen Erwartungswert verknüpft. Die Mittelwerte der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n \neq 0$) sind gegenüber denen der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) um den Wert der Funktion $G_1(|\alpha|)$ verschoben.

Weitere Erwartungswerte für kohärente Zustände sind gegeben durch

$$\langle \alpha | [\hat{C}, \hat{S}]_- | \alpha \rangle = i [F_- - G_-(\cos \varphi_{\alpha} + \sin \varphi_{\alpha})], \quad (159)$$

$$\langle \alpha | \hat{C}^2 + \hat{S}^2 | \alpha \rangle = F_+ + 2G_2 + G_+(\cos \varphi_{\alpha} + \sin \varphi_{\alpha}), \quad (160)$$

$$\langle \alpha | [\hat{N}, \hat{C}]_- | \alpha \rangle = -i F_1 \sin \varphi_{\alpha}, \quad (161)$$

$$\langle \alpha | [\hat{N}, \hat{S}]_- | \alpha \rangle = i F_1 \cos \varphi_{\alpha}. \quad (162)$$

Die rechte Seite der Kommutatoren (161) und (162) enthält den Mittelwert (150) des verallgemeinerten Sinus- bzw. Kosinusoperators. Somit korrespondieren die Kommutatoren (161) und (162) der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) für alle $|\alpha|$ und die der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n \neq 0$) erst im klassischen Grenzfall $|\alpha| \rightarrow \infty$ mit den entsprechenden klassischen Poisson-Klammern (24).

Die Abbildung 11 zeigt den Ausdruck $F_1(|\alpha|)$ als Funktion der Verschiebungsintensität $|\alpha|$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$. Der Ausdruck $F_1(|\alpha|)$ ist der Quotient zwischen den quantenmechanischen Mittelwerten der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren und deren klassischen Grenzwerten. Die Abbildung 11 verdeutlicht, wie sich die quantenmechanischen Mittelwerte mit zunehmender Verschiebungsintensität $|\alpha|$ den entsprechenden klassischen Grenzwerten nähern. Die quantenmechanischen Erwartungswerte verschwinden im Vakuumzustand ($|\alpha| = 0$) und gehen mit zunehmender Verschiebungsintensität $|\alpha|$ gegen den klassischen Grenzwert.

Bei den positiven Gegenbauer-Parametern $\lambda > 0$ sind die Funktionen bezüglich $|\alpha|$ streng monoton steigend. Bei den Funktionen mit negativem Parameter $\lambda < 0$ ist dies nicht der

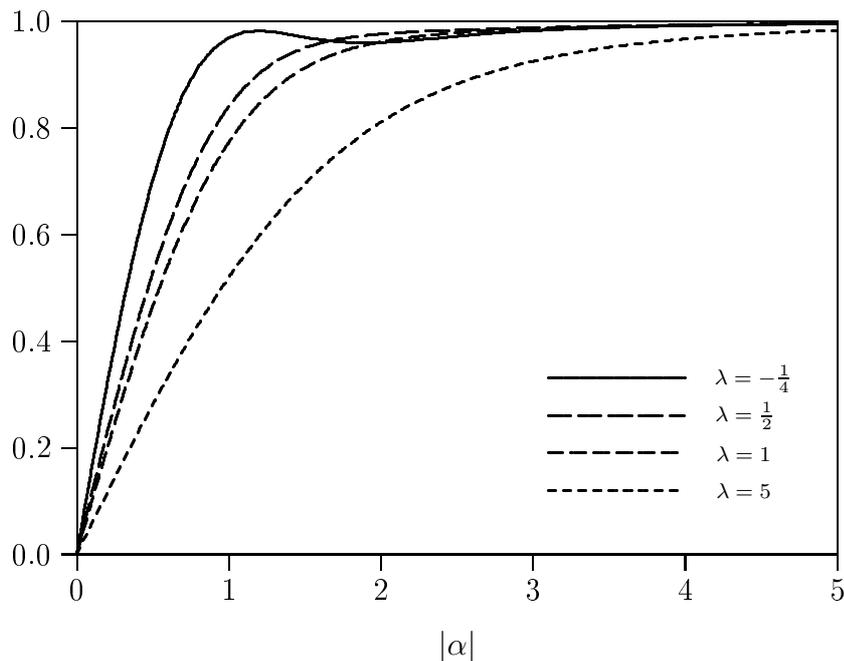


Abbildung 11: $F_1(|\alpha|)$ als Funktionen der Verschiebungsintensität $|\alpha|$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$.

Fall. Wie das Beispiel für $\lambda = -\frac{1}{4}$ zeigt, nimmt die Funktion zunächst mit steigendem $|\alpha|$ zu, weist ein Maximum und anschließend ein Minimum auf, und geht schließlich gegen die Eins. Bei den positiven Gegenbauer-Parametern λ nähert sich die Funktion $F_1(|\alpha|)$ mit niedrigeren λ -Werten schneller dem klassischen Grenzfall als die Funktion $F_1(|\alpha|)$ mit höheren λ -Werten.

Je höher die Gegenbauer-Parameter λ sind, umso größer ist die Abweichung zwischen korrespondierenden quantenmechanischen und klassischen Erwartungswerten. Dies wird insbesondere bei den kohärenten Zuständen deutlich. Für große positive λ ist ein relativ hoher Verschiebungsparameter $|\alpha|$ erforderlich, damit die Abweichung zwischen den quantenmechanischen und klassischen Erwartungswerten sehr klein wird. Für kleine positive Parameter λ reicht dagegen ein relativ niedriger Verschiebungsparameter $|\alpha|$ aus, damit sich die quantenmechanischen Erwartungswerte den klassischen Erwartungswerten nähern.

4 Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren

In diesem Kapitel werden hermitesche Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren eingeführt, die mit den verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren im Zusammenhang stehen. Die Eigenzustände der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren werden untersucht und als Basis für die Darstellung beliebiger Zustände verwendet. Außerdem werden Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen für Fock-Zustände und kohärente Zustände angegeben.

4.1 Definition der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren

Die Arcuskosinus- und die Arcussinusfunktion sind als Potenzreihen der Kosinus- bzw. Sinusfunktion entwickelbar. Da der Konvergenzradius dieser Potenzreihen mit den Eigenwertspektren der Kosinus- und Sinusoperatoren übereinstimmt, sind die Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren durch Potenzreihen der Kosinus- bzw. Sinusoperatoren (108a) und (108b) darstellbar

$$\hat{\theta}_c = \arccos \hat{C} = \frac{\pi}{2} \hat{1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \hat{C}^{2k+1} \quad (163a)$$

$$\hat{\theta}_s = \arcsin \hat{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \hat{S}^{2k+1}. \quad (163b)$$

Die Kombination der Gleichungen (163a) und (163b) zeigt, dass zwischen der Arcuskosinus- und Arcussinusfunktion der trigonometrischen Operatoren die Beziehungen

$$\arccos \hat{C} = \frac{\pi}{2} \hat{1} - \arcsin \hat{C}, \quad (164)$$

$$\arccos \hat{S} = \frac{\pi}{2} \hat{1} - \arcsin \hat{S}, \quad (165)$$

bestehen, die mit der klassischen Beziehung $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ übereinstimmen.

Sowohl die verallgemeinerten als auch die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren sind geeignet, um entsprechende Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren zu definieren. Die Eigenwertspektren der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren gehen nicht über die Konvergenzradien $-1 \leq c \leq +1$ und $-1 \leq s \leq +1$ der Reihen in (163) hinaus.

Die beiden Arcusoperatoren $\hat{\theta}_c$ und $\hat{\theta}_s$ kommutieren zwar nicht miteinander, aber jeweils mit dem korrespondierenden trigonometrischen Operator \hat{C} bzw. \hat{S}

$$[\hat{\theta}_c, \hat{C}]_- = 0, \quad [\hat{\theta}_s, \hat{S}]_- = 0. \quad (166)$$

Daraus folgt, dass die Kosinus- und Sinuszustände $|c\rangle$ und $|s\rangle$ ebenfalls Eigenzustände von $\hat{\theta}_c$ bzw. $\hat{\theta}_s$ mit den Eigenwerten $\arccos c$ bzw. $\arcsin s$ sind

$$\hat{\theta}_c |c\rangle = \arccos c |c\rangle, \quad \hat{\theta}_s |s\rangle = \arcsin s |s\rangle. \quad (167)$$

Werden $c = \cos \theta_c$ und $s = \sin \theta_s$ gesetzt und die Hauptwertbereiche gemäß

$$0 \leq \theta_c \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_s \leq +\frac{\pi}{2}, \quad (168)$$

gewählt, dann sind die Zustände

$$|\theta_c\rangle \equiv \sqrt{\sin \theta_c} \left[|c\rangle \right]_{c=\cos \theta_c} = \sqrt{\sin \theta_c} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\cos \theta_c) |n\rangle, \quad (169a)$$

$$|\theta_s\rangle \equiv \sqrt{\cos \theta_s} \left[|s\rangle \right]_{s=\sin \theta_s} = \sqrt{\cos \theta_s} \sum_{n=0}^{\infty} i^n p_n(\sin \theta_s) |n\rangle \quad (169b)$$

die Eigenzustände der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren $\hat{\Theta}_c$ und $\hat{\Theta}_s$ mit den Eigenwerten θ_c bzw. θ_s

$$\hat{\Theta}_c |\theta_c\rangle = \theta_c |\theta_c\rangle, \quad \hat{\Theta}_s |\theta_s\rangle = \theta_s |\theta_s\rangle, \quad (170)$$

wobei die Eigenwerte durch $\theta_c = \arccos(c)$ und $\theta_s = \arcsin(s)$ gegeben sind. Die Zustände (169a) und (169b) werden als Arcuskosinus- bzw. Arcussinuszustände bezeichnet. Außerdem sind die Arcuskosinus- und Arcussinuszustände (169a) und (169b) auch die Eigenzustände der trigonometrischen Operatoren \hat{C} und \hat{S} mit den Eigenwerten $\cos \theta_c$ bzw. $\sin \theta_s$

$$\hat{C} |\theta_c\rangle = \cos \theta_c |\theta_c\rangle, \quad \hat{S} |\theta_s\rangle = \sin \theta_s |\theta_s\rangle. \quad (171)$$

Die Arcuskosinus- und Arcussinuszustände (169a) und (169b) sind vollständig

$$\langle \theta_c | \theta'_c \rangle = \delta(\theta_c - \theta'_c), \quad \langle \theta_s | \theta'_s \rangle = \delta(\theta_s - \theta'_s), \quad (172)$$

und ermöglichen Darstellungen des Einheitsoperators

$$\int_0^{\pi} d\theta_c |\theta_c\rangle \langle \theta_c| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s |\theta_s\rangle \langle \theta_s| = \hat{1}. \quad (173)$$

Somit können die Arcuskosinus- und Arcussinuszustände (169a) und (169b) auch zur Darstellung eines beliebigen normierten Zustands $|\psi\rangle$ verwendet werden

$$\psi^{(\Theta_c)}(\theta_c) \equiv \langle \theta_c | \psi \rangle = \sqrt{\sin \theta_c} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\cos \theta_c) \psi_n, \quad (174a)$$

$$\psi^{(\Theta_s)}(\theta_s) \equiv \langle \theta_s | \psi \rangle = \sqrt{\cos \theta_s} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n p_n(\sin \theta_s) \psi_n. \quad (174b)$$

Der Arcuskosinusoperator $\hat{\Theta}_c$ und der Arcussinusoperator $\hat{\Theta}_s$ sind durch eine unitäre Transformation miteinander verknüpft

$$\hat{\Theta}_s = e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \left[\frac{\pi}{2}\hat{1} - \hat{\Theta}_c \right] e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}}, \quad \hat{\Theta}_c = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} \left[\frac{\pi}{2}\hat{1} - \hat{\Theta}_s \right] e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}}. \quad (175)$$

Dies ergibt sich aus den Transformationsbeziehungen (131) zwischen dem Kosinusoperator und dem Sinusoperator. Während die trigonometrischen Operatoren direkt unitär transformierbar sind, ergibt die Transformation der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren $\hat{\Theta}_c$

und $\hat{\Theta}_s$ die Ausdrücke $\frac{\pi}{2}\hat{1} - \hat{\Theta}_s$ bzw. $\frac{\pi}{2}\hat{1} - \hat{\Theta}_c$. Auch die Eigenzustände des Arcuskosinus- und Arcussinusoperators sind durch eine unitäre Transformation verknüpft

$$|\theta_s\rangle = \left[e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{N}} |\theta_c\rangle \right]_{\theta_c=\frac{\pi}{2}-\theta_s}, \quad |\theta_c\rangle = \left[e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} |\theta_s\rangle \right]_{\theta_s=\frac{\pi}{2}-\theta_c}. \quad (176)$$

Diejenigen Arcuskosinus- und Arcussinuszustände, die mit dem Kosinus- bzw. mit dem Sinusoperator von Susskind und Glogower im Zusammenhang stehen, haben eine besonders einfache Form [13]

$$\begin{aligned} |\theta_c\rangle_{\text{SG}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(n+1)\theta_c] |n\rangle, \\ |\theta_s\rangle_{\text{SG}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sin[(n+1)(\frac{\pi}{2} - \theta_s)] |n\rangle, \end{aligned}$$

da die Chebyshev-Polynome zweiter Art gemäß Gleichung (38) mit der Sinusfunktion darstellbar sind.

4.2 Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen

Die Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen für ein System mit dem Dichteoperator $\hat{\rho}$ sind durch die Kosinus- und Sinusverteilungen (102) darstellbar

$$\mathcal{P}_{\rho}^{(\Theta_c)}(\theta_c) = \sin \theta_c [\mathcal{P}_{\rho}^{(C)}(c)]_{c=\cos \theta_c}, \quad (177a)$$

$$\mathcal{P}_{\rho}^{(\Theta_s)}(\theta_s) = \cos \theta_s [\mathcal{P}_{\rho}^{(S)}(s)]_{s=\sin \theta_s}. \quad (177b)$$

Die stets positiven Vorfaktoren ergeben sich aus der Transformation von c und s nach θ_c bzw. θ_s . Die Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen sind auf Eins normiert. Für geeignete Funktionen $F(\hat{\Theta}_c)$ und $F(\hat{\Theta}_s)$ der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren (163a) und (163b) können deren Erwartungswerte mit der entsprechenden Arcuskosinus- bzw. Arcussinusverteilung bestimmt werden

$$\langle F(\hat{\Theta}_c) \rangle_{\rho} = \int_0^{\pi} d\theta_c F(\theta_c) \mathcal{P}_{\rho}^{(\Theta_c)}(\theta_c) = \int_{-1}^{+1} dc F(\arccos c) \mathcal{P}_{\rho}^{(C)}(c), \quad (178a)$$

$$\langle F(\hat{\Theta}_s) \rangle_{\rho} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta_s F(\theta_s) \mathcal{P}_{\rho}^{(\Theta_s)}(\theta_s) = \int_{-1}^{+1} ds F(\arcsin s) \mathcal{P}_{\rho}^{(S)}(s). \quad (178b)$$

Auch die Kosinus- und Sinusverteilungen können zur Bestimmung der Erwartungswerte von Funktionen $F(\hat{\Theta}_c)$ und $F(\hat{\Theta}_s)$ der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren (163a) und (163b) verwendet werden.

4.2.1 Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen für Fock-Zustände

Die Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen für Fock-Zustände $|n\rangle$ sind mit den orthonormierten Funktionen darstellbar

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c) = \sin \theta_c p_n^2(\cos \theta_c), \quad \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\Theta_s)}(\theta_s) = \cos \theta_s p_n^2(\sin \theta_s). \quad (179)$$

Aufgrund der Transformationsbeziehungen (176) gehen die Arcussinusverteilungen für Fock-Zustände $|n\rangle$ durch die Substitution $\theta_c = \frac{\pi}{2} - \theta_s$ aus den entsprechenden Arcuskosinusverteilungen hervor.

Die Arcuskosinusverteilungen für Fock-Zustände, die mit den Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower im Zusammenhang stehen, haben eine besonders einfache Form

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c) = \frac{2}{\pi} \sin^2[(n+1)\theta_c], \quad \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\Theta_s)}(\theta_s) = \frac{2}{\pi} \sin^2[(n+1)(\frac{\pi}{2} - \theta_s)]. \quad (180)$$

Dabei ist die orthonormierte Funktion in (179) die Gegenbauer-Funktion mit $\lambda = 1$ oder die Chebyshev-Funktion zweiter Art.

Die Abbildung 12 zeigt die Arcuskosinusverteilungen, die mit den Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower im Zusammenhang stehen, für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ im Intervall zwischen $0 \leq \theta_c \leq \pi$. Die entsprechenden Arcussinusverteilungen sind explizit nicht dargestellt. Diese sind im Intervall zwischen $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_s \leq +\frac{\pi}{2}$ definiert und weisen die gleichen Konturen auf. Die Arcuskosinusverteilungen oszillieren zwischen den Werten 0 und $\frac{2}{\pi}$ und die Anzahl der Peaks beträgt $n+1$. Außerdem verschwinden die Arcuskosinusverteilungen an den Endpunkten $\theta_c = 0$ und $\theta_c = \pi$ und weisen n Minima auf, die Nullstellen sind.

Im Gegensatz dazu sind die bekannten Phasenverteilungen nach Pegg-Barnett, Wigner und Hussimi für sämtliche Fock-Zustände stets Gleichverteilungen [16]

$$\mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{PB})}(\theta) = \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{W})}(\theta) = \mathcal{P}_{|n\rangle}^{(\text{Q})}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (181)$$

in einem Intervall der Breite 2π . Jedoch handelt es sich bei den Verteilungen (177a) und (177b) um keine echten Phasenverteilungen, da deren Definitionsbereiche lediglich die Breite π aufweisen.

Bei den Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren, die aus den verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren hervorgehen, sind die Mittelwerte für die Fock-Zustände unabhängig von der Anregung n und von dem Gegenbauer-Parameter λ

$$\langle n | \hat{\Theta}_c | n \rangle = \frac{\pi}{2}, \quad \langle n | \hat{\Theta}_s | n \rangle = 0 \quad (182)$$

Die Mittelwerte sind stets das Zentrum des entsprechenden Intervalls, da die Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen in diesem Fall symmetrisch sind. Dagegen sind bei den jeweiligen Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren, die aus den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren hervorgehen, die Mittelwerte für die Fock-Zustände von der Anregung n und von

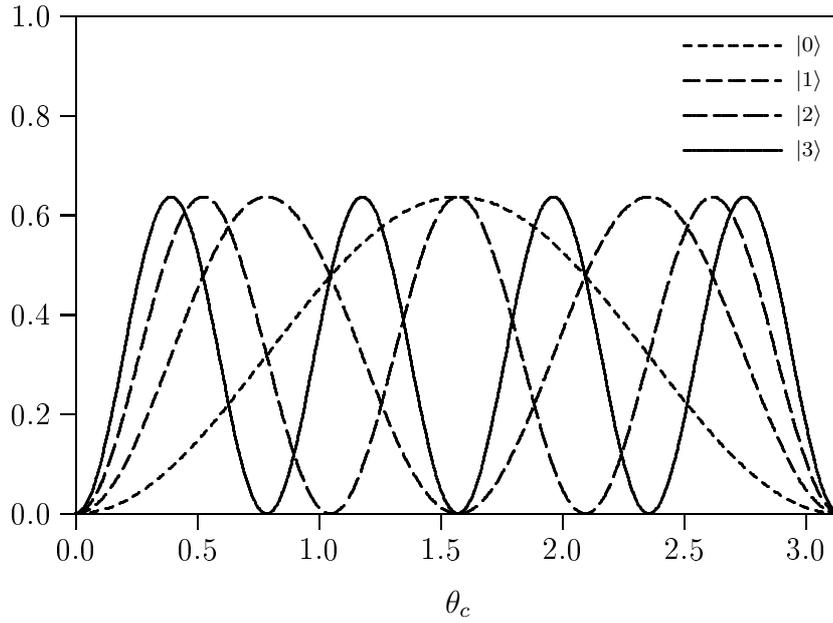


Abbildung 12: Arcuskosinusverteilungen $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$, $\mathcal{P}_{|1\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$, $\mathcal{P}_{|2\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$ und $\mathcal{P}_{|3\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$ für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ bzw. $|3\rangle$ mit dem Gegenbauer-Parameter $\lambda = 1$.

Jacobi-Parametern μ und ν abhängig. Je größer die Abweichung zwischen μ und ν , desto unsymmetrischer sind die Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen und desto größer ist die Abweichung der Mittelwerte von den zentralen Werten $\frac{\pi}{2}$ bzw. 0.

Zwischen entsprechenden Matrixelementen des Arcuskosinus- und Arcussinusoperators im Fock-Raum besteht die Beziehung

$$\langle n | \hat{\Theta}_s | n' \rangle = \frac{\pi}{2} \delta_{n,n'} - i^{n-n'} \langle n | \hat{\Theta}_c | n' \rangle. \quad (183)$$

Zwischen den Erwartungswerten von Potenzen der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren mit ganzzahligen Exponenten für einen bestimmten Fock-Zustand besteht der Zusammenhang

$$\langle n | \hat{\Theta}_c^k | n \rangle = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k + \sum_{l=1}^k (-1)^l \binom{k}{l} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-l} \langle n | \hat{\Theta}_s^l | n \rangle, \quad (184)$$

der sich aus (178a) und (178b) mit der klassischen Beziehung $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ und dem binomischen Satz ergibt. Für $k = 1$ und $k = 2$ bestehen die Zusammenhänge

$$\langle n | \hat{\Theta}_c | n \rangle = \frac{\pi}{2} - \langle n | \hat{\Theta}_s | n \rangle, \quad (185)$$

$$\langle n | \hat{\Theta}_c^2 | n \rangle = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi \langle n | \hat{\Theta}_s | n \rangle + \langle n | \hat{\Theta}_s^2 | n \rangle. \quad (186)$$

Daraus ergeben sich gleiche Schwankungsquadrate für den Arcuskosinus- und Arcussinusoperator für Fock-Zustände.

Die Abbildung 13 zeigt die Schwankungsquadrate für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ als Funktionen des Gegenbauer-Parameters λ im Vergleich mit dem klassischen Wert

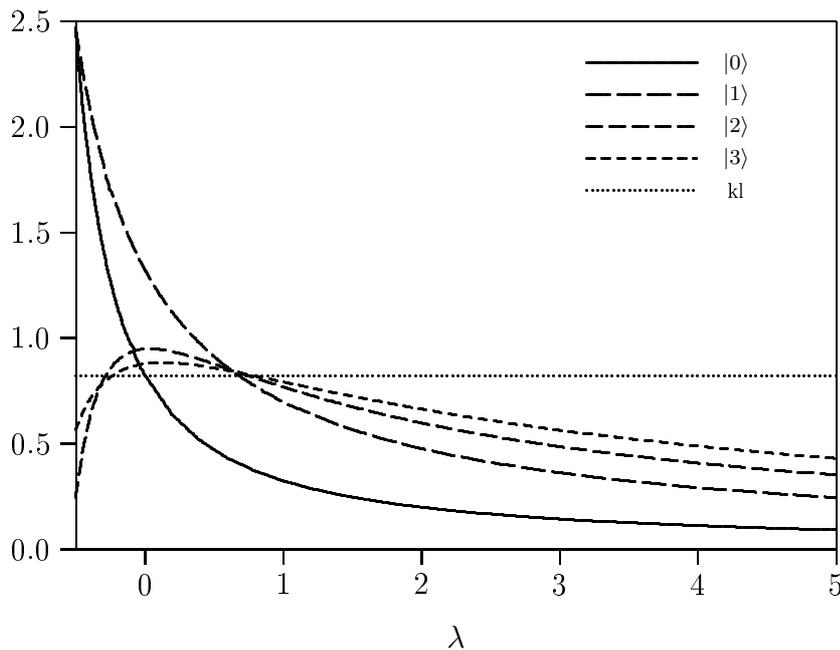


Abbildung 13: Schwankungsquadrate des Arcuskosinus $\sigma_{\theta_c \theta_c}^{(n)}$ und Arcussinus $\sigma_{\theta_s \theta_s}^{(n)}$ für die Fock-Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|10\rangle$ als Funktion des Gegenbauer-Parameters λ im Vergleich mit dem klassischen Wert $\frac{\pi^2}{12}$.

$\frac{\pi^2}{12} = 0.8225$. Bei einem festen Wert λ und mit zunehmendem n nähern sich die Schwankungsquadrate von oben oder von unten dem klassischen Wert $\frac{\pi^2}{12}$. Die Schwankungsquadrate der Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Schwankungsquadrate der Kosinus- und Sinusoperatoren für die Fock-Zustände, wie ein Vergleich der beiden Abbildungen 13 und 10 verdeutlicht.

Nachfolgend wird der Einfluss des Gegenbauer-Parameters λ auf die Arcusverteilungen für Fock-Zustände untersucht. Die Abbildung 14 zeigt die Arcuskosinusverteilungen für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit den Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ im Vergleich mit der entsprechenden klassischen Gleichverteilung. Die entsprechenden Arcussinusverteilungen sind nicht explizit dargestellt. Diese haben die gleiche Kontur und liegen im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_s \leq +\frac{\pi}{2}$. Der Parameter λ beeinflusst insbesondere das Verhalten der Verteilungen an den Endpunkten $\theta_c = 0$ und $\theta_c = \pi$ bzw. $\theta_s = -\frac{\pi}{2}$ und $\theta_s = +\frac{\pi}{2}$. In den Fällen $\lambda < 0$ divergieren die Verteilungen an den Endpunkten, während in den Fällen $\lambda > 0$ die Verteilungen an den Endpunkten verschwinden. In dem Fall $\lambda \rightarrow 0$, der auch dem klassischen Fall entspricht, liegen Gleichverteilungen mit dem konstanten Wert $\frac{1}{\pi}$ vor.

Die Abbildung 15 zeigt die Arcuskosinusverteilungen für den ersten angeregten Fock-Zustand $|1\rangle$ mit den Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 1$. Die entsprechenden Arcussinusverteilungen sind nicht explizit dargestellt. Die Arcussinusverteilung geht mit der Verschiebungstransformation $\theta_s = \theta_c + \frac{\pi}{2}$ aus der entsprechenden Arcuskosinusverteilung hervor. Folglich haben die Arcussinusverteilungen die gleiche Kontur wie die entsprechenden Arcuskosinusverteilungen. Die Arcusverteilungen oszillieren. Die Anzahl ihrer Peaks hängt von der Anregung des jeweiligen Fock-Zustands ab und beträgt $n + 1$. Die Arcuskosinus-

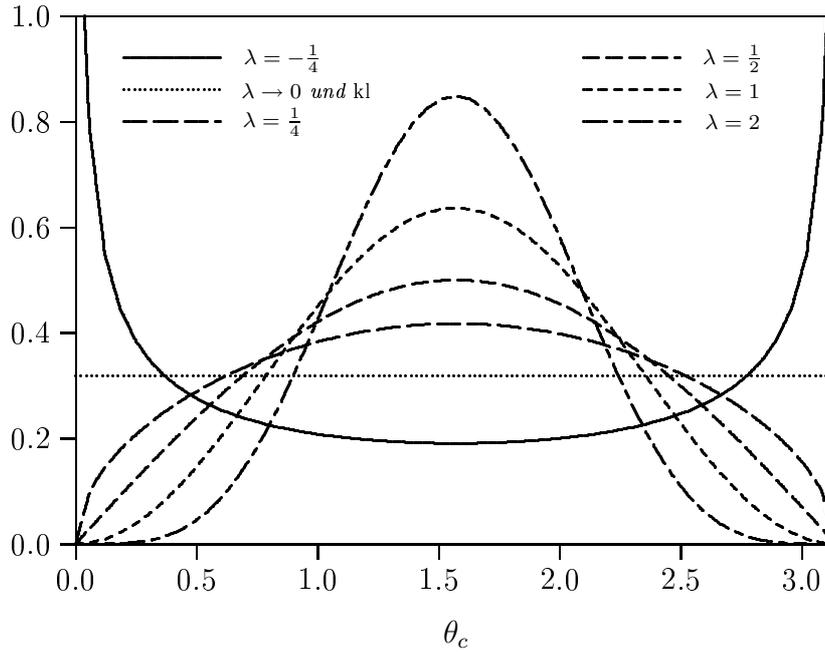


Abbildung 14: Arcuskosinusverteilungen $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$ für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda \rightarrow 0$ und kl, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ sowie die Arcuskosinusverteilung $\mathcal{P}_{kl}(\theta_c)$ für den klassischen Zustand.

verteilung weist n Nullstellen im Intervall $0 < \theta_c < \pi$ auf. Bei einem positiven Parameter $\lambda > 0$ verschwinden die Arcuskosinusverteilungen an den Stellen $\theta_c = 0$ und $\theta_c = \pi$ und die Arcussinusverteilungen an den Stellen $\theta_s = -\frac{\pi}{2}$ und $\theta_s = \frac{\pi}{2}$. Bei einem negativen Parameter $\lambda < 0$ gehen beide Verteilungen an diesen Stellen gegen Unendlich. Dieses Verhalten ergibt sich aus den Eigenschaften der Gewichtsfunktion.

4.2.2 Arcuskosinus- und Arcussinusverteilungen für kohärente Zustände

Die Arcuskosinusverteilungen für kohärente Zustände werden durch die Kombination der Gleichungen (177a) und (105a) erhalten. Die Abbildung 16 zeigt die Arcuskosinusverteilungen für die kohärenten Zustände $|\alpha = 1\rangle$, $|\alpha = i\rangle$ und $|\alpha = 1 + i\rangle$ sowie für den Vakuumzustand $|0\rangle$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$ und $\lambda = 1$. Die entsprechenden Arcussinusverteilungen mit den gleichen Parametern sind in der Abbildung 17 dargestellt. Die Arcussinusverteilungen für kohärente Zustände ergeben sich durch die Kombination der Gleichungen (177b) und (105b).

