

Daniel Schütz

Numerische Simulation des
aerodynamischen und akustischen
Feldes einer Düse-Flügel-Klappen
Konfiguration

Herausgeber: Holger Foyi und Thomas Seeger

Schriftenreihe der Lehrstühle für Strömungsmechanik
und Technische Thermodynamik

Band 8

Numerische Simulation des aerodynamischen und akustischen Feldes einer Düse-Flügel-Klappen Konfiguration

dem Fachbereich Maschinenbau
der Universität Siegen
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegte Dissertation
von

Daniel Schütz, M.Sc.

Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. H. Foysi
Koreferent:	Prof. Dr.-Ing. W. Schröder
Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Th. Seeger
Dekan:	Prof. Dr. H. Schönherr

Tag der Einreichung: 24.03.2022

Tag der mündl. Prüfung: 14.12.2022

Siegen, Januar 2023

Impressum

Institut für Fluid- und Thermodynamik

Prof. Dr.-Ing. Holger Foyi

Lehrstuhl für Strömungsmechanik

Universität Siegen

57068 Siegen

Nummer 2023-1

Zugl.: Siegen, Univ., Diss. 2023

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Strömungsmechanik an der Universität Siegen. An dieser Stelle möchte ich gerne allen Personen danken, die mich während meiner Promotion unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Holger Foysi, für die Möglichkeit an seinem Lehrstuhl zu promovieren, für die Förderung und fachlichen Diskussionen, die Geduld und den gewährten Freiraum. Seine Lehrveranstaltungen in Strömungsmechanik und Aeroakustik haben mein Interesse an diesem Fachgebiet geweckt und mich zu dieser Arbeit motiviert.

Danken möchte ich auch Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Schröder für die Bereitschaft, das Koreferat zu übernehmen sowie Prof. Dr.-Ing. Thomas Seeger und Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen für ihre Bereitschaft zur Mitarbeit in der Promotionskommission.

Meinen Kollegen Dipl.- Ing. Alexander Bald, Dipl.- Ing. Bastian Bieker, Dr.-Ing. George Khujadze und Dr.-Ing. Fettah Aldudak danke ich für das harmonische Miteinander sowie allen Studenten, die ich bei ihren Abschlussarbeiten mitbetreuen durfte, für ihre Mitarbeit.

Zum Schluss danke ich ganz besonders meiner lieben Frau Mirjam für ihre Unterstützung und Geduld.

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden ein Fernfeldlöser basierend auf den linearisierten Euler-Gleichungen und ein Fernfeldlöser basierend auf der akustischen Analogie von Ffowcs Williams & Hawkings für akustische Problemstellungen mit Konvektion in das Open-Source Paket OVERTURE implementiert, sowie Large-Eddy Simulationen des aerodynamischen und akustischen Feldes eines isolierten Tragflügels und verschiedener Düse-Flügel-Klappe Konfigurationen durchgeführt.

Zur Validierung der Methoden und Verifikation ihrer Implementierung wurden spezielle Testfälle zur Evaluation von CFD/CAA-Programmcode durchgeführt. Darüber hinaus wurden die kompressible Umströmung eines NACA0012 Tragflügels mit einer Machzahl der Anströmung von $M_\infty = 0.4$ und der Reynoldszahl, basierend auf der Sehnenlänge von $Re_C = 408000$ sowie ein kompressibler runder Freistrahls mit $M_j = 0.9$ und der Reynoldszahl, basierend auf dem Düsendurchmesser von $Re_D = 3600$ simuliert. Die numerischen Berechnungen zeigten in allen Fällen eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen beziehungsweise den Ergebnissen aus Messungen und direkten numerischen Simulationen aus der Literatur. Darüber hinaus diente die Freistrahlsimulation zur Findung einer geeigneten Aufspaltung des Lighthillspannungstensors, T_{ij} , und zum Test, ob eine Richtungsableitung Rückschlüsse auf die Richtcharakteristik einzelner Komponenten der Lighthill-Quelle $S = \partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$ basierend auf instantanen Daten zulässt. Die Simulationen zeigten, dass die vorgeschlagene Auswertung instantaner Lighthill-Quellen, S , und deren linearer Anteile, S^l , und nicht linearer Anteile, S^n , Rückschlüsse auf die Richtcharakteristik des emittierten Schallfelds erlauben. Die Ergebnisse bestätigen, dass der nicht lineare Anteil keine Vorzugsrichtung hinsichtlich der Schallabstrahlung aufweist, während der lineare Anteil eine klare Vorzugsrichtung entlang der Freistrahllachse und nur einer sehr geringe akustische Abstrahlung orthogonal dazu besitzt. Ferner zeigte sich, dass ein erhöhter Wert für S^l mit Bereichen kohärenter Wirbelstrukturen und großer Gradienten in der mittleren Geschwindigkeit zusammenfällt und das korrespondierende Schallspektrum für Winkel von $< 30^\circ$, gemessen von der Freistrahllachse, durch ein Peak bei der Strouhalzahl von $St_D = 0.2$ gekennzeichnet ist.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden Düse-Flügel-Klappe Konfigurationen mit unterschiedlichen Klappenwinkeln und Bypassgeschwindigkeiten simuliert. Dabei stellte sich heraus, dass die in Experimenten aufgetretenen Buckel im mittleren vierstelligen Frequenzbereich des Druckspektrums auf eine Rückkopplung zwischen Klappe und unterer Flügelhinterkante zurückzuführen sein könnten. In der Kombination mit Tragflügel und Düse, treten auf der Flügel- und Klappenunterseite im Mittel erhöhte Werte des Lighthill-Quellterms auf, welche im Fall des isolierten Tragflügels nicht beobachtet wurden. Außerdem war eine starke Kontamination mit Schall der Frequenz um 3.6 kHz im Bereich unterhalb der Düse zu beobachten. Aus der Analyse der einzelnen Lighthill-Quellkomponenten hinsichtlich ihrer bevorzugten akustischen Abstrahlung wird vermutet, dass gerichteter Schall aus dem Bereich des Potentialkerns an Flügel- und Klappenunterseite reflektiert wird, wobei die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Primär- und Sekundärstrahl eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei der Brechung und Streuung des aus dem Primärstrahl stammenden Schalls spielt.

Abstract

In this work, a far-field solver based on the linearized Euler equations and a far-field solver based on the acoustic analogy of Ffowcs Williams & Hawkings for acoustic problems with convection were implemented in the open source package OVERTURE, and large-eddy simulations of the aerodynamic and acoustic field of an isolated airfoil and various nozzle-wing flap configurations were performed. To validate the methods and verify their implementation, special test cases were performed to evaluate CFD/CAA program code. In addition, compressible flow around a NACA0012 aerofoil with free stream Mach number of $M_\infty = 0.4$ and Reynolds number based on chord length of $Re_C = 408000$ and a compressible jet with $M_j = 0.9$ and Reynolds number based on nozzle diameter of $Re_D = 3600$ were simulated. In all cases, the numerical calculations showed good agreement with the analytical solutions and the results from measurements and direct numerical simulations from the literature, respectively. In addition, the jet simulation was used to find a suitable decomposition of the Lighthill stress tensor, T_{ij} , and to test whether its directional weighting allows conclusions to be drawn about the directionality of individual components of the Lighthill source $S = \partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$ based on instantaneous data. The simulations showed that the proposed evaluation of instantaneous Lighthill sources, S , and their linear components, S^l , and nonlinear components, S^n , allow conclusions to be drawn about the directivity of the emitted sound field. The results confirm that the nonlinear component has no preferred direction with respect to sound radiation, while the linear component has a clear preferred direction along the jet axis and only a very small acoustic radiation orthogonal to it. Furthermore, an increased value for S^l was found to coincide with regions of coherent vortex structures and large gradients in mean velocity, and the corresponding acoustic spectrum for angles of $< 30^\circ$, measured from the jet axis, is characterized by a peak at the Strouhal number of $St_D = 0.2$.

In the second part of this work, nozzle-wing flap configurations with different flap angles and bypass velocities were simulated. It was found that the bumps in the mid-four-digit frequency range of the pressure spectrum that appeared in experiments could be due to feedback between the flap and the lower trailing edge of the wing. In the combination with airfoil and nozzle, increased values of the Lighthill source term occur on the wing and flap lower edge on average, which were not observed in the case of the isolated airfoil. In addition, strong contamination with sound of frequency around 3.6 kHz was observed in the region below the nozzle. From the analysis of the individual Lighthill source components in terms of their preferred acoustic radiation, it is suspected that directional sound from the region of the potential core is reflected from the underside of the wing and flap, whereby the velocity difference between the primary and secondary jets plays a non-negligible role in the refraction and scattering of the sound originating from the primary jet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modelle und numerische Methoden im Nahfeld	11
2.1	Konservativer Navier-Stokes Löser	11
2.1.1	Grundgleichungen	11
2.1.2	Räumliche Diskretisierung	13
2.1.3	Zeitliche Integration	15
2.1.4	Validierung	17
2.1.5	Parallele Performanz	21
2.2	Nicht konservativer Navier-Stokes Löser	23
2.2.1	Grundgleichungen	26
2.2.2	Diskretisierung und Randbedingungen	26
2.2.3	Parallelisierung und Optimierung	28
2.3	Numerische Lösung von PDEs auf überlappenden Gittern	29
2.3.1	Räumliche Diskretisierung mittels körperangepasster strukturierter Gitter	29
2.3.2	Interpolationsmethode	30
2.3.3	Genauigkeit und Ordnung der Interpolation	31
2.3.4	Interpolationsfehler	32
2.4	Forcing	40
2.4.1	Dämpfungszonen	40
2.4.2	Einlass-Forcing	42
2.4.3	Wirbelring-Forcing	43
2.5	Methoden zur Wirbelidentifikation	44
2.5.1	Komplexe Eigenwerte von $\nabla \mathbf{u}$	44
2.5.2	Positive zweite Invariante von $\nabla \mathbf{u}$	44
2.5.3	Zwei negative Eigenwerte von $\Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj}$	45
2.6	Mittelungsverfahren	45
3	Modelle und numerische Methoden im Fernfeld	47
3.1	Zonale Methode basierend auf den linearisierten Euler Gleichungen	47
3.1.1	Grundgleichungen	47
3.1.2	Diskretisierung	48
3.1.3	Fernfeld-Randbedingungen	54
3.1.4	Interface-Randbedingungen	54
3.1.5	Validierung und Verifikation	55
3.2	Integrale-Methode basierend auf FWH	72
3.2.1	Theorie	74
3.2.2	Numerik	82
3.2.3	Numerische Implementierung	84
3.2.4	Validierung und Verifikation	85
3.3	Identifikation von Schallquellen	105

4	Flügel-Klappe Konfiguration	119
4.1	Strömungsparameter	119
4.2	Numerische Spezifikationen	119
4.3	Aerodynamisches Feld	122
4.4	Akustisches Feld	126
5	Düse-Flügel-Klappe Konfiguration	133
5.1	Simulationskonfigurationen	133
5.1.1	Geometrieparameter	133
5.1.2	Strömungsparameter	134
5.2	Numerische Spezifikationen	137
5.2.1	Einfluss der Auflösung	137
5.2.2	Einfluss der Gebietsgröße	139
5.3	Aerodynamisches Feld	139
5.3.1	Instantanes Strömungsfeld	139
5.3.2	Mittleres Strömungsfeld	143
5.4	Akustisches Feld	143
5.4.1	Instantanes Divergenzfeld	148
5.4.2	Lighthill Quellen	148
5.5	Maßnahmen zur Schallreduktion	153
6	Zusammenfassung und Ausblick	159
A	Herleitung der Quellengewichtung	167
B	Runde Düse-Flügel-Klappe Konfiguration	169
B.1	Strömungsparameter	169
B.2	Numerische Spezifikationen	169
B.3	Ergebnisse	171
C	Appendix	173
C.1	Differenzenoperatoren	173
C.2	Koeffizienten	175

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

a	Schallgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
c_v	spezifische Wärme bei konstantem Volumen
e_i	Einheitsvektoren in i -Richtung
e_1, e_2, e_3	Einheitsvektoren in x_1, x_2 und x_3 -Richtung
e_r, e_θ, e_ϕ	Einheitsvektoren in r, θ und ϕ -Richtung
E	totale Energie
$E(\kappa)$	Energiespektrum
$E_{ii}(\kappa_1)$	eindimensionales Energiespektrum
\mathcal{F}	Fouriertransformation
\mathcal{F}^{-1}	Inverse Fouriertransformation
f	Frequenz
$f(r)$	longitudinale Geschwindigkeitskorrelationsfunktion
$g(r)$	transversale Geschwindigkeitskorrelationsfunktion
He	Helmholtzzahl $He = L/\lambda$
i	Gitterpunktvektor $((i, j, k))$
i	komplexe Einheit ($i^2 = -1$)
k	thermische Leitfähigkeit
	turbulente kinetische Energie ($\frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle$)
\mathbf{k}	Wellenzahlvektor
k_i	Wellenzahl in i -Richtung
l_{sp}	Länge der Schwammzone
\mathbf{l}	Lamb-Vektor ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$)
L	Längenskale
L_{11}	longitudinale integrale Längenskale
L_{22}	transversale integrale Längenskale
L_{2p}	L_2 -Norm des Drucks
M	Machzahl (u/a)
M_w	molares Gasgewicht
\mathbf{n}	Einheitsnormalenvektor
p	Druck
p_a	akustische Druckfluktuationen
\mathcal{P}	Formfunktion
Pr	Prandtlzahl
\mathbf{q}	Vektor der Strömungsvariablen
q_i	Wärmestrom in i -Richtung
$Q = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$	zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors, $\nabla \mathbf{u}$
Re	Reynoldszahl
R_{ij}	Zweipunktkorrelation

\mathcal{R}_{ij}	Zweipunktkorrelationsfunktion (normierte Zweipunktkorrelation)
r	radiale Richtung
(r, θ, ϕ)	Kugelkoordinaten
r_0	Radius
r_o	Radius der Freistrahldüse
\mathcal{R}^*	universelle Gaskonstante ($\mathcal{R}^* = 8,314 \text{ J}/(\text{molK})$)
\mathcal{R}_g	spezielle Gaskonstante
Sr	Strouhalzahl
t	Zeit
Δt	Zeitschrittweite
Δt_{sp}	Samplingzeitschrittweite ($\Delta t_{\text{sp}} \geq \Delta t$)
T	absolute Temperatur
	Simulationszeit
T_{av}	Mittelungsdauer
T_{sp}	Samplingdauer
ΔT_{sp}	Samplingintervall ($T_{\text{sp}}/N_{\text{sp}}$)
\mathbf{U}	Vektor der Strömungsvariablen
u	Geschwindigkeit in x -Richtung
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit ($\sqrt{\tau_w/\rho}$)
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$
u_i	Geschwindigkeitskomponente in x_i -Richtung
\mathbf{u}_a	Vektor der akustischen Geschwindigkeitsfluktuationen
v	Geschwindigkeit in y -Richtung
V_g	Gruppengeschwindigkeit der akustischen Wellen
w	Geschwindigkeit in z -Richtung
\mathbf{x}	Ortsvektor (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)
$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$	Koordinaten im physikalischen Raum
x_i	Koordinate in i -Richtung
(x, r, ϕ)	Zylinderkoordinaten

Griechische Symbole

γ	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (c_p/c_v)
δ_{ij}	Kronecker-Delta
δ_θ	Impulsverlustdicke
δ_ω	Wirbelstärkedicke
Δ	Differenz
Δx_i	Gitterweite in x_i -Richtung
Δt	Zeitschrittweite
ϵ	Dissipation
ϵ	dimensionslose Druckamplitude
ϵ_v	dimensionslose Geschwindigkeitsamplitude
η	Kolmogorov Längenskale
λ	Wellenlänge
λ_c^{sp}	cut-off Wellenlänge des Zeitschritts
λ_c^{g}	cut-off Wellenlänge des Gitters
λ_f	longitudinales Taylor-Längenmaß
λ_g	transversales Taylor-Längenmaß
λ_i	Eigenwert i

μ	dynamische Viskosität
ν	kinematische Viskosität (μ/ρ)
ξ	Hankel-transformierte Koordinate
ξ	Ortsvektor im Rechenraum $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi, \eta, \zeta)$
(ξ, η, ζ)	Koordinaten im Rechenraum
π	Kreiszahl
ρ	Dichte
ρ_a	akustische Dichtefluktuationen
σ	Dämpfungskoeffizient
τ, τ_{ij}	viskoser Spannungstensor
Ω	Gebiet
$\partial\Omega$	Gebietsrand
ω	Kreisfrequenz ($2\pi f$)
$\boldsymbol{\omega}$	Wirbelstärkevektor
ω_x	x -Komponente des Wirbelstärkevektors ($\partial_y w - \partial_z v$)
ω_y	y -Komponente des Wirbelstärkevektors ($\partial_z u - \partial_x w$)
ω_z	z -Komponente des Wirbelstärkevektors ($\partial_x v - \partial_y u$)

Allgemeine Symbole

\mathbf{a}	Vektor, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$
\mathbf{A}	Pseudovektor, z.B. Lösungsvektor $\mathbf{U} = (\rho, \mathbf{u}, E)$
\mathbf{A}	Tensor zweiter Stufe, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$
$ a $	Betrag von a
$\ \mathbf{a}\ $	L_2 -Norm des Vektors \mathbf{a}
$a \equiv b$	a ist identisch mit b
$a = b$	a ist gleich b
$a \neq b$	a ist nicht gleich b
$a \simeq b$	a ist ungefähr gleich b ; oder bei hinreichender Genauigkeit gilt $a = b$
$a \approx b$	a wird approximiert mit b
$a \sim b$	a wird abgeschätzt mit b
$a \propto b$	a ist proportional zu b
\mathcal{F}	artificialer Kraftterm
	Filterfunktion
	Fourier-Transformation
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil
$\mathcal{O}(\cdot)$	Größenordnung (Landau-Symbol)
$\Re(\cdot)$	Realteil
$\partial_x = \partial/\partial x$	partielle Ableitung nach x

Superscripts

a'	Fluktuation gegenüber Mittelwert
\bar{a}	zeitlicher Mittelwert
\tilde{a}	modifizierter Wert
	Wert der reflektierten Amplitude
$\tilde{\tilde{a}}$	gefilterter Wert
a^*	dimensionsloser Wert
a^+	Wert normiert mit u_τ und ν

\hat{a}

Fouriertransformierte der Funktion a

Subscripts

a_0	uniforme Hauptströmung
a_∞	Referenzwert im Unendlichen
a_j	Freistrahlaustrittbedingungen
a_{op}	Bedingungen am Eintritt der Primärdüse
a_{os}	Bedingungen am Eintritt der Sekundärdüse
a_p	Bedingungen am Austritt der Primärdüse
a_s	Bedingungen am Austritt der Sekundärdüse

Abkürzungen

AoA	Anstellwinkel (Angle of Attack)
CAA	Computational AeroAcoustics
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy Zahl
CNS	nicht-konservativer kompressibler Navier-Stokes Löser
CNSCAD	konservativer kompressibler Navier-Stokes Löser
DNS	Direkte Numerische Simulation
DRP	Dispersion Relation Preserving
FD	Finite Differenzen
FFT	Fast Fourier Transformation
FWH	Ffowcs Williams & Hawkings Gleichung
JFI	Jet-Flap Interaction
LDDRK	Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta
LEE	Linearized Euler Equations
LES	Large Eddy Simulation
LMM	Lineare Mehrschrittverfahren
LSRK	Low-Storage Runge-Kutta
NSE	Navier Stokes Equations
OSPL	Overall Sound Pressure Level
PC	Prädiktor-Korrektor
PDE	Partielle Differentialgleichung
PDF	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
PPW	Punkte pro Wellenlänge
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
RHS	Right-Hand-Side Terme
RK	Runge-Kutta
SPL	Schalldruckpegel (Sound Pressure Level)
UHBR	Ultra High Bypass Ratio
VLES	Very-Large Eddy Simulation

1 Einleitung

Die Arbeit ist motiviert durch die zunehmende praktische Relevanz der Freistrahls-Klappe Interaktion (engl.: Jet-Flap Interaction, JFI): Infolge Effizienz optimierender Maßnahmen, werden an Flugzeugen zunehmend die neue Generation von Turbofan-Triebwerken mit einem extrem hohen Bypass-Verhältnis (sog. UHBR-Triebwerke) verbaut. Installationseffekte führen dazu, dass die Tragflügel und Klappen in das Einflussgebiet des Triebwerksstrahls geraten, was zu aerodynamischen und aeroakustischen Interferenzen führen kann. Diese gilt es hinsichtlich der aerodynamischen und aeroakustischen Mechanismen und resultierenden akustischen Felder genauer zu untersuchen.

Zwar wurden ähnliche Installationseffekte in der Vergangenheit bereits untersucht [1, 2], allerdings bestehen zwischen den neuesten Konfigurationen und den ersten Arbeiten auf diesem Gebiet einige grundlegende Unterschiede: Bei den untersuchten Flugzeuggeneration der 1960er bis 1980er Jahre waren die Klappen in der Regel mehrfach geschlitzt und es traten beim Start Klappenwinkel der letzten Klappenreihe von bis zu 70° auf [3]. So konnte es dazu kommen, dass der Triebwerksstrahl direkt auf die Klappe trifft (die Klappe wäscht). Die resultierenden starken aerodynamischen Effekte führten zwar zu einer Erhöhung des Auftriebs aber immer auch zu negativen aeroakustischen Interferenzen [4]. Diese Konfigurationen wurden ausführlich untersucht.

Bei den jüngsten Flugzeuggenerationen geht der Trend in Richtung einer Reduzierung der Klappenanzahl und hin zu kleineren Ablenkungswinkeln der Startklappen im Bereich von 9° bis 22° [3], wodurch sich die JFI zunächst verringert. Da die Triebwerke aber aufgrund der hohen Bypass-Verhältnisse dichter am Flügel platziert werden müssen (ein hohes Fahrwerk muss aus Gewichtsgründen vermieden werden [5]), ist auch dann ein signifikanter aeroakustischer Wechselwirkungseffekt vorhanden, wenn keine Hochauftriebskonfigurationen eingesetzt werden und die letzte Klappe nicht direkt durch den Strahl beaufschlagt wird. Weil das Triebwerk dichter am Flügel montiert ist, kann es zudem auch zu Wechselwirkungseffekten zwischen Strahl und Flügel kommen.

Hinsichtlich solcher Freistrahls-Flügel-Klappe Konfigurationen ist die Datenlage noch relativ dünn. Jüngere Veröffentlichungen [6, 7, 8, 4, 9] beginnen sich aufgrund der oben beschriebenen anwendungstechnischen Relevanz allmählich intensiver damit zu beschäftigen.

Auch wenn sich das Problem aus den gut untersuchten Einzelproblemen Freistrahls- und Tragflügelärm zusammensetzt, entsteht durch die Interaktion ein Problem, welches sich nicht *a priori* durch die Summe der Einzelprobleme darstellen lässt. Zur groben Abschätzung des Installationseffekts kann aber der durch die vollständige Konfiguration erzeugte Lärm als eine lineare Superpositionierung unabhängiger Quellen (d.h. Lärm aus der Gesamtkonfiguration = isolierter Freistrahllärm + isolierter Flügellärm + JFI-Lärm \Rightarrow JFI-Lärm = Lärm aus der Gesamtkonfiguration - isolierter Freistrahllärm - isolierter Flügellärm) betrachtet werden [8]. Zur Einleitung in die Theorie wird deshalb im Folgenden kurz auf die wichtigsten und gut bekannten aerodynamischen und aeroakustischen Mechanismen bei subsonischen Freistrahlen und der Tragflügelumströmung eingegangen. Es soll sich an dieser Stelle auf das für die hier untersuchten Fälle Bedeutsame beschränkt werden. Im Anschluss wird die für die Arbeit relevante Literatur hinsichtlich der hier untersuchten Freistrahls-Flügel-Klappe Konfigurationen, zu sehen in Abbildung 1.1, diskutiert.

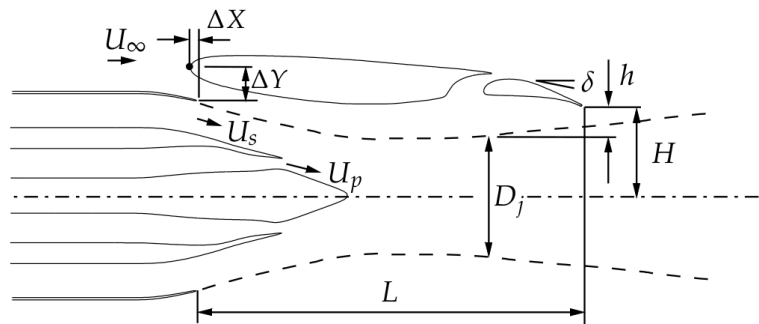


Abb. 1.1: Skizze einer hier untersuchten Freistrah-Flügel-Klappe Konfiguration. D_j ist hier der Durchmesser eines äquivalenten einstrahligen Freistrahls aus einer Düse mit einer Querschnittsfläche gleich der Gesamtfläche von innerem und äußerem Düsenring der Bypass-Düse hier. Untersuchungen zeigen, dass diese Größe einigermaßen mit der Position der Mittellinie der äußeren Scherschicht einer Bypass-Düse übereinstimmt [10].

Relevante Arbeiten

Freistrahllärm

Die Veröffentlichung des ersten Teils einer zweiteiligen Arbeit von Lighthill [11, 12] im Jahr 1952, wird oft als Beginn der Forschung im Bereich des Freistrahllärms genannt [13]. In seinen Arbeiten von 1952 und 1954 brachte Lighthill die Bewegungsgleichungen für kompressible Strömungen (die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen) in eine Form, die die Ausbreitung akustischer Wellen darstellt und begründete so die Theorie der bis heute etablierten akustischen Analogien. Die Lighthill-Gleichung, als Resultat seiner Arbeit, trennt den Schall generierenden Teil von dem für die Ausbreitung des Schalls relevanten Teil und liefert so eine inhomogenen Wellengleichung mit einem nominalen Quellterm S (Quadrupole) auf der rechten Seite. Der Quellterm S wird in Form lokaler Ableitungen ausgedrückt und korrespondiert, wenn auch nicht formal, mit den Wirbeln in einer turbulenten Strömung. Als Resultat von Messungen und Simulationen kann das aerodynamische Feld in große Wirbel und kohärente Strukturen sowie kleinskalige Wirbel unterteilt werden. Der Prozess der Schallerzeugung von großen turbulenten Strukturen scheint mittlerweile gut verstanden, bei der feinskaligen Turbulenz sind diesbezüglich noch einige Fragen offen [13]. Ein wichtiges Ergebnis, das aus der Theorie der akustischen Analogie abgeleitet werden kann, ist das U_j^8 -Skalierungsgesetz, wonach die von einem Freistrahls abgestrahlte akustische Leistung der Quadrupole mit der achten Potenz der Freistrahlschlauchgeschwindigkeit U_j variiert.

Lighthill erkannte aber auch die Bedeutung der Konvektion für die Richtwirkung von Freistrahllärm (Brechung des Schalls im Freistrahls selbst). Durch die stark nicht-uniforme Strömung im Freistrahls und die Scherschicht am Freistrahlsrand werden die Schallwellen mehr oder weniger stark konvektiert und somit abgelenkt. Dies führt dazu, dass der Schalldruckpegel in einem Bereich um 30° von der Freistrahlschlauchachse maximal wird und in Hauptstromrichtung deutlich abnimmt. Für heiße Freistrahls nimmt dieser Effekt zu [13].

Freund [14] fand mittels DNS eines subsonischen Freistrahls mit moderater Reynoldszahl heraus, dass die Quellen in Strömungsrichtung *nicht* akustisch kompakt sind (d.h. dass die räumliche Ausdehnung der Quelle *nicht* klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen ist), und die am stärksten abstrahlenden Komponenten der Schallquelle (in seinem Fall) nicht mit dem Peak der turbulenten kinetischen Energie übereinstimmen. In einer späteren Arbeit von Freund [15] wurde der Lighthill-Quellterm, wie schon 1969 von Ribner [16] vorgeschlagen, in

eine lineare (Turbulenz interagiert mit der Hauptströmung) und eine nicht-lineare Komponente (reine Turbulenz) aufgespalten und ihr jeweiliger Beitrag zum gesamten Schallfeld untersucht. Dabei zeigte sich, wie auch in anderen Arbeiten, dass die nicht-linearen Anteile uniform abstrahlen, während die linearen Quellanteile eine deutliche, Dipol ähnliche, Abstrahlcharakteristik aufwiesen (illustriert in Abbildung 1.2 a bzw. b). Der Bereich um den Freistrahlschall unmittelbar nach dem Düsenauslass wird von ungerichtetem Schall, resultierend aus der kleinskaligen Turbulenz in der Scherschicht, dominiert (Schallkomponente 5 in Abbildung 1.3). Weiterstromab, folgt aus der Brechung des abgestrahlten Schalls der stark gerichteten linearen Quellanteile, eine verstärkte Schallabstrahlung im Bereich um 30° bis 45° von der Freistrahllachse (Komponente 6 in Abbildung 1.3). Diese Beobachtungen sind insofern für die Konfiguration dieser Arbeit wichtig, dass die Klappe je nach Winkel die Mischungsschicht, also den Bereich großer Gradienten der Hauptströmung bei gleichzeitiger Anwesenheit von Turbulenz, streift. Die Klappe sollte daher, so die Vermutung, besonders die Entwicklung der linearen Quellanteile (Turbulenz-Scherschicht Interaktion) in diesem Bereich maßgeblich beeinflussen.

Es ist wichtig zu bemerken, dass es sich bei dem Lighthill-Quellterm um einen nominalen Quellterm handelt, d. h. er berücksichtigt neben den tatsächlichen Schallquellen implizit auch die Konvektion und Brechung des Schalls in einem nicht uniformen Medium. Tatsächlich ist es sogar so, dass der größte Teil der Lighthill-Quelle S nicht abstrahlt. Daraus entsteht die bis heute nicht vollständig geklärte Problematik, wie die tatsächlich akustisch abstrahlenden Komponenten des Quellterms von den nicht abstrahlenden getrennt werden können. Um die strahlenden und nicht strahlenden Anteile der Strömung voneinander zu trennen, haben einige Forscher Filtertechniken im Wellenzahl-Frequenzbereich eingesetzt.

Freund [14] z.B. versuchte den abstrahlenden Teil vom nicht abstrahlenden Teil des Lighthill-Quellterms zu trennen, indem er das Kriterium $|k_x| < |\omega|/a_\infty$ für den abstrahlenden Teil von $\hat{S}(k_x, \omega, r)$ nutzte, wobei \hat{S} die in den Wellenzahl-Frequenzbereich transformierte Lighthill-Quelle, k_x die axiale Wellenzahl, ω die Winkelfrequenz und a_∞ die Schallgeschwindigkeit in der Umgebung kennzeichnet. Er wies aber auch darauf hin, dass dieses Kriterium die radiale Struktur der Strömung (Wellenzahl k_r in radialer Richtung) vernachlässigt. Daher reicht in Fällen mit starken radialen Strömungskomponenten die Verwendung eines Filterkriteriums, das nur auf der axialen Wellenzahl basiert, nicht aus, um die strahlenden und nicht strahlenden Anteile zu trennen. Für ein gegebenes k_x und ein erfülltes $|k_x| < |\omega|/a_\infty$, könnte k_r groß genug sein, um $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_r^2}$ größer als $|\omega|/a_\infty$ werden zu lassen. Ein Filter, das nur auf $|k_x| < |\omega|/a_\infty$ basiert kann daher einige der nicht abstrahlenden Komponenten erfassen.

Sinayoko *et al.* [17] definierten Quellterme zur Approximation physikalischer Quellen, indem sie die Strömung, mittels eines linearen Faltungsfilters angewandt auf das Strömungsfeld, in nicht strahlende und strahlende Komponenten zerlegten. Sie zeigten, dass ihre Aufspaltung physikalischer ist als jene die durch klassische akustische Analogien erzielt werden, bei denen das Strömungsfeld in einen stationären Mittelwert und eine fluktuierende Komponente (wie z.B. in der oben erwähnten Arbeit von Freund [15]) zerlegt wird. Allerdings ist dieses Vorgehen sehr aufwendig und für die komplexe Konfiguration hier, im Rahmen dieser Arbeit kaum durchzuführen.

Einen neuen Beitrag zur Freistrahllakustik lieferten jüngst Schmidt *et al.* [18] und Towne *et al.* [19]. Sie identifizierten und erklärten eine neue Klasse akustischer Wellen, die im Potentialkern subsonischer runder Freistrahlen eingeschlossen sind. Diese Wellen werden von der Scherschicht kanalisiert und sind daher radial auf das Nahfeld des Strahls begrenzt. Unter bestimmten Bedingungen schwingen die eingefangenen Wellen aufgrund wiederholter Reflexion zwischen der Düsenaustrittsebene und dem Ende des Potentialkerns hin und her. Diese Resonanz (d.h. das Vorhandensein von sowohl stromaufwärts als auch stromabwärts laufender eingeschlossener Wellen) führt zu einer Akkumulation von Energie, die als diskrete Töne im

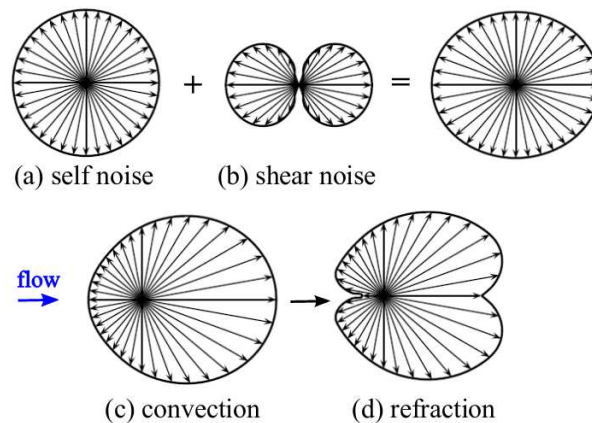


Abb. 1.2: Illustration der Abstrahlcharakteristik von: (a) Turbulenz alleine (self noise), (b) Turbulenz-Scherschicht Interaktion (shear noise), (c) konvektive Verstärkung und (d) Akustik-Strömungs Interaktion. Entnommen aus [34].