Das Verhalten der Verteilungen mit dem Parameter $\lambda = -\frac{1}{4}$ ist ungewöhnlich, da der Wert der Verteilungen im Bereich der Stelle $\theta_c = \varphi_\alpha = 0$ mit einer zunehmenden Verschiebungsintensität $|\alpha|$ abnimmt. Dieses ungewöhnliche Verhalten tritt bei allen negativen Parametern $\lambda < 0$ auf. Die Verteilungen mit dem Parameter $\lambda = 1$ entsprechen dagegen den Erwartungen, ebenso wie alle solche Verteilungen mit einem positiven Parameter $\lambda > 0$. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass die Operatoren, die mit den Gegenbauer-Polynomen im Zusammenhang stehen, dann auf erwartete Resultate führen, wenn der Gegenbauer-Parameter

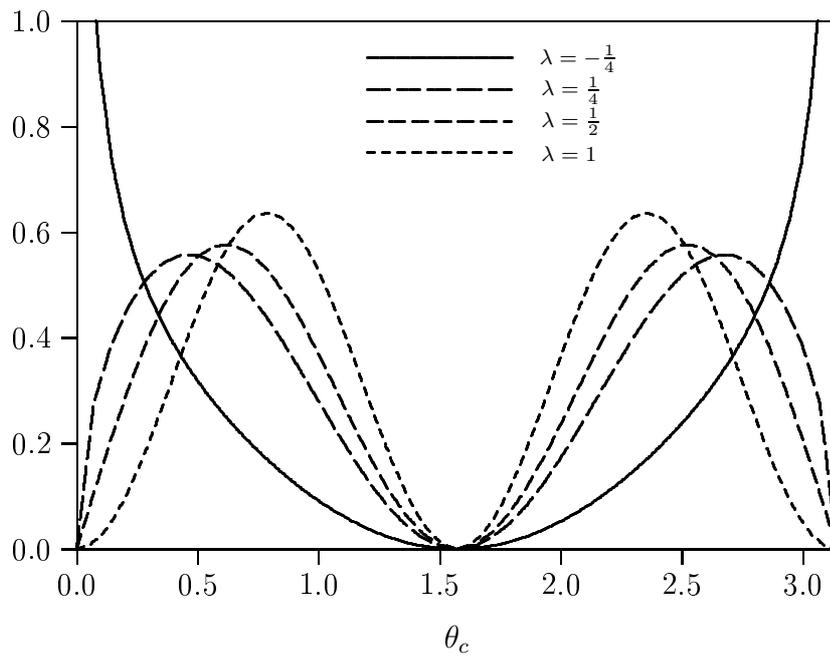


Abbildung 15: Arcuskosinusverteilungen $\mathcal{P}_{|1\rangle}(\theta_c)$ für den ersten angeregten Fock-Zustand $|1\rangle$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = 1$.

λ nicht negativ ist.

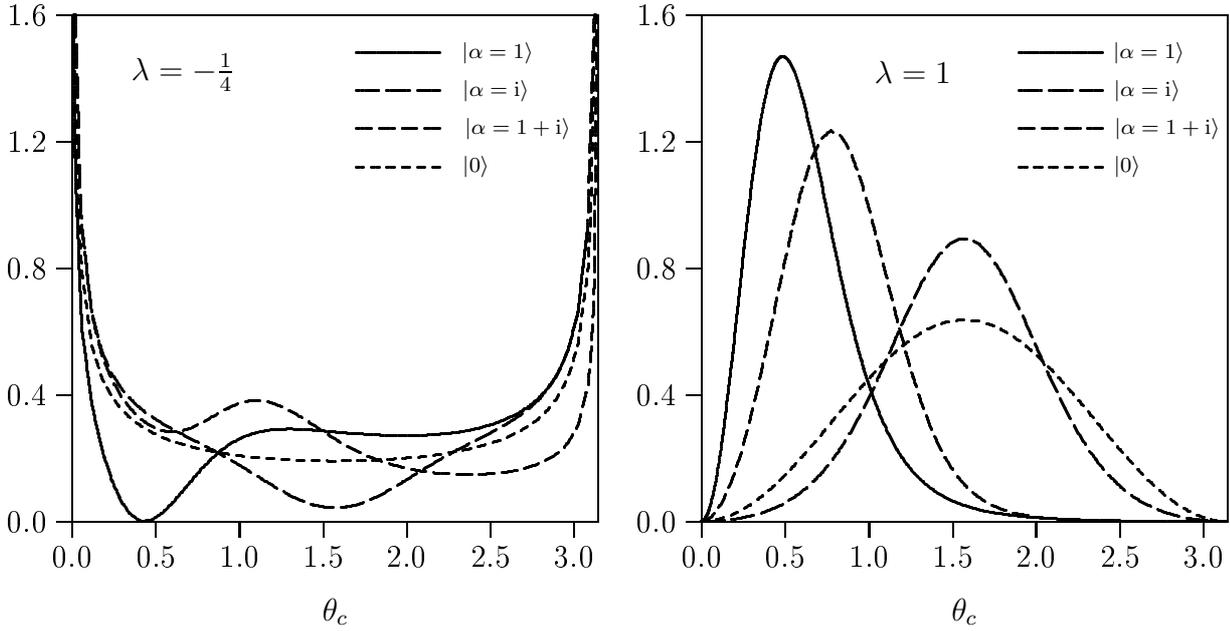


Abbildung 16: Arcuskosinusverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$ und $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(\Theta_c)}(\theta_c)$ für die kohärenten Zustände $|\alpha = 1\rangle$, $|\alpha = i\rangle$ und $|\alpha = 1 + i\rangle$ sowie für den Vakuumzustand $|0\rangle$, jeweils mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$ und $\lambda = 1$.

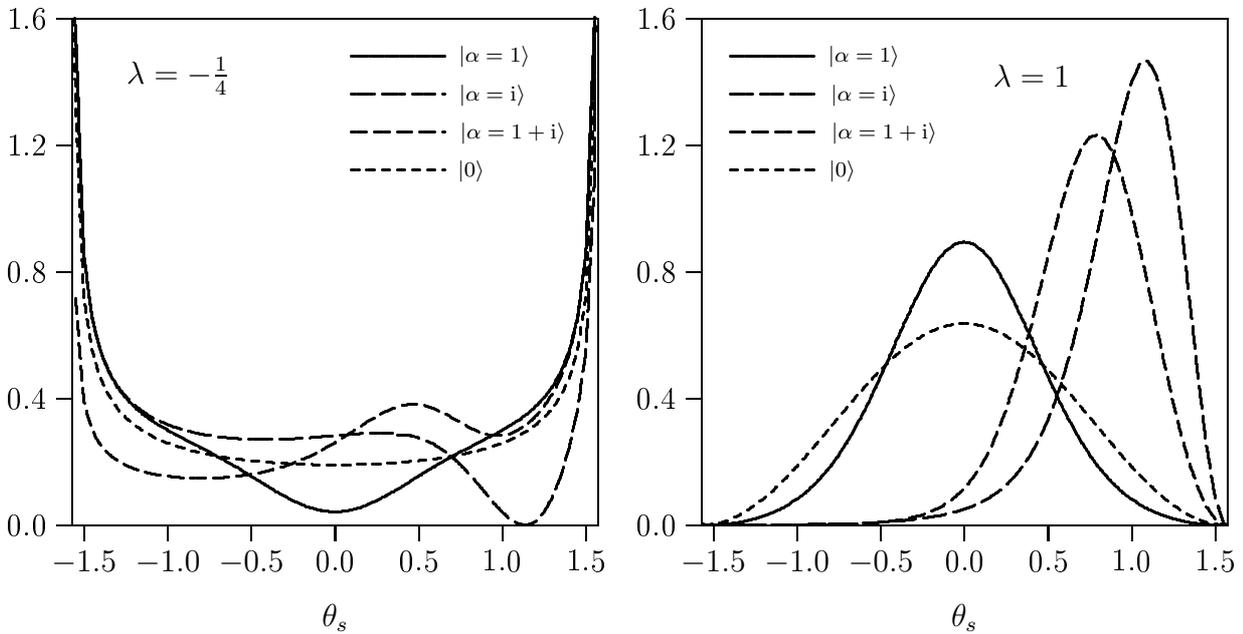


Abbildung 17: Arcussinusverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\Theta_s)}(\theta_s)$ und $\mathcal{P}_{|0\rangle}^{(\Theta_s)}(\theta_s)$ für die kohärenten Zustände $|\alpha = 1\rangle$, $|\alpha = i\rangle$ und $|\alpha = 1 + i\rangle$ sowie für den Vakuumzustand $|0\rangle$, jeweils mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = -\frac{1}{4}$ und $\lambda = 1$.

5 Exponentialoperatoren

Es werden in diesem Kapitel verallgemeinerte und erweiterte Exponentialoperatoren eingeführt, die mit den verallgemeinerten bzw. erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren (108) und damit auch mit den (klassischen) orthogonalen Polynomen in dem Intervall $x \in [-1, +1]$ im Zusammenhang stehen. Während bei den verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren zuerst deren Eigenzustände eingeführt und anschließend daraus die Kosinus- und Sinusoperatoren bestimmt worden sind, wird bei den Exponentialoperatoren in umgekehrter Weise vorgegangen. Die verallgemeinerten und erweiterten Exponentialoperatoren werden auf der Grundlage der verallgemeinerten bzw. erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren (108) definiert. Dazu wird die klassische Beziehung (16) zwischen den trigonometrischen und exponentiellen Funktionen verwendet. Die Eigenzustände werden anschließend aus der Eigenwertgleichung der Exponentialoperatoren bestimmt.

5.1 Verallgemeinerte und erweiterte Exponentialoperatoren

Die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) haben, ebenso wie die Kosinus- und Sinusoperatoren von Susskind und Glogower (17, 18) sowie von Lerner *et al.* (111), in der Fock-Darstellung keine Diagonalelemente. Deren Matrixelemente befinden sich ausschließlich auf den beiden Nebendiagonalen. Daher besteht zwischen den verallgemeinerten Exponentialoperatoren und den verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren der gleiche Zusammenhang (17) und (18) wie zwischen den Exponentialoperatoren und dem Kosinus- und Sinusoperator von Susskind und Glogower.

Dagegen weisen die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n \neq 0$) in der Fock-Darstellung auch Diagonalelemente auf. Dabei stellt sich die Frage, welche Rolle der Diagonalteil für die erweiterten Exponentialoperatoren spielt. Beispielsweise könnte der Diagonalteil einen Bestandteil der erweiterten Exponentialoperatoren bilden oder ein separater zusätzlicher Operator sein. Um beide Möglichkeiten zu untersuchen, werden zwei verschiedene Sätze Exponentialoperatoren definiert, die als Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} , \hat{E}^\dagger und als Exponentialoperatoren zweiter Art $\hat{\mathcal{E}}$, $\hat{\mathcal{E}}^\dagger$ bezeichnet werden.

Zunächst wird der Diagonalteil der erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren (108) als ein neutraler Exponentialoperator definiert

$$\hat{E}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|. \quad (187)$$

Der neutrale Exponentialoperator kommutiert mit dem Photonenzahloperator

$$[\hat{N}, \hat{E}_0]_- = 0. \quad (188)$$

Somit sind die Fock-Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände des neutralen Exponentialoperators \hat{E}_0 mit dem Eigenwert g_n

$$\hat{E}_0 |n\rangle = g_n |n\rangle. \quad (189)$$

Zwischen den klassischen Exponential-, Kosinus- und Sinusfunktionen besteht die Beziehung:

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta. \quad (190)$$

Die verallgemeinerten Exponentialoperatoren erster Art sind wie folgt definiert:

$$\hat{E} \equiv \hat{C} + i\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle\langle n+1|, \quad (191a)$$

$$\hat{E}^\dagger \equiv \hat{C} - i\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n+1\rangle\langle n|. \quad (191b)$$

Die erweiterten Exponentialoperatoren erster Art sind definiert gemäß:

$$\hat{E} \equiv (\hat{C} - \hat{E}_0) + i(\hat{S} - \hat{E}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle\langle n+1|, \quad (192a)$$

$$\hat{E}^\dagger \equiv (\hat{C} - \hat{E}_0) - i(\hat{S} - \hat{E}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n+1\rangle\langle n|. \quad (192b)$$

Bei den verallgemeinerten Exponentialoperatoren verschwindet der neutrale Exponentialoperator \hat{E}_0 . Die rechten Seiten der Gleichungen (191) und (192) verdeutlichen, dass die verallgemeinerten und erweiterten Exponentialoperatoren erster Art die gleiche formale Struktur aufweisen. Jedoch unterscheiden sich die Koeffizienten f_n , die bei den verallgemeinerten Exponentialoperatoren mit symmetrischen und bei den erweiterten Exponentialoperatoren mit unsymmetrischen Gewichtsfunktionen im Zusammenhang stehen. Die Fock-Darstellung der verallgemeinerten und erweiterten Exponentialoperatoren erster Art enthält ausschließlich Matrixelemente auf jeweils einer der beiden Nebendiagonalen. Die Matrix hat somit die gleiche Struktur wie die der Exponentialoperatoren von Susskind und Glogower (12), die ein Spezialfall der Exponentialoperatoren erster Art mit $f_n = 1$ sind. Die Gleichungen (192a) und (192b) verdeutlichen, dass die Beziehungen zwischen den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n \neq 0$) und den erweiterten Exponentialoperatoren erster Art nicht mit den entsprechenden klassischen Beziehungen (190) korrespondieren. Dagegen korrespondieren die Beziehungen zwischen den verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren ($g_n = 0$) und den verallgemeinerten Exponentialoperatoren erster Art mit den klassischen Beziehungen (190).

Die Kommutatoren des Photonenzahloperators (4) und der Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} bzw. \hat{E}^\dagger

$$[\hat{N}, \hat{E}]_- = \hat{E}, \quad [\hat{N}, \hat{E}^\dagger]_- = -\hat{E}^\dagger \quad (193)$$

korrespondieren jedoch mit den entsprechenden klassischen Poisson-Klammern

$$\{H, e^{\pm i\theta}\} = \pm i e^{\pm i\theta}, \quad (194)$$

wobei H die Hamiltonfunktion (1) des klassischen harmonischen Oszillators ist. Die exponentiellen Funktionen der Phase θ in (194) im klassischen Phasenraum sind durch den Ort

q und den Impuls p darstellbar

$$e^{+i\theta} = \frac{q + ip}{\sqrt{q^2 + p^2}}, \quad e^{-i\theta} = \frac{q - ip}{\sqrt{q^2 + p^2}}. \quad (195)$$

Der Kommutator der beiden Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} und \hat{E}^\dagger

$$[\hat{E}, \hat{E}^\dagger]_- = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^2 - f_{n-1}^2) |n\rangle \langle n|, \quad f_{-1} = 0 \quad (196)$$

korrespondiert dagegen nicht mit der entsprechenden Poisson-Klammer-Beziehung

$$\{e^{+i\theta}, e^{-i\theta}\} = 0. \quad (197)$$

Für zahlreiche Polynomsysteme verschwindet jedoch der Ausdruck auf der rechten Seite von (196) für große n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^2 - f_{n-1}^2) = 0, \quad (198)$$

so dass der Erwartungswert des Kommutators (196) sich mit zunehmender Anregung n des Fock-Zustandes dem Wert der klassischen Poisson-Klammer (197) nähert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle n | [\hat{E}, \hat{E}^\dagger]_- | n \rangle = 0. \quad (199)$$

Die Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} und \hat{E}^\dagger zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass die Kommutator-Beziehungen (193) und (196) entweder exakt oder zumindest im klassischen Grenzfall mit den entsprechenden Poisson-Klammern (194) bzw. (197) korrespondieren. Dagegen stimmen die Beziehungen (192) zwischen den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren und den erweiterten Exponentialoperatoren erster Art nicht mit den entsprechenden klassischen Beziehungen (16) überein.

Die Exponentialoperatoren zweiter Art sind definiert wie folgt:

$$\hat{\mathcal{E}} \equiv \hat{C} + i\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle \langle n+1| + (1+i) \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|, \quad (200a)$$

$$\hat{\mathcal{E}}^\dagger \equiv \hat{C} - i\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n+1\rangle \langle n| + (1-i) \sum_{n=0}^{\infty} g_n |n\rangle \langle n|. \quad (200b)$$

In der Fock-Darstellung befinden sich bei den Exponentialoperatoren zweiter Art die Matrixelemente sowohl auf der Diagonalen als auch auf der Nebendiagonalen. Der neutrale Exponentialoperator (187) ist implizit in den erweiterten Exponentialoperatoren zweiter Art enthalten. Die Kommutatoren des Photonenzahloperators (4) und der Exponentialoperatoren zweiter Art $\hat{\mathcal{E}}$ bzw. $\hat{\mathcal{E}}^\dagger$

$$[\hat{N}, \hat{\mathcal{E}}]_- = \hat{E} \neq \hat{\mathcal{E}}, \quad [\hat{N}, \hat{\mathcal{E}}^\dagger]_- = -\hat{E}^\dagger \neq -\hat{\mathcal{E}}^\dagger \quad (201)$$

korrespondieren nicht mit den entsprechenden Poisson-Klammern (194). Zwischen den Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} und \hat{E}^\dagger und zweiter Art $\hat{\mathcal{E}}$ und $\hat{\mathcal{E}}^\dagger$ bestehen die Beziehungen

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{E} + (1+i)\hat{E}_0, \quad \hat{\mathcal{E}}^\dagger = \hat{E}^\dagger + (1-i)\hat{E}_0. \quad (202)$$

Die erweiterten Exponentialoperatoren zweiter Art zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass die Beziehungen (200) zwischen den erweiterten Kosinus-, Sinus- und Exponentialoperatoren mit den entsprechenden klassischen Beziehungen (16) exakt übereinstimmen.

Die erweiterten Exponentialoperatoren \hat{E} und \hat{E}^\dagger sowie $\hat{\mathcal{E}}$ und $\hat{\mathcal{E}}^\dagger$ zeigen beide sowohl erwartete als auch ungewöhnliche Eigenschaften, so dass weder der ersten Art noch der zweiten Art von Exponentialoperatoren eine bevorzugte Rolle zugewiesen werden kann. In dem Spezialfall $g_n = 0$ verschwindet der neutrale Operator \hat{E}_0 und die Exponentialoperatoren erster und zweiter Art sind identisch

$$\mu = \nu \quad \Rightarrow \quad g_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{\mathcal{E}} = \hat{E} \\ \hat{\mathcal{E}}^\dagger = \hat{E}^\dagger. \end{cases}$$

Bei den verallgemeinerten Exponentialoperatoren ($g_n = 0$) ist es somit nicht erforderlich, zwischen den Exponentialoperatoren erster und zweiter Art zu unterscheiden.

5.2 Eigenzustände der Exponentialoperatoren

Die Eigenzustände der als Absteigeoperatoren wirkenden Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} werden in diesem Abschnitt bestimmt. Die als Aufsteigeoperatoren wirkenden Exponentialoperatoren \hat{E}^\dagger haben keine normierbaren Eigenzustände, während diejenigen der als Absteigeoperatoren wirkenden Exponentialoperatoren \hat{E} normierbar sind. Es besteht eine Analogie mit dem Absteigeoperator \hat{a} des harmonischen Oszillators, dessen Eigenzustände die kohärenten Zustände sind, und dem Aufsteigeoperator \hat{a}^\dagger des harmonischen Oszillators, der ebenfalls keine normierbaren Eigenzustände hat. Der Vollständigkeit halber werden auch die Eigenzustände der Exponentialoperatoren zweiter Art $\hat{\mathcal{E}}$ angegeben. Die Eigenzustände der Exponentialoperatoren \hat{E} und $\hat{\mathcal{E}}$ werden auch als Exponentialzustände erster Art $|\epsilon\rangle$ bzw. zweiter Art $|\varepsilon\rangle$ bezeichnet.

Zur Lösung der Eigenwertgleichung für die verallgemeinerten und erweiterten Exponentialoperatoren erster Art

$$\hat{E}|\epsilon\rangle = \epsilon|\epsilon\rangle, \quad (203)$$

werden die Eigenzustände nach Fock-Zuständen entwickelt

$$|\epsilon\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\epsilon\rangle |n\rangle, \quad (204)$$

mit den zunächst unbekanntenen Koeffizienten $\langle n|\epsilon\rangle$. Der Wirkung des Exponentialoperators erster Art \hat{E} auf einen Fock-Zustand ist gegeben durch

$$\hat{E}|n\rangle = f_{n-1}|n-1\rangle, \quad \hat{E}|0\rangle = 0. \quad (205)$$

Das Einsetzen der entwickelten Eigenzustände (204) in die Eigenwertgleichung (203) und die anschließende Anwendung (205) des Exponentialoperators \hat{E} ergibt die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n-1} \langle n|\epsilon\rangle |n-1\rangle = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\epsilon\rangle |n\rangle. \quad (206)$$

Deren Projektion auf den Fock-Zustand $\langle n' |$ führt auf eine Beziehung zwischen zwei aufeinanderfolgende Fock-Komponenten der Eigenzustände

$$f_n \langle n+1 | \epsilon \rangle = \epsilon \langle n | \epsilon \rangle. \quad (207)$$

Durch n -fache Anwendung der Gleichung (207) ist der n -te Entwicklungskoeffizient durch dessen Vakuumkomponente darstellbar

$$\langle n | \epsilon \rangle = \frac{\epsilon^n}{\prod_{j=0}^{n-1} f_j} \langle 0 | \epsilon \rangle. \quad (208)$$

Damit sind die Eigenzustände der Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} bis auf die Vakuumkomponente bestimmt

$$|\epsilon\rangle = \langle 0 | \epsilon \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{\prod_{j=0}^{n-1} f_j} |n\rangle. \quad (209)$$

Die Exponentialzustände erster Art haben die Form der verallgemeinerten kohärenten Zustände

$$|\epsilon\rangle = [\mathcal{N}(|\epsilon|^2)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle, \quad (210)$$

die von Klauder *et al.* [35] eingeführt wurden. Die Parameterfunktion $\rho(n)$ ist durch die Rekursionskoeffizienten f_n darstellbar

$$\rho(n) = \prod_{j=0}^{n-1} f_j^2 = (f_0 f_1 f_2 \dots f_{n-1})^2 = 4^n \frac{d_n a_0^2}{d_0 a_n^2}, \quad \rho(0) = 1 \quad (211)$$

und hängt somit ausschließlich von den Eigenschaften der Polynome ab. In der Tabelle 3 sind die Parameterfunktionen $\rho(n)$ für die verallgemeinerten Exponentialzustände aufgelistet, die mit den entsprechenden klassischen Polynomen ($\mu = \nu$) im Zusammenhang stehen.

Die Normierungsfunktion $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$ in (210) bzw. das Modulquadrat der Vakuumkomponente in (209) ist durch die Normierungsbedingung $\langle \epsilon | \epsilon \rangle = 1$ bestimmbar

$$\mathcal{N}(|\epsilon|^2) = \frac{1}{|\langle 0 | \epsilon \rangle|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\epsilon|^{2n}}{\rho(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2 d_0}{a_0^2 d_n} \left(\frac{|\epsilon|^2}{2} \right)^n. \quad (212)$$

Für die verallgemeinerten Exponentialzustände, die mit den klassischen Polynomen im Zusammenhang stehen, ist die rechte Seite der Gleichung (212) eine hypergeometrische ${}_2F_1$ -Funktion. Die Reihe in der Gleichung (212) konvergiert für alle $\rho(n)$ in Tabelle 3 innerhalb des offenen Einheitskreises $|\epsilon| < 1$ der komplexen ϵ -Ebene. Die Tabelle 4 zeigt die durch hypergeometrische ${}_2F_1$ -Funktionen dargestellten Normierungsfunktionen $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$, die ausschließlich von den charakteristischen Parametern der jeweiligen Polynome abhängen. Mit Verwendung der Beziehung

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z). \quad (213)$$

Tabelle 3: Parameterfunktionen $\rho(n)$, die mit den Polynomen nach Jacobi $P_n^{(\mu,\mu)}(x)$, Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$, Legendre $P_n(x)$ und Chebyshev erster Art $T_n(x)$ und zweiter Art $U_n(x)$ im Zusammenhang stehen.

Polynom:	$\rho(n)$:
$P_n^{(\mu,\mu)}(x)$	$\frac{\Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(\mu + \frac{3}{2}) n! \Gamma(n + 2\mu + 1)}{\Gamma(2\mu + 1) \Gamma(n + \mu + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \mu + \frac{3}{2})} = \frac{n! (2\mu + 1)_n}{(\mu + \frac{1}{2})_n (\mu + \frac{3}{2})_n}$
$C_n^{(\lambda)}(x)$	$\frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{n! \Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(n + \lambda) \Gamma(n + \lambda + 1)} = \frac{n! (2\lambda)_n}{(\lambda)_n (\lambda + 1)_n}$
$P_n(x)$	$\frac{\pi}{2} \frac{(n!)^2}{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{3}{2})}$
$T_n(x)$	$\frac{4}{\tau_n^2} \quad (\tau_0 = 2, \tau_{n \geq 1} = 1)$
$U_n(x)$	1

lassen sich die Normierungsfunktionen $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$ auf eine Form bringen, durch die die Unterschiede zwischen den Normierungsfunktionen $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$ für die einzelnen Polynome verdeutlicht werden. In der Tabelle 4 sind die Normierungsfunktionen für die verallgemeinerten Exponentialzustände dargestellt.

Das Skalarprodukt der Eigenzustände ist durch die Normierungsfunktion $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$ aus der Tabelle 4 darstellbar

$$\langle \epsilon | \epsilon' \rangle = \frac{\mathcal{N}(\epsilon^* \epsilon')}{\sqrt{\mathcal{N}(|\epsilon|) \mathcal{N}(|\epsilon'|)}}. \quad (214)$$

Da das Skalarprodukt in dem Fall $\epsilon \neq \epsilon'$ nicht verschwindet, sind die Exponentialzustände erster Art $|\epsilon\rangle$ nicht orthogonal.

Die Eigenzustände der Exponentialoperatoren \hat{E}_{SG} von Susskind und Glogower ($f_n = 1$) haben eine besonders einfache Form

$$|\epsilon\rangle_{\text{SG}} = (1 - |\epsilon|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n |n\rangle. \quad (215)$$

Der Vollständigkeit halber werden auch für die erweiterten Exponentialzustände erster Art, die mit den Jacobi-Polynomen $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ verschiedener Parameter ($\mu \neq \nu$) im Zusammenhang stehen, die charakteristischen Funktionen angegeben. Der Rekursionskoeffizient f_n für den Fall $\mu \neq \nu$ ist aus der Tabelle 1 bekannt. Die Parameterfunktion ist gegeben durch

$$\rho(n) = \frac{n! (\mu + 1)_n (\nu + 1)_n (\mu + \nu + 1)_n}{(\frac{\mu+\nu+1}{2})_n (\frac{\mu+\nu+2}{2})_n (\frac{\mu+\nu+2}{2})_n (\frac{\mu+\nu+3}{2})_n}, \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad (216)$$

Die Normierungsfunktion ist eine ${}_4F_3$ -Funktion

$$\mathcal{N}(|\epsilon|^2) = {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3; |\epsilon|^2) \quad (217)$$

Tabelle 4: Normierungsfunktion $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$, dargestellt durch ${}_2F_1$ -Funktionen oder analytische Funktion, für die Polynome nach Jacobi $P_n^{(\mu,\mu)}(x)$, Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$, Legendre $P_n(x)$ und Chebyshev erster Art $T_n(x)$ und zweiter Art $U_n(x)$.

Polynom:	$\mathcal{N}(\epsilon ^2)$:
$P_n^{(\mu,\mu)}(x)$	$(1 - \epsilon ^2)^{-1} {}_2F_1(\mu + \frac{1}{2}, \mu - \frac{1}{2}; 2\mu + 1; \epsilon ^2) = {}_2F_1(\mu + \frac{1}{2}, \mu + \frac{3}{2}; 2\mu + 1; \epsilon ^2)$
$C_n^{(\lambda)}(x)$	$(1 - \epsilon ^2)^{-1} {}_2F_1(\lambda, \lambda - 1; 2\lambda; \epsilon ^2) = {}_2F_1(\lambda, \lambda + 1; 2\lambda; \epsilon ^2)$
$P_n(x)$	$(1 - \epsilon ^2)^{-1} {}_2F_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \epsilon ^2) = {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \epsilon ^2)$
$T_n(x)$	$(1 - \epsilon ^2)^{-1} (1 - \frac{ \epsilon ^2}{2}) = \frac{1 - \frac{ \epsilon ^2}{2}}{1 - \epsilon ^2}$
$U_n(x)$	$(1 - \epsilon ^2)^{-1} = {}_2F_1(1, 2; 2; \epsilon ^2)$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\mu + \nu + 1)/2, & \alpha_2 &= \alpha_3 = (\mu + \nu + 2)/2, & \alpha_4 &= (\mu + \nu + 3)/2, \\ \beta_1 &= \mu + 1, & \beta_2 &= \nu + 1, & \beta_3 &= \mu + \nu + 1. \end{aligned} \quad (218)$$

Die Normierungsfunktion konvergiert ebenfalls nur innerhalb des Einheitskreises und divergiert auf dem Einheitskreis aufgrund $\eta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 1$.

Die Normierungsfunktionen für die Exponentialzustände erster Art sind ${}_2F_1$ -Funktionen in dem Fall $\mu = \nu$ und ${}_4F_3$ -Funktionen in dem Fall $\mu \neq \nu$. Im nächsten Kapitel werden verallgemeinerte hypergeometrische Zustände $|p; q; z\rangle$ eingeführt, deren Normierungsfunktionen die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen ${}_pF_q$ sind.

Die Eigenzustände der Exponentialoperatoren zweiter Art

$$\hat{\mathcal{E}} |\varepsilon\rangle = \varepsilon |\varepsilon\rangle. \quad (219)$$

weisen ein endliches Produkt auf

$$|\varepsilon\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho(n)}} \prod_{j=0}^{n-1} [\varepsilon - (1+i)g_j] |n\rangle. \quad (220)$$

Der Fall $g_j = 0$ entspricht den Exponentialzuständen erster Art (210). In diesem Fall geht das Produkt innerhalb der Summe von (220) in die Potenz ε^n über. Aus der Normierungsbedingung $\langle \varepsilon | \varepsilon \rangle = 1$ ergibt sich das Modulquadrat der Normierungskonstante c_0

$$\frac{1}{|c_0|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho(n)} \prod_{j=0}^{n-1} |\varepsilon - (1+i)g_j|^2. \quad (221)$$

Die Eigenzustände der Exponentialoperatoren zweiter Art werden im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht.

5.3 Photonenzahlstatistik der Exponentialzustände erster Art

In diesem Abschnitt wird die Photonenzahlstatistik der Exponentialzustände erster Art untersucht. Dabei werden insbesondere die Photonenzahlverteilungen, die Mittelwerte und Schwankungsquadrate der Photonenzahl und schließlich die Mandel-Parameter angegeben. Die Photonenzahlverteilungen sind die Modulquadrate der Exponentialzustände in der Fock-Darstellung und durch die Normierungsfunktionen $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$ und Parameterfunktionen $\rho(n)$ darstellbar

$$\mathcal{P}_{|\epsilon\rangle}(n) = |\langle n|\epsilon\rangle|^2 = \frac{1}{\mathcal{N}(|\epsilon|^2)} \frac{|\epsilon|^{2n}}{\rho(n)}. \quad (222)$$

Die Normierungsfunktionen $\mathcal{N}(|\epsilon|^2)$ sind in der Tabelle 4 und die Parameterfunktionen $\rho(n)$ in der Tabelle 3 für die entsprechenden Polynome aufgelistet. Die Erwartungswerte von Funktionen des Photonenzahloperators sind durch eine unendliche Summe gegeben

$$\langle \epsilon | F(\hat{N}) | \epsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \mathcal{P}_{|\epsilon\rangle}(n) = \frac{1}{\mathcal{N}(|\epsilon|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{|\epsilon|^{2n}}{\rho(n)}. \quad (223)$$

Mit Verwendung der Beziehung

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) \zeta^n = \zeta^k \frac{d^k}{d\zeta^k} \zeta^n. \quad (224)$$

können auf einfache Weise die Momente der Photonenzahlverteilung berechnet werden

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) \cdots (n-k+1)] \mathcal{P}_{|\epsilon\rangle}(n) = \frac{\zeta^k}{\mathcal{N}(\zeta)} \frac{d^k}{d\zeta^k} \mathcal{N}(\zeta) \Big|_{\zeta=|\epsilon|^2}. \quad (225)$$

Der Mittelwert der Photonenzahl

$$\langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle = \frac{\zeta}{\mathcal{N}(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}(\zeta) \Big|_{\zeta=|\epsilon|^2} \quad (226)$$

und Schwankungsquadrat der Photonenzahl

$$\begin{aligned} \sigma_{NN}^{|\epsilon\rangle} &= \frac{\zeta}{\mathcal{N}(\zeta)} \left(\frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}(\zeta) - \frac{\zeta}{\mathcal{N}(\zeta)} \left(\frac{d}{d\zeta} \mathcal{N}(\zeta) \right)^2 + \zeta \frac{d^2}{d\zeta^2} \mathcal{N}(\zeta) \right) \Big|_{\zeta=|\epsilon|^2} \\ &= \zeta \frac{d}{d\zeta} \langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle \Big|_{\zeta=|\epsilon|^2} \end{aligned} \quad (227)$$

sind durch die Normierungsfunktionen und deren Ableitungen darstellbar.

Die Abbildung 18 zeigt den Mittelwert der Photonenzahl für die Exponentialzustände als Funktion des Gegenbauer-Parameters λ für vorbestimmte feste Werte von $|\epsilon|$. Die Abbildung 18 besteht aus zwei Abschnitten mit unterschiedlichen Maßstäben. Die Funktionen haben ein Minimum, das sich mit zunehmendem $|\epsilon|$ zu höheren λ -Werten hin verschiebt. Erwartungsgemäß nimmt der Mittelwert der Photonenzahl mit zunehmendem ϵ zu.

Die Abbildung 19 zeigt den Mittelwert der Photonenzahl für die Exponentialzustände als Funktion von $|\epsilon|$ für vorgegebene feste Werte des Gegenbauer-Parameters λ . Der Mittelwert der Photonenzahl nimmt mit zunehmenden $|\epsilon|$ zu.

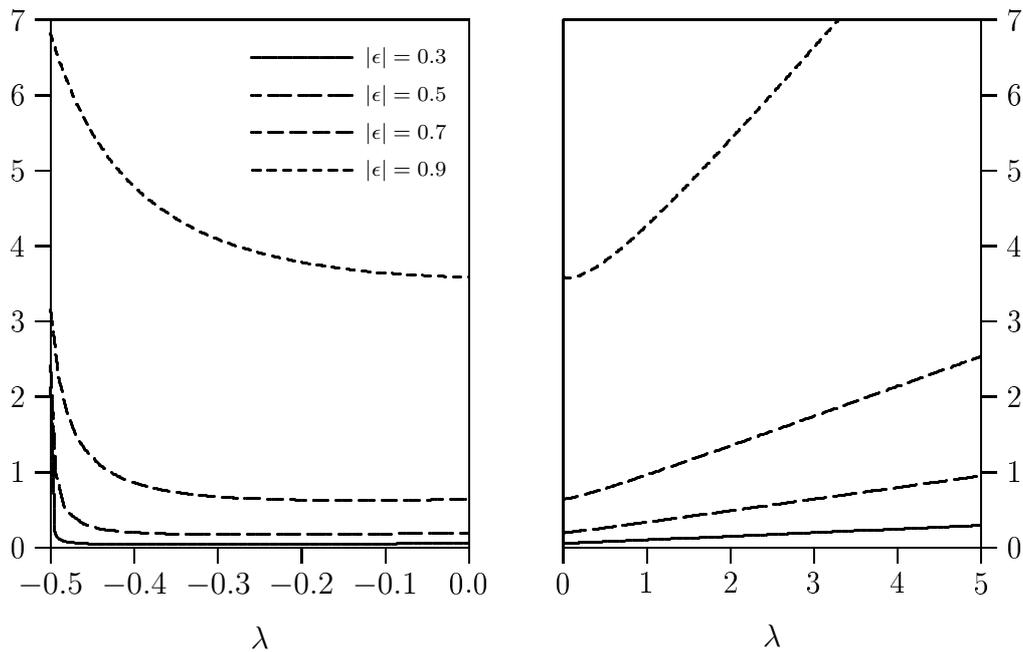


Abbildung 18: Mittelwert der Photonenzahl $\langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle$ für die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$ als Funktion des Gegenbauer-Parameters λ mit $|\epsilon| = 0.3$, $|\epsilon| = 0.5$, $|\epsilon| = 0.7$ und $|\epsilon| = 0.9$.

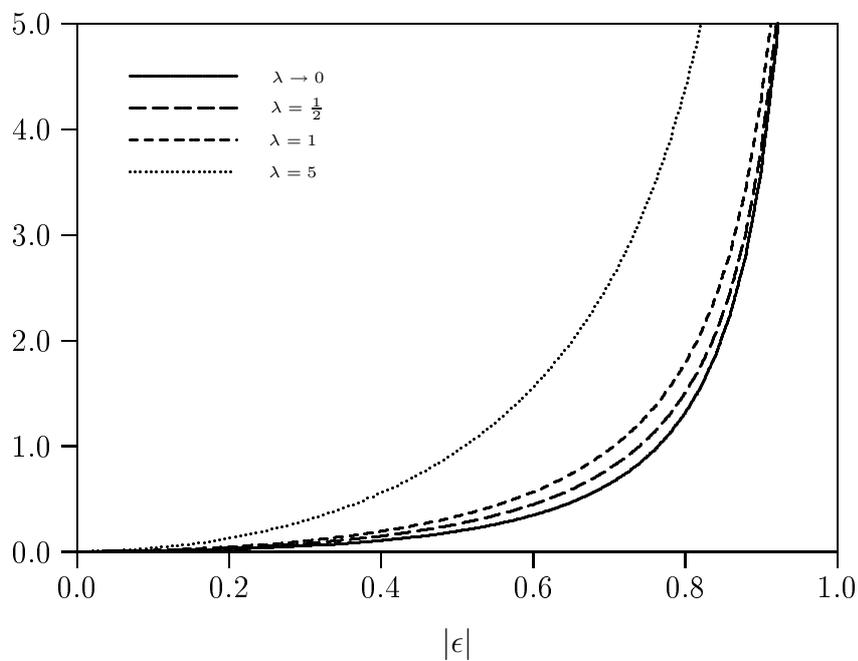


Abbildung 19: Mittelwert der Photonenzahl $\langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle$ für die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$ als Funktion von $|\epsilon|$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$.

Die Erwartungswerte (226) und (227) haben lediglich für diejenigen Exponentialzustände, die mit den Chebyshev-Polynomen erster und zweiter Art im Zusammenhang stehen, eine besonders einfache Form

$$U_n(x) : \quad \langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle = \frac{|\epsilon|^2}{1 - |\epsilon|^2} \quad \sigma_{NN}^{|\epsilon\rangle} = \frac{|\epsilon|^2}{(1 - |\epsilon|^2)^2} \quad (228)$$

$$T_n(x) : \quad \langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle = \frac{|\epsilon|^2}{(1 - |\epsilon|^2)(2 - |\epsilon|^2)} \quad \sigma_{NN}^{|\epsilon\rangle} = \frac{|\epsilon|^2 (2 - |\epsilon|^4)}{(1 - |\epsilon|^2)^2 (2 - |\epsilon|^2)^2}. \quad (229)$$

Für die Eigenzustände des Exponentialoperators \hat{E}_{SG} von Susskind und Glogower, der mit den Chebyshev-Polynomen zweiter Art $U(x)$ im Zusammenhang steht, ergibt sich eine besondere Photonenzahlverteilung

$$\mathcal{P}_{|\epsilon\rangle}(n) = (1 - |\epsilon|^2) |\epsilon|^{2n} = \frac{\langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle^n}{(\langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle + 1)^{n+1}}. \quad (230)$$

Dabei handelt es sich um eine Bose-Einstein-Verteilung. Dies entspricht der Photonenzahlverteilung von thermischem Licht, obwohl es sich um einen reinen quantenmechanischen Zustand $|\epsilon\rangle$ handelt. Auch in diesem Fall gilt für das Schwankungsquadrat und den Mittelwert

$$\sigma_{NN}^{|\epsilon\rangle} > \langle \epsilon | \hat{N} | \epsilon \rangle, \quad (231)$$

was einer Super-Poisson-Verteilung entspricht.

Der Mandel-Parameter [1] für einen Zustand $|\psi\rangle$ ist durch den Mittelwert und das Schwankungsquadrat der Photonenzahl definiert

$$Q_M^{(|\psi\rangle)} \equiv \frac{\sigma_{NN}^{|\psi\rangle} - \langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle} = \frac{\sigma_{NN}^{|\psi\rangle}}{\langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle} - 1. \quad (232)$$

Der Mandel-Parameter ist ein Maß dafür, wie deutlich eine Photonenzahlverteilung für den Zustand $|\psi\rangle$ von der Poisson-Verteilung abweicht. Positive Werte des Mandel-Parameters $Q_M^{(|\psi\rangle)} > 0$ entsprechen einer Super-Poisson-Verteilung. Wenn der Mandel-Parameter $Q_M^{(|\psi\rangle)} = 0$ verschwindet, liegt eine Poisson-Verteilung vor. Negative Werte des Mandel-Parameters $Q_M^{(|\psi\rangle)} < 0$ entsprechen einer Sub-Poisson-Verteilung. Letztere ist ein Zeichen für nicht-klassisches Verhalten. Für die Exponentialzustände ist der Mandel-Parameter durch die Normierungsfunktionen darstellbar

$$Q_M^{(|\epsilon\rangle)} = \zeta \left(\frac{\mathcal{N}''(\zeta)}{\mathcal{N}'(\zeta)} - \frac{\mathcal{N}'(\zeta)}{\mathcal{N}(\zeta)} \right) \Big|_{\zeta=|\epsilon|^2}. \quad (233)$$

Die Abbildung 20 zeigt den Mandel-Parameter $Q_M^{(|\epsilon\rangle)}$ für den Zustand $|\epsilon\rangle$ als Funktion von λ für vorgegebene feste Werte von $|\epsilon|$. Die Abbildung 20 besteht ebenfalls aus zwei Abschnitten mit unterschiedlichen Maßstäben. Der Mandel-Parameter hat ein Maximum im dem Bereich $\lambda < 0$, wobei sich das Maximum mit zunehmendem $|\epsilon|$ zu höheren λ -Werten verschiebt. Die Maxima in der Abbildung 20 verhalten sich ähnlich wie die Minima in der Abbildung 18. Für große λ geht der Mandel-Parameter gegen Eins, und zwar umso schneller,

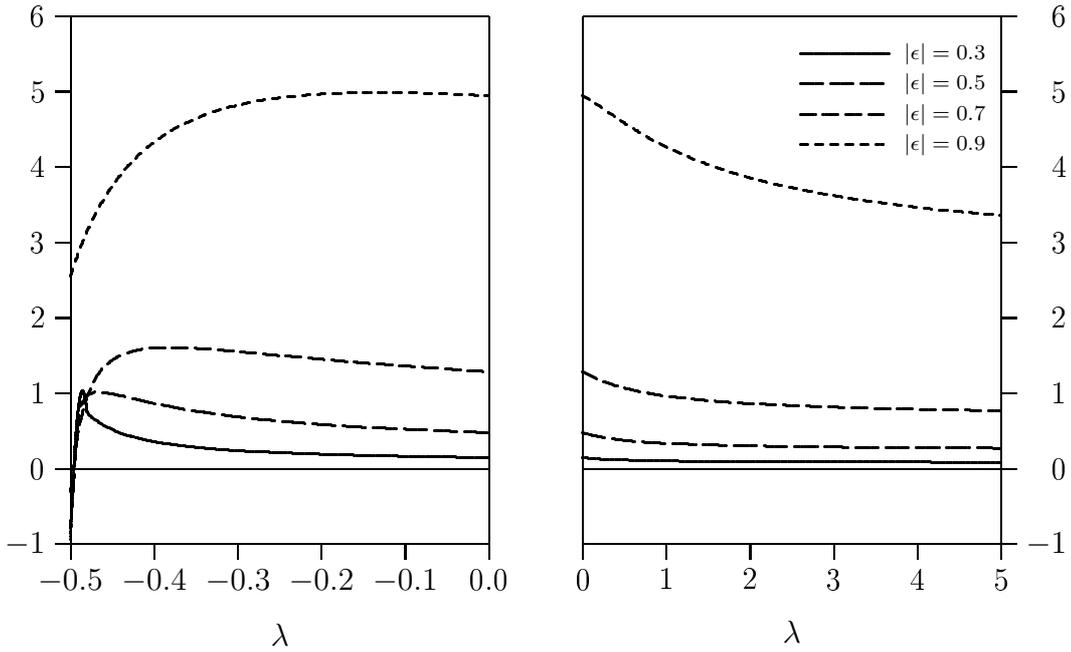


Abbildung 20: Mandel-Parameter $Q_M^{(|\epsilon\rangle)}$ für die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$ als Funktion des Gegenbauer-Parameters λ mit $|\epsilon| = 0.3$, $|\epsilon| = 0.5$, $|\epsilon| = 0.7$ und $|\epsilon| = 0.9$.

je niedriger der Wert von $|\epsilon|$ ist. Die einzigen negativen Werte des Mandel-Parameters in der Abbildung 20 treten in der Nähe von $\lambda = -\frac{1}{2}$ auf.

Die Abbildung 21 zeigt den Mandel-Parameter $Q_M^{(|\epsilon\rangle)}$ als Funktion von $|\epsilon|$ für feste vorgegebene Gegenbauer-Parameter λ . Der Mandel-Parameter nimmt mit steigendem $|\epsilon|$ zu.

5.4 Eigenzustände von \hat{E} auf dem Einheitskreis

Neben den Eigenwerten innerhalb des Einheitskreises haben die Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} auch Eigenwerte auf dem Einheitskreis ($|\epsilon| = 1$). Aus (203) ergibt sich mit $\epsilon = e^{i\theta}$ die entsprechende Eigenwertgleichung

$$\hat{E} |e^{i\theta}\rangle = e^{i\theta} |e^{i\theta}\rangle, \quad (234)$$

die von den Exponentialzuständen erster Art (210) mit $\epsilon = e^{i\theta}$ erfüllt wird. Wenn die Reihe in (210) für $|\epsilon| = 1$ konvergiert, sind die Eigenzustände normierbar.

Die normierbaren Eigenzustände werden aus (210) durch die Ersetzung $\epsilon = e^{i\theta}$ erhalten

$$|e^{i\theta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle. \quad (235)$$

Bei den nicht-normierbaren Eigenzuständen

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle \quad (236)$$

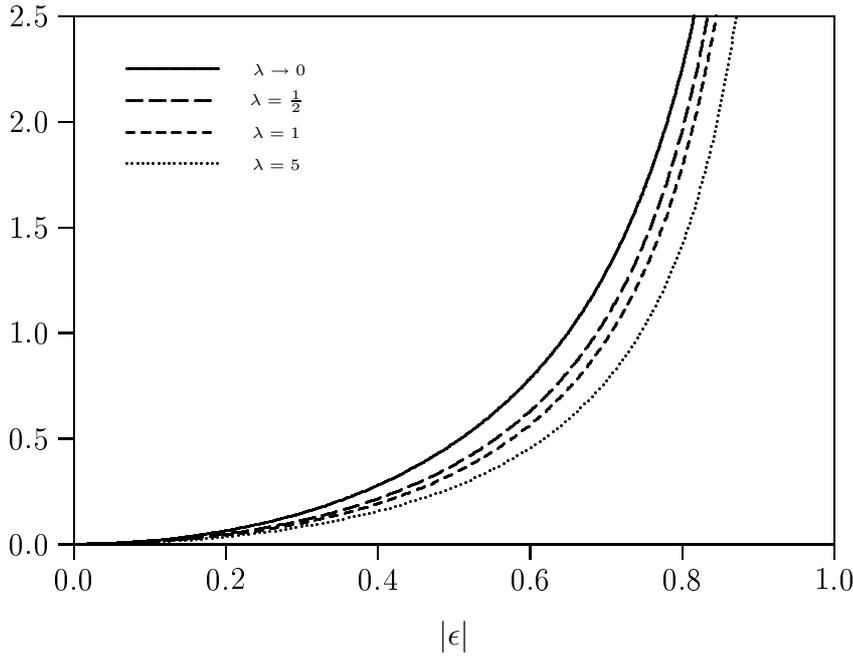


Abbildung 21: Mandel-Parameter $Q_M^{(|\epsilon\rangle)}$ für die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$ als Funktion von $|\epsilon|$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$.

wird an Stelle der nicht-existierenden Normierungsfunktion $\mathcal{N}(1)$ der Ausdruck 2π verwendet. Aus der Beziehung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta |\theta\rangle\langle\theta| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho(n)} |n\rangle\langle n| \quad (237)$$

folgt, dass die nicht-normierbaren Eigenzustände (236) im Allgemeinen keine Darstellung des Einheitsoperators ermöglichen. Nur dann, wenn die Parameterfunktion $\rho(n)$ unabhängig von n ist, kann der Einheitsoperator durch die nicht-normierbaren Eigenzustände $|\theta\rangle$ dargestellt werden. Dies trifft auf diejenigen Eigenzustände zu, die mit den Chebyshev-Polynomen zweiter Art $U_n(x)$ im Zusammenhang stehen. Wie aus der Tabelle 3 hervorgeht, ist in diesem Fall die Parameterfunktion $\rho(n) = 1$ für alle n . Dabei handelt es sich um die bekannten *Phasenzustände* [10], die mit dem Exponentialoperator \hat{E}_{SG} von Susskind und Glogower im Zusammenhang stehen

$$|\theta\rangle_{\text{SG}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} |n\rangle. \quad (238)$$

Daher können die Zustände gemäß (236) als verallgemeinerte Phasenzustände betrachtet werden.

5.5 Darstellung des Einheitsoperators mit $|\epsilon\rangle$ -Zuständen

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob mit Hilfe der Mellin-Transformation die Gewichtsfunktion für die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$ auffindbar ist. Die Gewichtsfunktion ist beispiels-

weise für die Darstellung des Einheitsoperators durch die Exponentialzustände erforderlich

$$\frac{1}{\pi} \int_D d^2\epsilon \mathcal{W}(|\epsilon|^2) |\epsilon\rangle\langle\epsilon| = \hat{1}. \quad (239)$$

Dabei wird über die Kreisfläche $D = (\epsilon, |\epsilon| \leq 1)$ in der komplexen ϵ -Ebene integriert. Für die verallgemeinerten kohärenten Zustände der Form (210) haben Klauder *et al.* [35] ein Verfahren zum Auffinden der Gewichtsfunktionen $\mathcal{W}(|\epsilon|^2)$ angegeben. Der wesentliche Schritt bei diesem Verfahren ist die Mellin-Transformation, die die Beziehung zwischen der Gewichtsfunktion $\mathcal{W}(|\epsilon|^2)$ und der Parameterfunktion $\rho(n)$ angibt. Das Einsetzen der Zustände (210) in (239) mit den Substitutionen $\zeta = |\epsilon|^2$ und $n = s - 1$ ergibt die Form einer Mellin-Transformation

$$\int_0^1 d\zeta \zeta^{s-1} \tilde{\mathcal{W}}(\zeta) = \rho(s-1), \quad (240)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{W}}(\zeta) = \frac{\mathcal{W}(\zeta)}{\mathcal{N}(\zeta)}. \quad (241)$$

Für eine gegebene Parameterfunktion $\rho(s)$ lässt sich die korrespondierende Gewichtsfunktion unmittelbar aus den Tabellen über die Mellin-Transformationen ablesen. Solche Tabellen wurden beispielsweise von Oberhettinger [36], Marichev [37] oder Prudnikov *et al.* [38] publiziert.

Für die klassischen Polynome ist die Mellin-Transformation des s -abhängigen Anteils der Parameterfunktion (211) durch die Gleichung 15.2 in der Tabelle [36] gegeben

$$\int_0^1 d\zeta \zeta^{s-1} (1-\zeta)^{\gamma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1-\zeta) = \Gamma(\gamma) \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(s+\gamma-\alpha)\Gamma(s+\gamma-\beta)}, \quad (242)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\Re(\gamma) > 0, \quad \Re(s) > 0, \quad \Re(s) > \Re(\alpha + \beta - \gamma). \quad (243)$$

Da jedoch $\gamma = 0$, werden die Nebenbedingungen (243) nicht erfüllt. Somit ist keine Gewichtsfunktion für die Exponentialzustände erster Art bekannt. Der Einheitsoperator kann daher nicht durch die Exponentialzustände (210) dargestellt werden. Um dieses Problem zu umgehen, werden im nächsten Abschnitt entsprechend modifizierte Exponentialzustände eingeführt.

5.6 Modifizierte Exponentialzustände

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass die Bestimmung der Gewichtsfunktion für die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$, die mit den klassischen Polynomen im Zusammenhang stehen, mit Hilfe der Mellin-Transformation nicht möglich ist, da die erste Nebenbedingung in (243)

nicht erfüllt ist. Um dieses Problem zu überwinden, werden in diesem Abschnitt modifizierte Exponentialzustände eingeführt, die die Nebenbedingungen (243) erfüllen.

Die modifizierten Exponentialzustände sind definiert durch

$$|\tau; \epsilon\rangle = [\mathcal{N}(\tau; |\epsilon|^2)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{\sqrt{\rho(\tau; n)}} |n\rangle. \quad (244)$$

Für die modifizierten Exponentialzustände (244), die mit den Gegenbauer-Polynomen im Zusammenhang stehen, lauten die dazugehörige Parameterfunktion

$$\rho(\tau; n) = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda + 1 + \tau)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{n! \Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(n + \lambda) \Gamma(n + \lambda + 1 + \tau)} \quad (245)$$

und Normierungsfunktion

$$\mathcal{N}(\tau; |\epsilon|^2) = {}_2F_1(\lambda, \lambda + 1 + \tau; 2\lambda; |\epsilon|^2). \quad (246)$$

Die modifizierten Exponentialzustände (244) weisen einen zusätzlichen positiven Parameter τ auf. Der Spezialfall $\tau = 0$ ist mit den ursprünglichen Exponentialzuständen (210) identisch. Die modifizierten Exponentialzustände (244) sind somit eine Verallgemeinerung der Exponentialzustände erster Art (210). Darüber hinaus können die modifizierten Exponentialzustände (244) als Eigenzustände eines modifizierten Exponentialoperators

$$\hat{E}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\tau) |n\rangle\langle n+1| \quad (247)$$

mit

$$f_n(\tau) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2\lambda)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1+\tau)}}. \quad (248)$$

aufgefasst werden.

Mit Verwendung der Tabellen über die Mellin-Transformation in [36] wird die Gewichtsfunktion gemäß Gleichung 5.50 (Seite 198) oder Gleichung 15.2 (Seite 160) erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\tau; |\epsilon|^2) &= \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda + 1 + \tau)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(\tau)} (1 - |\epsilon|^2)^{\tau-1} \\ &\times {}_2F_1(1 - \lambda + \tau, -\lambda; \tau; 1 - |\epsilon|^2) {}_2F_1(\lambda, \lambda + 1 + \tau; 2\lambda; |\epsilon|^2). \end{aligned} \quad (249)$$

Die Nebenbedingungen (243) sind für $\lambda > 0$ und $\tau > 0$ erfüllt. Die zweite hypergeometrische ${}_2F_1$ -Funktion in (249) ist mit der Normierungsfunktion $\mathcal{N}(\tau; |\epsilon|^2)$ identisch. Die erste hypergeometrische ${}_2F_1$ -Funktion in (249) ist zumindest abschnittsweise für den Fall $0 < \lambda < 1$ negativ. Um einerseits die Nebenbedingungen (243) zu erfüllen und andererseits auch eine stets nicht-negative Gewichtsfunktion zu erhalten, muss der Gegenbauer-Parameter $\lambda \geq 1$ sein. Die Darstellung des Einheitsoperators ist gegeben durch

$$\lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{1}{\pi} \int_D d^2\epsilon \mathcal{W}(\tau; |\epsilon|^2) |\tau; \epsilon\rangle\langle\tau; \epsilon| = \hat{1}, \quad (250)$$

wobei die Grenzbetrachtung $\tau \rightarrow 0$ nach der Integration durchgeführt wird.

Die obigen Modifikationen der Zustände mit ${}_2F_1$ -Funktionen lassen sich auf die Zustände mit ${}_4F_3$ -Funktionen, die mit den Jacobi-Polynomen im Zusammenhang stehen, übertragen. Dies ergibt mit den Abkürzungen (218) die Parameterfunktion

$$\rho(\tau; n) = \frac{n! (\beta_1)_n (\beta_2)_n (\beta_3)_n}{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n (\alpha_2)_n (\alpha_3 + \tau)_n} \quad (251)$$

und die Normierungsfunktion

$$\mathcal{N}(\tau; |\epsilon|^2) = {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 + \tau; \beta_1, \beta_2, \beta_3; |\epsilon|^2). \quad (252)$$

Die entsprechende Gewichtsfunktion enthält die Meijer-G-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\tau; |\epsilon|^2) &= \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_3 + \tau)}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2) \Gamma(\beta_3)} {}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 + \tau; \beta_1, \beta_2, \beta_3; |\epsilon|^2) \\ &\times G_{4,4}^{4,0} \left(|\epsilon|^2 \left| \begin{array}{c} \alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + \tau - 1 \\ \beta_1 - 1, \beta_2 - 1, \beta_3 - 1, 0 \end{array} \right. \right), \end{aligned} \quad (253)$$

wobei die Mellin-Transformation gemäß Gleichung 8.4.51.9 in [38] verwendet wurde.