Nahfeldspektrum beobachtet werden können. Die Untersuchungen von Towne *et al.* [19] legen nahe, dass die Resonanzbedingungen, nur für Freistrahlen mit bestimmten Mach-Zahlen und Temperaturverhältnissen existieren. Aus der Theorie werden für einen isothermen Freistrahler Resonanzwellen und die dazugehörigen Töne für Mach-Zahlen im Bereich von $0.82 < M_j < 1$ erwartet, für einen isothermen Freistrahler mit $M_j = 0.9$ konnten sie kürzlich nachgewiesen werden [19, 20]. Die untersuchten Freistrahler waren alle einstrahlig, die Düsenfreistrahler dieser Arbeit sind zweistrahlig und deutlich komplexer. Daher und weil die Machzahlen nicht im oben genannten Bereich liegen, wird der beschriebene Mechanismus für die Konfigurationen hier zunächst nicht erwartet.

Eine ausführlichere Rückschau auf die Erkenntnisse der sehr umfangreichen Untersuchungen der Vergangenheit soll an dieser Stelle nicht erbracht werden. Tam [13] gibt eine Zusammenfassung der Erkenntnisse und behandelt zudem den Lärm von supersonischen Freistrahler, eine allgemeinere Zusammenfassung ist in [21] zu finden. Ferner findet man Untersuchungen von idealisierten generischen Freistrahler ohne Düse in Bogey *et al.* [22], Foysi *et al.* [23]. Die Untersuchungen welche die Anwesenheit einer Düse explizit berücksichtigen in Uzun & Husaini [24], Bogey *et al.* [25], Mendez *et al.* [26], Nichols *et al.* [27], Brès *et al.* [28] und Cetin *et al.* [29] sowie die Simulationen eines koaxialen Düsenfreistrahler in Mihăescu *et al.* [30], Georgiadis & DeBonis [31], Bogey *et al.* [32] und Casalino & Lele [33].

Tragflügelärm

Tragflügelärm ist das Resultat aus dem Zusammenspiel von instationären Störungen mit dem Flügel und im allgemeinen gut bekannt [21]. Dieses physikalische Problem hat zu zahlreichen Untersuchungen mehr oder weniger idealisierter Modellprobleme geführt (z.B. [35, 36, 37, 38, 39]). Daraus folgen die wichtigsten auftretenden Mechanismen der Schallerzeugung am Tragflügel als Vorderkantenlärm, Grenzschichtlärm, Lärm von laminaren Instabilitäten, Hinterkantenlärm und für den Fall eines geteilten Flügels der Spaltlärm (Illustriert in Abbildung 1.3):

(i) Vorderkantenlärm entsteht durch die Interaktion von Wirbeln in der Anströmung mit der Flügelvorderkante, wobei die Form und Dicke der Vorderkante entscheidende Designparameter zur Reduktion dieser Schallkomponente sind [40]. (ii) Grenzschichtlärm entsteht in der turbulenten Grenzschicht auf der Oberfläche des Flügels und wird maßgeblich durch die Rauheit der Oberfläche beeinflusst. Details zu der Entwicklung von Grenzschichten auf ebenen

Platten [41, 42, 43] und auf Flügeln mit Druckgradient [44, 45] sind in den genannten Arbeiten der Arbeitsgruppen von z.B. Moin und Schlatter nachzulesen. (iii) Laminares Instabilitätsrauschen (LI-Lärm) entsteht durch die Wechselwirkung einer instabilen laminaren Grenzschicht (in der Form von Tollmien-Schlichting (TS) Wellen) mit der Hinterkante (im Folgenden TS- p' -Prozess genannt) und dem damit verbundenen Rückkopplungsmechanismus zwischen dem Beginn der Instabilität und dem Streubereich. Es entsteht ein Breitbandbuckel, der mit mehreren tonalen Komponenten überlagert ist [46]. Da bei diesem Prozess laminare Wirbelstrukturen mit der Hinterkante interagieren, tritt er nur bei relativ niedrigen Reynoldszahlen oder bei zweidimensionalen Simulationen auf. (iv) Der Hinterkantenlärm (TE-Lärm) folgt aus der Streuung der turbulenten Grenzschicht an der Hinterkante. Dabei interagieren aerodynamische Druckschwankungen aus der turbulenten Grenzschicht (aufgrund der plötzlichen Änderung der Randbedingungen) mit der Hinterkante (im Folgenden ω - p' -Prozess genannt), wobei die so erzeugten akustischen Wellen eine dipolähnliche Abstrahlcharakteristik aufweisen. Dieser Prozess dominiert den niederfrequenten Teil des Schallpegelspektrums (auch zu sehen am *SPL*-Profil des isolierten Tragflügels in Abbildung 1.4 b) und ist dort gegenüber den anderen Mechanismen sehr stark [46]. Zahlreiche Arbeiten haben sich diesem Thema gewidmet, z.B. [47, 48, 49, 39] um nur wenige zu nennen. Die Streuung nicht akustischer Störungen mit kleiner Amplitude an der Hinterkante wird als ein linearer Prozess eingestuft, dagegen ist die Turbulenz selbst in der Nähe der Hinterkante ein nichtlineares Problem. Die implizite Aufspaltung in aerodynamische Störungen und den Schall ist, insbesondere bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten, nicht immer eindeutig und stellt eine konzeptionelle Hürde für eine umfassende Theorie der aerodynamischen Schallerzeugung dar [21]. (v) Mit Spaltlärm ist hier der Teil des Schallfeldes gemeint, der aus der Spaltregion zwischen Tragflügel und Klappe emittiert wird. Wobei es hier schwer ist, zwischen dem Lärm durch die Interaktion der Grenzschicht mit der Tragflügelhinterkante (TS- p' -Prozess) und der Klappenvorderkante und dem Lärm durch die Spaltströmung zu unterscheiden. Arbeiten dazu sind [50, 51]. Jeder dieser Mechanismen tritt auch bei der hier untersuchten Düse-Flügel-Klappe Konfiguration auf.

Freistrahls-Klappen Lärm

Freistrahls-Klappen Lärm ist der Lärm, der aus der Interaktion eines Freistrahls mit der Hinterklappe eines Tragflügels resultiert. Da die unmittelbare Wirkung des Flügels auf die Struktur der Freistrahlmischungsschicht meist gering ist, wurden in der Vergangenheit vereinfachte Modelle wie z.B. eine ebene schräg angestellten Platte untersucht, um die wichtigsten physikalischen Mechanismen der JFI herauszufinden.

Faranosov *et al.* [8] untersuchten den Einfluss des Klappenwinkels einer realistischen Konfiguration mit einer zweistrahligten Düse *ohne* co-flow auf den emittierten Schall für den Fall mit und ohne Pylon. Ihre Experimente zeigten, dass der JFI-Lärm monoton mit dem Anstieg des Klappenauslenkungswinkels zunimmt und Installationseffekte daher zur korrekten Beurteilung des Lärmpegels von Flugzeugen mit eng an den Flügel gekoppelten Düsen explizit berücksichtigt werden müssen. Außerdem zeigte sich, dass das JFI-Rauschen für die untersuchte Konfiguration mit installiertem Pylon im Vergleich zum Fall ohne Pylon qualitativ gleich bleibt und das Eigenrauschen des Pylons nur für hohe Frequenzen (größer 5000 Hz) signifikant war, während das JFI-Rauschen in einem Bereich um 2500 Hz auftrat und auch nur in diesem Frequenzbereich mit dem Klappenwinkel zunahm (vgl. Abbildung 1.4 a). Das erste Peak im Spektrum bei rund 1000 Hz zeigte sich nicht sensitiv gegenüber dem Klappenwinkel.

Belyaev *et al.* [4] untersuchten die Auswirkung des Klappenwinkels einer realistischen Konfiguration *mit* co-flow auf das Geräusch der JFI. Sie stellten fest, dass die Schallintensität im Fall mit co-flow für einen breiten Frequenzbereich exponentiell zunimmt, wenn sich die Klappenkante der Scherschichtgrenze nähert (vgl. Abbildung 1.4 b). Aus diesen Ergebnissen konnte

folgender funktionaler Zusammenhang für den aus der JFI resultierenden Schalldruck p'_{JFI} aufgestellt werden [4]:

$$\overline{p'^2_{JFI}} \propto \exp \left[\frac{h}{D_j} \epsilon(f, \theta, \phi) \right], \quad (1.1)$$

wobei $\epsilon(f, \theta, \phi)$ eine noch unbekannt Funktion der Frequenz und Richtung ist. Bei den Untersuchungen eines keilförmigen Körpers in einem planen Freistrahls mit niedriger Geschwindigkeit von Powell [52] zeigte sich, dass die fundamentale (niedrigste) Tonfrequenz nicht nur durch die mittlere Freistrahlschwindigkeit U_j und die Öffnungsabmessung D bestimmt war, sondern auch durch den dimensionslosen Abstand des Körpers von der Düsenkante l/D beeinflusst wurde [53]. Dieses Ergebnis deutet auf das Vorhandensein eines Rückkopplungsmechanismus zwischen der Düse und der Kante des Keils hin. Die gezackte Form der Peaks in den Schalldruckspektren von Referenz [8] und [4] (nicht zu sehen in der rein qualitativen Darstellung 1.4) legen nahe, dass auch bei der JFI eine Rückkopplung zwischen Düsenkante und Klappenkante [34] und/oder der Flügelvorderkante [54] vorliegt die zu Resonanz führt. Ein möglicher Mechanismus, der diesen Effekt erklärt, wurde in [4] vorgeschlagen: Die hintere Flügelkante befindet sich im Nahfeld des Freistrahls, wo hydrodynamische, nicht strahlende (oder schwach strahlende) Druckpulsationen vorherrschen. Diese Pulsationen können durch eine Überlagerung von instabilen Wellenpaketen modelliert werden, die sich stromabwärts von der Düse entwickeln. Bei Unterschallströmungen führen sie hauptsächlich zu Druckschwankungen, die exponentiell entlang der Normalen zur Achse abfallen, wobei nur ein kleiner Teil akustische Energie in das Fernfeld strahlt. Wenn die hintere Flügelkante in diesem Bereich abklingender Störungen (Instabilitätswellen) angeordnet ist, werden die Störungen an der Kante gestreut und wandeln sich in akustische Wellen um, wodurch die Schallintensität im Fernfeld deutlich erhöht wird.

Das erklärt die exponentielle Abnahme der Intensität des Wechselwirkungsrauschens mit der Verringerung des Strahl-Klappe Abstandes, aber nicht die gezackte Form des Schallspektrums. Jordan *et al.* [9] schlug jüngst eine Erklärung mittels der oben vorgestellten Theorie von Schmidt *et al.* [18] und Towne *et al.* [19] vor. Sie untersuchten das sehr vereinfachte Modell eines runden isothermen Freistrahls in der Nähe einer angestellten ebenen Platte indem der Abstand zwischen Plattenhinterkante und Düsenlippe variiert und der aerodynamische Druck an der Düsenkante und der akustische Druck im Fernfeld gemessen wurde. Die von Jordan *et al.* beobachtete Verteilung der spektralen Peaks konnte nicht mit dem üblichen Modell erklärt werden, bei dem die Resonanz durch Kopplung zwischen abwärts laufenden Kelvin-Helmholtz-Wellenpaketen (KH) und stromaufwärts laufenden Schallwellen beschrieben wird. Sie zeigten vielmehr, dass die stärksten Töne auf die Kopplung zwischen KH-Wellenpaketen und einer Familie gefangener, stromaufwärts laufender akustischer Moden im Potentialkern des Freistrahls zurückzuführen sind. Allerdings bleiben bei diesen vereinfachten Modellen möglicherweise wichtige Effekte unberücksichtigt: (i) Durch die starke Anstellung der Platte um 45° werden stromauf laufende Wellen oberhalb des Freistrahls nicht wie bei einer realistischen Konfiguration zwischen Flügel und Freistrahls eingeschlossen. (ii) Der Einfluss der Vorderkante und des hinteren Teils des Tragflügels wird nicht erfasst. (iii) In realistischen zweistrahligigen Düsen liegt kein Potentialkern vor wie es in einem einstrahligen Jet der Fall ist, der theoretische Rahmen von Towne *et al.* [19] könnte daher in diesem Fall versagen.

Bisher wurden realistische JFI-Konfigurationen der jüngeren Generation ausschließlich experimentell untersucht. Aus Sicht des Autors, liefern die oben zitierten Arbeiten aber noch keine umfassend schlüssige Erklärung der beobachteten Phänomene des JFI-Lärms und des kleineren Peaks im niederfrequenten Teil des Druckspektrums. Die Arbeit hier möchte daher die

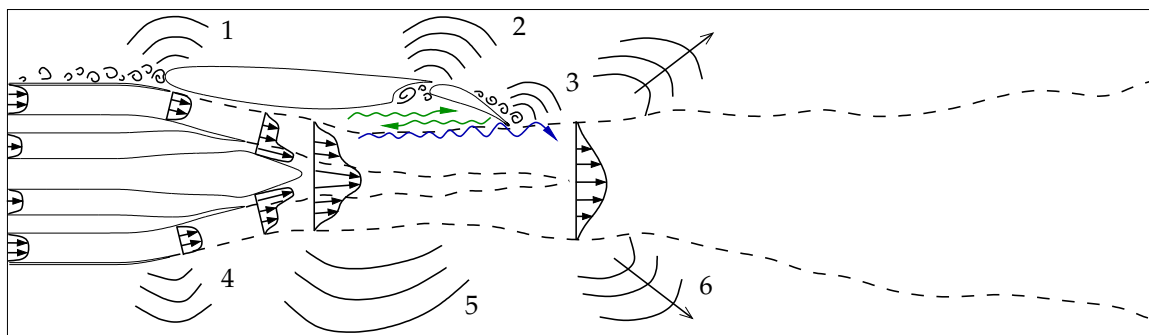


Abb. 1.3: Schematische Darstellung einer Freistrahls-Klappe Interaktion mit co-flow: 1, Vorderkantenlärm; 2, Spaltlärm; 3, Hinterkantenlärm; 4, Düsenkantenlärm; 5, Lärm von kleinskaligen turbulenten Strukturen in der Scherschicht; 6, gerichteter Lärm von großskaligen kohärenten Strukturen. Aerodynamische Kelvin-Helmholtz Wellen (blau) und akustische Resonanzwellen (grün). Die Darstellung der Profile der Hauptströmung sind nur qualitativ und relativ zum co-flow aufgetragen.

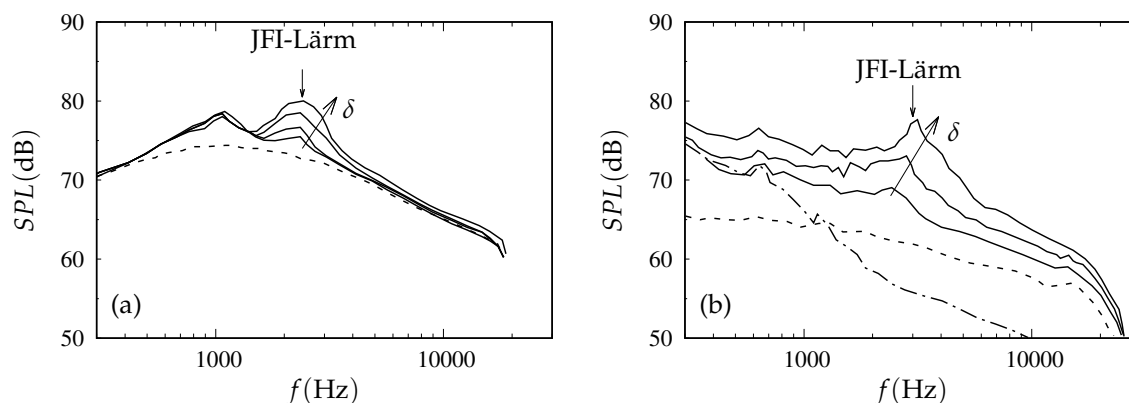


Abb. 1.4: Qualitativer Verlauf des Schalldruckpegels einer Freistrahls-Flügel-Klappe Konfiguration (a) ohne co-flow (nach den Daten von Faranosov *et al.* [8]) und (b) mit co-flow (nach den Daten von Belyaev *et al.* [4]): —, Gesamtkonfiguration für unterschiedliche Klappenwinkel δ ; ---, isolierter Düsenfreistrahls; - - -, isolierter Tragflügel.

Grundlagen für umfassende LES basierte Untersuchungen legen.

Numerisches Framework

Die zu Untersuchende Konfiguration ist komplex. Die Beschreibungen oben zeigen, welche Anforderungen an das numerische Framework hinsichtlich der akkuraten Erfassung der genannten Effekte gelegt werden. Sie beinhaltet auf der aerodynamischen Seite Aspekte einer Kanalströmung mit der Ausströmung ins Freie, freie Scherströmungen und Tragflügelumströmung. Das aeroakustische Feld besteht aus Komponenten von Freistrahllärm, Vorder- und Hinterkantenlärm, Spaltlärm und Interaktionslärm.

Prinzipiell ist die Berechnung des aerodynamischen und akustischen Feldes einer JFI, durch die numerische Lösung der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in nur einer Simulation möglich. Unabhängig davon, ob dies durch eine direkte numerische Simulation (DNS) oder mit einigen Modellierungsnäherungen (LES) geschieht, umfassen solche Simulationen typischerweise eine große Bandbreite von Längen-, Zeit- und Energieskalen [55]. Hinzu kommt,

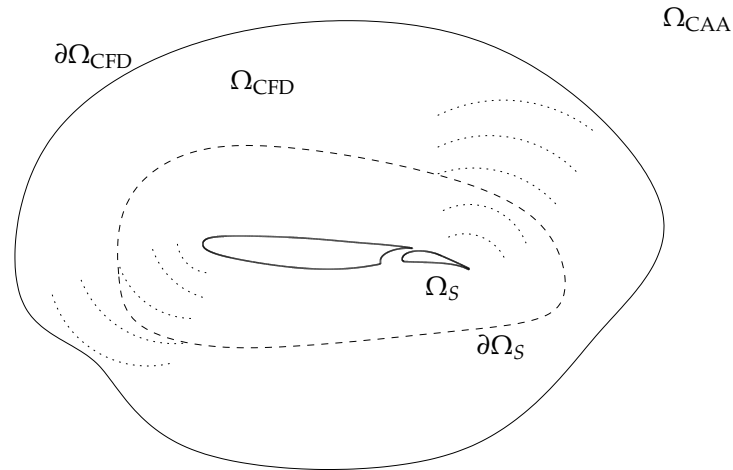


Abb. 1.5: Berechnungsgebiete hybrider Methoden am Beispiel einer Tragflügelumströmung. $\partial\Omega_S$ umschließt alle relevanten Schallquellen. $\Omega_{CAA} := \{x \mid x \notin \Omega_S\}$.

dass die Konfiguration für relativ hohe Reynoldszahlen und moderate Machzahlen untersucht werden soll.

Folgt man Kolmogorov und nimmt an, dass die kleinsten Skalen der Turbulenz universell und isotrop sind und nur von der kinematischen Viskosität ν und der Dissipation ϵ abhängen, führt eine Dimensionsanalyse zur Definition des Kolmogorovschen Mikrolängenmaß $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. Die Anzahl erforderlicher Gitterpunkte, $N = L_x/\Delta x$, für die DNS einer turbulenten Strömung kann mit der Länge der größten Wirbel, l_e , über $l_e/\eta = (u'^3/\epsilon)(\epsilon^{1/4}/\nu^{3/4}) = (u'^4/\nu\epsilon)^{3/4} = Re_{l_e}^{3/4}$ abgeschätzt werden. Damit liegt die Anzahl der erforderlichen Punkte in der Größenordnung $N^3 \sim \mathcal{O}[(l_e/\eta)^3]$, und skaliert mit $Re_{l_e}^{9/4}$. Berücksichtigt man noch die Änderung der Zeitschrittweite zur Aufrechterhaltung der CFL-Bedingung, $a\Delta t/\Delta x \sim \mathcal{O}(1)$, und die Integration über einige Umdrehungszeiten (turnover times) der größten Skalen, abzuschätzen via l_e/u' , mit dem Zeitschritt Δt , skalieren die Gesamtkosten mit $N^4 \sim Re_{l_e}^3/M_t$. D.h. die Kosten skalieren zudem invers mit der turbulenten Machzahl $M_t = u'/a$.

Soll auch das akustische Feld direkt mit berechnet werden, skalieren die Gesamtkosten, aufgrund des ausgeprägten Unterschieds zwischen den integralen und akustischen Längenskalen, bei einer turbulenten Strömung mit moderater Geschwindigkeit proportional zu $Re_{l_e}^3/M_t^4$ [56]. Die Kosten für die direkte Berechnung des akustischen Feldes mithilfe einer LES, skalieren unter der Annahme, dass die Größe der kleinsten aufgelösten Wirbel mit dem Taylor-Längenmaß, λ_g , korrespondiert, aufgrund von $l_e/\lambda_g \propto Re_{l_e}^{1/2}$, immer noch mit $Re_{l_e}^2/M_t^4$. Die Kombination aus relativ hohen Reynoldszahlen und geringen Machzahlen macht eine direkte Simulation des aerodynamischen und akustischen Feldes damit sehr teuer.

Um dieses Problem zu verringern wurden in der Vergangenheit hybride Methoden entwickelt. Dabei wird das Berechnungsgebiet, wie in Abbildung 1.5 schematisch dargestellt, in einen aerodynamischen Bereich (akustisches Nahfeld), Ω_{CFD} , welcher alle relevanten akustischen Quellen S beinhaltet und einen, unweit der instationären Strömung liegenden, akustischen Bereich (akustisches Fernfeld, $He \gg 1$), Ω_{CAA} , aufgeteilt. Im ersten Schritt wird dann das Nahfeld mithilfe einer DNS oder LES berechnet; das Fernfeld wird berechnet, indem in einem zweiten Schritt relativ zu den NS-Gleichungen günstigere akustische Gleichungen gelöst werden.

Diese hybriden Methoden lassen sich in zwei Ansätze gliedern: (i) Beim ersten Ansatz [57] wird ein Randwertproblem gelöst. Dazu wird die CFD-Lösung auf $\partial\Omega_S$ (oder $\partial\Omega_{CFD}$) mithilfe z.B. der linearisierten Euler-Gleichungen oder der homogenen Wellengleichung ins Fernfeld

propagiert. (ii) Beim zweiten Ansatz wird eine inhomogene Wellengleichung (akustische Analogie) gelöst. Dazu wird während der CFD-Simulation ein akustischer Quellterm aus den Strömungsgrößen explizit berechnet. In der darauf folgenden CAA-Simulation werden dann eine Wellengleichung, die als Volumen- und/oder Oberflächenintegrale formuliert ist, sogenannte Kirchhoff- oder Ffowcs Williams-Hawkings-Verfahren [58], oder z.B. die Acoustic Perturbation Equations (APE) von Schröder & Ewert [59, 60] gelöst.

Die Vorteile des ersten Ansatzes sind seine Unabhängigkeit von Objekten innerhalb $\partial\Omega_S$ und seine relativ einfache numerische Umsetzung; ein Nachteil ist, dass das Fernfeld vom Rand $\partial\Omega_S$ aufgebaut werden muss (die Kosten daher mit der Entfernung skalieren) und die Lösung nicht an einzelnen Beobachterpunkten berechnet werden kann. Letzteres ist bei den Ffowcs Williams-Hawkings-Verfahren möglich, wobei die Kosten von der Distanz zwischen der Schallquelle und dem Beobachterpunkt im Fernfeld unabhängig sind. Aufgrund dessen wurden Vertreter beider Ansätze im Rahmen dieser Arbeit in das numerische Framework implementiert.

Ziele und Aufbau der Arbeit

Für die Arbeit werden folgende zwei Ziele definiert:

- I) Die Entwicklung und Validierung eines numerischen Frameworks zur akkuraten Simulation des aerodynamischen und aeroakustischen Feldes der oben beschriebenen Freistrah-Flügel-Klappe Konfiguration und Implementierung in das open Source Paket OVERTURE [61].
- II) Die numerische Untersuchung der Auswirkungen der Freistrahlgeschwindigkeit und des Klappenwinkels auf die aerodynamischen Strukturen und das abgestrahlte Schallfeld einer Freistrah-Flügel-Klappe Konfiguration.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert: In Kapitel 2 werden die verwendeten Modelle und numerischen Methoden für die Berechnung des aerodynamischen Feldes beschrieben und validiert. Im Anschluss werden in Kapitel 3 die verwendeten Modelle und Methoden für die Vorhersage des akustischen Fernfeldes erklärt und deren Validierung präsentiert. Danach folgt in Kapitel 4 die Präsentation der Ergebnisse der untersuchten Flügel-Klappe Konfigurationen. Kapitel 5 behandelt die Untersuchung der aerodynamischen und akustischen Felder, die sich aus der Wechselwirkung des turbulenten Freistrahls mit dem Flügel und der Klappe ergeben. In diesem Kapitel wird auch kurz auf mögliche Maßnahmen zur Reduktion des Interaktionslärms zwischen Freistrah und Klappe eingegangen. Das Kapitel 6 gibt eine Zusammenfassung der Arbeit und Vorschläge für weitere Untersuchungen mit dem im Rahmen der Arbeit aufgebauten numerischen Framework.

2 Modelle und numerische Methoden im Nahfeld

Für die Berechnung des Nahfeldes Ω_{CFD} , werden die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst. Die numerische Lösung der Gleichungen erfolgt mittels einer konservativen Finite-Differenzen Diskretisierung zweiter Ordnung und/oder mit der nicht-konservativen Diskretisierung sechster Ordnung. Der verwendete konservative Löser ist Teil des Open-Source Pakets OVERTURE [61] und schon in der Standardversion des Pakets parallelisiert wurde aber für die Zwecke hier angepasst und um diverse Runge-Kutta Verfahren zur Zeitintegration ergänzt. Er diente für erste Simulationen mit dem Fokus auf die Aerodynamik der Strömung und als Benchmark, besitzt aber die Nachteile geringer Ordnung in der Genauigkeit und einer mittelmäßigen parallelen Skalierbarkeit. Der nicht-konservative Löser steht dem Anwender in zweiter Ordnung aber nicht parallelisiert in OVERTURE zur Verfügung. Er wurde im Rahmen der Arbeit unter Anderem um Verfahren höherer Ordnung in Raum und Zeit sowie geeignete Randbedingungen und Filter ergänzt und parallelisiert und liefert so die Basis für akkurate akustische Simulationen. Die Verwendung von überlappenden Gittern ist mit beiden Lösern möglich. Die Details zu den Modellen sowie einige Testergebnisse, werden im Folgenden vorgestellt.

2.1 Konservativer Navier-Stokes Löser

Beim konservativen Löser (CNSCAD) sind die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in konservativer Form formuliert und konservativ, d.h. energieerhaltend, diskretisiert.

2.1.1 Grundgleichungen

Für ein ideales Gas lassen sich die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen für kartesische Koordinaten und in konservativer Form schreiben als:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{F}^v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}^v}{\partial z}, \quad (2.1)$$

mit den nicht viskosen Flüßen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho w v \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho v w \\ w(E + p) \end{bmatrix},$$

und den viskosen Flüssigkeiten

$$\mathbf{F}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u_j \tau_{xj} - q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u_j \tau_{yj} - q_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u_j \tau_{zj} - q_z \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E]^T$ ist der Lösungsvektor, wobei ρ der Massendichte des Fluids, p dem thermodynamischen Druck und E der totalen Energie entsprechen. $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ ist der Geschwindigkeitsvektor. Unter der Annahme eines Newtonschen Fluids, beschrieben mit der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase, ergeben sich die Relationen:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u_k u_k \right),$$

$$T = \frac{p}{\rho \mathcal{R}_g},$$

$$\tau_{ij} = \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Dabei ist T die totale Temperatur, $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}^* / M_w$ die spezielle Gaskonstante, wobei $\mathcal{R}^* = 8,314 \text{ J}/(\text{molK})$ und M_w die molare Masse ist; $\gamma = c_p / c_v$ ist der Isentropenexponent. Die spezifischen Wärmekapazitäten für konstanten Druck, c_p , und konstantes Volumen, c_v , lassen sich mit

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \mathcal{R}_g \quad \text{und} \quad c_v = \frac{1}{\gamma - 1} \mathcal{R}_g$$

ausdrücken. Treten nur geringe Temperaturschwankungen auf, kann der Einfluss der Temperatur auf die Viskosität, μ , vernachlässigt und $\mu = \text{konst.}$ angenommen werden. Mit dem Fourier'schen Gesetz

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{k}{\mathcal{R}_g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right) = -\tilde{k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right),$$

welches den Wärmefluss q_i in x_i -Richtung beschreibt, ist das Gleichungssystem (2.1) geschlossen. $k = \frac{\mu c_p}{Pr}$ ist dabei die thermische Leitfähigkeit; $\tilde{k} = k / \mathcal{R}_g$ und Pr ist die Prandtl-Zahl.

Da die Koeffizienten der Finite-Differenzen Schemata für uniforme Gitter definiert sind, ist es erforderlich, die Gleichungen (2.1) vom physikalischen Raum mit krummlinigen Gittern in den Rechenraum mit konstanter Gitterweite zu transformieren: $\mathbf{x} = (x, y, z) \rightarrow \boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$. Erfolgt die Transformation in *nicht* konservativer Form, wird der Differentialoperator $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ durch $\mathbf{M} \nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ ersetzt, wobei $\mathbf{M} = \nabla \boldsymbol{\xi} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial \mathbf{x}$ die Metrik-Terme der Gittertransformation enthält und $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} = (\partial_{\xi}, \partial_{\eta}, \partial_{\zeta})$ ist. Für die hier verwendete konservative Diskretisierung erfolgt die Transformation durch die Ersetzung von ∇ durch

$$\nabla = \frac{1}{J} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{A},$$

wobei $J = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)$ die Determinante der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\xi x}{\partial_\xi y} & \frac{\partial_\eta x}{\partial_\eta y} & \frac{\partial_\zeta x}{\partial_\zeta y} \\ \frac{\partial_\xi y}{\partial_\xi z} & \frac{\partial_\eta y}{\partial_\eta z} & \frac{\partial_\zeta y}{\partial_\zeta z} \end{bmatrix}$$

ist und $\mathbf{A} = J \mathbf{M} = J \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}$ die Metrik-Koeffizienten a_{ij} enthält. Die Transformationsmatrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ lässt sich aus der Adjunkte zu $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}$ berechnen:

$$\mathbf{A} = J \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} = J \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)^{-1} = \text{adj} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) = \begin{bmatrix} \partial_\eta y \partial_\zeta z - \partial_\zeta y \partial_\eta z & \partial_\zeta x \partial_\eta z - \partial_\eta x \partial_\zeta z & \partial_\eta x \partial_\zeta y - \partial_\zeta x \partial_\eta y \\ \partial_\zeta y \partial_\xi z - \partial_\xi y \partial_\zeta z & \partial_\xi x \partial_\zeta z - \partial_\zeta x \partial_\xi z & \partial_\zeta x \partial_\xi y - \partial_\xi x \partial_\zeta y \\ \partial_\xi y \partial_\eta z - \partial_\eta y \partial_\xi z & \partial_\eta x \partial_\xi z - \partial_\xi x \partial_\eta z & \partial_\xi x \partial_\eta y - \partial_\eta x \partial_\xi y \end{bmatrix}.$$

Damit können die ersten Ableitungen formuliert werden als:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} a_{11} + \frac{\partial}{\partial \eta} a_{21} + \frac{\partial}{\partial \zeta} a_{31} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} a_{12} + \frac{\partial}{\partial \eta} a_{22} + \frac{\partial}{\partial \zeta} a_{32} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} a_{13} + \frac{\partial}{\partial \eta} a_{23} + \frac{\partial}{\partial \zeta} a_{33} \right). \end{aligned}$$

In krummlinieigen Koordinaten lautet das Gleichungssystem (2.1) in der konservativen Form dann:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}^v}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}^v}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}^v}{\partial \zeta} \right), \quad (2.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} &= a_{11} \mathbf{F} + a_{12} \mathbf{G} + a_{13} \mathbf{H}, & \tilde{\mathbf{F}}^v &= a_{11} \mathbf{F}^v + a_{12} \mathbf{G}^v + a_{13} \mathbf{H}^v, \\ \tilde{\mathbf{G}} &= a_{21} \mathbf{F} + a_{22} \mathbf{G} + a_{23} \mathbf{H}, & \tilde{\mathbf{G}}^v &= a_{21} \mathbf{F}^v + a_{22} \mathbf{G}^v + a_{23} \mathbf{H}^v, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= a_{31} \mathbf{F} + a_{32} \mathbf{G} + a_{33} \mathbf{H}, & \tilde{\mathbf{H}}^v &= a_{31} \mathbf{F}^v + a_{32} \mathbf{G}^v + a_{33} \mathbf{H}^v. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für ein zweidimensionales Problem erhält man, indem $\partial x_3 / \partial \xi_n = \delta_{3n}$ gesetzt wird. Die Transformationsmatrix reduziert sich in diesem Fall zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial_\eta y & -\partial_\eta x \\ -\partial_\xi y & \partial_\xi x \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Räumliche Diskretisierung

Es sei \mathbf{U}_i die diskrete Approximation von $\mathbf{U}(\mathbf{x}_i)$ am Gitterpunkt $i = (i, j, k)$, und die Indexkonvention $\mathbf{U}_{i\pm 1}$ meint $\mathbf{U}_{i\pm 1, j, k}$, $\mathbf{U}_{j\pm 1}$ meint $\mathbf{U}_{i, j\pm 1, k}$ und so weiter. Die diskrete numerische Ap-

proximation von Gleichung (2.2) ist dann gegeben mit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} + \frac{1}{J_i} \left(\frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i+1} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-1}}{2\Delta\tilde{\zeta}} + \frac{\tilde{\mathbf{G}}_{j+1} - \tilde{\mathbf{G}}_{j-1}}{2\Delta\eta} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{H}}_{k-1}}{2\Delta\zeta} \right)_i &= \dots \\ \dots \frac{1}{J_i} \left(\frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^v - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^v}{\Delta\tilde{\zeta}} + \frac{\tilde{\mathbf{G}}_{j+\frac{1}{2}}^v - \tilde{\mathbf{G}}_{j-\frac{1}{2}}^v}{\Delta\eta} + \frac{\tilde{\mathbf{H}}_{k+\frac{1}{2}}^v - \tilde{\mathbf{H}}_{k-\frac{1}{2}}^v}{\Delta\zeta} \right)_i. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die nicht viskosen Flüsse werden dabei mittels zentraler finiter Differenzen zweiter Ordnung approximiert, wobei z.B. $\tilde{\mathbf{F}}_{i\pm 1} = a_{11,i\pm 1}\mathbf{F}_{i\pm 1} + a_{12,i\pm 1}\mathbf{G}_{i\pm 1} + a_{13,i\pm 1}\mathbf{H}_{i\pm 1}$ ist. Die viskosen Flüsse werden so berechnet, dass das resultierende Differenzen Schema einem kompakten $3 \times 3 \times 3$ -Stencil entspricht:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{i\pm\frac{1}{2}}^v &= \frac{a_{11,i} + a_{11,i\pm 1}}{2}\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^v + \frac{a_{12,i} + a_{12,i\pm 1}}{2}\mathbf{G}_{i\pm\frac{1}{2}}^v + \frac{a_{13,i} + a_{13,i\pm 1}}{2}\mathbf{H}_{i\pm\frac{1}{2}}^v, \\ \tilde{\mathbf{G}}_{j\pm\frac{1}{2}}^v &= \frac{a_{21,j} + a_{21,j\pm 1}}{2}\mathbf{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^v + \frac{a_{22,j} + a_{22,j\pm 1}}{2}\mathbf{G}_{j\pm\frac{1}{2}}^v + \frac{a_{23,j} + a_{23,j\pm 1}}{2}\mathbf{H}_{j\pm\frac{1}{2}}^v, \\ \tilde{\mathbf{H}}_{k\pm\frac{1}{2}}^v &= \frac{a_{31,k} + a_{31,k\pm 1}}{2}\mathbf{F}_{k\pm\frac{1}{2}}^v + \frac{a_{32,k} + a_{32,k\pm 1}}{2}\mathbf{G}_{k\pm\frac{1}{2}}^v + \frac{a_{33,k} + a_{33,k\pm 1}}{2}\mathbf{H}_{k\pm\frac{1}{2}}^v, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{F}_{l\pm\frac{1}{2}}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx,l\pm\frac{1}{2}} \\ \tau_{xy,l\pm\frac{1}{2}} \\ \tau_{xz,l\pm\frac{1}{2}} \\ Q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{l\pm\frac{1}{2}}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx,l\pm\frac{1}{2}} \\ \tau_{yy,l\pm\frac{1}{2}} \\ \tau_{yz,l\pm\frac{1}{2}} \\ Q_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{l\pm\frac{1}{2}}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx,l\pm\frac{1}{2}} \\ \tau_{zy,l\pm\frac{1}{2}} \\ \tau_{zz,l\pm\frac{1}{2}} \\ Q_z \end{bmatrix}, \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= u_{n,l\pm\frac{1}{2}}\tau_{xn,l\pm\frac{1}{2}} - q_{x,l\pm\frac{1}{2}}, \\ Q_y &= u_{n,l\pm\frac{1}{2}}\tau_{yn,l\pm\frac{1}{2}} - q_{y,l\pm\frac{1}{2}}, \\ Q_z &= u_{n,l\pm\frac{1}{2}}\tau_{zn,l\pm\frac{1}{2}} - q_{z,l\pm\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Der erste Term von z.B. Q_x folgt mittels Einsteinscher Summenkonvention zu $u_{n,l\pm\frac{1}{2}}\tau_{xn,l\pm\frac{1}{2}} = u_{l\pm\frac{1}{2}}\tau_{xx,l\pm\frac{1}{2}} + v_{l\pm\frac{1}{2}}\tau_{xy,l\pm\frac{1}{2}} + w_{l\pm\frac{1}{2}}\tau_{xz,l\pm\frac{1}{2}}$, wobei $l = \{i, j, k\}$ ist. Die anderen Terme sind gegeben mit:

$$\begin{aligned} \tau_{xx,l\pm\frac{1}{2}} &= \frac{4}{3}\mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x} u_i \right) - \frac{2}{3}\mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm y} v_i + \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm z} w_i \right), \\ \tau_{yy,l\pm\frac{1}{2}} &= \frac{4}{3}\mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm y} v_i \right) - \frac{2}{3}\mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm z} w_i + \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x} u_i \right), \\ \tau_{zz,l\pm\frac{1}{2}} &= \frac{4}{3}\mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm z} w_i \right) - \frac{2}{3}\mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x} u_i + \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm y} v_i \right), \\ \tau_{xy,l\pm\frac{1}{2}} &= \tau_{yx,l\pm\frac{1}{2}} = \mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x} v_i + \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm y} u_i \right), \\ \tau_{xz,l\pm\frac{1}{2}} &= \tau_{zx,l\pm\frac{1}{2}} = \mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x} w_i + \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm z} u_i \right), \\ \tau_{yz,l\pm\frac{1}{2}} &= \tau_{zy,l\pm\frac{1}{2}} = \mu \left(\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm y} w_i + \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm z} v_i \right), \\ q_{x_n,l\pm\frac{1}{2}} &= -\tilde{k} \mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x_n} \left(\frac{p_i}{\rho_i} \right), \quad n = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Der Index $(\cdot)_{l\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((\cdot)_l + (\cdot)_{l\pm 1})$ kennzeichnet das arithmetische Mittel von (\cdot) zweier benachbarter Gitterpunkte in l -Richtung. Die Definition der Differenzenoperatoren $\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x_n}$ ist im Anhang Kapitel C.1 zu finden.

Stabilisierung. Zur Stabilisierung der Methode, wird die artifizielle Viskosität der Form

$$\frac{1}{J_i} \left[(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^a)_i - (\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^a)_{i-1} + (\tilde{G}_{j+\frac{1}{2}}^a)_j - (\tilde{G}_{j+\frac{1}{2}}^a)_{j-1} + (\tilde{H}_{k+\frac{1}{2}}^a)_k - (\tilde{H}_{k+\frac{1}{2}}^a)_{k-1} \right]$$

zur rechten Seite von Gleichung (2.3) addiert, wobei

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^a &= C_\epsilon \lambda_{1,i+\frac{1}{2}} \max \left\{ 0, 1 - \frac{s_{i+\frac{1}{2}}}{C_\omega} \right\} \mathcal{D}_i^3 \mathbf{U}_i, \\ \tilde{G}_{j+\frac{1}{2}}^a &= C_\epsilon \lambda_{2,j+\frac{1}{2}} \max \left\{ 0, 1 - \frac{s_{j+\frac{1}{2}}}{C_\omega} \right\} \mathcal{D}_j^3 \mathbf{U}_i, \\ \tilde{H}_{k+\frac{1}{2}}^a &= C_\epsilon \lambda_{3,k+\frac{1}{2}} \max \left\{ 0, 1 - \frac{s_{k+\frac{1}{2}}}{C_\omega} \right\} \mathcal{D}_k^3 \mathbf{U}_i, \end{aligned}$$

und die Viskosität von vierter Ordnung ist. Sie basiert auf einer von Jameson [62, 63] entwickelten artifiziellen Viskosität. Der Differenzoperator \mathcal{D}_l^3 angewandt auf den diskreten Lösungsvektor \mathbf{U}_i ist definiert mit

$$\mathcal{D}_l^3 \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{l+2} - 3\mathbf{U}_{l+1} + 3\mathbf{U}_l - \mathbf{U}_{l-1},$$

wobei wieder je nach Richtung $l = \{i, j, k\}$ ist. Der Parameter $s_{l+\frac{1}{2}}$ ist eine Abfrage basierend auf dem thermodynamischen Druck:

$$s_{l+\frac{1}{2}} = \max \{ S_{l-1}, S_l, S_{l+1}, S_{l+2} \}$$

mit

$$\begin{aligned} S_{l-1} &= \left| \frac{p_l - 2p_{l-1} + p_{l-2}}{p_l + 2p_{l-1} + p_{l-2}} \right|, & S_l &= \left| \frac{p_{l+1} - 2p_l + p_{l-1}}{p_{l+1} + 2p_l + p_{l-1}} \right|, \\ S_{l+1} &= \left| \frac{p_{l+2} - 2p_{l+1} + p_l}{p_{l+2} + 2p_{l+1} + p_l} \right|, & S_{l+2} &= \left| \frac{p_{l+3} - 2p_{l+2} + p_{l+1}}{p_{l+3} + 2p_{l+2} + p_{l+1}} \right|, \end{aligned}$$

und $\lambda_{m,l+\frac{1}{2}}$ ist proportional zum größten Eigenwert in ξ_m -Richtung und gegeben mit

$$\lambda_{m,l+\frac{1}{2}} = \left[\left| \sum_{n=1}^3 a_{mn,l+\frac{1}{2}} u_{n,l+\frac{1}{2}} \right| + \left(\frac{\gamma p_{l+\frac{1}{2}}}{\rho_{l+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^3 (a_{mn,l+\frac{1}{2}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{1}{\Delta \xi_m}.$$

Der Faktor vor der zweiten Summe, entspricht der mittleren diskreten Schallgeschwindigkeit am Gitterpunkt i . Die Konstanten C_ϵ und C_ω sind, falls nicht explizit anders erwähnt, $C_\epsilon = 0.1$ und $C_\omega = 0.01$.

2.1.3 Zeitliche Integration

Da alle hier durchgeführten Simulationen instationär sind, ist für die Berechnung der Lösung von der Zeitebene t_n zur nächsten Zeitebene $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ eine zeitliche Integration des Gleichungssystems erforderlich. Gleichung (2.3) wird dafür umformuliert zu:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, t) \tag{2.4}$$

wobei \mathbf{U}_i der Lösungsvektor, $\mathbf{U} = [\rho, \rho u_i, E]^T$, im Gitterpunkt $i = (i, j, k)$ ist. F_i ist eine nicht-lineare Vektorfunktion von \mathbf{U} , sie enthält die approximierten konvektiven und diffusiven Terme der kompressiblen Navier-Stokes- oder Euler-Gleichungen im inneren Gebiet und die Randbedingungen im Randgebiet sowie, falls vorhanden, alle Kraftterme (z.B. Dämpfungsterme). Die zeitliche Integration dieser Gleichung erfolgte bei dieser Arbeit je nach Fall und Simulationsstadium entweder mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren oder einem expliziten Adams-Prädiktor-Korrektor-Verfahren:

(i) *Runge-Kutta* Verfahren. Die expliziten s -stufigen Runge-Kutta (RK) Verfahren zählen zu den Einschrittverfahren, d.h. die Lösung der Zeitebene $n + 1$ hängt nur von der Lösung der vorherigen Zeitebene n und s Zwischenlösungen ab. Sie verdanken ihre Popularität im Zusammenhang mit den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen daher, dass sie die Ansprüche an lineare und nicht lineare Stabilität, Genauigkeit, geringer Dissipation und Dispersion sowie hoher Effizienz wie kaum ein anderes Zeitintegrationsverfahren adressieren. Auf diese Punkte wird weiter unten in Kapitel 3.1.2 detaillierter eingegangen. Das klassische s -Stufige RK-Verfahren lässt sich wie folgt formulieren:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{K}_i^{(j)},$$

mit

$$\mathbf{K}_i^{(j)} = F_i(\mathbf{U}^{(j)}, t^{(j)}), \quad \mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{j-1} a_{ij} \mathbf{K}_i^{(j)}, \quad t^{(j)} = t_n + c_j \Delta t,$$

wobei $\mathbf{U}^n = \mathbf{U}(t_n)$ und $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(t_n + \Delta t)$ der Lösungsvektor der Zeitebene n respektive $n + 1$ ist. Die Koeffizienten a_{ij} , b_j und c_j sind in Tabelle C.3 Anhangkapitel C.2 für die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren angegeben. Zu jedem Zeitschritt müssen die Vektoren $\mathbf{K}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{K}_i^{(s)}$ für jeden Gitterpunkt i simultan gespeichert werden. Das bedeutet formal einen Speicherbedarf von $s \times N$ (hier ist N die Gesamtzahl der Freiheitsgrade des Systems, typischerweise die Anzahl der Gitterpunkte mal der Anzahl der abhängigen Variablen), was für große Gitter immense Speicherressourcen allokiert. In der Vergangenheit wurden daher die klassischen RK-Verfahren im Hinblick auf die Speicheranforderungen verbessert. So folgten aus den Arbeiten von Williamson [64] und Carpenter & Kennedy [65] die speichereffizienten Low-Storage Runge-Kutta (LSRK) Verfahren. Der s -Stufige $2N$ -Storage Algorithmus dazu lautet:

1. Für $j = 1, \dots, s$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{(j)} &= A_j \mathbf{W}_i^{(j-1)} + \Delta t F_i(\mathbf{U}^{(j-1)}, t^{(j-1)}), \\ \mathbf{U}_i^{(j)} &= \mathbf{U}_i^{(j-1)} + B_j \mathbf{W}_i^{(j)}, \end{aligned}$$

2. Dann

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{(s)}.$$

Hier ist $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}^n$ und $t^{(j-1)} = t_n + c_j \Delta t$, wobei c_j mit A_j und B_j berechnet werden kann; A_j , B_j sind mit den Koeffizienten a_{ij} und b_i des klassischen RK-Verfahrens verknüpft und in Tabelle C.3 zu finden. Da nur \mathbf{W} und \mathbf{U} für jeden Freiheitsgrad gespeichert werden müssen, reduziert

sich der Speicherbedarf auf formal $2N$. Bei den LSRK-Verfahren ist $s = p$ nur bis zur Ordnung $p = 3$ möglich [64], für ein vierte Ordnung LSRK erhöht sich die erforderliche Stufenanzahl auf $s = 5$ [65]. Trotz der Verbesserung hinsichtlich der Speichereffizienz bleibt der Nachteil, dass für einen expliziten RK-Schritt der Ordnung p mindestens $s = p$ Stufen benötigt werden, also s -mal die rechte Seite berechnet werden muss. Dies stellt für große Probleme einen immensen Rechenaufwand dar. Um diesen Rechenaufwand zu umgehen, wurden während der Entwicklungsphase der Strömung, die günstigeren Prädiktor-Korrektor Verfahren zur Zeitintegration verwendet.

(ii) *Adams-Prädiktor-Korrektor* Verfahren. Bei dem expliziten Adams-Prädiktor-Korrektor (PC) Verfahren handelt es sich um ein lineares Mehrschrittverfahren (LMM). Ein k -Schrittverfahren verwendet k Lösungen \mathbf{U}_i^{n-j} , mit $j = 0, \dots, k-1$, um die Lösung der nächsten Zeitebene, \mathbf{U}_i^{n+1} , zu bestimmen, was voraussetzt, dass die Lösungen der Zeitebenen n bis $n-k+1$ bekannt sind. Bei dem hier verwendeten sogenannten PECE-Verfahren (P = predict, E = evaluate, C = correct) muss die rechte Seite, $\mathbf{F}_i(\mathbf{U})$, unabhängig von der Ordnung nur zweimal pro Zeitschritt berechnet werden. Dazu wird zuerst mithilfe des Adams-Bashforth Verfahrens der Ordnung k die vorläufige Näherungslösung

$$\tilde{\mathbf{U}}_i = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \mathbf{F}_i(\mathbf{U}^{n-j})$$

für \mathbf{U}_i^{n+1} bestimmt, und dann mit dem Adams-Moulton Verfahren der Ordnung $k+1$ korrigiert:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \left[\beta_0 \mathbf{F}_i(\tilde{\mathbf{U}}) + \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{F}_i(\mathbf{U}^{n+1-j}) \right].$$

Abschließend wird dann noch $\mathbf{F}_i(\mathbf{U}^{n+1})$ berechnet. Da nur die rechte Seite, $\mathbf{F}_i(\tilde{\mathbf{U}})$, der Näherung $\tilde{\mathbf{U}}_i$ zusätzlich berechnet werden muss, ist dieses Verfahren hinsichtlich der Auswertung von \mathbf{F} sehr günstig. Die Koeffizienten α_j und β_j sind in Tabelle C.3 Anhangkapitel C.2 gegeben. Eine Ausführliche Diskussion der Stabilität von Mehrschrittverfahren ist in [66] ab Seite 40 zu finden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde sowohl das klassische als auch das Low-Storage RK-Verfahren jeweils in dritter und vierter Ordnung implementiert und verifiziert [67]. Die verwendeten PC-Verfahren sind Bestandteil des Overture-Frameworks und wurden so ohne weitere Untersuchungen verwendet.

2.1.4 Validierung

Um die numerische Dissipation und Dispersion des Finite-Differenzen Schemas, sowie die vorhanden Randbedingungen hinsichtlich ihrer Eignung für aeroakustische Simulationen zu untersuchen, wurden vier (zwei- und dreidimensionaler akustischer Impuls und Wirbel) der dafür entwickelten Benchmark-Testfälle [68, 69] simuliert. Die Variablen wurden mit der Schallgeschwindigkeit a_∞ , der Dichte ρ_∞ und $\rho_\infty a_\infty^2$ als Druckskale dimensionslos gemacht. Alle Berechnungen erfolgten mit zweiter Ordnung in Raum und Zeit und mit der Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Zahl von 0.9. Im folgenden werden die 3-D Fälle kurz beschrieben, eine Beschreibung der 2-D Fälle ist in Kapitel 2.3.4 zu finden, sie wurden mit den identischen Parameter-einstellungen der 3-D Fälle simuliert. Das Simulationsgebiet der Länge $L = 100$ wurde in jede Raumrichtung mit $N = 251$ Gitterlinien diskretisiert.

3-D akustischer Impuls. Bei diesem Testfall ist eine Druck- und Dichte-Störung in der Form eines Gaußimpulses als Anfangsbedingung vorgesehen. Der Impuls wird in einer uniformen Strömung, $\mathbf{u}_0 = (M, 0, 0)$, mit konstanter mittlerer Dichte, $\rho_0 = 1$, und Druck, $p_0 = 1/\gamma$, im Koordinatenursprung platziert. Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ lauten:

$$\begin{cases} p' = \rho' = \epsilon \exp[-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)], \\ u'_i = 0, \end{cases}$$

wobei $\alpha = (\ln 2)/b^2$. Die Halbwertbreite des Gaußimpulses ist $b = 3$ und die Amplitude ist $\epsilon = 0.001$. Die analytische Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben mit:

$$p'(x, t) = \frac{\epsilon}{\beta} \int_0^\infty \zeta^2 \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\alpha}\right) \cos(t\zeta) j_0(\zeta\eta) d\zeta,$$

mit

$$\eta = \left((x - Mt)^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2},$$

wobei $\beta = 2\alpha\sqrt{\pi\alpha}$ ist. j_0 ist die sphärische Besselfunktion erster Art und Ordnung Null, und mit $j_0(\zeta\eta) = \sin(\zeta\eta)/(\zeta\eta)$ gegeben.

Abbildung 2.1 und 2.2 zeigt die Druckfelder $|p'|/\epsilon$ in der (x, y) - und (y, z) -Ebene. Die vom Anfangsimpuls generierte akustische Welle breitet sich aus und erreicht sukzessive die Ränder des Berechnungsgebiets, wobei die Amplituden der auf die Ränder treffenden Welle im Bereich $|p'|/\epsilon \geq 10^{-2}$ liegen. Für den Zeitschritt $t = 40$ ist eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zu beobachten. Mit zunehmender Zeit wird die entsprechende Kontur für Amplituden von $|p'|/\epsilon = 3 \times 10^{-3}$ etwas von den am Rand reflektierten Wellen verzerrt. Somit ergibt sich eine effektive Reflexionsrate von 15%. Durch die Verwendung einer Dämpfungszone (Sponge), Gleichung (2.9), der Länge $l_{\text{sp}} = 10$ (daraus folgt die Boxlänge $L = 120$ und $N = 301$) und $\sigma_{\text{max}} = 1$, werden die Reflexionen auf ein für aerodynamische Simulationen akzeptables Maß reduziert. Die zeitliche Entwicklung der L_2 -Norm des Drucks, $L_{2,p} = \left[\frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k} p_{i,j,k}^2\right]^{1/2}$, im physikalischen Gebiet, ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Der im Gebiet verbleibende Restdruck liegt, für den Fall mit Dämpfungszone, ein bis zwei Größenordnungen unter dem L_2 -Wert der Anfangsstörung und knapp eine Größenordnung über dem L_2 -Wert für die Simulation mit dem nicht-konservativen Löser (CNS), welcher vom Autor um Verfahren sechster Ordnung und geeignete Fernfeldrandbedingungen erweitert wurde und damit teilweise bessere Ergebnisse liefert, als der Benchmark-Code von Tam [66]. Die Ergebnisse für den zweidimensionalen Impuls, zu sehen in Abbildung 2.4, zeigten ein ähnliches aber tendenziell besseres Verhalten.

3-D Wirbelring. Bei dem zweiten Testfall wird ein achsensymmetrischer Wirbelring, welcher von der uniformen Strömung, $\mathbf{u}_0 = (M, 0, 0)$, durch das Berechnungsgebiet konvektiert wird. Die mittlere Dichte ist $\rho_0 = 1$ und der mittlere Druck beträgt $p_0 = 1/\gamma$, beide sind, wie bei den anderen Testfällen, konstant und uniform. Die Anfangsbedingungen bei $t = 0$ für die axiale und radiale Geschwindigkeit u_x^v und u_r^v des Wirbelrings sind:

$$\begin{cases} u_x^v = \epsilon_v \frac{r_0}{r} (r - r_0) \exp[-\alpha(x^2 + (r - r_0)^2)], \\ u_r^v = -\epsilon_v \frac{r_0}{r} x \exp[-\alpha(x^2 + (r - r_0)^2)], \end{cases}$$

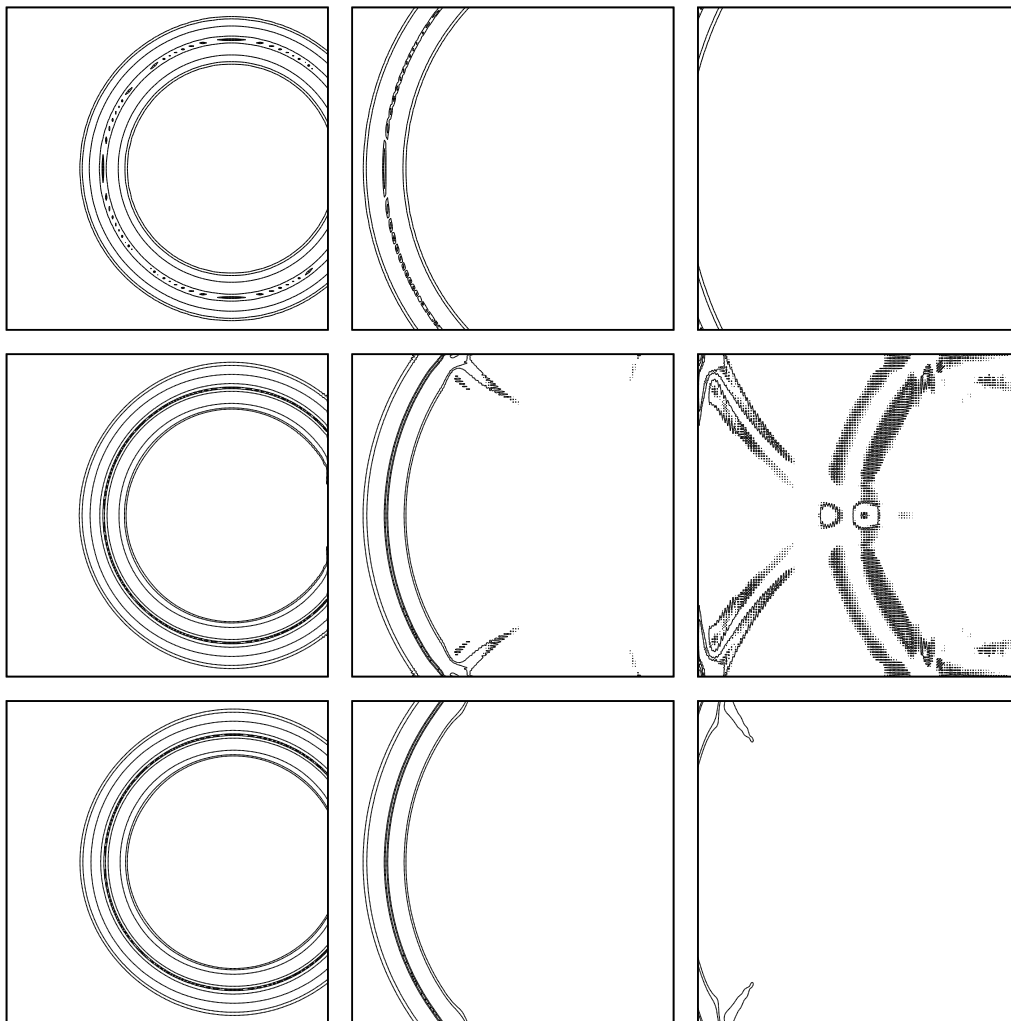


Abb. 2.1: 3-D akustischer Impuls in uniformer Strömung. Druckfelder $|p'|/\epsilon$ aufgetragen in der (x, y) -Ebene bei $z = 0$ von links nach rechts zur Zeit $t = 40, t = 80$ und $t = 120$: analytische Lösung (*oben*); präsentierte Simulation ohne Dämpfungszone (*mitte*) und mit Dämpfungszone (*unten*). Darstellung von 4 Isokonturen definiert mit einem Verhältnis von 2 von 1.5×10^{-3} bis 1.2×10^{-2} .

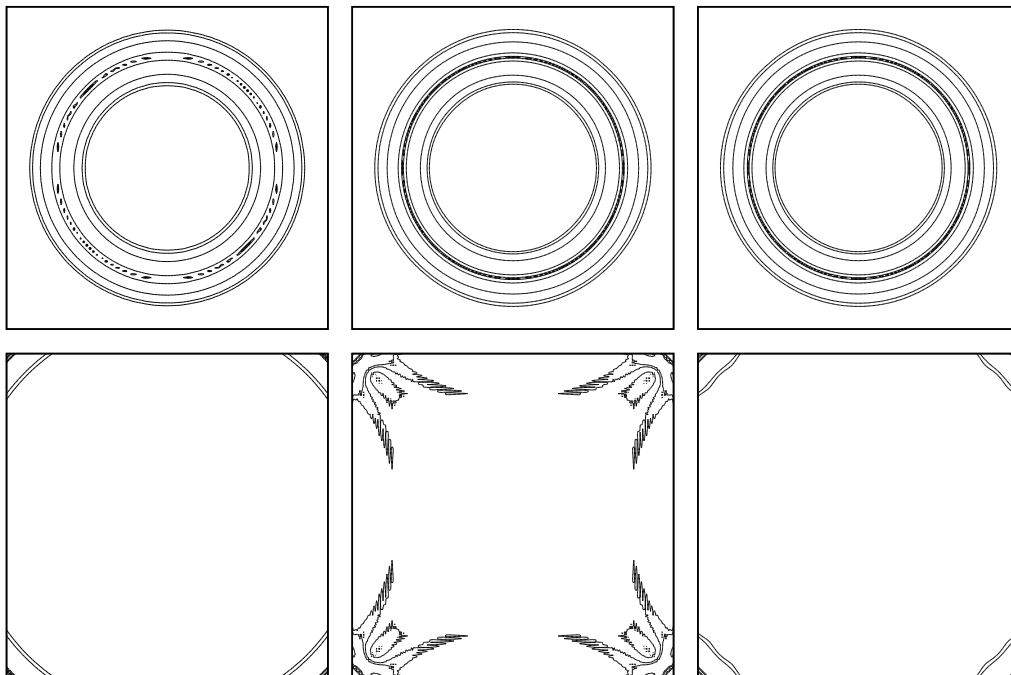


Abb. 2.2: 3-D akustischer Impuls in uniformer Strömung. Druckfelder $|p'|/\epsilon$ aufgetragen in der (y, z) -Ebene bei $x = 0$: analytische Lösung (*links*); präsentierte Simulation ohne Dämpfungszone (*mitte*) und mit Dämpfungszone (*rechts*), jeweils bei $t = 40$ (*oben*) und $t = 80$ (*unten*). Darstellung von 4 Isokonturen definiert in Abbildung 2.1.

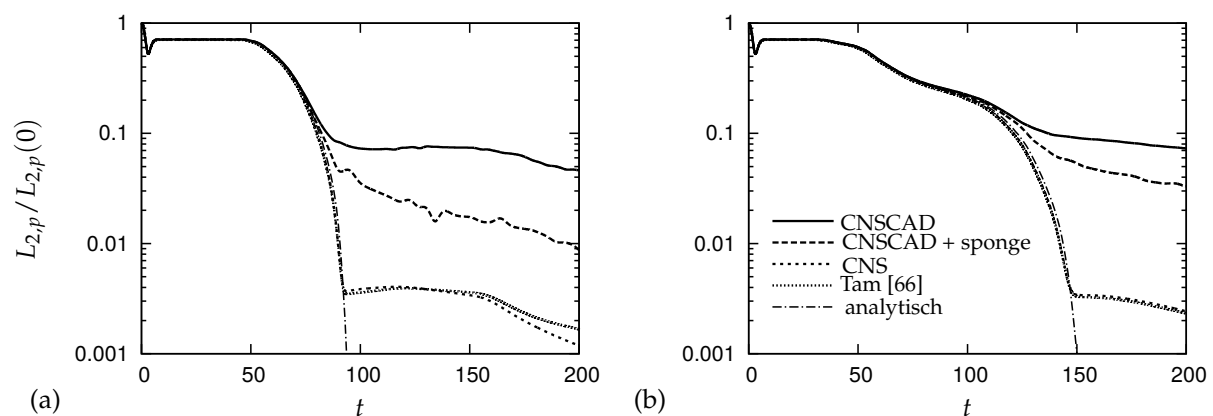


Abb. 2.3: 3-D akustischer Impuls. Zeitliche Entwicklung von $L_{2,p}$ mit: (a) $M = 0$ und (b) $M = 0.5$.

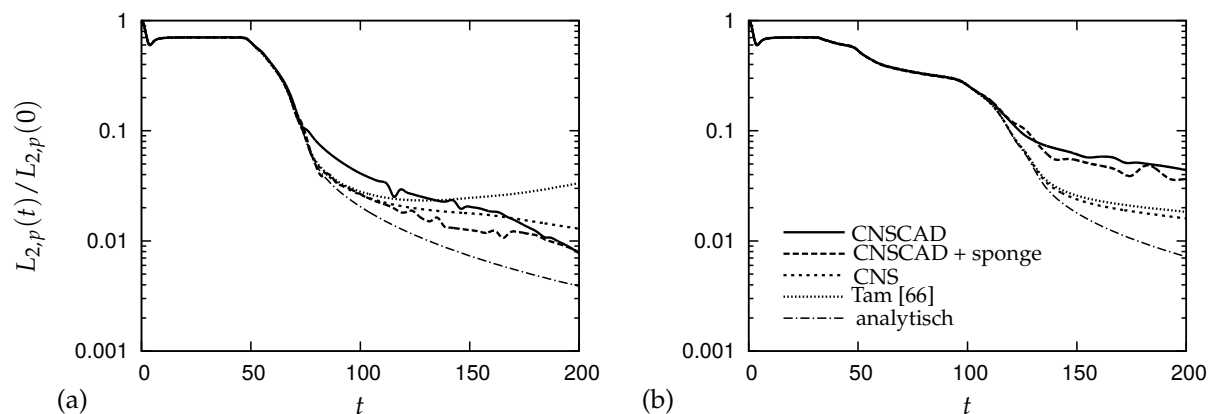


Abb. 2.4: 2-D akustischer Impuls. Zeitliche Entwicklung von $L_{2,p}$ mit: (a) $M = 0$ und (b) $M = 0.5$.

mit:

$$r = (y^2 + z^2)^{1/2} \neq 0, \quad \theta = \arctan(z/y),$$

wobei $\alpha = (\ln 2)/b^2$. Für sehr kleine r gilt $u_x^v = u_r^v = 0$. Mit den Werten für Wirbelradius, $r_0 = 20$, Halbwertbreite, $b = 5$, die Amplitude der Geschwindigkeit $\epsilon_v = 0.03$, und die Machzahl $M = 0.5$, sind die Anfangsbedingungen bei $t = 0$ vollständig gegeben und lauten:

$$p' = \rho' = 0, \quad u' = u_x^v, \quad v' = u_r^v \cos \theta, \quad w' = u_r^v \sin \theta.$$

In Abbildung 2.5 sind die Wirbelstärkefelder in der (x, y) -Ebene zu sehen. Zur Zeit $t = 100$ erreicht das Wirbelzentrum den Auslassrand. Da die Randbedingungen nicht exakt angepasst sind, treten in der Folge numerische Artefakte auf. Durch den zusätzlichen Dämpfungsterm (2.9) mit $\sigma_{\max} = 1$ und $l_{\text{sp}} = 35$ werden diese jedoch nahezu vollständig eliminiert. Dabei verringert der Term die Wirbelstärkeamplitude bevor der Wirbel auf den Rand trifft (zu sehen in der Veränderung der Konturlinien) und die sich entgegen der Strömung ausbreitenden Reflexionen. Auch die bei der Konvektion durch den Auslassrand generierten unphysikalischen Druckfluktuationen, visualisiert mit der L_2 -Norm in Abbildung 2.6, werden durch die Dämpfungszone effektiv reduziert. Abbildung 2.6 zeigt aber auch, dass für eine zu starke Dämpfungszone (großes σ_{\max}) Reflexionen vom Sponge selbst erzeugt werden und die Dämpfungsrate wieder abnimmt.