5.7 Verteilungen aus den (modifizierten) Exponentialzuständen

Die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ definieren gemäß $Q_{|\psi\rangle}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \psi \rangle \langle \psi | \alpha \rangle$ die bekannte Husimi-Verteilung in der komplexen α -Ebene für einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$. Analog dazu können durch die Exponentialzustände $|\epsilon\rangle$ entsprechende Verteilungen innerhalb des Einheitskreises der komplexen ϵ -Ebene definiert werden

$$Q_{|\psi\rangle}(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \mathcal{W}(|\epsilon|^2) \langle \epsilon | \psi \rangle \langle \psi | \epsilon \rangle. \quad (254)$$

Auf ähnliche Weise werden modifizierte Husimi-Verteilungen durch die modifizierten Exponentialzustände $|\tau; \epsilon\rangle$ definiert

$$Q_{|\psi\rangle}(\tau; \epsilon) = \frac{1}{\pi} \mathcal{W}(\tau; |\epsilon|^2) \langle \tau; \epsilon | \psi \rangle \langle \psi | \tau; \epsilon \rangle. \quad (255)$$

Für beliebige normierte Zustände $|\psi\rangle$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung innerhalb des Einheitskreises in der komplexen ϵ -Ebene auf Eins normiert

$$\int_D d^2\epsilon Q_{|\psi\rangle}(\tau; \epsilon) = 1. \quad (256)$$

Es ist zweckmäßig, die komplexe Variable $\epsilon = |\epsilon|e^{i\theta}$ in deren Modul und Phase zu zerlegen. Die Integration über die Phase θ führt auf eine Radialverteilung

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(\tau; |\epsilon|) = |\epsilon| \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta Q_{|\psi\rangle}(\tau; |\epsilon|e^{i\theta}) \quad (257)$$

für das Intervall $0 \leq |\epsilon| \leq 1$. Die Integration über das Modul ergibt eine Phasenverteilung

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(\tau; \theta) = \int_0^1 d|\epsilon| |\epsilon| Q_{|\psi\rangle}(\tau; |\epsilon| e^{i\theta}). \quad (258)$$

Sowohl die Radialverteilungen als auch die Phasenverteilungen sind auf Eins normiert:

$$\int_0^1 d|\epsilon| \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(\tau; |\epsilon|) = 1, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(\tau; \theta) = 1. \quad (259)$$

Die Radialverteilungen und Phasenverteilungen können beispielsweise verwendet werden, um die Erwartungswerte von Funktionen der radialen Variablen und der Phase zu bestimmen. Die Verteilungen und Erwartungswerte, die aus den ursprünglichen nicht-modifizierten Zuständen resultieren, werden durch die Grenzbetrachtung $\tau \rightarrow 0$ erhalten. Bei der Radialverteilung kann diese Grenzbetrachtung erst nach der Integration über das Modul $|\epsilon|$ durchgeführt werden. Bei der Phasenverteilung kann jedoch die Grenzbetrachtung $\tau \rightarrow 0$ bereits in der Verteilung selbst durchgeführt werden.

5.8 Phasenverteilungen aus den Exponentialzuständen

Die Phasenverteilungen (258) für beliebige Zustände $|\psi\rangle$ werden nachstehend bestimmt. Die Integration über $\zeta = |\epsilon|^2$ ergibt gemäß (240)

$$\int_0^1 d\zeta \frac{\mathcal{W}(\tau; \zeta)}{\mathcal{N}(\tau; \zeta)} \zeta^{\frac{n+n'}{2}} = \rho(\tau; \frac{n+n'}{2}). \quad (260)$$

Mit $\tau \rightarrow 0$ ergibt dies die Phasenverteilungen für einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n, n'} \psi_n \psi_{n'}^* \mathcal{G}(n, n') e^{-i(n-n')\theta}, \quad \psi_n = \langle n | \psi \rangle \quad (261)$$

mit den Koeffizienten

$$\mathcal{G}(n, n') = \frac{\rho(\frac{n+n'}{2})}{\sqrt{\rho(n) \rho(n')}}, \quad (262)$$

wobei die Parameterfunktionen $\rho(n)$ in der Tabelle 3 und in (216) angegeben sind. Die Koeffizienten (262) sind symmetrisch $\mathcal{G}(n, n') = \mathcal{G}(n', n)$ und normiert gemäß $\mathcal{G}(n, n) = 1$.

Wird ein quantenmechanisches System durch die Dichtematrix $\rho_{n, n'}$ beschrieben, können die Phasenverteilungen (261) in der Form einer Fourier-Reihe dargestellt werden

$$\mathcal{P}_\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}(n+k, n) [\Re(\rho_{n+k, n}) \cos(k\theta) + \Im(\rho_{n+k, n}) \sin(k\theta)]. \quad (263)$$

Daraus können beispielsweise die Erwartungswerte der trigonometrischen Funktionen der Phase direkt abgelesen werden

$$\langle \cos(k\theta) \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n+k, n) \Re(\rho_{n+k, n}), \quad (264)$$

$$\langle \sin(k\theta) \rangle_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n+k, n) \Im(\rho_{n+k, n}). \quad (265)$$

Deren Schwankungsquadrate sind gegeben durch

$$\sigma_{\cos \theta \cos \theta}^\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle \cos 2\theta \rangle_\rho - \langle \cos \theta \rangle_\rho^2, \quad (266)$$

$$\sigma_{\sin \theta \sin \theta}^\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \langle \cos 2\theta \rangle_\rho - \langle \sin \theta \rangle_\rho^2. \quad (267)$$

Für die Phase selbst ergeben sich die Erwartungswerte

$$\langle \theta \rangle_\rho = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n+k, n) \Im(\rho_{n+k, n}), \quad (268)$$

$$\langle \theta^2 \rangle_\rho = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n+k, n) \Re(\rho_{n+k, n}), \quad (269)$$

woraus sich beispielsweise das Schwankungsquadrat $\sigma_{\theta\theta}^\rho = \langle \theta^2 \rangle_\rho - \langle \theta \rangle_\rho^2$ bestimmen lässt. Bei einigen physikalisch wichtigen Zuständen hat die Dichtematrix die Form $\rho_{n+k, n} = |\rho_{n+k, n}| e^{ik\varphi}$, so dass in diesem Fall die Phasenverteilungen nur von der Differenz $\theta - \varphi$ abhängt

$$\mathcal{P}_\rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}(n+k, n) |\rho_{n+k, n}| \cos[k(\theta - \varphi)]. \quad (270)$$

Nachstehend werden die Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\lambda)}(\theta)$ der Form (261) untersucht, die mit den Gegenbauer-Polynomen im Zusammenhang stehen. Die ausführliche Darstellung der dazugehörigen Koeffizienten (262) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n') &= \frac{\Gamma(\frac{n+n'}{2} + 1) \Gamma(\frac{n+n'}{2} + 2\lambda)}{\Gamma(\frac{n+n'}{2} + \lambda) \Gamma(\frac{n+n'}{2} + \lambda + 1)} \\ &\times \sqrt{\frac{\Gamma(n + \lambda) \Gamma(n' + \lambda) \Gamma(n + \lambda + 1) \Gamma(n' + \lambda + 1)}{n! n'! \Gamma(n + 2\lambda) \Gamma(n' + 2\lambda)}}. \end{aligned} \quad (271)$$

Die Phasenverteilungen (261) haben die gleiche Struktur wie die bekannten Phasenverteilungen von Pegg und Barnett $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$, aus der Husimi-Verteilung $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{Q})}(\theta)$ und aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{W})}(\theta)$. Die Phasenverteilungen unterscheiden sich nur durch ihre Koef-

fizienten [16, 34]

$$\mathcal{G}^{(\text{PB})}(n, n') = 1 \quad (272)$$

$$\mathcal{G}^{(\text{Q})}(n, n') = \frac{\Gamma(\frac{n+n'}{2} + 1)}{\sqrt{n! n'}} \quad (273)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(\text{W})}(n, n') &= \sum_{m=0}^{\tilde{p}} (-1)^{\tilde{p}-m} 2^{m+\frac{|n-n'|}{2}} \\ &\times \sqrt{\binom{\tilde{p}}{m} \binom{\tilde{q}}{\tilde{p}-m} \frac{\Gamma(m + \frac{|n-n'|}{2} + 1)}{\sqrt{m! (m + |n-n'|)!}}} \end{aligned} \quad (274)$$

mit $\tilde{p} = \min(n, n')$ und $\tilde{q} = \max(n, n')$. Die von λ unabhängigen Faktoren von $\mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n')$ in (271) entsprechen exakt dem Koeffizienten (273) für die Phasenverteilung aus der Husimi-Verteilung.

In dem Fall $\lambda = 1$, der mit den Chebyshev-Polynomen zweiter Art $U_n(x)$ im Zusammenhang steht, wird der Koeffizient (271) stets Eins und ist somit identisch mit den Koeffizienten (272) der Phasenverteilungen von Pegg und Barnett

$$\mathcal{G}^{(\lambda=1)}(n, n') = \mathcal{G}^{(\text{PB})}(n, n') = 1. \quad (275)$$

Im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$, der mit den Polynomen $T_n(x)$ im Zusammenhang steht, geht der Wert des Koeffizienten (271) gegen eine Konstante

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n+k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} \right]^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2} & (n=0), \\ 1 & (n \neq 0), \end{cases}$$

die unabhängig von $k = 1, 2, 3, \dots$ ist.

Der Vollständigkeit halber werden auch die Koeffizienten für den Spezialfall $\lambda = \frac{1}{2}$, der mit den Legendre-Polynomen $P_n(x)$ im Zusammenhang steht, angegeben

$$\mathcal{G}^{(\lambda=\frac{1}{2})}(n, n') = \frac{\pi \sqrt{(2n+1)(2n'+1)} (2n-1)!! (2n'-1)!!}{2^{n+n'} (n+n'+1) n! n'} \left[\frac{\Gamma(\frac{n+n'}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n+n'+1}{2})} \right]^2. \quad (276)$$

Im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$ geht der Koeffizient (271) gegen den Koeffizienten (273) der Husimi-Phasenverteilungen

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n') = \mathcal{G}^{(\text{Q})}(n, n'). \quad (277)$$

Die Phasenverteilungen (273) aus der Husimi-Verteilung sind somit ein Grenzfall der Phasenverteilungen (261) mit dem Koeffizienten (271). Somit interpolieren die Phasenverteilungen (261) in dem Bereich $1 \leq \lambda \leq \infty$ zwischen den Phasenverteilungen von Pegg und Barnett einerseits und denen aus der Husimi-Verteilung andererseits.

Die Abbildung 22 zeigt die Koeffizienten $\mathcal{G}^{(\lambda)}(0, 1)$ und $\mathcal{G}^{(\lambda)}(1, 2)$ als Funktion von λ . Im Fall $\lambda \geq 1$ sind die Koeffizienten stets $\mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n') \leq 1$ und im Fall $\lambda \leq 1$ stets $\mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n') \geq 1$.

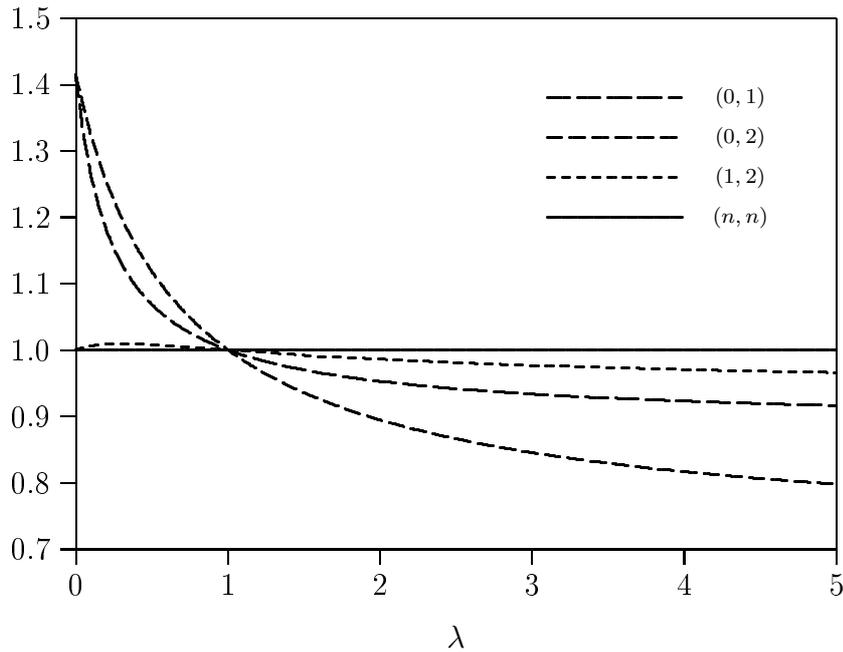


Abbildung 22: Koeffizienten $\mathcal{G}^{(\lambda)}(0, 1)$, $\mathcal{G}^{(\lambda)}(0, 2)$, $\mathcal{G}^{(\lambda)}(1, 2)$ und $\mathcal{G}^{(\lambda)}(n, n)$ als Funktion des Gegenbauer-Parameters λ .

5.8.1 Phasenverteilungen für die kohärenten Zustände

Die Phasenverteilungen für die kohärenten Zustände sind durch (270) gegeben mit den Dichtematrixelementen

$$\rho_{n+k,n} = \frac{|\alpha|^{2n+k}}{\sqrt{n!(n+k)!}} e^{-|\alpha|^2} e^{ik\varphi_\alpha}, \quad (278)$$

wobei φ_α die Phase des Verschiebungsparameters $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi_\alpha}$ ist.

Die Abbildung 23 zeigt die Phasenverteilungen für die kohärenten Zustände mit den Parametern $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$. Die Phasenverteilungen der kohärenten Zustände haben ein Maximum an der Stelle $\varphi_\alpha = 0$. Die Höhe des Maximums nimmt mit dem Wert der Verschiebungsintensität $|\alpha|$ zu. Weiterhin nimmt die Höhe des Maximums mit dem Wert des Parameters λ ab. Die Verteilungen mit niedrigeren λ liegen dem klassischen Grenzfall näher als die Verteilungen mit höheren λ .

Die Abbildung 24 zeigt die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$, aus der Husimi-Verteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{Q})}(\theta)$ und aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{W})}(\theta)$ für die kohärenten Zustände mit dem Verschiebungsparameter $\alpha = 1$. Die Phasenverteilungen für die kohärenten Zustände haben ein Maximum an der Stelle $\varphi_\alpha = 0$. Die Höhe des Maximums nimmt mit dem Wert der Verschiebungsintensität $|\alpha|$ zu. Weiterhin hängt die Höhe des Maximums auch von der Art der Phasenverteilung ab. Die Phasenverteilung aus der Wigner-Funktion hat das höchste Maximum, während die Phasenverteilung aus der Husimi-Verteilung das niedrigste Maximum hat. Die Phasenverteilung von Pegg und Barnett liegt dazwischen. Alle in den Abbildungen 23 und 24 dargestellten Phasenverteilungen für die kohärenten Zustände sind nicht-negativ.

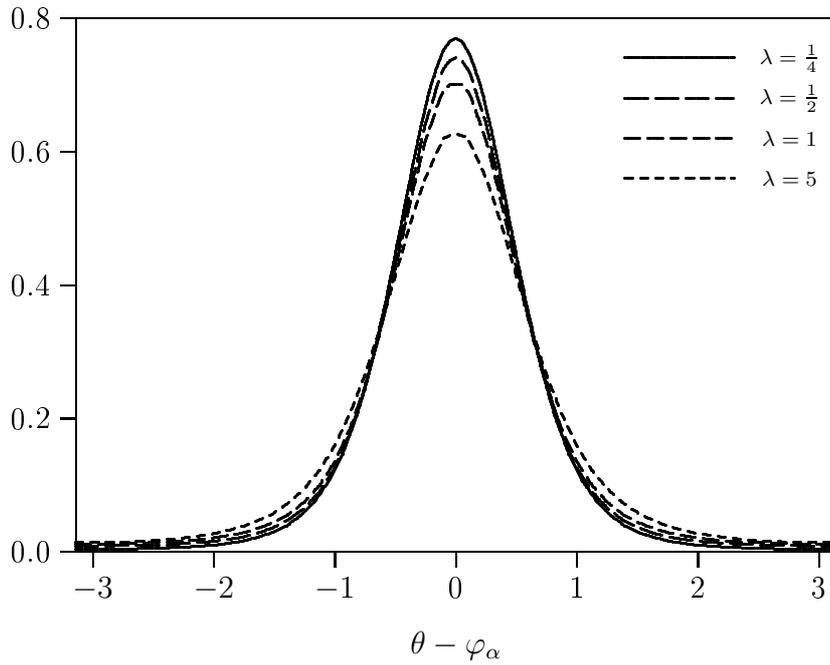


Abbildung 23: Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\lambda)}(\theta)$ mit den Parametern $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$ für die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ mit $|\alpha| = 1$.

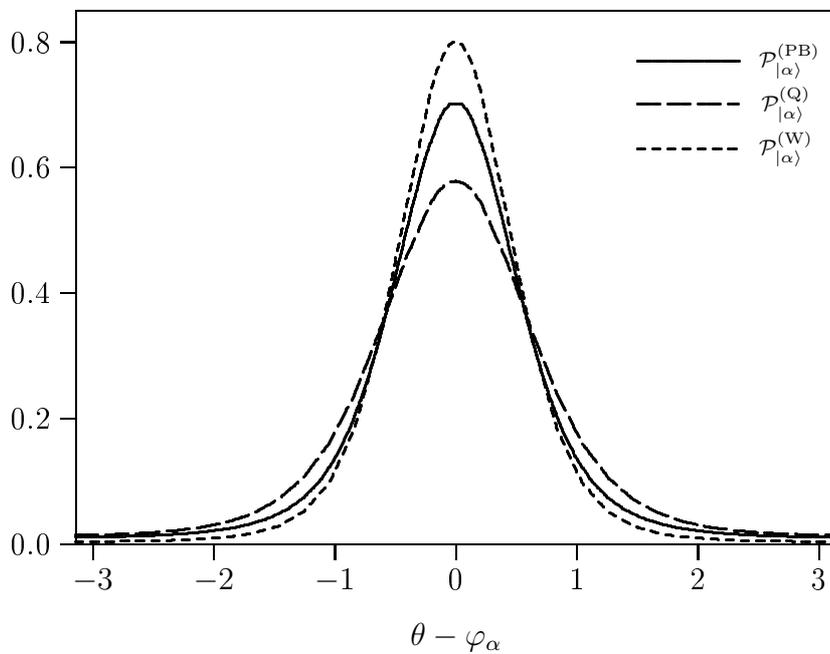


Abbildung 24: Phasenverteilungen nach Pegg-Barnett $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$, aus der Husimi-Verteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{Q})}(\theta)$ und aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{W})}(\theta)$ für die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ mit $|\alpha| = 1$.

5.8.2 Phasenverteilungen für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 1\rangle$ und $|0, 2\rangle$

Für die gleichmäßige Überlagerung von zwei Fock-Zuständen

$$|m, n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|m\rangle + |n\rangle) \quad (279)$$

sind die Phasenverteilungen gegeben durch

$$\mathcal{P}_{|m,n\rangle}^{(\lambda)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{G}^{(\lambda)}(m, n) \cos[(m - n)\theta]. \quad (280)$$

Um nicht-negative Phasenverteilungen für die überlagerten Fock-Zustände zu erhalten, müssen die Koeffizienten (271) die Bedingung

$$\mathcal{G}^{(\lambda)}(m, n) \leq 1. \quad (281)$$

erfüllen. Die Koeffizienten $\mathcal{G}^{(\lambda)}(m, n)$ erfüllen diese Bedingungen stets dann, falls $\lambda \geq 1$.

Die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett sind stets nicht-negativ, da deren Koeffizient $\mathcal{G}^{(\text{PB})}(m, n) = 1$ für alle m, n ist. Auch die Phasenverteilungen aus der Husimi-Verteilung sind nicht-negativ, da deren Koeffizient $0 < \mathcal{G}^{(\text{Q})}(m, n) \leq 1$ ist. Dagegen sind die Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion teilweise negativ, da deren Koeffizient sowohl $\mathcal{G}^{(\text{W})}(m, n) \leq 1$ als auch $\mathcal{G}^{(\text{W})}(m, n) \geq 1$ sein können.

Die Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|0,1\rangle}(\theta)$ und $\mathcal{P}_{|0,2\rangle}(\theta)$ für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 1\rangle$ und $|0, 2\rangle$ werden anschließend untersucht.

Die Abbildung 25 zeigt die Phasenverteilungen für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 1\rangle$ mit $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$. Die Phasenverteilungen mit $\lambda \geq 1$ sind stets nicht-negativ, während die Phasenverteilungen mit $\lambda < 1$ teilweise negativ sind.

Die Abbildung 26 zeigt die Phasenverteilungen für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 1\rangle$ nach Pegg-Barnett, aus der Husimi-Verteilung und aus der Wigner-Funktion. Die Phasenverteilung nach Pegg-Barnett und die oben eingeführte Phasenverteilung mit $\lambda = 1$ sind identisch. Alle dargestellten Phasenverteilungen für den Zustand $|0, 1\rangle$ haben an der Stelle $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ den gleichen Wert.

Die Abbildung 27 zeigt die Phasenverteilungen für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 2\rangle$ mit $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$. Die Phasenverteilungen für $|0, 2\rangle$ zeigen hinsichtlich der Abhängigkeit vom Gegenbauer-Parameter λ ein ähnliches Verhalten wie die Phasenverteilungen für $|0, 1\rangle$.

Die Abbildung 28 zeigt die Phasenverteilungen nach Pegg-Barnett, aus der Husimi-Verteilung und aus der Wigner-Funktion für die Überlagerung der Fock-Zustände $|0, 2\rangle$. Die Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{W})}(\theta)$ aus der Wigner-Funktion ist teilweise negativ. Daher sind die Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{W})}(\theta)$ aus der Wigner-Funktion und auch die Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\lambda)}(\theta)$ mit $\lambda < 1$ keine echten Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

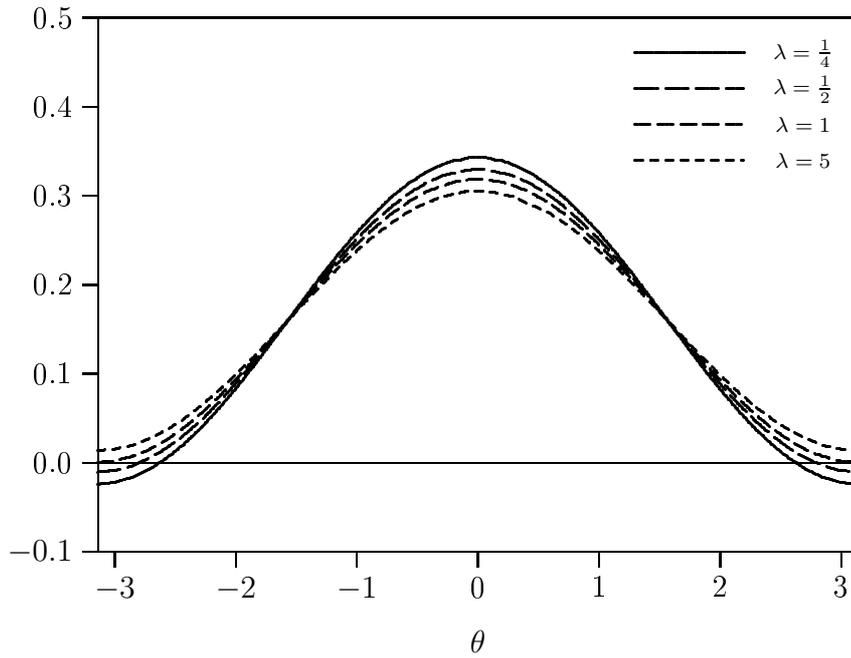


Abbildung 25: Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|0,1\rangle}^{(\lambda)}(\theta)$ für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 1\rangle$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$.

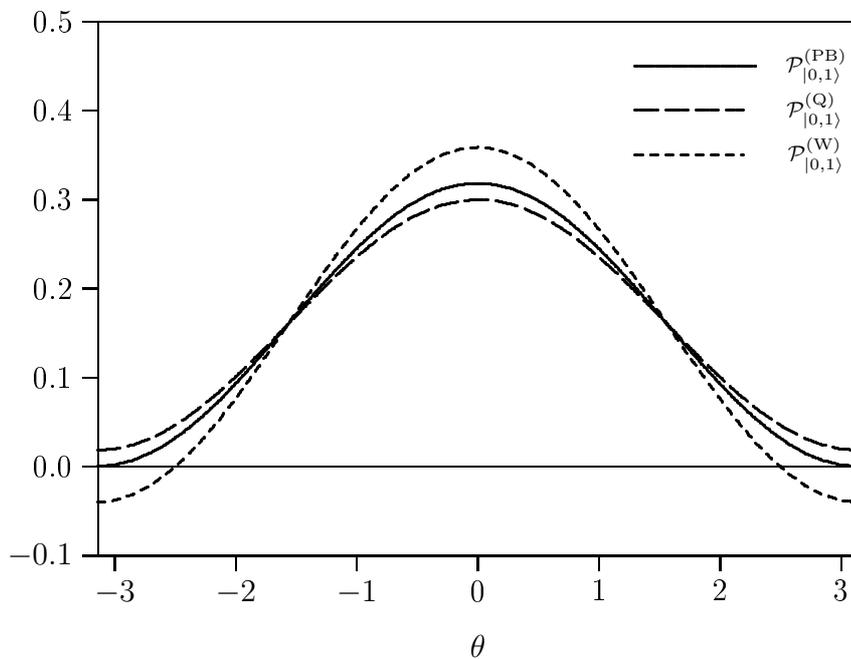


Abbildung 26: Phasenverteilungen nach Pegg-Barnett $\mathcal{P}_{|0,1\rangle}^{(PB)}(\theta)$, aus der Husimi-Verteilung $\mathcal{P}_{|0,1\rangle}^{(Q)}(\theta)$ und aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|0,1\rangle}^{(W)}(\theta)$ für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 1\rangle$.

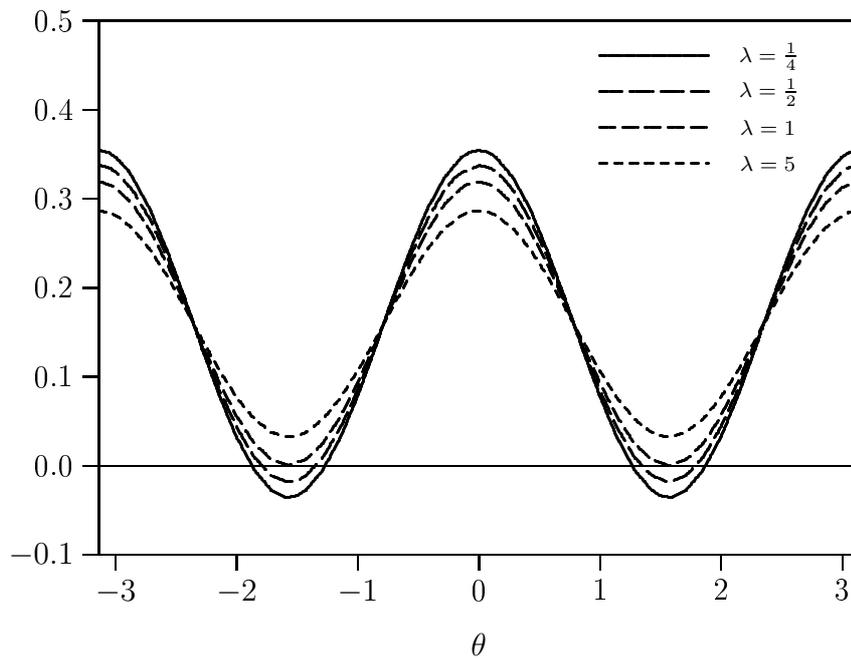


Abbildung 27: Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|0,2\rangle}^{(\lambda)}(\theta)$ für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 2\rangle$ mit den Gegenbauer-Parametern $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$.

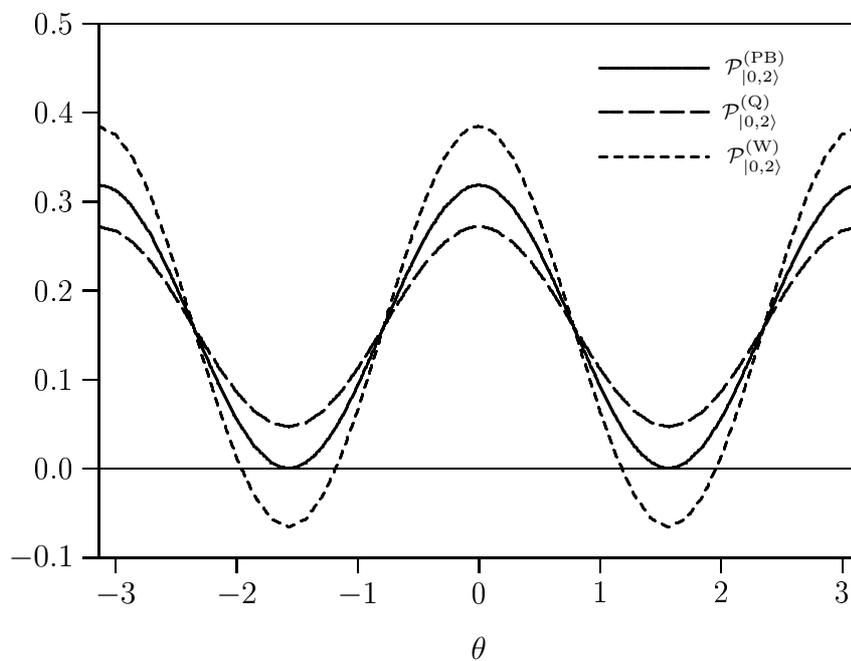


Abbildung 28: Phasenverteilungen nach Pegg-Barnett $\mathcal{P}_{|0,2\rangle}^{(PB)}(\theta)$, aus der Husimi-Verteilung $\mathcal{P}_{|0,2\rangle}^{(Q)}(\theta)$ und aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|0,2\rangle}^{(W)}(\theta)$ für die überlagerten Fock-Zustände $|0, 2\rangle$.

6 Verallgemeinerte hypergeometrische Zustände

In diesem Kapitel wird eine weitere Verallgemeinerung der Eigenzustände der Exponentialoperatoren erster Art \hat{E} eingeführt. Für den Fall der klassischen Polynome haben die verallgemeinerten Exponentialzustände ($g_n = 0$) als Normierungsfunktion die Gaußsche hypergeometrische ${}_2F_1$ -Funktion, und die der erweiterten Exponentialzustände erster Art ($g_n \neq 0$) die ${}_4F_3$ -Funktion. Dabei stehen die Parameter der ${}_2F_1$ -Funktion und der ${}_4F_3$ -Funktion in fester Beziehung zueinander und sind eine Funktion des Gegenbauer-Parameters λ bzw. der Jacobi-Parameter μ und ν , da die Exponentialzustände mit den Eigenschaften der Polynome im Zusammenhang stehen.