Damit stellt die Verwendung der konservativen Methode in Kombination mit einer gut angepassten Dämpfungszone einen adäquaten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Kosten dar.

2.1.5 Parallele Performanz

Die Parallelisierung basiert auf einer Aufteilung der einzelnen Gitter auf verschiedene Prozessoren. Umgesetzt wird dies durch die Anwendung der im OVERTURE-Framework enthaltenen A++/P++-Bibliotheken. Ziel von A++/P++ ist die Erweiterung der in C++ enthaltenen Datentypen um eine Sammlung von Array-Datentypen und Funktionen. Ein sequentielles A++ Array wird dabei in einer parallelen Umgebung zu einem parallelen P++ Array, das auf die verfügbaren Prozesse aufgeteilt wird. Die Verteilung der Arrays wird dabei von P++ übernommen, lediglich die Angabe wie viele Prozesse für die Aufteilung des globalen Gitters verwen-

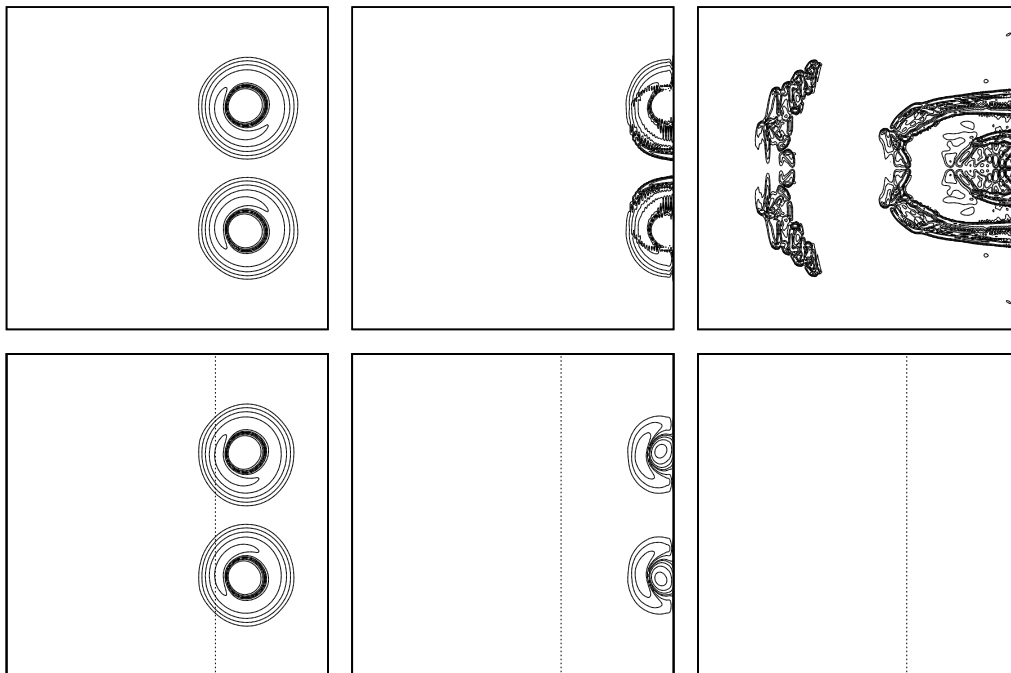


Abb. 2.5: 3-D Wirbelring in uniformer Strömung: Wirbelstärkefelder $|\omega_z| = |\partial_x v' - \partial_y u'|$ ohne Dämpfungszone (*oben*) und mit Dämpfungszone ($\sigma_{\max} = 0.1$) (*unten*), aufgetragen in der (x, y) -Ebene bei $z = 0$ von links nach rechts bei $t = 50, t = 100$ und $t = 150$. Darstellung von 5 Wirbelstärke-Isokonturen von 5×10^{-4} bis 80×10^{-4} jeweils mit einem Verhältnis von 2. ---, kennzeichnet den Beginn der Dämpfungszone bei $x = 15$.

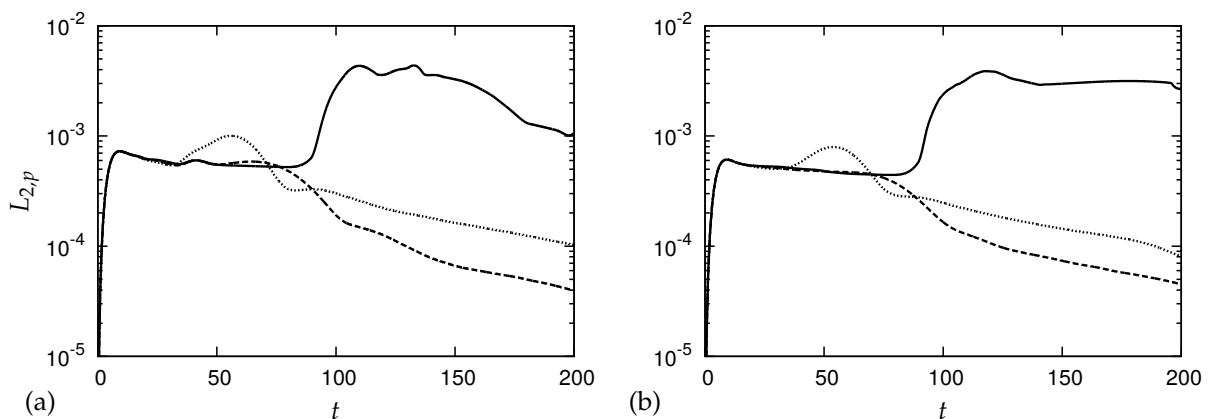


Abb. 2.6: Zeitliche Entwicklung von $L_{2,p}$ für (a) 3-D Wirbelring und (b) 2-D Wirbel: —, ohne Dämpfungszone; ---, $\sigma_{\max} = 0.1$; \cdots , $\sigma_{\max} = 0.5$.

Kerne	Knoten	Gitterpunkte pro Kern	Aufteilung	Zeit p. S. [sec]	Speedup
6	0.5	$128 \times 192 \times 384$	$3 \times 2 \times 1$	50.40	1.00
12	1	$128 \times 192 \times 192$	$3 \times 2 \times 2$	25.70	1.96
24	2	$128 \times 96 \times 192$	$3 \times 4 \times 2$	13.30	3.79
48	4	$128 \times 96 \times 96$	$3 \times 4 \times 4$	8.51	5.92
96	8	$64 \times 96 \times 96$	$6 \times 4 \times 4$	3.77	13.37
192	16	$64 \times 48 \times 96$	$6 \times 8 \times 4$	2.48	20.32
384	32	$64 \times 48 \times 48$	$6 \times 8 \times 8$	1.24	40.65

Tab. 2.1: Starker Skalierungstest mit 3-D akustischem Impuls, durchgeführt in einer Box mit 384^3 Gitterpunkten. Der Speedup für die Ausführung auf n_p Kernen ist $T(n_0)/T(n_p)$ mit der Ausführung auf $n_0 = 6$ Kernen als Basis, wobei $T(n_p)$ die Ausführungszeit pro Schritt auf n_p Kernen ist. Der Zeitschritt betrug in allen Fällen $\Delta t = 0.05$. p. S. bedeutet pro Schritt.

det werden sollen, ist zu treffen. Die Anzahl der Prozessoren pro Teilgitter muss nicht einheitlich sein, sie ist von der Größe eines jeden Teilgitters abhängig. Die Kommunikation zwischen den Prozessoren wird mittels sogenannter ghost points (fiktive Punkte außerhalb des physikalischen Simulationsgebiets) umgesetzt. Dabei kann Prozess n auf die ghost points all seiner angrenzenden Prozesse zugreifen und vice versa. Der Informationsaustausch zwischen den ghost point unterschiedlicher Teilgitter erfolgt mit Hilfe der PARTI-Bibliothek. Dabei wird zuerst festgelegt, welcher Prozess welche Daten wohin übermitteln soll, anschließend werden alle Daten als MPI-Nachricht verschickt.

Die Skalierungs-Tests wurden auf dem HorUS-Cluster der Universität Siegen (Hardware: 136 Knoten, 2 Intel Xeon X5650 CPUs pro Knoten mit 2.66GHz Taktfrequenz, 6 Kerne pro CPU, 12 MB Cache pro Knoten) durchgeführt. Als Testfälle wurden der dreidimensionale akustische Impuls auf einem kubischen Gitter mit 384^3 Punkten, die dreidimensionale Umströmung eines NACA0012 Profils auf zwei überlappenden Gittern mit insgesamt rund 2.7×10^7 Punkten (Details zum Gitter in Tabelle 3.2) und die Düse-Flügel-Klappe Geometrie auf acht Gittern mit global rund 10^8 Gitterpunkten (Details in Tabelle 4.3) jeweils 20 Zeitschritte simuliert. Die betrachteten Zeiten entsprechen der Ausführungszeit, die für einen einzelnen vollständigen Navier-Stokes-Schritt erforderlich ist. Die starken Skalierungstests (Wie variiert die Lösungszeit mit der Anzahl der Prozessoren für eine feste Gesamtproblemgröße?) (Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 sowie Abbildung 2.7 (a)) zeigen, dass für eine hinreichende Problemgröße, die beste Wahl eine Ausführung auf 96 Prozessorkernen ist, unabhängig davon, ob das globale Gitter aus einem oder mehreren sich überlappenden Teilgittern besteht. Auf der anderen Seite zeigen die schwachen Skalierungstests (Wie variiert die Lösungszeit mit der Anzahl von Prozessoren für eine feste Problemgröße pro Prozessor?) für den Fall des akustischen Impulses mit konstantem Zeitschritt $\Delta t = 0.02$ (Tabellen 2.4, 2.5 und 2.6 sowie Abbildung 2.7 (b)), dass je nach Arbeitslast pro Kern eine schwache parallele Effizienz im Bereich um 0.8 für bis zu 343 Prozessorkerne auf dem HorUS aufrechterhalten werden kann. Wenn man berücksichtigt, dass der vorliegende Algorithmus die Lösung von fünf PDEs pro Zeitschritt beinhaltet sind diese Ergebnisse akzeptabel.

2.2 Nicht konservativer Navier-Stokes Löser

Tam [66] (S.138) zeigte, dass der Einfluss der Formulierung (primitiv oder konservativ) auf die Genauigkeit sehr gering ist. Hixon *et al.* [70] zeigen, dass die primitive Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen einen geringeren Dispersionsfehler gegenüber der konservativen

Kerne	Knoten	Gitterpunkte pro Kern (\mathcal{G}_1)	Aufteilung (\mathcal{G}_1)	Zeit p. S. [sec]	Speedup
6	0.5	$235 \times 178 \times 71$	$3 \times 2 \times 1$	26.00	1.00
12	1	$117 \times 178 \times 71$	$6 \times 2 \times 1$	18.90	1.38
24	2	$117 \times 89 \times 71$	$6 \times 4 \times 1$	9.64	2.70
48	4	$58 \times 89 \times 71$	$12 \times 4 \times 1$	5.13	5.07
96	8	$58 \times 44 \times 71$	$12 \times 8 \times 1$	3.32	7.83
192	16	$58 \times 44 \times 35$	$12 \times 8 \times 2$	1.48	17.57
384	32	$29 \times 44 \times 35$	$24 \times 8 \times 2$	1.04	25.00

Tab. 2.2: Starker Skalierungstest anhand einer NACA0012 Umströmung. Die Angaben zur Aufteilung und den Gitterpunkten pro Kern gelten für das Hintergrundgitter \mathcal{G}_1 . Der Zeitschritt betrug in allen Fällen $\Delta t = 10^{-5} C/a_\infty$.

Kerne	Knoten	Gitterpunkte pro Kern (\mathcal{G}_1)	Aufteilung (\mathcal{G}_1)	Zeit p. S. [sec]	Speedup
6	0.5	$677 \times 503 \times 39$	$3 \times 2 \times 1$	125.00	1.00
12	1	$338 \times 503 \times 39$	$6 \times 2 \times 1$	80.70	1.55
24	2	$338 \times 251 \times 39$	$6 \times 4 \times 1$	41.10	3.04
48	4	$169 \times 251 \times 39$	$12 \times 4 \times 1$	19.10	6.54
96	8	$169 \times 125 \times 39$	$12 \times 8 \times 1$	9.34	13.38
192	16	$84 \times 125 \times 39$	$24 \times 8 \times 1$	5.55	22.52
384	32	$84 \times 62 \times 39$	$24 \times 16 \times 1$	3.33	37.54

Tab. 2.3: Starker Skalierungstest Düse-Flügel-Klappe Konfiguration mit $\Delta t = 10^{-5}$.

Kerne	Knoten	Globale Gittergröße	Aufteilung	Zeit p. S. [sec]	Effizienz
27	2.25	$384 \times 384 \times 384$	$3 \times 3 \times 3$	11.10	1.00
64	5.33	$512 \times 512 \times 512$	$4 \times 4 \times 4$	13.10	0.85
125	10.42	$640 \times 640 \times 640$	$5 \times 5 \times 5$	13.10	0.85
216	18	$768 \times 768 \times 768$	$6 \times 6 \times 6$	14.30	0.78
343	28.58	$896 \times 896 \times 896$	$7 \times 7 \times 7$	14.00	0.79
512	42.67	$1024 \times 1024 \times 1024$	$8 \times 8 \times 8$	14.60	0.76

Tab. 2.4: Schwacher Skalierungstest mit $128 \times 128 \times 128$ Gitterpunkten pro Kern.

Kerne	Knoten	Globale Gittergröße	Aufteilung	Zeit p. S. [sec]	Effizienz
27	2.25	$288 \times 288 \times 288$	$3 \times 3 \times 3$	4.78	1.00
64	5.33	$384 \times 384 \times 384$	$4 \times 4 \times 4$	4.77	1.00
125	10.42	$480 \times 480 \times 480$	$5 \times 5 \times 5$	5.33	0.90
216	18	$576 \times 576 \times 576$	$6 \times 6 \times 6$	6.23	0.77
343	28.58	$672 \times 672 \times 672$	$7 \times 7 \times 7$	6.06	0.79
512	42.67	$768 \times 768 \times 768$	$8 \times 8 \times 8$	8.78	0.54

Tab. 2.5: Schwacher Skalierungstest mit $96 \times 96 \times 96$ Gitterpunkten pro Kern.

Kerne	Knoten	Globale Gittergröße	Aufteilung	Zeit p. S. [sec]	Effizienz
24	2	$288 \times 384 \times 192$	$4 \times 3 \times 2$	5.02	1.00
48	4	$288 \times 384 \times 384$	$4 \times 3 \times 4$	5.40	0.93
96	8	$576 \times 384 \times 384$	$6 \times 4 \times 4$	6.28	0.80
192	16	$576 \times 768 \times 384$	$8 \times 6 \times 4$	6.30	0.80
384	32	$576 \times 768 \times 768$	$8 \times 6 \times 8$	5.92	0.85

Tab. 2.6: Schwacher Skalierungstest mit $72 \times 128 \times 96$ bzw. $96 \times 96 \times 96$ Gitterpunkten pro Kern.

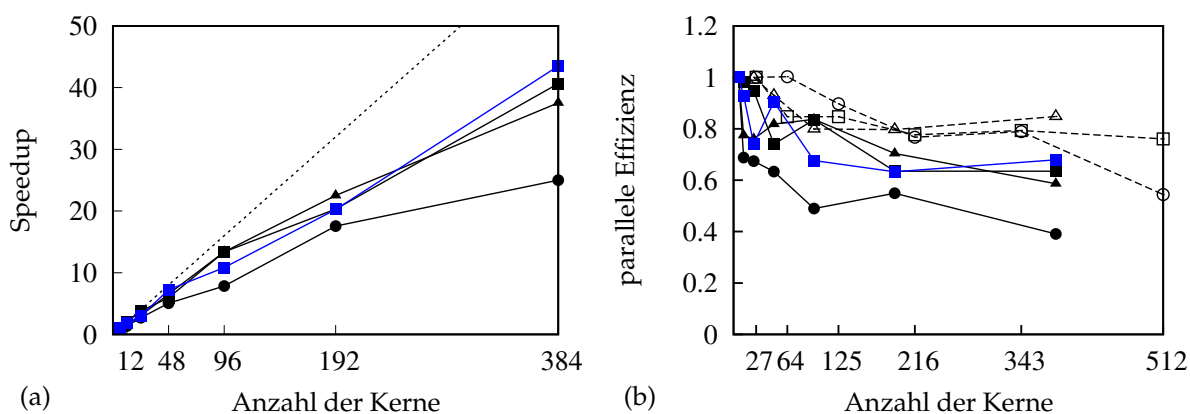


Abb. 2.7: (a) Speedup der starken Skalierungstests: \blacksquare , akustischer Impuls auf einem Gitter mit rund 5.7×10^7 Gitterpunkten (\blacksquare , optimierte Version von P++); \bullet , NACA0012 auf zwei Gittern mit global rund 2.7×10^7 Punkten; \blacktriangle , Düse-Flügel-Klappe Konfiguration auf acht Gittern mit global rund 10^8 Punkten; \cdots , idealer Speedup. (b) Starke Effizienz, $E(n_p) = n_0 T(n_0) / (n_p T(n_p))$, der starken Skalierungstests sowie schwache Effizienz, $E(n_p) = T(n_0) / T(n_p)$, des akustischen Impulses mit: $-\square-$, 128^3 Gitterpunkten pro Prozess; $-\circ-$, 96^3 Gitterpunkten pro Prozess; $-\triangle-$, 96^3 Gitterpunkten pro Prozess und voll ausgelasteten Knoten.

Formulierung aufweisen. Werden die Navier-Stokes-Gleichungen in primitiver Form notiert, vereinfacht sich deren Diskretisierung und die Implementierung von Verfahren höherer Ordnung sowie spezieller Randbedingungen ist deutlich einfacher zu realisieren. Im Vorfeld dieser Arbeit wurden der primitive Löser des OVERTURE-Frameworks von zweiter auf sechste Ordnung erhöht und es wurden die asymptotischen Fernfeld-Randbedingungen von Tam & Dong [71] implementiert [72]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Löser und die Randbedingungen parallelisiert und hinsichtlich der Ausführungszeit optimiert.

2.2.1 Grundgleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich in der primitiven Form schreiben als:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T + (\gamma - 1) T(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= (\gamma - 1) \left(\frac{\tilde{k}}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\mu}{\mathcal{R}_g \rho} \Phi \right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

wobei $\mathbf{u} = [u, v, w]$ der Geschwindigkeitsvektor in kartesischen Koordinaten, ρ die Dichte, p der Druck und T die totale Temperatur des Fluids ist. Die thermische Zustandsgleichung liefert den Druck

$$p = \rho \mathcal{R}_g T$$

und mit

$$\Phi = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$$

ist das Gleichungssystem (2.5) mit dem Lösungsvektor $\mathbf{U} = [\rho, \mathbf{u}, T]$ geschlossen. Die dynamische Viskosität, μ , wird als konstant angenommen, $\gamma = c_p/c_v$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, \mathcal{R}_g ist die spezifische Gaskonstante und $\tilde{k} = k/\mathcal{R}_g$ ist die dimensionslose thermische Leitfähigkeit. Die dimensionslose Form des Gleichungssatzes erhält man, indem in den Gleichungen (2.5) die folgenden Substitutionen vorgenommen werden:

$$\mu = \frac{1}{Re'}, \quad \mathcal{R}_g = \frac{1}{\gamma M^2}, \quad \tilde{k} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re'}$$

wobei die Machzahl, M , mit der Skale für die Geschwindigkeit, U , (bspw. a_∞ oder U_j) und der Schallgeschwindigkeit im Unendlichen, a_∞ , gebildet wird. Re und Pr ist die Reynolds- bzw. Prandtl-Zahl.

2.2.2 Diskretisierung und Randbedingungen

Die Approximation der räumlichen Ableitungen des Gleichungssystems (2.5) erfolgt im inneren Simulationsgebiets mit einem zentralen 7-Punkte Finite-Differenzen (FD) Schema sechster Ordnung. Im Randgebiet (fiktive Punkte außerhalb des physikalischen Simulationsgebiets) werden die Gleichungen der jeweiligen Randbedingungen gelöst und die Ableitungen werden normal zum Rand mit unsymmetrischen FD-Schemata approximiert. Weitere Details zur räumlichen und zeitlichen Diskretisierung sind in [72] zu finden.

Der hier verwendete Ansatz zur Formulierung von nicht-reflektierenden Randbedingungen für offener Ränder, besteht in der Herleitung von Randbedingungen anhand der asymptotischen Lösungen der linearisierten Euler-Gleichungen (LEE). Tam *et al.* [73, 71] leiteten nach diesem Ansatz zweidimensionale Radiation- und Outflow-Randbedingungen für das akustische Fernfeld her. Den Herleitungen geht die Separation der Strömungsfluktuationen in drei verschiedene Moden und eine Aufteilung des Randes voraus. Aus diesem Vorgehen folgen keine Diskontinuitäten zwischen benachbarten Rändern unterschiedlicher Randbedingungen und es bedarf keiner speziellen Behandlung der Gebietsecken [74]. Für Ränder, die vorwiegend mit akustischen Fluktuationen beaufschlagt werden, sind in den Randpunkten die sogenannten Radiation-Randbedingungen zur Bestimmung des Lösungsvektors \mathbf{U} zu lösen. Da der Lösungsvektor die absolute Temperatur, T , und nicht den Druck enthält, sind die originalen Randbedingungen entsprechend umzuformulieren. Die Radiation-Randbedingungen lauten danach für zwei- und dreidimensionale Strömungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ T \end{bmatrix} = -V_g \left(\frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho \\ \mathbf{u} \\ T \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{T} \end{bmatrix} + \frac{1}{c_{\text{dim}} r} \begin{bmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \\ T - \bar{T} \end{bmatrix} \right),$$

wobei $V_g(r, \theta, \phi) = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \left[\bar{a}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ die Gruppengeschwindigkeit der akustischen Wellen ist, $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ ist der mittlere Geschwindigkeitsvektor und $\bar{a} = \sqrt{\gamma \mathcal{R}_g \bar{T}}$ ist die lokale gemittelte Schallgeschwindigkeit (bei im Mittel isothermen Strömungen wird hier $\bar{a} = a_\infty = \text{konst.}$ gesetzt). Der Ursprung des Richtungsvektors $r\mathbf{e}_r$, $O(x_o, y_o, z_o)$, wird in das Zentrum der dominierenden Schallquelle gelegt und im dreidimensionalen Raum ist $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$ und $\frac{\partial}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}$. Im zwei- und dreidimensionalen Fall ist die Konstante $c_{\text{dim}} = 2$ respektive $c_{\text{dim}} = 1$.

An Rändern, die zusätzlich mit Entropie- und Wirbelstärkefluktuationen beaufschlagt werden, wurden die generalisierten Outflow-Randbedingungen verwendet; sie enthalten den Druck p und müssen daher ebenfalls umformuliert werden. Die Druckterme in der Outflow-Randbedingung für die Dichte lassen sich mithilfe der thermischen Zustandsgleichung, $p = \rho \mathcal{R}_g T$, eliminieren und unter der Annahme uniformer mittlerer Schallgeschwindigkeit lautet die Bedingung dann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\bar{u}_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \right) + \frac{\mathcal{R}_g}{\bar{a}^2} \left[\rho \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u}_j \left(T \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial T}{\partial x_j} - \bar{T} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \right],$$

wobei $\frac{\partial T}{\partial t}$ und $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ mit der jeweiligen Radiation-Randbedingung berechnet werden. Analog dazu folgen die Outflow-Randbedingungen für die Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\bar{u}_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\mathcal{R}_g}{\bar{\rho}} \left(T \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial T}{\partial x_i} - \bar{T} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right).$$

Die Methoden und Randbedingungen wurden vom Autor ausführlich verifiziert und in [72] dokumentiert; ein Auszug der Ergebnisse des CNS-Lösers wurde in den Abbildungen 2.3 und 2.4 vorweggenommen. Im Folgenden soll daher nur auf die vorgenommene Parallelisierung und Optimierung des Codes eingegangen werden.

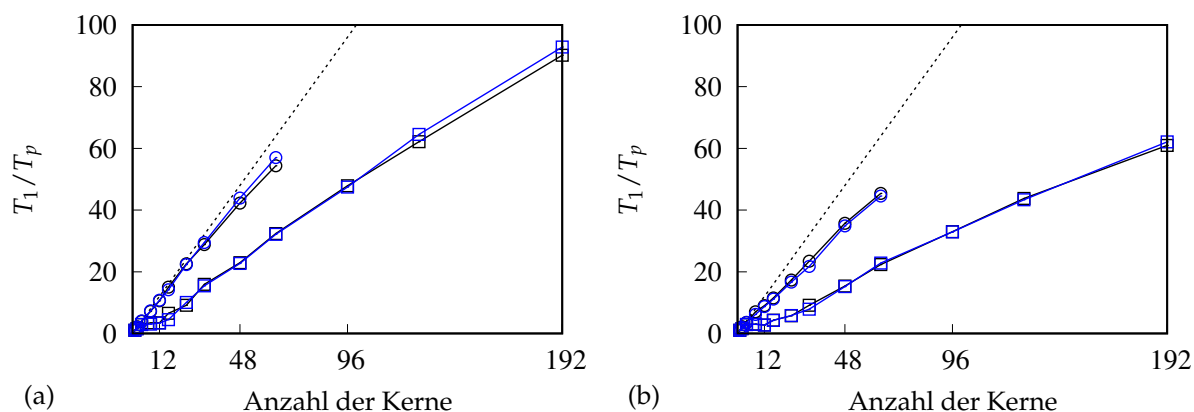


Abb. 2.8: Speedup des nicht konservativen Löser für (a) 2D-Impuls und (b) 3D-Impuls jeweils mit 10^6 Gitterpunkten: \square , mit voll ausgelasteten Knoten und \circ , mit einem Kern pro Knoten (mit optimierter P++ Version (blau)); \cdots , idealer Speedup.

2.2.3 Parallelisierung und Optimierung

Die Parallelisierung basiert wie beim konservativen Löser auf den A++/P++-Bibliotheken von OVERTURE. Da der Fokus dieser Arbeit aber nicht auf der Codegestaltung liegt, wird hier nicht auf die Details der Parallelisierung eingegangen. Stattdessen sollen nur die Ergebnisse der Leistungsanalyse des nicht-konservativen Löser diskutiert werden.

Abbildung 2.8 zeigt die Skalierung des nicht konservativen Löser für einen zwei- und einen dreidimensionalen akustischen Impuls auf einem Gitter mit jeweils 10^6 Gitterpunkten. Es fällt auf, dass der Speedup, unabhängig von der Dimensionalität des Problems, mit nur einem genutzten Prozess (Kern) pro Rechenknoten deutlich besser ist, als für den Fall voll besetzter Knoten. Die intensive Analyse mit der Software SCALASCA zeigte, dass mit zunehmender Anzahl aktiver Prozesse pro Knoten die Kommunikationszeit und die Rechenzeit zunimmt. Diese Beobachtung deutet auf eine ungünstige Speichereffizienz des Codes. Je mehr Prozesse aktiv sind, desto weniger schnellen L3-Caches stehen für jeden Prozess zur Verfügung. Die Optimierung von A++/P++ hinsichtlich der Kommunikation führte aus diesem Grund nur zu einer leichten Verbesserung des Speedups. Ein speicheroptimiertes Refactoring des Codes zeigte sich als sehr aufwendig und ohne Garantie auf Erfolg, weswegen im Rahmen dieser Arbeit davon abgesehen wurde. Die hier gezeigte parallele Performance gibt somit den aktuellen Leistungsstand des Codes wieder.

Abbildung 2.9 vergleicht die Skalierung des nicht-konservativen Löser sechster Ordnung mit der des konservativen Löser zweiter Ordnung aus Kapitel 2.1. Speedup und Effizienz sind sehr ähnlich. Hinsichtlich der Rechenzeit pro Zeitschritt ist der konservative Löser zweiter Ordnung im Mittel rund 20% schneller als der nicht-konservative Löser sechster Ordnung. Die maximale Gitterweite und damit auch die maximale Zeitschrittweite $\Delta t = CFL \Delta y_{\min} / a$, sind aufgrund einer Mindestauflösung der Grenzschicht von $\Delta y^+ \leq 1$ limitiert. Für eine hinreichende Qualität der Lösung, sollte die Gitterweite im Übergangsbereich zwischen zwei Gittern zudem nahezu identisch sein (siehe Kapitel 2.3), was die mögliche Gitterstreckung im Nahfeld deutlich begrenzt. Da aus diesen Gründen der Aufwand einer hohen Ordnung des FD-Schemas durch eine geringere räumliche Auflösung bei den untersuchten Konfigurationen nur im Fernfeld kompensiert werden kann, wurde in den meisten Fällen, der schnellere konservative CNSCAD-Löser im Nahfeld verwendet.

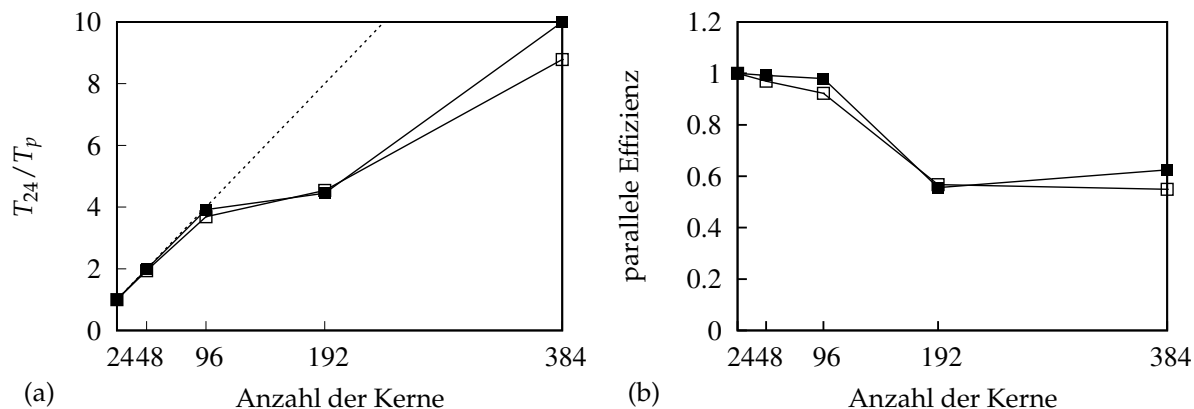


Abb. 2.9: Speedup (a) und Effizienz (b) berechnet anhand des 3D-Impuls auf einem kubischem Gitter mit 384^3 Gitterpunkten: \blacksquare , konservativer Löser in 2. Ordnung (Z.p.S.: 12.5, 6.30, 3.19, 2.81, (6.2)); \square , nicht konservativer Löser in 6. Ordnung (Z.p.S.: 15.2, 7.84, 4.12, 3.35, (7.6))(jeweils mit optimierter P++ Version gerechnet); \cdots , idealer Speedup. (In den Klammern steht die Zeit pro Schritt jeweils auf 24,48,96 und 192 Kernen (Mittelwert)).

2.3 Numerische Lösung von PDEs auf überlappenden Gittern

Das Differentialgleichungssystem (2.1) oder (2.5) wird numerisch unter Berücksichtigung der gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen auf einem Gitter oder mehreren sich überlappenden Gittern gelöst. Der dazu verwendete theoretische Rahmen wird im Folgenden beschrieben.

2.3.1 Räumliche Diskretisierung mittels körperangepasster strukturierter Gitter

Das Simulationsgebiet Ω wird durch ein Gitter oder die Überlagerung mehrerer Teilgitter \mathcal{G}_g diskretisiert. Ein krummliniges physikalisches Gitter wird als Knotenfolge in den Indizes (i, j, k) angegeben

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_g(\mathbf{i}) = \mathbf{x}_g(i, j, k) = [x_1(i, j, k), x_2(i, j, k), x_3(i, j, k)]_g = [x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}]_g = [x_i, y_i, z_i]_g,$$

wobei $\mathbf{x}_g \in \mathbb{R}^3$ über die Abbildung $\mathbf{x}_g = \mathbf{D}_{\mathcal{G}_g}(\boldsymbol{\zeta})$ im Knoten $\mathbf{i} = (i, j, k)$ mit $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}$ eindeutig definiert ist. $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] = [\zeta, \eta, \zeta]$ spannt den kartesischen Rechenraum auf, der durch einen Einheitswürfel der Kantenlänge 1 definiert ist: $\boldsymbol{\zeta} \in [0, 1]^3$. Der Raum wird durch die Gitterlinien N_x , N_y und N_z in die jeweilige Richtung uniform diskretisiert¹:

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{i}) = \boldsymbol{\zeta}(i, j, k) = [\zeta(i), \eta(j), \zeta(k)] = [\zeta_i, \eta_j, \zeta_k].$$

Die Gitterweite im Rechenraum folgt somit aus der Anzahl der Gitterlinien und ist z.B. in y -Richtung $\Delta\eta = 1/(N_y - 1)$. Für zum Beispiel ein festes $\zeta(i = I)$ und $\eta(j = J)$ definiert die Variable ζ eine Gitterlinie. Der Zusammenhang zwischen dem Lösungsvektor $\mathbf{U}(\mathbf{x}_i)$ am physikalischen Ort \mathbf{x}_i und im Rechenraum ist direkt gegeben mit $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) = \mathbf{U}(\zeta_i, \eta_j, \zeta_k) = \mathbf{U}(i, j, k) = \mathbf{U}_{ijk} = \mathbf{U}_i = \mathbf{U}(\mathbf{i})$. Für den Ableitungsoperator ∇ ist dies nicht der Fall. Da die Koeffizienten zur Approximation der Ableitungen für den uniformen Rechen-

¹Die ghost lines liegen außerhalb des Einheitswürfels, d.h. bei einem Gitter mit zwei ghost lines ist $i \in \{-2, -1, 0, 1, \dots, N_x - 2, N_x - 1, N_x, N_x + 1\}$

raum definiert sind, müssen die Grundgleichungen vom physikalischen Raum (x, y, z) in den Rechenraum (ξ, η, ζ) transformiert werden. Im Fall einer nicht-konservativen Diskretisierung² geschieht dies, indem der Ableitungsoperator ∇ ersetzt wird durch

$$\nabla = \mathbf{M}_g \nabla_{\xi},$$

wobei $\mathbf{M}_g = \nabla \xi$ die Metrik-Terme der Gittertransformation des Gitters \mathcal{G}_g enthält; sie wird durch die Invertierung von $\mathbf{M}_g^{-1} = \nabla_{\xi} x$ berechnet. Diese werden bei der Gittererstellung entweder aus den Gitterfunktionen der einzelnen Gitter analytisch bestimmt oder mittels Differenzenquotienten numerisch berechnet.

Für beispielsweise ein zentrales 5-Punkte Stencil zur Berechnung der Ableitungen, ist der Lösungsvektor in zwei fiktiven Gitterlinien am Rand eines jeden Gitters \mathcal{G}_g zu spezifizieren. An physikalischen Rändern $\partial\Omega$ des Gebiets Ω werden sie mittels Randbedingungen spezifiziert. An den unphysikalischen Rändern der Gitter (Überlappungsgebiete) muss ein Informationsaustausch zwischen den Gittern gegeben sein. Dazu wird \mathbf{U} in den Randpunkten des ersten Gitters via Interpolation über eine definierte Anzahl von Punkten des zweiten Gitters approximiert und vice versa. Die Größe des verwendeten Interpolationsstencils beeinflusst dabei maßgeblich die Genauigkeit und die Kosten der Interpolation.

2.3.2 Interpolationsmethode

Die Wahl der Interpolationsmethode ist in zweierlei Hinsicht von besonderer Bedeutung: (i) kann sie die globale Ordnung in der Genauigkeit herabsetzen und (ii) beeinflusst sie die Durchlässigkeit der Überlappungszone für die akustische und dynamische Energie. Letzteres hat großen Einfluss auf die Vorhersagegenauigkeit akustischer Schwankungsgrößen.

Aus diesem Grund wurden einige Techniken wie B-Splines, kompakte Methoden, Lagrange- oder Hermite-Interpolation im Zusammenhang mit überlappenden Gittern in der Aeroakustik von diversen Autoren untersucht [75, 76, 77, 78, 79]. Guéanff *et al.* [80] fanden, dass für ihren Testfall die Hermite-Interpolation den besten Kompromiss zwischen der Genauigkeit und den Kosten der Interpolation lieferte. Dies liegt darin begründet, dass die Hermite-Interpolation bei gleicher Ordnung weniger Interpolationspunkte benötigt als z.B. die Interpolation via Lagrange-Polynomen. Jedoch zeigte sich auch, dass die oben genannten Methoden für komplexe Geometrien im Vergleich zur Lagrange-Interpolation nicht einfach zu implementieren sind [81]. In dieser Arbeit wird daher die, bereits in OVERTURE implementierte, explizite Lagrange-Interpolation verwendet. Da nur eine Beschreibung in [82] aber keine Validierung der Methodik hinsichtlich akustischer Problemstellungen gefunden wurde, wird diese nach einer Kurzbeschreibung im Folgenden geliefert.

Die Interpolation findet im Rechenraum (ξ, η, ζ) statt. Es sei $\mathbf{U}_g(x_g(i, j, k))$ der Lösungsvektor im dreidimensionalen Raum am Ort $x_g(i, j, k)$ des Gitters \mathcal{G}_g . Wird angenommen, dass ein Gitter \mathcal{G}_1 ein zweites Gitter \mathcal{G}_2 überlappt, dann wird die Lösung \mathbf{U}_1 im Punkt $x_1(i, j, k) = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})_1$ (Empfängerpunkt) am Rand des Gitters \mathcal{G}_1 via expliziter Interpolation über ein $N \times N \times N$ Punkte Stencil (Spenderpunkte) des Gitters \mathcal{G}_2 aus der Lösung des zweiten Gitters \mathbf{U}_2 wie folgt berechnet³:

$$\mathbf{U}_1(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})_1 = \mathbf{U}_1(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)_1 \approx \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_l(s_i) \alpha_m(s_j) \alpha_n(s_k) \mathbf{U}_2(\xi^l, \eta^m, \zeta^n)_2.$$

² Für eine konservative Diskretisierungsmethode ist die Überführung der Gleichungen in den Rechenraum deutlich aufwendiger. Details dazu in Kapitel 2.1

³ Oben stehende Indizes kennzeichnen die Zählung im Interpolationsstencil.

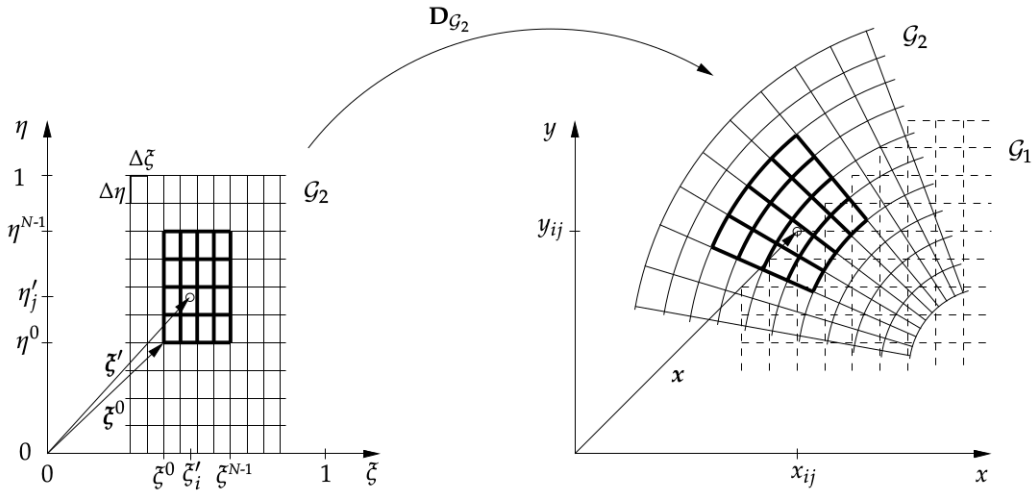


Abb. 2.10: Zweidimensionales Interpolationsstencil mit $N = 5$ im (ζ, η) -Raum und (x, y) -Raum.

Dazu ist es erforderlich die mit dem Empfängerpunkt, $x_1(i, j, k)$, korrespondierende Position im Rechenraum des Spendergitters \mathcal{G}_2 zu berechnen. Diese Position, $\zeta' = \mathbf{D}_{\mathcal{G}_2}^{-1}(x_1)$, errechnet sich aus dem Mapping von Gitter \mathcal{G}_2 , $\mathbf{D}_{\mathcal{G}_2}$, angewandt auf den Ortsvektor des Empfängerpunkts, $x_1(i, j, k)$, des Gitters \mathcal{G}_1 . Wobei $x_2 = \mathbf{D}_{\mathcal{G}_2}(\zeta)$ das Mapping des Rechenraums (Einheitswürfel der Kantenlänge eins) in den vom Gitter \mathcal{G}_2 überdeckten physikalischen Raum ist. Das Gittergenerierungsprogramm liefert die Koordinaten ζ' eines jeden Punktes (Empfängerpunkt) welcher interpoliert werden muss.

Die Interpolationskoeffizienten α werden hier mittels Lagrange-Polynome berechnet. Für ein Schema der Größe N , sind die Koeffizienten Polynome von der Ordnung $N - 1$ und definiert via:

$$\begin{aligned} \alpha_l(s_i) &= \prod_{p=0, p \neq l}^{N-1} \frac{s_i - p}{l - p} & \text{mit} & \quad s_i = \frac{\zeta'_i - \zeta^0}{\Delta \zeta}, \\ \alpha_m(s_j) &= \prod_{p=0, p \neq m}^{N-1} \frac{s_j - p}{m - p} & \text{mit} & \quad s_j = \frac{\eta'_j - \eta^0}{\Delta \eta}, \\ \alpha_n(s_k) &= \prod_{p=0, p \neq n}^{N-1} \frac{s_k - p}{n - p} & \text{mit} & \quad s_k = \frac{\zeta'_k - \zeta^0}{\Delta \zeta}. \end{aligned}$$

$\zeta^0 = (\zeta^0, \eta^0, \zeta^0)$ ist der Ursprung des Interpolationsstencils. Der Ursprung ζ^0 wird durch die Bedingung definiert, dass der Abstand zwischen der Empfängerposition ζ' und dem Zentrum des Interpolationsstencils, $\zeta^0 + \frac{N-1}{2}\zeta_\Delta$, wobei $\zeta_\Delta = (\Delta \zeta, \Delta \eta, \Delta \zeta)$ die uniformen Gitterweiten enthält, minimal sein soll (zur Anschauung siehe Abbildung 2.10).

2.3.3 Genauigkeit und Ordnung der Interpolation

Bei der Benutzung überlappender Gitter stellt sich die Frage, wie hoch die Interpolationsordnung zu wählen ist, sodass die globale Ordnung in der Genauigkeit erhalten bleibt⁴. Die Beantwortung dieser Frage hängt ab von der Ordnung der zu lösenden PDE, p_{pde} , und der Ord-

⁴Meist wird die globale Ordnung der Diskretisierung schon durch die Verwendung einseitiger Schemata am Rand herabgesetzt. Dies sei an dieser Stelle nicht berücksichtigt.

nung des Diskretisierungsverfahrens, p_Δ , sowie von der Gestaltung der Gitterüberlappung. Die Überlappungsbreite d der Gitter ist ein Vielfaches der Gitterweite Δ , wobei der Faktor mit der Breite des Interpolations-Stencils zunimmt.

Für die Lösung einer elliptischen Gleichung zweiter Ordnung⁵ mit einer räumlichen Diskretisierung von zweiter Ordnung ist eine Interpolation⁶ dritter Ordnung erforderlich wenn die globale Ordnung von zwei aufrecht erhalten bleiben soll. Chesshire & Henshaw [82] untersuchten ein Randwertproblem p_{pde} -ter Ordnung auf einem eindimensionalen überlappenden Gitter. Sie zeigten, dass wenn die Überlappungsbreite d linear mit der Gitterweite Δ zunimmt, d.h. $d \propto \Delta$, die Breite des Interpolationsstencils für eine globale Ordnung von $p = p_\Delta$,

$$N = p_{\text{pde}} \frac{p_\Delta}{2} + 1$$

sein muss. Um die Genauigkeit der inneren Zentralfindungen-Verfahren vierter Ordnung ($p_\Delta = 4$) global beizubehalten, ist somit eine Stencilbreite von $N = 5$ notwendig. Aufgrund von Variationen in der Gittertopologie kann die Überlappung auch lokal leicht unterschiedlich sein. Bei der Gestaltung der Gitterüberlappung kann als grobes Kriterium für die Qualität der Quotient aus den Gitterweiten der beiden Gitter

$$Q = \frac{\Delta_e}{\Delta_s}$$

betrachtet werden. Die Qualität der Überlappung ist gut, wenn $Q \leq 1$ ist. Die Gitterweite des Spendergitters, Δ_s , sollte also größer oder gleich der des Empfängergitters, Δ_e , sein. Bei den Problemen in dieser Arbeit, ist die Informationsausbreitung von feinem (Nahfeld) zu grobem Gitter (Fernfeld) und damit der hinsichtlich numerischer Artefakte ungünstigste Fall vorherrschend. Durch die Überlappungstopologie der Untersuchten Düse-Flügel Konfigurationen sind die Interpolationsstencils, relativ zum Empfängerpunkt einseitig ausgerichtet. Sherer & Scott [83] zeigten, dass der Fehler einer Interpolation mit der Einseitigkeit des Interpolationsstencils zunimmt. Der Einfluss von N auf den Interpolationsfehler wurde daher für unterschiedliche Q untersucht.

2.3.4 Interpolationsfehler

Zur Abschätzung des Interpolationsfehlers wurden zwei Testfälle auf jeweils drei unterschiedlichen Gittern (Gitter #1, #2 und #3) durchgeführt. Das Berechnungsgebiet erstreckt sich dabei von $[0, 480] \times [0, 480]$ in x - und y -Richtung und wird mit zwei sich überlappenden Gittern vernetzt. Das Hintergrundgitter \mathcal{G}_1 besteht dabei immer aus 481×481 Gitterlinien. Die Dimensionen des Vordergrundgitters \mathcal{G}_2 sind $[40, 440] \times [40, 240]$, je nach Gitter unterscheiden sie sich hinsichtlich Gitterweite und Versatz relativ zum Hintergrundgitter (siehe dazu Abbildung 2.11 und Tabelle 2.7). Aus den Erkenntnissen der ersten beiden Testfälle, wird abschließend noch die Brechung akustischer Wellen an zwei Zylindern unterschiedlichen Durchmessers simuliert. Damit soll die Eignung des Verfahrens für akustische Untersuchungen in Anwesenheit

⁵Für die Untersuchung der Interpolationsgenauigkeit wurde ein elliptisches Randwertproblem betrachtet. Bei den instationären NS-Gleichungen handelt es sich zwar um spezielle parabolische PDEs mit einem parabolischen (Wärmeleitungs- und Diffusions-) Anteil und einem hyperbolischen (Wellen-) Anteil, da aber für die Interpolation nur der stationäre Anteil der NS-Gleichungen relevant ist und dieser ähnliche Phänomene beschreibt wie elliptische Gleichungen, ist die Betrachtung einer elliptischen Gleichung aus Sicht des Autors an dieser Stelle eine zulässige Vereinfachung.

⁶Eine Interpolation mit dem Abbruchfehler $\mathcal{O}(h^N)$ besitzt die Ordnung N . D.h. eine quadratische Interpolation (drei Punkte) auf einem äquidistanten Gitter ist eine dritte Ordnung Interpolation.

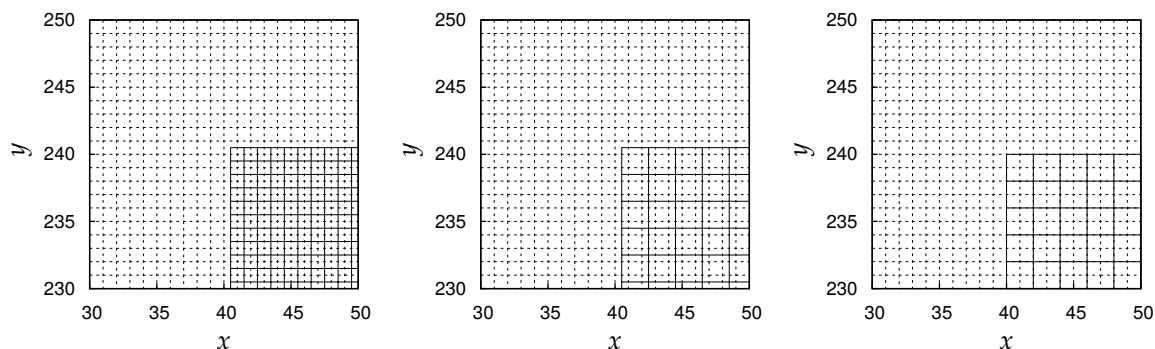


Abb. 2.11: Zoom in Gitter #1 (links), #2 (mitte) und #3 (rechts): ---, Hintergrundgitter \mathcal{G}_1 ; —, Gitter \mathcal{G}_2 .

Gitter	N_{x,\mathcal{G}_2}	N_{y,\mathcal{G}_2}	Δx	Δy	x -Shift	y -Shift	Q
#1	401	201	1	1	0.5	0.5	1
#2	201	101	2	2	0.5	0.5	2
#3	201	101	2	2	0	0	2

Tab. 2.7: Gitterparameter. Das Hintergrundgitter \mathcal{G}_1 besteht immer aus 481×481 Gitterlinien ($\Delta_s = 1$).

schallharter Körper nachgewiesen werden.

Gelöst wurden in allen Fällen die konservativen kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (CNSCAD-Methode) ohne Reibung ($\mu = 0$) und Wärmeleitung ($\tilde{k} = 0$). Die Gleichungen wurden mit den Referenzwerten $\rho_\infty, \rho_\infty a_\infty^2$ und a_∞ für die Dichte, den Druck und die Geschwindigkeit und bei den ersten zwei Testfällen mit der Gitterweite Δ des Referenzgitters als Längenskala entdimensionalisiert.

2-D akustischer Impuls. Bei dem ersten Testfall ist ein zweidimensionaler akustischer Impuls als Anfangsbedingung vorgesehen. Der Impuls wird in der Form eines Gaußimpulses in einem ruhenden Fluid, $\mathbf{u}_0 = (0, 0)$, mit konstanter mittlerer Dichte $\rho_0 = 1$ und Druck $p_0 = 1/\gamma$ bei $x_0 = 240$ und $y_0 = 300$ platziert. Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ lauten:

$$\begin{cases} p' = \rho' = \epsilon \exp[-\alpha((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)], \\ u' = v' = 0, \end{cases}$$

mit $\alpha = (\ln 2)/b^2$. Die Halbwertbreite des Gaußimpulses beträgt $b = 6$ und die Amplitude $\epsilon = 0.001$. Der Fall wurde auf allen drei Gittern jeweils mit zweiter, vierter und sechster Ordnung in der Interpolation simuliert. Dabei wurden jeweils die Lösung bei $t = 150$ und der Fehler relativ zur Lösung auf nur einem Gitter mit 481×481 Linien (Referenzlösung) betrachtet.

Abbildung 2.12 zeigt die Ergebnisse für das Gitter #1. Für die quadratische Interpolation (Stencil $N = 3$) sind Reflexionen im Hintergrundgitter \mathcal{G}_1 und ein kleiner Fehler im Gitter \mathcal{G}_2 zu erkennen. Der Fehler liegt jedoch fast zwei Größenordnungen unter der Amplitude der akustischen Welle. Für die Interpolation mit Stencils der Größe $N = 5$ und $N = 7$ reduziert sich der Fehler ($< 1\%$ der Druckamplitude p') deutlich und ist mit den dargestellten Konturlinien nur noch unmittelbar am Gitterinterface zu visualisieren. Wird die Gitterweite des Gitters \mathcal{G}_2 verdoppelt (Gitter #2), steigt der Fehler um eine Größenordnung an (20% der Druckamplitude) und kann nur marginal durch die Erhöhung der Interpolationsordnung verringert werden,

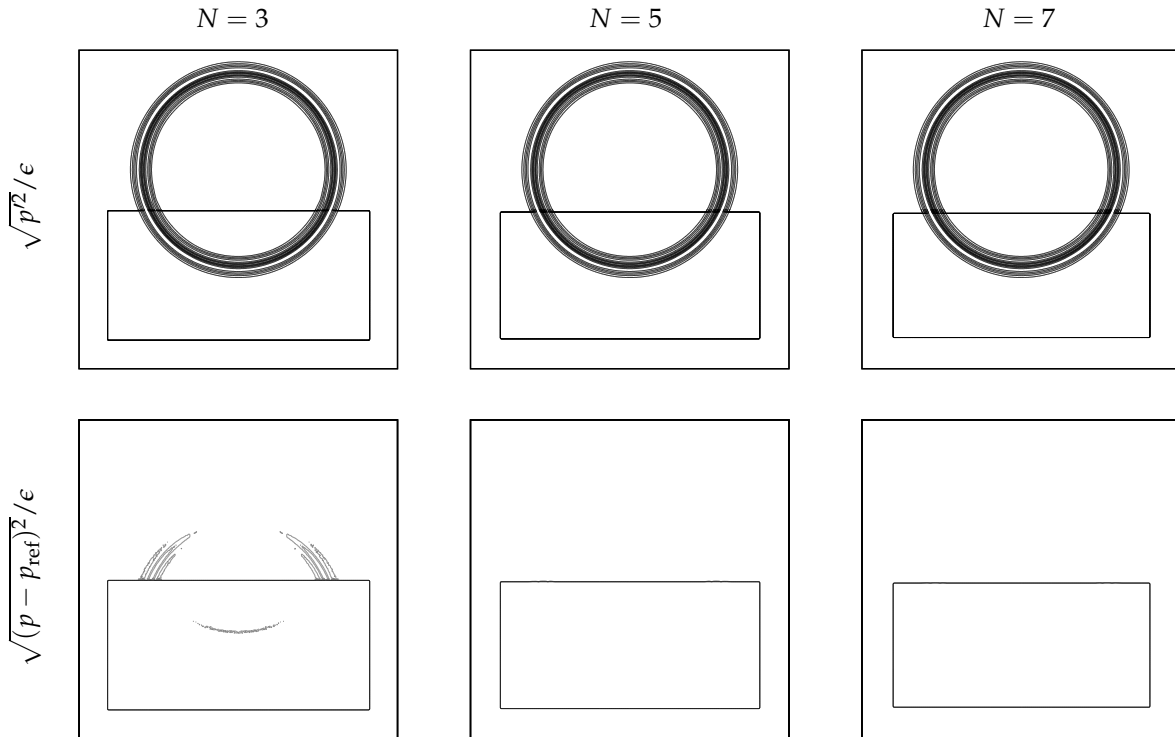


Abb. 2.12: Gitter #1 mit der Interpolationsordnung von: drei (*links*), fünf (*mitte*), sieben (*rechts*). Normierte Druckfluktuation bei $t = 150$ (*oben*): —, Konturlinien bei 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 und 0.05. Fehler relativ zur Referenzlösung auf einem Gitter (*unten*): —, Konturlinien bei 0.0005 und 0.001. Das innere Rechteck kennzeichnet den Rand des Gitters \mathcal{G}_2 .

siehe Abbildung 2.13. Wird der Gitterversatz von Gitter #2 auf Null reduziert (Gitter #3, in diesem Fall kommt es zu keiner Interpolation, sondern nur zu einem Datenaustausch zwischen den Gittern), zeigt sich das gleiche Verhalten (Abbildung 2.14). Dies deutet darauf hin, dass der Fehler primär durch den Sprung in der Gitterweite und die damit erhöhte Dispersion begründet ist. Der Interpolationsfehler liefert im Fall von Gitter #2 einen sehr kleinen Beitrag zum Gesamtfehler.

2-D kompressibler Wirbel. Nun wird die Konvektion eines zweidimensionalen kompressiblen Wirbels in einer uniformen Strömung, $\mathbf{u}_0 = (0, M_y)$, mit $M_y = -0.5$ sowie konstanter mittlerer Dichte, $\rho_0 = 1$, und Druck, $p_0 = 1/\gamma$, betrachtet. Der Wirbel wird wie der Impuls bei $x_0 = 240$ und $y_0 = 300$ positioniert. Die Anfangsbedingungen für die Fluktuationen bei $t = 0$ sind:

$$\begin{cases} p' = \rho' = 0, \\ u' = \epsilon (y - y_0) \exp[-\alpha ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)], \\ v' = -\epsilon (x - x_0) \exp[-\alpha ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)], \end{cases}$$

wobei $\alpha = (\ln 2)/b^2$. Die Amplitude, ϵ , ist 0.01 und ein Maß für die Stärke des Wirbels, die Halbwertsbreite beträgt $b = 9$. Im Gegensatz zum akustischen Impuls ist es bei diesem Testfall entscheidend, welche Gleichungen im physikalischen Gebiet gelöst werden. Während das nichtlineare Ausgleichsphänomen, der eintretende Druckabfall im Wirbelzentrum, von den Euler-Gleichungen beschrieben wird, ist dies für die LEE nicht der Fall. Werden die LEE gelöst, kommt es zu keinem Abfall des Drucks im Wirbelzentrum und keiner initialen Druckwelle als

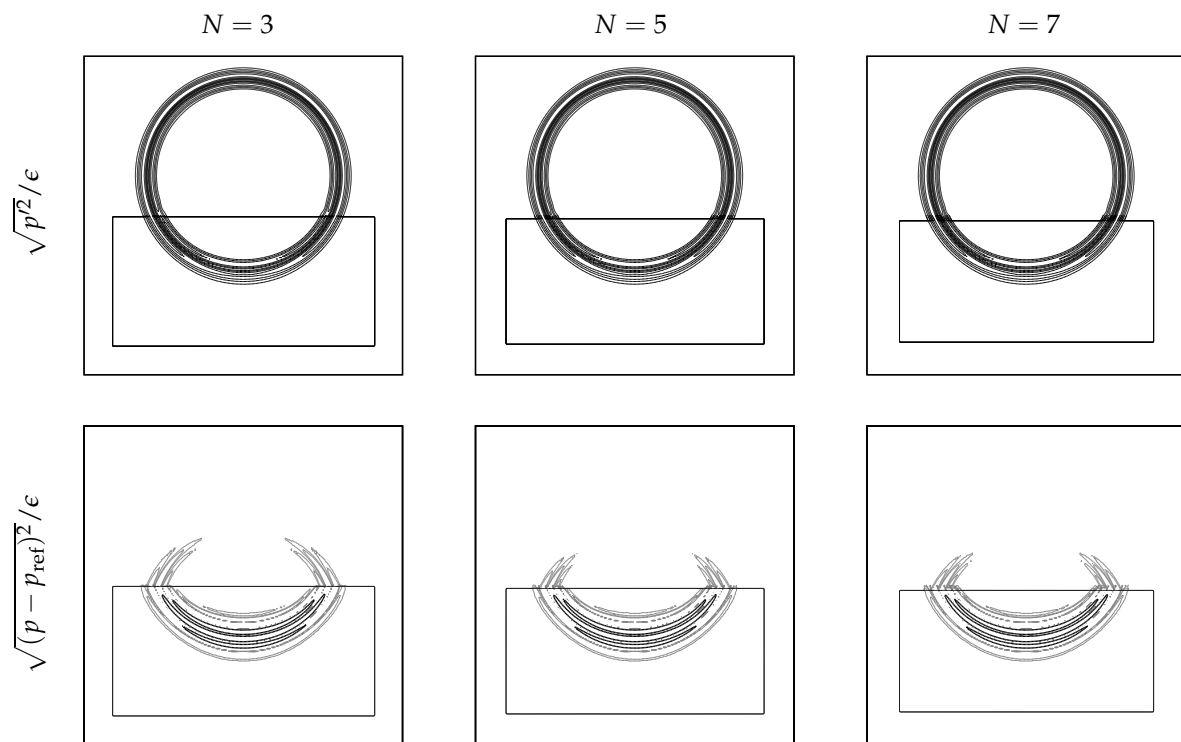


Abb. 2.13: Gitter #2: Konturlinien wie in Abbildung 2.12. Bei der Darstellung des Fehlers (*unten*) wurde noch eine Konturlinie bei 0.01 (—) hinzugefügt.

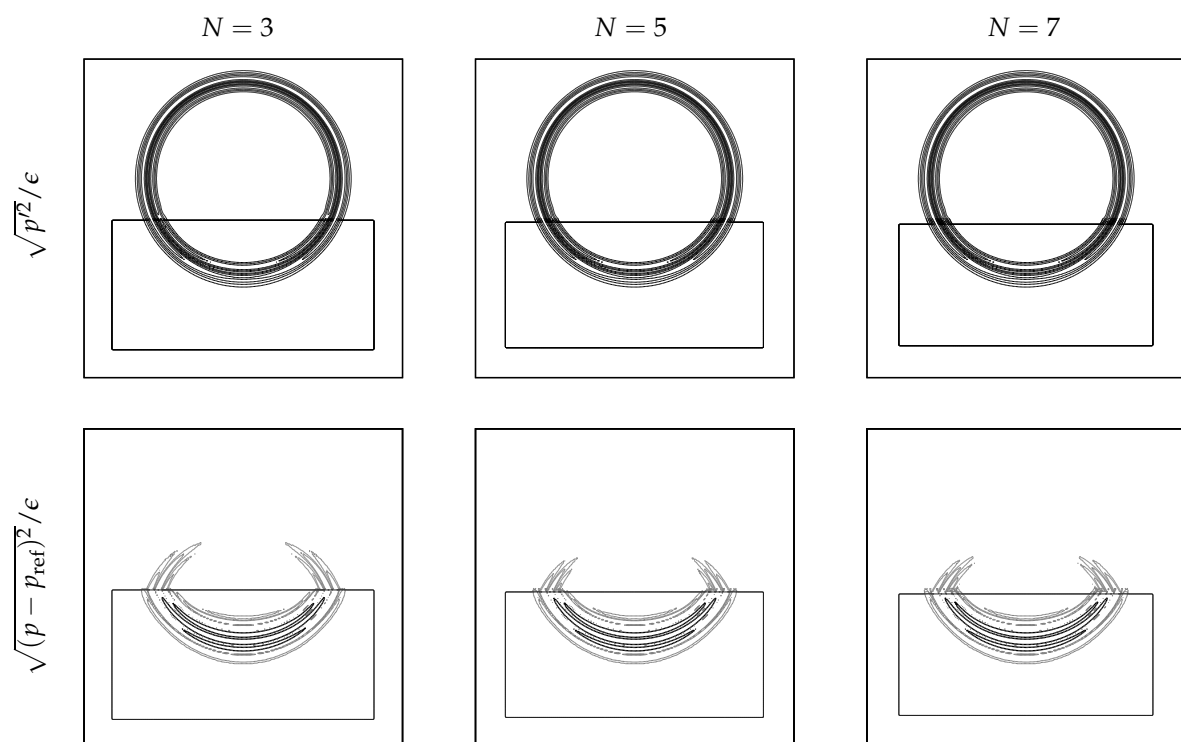


Abb. 2.14: Gitter #3: Konturlinien wie in Abbildung 2.13.

Resultat dieses Ausgleichs.

Abbildung 2.15 zeigt den Betrag der Druckfluktuation bei $t = 300$ normiert mit dem Druckabfall im Wirbelzentrum $|p(x = 240, y = 285, t = 30) - p_0| \simeq 0.0028$ für die Simulation auf Gitter #1. Die Druckwelle vor dem oberen Rand ist das Resultat nicht exakt angepasster Anfangsbedingungen und tritt identisch in der Referenzlösung auf nur einem Gitter auf, weswegen sie bei der Betrachtung des Fehlers verschwindet. Beim Durchgang des Wirbels durch das Überlappungsgebiet werden im Fall eines 3×3 Interpolationsstencils unphysikalische Druckwellen mit einer Amplitude von 5% des Druckabfalls im Wirbelzentrum und damit in der Größenordnung der Initialisierungswelle generiert. Für ein 5×5 Stencil reduziert sich der Fehler auf unter 0.2%, für $N = 7$ wird wie beim Impuls-Testfall keine weitere Verbesserung erzielt. Der Fehler der Berechnungen auf Gitter #2, dargestellt in Abbildung 2.16, ist wie erwartet etwas größer und lässt sich durch das Erhöhen der Interpolationsordnung nur marginal verringern. Für $N = 7$ steigt der Fehler sogar gegenüber $N = 5$ wieder etwas an. Eine Ursache dafür könnte die mit der Ordnung ebenfalls erhöhte Neigung zu Oszillationen der Lagrange-Polynome sein (Runge Phänomen), welche besonders im Fall asymptotisch konstanter Lösungen, wie es hier der Fall ist, auftreten. Dass der Fehler auch hier wieder primär durch die Verdopplung der Gitterweite und nicht durch die Interpolation selbst verursacht wird, zeigt der Vergleich mit der Lösung auf Gitter #3 in Abbildung 2.17. Für Gitter #3 ist keine Interpolation erforderlich und dennoch tritt ein deutlicher Fehler auf. Da mit der Überlappungsbreite auch die Anzahl der Zellen für den Informatoinsaustausch zunimmt, sinkt der Fehler mit zunehmender Überlappung auch für den Fall ohne Interpolation.