Die Verallgemeinerung der Exponentialzustände erster Art (210) erfolgt in zweifacher Hinsicht. Einerseits wird die feste Beziehung zwischen den Parametern der ${}_2F_1$ -Funktionen bzw. ${}_4F_3$ -Funktionen aufgehoben, so dass die Parameter unabhängig voneinander sind und die Exponentialzustände im Allgemeinen nicht mit den Kosinus- und Sinusoperatoren im Zusammenhang stehen. Andererseits werden als Normierungsfunktionen die verallgemeinerten hypergeometrischen ${}_pF_q$ -Funktionen verwendet, die als Spezialfall die ${}_2F_1$ -Funktionen und ${}_4F_3$ -Funktionen enthalten. Die so erhaltenen Zustände werden als verallgemeinerte hypergeometrische Zustände (VHG-Zustände) bezeichnet. Es sind jedoch spezielle Bedingungen für die Parameter der ${}_pF_q$ -Funktionen erforderlich, um normierbare Zustände zu erhalten und die Darstellung des Einheitsoperators zu ermöglichen. Diejenigen VHG-Zustände, die die Darstellung des Einheitsoperators ermöglichen, werden als kohärente verallgemeinerte hypergeometrische Zustände (kohärente VHG-Zustände) bezeichnet.

6.1 Definition der verallgemeinerten hypergeometrischen Zustände

Die verallgemeinerten hypergeometrischen Zustände (VHG-Zustände) sind definiert durch

$$|p; q; z\rangle \equiv |\{a_1, \dots, a_p\}; \{b_1, \dots, b_q\}; z\rangle_{(p,q)} = [{}_p\mathcal{N}_q(|z|^2)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{{}_p\rho_q(n)}} |n\rangle, \quad (282)$$

mit den streng positiven Parameterfunktionen der diskreten Variablen n

$${}_p\rho_q(n) \equiv {}_p\rho_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; n) = \Gamma(n+1) \frac{(b_1)_n \cdots (b_q)_n}{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}, \quad (283)$$

wobei $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ das Pochhammer-Symbol ist. Die Normierungsfunktion ist durch die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion gegeben

$${}_p\mathcal{N}_q(\zeta) = {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{\zeta^n}{n!} \quad (284)$$

mit $\zeta = |z|^2$. Die verallgemeinerten hypergeometrischen Zustände sind Funktionen der komplexen Variable z sowie der Zähler-Parameter a_1, \dots, a_p und der Nenner-Parameter b_1, \dots, b_q . Die nicht-negativen ganzen Zahlen p und q nehmen die Werte $p = 0$ und/oder

$q = 0$ an, falls kein Zähler-Parameter bzw. kein Nenner-Parameter existiert. In der alternativen Schreibweise von (282) wird beispielsweise der Fall $q = 0$ durch eine leere geschweifte Klammer gekennzeichnet

$$|1; 0; z\rangle = |\{a\}; \{\}; z\rangle_{(1;0)}. \quad (285)$$

Die Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ sind für die Eigenschaften der VHG-Zustände und der daraus resultierenden Größen von zentraler Bedeutung. Entsprechend der Anzahl $p + q$ der Parameter a_1, \dots, a_p und b_1, \dots, b_q weisen die Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ insgesamt $p + q$ Pochhammer-Symbole auf. Die Zähler-Parameter a_1, \dots, a_p der Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ sind untereinander vertauschbar. Ebenso sind deren Nenner-Parameter b_1, \dots, b_q untereinander vertauschbar. Identische Zähler- und Nenner-Parameter heben sich weg. Falls l Zähler-Parameter und l Nenner-Parameter sich paarweise wegheben, reduziert sich der VHG-Zustand $|p; q; z\rangle$ auf einen VHG-Zustand $|p - l; q - l; z\rangle$ niedrigerer Ordnung. Die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ sind spezielle VHG-Zustände mit $p = q = 0$. Ein VHG-Zustand mit $p = q \neq 0$, bei dem sich die p Zähler-Parameter und die q Nenner-Parameter paarweise wegheben, ist ebenfalls ein konventioneller kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$.

Durch die Normierungsfunktion wird auch das Skalarprodukt von zwei verschiedenen VHG-Zuständen mit identischen Parametersätzen a_1, \dots, a_p und b_1, \dots, b_q bestimmt

$$\langle p; q; z | p; q; z' \rangle = \frac{{}_p\mathcal{N}_q(z^* z')}{\sqrt{{}_p\mathcal{N}_q(|z|^2) {}_p\mathcal{N}_q(|z'|^2)}}. \quad (286)$$

Daraus folgt, dass die VHG-Zustände zwar normiert, aber nicht orthogonal sind. Das Skalarprodukt ist dann definiert, wenn die darin enthaltenen verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen konvergieren.

Die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \zeta)$ konvergiert in den folgenden Fällen:

$$\text{beliebige } \zeta < \infty \quad \text{falls} \quad p < q + 1; \quad (287a)$$

$$|\zeta| < 1 \quad \text{falls} \quad p = q + 1; \quad (287b)$$

$$|\zeta| = 1 \quad \text{falls} \quad p = q + 1, \eta < 0; \quad (287c)$$

$$|\zeta| = 1, \zeta \neq 1 \quad \text{falls} \quad p = q + 1, 0 \leq \eta < 1, \quad (287d)$$

wobei

$$\eta \equiv \Re \left(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j \right). \quad (288)$$

In allen anderen Fällen divergiert die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion [37]. Die drei Fälle der unbedingten Konvergenz gemäß (287a, 287b, 287c) entsprechen den VHG-Zuständen in der Ebene (287a), innerhalb des offenen Einheitskreises (287b) bzw. auf dem Einheitskreis (287c). Die Bereiche innerhalb des offenen Einheitskreises (287b) und auf dem Einheitskreis (287c) bilden zusammen den geschlossenen Einheitskreis.

Bei den Zuständen (282) handelt es sich, ungeachtet der Normierungsfunktion, um analytische Funktionen der komplexen Variablen z . Neben den normierbaren Zuständen gibt es

auch bekannte nicht-normierbare Zustände auf dem Einheitskreis, die die Bedingung $\eta < 0$ in Gleichung (287c) verletzen.

Es werden nun die Bedingungen für die Werte der Parameter a_1, \dots, a_p und b_1, \dots, b_q zusammengefasst. Die Null und ganzzahlige negative Werte für die Zähler-Parameter a_1, \dots, a_p werden ausgeschlossen, da diese zu nicht-definierten Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ führen. Ebenso werden für die Nenner-Parameter b_1, \dots, b_q die Null und ganzzahlige negative Werte ausgeschlossen, da diese nicht-definierte Normierungsfunktionen ${}_pF_q$ zur Folge haben. Als nächstes werden an die Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ die Forderungen gestellt, dass sie reell und streng positiv sind, was auf die Bedingungen führt

$$\frac{(b_1 + n) \cdots (b_q + n)}{(a_1 + n) \cdots (a_p + n)} > 0 \quad \text{für alle } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (289)$$

die aus der offensichtlichen Rekurrenzbeziehung folgen

$$\frac{{}_p\rho_q(n+1)}{(n+1)!} = \frac{{}_p\rho_q(n)}{n!} \frac{(b_1 + n) \cdots (b_q + n)}{(a_1 + n) \cdots (a_p + n)}, \quad (290)$$

mit dem Anfangswert ${}_p\rho_q(0) = 1$. Die Bedingungen (289) sind für alle n erfüllt, falls:

- (i) alle Parameter reell und positiv sind,
- (ii) eine gerade Anzahl von Parametern reell und negativ ist, wobei sich jedes solche Parameterpaar stets im selben Intervall zwischen zwei ganzen Zahlen befinden muss,
- (iii) eine gerade Anzahl von Zähler- oder Nenner-Parametern paarweise komplex konjugiert zueinander sind.

Falls die Fälle (ii) und/oder (iii) auftreten, müssen die übrigen Parameter reell und positiv sein.

Weiterhin wurden von Quesne [40] Zustände eingeführt, deren Normierungsfunktionen ebenfalls durch verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen gegeben sind. Diese Zustände sind jedoch von den oben definierten (kohärenten) VHG-Zuständen (282) verschieden. Die Zustände von Quesne [40] sind nach Fock-Zuständen der Form $|\tilde{k}n + \tilde{l}\rangle$ entwickelbar, wobei \tilde{k} und \tilde{l} ganze Zahlen sind. Somit sind diese Zustände, abgesehen von den Spezialfällen der konventionellen kohärenten Zustände, nur in einem Unterraum des Fock-Raums definiert. Die konventionellen kohärenten Zustände sind auch die einzigen gemeinsamen Spezialfälle der VHG-Zustände (282) und der Zustände aus [40].

6.2 Kohärente verallgemeinerte hypergeometrische Zustände

Es werden in diesem Abschnitt kohärente verallgemeinerte hypergeometrische Zustände (kohärente VHG-Zustände) eingeführt, wobei der Begriff "kohärent" im Sinne von Klauder *et al.* [35] zu verstehen ist. Dementsprechend werden als kohärente VHG-Zustände ein Satz solcher VHG-Zustände bezeichnet, der (über)vollständig ist und die Darstellung des Einheitsoperators mit einer nicht-negativen Gewichtsfunktion ermöglicht. Die Darstellung des

Einheitsoperators wird einerseits zur Bestimmung der entsprechenden Gewichtsfunktion und andererseits zur Einführung einer neuen analytischen Darstellung für beliebige Quantenzustände verwendet. Die Bestimmung der Gewichtsfunktion erfolgt auf ähnliche Weise wie bei den Exponentialzuständen.

Zuerst werden die kohärenten VHG-Zustände in der komplexen Ebene und innerhalb des offenen Einheitskreises betrachtet, die den Konvergenzkriterien (287a) bzw. (287b) entsprechen. In diesen Fällen hat die Darstellung des Einheitsoperators die Form

$$\frac{1}{\pi} \int d^2z {}_p\mathcal{W}_q(|z|^2) |p; q; z\rangle \langle p; q; z| = \hat{1}, \quad (291)$$

mit einer geeigneten positiven Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(|z|^2)$. Die Integration erfolgt über die gesamte komplexe Ebene bzw. über die Fläche innerhalb des offenen Einheitskreises.

Das Einsetzen der Zustände (282) in die Darstellung (291), die Substitution $y = |z|^2$ und die anschließende Durchführung der Winkelintegration ergeben die Bedingungen

$$\int_0^R dy y^n {}_p\tilde{\mathcal{W}}_q(y) = {}_p\rho_q(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (292)$$

wobei ${}_p\tilde{\mathcal{W}}_q(y) = {}_p\mathcal{W}_q(y)/{}_p\mathcal{N}_q(y)$. Für die Zustände in der Ebene ist die obere Integrationsgrenze $R = \infty$, und für die Zustände innerhalb des Einheitskreises liegt die obere Integrationsgrenze bei $R = 1$. Die unbekannte Verteilung ${}_p\tilde{\mathcal{W}}_q(y)$ ist durch die Lösung eines Momentenproblems nach Stieltjes im Fall $R = \infty$ und nach Hausdorff im Fall $R = 1$ mit den Momenten gemäß Gleichung (283) gegeben. Klauder *et al.* [35] haben gezeigt, dass die Lösung in beiden Fällen mit Hilfe der Mellin-Transformation gefunden werden kann. Durch die Ersetzung $n \rightarrow s - 1$ in Gleichung (292), wobei s eine komplexe Zahl ist, sind die Verteilung ${}_p\tilde{\mathcal{W}}_q(y)$ und die Funktion ${}_p\rho_q(s - 1)$ mittels einer Mellin-Transformation miteinander verknüpft

$$\int_0^R dy y^{s-1} {}_p\tilde{\mathcal{W}}_q(y) = {}_p\rho_q(s - 1), \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (293)$$

In den Tabellen [36], [37] und [38] sind Funktionenpaare aufgelistet, die über eine Mellin-Transformation miteinander verknüpft sind. Mit Verwendung der Gleichung 37 auf Seite 303 in [37] oder Gleichung 8.4.51.9 auf Seite 728 in [38] lässt sich eine Transformationsbeziehung finden

$$\begin{aligned} & \int_0^R dy y^{s-1} G_{p, q+1}^{q+1, 0} \left(y \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_q - 1, 0 \end{matrix} \right. \right) \\ &= \Gamma(s) \frac{\Gamma(s + b_1 - 1) \cdots \Gamma(s + b_q - 1)}{\Gamma(s + a_1 - 1) \cdots \Gamma(s + a_p - 1)}, \end{aligned} \quad (294)$$

die die Meijer-G-Funktion enthält und bei der die rechte Seite der von s abhängige Anteil

von ${}_p\rho_q(s-1)$ ist. Daraus folgt, dass die Gewichtsfunktion in (291) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} {}_p\mathcal{W}_q(y) &\equiv {}_p\mathcal{W}_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; y) \\ &= \frac{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_q)} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; y) \\ &\quad \times G_{p, q+1}^{q+1, 0} \left(y \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_q - 1, 0 \end{matrix} \right. \right). \end{aligned} \quad (295)$$

Die Mellin-Transformation (294) ist gültig, wenn entweder

$$p < q + 1 \quad (296)$$

oder

$$p = q + 1, \quad \eta > 1 \quad (297)$$

erfüllt ist. Ein Vergleich zwischen den Gleichungen (296) und (287a) zeigt, dass die Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(y)$ für alle VHG-Zustände in der Ebene existiert. Dagegen ergibt der Vergleich zwischen den Gleichungen (297) und (287b), dass die Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(y)$ nur für solche VHG-Zustände innerhalb des offenen Einheitskreises existiert, für die $\eta > 1$ gilt.

Die Bedingungen (296) und (297) führen jedoch nicht automatisch auf eine positive Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(y)$. Ob die Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(y)$ auch tatsächlich positiv ist, muss in jedem Einzelfall geprüft werden. Dadurch können zusätzliche Bedingungen für die Parameter erforderlich werden.

Falls l Zähler-Parameter mit l Nenner-Parametern identisch sind, reduziert sich die Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(y)$ auf eine mit entsprechend niedrigerer Ordnung ${}_{p-l}\mathcal{W}_{q-l}(y)$. Dies folgt aus den Eigenschaften der ${}_pF_q$ - und Meijer-G-Funktionen sowie auch aus der Beziehung (293).

Die Darstellung des Einheitsoperators gemäß Gleichung (291) kann zur Einführung einer neuen Darstellung für quantenmechanische Zustände verwendet werden, indem die Darstellung (291) zwischen zwei beliebigen Zustandsvektoren $\langle\Phi|$ und $|\Psi\rangle$ eingefügt wird. Das resultierende Skalarprodukt hat dann die Form

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z {}_p\Phi_q^*(z) {}_p\Psi_q(z), \quad (298)$$

wobei die Wellenfunktionen in der Basis der kohärenten VHG-Zustände definiert sind

$${}_p\Psi_q(z) = \sqrt{{}_p\mathcal{W}_q(|z|^2)} \langle p; q; z | \Psi \rangle = \left[\frac{{}_p\mathcal{W}_q(|z|^2)}{{}_p\mathcal{N}_q(|z|^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{{}_p\rho_q(n)}} \langle n | \Psi \rangle. \quad (299)$$

Diese Darstellung wird als kohärente VHG-Darstellung des Zustands $|\Psi\rangle$ bezeichnet. Die Reihe in Gleichung (299) definiert eine ganze analytische Funktion von z^* , die als eine weitere Darstellung des Zustands $|\Psi\rangle$ betrachtet werden kann. Diese wird als verallgemeinerte hypergeometrische analytische Darstellung von $|\Psi\rangle$ bezeichnet

$${}_p\tilde{\Psi}_q(z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{{}_p\rho_q(n)}} \langle n | \Psi \rangle. \quad (300)$$

Das Skalarprodukt (298) ist damit darstellbar als

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int {}_p d\mu_q(z^*) {}_p \tilde{\Phi}_q(z^*) {}_p \tilde{\Psi}_q(z^*), \quad (301)$$

mit dem Maß

$${}_p d\mu_q(z^*) = \frac{1}{\pi} \frac{{}_p \mathcal{W}_q(|z|^2)}{{}_p \mathcal{N}_q(|z|^2)} d^2 z^*. \quad (302)$$

Die analytischen Darstellungen und Maße hängen explizit von den Parametern a_1, \dots, a_p und b_1, \dots, b_q ab. Für einen gegebenen Zustand $|\Psi\rangle$ existieren somit unendlich viele analytische Darstellungen sowohl in der komplexen Ebene als auch innerhalb des Einheitskreises. Die Darstellungen in der komplexen Ebene sind Elemente eines Bargmann-Raums, und die innerhalb des Einheitskreises sind Elemente eines Hardy-Raums, jeweils mit dem Maß (302). Die übliche Bargmann-Darstellung basiert auf den konventionellen kohärenten Zuständen und entspricht somit dem Spezialfall $p = q = 0$. Die einfachste Hardy-Darstellung basiert auf den kohärenten Phasenzuständen [31], die weiter unten in der Gleichung (317) angegeben sind.

Als nächstes werden die VGH-Zustände auf dem Einheitskreis mit $z = e^{i\varphi}$ untersucht. Es wird dabei zwischen zwei Zustandstypen unterschieden, die als normierte Zustände auf dem Einheitskreis $|p; q; e^{i\varphi}\rangle$ und als nicht-normierbare Zustände auf dem Einheitskreis $|p; q; \varphi\rangle$ bezeichnet werden, je nachdem ob das Konvergenzkriterium (287c) erfüllt wird oder nicht. Für die normierten Zustände auf dem Einheitskreis ($\eta < 0$)

$$|p; q; e^{i\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}_p \mathcal{N}_q(1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{{}_p \rho_q(n)}} |n\rangle \quad (303)$$

ist die Normierungsfunktion eine Konstante, die durch die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion mit dem Argument Eins gegeben ist. Für $\eta \geq 0$ werden nicht-normierbare Zustände auf dem Einheitskreis definiert

$$|p; q; \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{{}_p \rho_q(n)}} |n\rangle. \quad (304)$$

Beide Zustandstypen ermöglichen jedoch keine Darstellung des Einheitsoperators, da das resultierende Hausdorffsche Momentenproblem

$$\int_0^{2\pi} d\varphi {}_p \tilde{\mathcal{W}}_q(\varphi) e^{i(n-m)\varphi} = {}_p \rho_q(n) \delta_{n,m} \quad (305)$$

für die Gewichtsfunktion ${}_p \tilde{\mathcal{W}}_q(\varphi)$ keine Lösung hat. Die Gleichung (305) impliziert das Verschwinden aller Fourier-Komponenten der Funktion ${}_p \tilde{\mathcal{W}}_q(\varphi)$ für $n \neq m$, wodurch diese zu einer Konstanten wird, die nicht die Werte auf der rechten Seite für alle $n = m$ annehmen kann. Der niedrigste mögliche Zustand $|1; 0; e^{i\varphi}\rangle$ ist nicht erlaubt, da sein einziger Parameter a nicht gleichzeitig die Bedingungen (287c) und (289) erfüllen kann. Daher steht der

niedrigste normierbare Zustand $|2; 1; e^{i\varphi}\rangle$ für $\eta = a_1 + a_2 - b < 0$ im Zusammenhang mit der Gaußschen hypergeometrischen Funktion, die die Eins als Argument aufweist

$${}_2F_1(a_1, a_2; b; 1) = \frac{\Gamma(b) \Gamma(b - a_1 - a_2)}{\Gamma(b - a_1) \Gamma(b - a_2)}. \quad (306)$$

Der Einfachste der nicht-normierbaren Zustände ist der Zustand $|1; 0; \varphi\rangle$, der im Grenzfall $a \rightarrow 1$ auf die Phasenzustände von Susskind und Glogower [13] führt

$$|1; 0; \varphi\rangle|_{a \rightarrow 1} = |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} |n\rangle. \quad (307)$$

Diese Zustände basieren auf der Parameterfunktion ${}_1\rho_0(n) = 1$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ in dem Grenzfall $a \rightarrow 1$. Die Zustände (307) sind die einzigen nicht-normierbaren Zustände, die den Einheitsoperator gemäß (305) mit der Gewichtsfunktion ${}_1\tilde{\mathcal{W}}_0 = 1/(2\pi)$ darstellen können.

Für einige Zustände mit niedrigen Werten von p und q werden jeweils die Parameterfunktion ${}_p\rho_q(n)$, die Normierungsfunktion ${}_pF_q(\zeta)$ und die Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(|z|^2)$ angegeben. Für die VHG-Zustände in der Ebene ($p < q + 1$) wird die komplexe Variable z als α bezeichnet, wobei $|\alpha| < \infty$. Für die VHG-Zustände innerhalb des Einheitskreises ($p = q + 1$) wird die komplexe Variable z als ϵ bezeichnet, wobei $|\epsilon| < 1$.

6.2.1 Die Zustände $|\alpha\rangle = |0; 0; \alpha\rangle$

Die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle = |0; 0; \alpha\rangle$ entsprechen dem Spezialfall $p = q = 0$. Für die konventionellen kohärenten Zustände sind die Parameterfunktion, die Normierungsfunktion und die Gewichtsfunktion gegeben durch

$${}_0\rho_0(n) = n!, \quad {}_0F_0(\zeta) = e^\zeta, \quad {}_0\mathcal{W}_0(|\alpha|^2) = 1. \quad (308)$$

Darüber hinaus werden die konventionellen kohärenten Zustände auch durch die VHG-Zustände mit $p = q$ und $a_j = b_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, p$ dargestellt.

6.2.2 Die Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$

Die Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ mit der Parameterfunktion

$${}_0\rho_1(b; n) = n! (b)_n, \quad (309)$$

für die aufgrund (289) die Bedingung $b > 0$ gilt, haben die Normierungsfunktion

$${}_0F_1(b; \zeta) = \Gamma(b) \zeta^{\frac{1-b}{2}} I_{b-1}(2\sqrt{\zeta}), \quad (310)$$

und die Gewichtsfunktion gemäß Gleichung 5.39 auf Seite 196 in [36]

$${}_0\mathcal{W}_1(b; |\alpha|^2) = 2 I_{b-1}(2|\alpha|) K_{b-1}(2|\alpha|), \quad (311)$$

wobei $I_\nu(y)$ und $K_\nu(y)$ die modifizierten Bessel-Funktionen sind. Da für $\nu > -1$ und $y > 0$ die modifizierten Bessel-Funktionen reell und positiv [18] sind, ist die Gewichtsfunktion ${}_0\mathcal{W}_1(b; |\alpha|^2)$ dann positiv, wenn $b > 0$.

6.2.3 Die Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$

Für die Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ mit der Parameterfunktion

$${}_1\rho_1(a; b; n) = \frac{n! (b)_n}{(a)_n} \quad (312)$$

fordert die Bedingung (289), dass a und b entweder beide positiv oder beide negativ sind, wobei im letzteren Fall die beiden negativen Zahlen den gleichen Integer-Anteil haben müssen. Die Normierungsfunktion ist durch die Kummersche konfluente hypergeometrische Funktion ${}_1F_1(a; b; \zeta)$ gegeben. Die Gewichtsfunktion ergibt sich aus der Transformationsbeziehung gemäß Gleichung 9 auf Seite 716 in [38]

$${}_1\mathcal{W}_1(a; b; |\alpha|^2) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} {}_1F_1(a; b; |\alpha|^2) e^{-|\alpha|^2} \Psi(a - b; 2 - b; |\alpha|^2), \quad (313)$$

wobei $\Psi(a; b; \zeta)$ die konfluente hypergeometrische Funktion nach Tricomi ist.

6.2.4 Die Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$

Die Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$ basieren auf der Parameterfunktion

$${}_1\rho_0(a; n) = \frac{n!}{(a)_n}, \quad (314)$$

mit der Bedingung $a > 0$, die aus (289) folgt. Die Normierungsfunktion ist gegeben durch

$${}_1F_0(a; \zeta) = (1 - \zeta)^{-a}, \quad (315)$$

und die Gewichtsfunktion gemäß Gleichung 5.35 auf Seite 195 in [36]

$${}_1\mathcal{W}_0(a; |\epsilon|^2) = \frac{a - 1}{(1 - |\epsilon|^2)^2}. \quad (316)$$

mit $a > 1$ aufgrund (297). In dem Fall $a > 1$ ist die Gewichtsfunktion ${}_1\mathcal{W}_0(a; |\alpha|^2)$ stets positiv.

Die Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$ ergeben in dem speziellen Fall $a = 2k$ mit $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ die bekannten kohärenten Perelomow-Zustände $|z; k\rangle$ der diskreten Reihe von $SU(1,1)$ -Darstellungen [45, 46]. Von besonderer Bedeutung sind die Zustände mit $k = \frac{1}{2}$, die auch als kohärente Phasenzustände [47] bekannt sind

$$|1; 0; \epsilon\rangle \Big|_{a \rightarrow 1} = |\epsilon\rangle = \sqrt{1 - |\epsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n |n\rangle. \quad (317)$$

Deren Gewichtsfunktion (316) verschwindet und der Einheitsoperator kann mit (317) nur als Grenzfall dargestellt werden.

6.2.5 Die Zustände $|2; 1; \epsilon\rangle$

Für die Zustände $|2; 1; \epsilon\rangle$ mit der Parameterfunktion

$${}_2\rho_1(a_1, a_2; b; n) = \frac{n! (b)_n}{(a_1)_n (a_2)_n} \quad (318)$$

ist die Normierungsfunktion die Gaußsche hypergeometrische Funktion ${}_2F_1(a_1, a_2; b; \zeta)$. Die Bedingung (289) erlaubt nicht nur positive Parameterwerte a_1, a_2, b , sondern auch paarweise negative Parameterwerte mit gleichen negativen Integer-Anteilen. Ebenso sind zueinander konjugiert komplexe Parameter-Paare erlaubt. Die Gewichtsfunktion ist gegeben durch Gleichung 5.50 auf der Seite 198 in [36]

$$\begin{aligned} {}_2\mathcal{W}_1(a_1, a_2; b; |\epsilon|^2) &= \frac{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)}{\Gamma(b) \Gamma(a_1 + a_2 - b - 1)} (1 - |\epsilon|^2)^{a_1 + a_2 - b - 2} {}_2F_1(a_1, a_2; b; |\epsilon|^2) \\ &\times {}_2F_1(a_2 - b, a_1 - b; a_1 + a_2 - b - 1; 1 - |\epsilon|^2), \end{aligned} \quad (319)$$

mit $a_1 + a_2 - b > 1$ aufgrund der Bedingung (297). Es ist nicht bekannt, ob die Bedingungen (289) und (297) eine positive Gewichtsfunktion ${}_2\mathcal{W}_1(a_1, a_2; b; |\epsilon|^2)$ in allen Fällen garantieren. Der Fall $a_1 = b$ oder $a_2 = b$ umfasst die Ergebnisse für die Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$.

6.3 VHG-Zustände als Eigenzustände von Absteigeoperatoren

In diesem Abschnitt werden Aufsteige- und Absteigeoperatorpaare eingeführt, wobei die verallgemeinerten hypergeometrischen Zustände (282) die Eigenzustände der Absteigeoperatoren sind. Diese Operatorpaare sind eine Verallgemeinerung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators im Fall der VHG-Zustände in der Ebene, sowie der exponentiellen Phasenoperatoren nach Susskind und Glogower [13] im Fall der VHG-Zustände innerhalb des Einheitskreises.

Die verallgemeinerten hypergeometrischen Absteige- und Aufsteigeoperatoren sind definiert durch

$${}_p\hat{U}_q = \sum_{n=0}^{\infty} {}_p f_q(n) |n\rangle \langle n+1|, \quad {}_p\hat{U}_q^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} {}_p f_q(n) |n+1\rangle \langle n|. \quad (320)$$

Die Koeffizienten ${}_p f_q$ sind gegeben durch

$${}_p f_q(n) \equiv {}_p f_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; n) = \sqrt{(n+1) \frac{(n+b_1) \cdots (n+b_q)}{(n+a_1) \cdots (n+a_p)}}, \quad (321)$$

wobei ${}_0 f_0(n) = \sqrt{n+1}$. Bei $p = 0$ werden die Produkte im Zähler und bei $q = 0$ die Produkte im Nenner gleich Eins gesetzt. Die Koeffizienten (321) sind reell und positiv aufgrund der Beziehung (289). Die Absteige- und Aufsteigeoperatoren hängen explizit von den Zähler- und Nenner-Parametern ab

$${}_p\hat{U}_q = {}_p\hat{U}_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q), \quad {}_p\hat{U}_q^\dagger = {}_p\hat{U}_q^\dagger(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q). \quad (322)$$

und erfüllen die Kommutatorbeziehung

$$[{}_p\hat{U}_q, {}_p\hat{U}_q^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} \left({}_p f_q(n)^2 - {}_p f_q(n-1)^2 \right) |n\rangle\langle n|, \quad (323)$$

wobei ${}_p f_q(-1) = 0$ definiert ist, sich aber auch aus (321) ergibt.

Die Wirkung der Absteige- und Aufsteigeoperatoren auf Fock-Zustände

$${}_p\hat{U}_q |n\rangle = {}_p f_q(n-1) |n-1\rangle, \quad {}_p\hat{U}_q^\dagger |n\rangle = {}_p f_q(n) |n+1\rangle \quad (324)$$

rechtfertigt diese Bezeichnung. Es lässt sich einfach zeigen, dass die (kohärenten) VHG-Zustände Eigenzustände des Absteigeoperators mit den gleichen Eigenwerten z sind

$${}_p\hat{U}_q |p; q; z\rangle = z |p; q; z\rangle. \quad (325)$$

Die Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ definieren die Eigenzustände und sind durch die Koeffizienten ${}_p f_q(n)$ darstellbar

$${}_p\rho_q(n) = \left({}_p f_q(0) {}_p f_q(1) {}_p f_q(2) \cdots {}_p f_q(n-1) \right)^2. \quad (326)$$

Insofern sind die kohärenten VHG-Zustände auch Beispiele für die bekannten nicht-linearen kohärenten Zustände [32, 33, 43]. Diese sind Eigenzustände von Absteigeoperatoren gemäß (324), wobei der Ausdruck ${}_p f_q(n)$ durch $\sqrt{n+1}f(n)$ ersetzt ist und $f(n)$ beliebige Funktionen sind.