Abschließend zeigt der Vergleich von Abbildung 2.18 mit Abbildung 2.15, dass der Fehler im Fall von impliziter Interpolation größer ist als bei expliziter Interpolation.

Für $N = 5$ wurden im Fall expliziter Interpolation ein sehr geringer Interpolationsfehler festgestellt. Eine Erhöhung der Ordnung auf $N = 7$ erscheint nicht sinnvoll. Bei allen nun folgenden Simulationen wurde daher eine Interpolation fünfter Ordnung verwendet.

2-D akustische Quelle mit zwei Zylindern. Bei diesem Testfall wird die Brechung akustischer Wellen an zwei soliden Zylindern betrachtet. Dies ist ein gutes Problem zum Testen der Randbedingungen und Interpolationsschemata an gekrümmten Grenzen. Die Quelle wird in ein ruhendes Fluid, $\mathbf{u}_0 = (0, 0)$, im Ursprung des Koordinatensystems platziert. Die mittlere Dichte, $\rho_0 = 1$, und der mittlere Druck, $p_0 = 1/\gamma$, sind jeweils konstant. Dazu wird zu der rechten Seite der Energiegleichung der Quellterm S addiert:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \mathcal{RHS}(E) + S, \quad (2.6)$$

wobei

$$S = \epsilon \exp[-\alpha(x^2 + y^2)] \sin(\omega t) \times \min \left\{ 1.0, \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right\},$$

mit $\alpha = (\ln 2)/b^2$, $b = 0.2$ und $t_0 = 4$. Der Term rechts dient dazu die Quellstärke bis zur Zeit $t = t_0$ kubisch auf ihren Maximalwert $\epsilon = 1$ ansteigen zu lassen. Die Wellenzahl ist $k = 4\pi$, die Kreisfrequenz, $\omega = a_0 k$, folgt dann mit $a_0 = 1$ zu 4π und die Wellenlänge ist $\lambda = 2\pi/k = 0.5$. Die Position des ersten Zylinders ist $(x_1, y_1) = (0, 4)$ und sein Durchmesser beträgt $D_1 = 2\lambda$, die des zweiten ist $(x_2, y_2) = (0, -4)$ und sein Durchmesser beträgt $D_2 = \lambda$. Für die gegebenen Anfangsbedingungen existiert eine analytische Lösung [69], deren Lösung allerdings nicht trivial ist. Sherer [84] zeigte jedoch, dass die Lösung der linearisierten akustischen Quelle eine sehr gute Approximation der exakten Lösung liefert. Dabei folgt das totale Feld aus

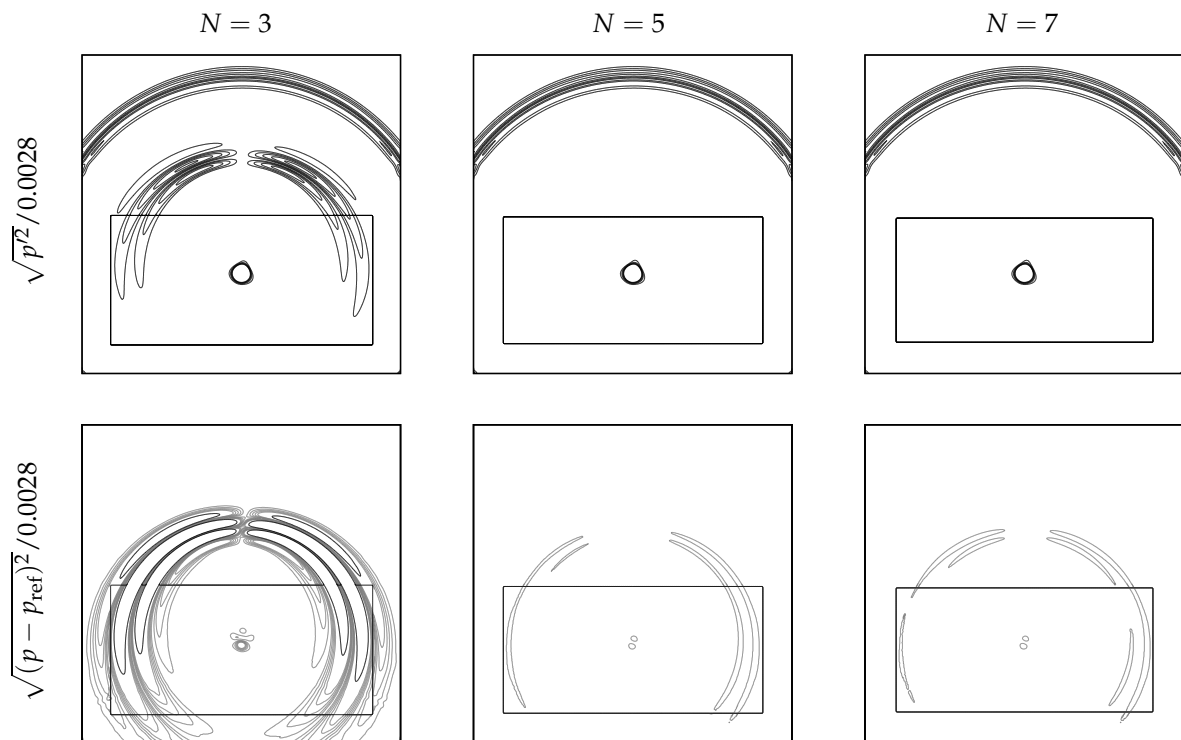


Abb. 2.15: Gitter #1 mit der Interpolationsordnung von: drei (*links*), fünf (*mitte*), sieben (*rechts*). Druckfluktuation bei $t = 300$ normiert mit dem Druckabfall im Wirbelzentrum $|\min\{p - p_0\}| \simeq 0.0028$ bei $t = 30$ (*oben*): —, Konturlinien bei 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 und 0.05. Fehler relativ zur Referenzlösung auf einem Gitter (*unten*): —, Konturlinien bei 0.001, 0.002, 0.003, 0.004 und 0.005; —, 0.01. Das innere Rechteck kennzeichnet den Rand des Gitters \mathcal{G}_2 .

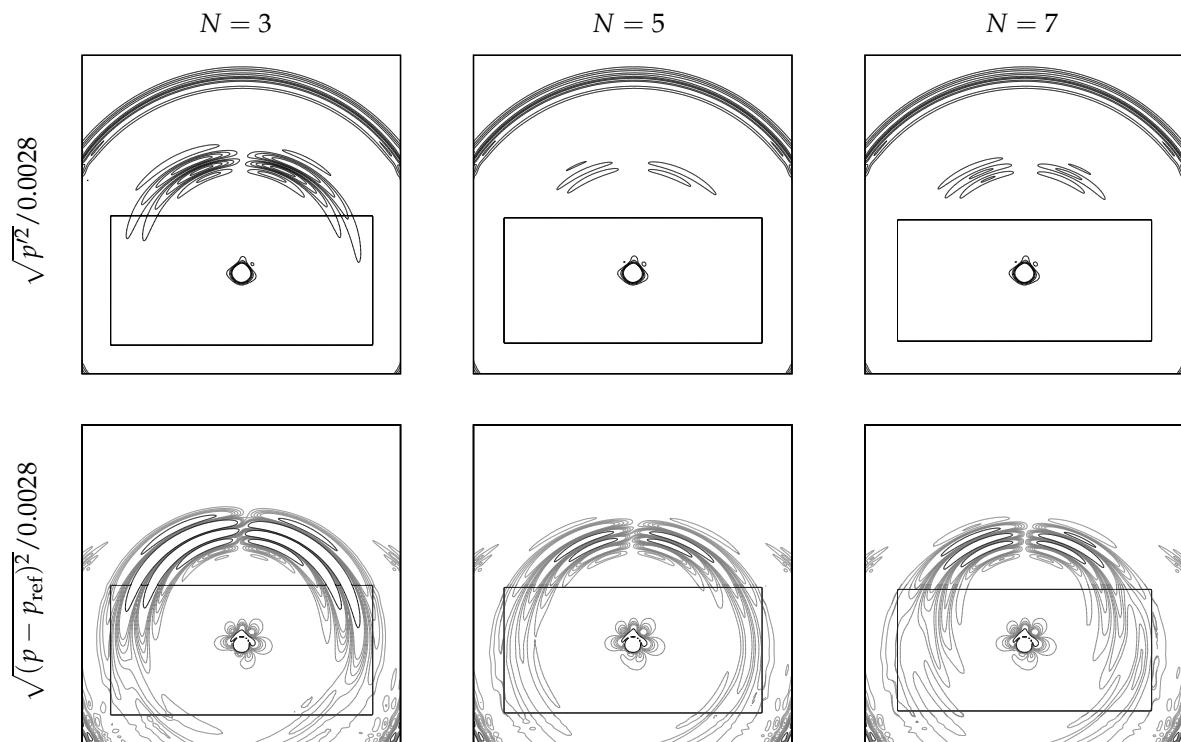


Abb. 2.16: Gitter #2: Konturlinien wie in Abbildung 2.15.

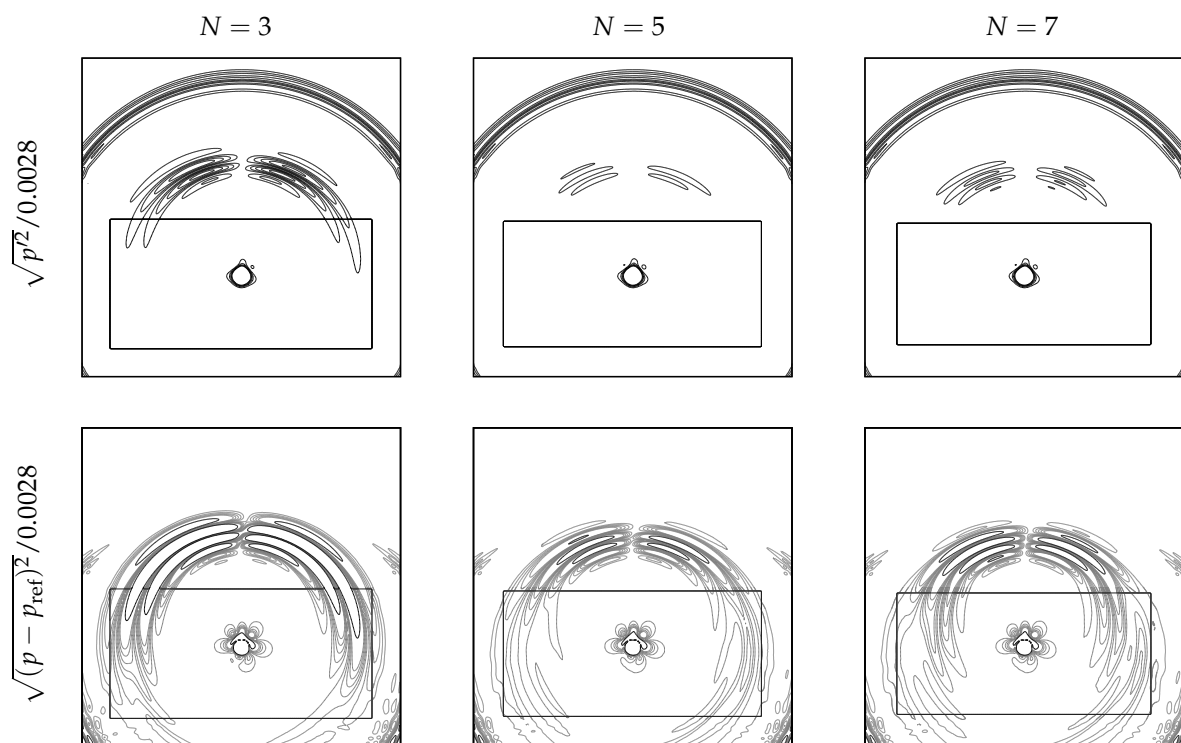


Abb. 2.17: Gitter #3: Konturlinien wie in Abbildung 2.15.

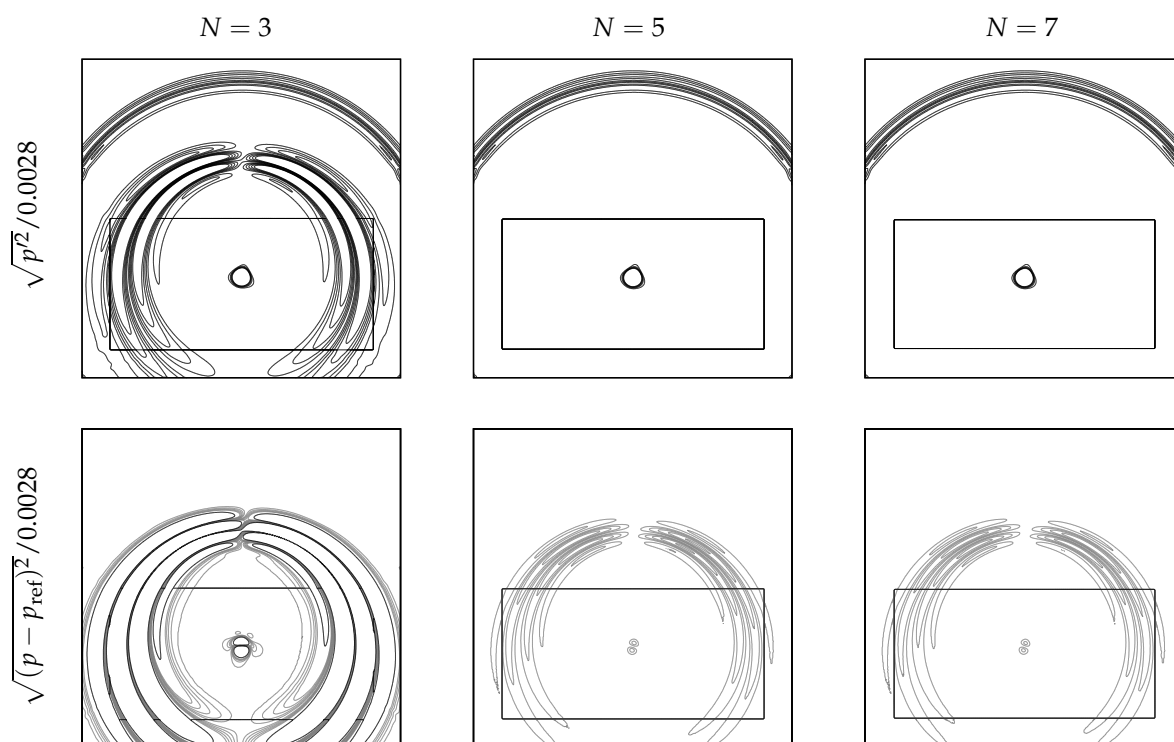


Abb. 2.18: Gitter #1 mit *impliziter* Interpolation: Konturlinien wie in Abbildung 2.15.

der Summe aus einfallendem (incident) Feld und an den Zylindern gebrochenen (scattered) Feldern:

$$\Phi = \Phi^{\text{inc}} + \sum_{i=1}^M \Phi_i^{\text{sc}},$$

wobei die lineare Quelle

$$\Phi^{\text{inc}}(r_s, k) = -\frac{k}{4} H_0^{(1)}(kr_s) \quad (2.7)$$

ist, mit der radialen Distanz vom Quellzentrum $r_s = [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2]^{1/2}$ und der Wellenzahl $k = \omega/a_\infty$. Das gebrochene Feld ist jeweils für den Zylinder i gegeben mit:

$$\Phi_i^{\text{sc}}(r_i, \theta_i, k) = A_{0i} H_0^{(1)}(kr_i) + \sum_{n=1}^N H_n^{(1)}(kr_i) [A_{ni} \cos(n\theta_i) + B_{ni} \sin(n\theta_i)] \quad (2.8)$$

wobei $r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$; $H_n^{(1)}$ ist die Hankelfunktion erster Art der Ordnung n und die Genauigkeit der Lösung wird über den Parameter N bestimmt (für $N \rightarrow \infty$ ist die Lösung exakt). Die Koeffizienten A_{ni} und B_{ni} folgen aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems, auf das aus Gründen der Lesbarkeit hier nicht weiter eingegangen wird, Details dazu sind aber in [84] zu finden. Die analytische Lösung wurde in MATLAB implementiert und mit der Genauigkeit $N = 50$ berechnet. Sherer zeigte, dass der Fehler für $N = 50$ hinreichend klein wird [84]. Sie dient als Referenzlösung für den Vergleich in Abbildung 2.19.

Die Simulationen erfolgten in der gewohnten Weise dimensionslos, der Durchmesser D_1 diente

als Längenskale. Das Hintergrundgitter besteht aus 1601×2401 Gitterlinien ($\Delta x = \Delta y = 0.02\lambda$), das Gitter um den oberen Zylinder hat einen inneren Radius von $r_1 = 0.5$ und besteht aus $N_\theta \times N_r = 629 \times 51$ Linien, das um den unteren Zylinder hat einen inneren Radius von $r_2 = 0.25$ und 629×76 Linien. Bei beiden Gittern liegt das Interface zum Hintergrundgitter bei $r_i = 1$, sodass sich für beide Zylinder die maximale Gitterweite in Umfangsrichtung von $\Delta s_{\max} = 2\pi r_i / N_\theta \simeq 0.02\lambda$ und die konstante radiale Gitterweite von $\Delta r = 0.02\lambda$ ergibt. Die Interpolation war von der Ordnung $N = 5$. Der Rand wurde mit einer Dämpfungszone der Länge $l_{\text{sp}} = 4\lambda$ versehen.

Das Druckfeld in Abbildung 2.19 zeigt bei beiden Zylindern keinerlei numerische Artefakte im Bereich der Gitterüberlappung. In der Abbildung rechts ist die Null-Ebene der Druckfluktuation in der Umgebung des oberen und unteren Zylinders dargestellt. Die Übereinstimmung der numerischen Simulation mit der analytischen Lösung ist ausgesprochen gut. Dies bestätigt auch die Schnittdarstellung 3.7 (a) in Kapitel 3.1.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass das oben beschriebene konservative Verfahren für die Vorhersage akustischer Felder in Anwesenheit schallharter Körper bei einer Interpolation mit $N = 5$ geeignet ist.

2.4 Forcing

Die Anwendung eines Forcings, d.h. die Addition artifizierlicher Kraftterme \mathcal{F} zu den \mathcal{RHS} -Termen, erfolgt vor der zeitlichen Integration der Navier-Stokes-Gleichungen in der Form $\partial_t \mathbf{U}_i = \dots + \mathcal{F}(\mathbf{U})$. Mit diesem Ansatz wurden in dieser Arbeit artifizielle Dämpfungszonen zur Unterdrückung nicht physikalischer Reflexionen, Einlassrandbedingungen und Störungen numerisch umgesetzt.

2.4.1 Dämpfungszonen

Diverse Untersuchungen zeigten [85, 86, 74], dass wenn starke Wirbelstärke-Moden das Berechnungsgebiet verlassen, trotz der speziellen Fernfeldrandbedingungen unphysikalische Reflexionen entstehen, welche durch die oben aufgeführten Maßnahmen nicht ausreichend gedämpft werden können. In solchen Fällen starker Wirbelstärke-Moden wird deshalb der folgende Dämpfungsterm zu System (2.4) hinzugefügt:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \dots - \sigma_i (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\text{ref}})_i \quad (2.9)$$

mit der Referenzlösung \mathbf{U}_{ref} und

$$\sigma_i = \sigma(x_i, y_i, z_i) = \sigma_{\max,x} \left(\frac{x_i - x_0}{l_{\text{sp},x}} \right)^2 + \sigma_{\max,y} \left(\frac{y_i - y_0}{l_{\text{sp},y}} \right)^2 + \sigma_{\max,z} \left(\frac{z_i - z_0}{l_{\text{sp},z}} \right)^2,$$

wobei die Dämpfungsfunktion $\sigma(x_i)$ bei $x_{\max} = x_0 + l_{\text{sp},x}$ den Wert des Dämpfungskoeffizienten $\sigma_{\max,x}$ annimmt; x_0 und x_{\max} sind die Positionen des Beginns und des Endes der Dämpfungszone in x -Richtung. Der Dämpfungsterm ist nur in dem Bereich $x_0 \leq x \leq x_{\max}$ der Länge $l_{\text{sp},x}$ vor dem Rand des Berechnungsgebiets wirksam und drückt die Lösung in diesem Bereich in Richtung \mathbf{U}_{ref} (häufig wird die mittlere Strömung $\bar{\mathbf{U}}$ als Referenzlösung gewählt); die Dämpfungsstärke nimmt ab der Position x_0 parabolisch mit x zu (siehe schematische Darstellung in Abbildung 2.20). Der Dämpfungskoeffizienten σ_{\max} ist aus Gründen der Stabilität für alle konservativen Variablen gleich zu wählen [87]. Dämpfungszonen arbeiten perfekt für Entropie-Moden, führen aber zu einer Kopplung zwischen akustischen und Wirbelstärke-Moden [88].

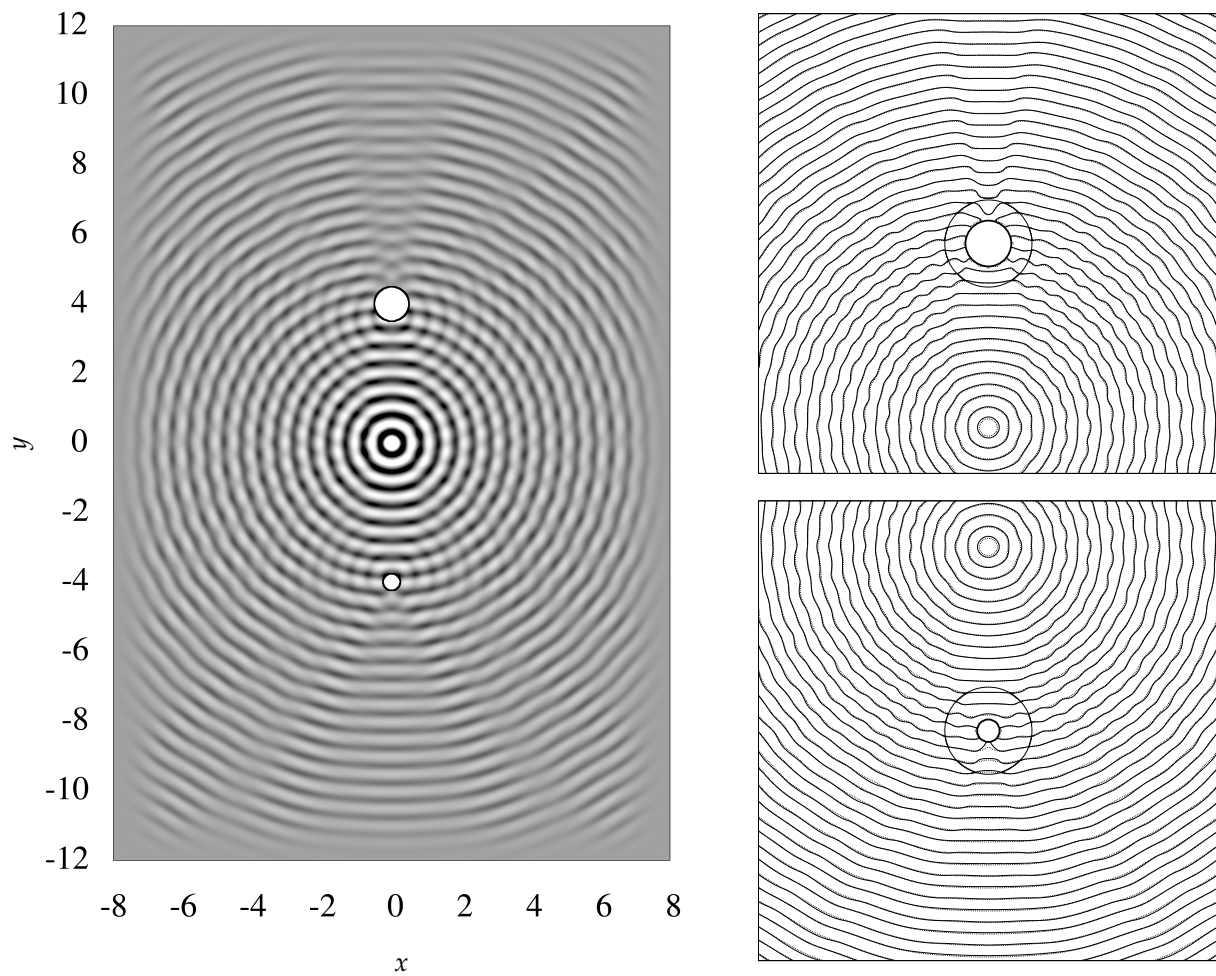


Abb. 2.19: Links: Druckfeld zu der Zeit $t = 30$; Farbintervall von -5×10^{-3} bis 5×10^{-3} . Rechts: Konturlinie bei $p' = 0$ für $-1 \leq y \leq 9$ (oben) und $-9 \leq y \leq 1$ (unten): —, Simulation; - - -, analytische Lösung ($\Re\{\Phi\}$). Die dünne Linie um den Zylinder kennzeichnet jeweils das Gitterinterface bei $r_i = 1$.

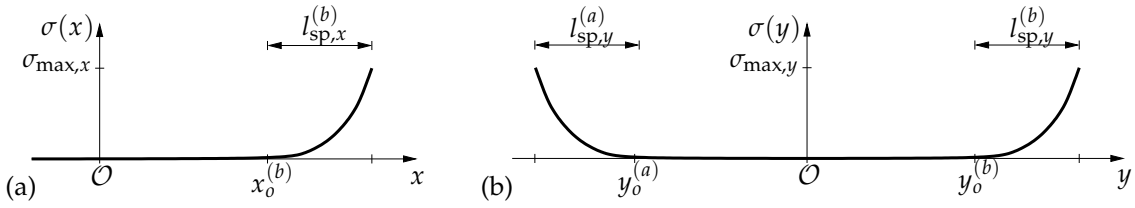


Abb. 2.20: Exemplarischer Verlauf der Dämpfungszone: (a) $\sigma(x)$, (b) $\sigma(y)$.

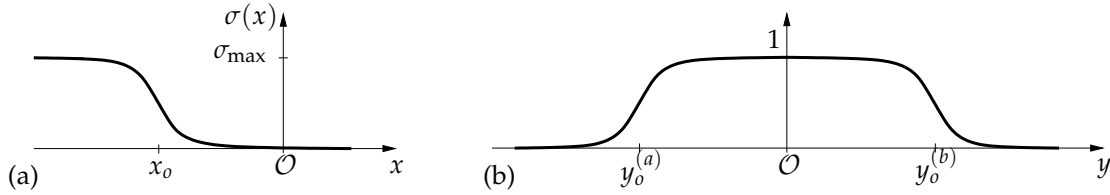


Abb. 2.21: Verlauf der Einlasszone: (a) in x -Richtung und (b) in y -Richtung.

Aus diesem Grund ist es wichtig, die Dämpfungsfunktion nicht zu schnell ansteigen zu lassen, da sonst von der Dämpfungszone selbst Reflexionen generiert werden. Mani [88] zeigte, dass quadratisch ansteigende Dämpfungszonen den besten Kompromiss zwischen starker Dämpfung und geringer Reflexion an der Zone darstellen. Für die Wahl der Länge der Dämpfungszone, gibt Mani die Empfehlung, dass die Mindestlänge zur Dämpfung von Schallwellen der Wellenlänge λ etwa $l_{sp}/\lambda \approx 0.5$ bis 2 sein sollte und für eine effektive Dämpfung von Wirbeln mit dem Durchmesser D_v die Zonenlänge $l_{sp} > 2D_v$ beträgt.

2.4.2 Einlass-Forcing

Ähnlich wie bei der Freistrahlsimulation von Freund [14], wird das Geschwindigkeitsprofil am Düsen einlass und die Hintergrundströmung mithilfe eines zusätzlichen Kraftterms, ganz analog zur Dämpfungszone oben im Text, aufgeprägt:

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \dots - \sigma_i (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{target}})_i \quad (2.10)$$

Dabei beschreibt $\mathbf{u}_{\text{target}}$ den Soll-Verlauf von ρ , \mathbf{u} und T bzw. E am Einlass. Die räumliche Ausdehnung dieser Einlass-Zone, schematisch dargestellt in Abbildung 2.21 (a), wird durch eine tanh-Funktion definiert:

$$\sigma(x_i) = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{x_i - x_o}{b}\right) \right], \quad (2.11)$$

wobei σ_{\max} die maximale Stärke der Zone ist und x_o das Ende der Zone definiert ($\sigma(x_o) = \sigma_{\max}/2$); b ist ein Maß für die Flachheit des Stärkeabfalls am Ende der Zone. Mit zunehmendem b fällt die Zone räumlich langsamer auf null ab. Soll die Ausdehnung der Einlass-Zone auch in y -Richtung begrenzt werden (Abbildung 2.21 (b)), ist Gleichung (2.11) wie folgt zu erweitern:

$$\sigma(x_i, y_i) = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{x_i - x_o}{b}\right) \right] \times \frac{1}{2} \left[\tanh\left(\frac{y_i - y_o^{(a)}}{b_y}\right) - \tanh\left(\frac{y_i - y_o^{(b)}}{b_y}\right) \right],$$

wobei $y_o^{(a)}$ und $y_o^{(b)}$ das untere respektive obere Ende der Zone definieren.

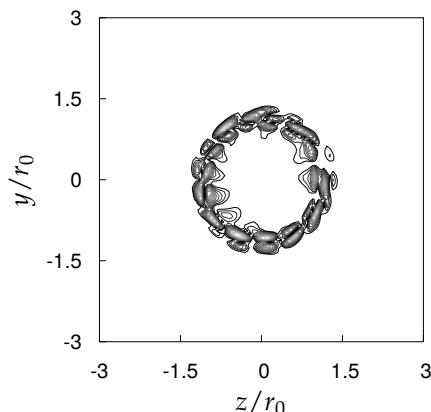


Abb. 2.22: Isokonturen der Wirbelstärkemagnitude, $|\omega_x|$, in der y - z -Ebene bei $x = x_0$ für ein typisches Wirbelringforcing mit $\mathcal{N}_m = 9$. Konturebenen von min: $|\omega_x|r_0/U_j = 0.01$ (dunkel) bis max: 0.1 (hell).

2.4.3 Wirbelring-Forcing

Zur Entwicklung eines turbulenten Freistrahls wird die zunächst laminare Scherschicht mithilfe einer von Bogey *et al.* [89] vorgeschlagenen Anregungsprozedur (Tripping) gestört. Dazu wird ein random pulsierender Wirbelring mit Radius $r_{0,jl}$ bei $x = x_0$ in der Scherschicht platziert. Die Störungen werden generiert, indem der Basiswirbelring mit der azimuthalen Funktion $\cos(m\theta)$, wobei $\theta = \arctan(z/y)$ ist, kombiniert und zu jedem Zeitschritt zu den \mathcal{RHS} -Termen der Geschwindigkeitskomponenten superpositioniert wird ($q_t := \partial_t q$):

$$\begin{bmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{bmatrix} = \cdots + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_j} \sum_{l=1}^{\mathcal{N}_l} \alpha_j U_j \sum_{m=0}^{\mathcal{N}_m} \epsilon_m \cos(m\theta + \varphi_m) \begin{bmatrix} u_{\text{ring}} \\ v_{\text{ring}} \\ w_{\text{ring}} \end{bmatrix}_{jl}, \quad (2.12)$$

wobei $\epsilon_m \in [-1, 1]$ und $\varphi_m \in [0, 2\pi]$ uniforme randome Variablen in der Zeit sind. Sie stehen jeweils mit der Amplitude und der Phase einer jeden Störungs-Mode in Zusammenhang und werden in jedem Zeitschritt neu berechnet. \mathcal{N}_j entspricht der Anzahl an Freistrahlen (Jets) und \mathcal{N}_l der Anzahl an Scherschichten (Layers) pro Freistrahle (Bei der hier untersuchten Zweistromdüse sind es zwei Freistrahlringe mit jeweils einer inneren und einer äußeren Grenzschicht). Die Anzahl der Moden, \mathcal{N}_m , hängt von der Reynoldszahl ab und ist für $Re_D = 3600$ bis 4×10^5 im Bereich von $\mathcal{N}_m = [9, \dots, 16]$ zu wählen [22, 90, 91]. Das gleiche gilt für die Amplitude, $\alpha \in [0.01, 0.007]$, im gegebenen Re_D -Wertebereich. Die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten des Basiswirbelrings sind für $r = \sqrt{y^2 + z^2} \neq 0$ jeweils gegeben mit

$$\begin{bmatrix} u_{\text{ring}} \\ v_{\text{ring}} \\ w_{\text{ring}} \end{bmatrix}_{jl} = 2 \frac{r_{0,jl}}{r \Delta_0} \exp \left[-\ln(2) \left(\frac{\Delta(x, r)}{\Delta_0} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} r - r_{0,jl} \\ y(x_0 - x)/r \\ z(x_0 - x)/r \end{bmatrix},$$

wobei $\Delta(x, r)^2 = (x - x_0)^2 + (r - r_{0,jl})^2$ ist. Bei $\Delta(x, r) = \Delta_0$ ist die Wirbelgeschwindigkeit maximal, die azimuthale Geschwindigkeit, u_θ , des Wirbelrings ist null. Δ_0 wird im Bereich der Impulsverlustdicke gewählt ($\Delta_0 \simeq \delta_\theta$). Das Wirbelstärkefeld eines typischen Wirbelringforcings ist in Abbildung 2.22 exemplarisch für $\mathcal{N}_m = 9$ dargestellt.