Für den Fall $p < q + 1$ werden ${}_p\hat{A}_q = {}_p\hat{U}_q$ und ${}_p\hat{A}_q^\dagger = {}_p\hat{U}_q^\dagger$ definiert, die als Verallgemeinerungen des konventionellen Erzeugungsoperators \hat{a}^\dagger bzw. Vernichtungsoperators \hat{a} des harmonischen Oszillators betrachtet werden können. Insbesondere ergibt der Spezialfall

$${}_0\hat{A}_0 = \hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n\rangle\langle n+1|. \quad (327)$$

den konventionellen Vernichtungsoperator. Es ist daher naheliegend, die Operatoren ${}_p\hat{A}_q$ und ${}_p\hat{A}_q^\dagger$ als verallgemeinerte hypergeometrische Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren zu bezeichnen. Die Eigenzustände von ${}_p\hat{A}_q$ sind die (kohärenten) VHG-Zustände in der Ebene, $|p; q; \alpha\rangle$, mit den komplexen Eigenwerten α , wobei $|\alpha| < \infty$. Diese Zustände sind Verallgemeinerungen der konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$, die die Eigenzustände des Vernichtungsoperators \hat{a} sind.

In dem Fall $p = q + 1$ werden die Operatoren als verallgemeinerte hypergeometrische Exponentialoperatoren ${}_p\hat{E}_q = {}_p\hat{U}_q$ und ${}_p\hat{E}_q^\dagger = {}_p\hat{U}_q^\dagger$ definiert. Die (kohärenten) VHG-Zustände innerhalb des Einheitskreises sind die Eigenzustände $|p; q; \epsilon\rangle$ von ${}_p\hat{E}_q$ mit den komplexen Eigenwerten ϵ , wobei $|\epsilon| < 1$. Die (kohärenten) VHG-Zustände auf dem Einheitskreis sind entweder die normierten Zustände $|p; q; e^{i\varphi}\rangle$ gemäß Gleichung (303) oder die nicht-normierbaren Zustände $|p; q; \varphi\rangle$ gemäß Gleichung (304). Beide sind Eigenzustände von ${}_p\hat{E}_q$ mit den komplexen Eigenwerten $e^{i\varphi}$ und können als Verallgemeinerung der sogenannten kohärenten Phasenzustände [47] aufgefasst werden. Dies wird auch dadurch verdeutlicht,

dass der Exponentialoperator \hat{E}_{SG} von Susskind und Glogower [13] ein Grenzfall des Operators ${}_1\hat{E}_0$ ist

$${}_1\hat{E}_0(a)|_{a \rightarrow 1} = \hat{E}_{\text{SG}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|. \quad (328)$$

Diese Beziehung steht mit den Grenzfällen für die entsprechenden Eigenzustände (317) und (307) im Zusammenhang.

Mit den nicht-hermiteschen Aufsteige- und Absteigeoperatoren lassen sich die hermiteschen Operatoren

$${}_p\hat{Q}_q = \frac{1}{\sqrt{2}} ({}_p\hat{A}_q^\dagger + {}_p\hat{A}_q), \quad {}_p\hat{P}_q = \frac{i}{\sqrt{2}} ({}_p\hat{A}_q^\dagger - {}_p\hat{A}_q) \quad (329)$$

sowie

$${}_p\hat{C}_q = \frac{1}{2} ({}_p\hat{E}_q^\dagger + {}_p\hat{E}_q), \quad {}_p\hat{S}_q = \frac{i}{2} ({}_p\hat{E}_q^\dagger - {}_p\hat{E}_q) \quad (330)$$

kombinieren. Wie die gewählte Terminologie bereits suggeriert, lassen sich die Operatoren ${}_p\hat{Q}_q$ und ${}_p\hat{P}_q$ als verallgemeinerte hypergeometrische Orts- bzw. Impulsoperatoren interpretieren. Ebenso sind ${}_p\hat{C}_q$ und ${}_p\hat{S}_q$ als verallgemeinerte hypergeometrische Kosinus- bzw. Sinusoperatoren interpretierbar. Jedoch erfüllen diese Operatoren nicht die üblichen Kommutatorbeziehungen. Es ist nicht bekannt, ob diese Operatoren auch die geeigneten Spektren aufweisen.

6.4 Photonenzahlstatistik der VHG-Zustände

In diesem Abschnitt wird die Photonenzahlstatistik der VHG-Zustände untersucht. Dabei werden die Photonenzahlverteilungen, die Mittelwerte der Photonenzahl und die Mandel-Parameter für die VHG-Zustände im Allgemeinen und für einige spezielle VHG-Zustände mit niedrigen p und q explizit angegeben und teilweise graphisch dargestellt. Die Photonenzahlstatistik der (kohärenten) VHG-Zustände zeigt sowohl klassisches als auch nicht-klassisches Verhalten. Die Untersuchungen in diesem Abschnitt sind unabhängig von der Existenz einer Gewichtsfunktion und betreffen daher sowohl die VHG-Zustände im Allgemeinen als auch die kohärenten VHG-Zustände.

Die in Gleichung (282) definierten VHG-Zustände haben die Fock-Darstellung

$$\langle n|p; q; z\rangle = [{}_p\mathcal{N}_q(|z|^2)]^{-\frac{1}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{{}_p\rho_q(n)}}. \quad (331)$$

Deren Modulquadrat ist die Photonenzahlverteilung für die VHG-Zustände

$$\mathcal{P}_{|p; q; z\rangle}(n) = \frac{|z|^{2n}}{{}_p\rho_q(n) {}_p\mathcal{N}_q(|z|^2)}. \quad (332)$$

Die VHG-Zustände und deren Photonenzahlverteilungen haben die gleiche Struktur wie die Exponentialzustände (210) bzw. deren Photonenzahlverteilungen (222). Folglich haben

auch die Erwartungswerte die gleiche Struktur. Mit Verwendung der Beziehung (224) sind die Momente durch die Ableitungen der Normierungsfunktion darstellbar

$$\langle p; q; z | [\hat{N}(\hat{N} - 1) \cdots (\hat{N} - k + 1)] | p; q; z \rangle = \frac{y^k}{{}_p\mathcal{N}_q(y)} \frac{d^k}{dy^k} {}_p\mathcal{N}_q(y) \Big|_{y=|z|^2}. \quad (333)$$

Insbesondere ist der Mittelwert der Photonenzahl für die VHG-Zustände gegeben durch

$$\langle p; q; z | \hat{N} | p; q; z \rangle = y \frac{{}_p\mathcal{N}'_q(y)}{{}_p\mathcal{N}_q(y)} \Big|_{y=|z|^2}, \quad (334)$$

und der Mandel-Parameter [1] durch

$$Q_M^{(p; q; z)} = y \left(\frac{{}_p\mathcal{N}''_q(y)}{{}_p\mathcal{N}'_q(y)} - \frac{{}_p\mathcal{N}'_q(y)}{{}_p\mathcal{N}_q(y)} \right) \Big|_{y=|z|^2}, \quad (335)$$

wobei ${}_p\mathcal{N}'_q(y)$ die erste Ableitung und ${}_p\mathcal{N}''_q(y)$ die zweite Ableitung der Normierungsfunktion ist.

In vorliegenden Fall können die Ableitungen der Normierungsfunktion, die durch ${}_pF_q$ -Funktion gegeben ist, durch Ausdrücke mit der gleichen ${}_pF_q$ -Funktion mit verschobenen Parameterwerten [18] dargestellt werden

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dy^k} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; y) \\ &= \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} {}_pF_q(a_1 + k, \dots, a_p + k; b_1 + k, \dots, b_q + k; y). \end{aligned} \quad (336)$$

Die Multiplikation des Ausdrucks (336) mit

$$\frac{y^k}{{}_pF_q(a_1 + k, \dots, a_p + k; b_1 + k, \dots, b_q + k; y)}, \quad (337)$$

ergibt die Momente. Der Mittelwert der Photonenzahl für VHG-Zustände ist somit durch ${}_pF_q$ -Funktionen mit verschobenen Parameterwerten darstellbar

$$\langle p; q; z | \hat{N} | p; q; z \rangle = y \frac{a_1 \cdots a_p}{b_1 \cdots b_q} \frac{{}_pF_q(a_1 + 1, \dots, a_p + 1; b_1 + 1, \dots, b_q + 1; y)}{{}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; y)} \Big|_{y=|z|^2}.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich der Mandel-Parameter durch die Verhältnisse von verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen mit verschobenen Parameterwerten darstellen

$$\begin{aligned} Q_M^{(p; q; z)} &= y \left(- \frac{a_1 \cdots a_p}{b_1 \cdots b_q} \frac{{}_pF_q(a_1 + 1, \dots, a_p + 1; b_1 + 1, \dots, b_q + 1; y)}{{}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_1 + 1) \cdots (a_p + 1)}{(b_1 + 1) \cdots (b_q + 1)} \frac{{}_pF_q(a_1 + 2, \dots, a_p + 2; b_1 + 2, \dots, b_q + 2; y)}{{}_pF_q(a_1 + 1, \dots, a_p + 1; b_1 + 1, \dots, b_q + 1; y)} \right) \Big|_{y=|z|^2}. \end{aligned}$$

Nachfolgend wird die Photonenzahlstatistik einiger spezieller VHG-Zustände näher untersucht. Für jeden dieser Zustände werden die Photonenzahlverteilung, der Mittelwert der Photonenzahl und der Mandel-Parameter angegeben. Ebenso werden deren graphische Darstellungen für ausgewählte Parameterwerte gezeigt, diskutiert und mit denen des konventionellen kohärenten Zustands verglichen.

6.4.1 Photonenzahlstatistik der Zustände $|\alpha\rangle = |0; 0; \alpha\rangle$

Die einfachsten VHG-Zustände sind die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle = |0; 0; \alpha\rangle$. Deren Photonenzahlverteilungen sind die bekannten Poisson-Verteilungen

$$\mathcal{P}_{|0;0;\alpha\rangle}(n) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (338)$$

mit den Mittelwerten der Photonenzahl

$$\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (339)$$

Der Mandel-Parameter

$$Q_M^{(|\alpha\rangle)} = 0. \quad (340)$$

verschwindet, da die Photonenzahlverteilung von der Poisson-Verteilung nicht abweicht.

6.4.2 Photonenzahlstatistik der Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$

Für die VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ lauten die Photonenzahlverteilungen

$$\mathcal{P}_{|0;1;\alpha\rangle}(n) = \frac{|\alpha|^{2n+b-1}}{n! \Gamma(b+n) I_{b-1}(2|\alpha|)}, \quad (341)$$

die Mittelwerte der Photonenzahl

$$\langle 0; 1; z | \hat{N} | 0; 1; z \rangle = |\alpha| \frac{I_b(2|\alpha|)}{I_{b-1}(2|\alpha|)} \quad (342)$$

und die Mandel-Parameter

$$Q_M^{(|0;1;z\rangle)} = |\alpha| \left(\frac{I_{b+1}(2|\alpha|)}{I_b(2|\alpha|)} - \frac{I_b(2|\alpha|)}{I_{b-1}(2|\alpha|)} \right). \quad (343)$$

Die Photonenzahlverteilungen sind in der Abbildung 29 dargestellt und haben ein Maximum bei niedrigen Werten der Photonenzahl n . Die Mittelwerte der Photonenzahl, die in der Abbildung 30 dargestellt sind, nehmen wesentlich langsamer mit $|\alpha|$ zu als beim kohärenten Zustand, und die negativen Werte des Mandel-Parameters in Abbildung 31 zeigen nicht-klassisches Verhalten. Für die konventionellen kohärenten Zustände verschwindet der Mandel-Parameter ($Q_M^{(|\alpha\rangle)} = 0$) in der Abbildung 31.

6.4.3 Photonenzahlstatistik der Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$

Für die VHG-Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ lauten die Photonenzahlverteilungen

$$\mathcal{P}_{|1;1;\alpha\rangle}(n) = \frac{(a)_n}{n! (b)_n} \frac{|\alpha|^{2n}}{{}_1F_1(a; b; |\alpha|^2)}, \quad (344)$$

die Mittelwerte der Photonenzahl

$$\langle 1; 1; z | \hat{N} | 1; 1; z \rangle = |\alpha|^2 \frac{a}{b} \frac{{}_1F_1(a+1; b+1; |\alpha|^2)}{{}_1F_1(a; b; |\alpha|^2)} \quad (345)$$

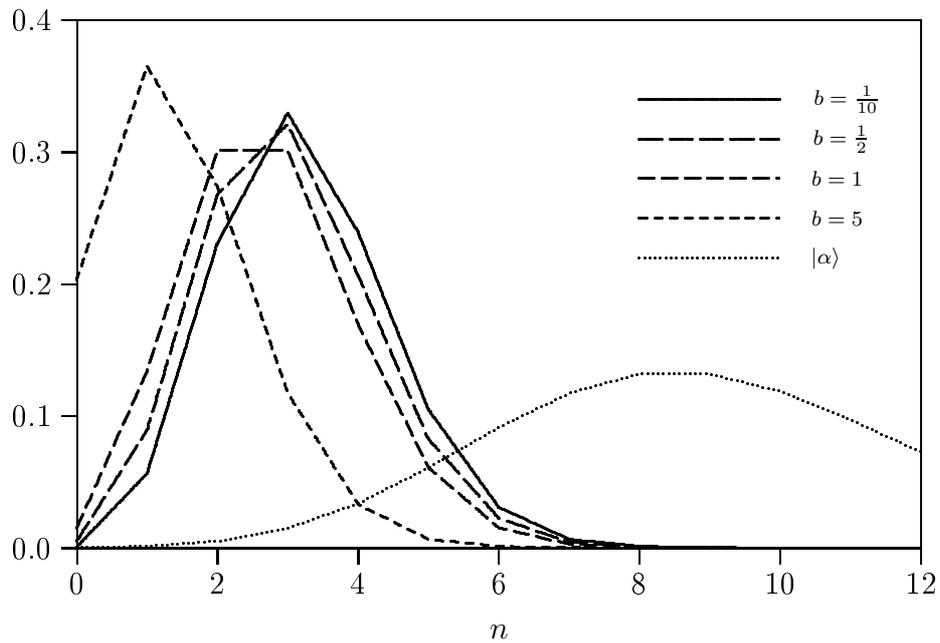


Abbildung 29: Photonenzahlverteilung für die VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ mit $|\alpha| = 3$.

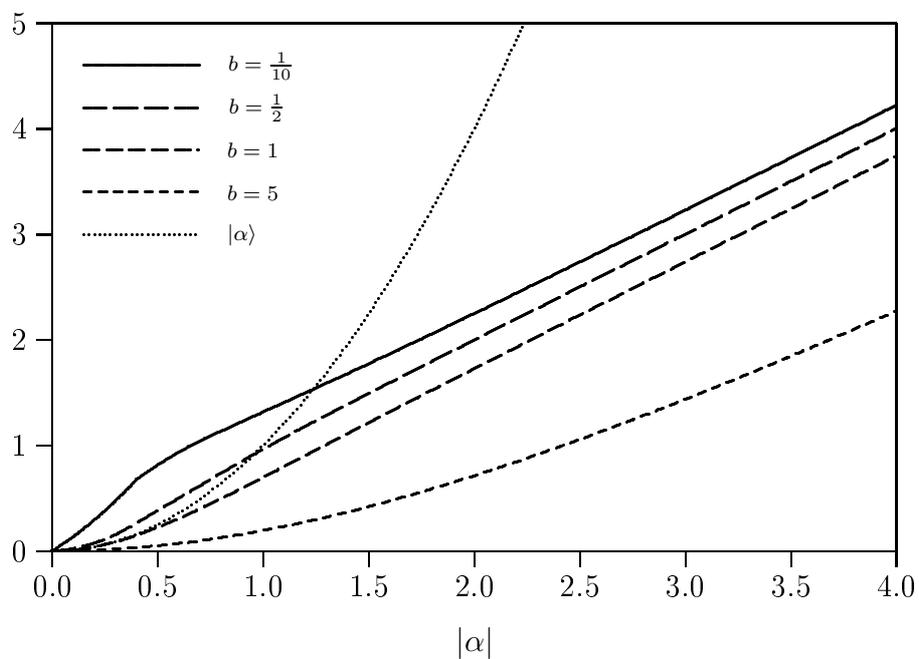


Abbildung 30: Mittelwert der Photonenzahl für die VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie für die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ als Funktion von $|\alpha|$.

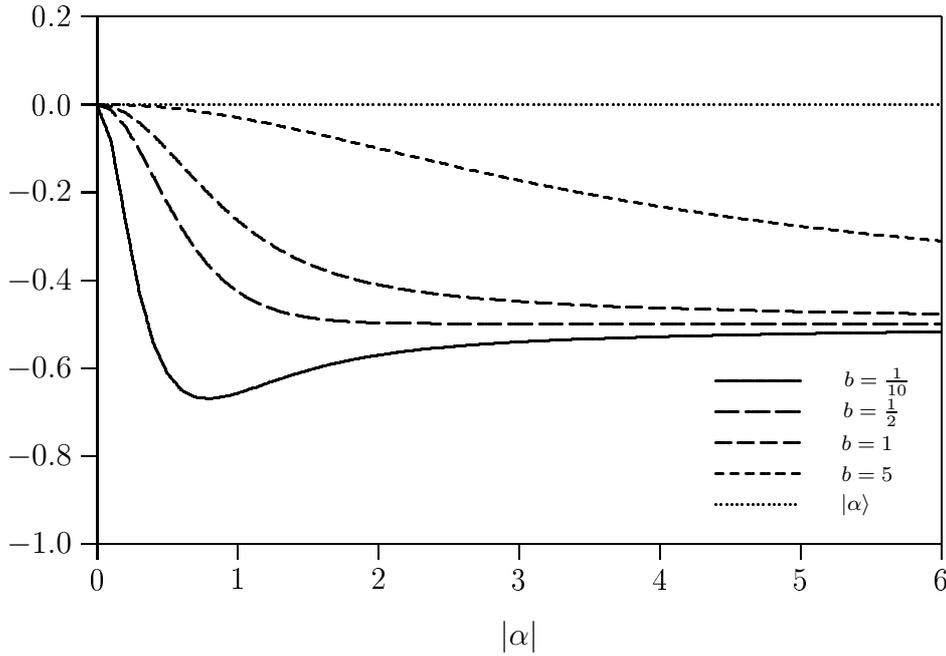


Abbildung 31: Mandel-Parameter für die VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie für die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ als Funktion von $|\alpha|$.

und die Mandel-Parameter

$$Q_M^{(|1;1;z\rangle)} = |\alpha|^2 \left(\frac{a+1}{b+1} \frac{{}_1F_1(a+2; b+2; |\alpha|^2)}{{}_1F_1(a+1; b+1; |\alpha|^2)} - \frac{a}{b} \frac{{}_1F_1(a+1; b+1; |\alpha|^2)}{{}_1F_1(a; b; |\alpha|^2)} \right). \quad (346)$$

Für $a = b$ vereinfachen sich die Ausdrücke (344), (345) und (346) auf die entsprechenden Ausdrücke (338), (339) bzw. (340) für die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ gemäß dem Abschnitt 6.4.1. Diese Eigenschaft verdeutlicht das Verhalten der Photonenzahlverteilung in der Abbildung 32, des Mittelwerts der Photonenzahl in der Abbildung 33 und des Mandel-Parameters in der Abbildung 34. Alle Kurven stimmen in dem Fall $a = b$ mit den Kurven der konventionellen kohärenten Zustände überein und unterscheiden davon umso deutlicher, je mehr a von b abweicht. Die Richtungen der Abweichungen zwischen den Kurven der VHG-Zustände und der konventionellen kohärenten Zustände hängen davon ab, ob $a < b$ oder $a > b$. Folglich ist der Wert des Mandel-Parameters in der Abbildung 34 positiv für $a > b$ und negativ für $a < b$. Die nicht-klassischen Eigenschaften treten dann auf, wenn der Zähler-Parameter größer als der Nenner-Parameter ($a > b$) ist.

6.4.4 Photonenzahlstatistik der Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$

Für die VHG-Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$ sind die Photonenzahlverteilungen

$$\mathcal{P}_{|1;0;\epsilon\rangle}(n) = \frac{(a)_n}{n!} (1 - |\epsilon|^2)^a |\epsilon|^{2n}, \quad (347)$$

die Mittelwerte der Photonenzahl

$$\langle 1; 0; z | \hat{N} | 1; 0; z \rangle = \frac{a |\epsilon|^2}{1 - |\epsilon|^2} \quad (348)$$

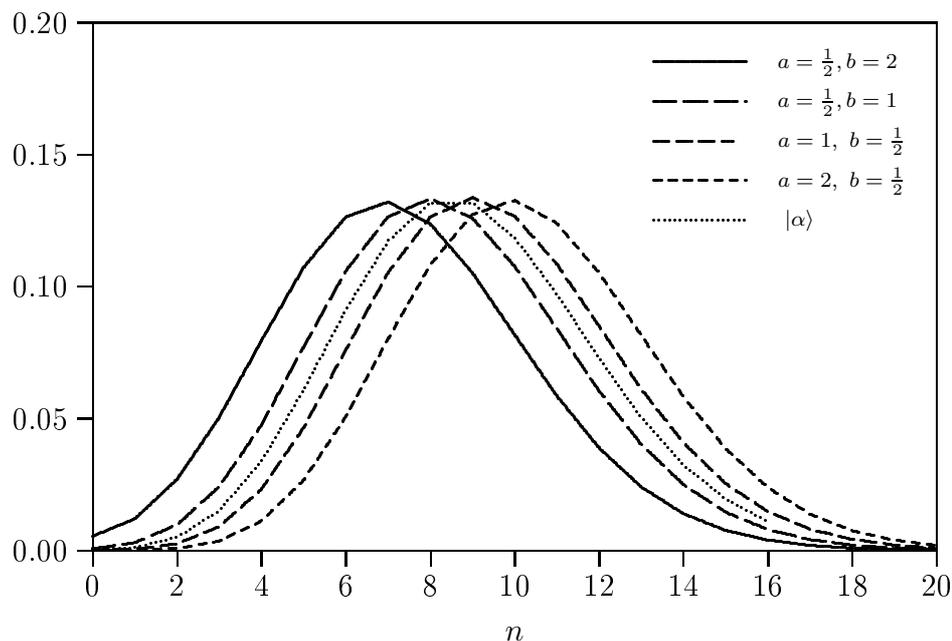


Abbildung 32: Photonenzahlverteilung für die VHG-Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ mit $(a; b) = (\frac{1}{2}; 2)$, $(\frac{1}{2}; 1)$, $(1; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ sowie für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = 3$.

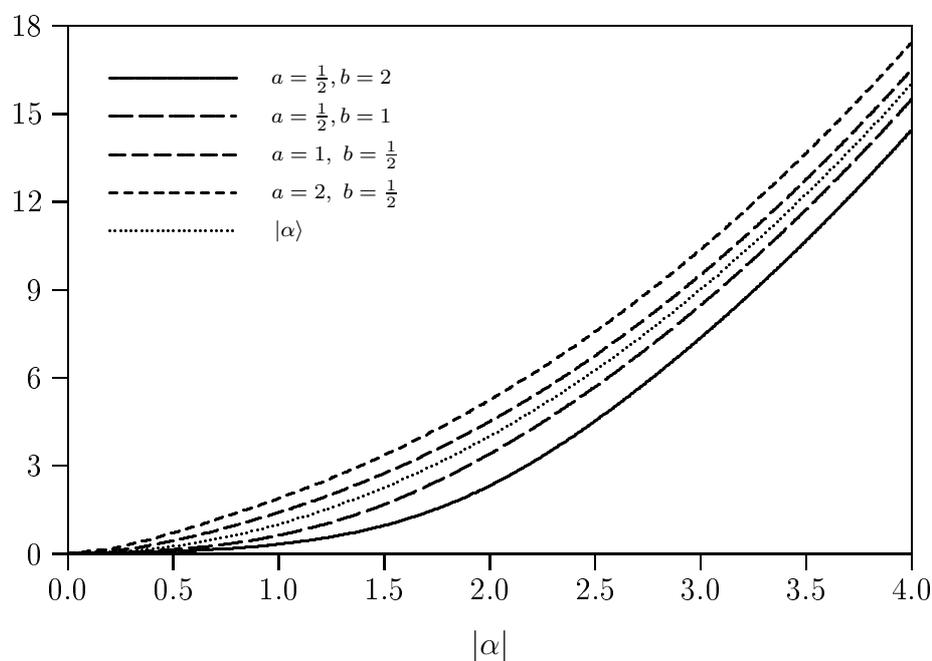


Abbildung 33: Mittelwerte der Photonenzahl für die VHG-Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ mit $(a; b) = (\frac{1}{2}; 2)$, $(\frac{1}{2}; 1)$, $(1; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ sowie für die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ als Funktion von $|\alpha|$.

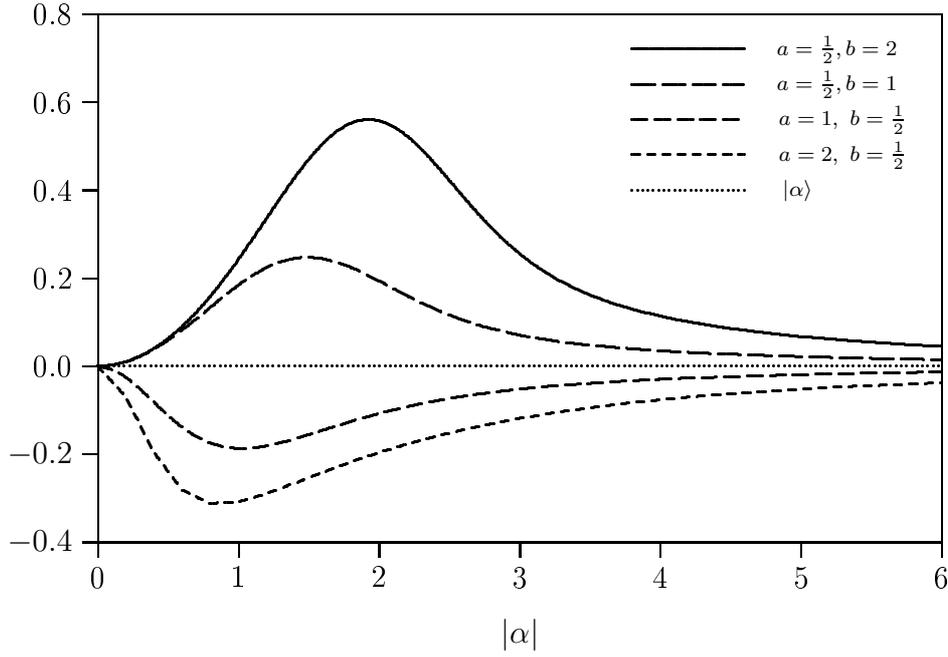


Abbildung 34: Mandel-Parameter für die VHG-Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ mit $(a; b) = (\frac{1}{2}; 2)$, $(\frac{1}{2}; 1)$, $(1; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ sowie für die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ als Funktion von $|\alpha|$.

und die Mandel-Parameter

$$Q_M^{(|1;0;z\rangle)} = \frac{|\epsilon|^2}{1 - |\epsilon|^2}. \quad (349)$$

Diese Ausdrücke sind für beliebige $a > 0$ sinnvoll. Der Fall $0 < a < 1$ betrifft VGH-Zustände und der Fall $a > 1$ die kohärenten VHG-Zustände. Der Spezialfall $a = 1$ ergibt die kohärenten Phasenzustände.

Die Photonenzahlverteilung ist der Abbildung 35 dargestellt und wird mit der Poisson-Verteilung verglichen, wobei die beiden Verteilungen den gleichen Variablenwert $|\alpha| = |\epsilon| = \frac{3}{4}$ aufweisen. Der Mittelwert der Photonenzahl und der Mandel-Parameter haben die gleiche Abhängigkeit von $|\epsilon|$. Sie verschwinden bei $|\epsilon| = 0$, nehmen zu und divergieren bei $|\epsilon| \rightarrow 1$. Der Mandel-Parameter ist unabhängig von dem Parameter a und stets positiv.