2.5 Methoden zur Wirbelidentifikation

Da einfache Bedingungen wie beispielsweise die Existenz eines lokalen Druckminimums nicht immer eindeutig gleichbedeutend mit dem Vorhandensein eines Wirbels sind, wurden im Laufe der Jahre weitere Methoden zur Identifikation von Wirbeln entwickelt. Pierce *et al.* [92] fassen diese zusammen und bewerteten sie hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und Interpretation. Die Wahl des Identifikationskriteriums hängt dabei stark davon ab, wie ein Wirbel oder Wirbelgebiete definiert werden. Die Autoren fassen zusammen, dass die drei Kriterien (Δ, Q, λ_2) scharfe Λ -Wirbel darstellen. Für die in dieser Arbeit verwendeten Kriterien, folgt eine Kurzbeschreibung.

2.5.1 Komplexe Eigenwerte von ∇u

Nach Chong *et al.* [93] ist ein Wirbelkern ein Gebiet, in dem die Wirbelstärke stark genug ist, um zu bewirken, dass der Spannungstensor von Rotation dominiert wird. Dies impliziert, dass der Geschwindigkeitsgradiententensor, ∇u , komplexe Eigenwerte besitzt, was zu geschlossenen oder spiralförmigen Stromlinien führt. Dieses Kriterium wird nur für eine positive Diskriminante

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}\tilde{Q}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\tilde{R}\right)^2$$

des charakteristischen Polynoms $\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$ erfüllt. Allgemein ist $\tilde{Q} = Q - \frac{1}{3}P^2$, $\tilde{R} = R + \frac{2}{27}P^3 - \frac{1}{3}PQ$, $P = -I_{\nabla u} = -\nabla \cdot u$, $Q = II_{\nabla u}$ und $R = -III_{\nabla u} = -\det(\nabla u)$. Für inkompressible Strömungen wird $P = 0$ und die Berechnung von Δ vereinfacht sich entsprechend.

2.5.2 Positive zweite Invariante von ∇u

Für Hunt *et al.* [94] sind Wirbel stark wirbelnde Zonen mit Wirbelstärke. Sie fanden heraus, dass es in turbulenten Strömungen zu einer rotationsfreien Spannung/Dehnung von Wirbeln kommt. Um wirbelnde Zonen eindeutig als Wirbel zu identifizieren, sollten zwei Kriterien erfüllt sein: (i) Der Druck sollte in der Zone ein lokales Minimum aufweisen und (ii) die rotationsfreie Spannung des Wirbels sollte im Vergleich zur Wirbelstärkemagnitude klein sein. Um dies zu Quantifizieren, nutzten sie die zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors, ∇u , welche gegeben ist mit

$$Q = II_{\nabla u} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.13)$$

Für eine inkompressible Strömungen reduziert sie sich zu

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\Omega_{ij}\|^2 - \|S_{ij}\|^2),$$

wobei $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ und $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ der symmetrische und antimetrische Anteil von ∇u ist. Das Kriterium $Q > 0$ beschreibt ein Gebiet, in dem die Euklidische Norm des Rotationstensors, Ω_{ij} , größer ist als die des Scherspannungstensors S_{ij} ; also die Rotation die Scherung in allen Raumrichtungen überwiegt. Für die Praxis ist die Bedingung $Q > Q_{th}$ besser geeignet als allein ein positives Vorzeichen von Q . Hunt *et al.* [94] schlagen vor, dass als

Schwellwert $Q_{th} = Q_{rms}$ gewählt werden sollte. Eindeutigkeit hinsichtlich der Existenz eines Wirbelkerns liegt jedoch erst vor, wenn $Q > Q_{th}$ und $p < p_{th}$, wobei die Wahl $p_{th} = \langle p \rangle$ als sinnvoll erscheint. Ein Vorteil des Q -Kriteriums gegenüber den anderen ist, dass es auch in zweidimensionalen Strömungen zur Detektion von Wirbeln herangezogen werden kann.

2.5.3 Zwei negative Eigenwerte von $\Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj}$

Da lokale Druckminima auch durch instationäre Dehnung des Strömungsfeldes auch ohne Wirbelbildung entstehen oder vorhandene Druckminima durch viskose Effekte eliminiert werden können, vernachlässigten Jeong & Hussain [95] diese Effekte bei der Wirbelidentifikation. Sie werten das Vorhandensein von Wirbelstärke und Galilei-Invarianz als Bedingung für einen Wirbelkern. Bildet man den Gradienten der Navier-Stokes-Gleichung, folgt nach weiteren Umstellungen und unter Vernachlässigung der Terme aufgrund von Wirbelstärketransport, rotationsfreier Spannung und viskosen Effekten die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = -(\Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj}).$$

Die Informationen über lokale Druckminima sind in der Hesse-Matrix für den Druck, $H(p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$ enthalten. Der Druck weist ein lokales Minimum auf, wenn zwei der drei reellen Eigenwerte des symmetrischen Tensors $(\Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj})$ negativ sind. Für die Ordnung der Eigenwerte $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ folgt das einfache Kriterium $\lambda_2 < 0$.

2.6 Mittelungsverfahren

Bei den untersuchten Fällen hier ist die mittlere Strömung nicht uniform. Die Mittelwerte der Strömungsgrößen des Lösungsvektors, \mathbf{U} , sind in diesem Fall ortsabhängig und müssen berechnet werden. In dieser Arbeit werden nur statistisch stationäre Strömungen simuliert. Nachdem sich die Strömung entwickelt hat, sind die Mittelwerte somit stationär und können mit dem zeitlichen Mittelwert abgeschätzt werden. Für statistisch stationäre Strömungen ist der zeitliche Mittelwert über das Zeitintervall T_{av} mit

$$\langle \mathbf{U}(x, y, z) \rangle^t \equiv \frac{1}{T_{av}} \int_{t_0}^{t_0+T_{av}} \mathbf{U}(x, y, z, t) dt \quad (2.14)$$

definiert. Ist die Strömung in eine oder mehrere Richtungen homogen, darf auch über diese Richtungen räumlich gemittelt werden. Der räumliche Mittelwert in zum Beispiel z -Richtung über den Bereich L_z ist definiert als

$$\langle \mathbf{U}(x, y, t) \rangle^z \equiv \frac{1}{L_z} \int_{z_0}^{z_0+L_z} \mathbf{U}(x, y, z, t) dz.$$

Zur Beschleunigung der Konvergenz wurde, wenn möglich, die Kombination aus zeitlicher und räumlicher Mittelung angewandt:

$$\langle \mathbf{U}(x, y) \rangle^{z,t} \equiv \frac{1}{T_{av} L_z} \int_{t_0}^{t_0+T_{av}} \int_{z_0}^{z_0+L_z} \mathbf{U}(x, y, z, t) dz dt. \quad (2.15)$$

Numerische Berechnung. Das Integral in Gleichung (2.14) wird mit der Summe über die Zeitebenen approximiert, für den Mittelwert über das diskretisierte Intervall $[t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_{N_i-2}, t_{N_i-1}]$

folgt dann:

$$\langle \mathbf{u}(x, y, z) \rangle^t \simeq \bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(N_t)} = \frac{1}{N_t} \sum_{n=0}^{N_t-1} \mathbf{u}_{i,j,k}^{(n)}$$

wobei $N_t = (t_{N_t-1} - t_0) / \Delta t_{av} = T_{av} / \Delta t_{av} + 1$ der Anzahl der Zeitebenen entspricht über die gemittelt wird. Die lokalen Mittelwerte zur Zeit $t_n = n \Delta t_{av} + t_0$ werden vom Startzeitpunkt t_0 für jeden Mittelungszeitschritt n während der Simulation berechnet über

$$\bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n)} = \frac{1}{n+1} \left[n \bar{\mathbf{u}}_{i,j,k}^{(n-1)} + \mathbf{u}_{i,j,k}^{(n)} \right] \quad \text{für } n = 0, \dots, N_t - 1 \quad (2.16)$$

wobei $\mathbf{u}^{(0)}$ des Strömungsfeld bei $t = t_0$ ist. Δt_{av} kann, muss aber nicht mit dem Simulationszeitschritt Δt übereinstimmen. Um den Mittelungsaufwand zu reduzieren ist es für die Wahl von Δt_{av} sinnvoll, wenn die Felder zur Zeit t und zur Zeit $t + \Delta t_{av}$ statistisch unabhängig sind (d.h. $\langle u'(t)u'(t + \Delta t_{av}) \rangle \approx 0$). Mithilfe eines charakteristischen Zeitmaßes (z.B. die „eddy turn over time“ oder die Zeit für die Konvektion eines Wirbels um seinen Radius $t_{vort} = r_{vort} / u_\infty$) kann eine Abschätzung erfolgen: $\Delta t_{av} \approx t_{vort} \approx 10 \dots 1000 \Delta t$. Gerade bei expliziten Zeitintegrationsverfahren ist der Simulationszeitschritt sehr klein. Ein Mittelungszeitschritt in der Größenordnung von Δt würde den Mittelungsaufwand in diesem Fall erhöhen ohne die Konvergenz zu beschleunigen.

Die Approximation von Gleichung (2.15) lautet

$$\langle \mathbf{u}(x, y) \rangle^{z,t} \simeq \bar{\mathbf{u}}_{i,j}^{(N_z, N_t)} = \frac{1}{N_t N_z} \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \mathbf{u}_{i,j,k}^{(n)}$$

und analog zu Gleichung (2.16) erhält man die Vorschrift zur Mittelung simultan zur Simulation zu

$$\bar{\mathbf{u}}_{i,j}^{(N_z, n)} = \frac{1}{n+1} \left[n \bar{\mathbf{u}}_{i,j}^{(N_z, n-1)} + \frac{1}{N_z} \sum_{k=0}^{N_z-1} \mathbf{u}_{i,j,k}^{(n)} \right], \quad (2.17)$$

wobei $N_z = L_z / \Delta z + 1$ der Anzahl der (x, y) -Ebenen entspricht über welche gemittelt wird.

3 Modelle und numerische Methoden im Fernfeld

Für die Berechnung des Schalldrucks im akustischen Fernfeld Ω_{CAA} wurde eine zonale Methode basieren auf den linearisierten Euler-Gleichungen (Lösung eines Randwertproblems) und eine integrale Methode auf Basis der Ffowks-Williams & Hawkings Gleichung (Lösung einer akustischen Analogie) implementiert. Die erste Methode soll dazu dienen einen Gesamteindruck des Schallfeldes, basierend auf schnell und kostengünstig durchzuführenden zweidimensionalen Simulationen, zu erhalten. Im zweiten Schritt kann dann mithilfe des FWH-Lösers der Schall an beliebigen Punkten im dreidimensionalen Raum berechnet werden.

3.1 Zonale Methode basierend auf den linearisierten Euler Gleichungen

Ein einfacher Ansatz das Schallfeld zu berechnen ist, im akustischen Nahfeld (Ω_{CFD} in Abb. 1.5) die Navier-Stokes-Gleichungen (NSE) und im akustischen Fernfeld (Ω_{CAA} in Abb. 1.5) die linearisierten Euler-Gleichungen (LEE) zu lösen. Folgt man Tam [66] S.298ff. nähert sich im Fernfeld die NSE-Lösung der Euler-Lösung an, sodass dort die wesentlich günstiger zu lösenden Euler-Gleichungen verwendet werden können. Dazu werden die Variablen p' (oder ρ') und \mathbf{u}' an $(N - 1)/2$ Gitterlinien am Rand des NSE-Gebiets zu jedem Zeitschritt Δt_{LEE} abgespeichert; N ist dabei die Größe des Zentral-Differenzen Verfahrens im LEE-Gebiet. Im zweiten Schritt werden die abgespeicherten Variablen dann als Randbedingung der LEE-Simulation zu jedem Zeitschritt eingelesen. Entscheidenden Einfluss auf die Qualität der Lösung nimmt die gittertechnische und numerische Gestaltung der Austauschzone (Interface) zwischen NSE-Gebiet und LEE-Gebiet.

Zu den Ersten, die diesen Ansatz testeten gehören Freund *et al.* [57]. Dabei zeigte sich, dass Gitterstreckung und Interpolation am Interface Fehler verursachen und die Gitter daher möglichst uniform und ähnliche Gitterweiten in diesem Gebiet haben sollten. Shih *et al.* [96] zeigten, dass die Berechnungskosten der hybriden Prozedur verglichen mit den Kosten einer LES im gesamten Gebiet um bis zu 30% reduziert werden. Neben Anderen nutzten Berland *et al.* [97] und Bogey & Baily [98] die Methode zur Berechnung von Freistrahllärm.

3.1.1 Grundgleichungen

Zur Herleitung der linearisierten Euler-Gleichungen für im Mittel uniforme Strömungen werden die primitiven Variablen $\mathbf{U} = [\rho, \mathbf{u}, p]^T$, wobei ρ die Dichte, \mathbf{u} der Geschwindigkeitsvektor und p der Druck ist, nach der Reynoldszerlegung $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}'$ aufgespalten. Hier beschreiben $\mathbf{U}_0 = [\rho_0, \mathbf{u}_0, p_0]^T$ den Mittelwert und $\mathbf{U}' = [\rho', \mathbf{u}', p']^T$ die Fluktuation um den Mittelwert \mathbf{U}_0 . Die Linearisierung besteht in der Vernachlässigung aller Terme zweiter und höherer Ordnung in den Schwankungsgrößen. Die linearisierten Euler-Gleichungen lauten dann mit Einstein-

scher Summenkonvention:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + u_{0j} \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} &= 0, \\
\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u_{0j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= 0, \\
\frac{\partial p'}{\partial t} + u_{0j} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \gamma p_0 \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die linarisierte thermische Zustandsgleichung ist

$$p' = (\rho_0 T' + T_0 \rho') \mathcal{R}_g.$$

Mit der Gleichung für die mittlere Schallgeschwindigkeit $a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ und der Annahme aus der linearen Akustik, dass $p' = a_0^2 \rho'$, kann der Druck¹ aus Gleichungssystem (3.1) eliminiert werden und das System reduziert sich zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + u_{0j} \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} &= 0, \\
\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u_{0j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Wenn die Konvektionsgeschwindigkeit, u_{0j} , verschwindet, lässt sich das Gleichungssystem in die Wellengleichung überführen. Für eine nicht uniforme Strömung ($u_0 = \bar{u}(x)$) mit großen Gradienten in den mittleren Stömungsgrößen ($\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \neq 0$) wie z.B. Scherschichten, sind die Gleichungen (3.1) nicht mehr zulässig. In diesem Fall folgt z.B. der konvektive Term zu

$$u_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \approx (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j},$$

und es müssen auch die gemittelten Variablen am Rand abgespeichert und an den LEE-Löser übergeben werden. Dadurch kann das NSE-LEE Interface auch im nicht-uniformen Gebiet platziert und Ω_{CFD} ggf. verkleinert werden. In jedem Fall aber muss die Annahme der linearen Akustik am Interface hinreichend adäquat sein.

3.1.2 Diskretisierung

Die Ortsableitungen in Gleichung (3.1) werden unter Verwendung des 7-Punkte Dispersionsrelation erhaltenden (DRP) Finite-Differenzen Schemas von Tam & Webb [73] approximiert. Die zeitliche Integration erfolgt wahlweise mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren dritter Ordnung aus [64] oder einem Low-Dissipation und Low-Dispersion Runge-Kutta (LDDRK) Verfahren aus [99] jeweils als $2N$ -Storage Implementierung.

Um die räumliche und zeitliche Diskretisierung näher zu beschreiben und sie hinsichtlich ihrer Stabilität und Genauigkeit zu untersuchen, ist es üblich, die eindimensionale lineare konvek-

¹Da der Lösungsvektor beider Nahfeld-Methoden die Dichte enthält, wurden die Gleichungen in der Dichte-Formulierung verwendet. Je nach Simulations-Setup ist die Druck-Formulierung jedoch vorteilhafter.

tive Wellengleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

als Modellgleichung zu betrachten. Da die verwendeten Gleichungen linear sind, ist die Betrachtung der linearen Stabilität hier vollkommen ausreichend.

Räumliche Diskretisierung. Die räumliche Ableitung, $\partial/\partial x$, einer beliebigen Funktion u , wird auf einem äquidistanten Gitter $\{x_i\} = \{x_1, \dots, x_N\}$ (im eindimensionalen Fall) approximiert mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \simeq \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-N_l}^{N_r} a_l u_{i+l}, \quad (3.4)$$

wobei u_i den Wert von u bei $x = x_i$ und Δx die uniforme Gitterweite in x -Richtung bezeichnen. N_l und N_r bezeichnet die Größe des FD-Stencils in negative beziehungsweise positive x -Richtung, die Koeffizienten a_l sind in Tabelle C.1 für die klassischen und in Tabelle C.2 für die DRP-Schemata aufgeführt.

Im allgemeinen sind die verwendeten Gitter nicht äquidistant und das physikalische Gitter wird auf das uniforme Rechengitter abgebildet:

$$x = x(\xi).$$

Für ein in x -Richtung gedehntes Gitter ändert sich Gleichung (3.4) dann zu:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \simeq \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_i \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{l=-N_l}^{N_r} a_l u_{i+l},$$

wobei $\Delta \xi = 1/(N_x - 1)$, mit N_x als der Anzahl an Gitterlinien, konstant ist. Der Metrik-Term, $\partial \xi / \partial x$, wird direkt aus der gegebenen Gitterfunktion $\xi = \xi(x)$ berechnet.

Um das Auflösungsvermögen der Approximationen beurteilen zu können, wird sich der Fourier-Analyse bedient. Dazu muss die diskrete Gleichung (3.4) in die kontinuierliche Form überführt werden (für $x = i\Delta x$, folgt wieder Gleichung (3.4)):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \simeq \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-N_l}^{N_r} a_l u(x + l\Delta x), \quad (3.5)$$

und die fouriertransformierte² Gleichung (3.5) lautet

$$ik\hat{u}(k) \simeq \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-N_l}^{N_r} a_l e^{ilk\Delta x}\right) \hat{u}(k) \equiv ik^* \hat{u}(k) \quad (3.6)$$

²Die Fourier-Transformation, \mathcal{F} , einer Funktion $f(x)$ ist gegeben mit:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \end{aligned}$$

wobei $\hat{f}(k)$ die Fouriertransformierte der Funktion $f(x)$ und i die komplexe Einheit ist. Damit gilt: $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right\} = ik\hat{f}(k)$ und $\mathcal{F}\{f(x + \Delta)\} = e^{ik\Delta} \hat{f}(k)$.

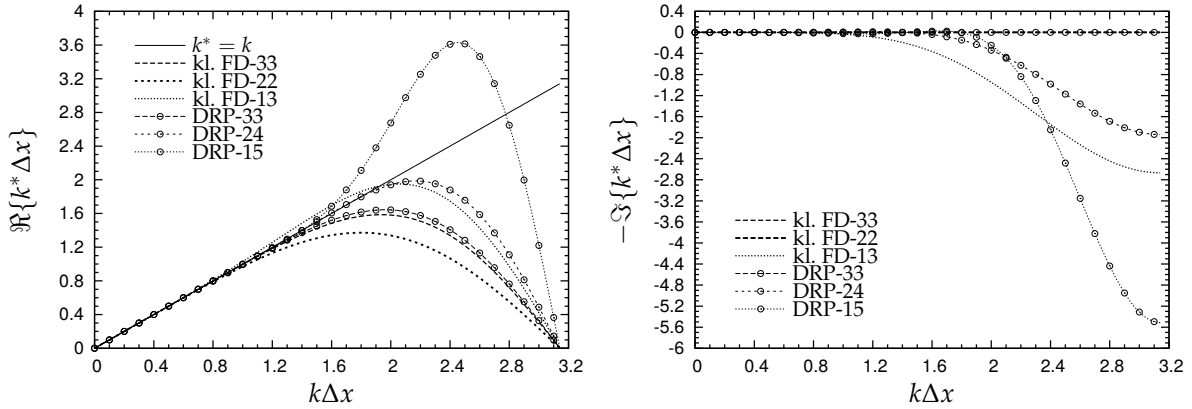


Abb. 3.1: Realteil (Dispersion) (*links*) und Imaginärteil (Dissipation) (*rechts*) der effektiven Wellenzahl k^* für die finite-differenzen Approximation der ersten Ableitung: klassische FD-Schemata und DRP-Schemata.

wobei

$$k^* = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{l=-N_l}^{N_l} a_l e^{ilk\Delta x}. \quad (3.7)$$

k^* ist die effektive Wellenzahl der Approximation (3.5) bzw. (3.4) und eine Funktion der tatsächlichen Wellenzahl k . Die dimensionslose effektive Wellenzahl, $k^* \Delta x$, ist ausschließlich abhängig von den Koeffizienten a_l des FD-Schemas. Real- und Imaginärteil von $k^* \Delta x$ der verwendeten zentralen und einseitigen FD-Schemata sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Abbildung 3.1 (*links*) zeigt, dass eine Wellenzahl k' ($k^*(k') = k^*_{\max}$) existiert für die die Gruppengeschwindigkeit, $\frac{c \partial(k^* \Delta x)}{\partial(k \Delta x)}$, verschwindet. Für Wellen mit $k > k'$ ist die numerische Gruppengeschwindigkeit der physikalischen entgegengesetzt. Während Wellenmoden mit positiver Gruppengeschwindigkeit zum Auslassrand propagieren und so das Gebiet verlassen, verbleiben Moden der Wellenzahl $k = k'$ im Berechnungsgebiet. Sind diese Moden instabil, wachsen sie innerhalb des Berechnungsgebiets exponentiell an und machen die Lösung unbrauchbar [100]. Im Fall des stark einseitigen DRP-15-Schemas werden die Wellenzahlen im Bereich $1.6 < k \Delta x < 2.8$ überschätzt. Die verwendeten Upwind-Schemata weisen im Bereich hoher Wellenzahlen eine numerische Dissipation auf (Abbildung 3.1 (*rechts*)), welche entstehende Instabilitäten dämpft.

Zeitliche Integration. Für ein Zeitintegrationsverfahren ist es erforderlich, dass es für *alle* Wellenzahlen stabil und für die räumlich *aufgelösten* Wellenzahlen genau ist. Für die Wahl des Zeitschritts Δt genügt es daher nicht, innerhalb der Stabilitätsgrenzen, d.h. Verstärkungsfaktor $|r(z)| \leq 1$ (Gl. (3.9)), zu bleiben. Hu *et al.* [99] zeigten, dass dies zwar zu einer stabilen aber nicht zwangsläufig genauen Lösung führt. Da sich akustische Wellen in Form von Longitudinalwellen und weder dispersiv noch dissipativ ausbreiten, wird der Zeitschritt im LEE-Gebiet maßgeblich durch den tolerierten und Dispersions- und Dissipationsfehler und nicht durch die Stabilitätsgrenzen limitiert. Im NSE-Gebiet ist der Zeitschritt aufgrund der sehr kleinen Gitterweite in der Grenzschicht deutlich kleiner als Δt_{LEE} und maßgeblich durch die Stabilitätsgrenzen limitiert. Da die Lösung am Interface zwischen NSE- und LEE-Domain zu jedem LEE-Zeitschritt herausgeschrieben werden muss, ist Δt_{LEE} schon vor dem Start der NSE-Simulation zu bestimmen.

Setzt man die Diskretisierung (3.4) in Gleichung (3.3) ein, erhält man die semi-diskrete Glei-

chung

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{c}{\Delta x} \sum_{l=-N_1}^{N_r} a_l u_{i+l}$$

und mittels einer Fourier-Analyse folgt

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -ick^* \hat{u}, \quad (3.8)$$

wobei \hat{u} die räumliche Fouriertransformierte von u und k^* (k) die effektive Wellenzahl (3.7) des FD-Schemas ist. Wird Gleichung (3.8) mit einem s -stufigen expliziten RK-Verfahren zeitlich diskretisiert, erhält man die Lösung zum nächsten Zeitschritt via

$$\hat{u}^{n+1} = \left(1 + \sum_{j=1}^s \Phi_j (-ick^* \Delta t)^j \right) \hat{u}^n,$$

wobei die Koeffizienten Φ_j bei den klassischen RK-Verfahren durch die n_j Zwangsbedingungen für eine geforderte Ordnung in der Genauigkeit determiniert werden und bei den LDDRK-Verfahren aus einer Minimierung des Dissipations- und Dispersionsfehlers folgen. Sie sind in Tabelle C.6 aufgelistet. Der Verstärkungsfaktor, $r(z) = \frac{\hat{u}^{n+1}}{\hat{u}^n}$, ist bei den RK-Verfahren gegeben mit

$$r(z) = 1 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \Phi_3 z^3 + \dots + \Phi_s z^s, \quad (3.9)$$

wobei ganz allgemein $z = \lambda \Delta t = (\lambda_r + i \lambda_i) \Delta t$ ist, λ ist dabei der Eigenwert des Operators F (RHS-Terme) in (3.11); hier ist $z = -ick^* \Delta t$ und damit rein imaginär. Das Verfahren ist für alle Werte von z für die gilt $|r(z)| \leq 1$ stabil. Der exakte Verstärkungsfaktor ist allerdings $r_e(z) = e^z$ und es zeigt sich, dass r den exakten Faktor r_e mittels eines Polynoms s -ten Grades approximiert. Das Verhältnis

$$\frac{r(z)}{r_e(z)} = |r| e^{-i\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \Re \left\{ i \ln \left(\frac{r}{|r| r_e} \right) \right\}$$

liefert den Dissipationsfehler $1 - |r|$ und den Phasen (Dispersions) Fehler δ . In Abbildung 3.2 sind beide für das verwendete LDDRK4(5-6)-Schema über $ck^* \Delta t$ aufgetragen. Die Kriterien $||r| - 1| \leq 0.001$ und $|\delta| \leq 0.001$ bestimmen das Δt für welches die Lösung genau ist und $|r| = 1$ liefert den maximalen Zeitschritt für den die Simulation stabil bleibt. In [73] wurde die Stabilität anhand der zweidimensionalen linearisierten Euler-Gleichungen untersucht. Mit den Erkenntnissen aus [99] und [73] kann die Bedingung

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} \leq \min \left(\frac{L_a}{k_c^* \Delta x \Psi}, \frac{L_s}{k_{\max}^* \Delta x \Psi} \right) \quad (3.10)$$

abgeleitet werden, wobei $\Psi = [M + (1 + (\Delta x / \Delta y)^2)^{1/2}]$ und M die Machzahl der Hauptströmung ist. Im eindimensionalen Fall ohne Konvektion ist $\Psi = 1$. Die Limits L_s und L_a sind in Tabelle C.6 für die verwendeten Verfahren gegeben. Die physikalische Interpretation hierzu ist klar: Ist das FD-Schema in der Lage räumlich sehr kleine Skalen aufzulösen (großes $k_c^* \Delta x$), werden entsprechend auch die Zeitskalen kleiner und der Zeitschritt muss abnehmen um diese zu erfassen.

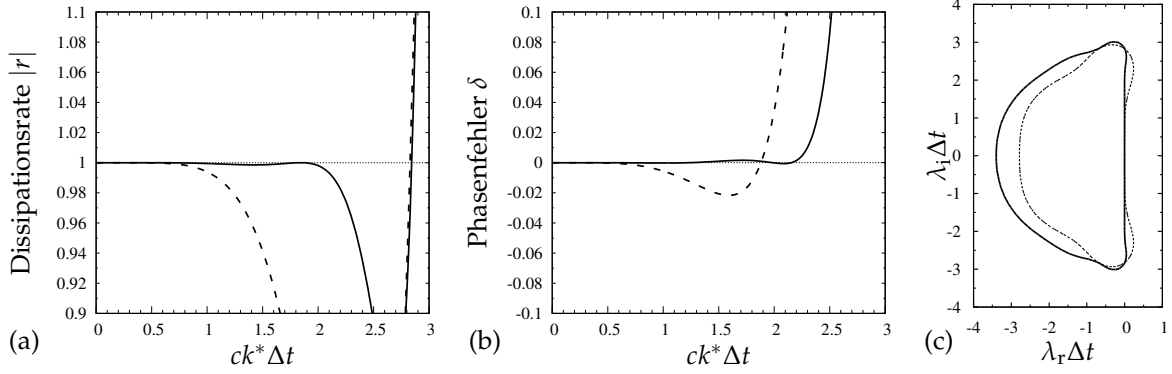


Abb. 3.2: Dissipationrate (a) und Dispersionsfehler (b) des optimierten LDDRK4(5-6) Schemas mit der Genauigkeitsgrenze $L_a = 2.00$ und der Stabilitätsgrenze $L_s = 2.85$. Zum Vergleich das klassische RK4-Verfahren (---) mit $L_a = 0.67$ und $L_s = 2.83$. (c) Stabilitätsgrenze $|r(\lambda\Delta t)| = 1$.

Bei den LEE-Simulationen in dieser Arbeit wurde das alternierende LDDRK-Verfahren vierter Ordnung aus [99] mit fünf Stufen im ersten und sechs Stufen im zweiten Schritt verwendet. Dabei wechseln sich ein 5- und 6-stufiges LDDRK zur Berechnung von u^{n+1} ab. Die implementierte Low-Storage Vorschrift dazu lautet für $j = 1, \dots, s_l$ und $l \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} w_i^{(j)} &= \alpha_j w_i^{(j-1)} + \Delta t F_i \left(u^{(j-1)}, t^{(j-1)} \right), \\ u_i^{(j)} &= u_i^{(j-1)} + \beta_j w_i^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei $t^{(j-1)} = t_n + c_j \Delta t$, $u^{(0)} = u^n$, $s_1 = 5$ und $s_2 = 6$. Im Anschluss an die s_l Zwischenschritte wird $u_i^{n+1} = u_i^{(s_l)}$ gesetzt. Die Koeffizienten α_j und β_j sind aus [101] und in Tabelle C.4 aufgelistet. Für das LDDRK-Verfahren in Kombination mit dem vierte Ordnung DRP-Schema (aus Tabelle C.5 $k_c^* \Delta x = 0.95$) für die Approximation der räumlichen Ableitungen, folgt aus (3.10) für $M = 0$ die Zeitschrittbedingung $\Delta t \leq 2.1 \frac{\Delta x}{c}$.

Stabilisierung. Da die Zentral-Differenzen-Schemata keine numerische Dissipation besitzen (siehe Abbildung 3.1), können aufgrund von Randbedingungen, unzureichend aufgelöster Skalen oder Gitterinhomogenitäten entstehende numerische Instabilitäten nicht ausreichend gedämpft werden [102]. Eine Filterung der Lösung verhindert das Anwachsen dieser hochfrequenten numerischen Fehler und damit unphysikalisches Verhalten. Bei den durchgeführten LEE-Simulationen wurde nach jedem n -ten Zeitschritt ein zentraler linearer Filteroperator zehnter Ordnung auf die Lösung angewandt. Der Filteroperator \mathcal{F} für ein uniformes kartesisches Gitter ist definiert als (für eine Dimension):

$$\mathcal{F}\{u\}(x) = \tilde{u}(x) = \sum_{l=-N_l}^{N_l} b_l u(x + l\Delta x). \quad (3.12)$$

Die Filterkoeffizienten, b_l , ergeben sich aus der Forderung an das Filter, die odd-even Moden (Oszillationen bei denen jeder Gitterpunkt die gleiche Amplitude besitzt, aber ein anderes Vorzeichen als sein Nachbargitterpunkt) vollständig zu unterdrücken:

$$\sum_{l=-N_l}^{N_l} b_l (-1)^l = 0.$$

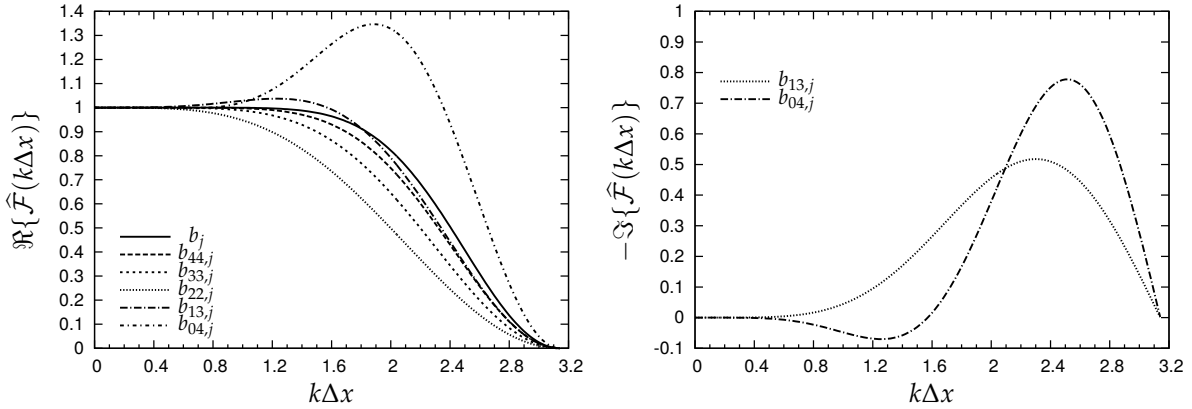


Abb. 3.3: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) der fouriertransformierten Filterfunktion $\hat{\mathcal{F}}(k\Delta x)$.