6.4.5 Photonenzahlstatistik der Zustände $|2; 1; \epsilon\rangle$

Schließlich haben die VHG-Zustände $|2; 1; \epsilon\rangle$ die Photonenzahlverteilungen

$$\mathcal{P}_{|2;1;\epsilon\rangle}(n) = \frac{(a_1)_n (a_2)_n}{n! (b)_n} \frac{|\epsilon|^{2n}}{{}_2F_1(a_1, a_2; b; |\epsilon|^2)}, \quad (350)$$

die Mittelwerte der Photonenzahl

$$\langle 2; 1; \epsilon | \hat{N} | 2; 1; \epsilon \rangle = |\epsilon|^2 \frac{a_1 a_2}{b} \frac{{}_2F_1(a_1 + 1, a_2 + 1; b + 1; |\epsilon|^2)}{{}_2F_1(a_1, a_2; b; |\epsilon|^2)}, \quad (351)$$

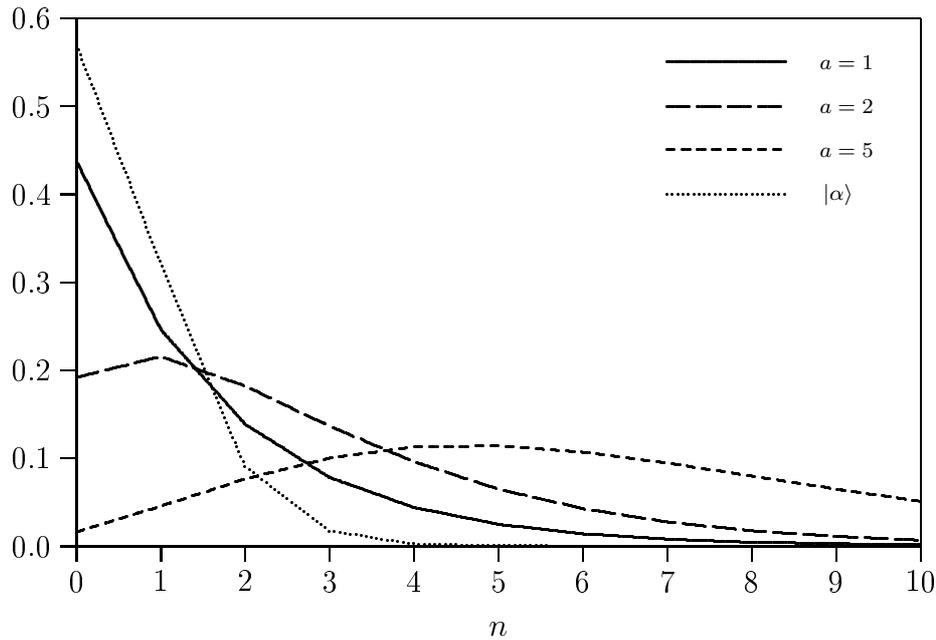


Abbildung 35: Photonenzahlverteilung für die VHG-Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$ mit $a = 1, 2, 5$ und $|\epsilon| = \frac{3}{4}$ sowie für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

und die Mandel-Parameter

$$Q_M^{(|2;1;\epsilon\rangle)} = |\epsilon|^2 \left(\frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1)}{(b + 1)} \frac{{}_2F_1(a_1 + 2, a_2 + 2; b + 2; |\epsilon|^2)}{{}_2F_1(a_1 + 1, a_2 + 1; b + 1; |\epsilon|^2)} - \frac{a_1 a_2}{b} \frac{{}_2F_1(a_1 + 1, a_2 + 1; b + 1; |\epsilon|^2)}{{}_2F_1(a_1, a_2; b; |\epsilon|^2)} \right). \quad (352)$$

Die Spezialfälle $b = a_2$ oder $b = a_1$ entsprechen den obigen Zuständen $|1; 0; \epsilon\rangle$.

6.5 Phasenverteilungen für die VHG-Zustände

In diesem Abschnitt werden verschiedene bekannte Phasenverteilungen für die (kohärenten) VHG-Zustände dargestellt. Dabei handelt es sich um die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett, aus der Husimi-Verteilung und aus der Wigner-Funktion, die bereits im Abschnitt 5.8 für die konventionellen kohärenten Zustände und für die Überlagerung von Fock-Zuständen dargestellt worden sind.

6.5.1 Phasenverteilungen aus der Husimi-Verteilung

Die Husimi-Verteilung für die (kohärenten) VHG-Zustände $|p; q; z\rangle$ ist durch das Modulquadrat von deren Darstellung in der konventionellen kohärenten Basis $|\tilde{\alpha}\rangle$ gegeben

$$Q_{|p;q;z\rangle}(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{\pi} |\langle \tilde{\alpha} | p; q; z \rangle|^2, \quad (353)$$

wobei

$$\langle \tilde{\alpha} | p; q; z \rangle = \left[\frac{e^{-|\tilde{\alpha}|^2}}{{}_p\mathcal{N}_q(|z|^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\alpha}^* z)^n}{\sqrt{n!} {}_p\rho_q(n)}. \quad (354)$$

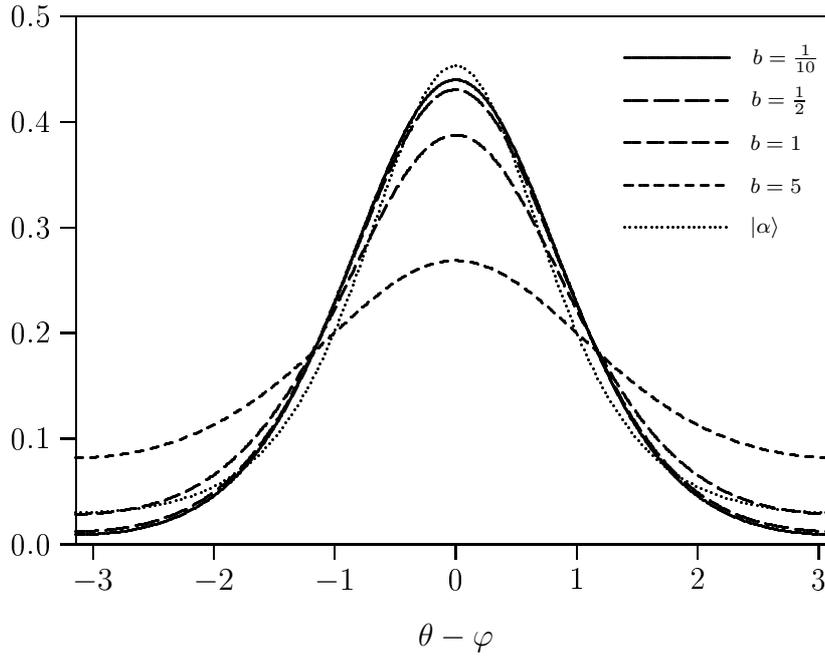


Abbildung 36: Husimi-Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{0;1;\alpha}^{(Q)}(\theta)$ für die VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

Die reelle und positive Husimi-Verteilung ist auf Eins normiert mit dem Maß $d^2\tilde{\alpha}$. Die Husimi-Verteilung ist eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung über der komplexen $\tilde{\alpha}$ -Ebene. Die Integration über das Modul von $|\tilde{\alpha}|$ ergibt die Phasenverteilung aus der Husimi-Verteilung [16, 34]

$$\mathcal{P}_{|p;q;z\rangle}^{(Q)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \langle n|p;q;z\rangle \langle p;q;z|n'\rangle \mathcal{G}^{(Q)}(n,n') e^{-i(n-n')\theta}, \quad (355)$$

mit den Fock-Komponenten $\langle n|p;q;z\rangle$ gemäß Gleichung (331) und den symmetrischen Koeffizienten $\mathcal{G}^{(Q)}(n,n')$ gemäß (273).

In den Abbildungen 36 bis 38 sind die Husimi-Phasenverteilungen für die kohärenten VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$, $|1; 1; \alpha\rangle$ und $|1; 0; \epsilon\rangle$ dargestellt, und zwar für unterschiedliche Werte der jeweiligen Parameter. Alle Verteilungen haben ein Maximum an der Stelle ($\theta = \varphi$) der komplexen Variablen α bzw. ϵ , die den VHG-Zustand definiert. Die Höhe des Maximums nimmt mit abnehmendem b in der Abbildung 36, mit abnehmendem b und zunehmendem a in der Abbildung 37 und mit zunehmendem a in der Abbildung 38 zu. In der Abbildung 37 sind die Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|1;1;\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ mit $a = b$ und die konventionelle Husimi-Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|1;1;\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ identisch. Bei $a > b$ ist das Maximum höher als bei der konventionellen Husimi-Phasenverteilung, während bei $a < b$ das Maximum niedriger als bei der konventionellen Husimi-Phasenverteilung ist. Ein ähnliches Verhalten wurde bereits bei den Photonenzahlverteilungen für die Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ beobachtet.

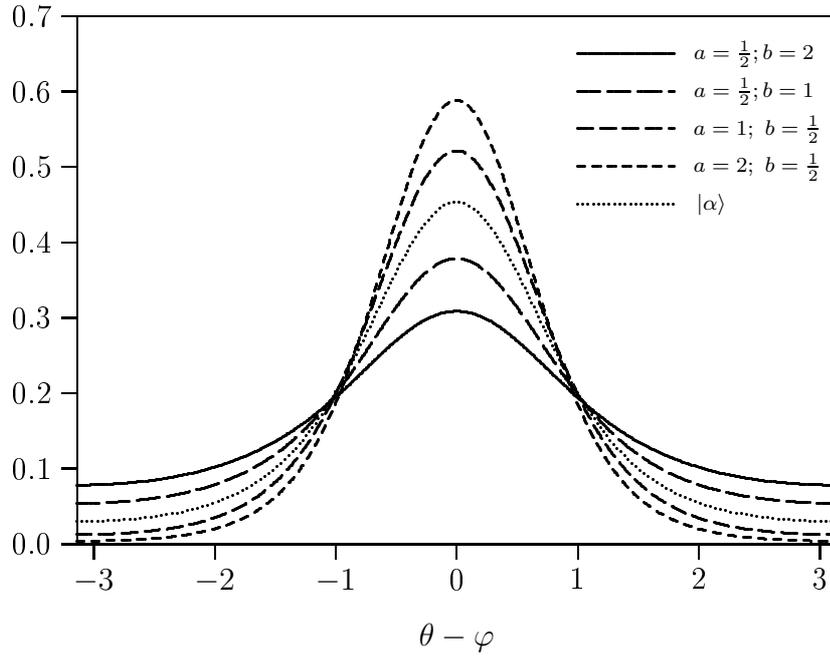


Abbildung 37: Husimi-Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|1;1;\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für die VHG-Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ mit $(a; b) = (\frac{1}{2}; 2)$, $(\frac{1}{2}; 1)$, $(1; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

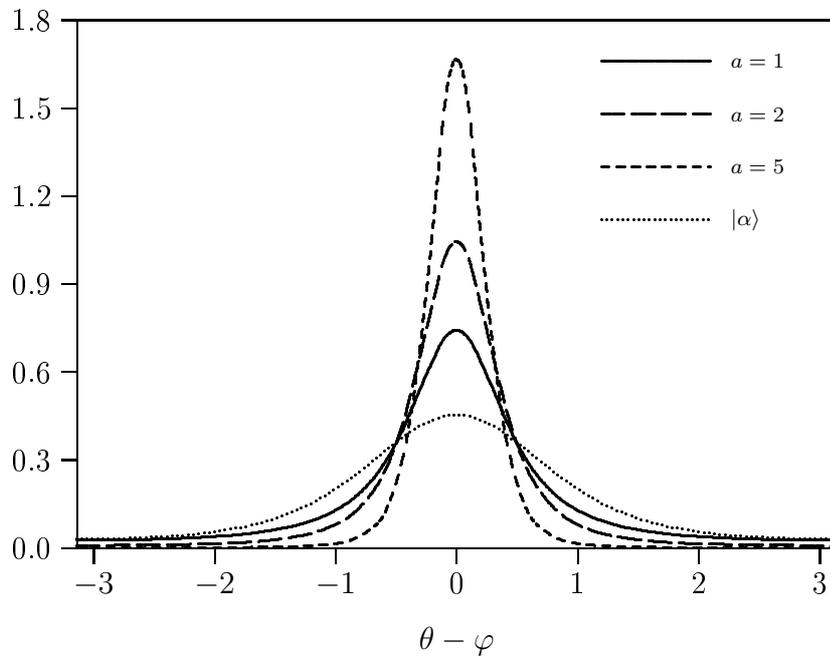


Abbildung 38: Husimi-Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|1;0;\epsilon\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für die VHG-Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$ mit $a = 1, 2$ und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ mit $|\epsilon| = |\alpha| = \frac{3}{4}$.

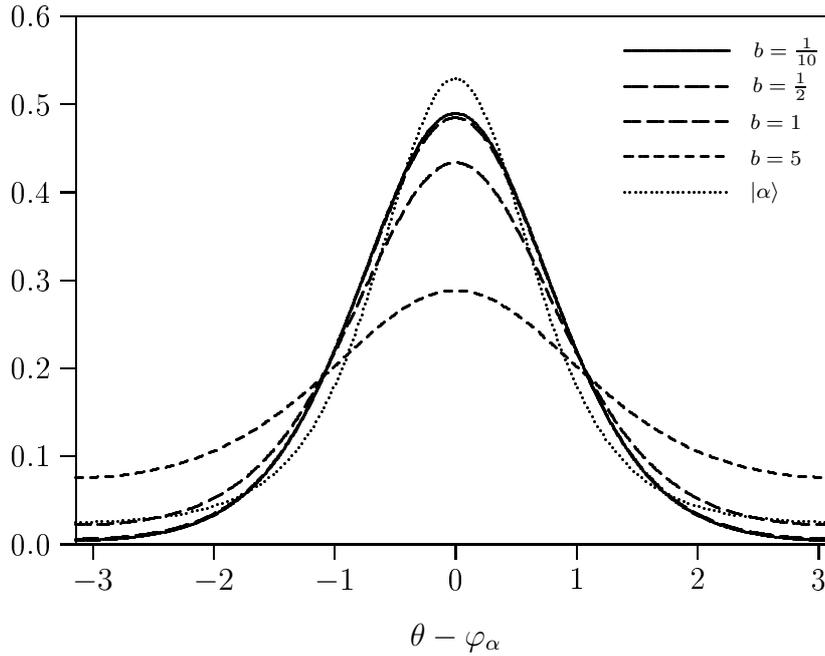


Abbildung 39: Phasenverteilungen von Pegg-Barnett $\mathcal{P}_{[0;1;\alpha]}^{(\text{PB})}(\theta)$ für die kohärenten VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

6.5.2 Phasenverteilungen von Pegg und Barnett

Auch die Phasenzustände (307) können zur Darstellung quantenmechanischer Zustände verwendet werden. Die (kohärenten) VHG-Zustände in der Basis der Phasenzustände sind gegeben durch

$$\langle \theta | p; q; z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} \langle n | p; q; z \rangle. \quad (356)$$

Deren Modulquadrat ist eine Phasenverteilung, die mit der Phasenverteilung von Pegg und Barnett [15] identisch ist

$$\mathcal{P}_{|p;q;z}^{(\text{PB})}(\theta) = |\langle \theta | p; q; z \rangle|^2. \quad (357)$$

Die Phasenverteilung entspricht dem Ausdruck in Gleichung (355), wobei $\mathcal{G}^{(\text{Q})}(n, n')$ durch $\mathcal{G}^{(\text{PB})}(n, n') = 1$ ersetzt ist. Die Phasenverteilung hängt stets von der Phasendifferenz $(\theta - \varphi)$ ab, wobei $\tilde{\alpha} = |\tilde{\alpha}|e^{i\theta}$ und $z = |z|e^{i\varphi}$.

In den Abbildungen 39 bis 41 sind die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett für die kohärenten VHG-Zustände $|0; 1; \alpha\rangle$, $|1; 1; \alpha\rangle$ und $|1; 0; \epsilon\rangle$ sowie für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ dargestellt, und zwar für unterschiedliche Werte der jeweiligen Parameter. Alle Verteilungen haben ein Maximum an der Stelle $\theta = \varphi$ der komplexen Variablen α bzw. ϵ , die den VHG-Zustand definiert. Die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett sehen qualitativ sehr ähnlich aus wie die aus der Husimi-Verteilung. Die Maxima der Phasenverteilungen von Pegg und Barnett an den Stellen $\theta = \varphi$ sind höher, da $\mathcal{G}^{(\text{PB})}(n, n') \geq \mathcal{G}^{(\text{Q})}(n, n')$, und sind außerdem schmaler, da die Verteilungen normiert sind.

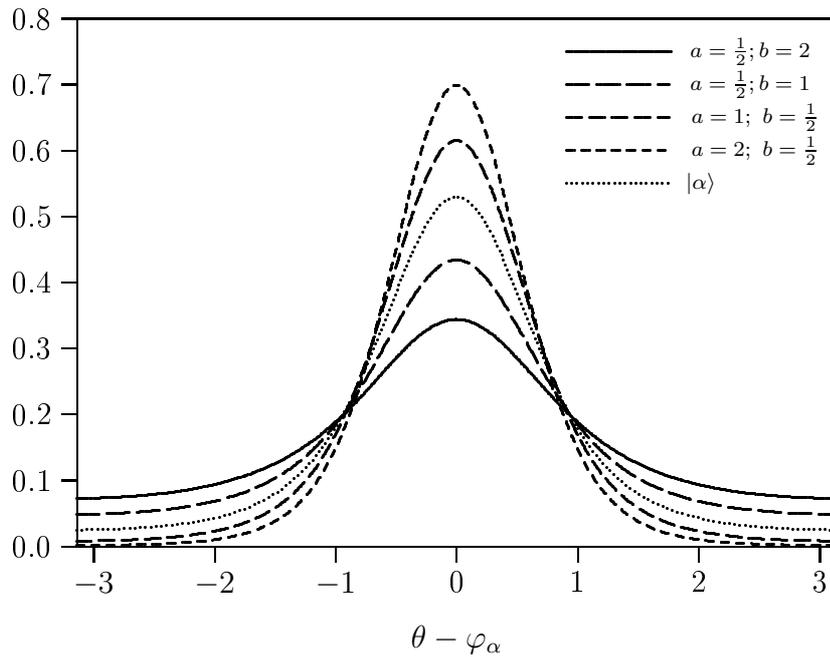


Abbildung 40: Phasenverteilungen von Pegg-Barnett $\mathcal{P}_{|1;1;\alpha\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$ für die kohärenten VHG-Zustände $|1;1;\alpha\rangle$ mit $(a; b) = (\frac{1}{2}; 2)$, $(\frac{1}{2}; 1)$, $(1; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

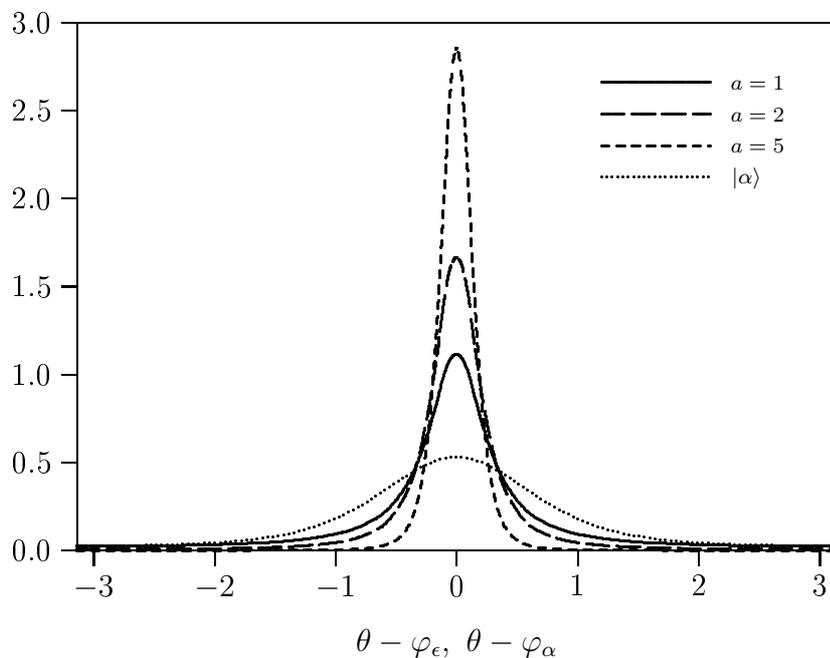


Abbildung 41: Phasenverteilungen von Pegg-Barnett $\mathcal{P}_{|1;0;\epsilon\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$ für die kohärenten VHG-Zustände $|1;0;\epsilon\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$, 1 und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(\text{PB})}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ mit $|\epsilon| = |\alpha| = \frac{3}{4}$.

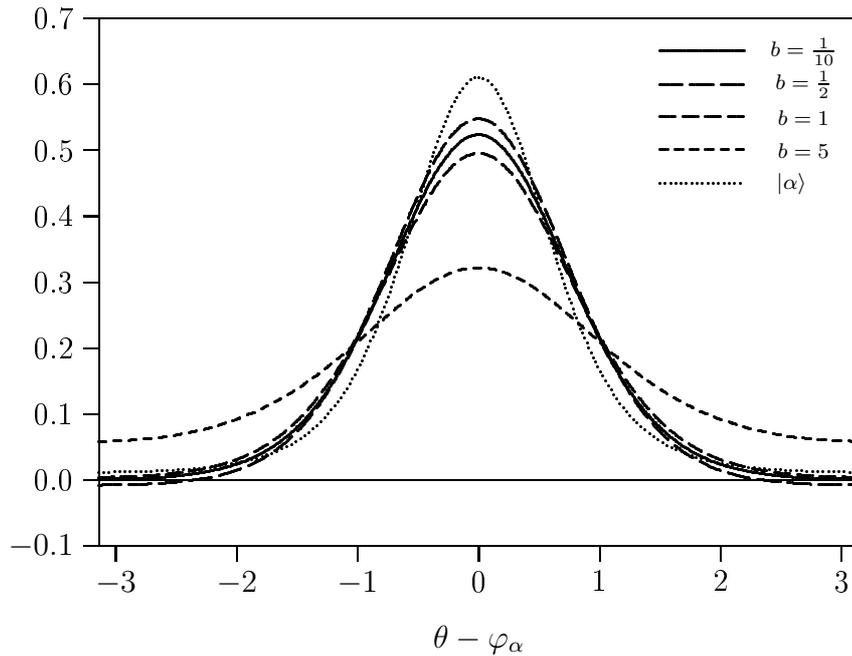


Abbildung 42: Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|0;1;\alpha\rangle}^{(W)}(\theta)$ für die kohärenten VHG-Zustände $|0;1;\alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(W)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

6.5.3 Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion

Die Integration über die radiale Variable der Wigner-Funktion in Polarkoordinaten [16, 34] ergibt die entsprechende Phasenverteilung

$$\mathcal{P}_{|p;q;z\rangle}^{(W)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \langle n|p;q;z\rangle \langle p;q;z|n'\rangle \mathcal{G}^{(W)}(n,n') e^{-i(n-n')\theta}, \quad (358)$$

mit den Fock-Komponenten $\langle n|p;q;z\rangle$ gemäß Gleichung (331) und den symmetrischen Koeffizienten $\mathcal{G}^{(W)}(n,n')$ gemäß (274).

In den Abbildungen 42 bis 44 sind die Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion für die kohärenten VHG-Zustände $|0;1;\alpha\rangle$, $|1;1;\alpha\rangle$ und $|1;0;\epsilon\rangle$ sowie für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ dargestellt, und zwar für unterschiedliche Werte der jeweiligen Parameter. Alle Verteilungen haben ein Maximum an der Stelle $\theta = \varphi$ der komplexen Variablen α bzw. ϵ , die den VHG-Zustand definiert. Die Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion sehen qualitativ sehr ähnlich wie die anderen beiden Phasenverteilungen aus. Die Maxima an den Stellen $\theta = \varphi$ sind höher als bei den Phasenverteilungen von Pegg-Barnett und aus der Husimi-Verteilung und schmaler, da die Verteilungen normiert sind. Jedoch sind die Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion teilweise negativ, und zwar in der Abbildung 42 für den Zustand $|0;1;\alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{2}$, in der Abbildung 43 für den Zustand $|1;1;\alpha\rangle$ mit $a = 2$ und $b = \frac{1}{2}$ sowie in der Abbildung 44 für den Zustand $|1;0;\epsilon\rangle$ mit $a = 5$.

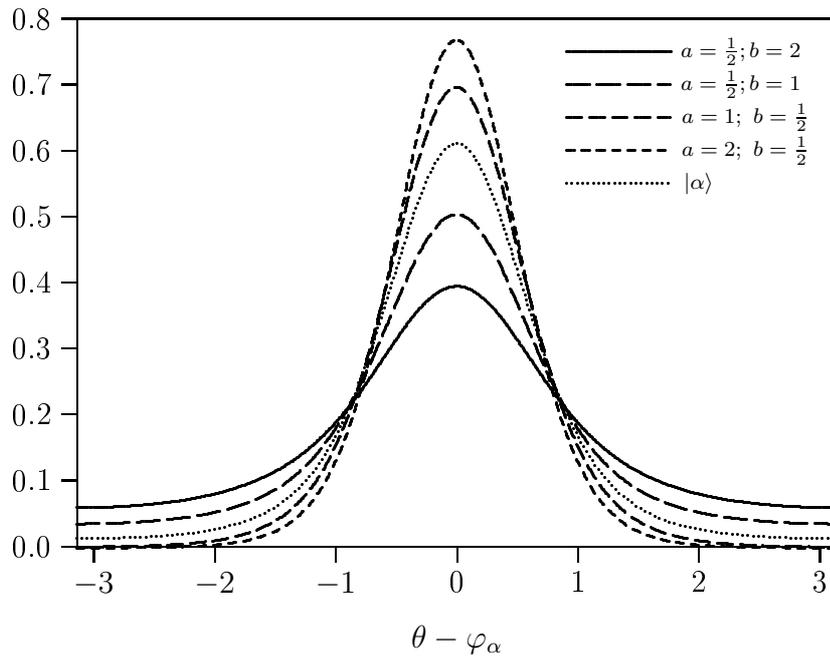


Abbildung 43: Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|1;1;\alpha\rangle}^{(W)}(\theta)$ für die kohärenten VHG-Zustände $|1; 1; \alpha\rangle$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(W)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

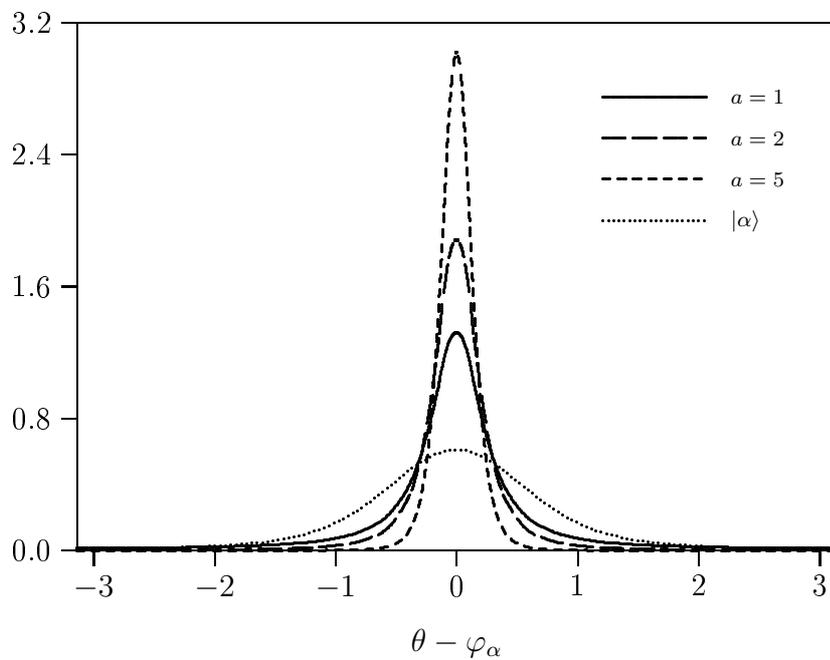


Abbildung 44: Phasenverteilungen aus der Wigner-Funktion $\mathcal{P}_{|1;0;\epsilon\rangle}^{(W)}(\theta)$ für die kohärenten VHG-Zustände $|1; 0; \epsilon\rangle$ mit $a = 1, 2$ und 5 sowie $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(W)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ mit $|\epsilon| = |\alpha| = \frac{3}{4}$.

7 VHG-Husimi-Verteilungen

In Analogie zur konventionellen Husimi-Verteilung werden in diesem Kapitel verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Verteilungen (VHG-Husimi-Verteilungen) eingeführt. Die VHG-Husimi-Verteilungen werden auf der Grundlage der VHG-Zustände definiert. Daraus lassen sich entsprechende VHG-Husimi-Phasenverteilungen für beliebige Zustände ableiten. Für einige beispielhafte konventionelle kohärente Zustände werden die VHG-Husimi-Phasenverteilungen dargestellt.

7.1 Definition der VHG-Husimi-Verteilungen

Für einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$ sind die VHG-Husimi-Verteilungen durch das Modulquadrat der Wellenfunktion (313) in der Basis der kohärenten VHG-Zustände definiert

$$Q_{|\psi\rangle}^{(p,q)}(\tilde{z}) = \frac{1}{\pi} {}_p\mathcal{W}_q(|\tilde{z}|^2) \langle p; q; \tilde{z} | \psi \rangle \langle \psi | p; q; \tilde{z} \rangle. \quad (359)$$

Die VHG-Husimi-Verteilung ist eine zweidimensionale, stets reelle und nicht-negative Wahrscheinlichkeitsverteilung über der gesamten komplexen \tilde{z} -Ebene für $p < q + 1$ oder über der vom Einheitskreis umschlossenen Fläche $|\tilde{z}| < 1$ für $p = q + 1$. Die verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Verteilung ist auf Eins normiert

$$\int d^2\tilde{z} Q_{|\psi\rangle}^{(p,q)}(\tilde{z}) = 1. \quad (360)$$

Dies ergibt sich aus der Darstellung des Einheitsoperators (291). Es ist daher erforderlich, für die Zustände $|p; q; \tilde{z}\rangle$ in der Definition (359) ausschließlich kohärente VHG-Zustände zu verwenden. Der Zustand $|\psi\rangle$ kann jedoch jeder beliebige normierte Zustand sein, beispielsweise auch ein VHG-Zustand, der kein kohärenter VHG-Zustand ist. In der Definition (359) werden die Zustände $|\psi\rangle$ als Signalzustände und die Zustände $|p; q; \tilde{z}\rangle$ als analysierenden Zustände bezeichnet. Im Vergleich zur konventionellen Husimi-Verteilung wurden in der Definition (359) formal die analysierenden konventionellen kohärenten Zustände durch die analysierenden kohärenten VHG-Zustände ersetzt. Die Gewichtsfunktion für die kohärenten VHG-Zustände ist der Verteilungsfunktion und nicht dem Integrationsmaß zugeordnet. Die konventionelle Husimi-Verteilung entspricht insbesondere dem Fall $p = q = 0$

$$Q_{|\psi\rangle}(\tilde{\alpha}) = Q_{|\psi\rangle}^{(0,0)}(\tilde{\alpha}). \quad (361)$$

Außerdem gehen auch die VHG-Husimi-Verteilungen in den Fällen $p = q$ und $a_j = b_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, p$ in die konventionelle Husimi-Verteilung über.

7.2 VHG-Husimi-Phasenverteilungen

Ebenso wie die konventionellen Husimi-Verteilungen (5.7) können auch die VHG-Husimi-Verteilungen (359) dazu verwendet werden, entsprechende Phasenverteilungen für beliebige

normierte Zustände $|\psi\rangle$ zu definieren. Durch Integration über das Modul der komplexen Variablen

$$\tilde{z} = |\tilde{z}|e^{i\theta} \quad (362)$$

werden verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Phasenverteilungen erhalten

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(p,q)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^R dy Q_{|\psi\rangle}^{(p,q)}(\sqrt{y}e^{i\theta}) \Big|_{y=|z|^2}, \quad (363)$$

mit der oberen Integrationsgrenze $R = \infty$ für die VHG-Zustände in der gesamten komplexen Ebene und mit der oberen Integrationsgrenze $R = 1$ für die VHG-Zustände innerhalb des Einheitskreises. Diese Verteilungen sind auf Eins normiert gemäß

$$\int d\theta \mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(p,q)}(\theta) = 1, \quad (364)$$

wobei die Integration über ein 2π -Intervall erfolgt, vorzugsweise über $[-\pi, +\pi]$ oder $[0, 2\pi]$. Die Durchführung der Integration in (363) ergibt die verallgemeinerten hypergeometrischen Husimi-Phasenverteilungen (VHG-Husimi-Phasenverteilungen)

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(p,q)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \psi_n \psi_{n'}^* \mathcal{G}^{(p,q)}(n, n') e^{-i(n-n')\theta} \quad (365)$$

wobei $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$ die Fock-Komponenten des Signalzustandes $|\psi\rangle$ sind. Die Koeffizienten $\mathcal{G}^{(p,q)}(n, n')$ sind durch die Parameterfunktionen ${}_p\rho_q(n)$ darstellbar

$$\mathcal{G}^{(p,q)}(n, n') = \frac{{}_p\rho_q\left(\frac{n+n'}{2}\right)}{\sqrt{{}_p\rho_q(n) {}_p\rho_q(n')}} \quad (366)$$

und haben somit die gleichen Strukturen wie die Koeffizienten in (262). Dementsprechend sind die Koeffizienten symmetrisch $\mathcal{G}^{(p,q)}(n, n') = \mathcal{G}^{(p,q)}(n', n)$ bezüglich n und n' und normiert $\mathcal{G}^{(p,q)}(n, n) = 1$, wodurch die Normierungsbedingung (364) gewährleistet wird. Die Koeffizienten $\mathcal{G}^{(p,q)}(n, n)$ enthalten die Informationen des analysierenden Zustands $|p; q; \tilde{z}\rangle$. Die Informationen des Signalzustands $|\psi\rangle$ sind ausschließlich in dem Produkt $\psi_n \psi_{n'}^*$ enthalten. Wenn das System durch einen Dichteoperator $\hat{\rho}$ beschrieben wird, dann ist anstelle des Produkts $\psi_n \psi_{n'}^*$ das Dichtematrixelement in der Fock-Darstellung $\rho_{n,n'} = \langle n|\hat{\rho}|n'\rangle$ zu verwenden. In diesem Fall erscheint in der Gleichung (359) anstelle von $|\psi\rangle\langle\psi|$ der Ausdruck $\hat{\rho}$.

Die verallgemeinerten hypergeometrischen Phasenverteilungen (365) haben formal die gleiche Struktur wie die Phasenverteilungen (355) aus der konventionellen Husimi-Verteilung und unterscheiden sich lediglich durch die beiden Koeffizienten $\mathcal{G}^{(p,q)}(n, n')$ und $\mathcal{G}^{(Q)}(n, n')$. Für $p = q = 0$ gehen die verallgemeinerten hypergeometrischen Phasenverteilungen (365) in die entsprechenden Phasenverteilungen (355) aus der Husimi-Verteilung über. Dies ergibt sich auch aus der Beziehung

$$\mathcal{G}^{(0,0)}(n, n') = \mathcal{G}^{(Q)}(n, n'), \quad (367)$$

die aus dem Zusammenhang zwischen den Koeffizienten (273) und (366) folgt, wobei letztere auch in einer faktorisierten Form darstellbar sind

$$\mathcal{G}^{(p;q)}(n, n') = \mathcal{G}^{(Q)}(n, n') \frac{\prod_{j=1}^q \tilde{\mathcal{G}}^{(b_j)}(n, n')}{\prod_{i=1}^p \tilde{\mathcal{G}}^{(a_i)}(n, n')}, \quad (368)$$

die einparametrische Koeffizienten aufweisen

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(\nu)}(n, n') = \frac{\Gamma(\frac{n+n'}{2} + \nu)}{\sqrt{\Gamma(n + \nu)\Gamma(n' + \nu)}}. \quad (369)$$

Der Vergleich der Strukturen von ${}_p\rho_q(n)$ und $\mathcal{G}^{(p;q)}(n, n')$ zeigt, dass jedes Pochhammer-Symbol $(a)_n$ einen Koeffizienten $\tilde{\mathcal{G}}^{(\nu)}(n, n')$ beisteuert.

Auf ähnliche Weise ist die Phasenverteilung von Pegg und Barnett durch eine VHG-Phasenverteilung darstellbar

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(\text{PB})}(\theta) = \mathcal{P}_{|\psi\rangle}^{(1;0)}(\{a\}; \{\}; \theta)|_{a=1}, \quad (370)$$

da der entsprechende Koeffizient

$$\mathcal{G}^{(1;0)}(\{a\}; \{\}; n, n') = \frac{\mathcal{G}^{(Q)}(n, n')}{\mathcal{G}^{(a)}(n, n')} = 1. \quad (371)$$

Weiterhin ergeben die VHG-Husimi-Verteilung und die daraus resultierende VHG-Husimi-Phasenverteilung der Ordnung $(p; q)$ entsprechende Verteilungen der Ordnung $(p - l; q - l)$, falls l Zählerparameter mit l Nennerparametern identisch sind.

Für einen beliebigen Fock-Zustand $|n\rangle$ sind die VHG-Husimi-Phasenverteilungen (365) Gleichverteilungen mit dem konstanten Wert $\frac{1}{2\pi}$, ebenso wie die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett, aus der Husimi-Verteilung und aus der Wigner-Funktion.

7.3 VHG-Husimi-Phasenverteilungen für kohärente Zustände

Für die konventionellen kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ gemäß Gleichung (10) sind die resultierenden Phasenverteilungen (365) eine Funktion der Phasendifferenz $\theta - \varphi_\alpha$. In den Abbildungen 45 bis 47 sind die VHG-Husimi-Phasenverteilungen mit $(p, q) = (0, 1), (1, 1)$ und $(1, 0)$ für einen kohärenten Zustand mit $\alpha = \frac{3}{4}$ dargestellt. Alle Verteilungen haben an der Stelle $\theta = \varphi_\alpha$ ein Maximum. In der Abbildung 45 nimmt die Höhe des Maximums mit abnehmenden b ab. In der Abbildung 46 nimmt die Höhe des Maximums mit abnehmenden b und zunehmenden a ab. In der Abbildung 47 nimmt die Höhe des Maximums mit zunehmenden a ab. In der Abbildung 46 sind die Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(1,1)}(\theta)$ mit $a = b$ und die konventionelle Husimi-Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ identisch. Bei $a < b$ ist das Maximum höher als bei der konventionellen Husimi-Phasenverteilung, während bei $a > b$ das Maximum niedriger als bei der konventionellen Husimi-Phasenverteilung ist. Die ist genau das umgekehrte Verhalten im Vergleich zu den Phasenverteilungen in der Abbildung 37.

Die Phasenverteilungen in den Abbildungen 45 bis 47 sind komplementär zu denen in den Abbildungen 36 bis 38 in dem Sinn, dass die Signalzustände und die analysierenden

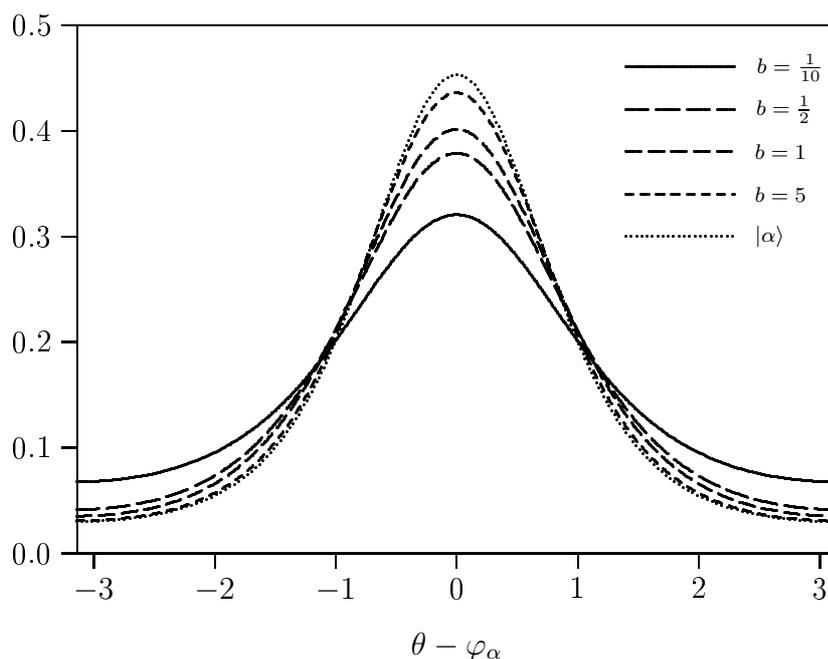


Abbildung 45: Verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(0,1)}(\theta)$ mit $b = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$ und 5 sowie die konventionelle Husimi-Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

Zustände vertauscht sind. Der Signalzustand in den Abbildungen 36 bis 38 ist ein kohärenter VHG-Zustand, und der analysierende Zustand in den Abbildungen 36 bis 38 ist ein konventioneller kohärenter Zustand. Im Gegensatz dazu ist in den Abbildungen 45 bis 47 der Signalzustand ein konventioneller kohärenter Zustand und der analysierende Zustand ein kohärenter VHG-Zustand. Im ersten Fall wird die konventionelle Husimi-Verteilung $Q_{|p;q;z\rangle}^{(0,0)}(\tilde{\alpha})$ für die kohärenten VHG-Zustände $|p;q;z\rangle$ betrachtet. Im zweiten Fall wird die VHG-Husimi-Verteilung $Q_{|\alpha\rangle}^{(p,q)}(\tilde{z})$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ untersucht. Die beiden Sätze von Abbildungen zeigen ein entgegengesetztes Verhalten in dem Sinn, dass bei einer vorgegebenen Variation des Parameters die Höhe des Maximums beispielsweise in dem einen Satz zunimmt und in dem anderen Satz abnimmt.

Die Phasenverteilungen, die sich zueinander komplementär verhalten, sind auf die VHG-Husimi-Verteilungen vom Typ $Q_{|p;q;z\rangle}^{(\tilde{p},\tilde{q})}(\tilde{z})$ zurückzuführen, bei denen sowohl die Signalzustände $|p;q;z\rangle$ als auch die analysierenden Zustände $|\tilde{p};\tilde{q};\tilde{z}\rangle$ beide VGH-Zustände und somit vertauschbar sind. Diese Verteilungen sind aufgrund der Nichtorthogonalität der VHG-Zustände nicht trivial. Lediglich für den Fall $p = \tilde{p}$ und $q = \tilde{q}$ sind die beiden Parametersätze identisch. Im letzteren Fall ist die Selbstabbildung $Q_{|p;q;z\rangle}^{(p,q)}(\tilde{z})$ durch das Modulquadrat des Skalarprodukts in Gleichung (289) multipliziert mit der Gewichtsfunktion ${}_p\mathcal{W}_q(|\tilde{z}|^2)$ gegeben. Die Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$, die auch in den Abbildungen 36 bis 38 und 45 bis 47 dargestellt sind, resultieren aus einer solchen Selbstabbildung.

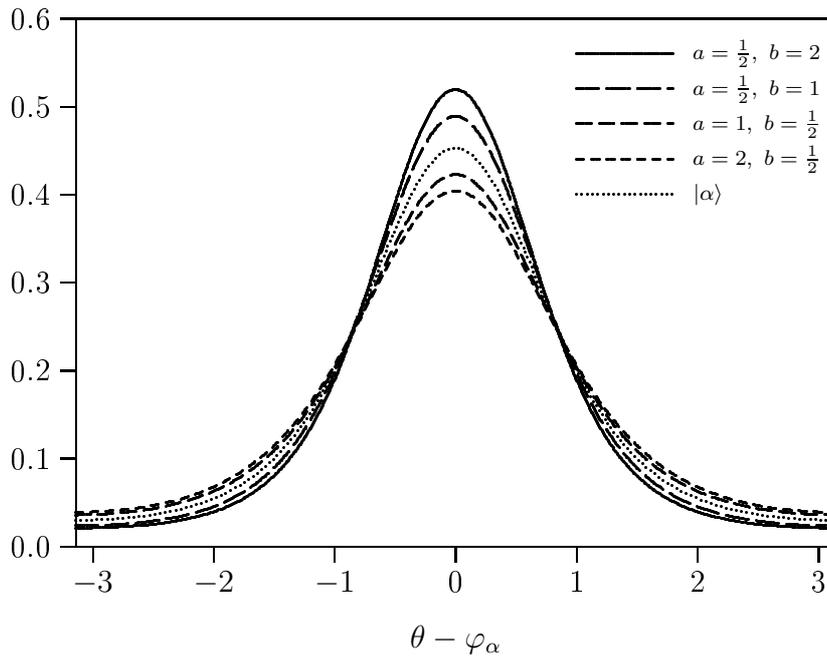


Abbildung 46: Verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(1,1)}(\theta)$ mit $(a; b) = (\frac{1}{2}; 2), (\frac{1}{2}; 1), (1; \frac{1}{2})$ und $(2; \frac{1}{2})$ sowie die konventionelle Husimi-Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

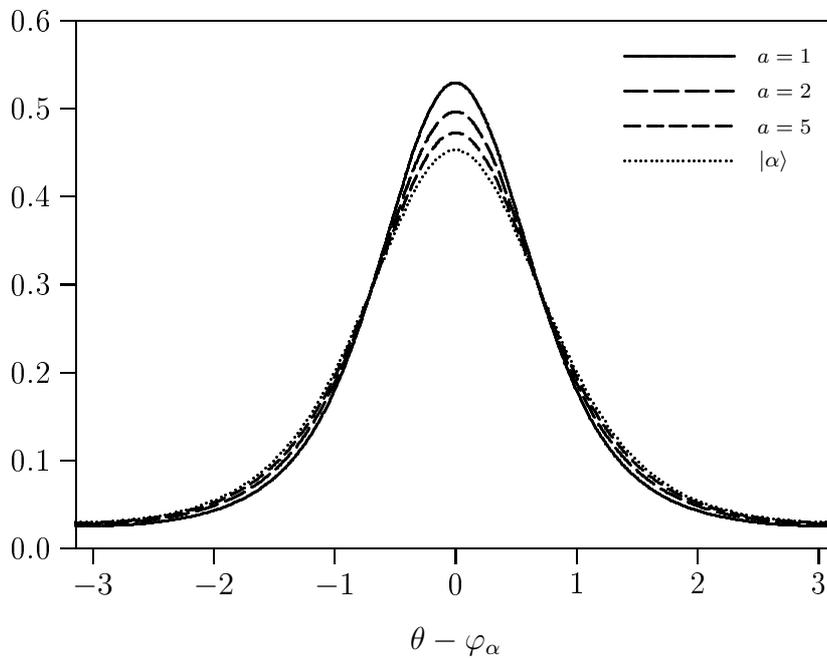


Abbildung 47: Verallgemeinerte hypergeometrische Husimi-Phasenverteilungen $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(1,0)}(\theta)$ mit $a = 1, 2$ und 5 sowie die konventionelle Husimi-Phasenverteilung $\mathcal{P}_{|\alpha\rangle}^{(Q)}(\theta)$ für den konventionellen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, jeweils mit $|\alpha| = \frac{3}{4}$.

8 Schlussbetrachtung

Die vorliegenden Untersuchungen haben ergeben, dass jedem Satz orthonormierter Polynome in dem Intervall $[-1, +1]$ jeweils ein Kosinus- und ein Sinusoperator zugeordnet werden kann. Die Eigenschaften der Kosinus- und Sinusoperatoren sowie der Kosinus- und Sinuszustände ergeben sich eindeutig aus den Eigenschaften der Polynome, insbesondere aus der Rekursionsbeziehung für drei aufeinanderfolgende Polynome.

Es ist dabei zwischen den verallgemeinerten und den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren zu unterscheiden. Bei den verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren sind die Gewichtsfunktionen der Polynome symmetrisch, während bei den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren die Gewichtsfunktionen der Polynome unsymmetrisch sind. Die Matrixelemente der verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren in der Fock-Darstellung befinden sich auf den beiden Nebendiagonalen. Die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren weisen in der Fock-Darstellung zusätzlich Diagonalelemente auf. Die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren können als Variablen eines gewöhnlichen Oszillators, der um den Koordinatenursprung oszilliert, aufgefasst werden. Die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren können als Variablen eines verschobenen Oszillators interpretiert werden.

Von den klassischen orthogonalen Polynomen stehen die Gegenbauer-Polynome mit den verallgemeinerten und die Jacobi-Polynome mit den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren im Zusammenhang. Folglich können die verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren durch den Gegenbauer-Parameter λ , und die erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren durch die beiden Jacobi-Parameter μ und ν charakterisiert werden. Dabei hat sich insbesondere gezeigt, dass die Erwartungswerte und Verteilungen mit einem negativen Gegenbauer-Parameter λ ungewöhnliche Resultate haben. Dagegen führen ein positiver Gegenbauer-Parameter λ und der Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ auf erwartete Resultate.

Es existiert kein Paar der verallgemeinerten oder erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren, das die trigonometrische Beziehung $\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{1}$ oder die Kommutatorbeziehung $[\hat{C}, \hat{S}] = 0$ erfüllt.

Die Kosinus- und Sinuszustände ermöglichen die Darstellung von Kosinus- bzw. Sinusverteilungen und die Bestimmung von Erwartungswerten mittels Integration. Außerdem bilden die verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinuszustände eine Basis zur Darstellung beliebiger Zustände.

Auf der Grundlage der verallgemeinerten und erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren lassen sich entsprechende hermitesche Arcuskosinus- und Arcussinusoperatoren definieren. Auch deren Eigenzustände sind als Basis zur Darstellung beliebiger Zustände geeignet.

Mit den verallgemeinerten Kosinus- und Sinusoperatoren können gemäß der entsprechenden klassischen Beziehung verallgemeinerte Exponentialoperatoren eindeutig bestimmt werden. Dagegen gibt es mehrere Möglichkeiten, mit den erweiterten Kosinus- und Sinusoperatoren entsprechende Exponentialoperatoren zu definieren. Es wurden daher zwei verschiedene Arten von erweiterten Exponentialoperatoren eingeführt. Bei den erweiterten Exponentialoperatoren erster Art sind die Diagonalelemente in einem neutralen Exponentialoperator zusammengefasst. Die erweiterten Exponentialoperatoren zweiter Art enthalten implizit die

Diagonalelemente.

Die Eigenzustände der als Absteigeoperator wirkenden Exponentialoperatoren haben für den allgemeinen Fall die Form der verallgemeinerten kohärenten Zustände von Klauder *et al.*

Die Exponentialzustände für die klassischen Polynome sind zwar normierbar, aber ermöglichen keine Darstellung des Einheitsoperators. Die modifizierten Exponentialzustände sind zur Darstellung des Einheitsoperators geeignet. Außerdem ermöglichen die modifizierten Exponentialzustände die Definition einer zweidimensionalen Verteilung innerhalb des Einheitskreises in Analogie zur Husimi-Verteilung. Daraus lassen sich Phasenverteilungen für beliebige Zustände bestimmen. Diejenigen Phasenverteilungen, die mit den Gegenbauer-Polynomen im Zusammenhang stehen, enthalten die Phasenverteilungen von Pegg und Barnett als Spezialfall und die Phasenverteilungen aus der Husimi-Verteilung als Grenzfall.

Die verallgemeinerten hypergeometrischen Zustände (VHG-Zustände) sind in der komplexen Ebene, innerhalb des Einheitskreises oder auf dem Einheitskreis definiert, je nachdem welche Konvergenzkriterien die jeweilige Normierungsfunktion ${}_pF_q$ erfüllt. In der komplexen Ebene sind die VHG-Zustände eine Verallgemeinerung der konventionellen kohärenten Zustände. Die VHG-Zustände innerhalb des Einheitskreises sind eine Verallgemeinerung der kohärenten Phasenzustände und die VHG-Zustände auf dem Einheitskreis eine Verallgemeinerung der Phasenzustände.

Die kohärenten VHG-Zustände, die eine Untermenge der VHG-Zustände sind, ermöglichen die Darstellung des Einheitsoperators mit einer positiven Gewichtsfunktion. Die Gewichtsfunktion ist mittels der Mellin-Transformation bestimmbar. Es ist jedoch eine separate Überprüfung erforderlich, ob die Gewichtsfunktion auch tatsächlich positiv ist.

Die Photonenzahlstatistik der VHG-Zustände zeigt, dass die VHG-Zustände sowohl klassische als auch nicht-klassische Zustände sein können.

Die kohärenten VHG-Zustände in der komplexen Ebene und innerhalb des Einheitskreises sind zur Darstellung beliebiger Quantenzustände geeignet. Dabei bilden die VHG-Zustände in der komplexen Ebene einen Bargmann-Raum und die VHG-Zustände innerhalb des Einheitskreises einen Hardy-Raum.

Die kohärenten VHG-Zustände in der komplexen Ebene und innerhalb des Einheitskreises ermöglichen weiterhin die Definition verallgemeinerter hypergeometrischer Husimi-Verteilungen über der komplexen Ebene bzw. innerhalb des Einheitskreises. Daraus können Phasenverteilungen für beliebige Zustände bestimmt werden.

Literatur

- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [2] H. Paul, *Photonen* (B. G. Teubner, Stuttgart, 1995).
- [3] V. Perinova, A. Luks and J. Perina, *Phase in Optics* (World Scientific Publ. Co., Singapore, 1998).
- [4] W. Vogel, D.-G. Welsch and S. Wallentowitz, *Quantum Optics, An Introduction* (Wiley-VCH, Berlin, 2001).
- [5] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley-VHC, Weinheim, 2001).
- [6] R. Lynch, *The Quantum Phase Problem: A Critical Review*, Phys. Reports **256**, 367 (1995)
- [7] R. Tanas, A. Miranowicz and T. Gantsog, *Quantum Phase Properties of Nonlinear Optical Phenomena*, Progress in Optics **35**, 355 (1996)
- [8] H. A. Kastrup, *Quantization of the Optical Phase Space $\mathcal{S}^2 = \{\varphi \bmod 2\pi, I > 0\}$ in Terms of the Group $SO(1,2)$* , Fortschr. Phys. **51**, 975 (2003); Addendum: Fortschr. Phys. **52**, 388 (2004)
- [9] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation*, Proc. Roy. Soc. (London) A. **114**, 243 (1927)
- [10] F. London, *Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik*, Z. Phys. **37**, 915 (1926)
- [11] F. London, *Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik*, Z. Phys. **40**, 193 (1927)
- [12] W. H. Louisell, *Amplitude and Phase Uncertainty Relations*, Phys. Lett. **7**, 60 (1963)
- [13] L. Susskind and J. Glogower, *Quantum Mechanical Phase and Time Operator*, Physics **1**, 49 (1964)
- [14] P. Carruthers and M. M. Nieto, *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968)
- [15] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phase Properties of the Quantized Single-Mode Electromagnetic Field*, Phys. Rev. **39**, 1665 (1989)
- [16] R. Tanas, B. K. Murzakhmetov, T. Gantsog and A. V. Chizhov, *Phase Properties of Displaced Number States*, Quantum Optics **4**, 1 (1992)

- [17] W. P. Schleich and S. M. Barnett (Eds.), Phys. Scr. **T48** (1993) *Quantum Phase and Phase Dependent Measurements*.
- [18] M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions, Theory and Algorithmic Tables*, (Dover, New York, 1974).
- [19] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Series, Product and Integrals* (Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M., 1981).
- [20] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications Vol. 23, Fourth Edition, 1975).
- [21] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials* (Gordon and Breach, New York, 1978).
- [22] R. J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963)
- [23] D. Stoler, *Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets*, Phys. Rev. D **1**, 3217 (1970)
- [24] R. A. Fisher, M. M. Nieto and V. D. Sandberg, *Impossibility of Naively Generalizing Squeezed Coherent States*, Phys. Rev. D **29**, 1107 (1984)
- [25] M. Dakna, L. Knöll and D.-G. Welsch, *Direct Sampling of the Susskind-Glogower Phase Distributions*, Phys. Rev. A **55**, 2360 (1996)
- [26] D. R. Truax, *Baker-Campbell-Hausdorff Relations and Unitarity of $SU(2)$ and $U(1,1)$ Squeeze Operators*, Phys. Rev. D **31**, 1988 (1985)
- [27] E. C. Lerner, *Harmonic-Oscillator Phase Operators*, Nuovo Cimento **56 B**, 183 (1968); Erratum: Nuovo Cimento **57 B**, 251 (1968)
- [28] E. C. Lerner, H. W. Huang and G. E. Walters, *Some Mathematical Properties of Oscillator Phase Operators*, J. Math. Phys. **11**, 1679 (1970)
- [29] G. M. D'Ariano and M. G. A. Paris, *Necessity of Sine-Cosine Joint Measurement*, Phys. Rev. A **48**, R4039 (1993)
- [30] A. Vourdas, *Analytic Representations in the Unit Disk and Applications to Phase States and Squeezing*, Phys. Rev. A **45**, 1943 (1992)
- [31] A. Vourdas, Phys. Scr. **48**, 84 (1993) *Phase States: An Analytic Approach in the Unit Disc*.
- [32] R. L. de Matos Filho and W. Vogel, Phys. Rev. A **54**, 4560 (1996) *Nonlinear Coherent States*.

- [33] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan and F. Zaccaria, *Phys. Scr.* **55**, 528 (1997)
f-Oscillators and Nonlinear Coherent States.
- [34] A. V. Chizhov, T. Gantsog and B. K. Murzakhmetov, *Phase Distributions of Squeezed Number States and Squeezed Thermal States*, *Quantum Optics* **5**, 85 (1993)
- [35] J. R. Klauder, K. A. Penson and J.-M. Sixdeniers, *Constructing Coherent States through Solutions of Stieltjes and Hausdorff Moment Problems*, *Phys. Rev. A* **64**, 013817 (2001)
- [36] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms* (Springer, Berlin, 1974).
- [37] O. I. Marichev, *Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions, Theory and Algorithmic Tables* (Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1983).
- [38] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov and O. I. Marichev *Integrals and Series* (Gordon and Breach, New York, 1998).
- [39] H.-C. Fu and R. Sasaki, *Hypergeometric States and Their Nonclassical Properties*, *J. Math. Phys.* **38**, 2154 (1997)
- [40] C. Quesne, *Generalized Coherent States Associated with the C_λ -Extended Oscillator*, *Annals of Physics* **293**, 147 (2001)
- [41] J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam (Eds.), *Coherent States. Applications in Physics and Mathematical Physics* (World Scientific, Singapore, 1985).
- [42] D. H. Feng, J. R. Klauder and M. R. Strayer (Eds.), *Coherent States. Past, Present and Future* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [43] V. V. Dodonov, 'Nonclassical' States in Quantum Optics: A 'Squeezed' Review of the First 75 Years, *J. Opt. B* **4**, R1 (2002)
- [44] L. Mandel, *Sub-Poissonian Photon Statistics in Resonance Fluorescence*, *Opt. Lett.* **4**, 205 (1979)
- [45] A. M. Perelomov, *Coherent States for Arbitrary Lie Group*, *Commun. Math. Phys.* **26**, 222 (1972)
- [46] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer, Berlin, 1986).
- [47] J. H. Shapiro and S. R. Shepard, *Quantum Phase Measurement: A System Theory Perspective*, *Phys. Rev. A* **43**, 3795 (1991)
- [48] T. Appl and D. H. Schiller, *Generalized Hypergeometric Coherent States*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 2631 (2004)
- [49] T. Appl and D. H. Schiller, *Cosine and Sine Operators Related to Orthogonal Polynomial Sets on the Interval $[-1,1]$* , *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 6485 (2005)

- [50] T. Appl and D. H. Schiller, *Exponential Operators and Coherent States Related to Orthogonal Polynomial Sets on the Interval $[-1,1]$* , wird eingereicht.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. D.H. Schiller möchte ich für seine freundliche Unterstützung, die zahlreichen und umfangreichen Gespräche und die Anregungen, die zu dieser Dissertation wesentlich beigetragen haben, danken.

Meiner Frau Heidrun sowie unseren Kindern Angelika, Matthias und Niklas danke ich für ihr Verständnis und ihre Geduld während der Ausarbeitung und Anfertigung dieser Dissertation und der damit im Zusammenhang stehenden Publikationen.