Diese Gleichung besitzt fünf Freiheitsgrade, welche zur Maximierung der Filterordnung genutzt werden. Zu diesem Zweck erfolgt eine Taylorreihenentwicklung von $u(x + l\Delta x)$ für $l = -5, \dots, 5$, und die Filterkoeffizienten werden berechnet sodass

$$\mathcal{F}\{u\}(x) = u(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{10}).$$

Die Filterkoeffizienten für das Randgebiet sind in Tabelle C.7 in Appendix C.2 aufgeführt, jene für das innere Gebiet lauten:

$$b_0 = 772/1024, \quad b_1 = b_{-1} = 210/1024, \quad b_2 = b_{-2} = -120/1024, \\ b_3 = b_{-3} = 45/1024, \quad b_4 = b_{-4} = -10/1024, \quad b_5 = b_{-5} = 1/1024.$$

Die Freiheitsgrade können auch, wie von Bogey & Bailly [103] gezeigt, zur Optimierung des Filterverhaltens in einem bestimmten Frequenzbereich genutzt werden.

Den Filteroperator für den zweidimensionalen oder dreidimensionalen Fall erhält man durch die rekursive Anwendung des Filters in jede Richtung. Somit ergibt sich der Filteroperator für zwei Dimensionen zu:

$$\mathcal{F}\{u\}(x, y) = \sum_{l=-N_1}^{N_r} \sum_{m=-N_1}^{N_r} b_l b_m u(x + l\Delta x, y + m\Delta y). \quad (3.13)$$

Formuliert man Gleichung (3.13) für ein diskretes Gitter, so erhält man den Ausdruck

$$\tilde{u}_{i,j} = \sum_{l=-N_1}^{N_r} \sum_{m=-N_1}^{N_r} b_l b_m u_{i+l,j+m},$$

wobei $\tilde{u}_{i,j}$ den gefilterten Wert von $u_{i,j}$ am Gitterpunkt i, j meint.

Desquesnes *et al.* [79] zeigten, dass die Filterung auf krummlinigen Gittern im Rechengebiet ebenfalls von zehnter Ordnung ist, was jedoch nicht impliziert, dass dies auch für das physikalische Gebiet gilt. Abbildung 3.3 links zeigt den Realteil der fouriertransformierten Filterfunktion, $\hat{\mathcal{F}}(k\Delta x) = \sum_{l=-5}^5 b_l \exp(-ilk\Delta x)$, für das innere Schema und die Schemata im Randgebiet. Zum Rand hin muss auf zunehmend unsymmetrische Schemata ausgewichen werden. Wie in Abbildung 3.3 rechts zu sehen, besitzen die backward Schemata in einem bestimmten Wellenzahlbereich einen negativen Imaginärteil. Für die forward Schemata kehrt sich das Vorzeichen des Imaginärteils um.

3.1.3 Fernfeld-Randbedingungen

Die akkurate Behandlung der Randbedingungen ist für die Simulation aeroakustischer Phänomene von essenzieller Bedeutung [104]. Sind die Randbedingungen an offenen Rändern nicht gut gestellt, kommt es zu unphysikalischen Reflexionen wenn akustische oder aerodynamische Fluktuationen das Berechnungsgebiet verlassen. Diese Reflexionen kontaminieren das Lösungsgebiet und verfälschen somit das physikalische Schallfeld.

Werden die Navier-Stokes- oder Euler-Gleichungen um einen Referenzzustand linearisiert, können die Fluktuationen in akustische, Wirbelstärke- und Entropie-Moden zerlegt werden. Während Wirbelstärke- und Entropiefluktuationen mit der Strömung stromab konvektiert werden, weisen Fluktuationen akustischer Natur (Druckfluktuation) keine Vorzugsrichtung auf, sondern propagieren mit der Summe aus Schall- und Strömungsgeschwindigkeit, $V_g = (\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{e}_r$, [66, 74]. Aus diesem Grund ist eine Aufteilung des Rands in einen Teil, der vorwiegend von Druckfluktuationen (Schallwellen) erreicht wird (Radiation-Rand) und in einen Teil, der mit allen drei Fluktuationsmoden beaufschlagt wird (Outflow-Rand) angebracht [66]. Für radiation- und outflow-Rand erfolgt dann jeweils die Herleitung der Fernfeld-Randbedingungen anhand der asymptotischen Lösung der einzelnen Moden.

Da bei den Simulationen hier, keine Entropie- oder Wirbelstärkewellen ins Fernfeld übertragen werden, und angenommen werden kann, dass die Hauptströmung im LEE-Gebiet annähernd uniform ist, wurden die Radiation Randbedingungen von Tam & Webb [73] für die offenen Ränder der LEE-Domain verwendet. Sie lauten für eine zweidimensionale uniforme Strömung

$$\left(\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{bmatrix} = 0, \quad (3.14)$$

wobei $V_g(\phi) = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r + \left[a_0^2 - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_\phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = u_0 \cos \phi + v_0 \sin \phi + \left[a_0^2 - (v_0 \cos \phi - u_0 \sin \phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$, $\frac{\partial}{\partial r} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}$ und a_0 die Schallgeschwindigkeit ist. Ferner ist zu beachten, dass der Ursprung des Richtungsvektors, $O(x_o, y_o)$, in das Zentrum der dominanten Schallquellen gelegt wird und somit außerhalb des LEE-Gebiets liegt.

Die Implementierung der Randbedingungen erfolgt mithilfe von ghost points, siehe Abbildung 3.4. In den ghost points werden die Radiation-Randbedingungen (3.14) und in den Gitterpunkten innerhalb und am Rand des physikalischen Simulationsgebiets werden die LEE (3.2) zur Berechnung von $\partial_t \rho'$, $\partial_t u'$ und $\partial_t v'$ verwendet, wobei zur Approximation der räumlichen Ableitungen im Randgebiet neben den zentralen Differenzen-Verfahren auch unsymmetrische Randschemata, wahlweise als klassische oder DRP-Verfahren, angewandt werden. Die zeitliche Integration der Randbedingungen erfolgt simultan mit dem inneren Gebiet, via LSRK- oder LDDRK-Verfahren.

3.1.4 Interface-Randbedingungen

Der Rand welcher an das NSE-Gebiet anschließt (Interface), wird mit den gespeicherten Daten aus der NSE-Simulation zu jedem Zeitschritt aktualisiert, was mit einer instationären Einlass-Randbedingung verglichen werden kann. Dazu werden am Interface die Geschwindigkeitsfluktuationen u' und die Dichte ρ' an drei Gitterlinien (Spenderlinien) zu jedem LEE-Zeitschritt während der NSE-Simulation gespeichert. Während der LEE-Simulation werden die korrespondierenden drei Gitterlinien des LEE-Gebiets (Empfängerlinien) zur entsprechenden Zeit mit den gespeicherten Werten aus dem NSE-Gebiet aktualisiert. Mit der Lösung des Gleichungssystems (3.2) erfolgt dann die Propagation vom Nahfeld ins Fernfeld.

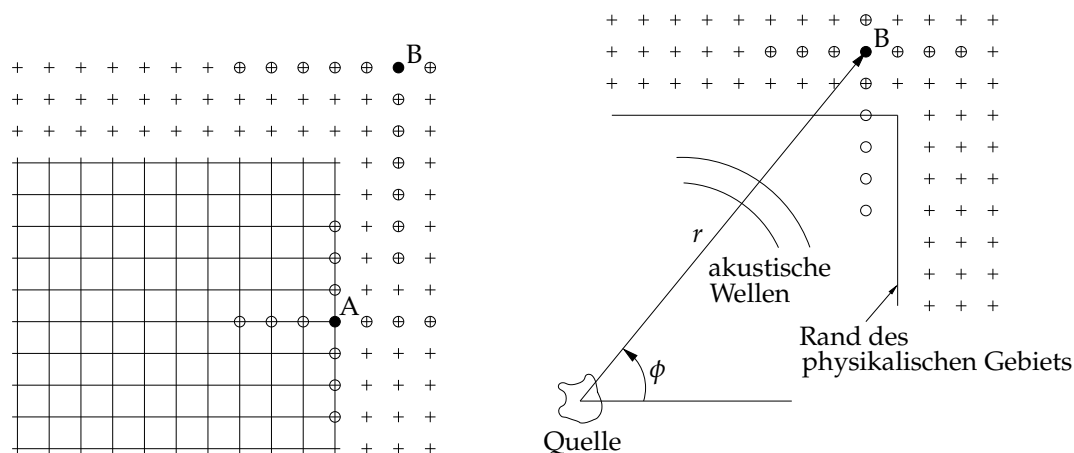


Abb. 3.4: Links: Berechnungsgebiet: — physikalisches Gebiet (LEE), --- Randgebiet (Radiation Randbedingungen). Zur Berechnung der Ableitungen in Punkt • werden die Punkte o herangezogen. Typische stencils für die Berechnung der Ableitungen in inneren Punkten und Randpunkten A und ghost points B. Rechts: Schema eines 2-D Berechnungsgebiets: Ursprung des Richtungsvektors $O(x_o, y_o)$ liegt im Zentrum der dominanten Quellen in Ω_S .

Erste Untersuchungen haben gezeigt, dass es in den Ecken des LEE-Gebiets, in denen der Interface-Rand an einen Radiation-Rand stößt, zu numerischen Artefakten kommt, wenn die akustischen Wellen dieses Gebiet durchlaufen. Zur Reduktion dieser Problematik wurde die Filterordnung auf acht reduziert und im mit der Ecke korrespondierenden NSE-Gebiet eine numerische Dämpfungszone nach Ansatz (2.9) angewandt.

3.1.5 Validierung und Verifikation

Eine erste Verifikation der Implementierung wurde in [67] anhand eines zweidimensionalen akustischen Impulses vorgenommen. Dabei wurde ein Amplitudenfehler beobachtet und das Verfahren war auf uniforme Gitter beschränkt. Die nun folgenden Testfälle sollen zeigen, dass diese Fehler und Einschränkungen behoben wurden und das Verfahren für die Vorhersage des akustischen Fernfeldes für die hier untersuchten Konfigurationen gut geeignet ist. Ein grundlegendes Problem der Freistrah-Flügel-Konfiguration besteht in der Vorhersage des Schallfelds, welches vom Düsenstrahl erzeugt und am Tragflügel des Flugzeugs gestreut wird. Als starke Idealisierung und Vereinfachung dieses Problems, wurde daher das erste Problem des zweiten CAA-Workshops [69] zur Verifikation des Verfahrens herangezogen.

2-D akustische Quelle mit Zylinder

Bei diesem Testfall wird die Reflexion akustischer Wellen an einem soliden Zylinder mit Durchmesser $D = 1$ im Koordinatenursprung betrachtet. Das Fluid ist in Ruhe, der mittlere Druck ist $p_0 = 1/\gamma$ und die mittlere Dichte ist $\rho_0 = 1$. Der Quellterm S wird auf der rechten Seite der Energiegleichung (2.6) hinzugefügt und ist hier definiert mit:

$$S = \epsilon \exp[-\alpha((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)] \sin(\omega t) \times \min\left\{1.0, \left(\frac{t}{t_0}\right)^3\right\},$$

wobei $\alpha = (\ln 2)/b^2$, $t_0 = 4$, $b = 0.2$, $\omega = a_0 k$ mit $a_0 = 1$ und die Amplitude $\epsilon = 1$ beträgt. Die Position der Quelle ist $(x_s, y_s) = (4, 0)$ und es wurden Simulationen mit der dimensions-

losen Frequenz von $\omega = 4\pi$ durchgeführt. Für das Problem existiert eine analytische Lösung [69], für deren Berechnung wieder das MATLAB-Skript aus Kapitel 2.3.4 verwendet wurde. Die Richtcharakteristik, definiert mit $\mathcal{D}(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} r \langle p'(r, \theta, t)^2 \rangle$, wurde für den Radius $R = 10$ berechnet:

$$\mathcal{D}(\theta) = R \langle p'(R, \theta, t)^2 \rangle \simeq \frac{R}{n_2 - n_1} \sum_{n=n_1}^{n_2} p'_n(R, \theta)^2,$$

wobei die Mittelung in allen Fällen über $(n_2 - n_1) = 2 \times 10^3$ Samplingschritte der Weite $\Delta t_{sp} = 5 \times 10^{-3}$ erfolgte, was im Fall von $\omega = 4\pi$ 20 Perioden mit einer zeitlichen Auflösung von 100 Punkten pro Periode entspricht. Die für die analytische Richtcharakteristik erforderliche zeitabhängige analytische Lösung (Druckfeld) ist gegeben mit:

$$p'(R, \theta, t) = \Im \left\{ \left[\Phi^{\text{inc}}(r_s, \omega) + \Phi^{\text{sc}}(R, \theta, \omega) \right] e^{-i\omega t} \right\},$$

wobei Φ^{inc} aus Gleichung (2.7) mit $r_s = [(R \cos \theta - x_s)^2 + (R \sin \theta - y_s)^2]^{1/2}$ und Φ^{sc} aus Gleichung (2.8) mit $i = 1$ und $N = 50$ folgt.

Das gesamte Berechnungsgebiet besteht aus einem NSE-Gebiet und zwei LEE-Gebieten, die oberhalb und unterhalb des NSE-Gebiets liegen und dieses jeweils mit einer Länge von $10\Delta y$ überlappen. Die Abmessungen des NSE-Gebiets sind mit $-12 \leq x_i \leq 12$ gegeben und $N_x = N_y = 2401$ Gitterlinien teilen das Gebiet räumlich auf. Das Gitter um den Zylinder besteht aus $N_\theta \times N_r = 629 \times 51$ Gitterlinien. Die Dämpfungszone am Rand besitzt eine Länge von $2D$ was vier mal der Wellenlänge entspricht. Die LEE-Gebiete besitzen in x -Richtung die selben Abmessungen wie das NSE-Gebiet, in y -Richtung haben wir oben $4 \leq y \leq 12$ und unten $-12 \leq y \leq -4$, wobei die Gebiete jeweils mit $N_x = 2401$ und $N_y = 1601$ Gitterlinien diskretisiert wurden. Das Interface befindet sich bei $y = \pm 4$ und für die drei Ränder, außer dem Interface-Rand, des LEE-Gebietes werden die Radiation Randbedingungen (3.14) verwendet. Um Gitteroszillationen zu eliminieren, wurde die LEE-Lösung zu jedem Zeitschritt mit einem Filter sechster Ordnung gefiltert. Die dimensionslose Zeitschrittweite war $\Delta t = 0.0025$ und für beide Gebiete identisch.

Abbildung 3.5 zeigt die instanten Druckfelder und Konturlinien für $p' = 0$ jeweils im NSE- und oberen LEE-Gebiet. Die Simulation stimmt sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Weder am NSE-LEE-Interface noch an den Auslassrändern des LEE-Gebiets sind unphysikalische Reflexionen zu beobachten. Das bekannte Problem, dass in den Ecken des Interface-Rands im LEE-Gebiet numerische Artefakte auftreten [57], konnte durch die Verwendung einer geeigneten Dämpfungszone im NSE-Gebiet behoben werden. Die gute Übereinstimmung des LEE-Felds mit der NSE-Lösung und der analytischen Lösung, wird auch von den Druckverläufen entlang der x - und y -Achse in Abbildung 3.7 und 3.8 bestätigt. Die Richtcharakteristiken $\mathcal{D}(\theta)$ zeigen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung (siehe Abbildung 3.6).

Das Verfahren kann damit als validiert und verifiziert angesehen werden.

2-D/3-D NACA0012

Zur Validierung der gesamten LES/LEE Prozedur in Verbindung mit dem konservativen Nahfeldlöser, angewandt auf eine realistische Problem, wurde die Umströmung eines zwei- und dreidimensionalen NACA0012 Flügels simuliert. Die Reynoldszahl, basierend auf der Anströmgeschwindigkeit und der Sehnenlänge des Profils, ist $Re_C = \rho_\infty u_\infty C / \mu = 408000$ und die Machzahl, $M_\infty = u_\infty / a_\infty$, ist 0.4. Der Anstellwinkel beträgt $\text{AoA} = 5^\circ$. In Tabelle 3.1 sind

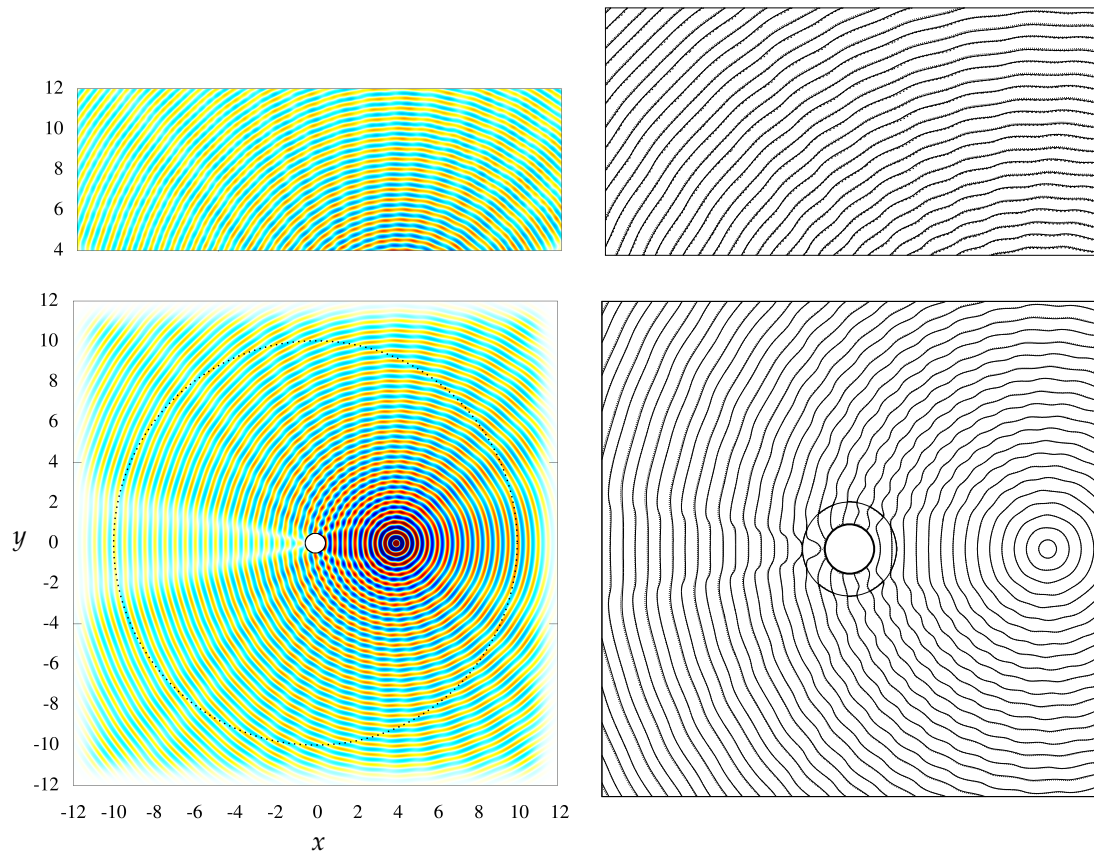


Abb. 3.5: Links: Instantanes Druckfeld p' des NSE-Gebiets (*unten*) und oberen LEE-Gebiets (*oben*) mit Farbintervall von -5×10^{-3} (blau) bis 5×10^{-3} (rot). Die Punkte im Radius $R = 10$ kennzeichnen die virtuellen Mikrophone zur Aufnahme von p_{rms} ; die Position des NSE-LEE Interfaces bei $y = \pm 4$ ist mit einem Strich am Rand angedeutet. Rechts: Kontur $p' = 0$ im Gebiet $-5 \leq (x, y) \leq 5$ (*unten*) und $4 \leq y \leq 9$ (*oben*): —, NSE-Simulation; - - -, LEE-Simulation und \cdots , analytische Lösung. Der Kreis um den Zylinder kennzeichnet das Interpolationsgebiet.

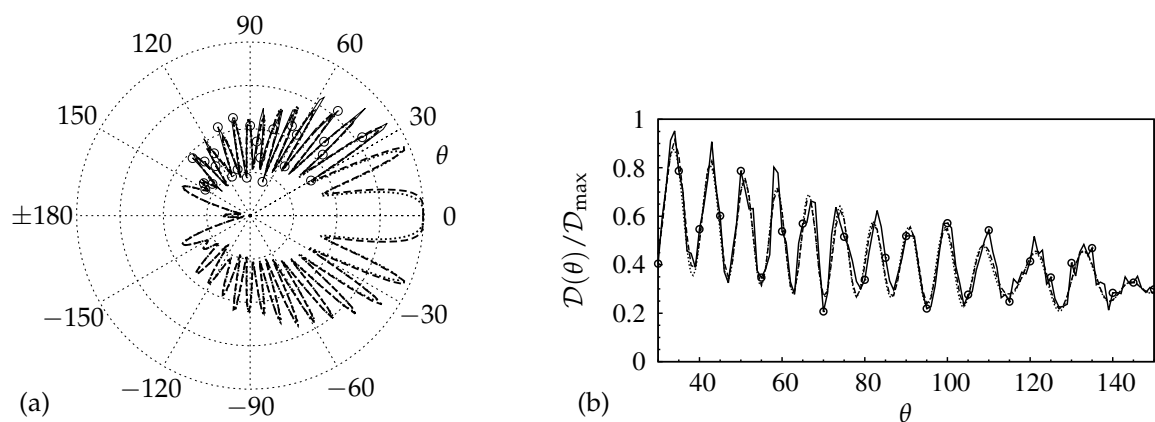


Abb. 3.6: Normierte Richtcharakteristik $D(\theta)/D_{\text{max}}$ bei $R = 10$: (a) gesamt und (b) für $30 \leq \theta \leq 150$: - - -, NSE-Simulation; -o-, NSE-LEE-Simulation; \cdots , analytische Lösung.

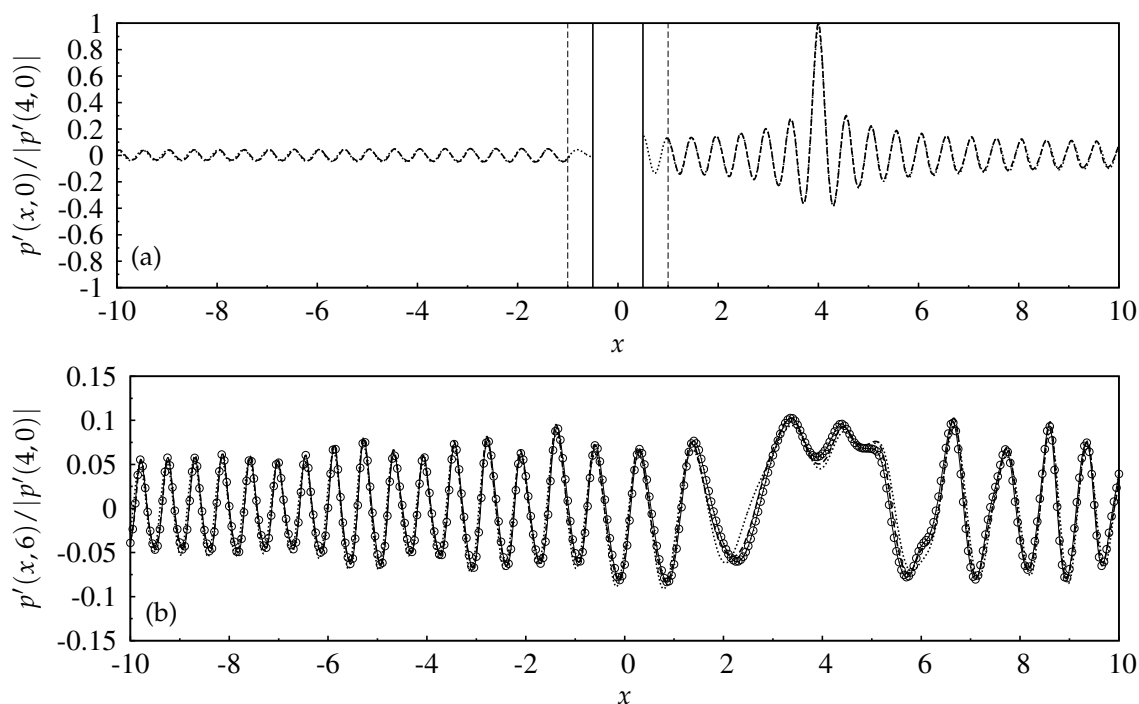


Abb. 3.7: Normierte instantane Druckfluktuation $p' / |p'(4, 0)|$ entlang der x -Achse bei (a) $y = 0$ und (b) $y = 6$: ---, NSE-Simulation; -o-, NSE-LEE-Simulation; \cdots , analytische Lösung. Die soliden senkrechten Linien in (a) deuten den Zylinder an, die unterbrochenen Linien das Interpolationsgebiet.

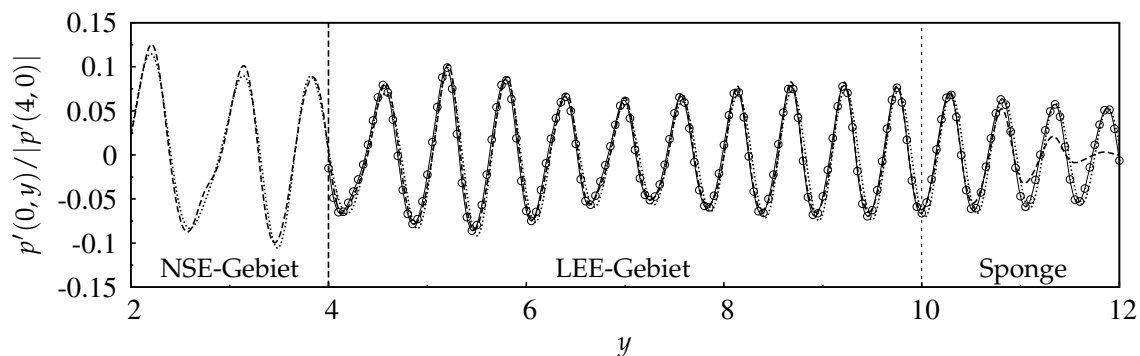


Abb. 3.8: Normierte instantane Druckfluktuation $p' / |p'(4, 0)|$ entlang der y -Achse bei $x = 0$. Linienlegende siehe Abbildung 3.7. Die senkrechte Strichlinie bei $y = 4$ kennzeichnet das NSE-LEE Interface. Der Amplitudenabfall der NSE-Lösung im Bereich $y > 10$ wird durch die Dämpfungszone bewirkt.

Parameter	physikalischer Wert		dimensionsloser Wert
γ	1.4	1	1.4
\mathcal{R}_g	287.15 J/(kgK)	T_∞/a_∞^2	$1/\gamma$
c_p	1.007×10^3 J/(kgK)	T_∞/a_∞^2	$1/(\gamma - 1) = 2.5$
Re_C	4.08×10^5	1	4.08×10^5
Pr	0.715	1	0.715
C	0.045 m	$1/C$	1
ρ_∞	1.2 kg/m ³	$1/\rho_\infty$	1
T_∞	293.15 K	$1/T_\infty$	1
$a_\infty = (\gamma \mathcal{R}_g T_\infty)^{1/2}$	$\simeq 343.3$ m/s	$1/a_\infty$	1
$p_\infty = \rho_\infty \mathcal{R}_g T_\infty$	$\simeq 1.01013 \times 10^5$ Pa	$1/(\rho_\infty a_\infty^2)$	$1/\gamma$
μ	1.823×10^{-5} kg/(ms)	$1/(\rho_\infty a_\infty C)$	9.8×10^{-7}
k	2.568×10^{-4} W/(mK)	$T_\infty/(\rho_\infty a_\infty^3 C)$	3.4×10^{-6}

Tab. 3.1: 2-D/3-D NACA0012 Simulationsparameter: Die Viskosität berechnet sich aus $\mu = \rho_\infty u_\infty C / Re_C$ womit die dimensionslose Viskosität mit $\frac{M_\infty}{Re_C}$ gegeben ist. Die thermische Leitfähigkeit wird mit $k = \frac{c_p \mu}{Pr}$ bestimmt und ist im dimensionslosen Fall identisch $\frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{M_\infty}{Re_C}$.

die Simulationsparameter und die verwendeten Referenzskalen kompakt dargestellt. Die Lösungen berechnet mit dem Tool XFOIL und aus den Referenzen [105, 39, 106] dienen dabei als Referenz.

Numerische Spezifikationen. Die Abbildungen 3.9 und 3.10 zeigen des Gitter. Das Hintergrundgitter besteht aus $N_x \times N_y = 701 \times 351$ Gitterpunkten und das körperangepasste O-Gitter des NACA Profils hat die Größe von $N_x \times N_y = 961 \times 101$. Angaben zur mittleren und minimalen Gitterweite sind in Tabelle 3.2 gegeben, wobei im Fall des O-Gitters x für die Strömungsrichtung und y für die Richtung orthogonal zur Profilkontur steht. Die Grenzschichtauflösung in Wandeinheiten, $\Delta x_i^+ = \Delta x_i u_\tau / \nu$, ist $\Delta x^+ \approx 40$, $\Delta y^+ \approx 0.4$ und $\Delta z^+ \approx 20$ wobei $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} = 1.4 \times 10^{-2} a_\infty$ und $\tau_w = 2 \times 10^{-4} \rho_\infty a_\infty^2$ ist.

Im Nahfeld, $-1 \leq x/C \leq 3$ und $-1 \leq y/C \leq 1$, wurden die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) mit räumlich und zeitlich zweiter Ordnung gelöst³. Der Informationsaustausch zwischen den Gittern wurde mit der oben beschriebenen expliziten fünfte Ordnung⁴ Lagrange-Interpolation durchgeführt. Zur Stabilisierung und als Ersatz für ein explizites LES-Modell wurde die in Kapitel 2.1.2 beschriebene artifizielle Viskosität verwendet.

Die Weiterführung der Lösung des nicht linearen viskosen Nahfelds in das lineare nicht viskose Fernfeld erfolgte durch die Lösung der linearisierten Euler-Gleichungen (3.2) im akustischen Fernfeld. Dazu werden am oberen und unteren Interface bei $y = \pm 0.5C$ die fluktuierenden Strömungsgrößen ρ' , u' und v' an jeweils drei Gitterlinien gespeichert. Der Speicherschnittschritt ist identisch mit dem Zeitschritt der LEE Simulation und beträgt $\Delta t_{LEE} = 0.001 \approx 100 \Delta t_{LES}$. Zur Vermeidung von Störungen in der Interfacezone, ist die Anzahl der Gitterlinien und die Gitterstreckung in x -Richtung in beiden Domains identisch. Das LEE-Gitter ist in y -Richtung uniform, wobei die Gitterweite der mittleren Gitterweite der drei Interface-Gitterlinien des LES-Gitters entspricht. Die LEEs sind räumlich mit dem klassischen Zentral-Differenzen-Verfahren sechster Ordnung diskretisiert, die zeitliche Integration erfolgte mit dem Low-Storage Runge-Kutta Verfahren dritter Ordnung nach Williamson [64]. Am Rand

³Die Ordnung wurde bewusst niedrig gewählt mit dem Ziel, eine hinreichende Qualität der Lösung schon bei zweiter Ordnung nachzuweisen.

⁴Bei einer Interpolation dritter Ordnung kam es zu numerischen Artefakten im Überlappungsgebiet zwischen O-Gitter und Hintergrundgitter ähnlich den Testfällen in 2.3.4.

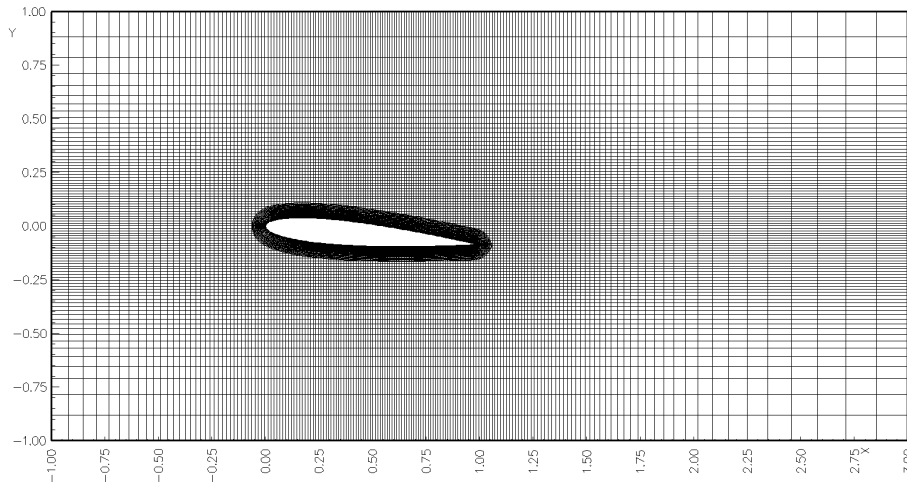


Abb. 3.9: NACA0012 mit $\text{AoA}=5^\circ$: Gesamtes Berechnungsgitter (gezeigt ist jede vierte Gitterlinie). Anzahl Gitterpunkte etwa 3.3×10^5 .

Tab. 3.2: 2-D/3-D NACA0012: Gitterparameter. $\overline{\Delta x}_i = L_i/N_i$.

Gitter	N_x	N_y	$\overline{\Delta x}/C$	$\Delta x_{\min}/C$	$\overline{\Delta y}/C$	$\Delta y_{\min}/C$	$\Delta y_{\max}/C$
Hintergrund	701	351	5.7×10^{-3}	2×10^{-3}	5.7×10^{-3}	3.2×10^{-3}	3.4×10^{-2}
Flügel	961	101	2.4×10^{-3}	7×10^{-4}	6×10^{-4}	2.1×10^{-5}	2.9×10^{-3}

werden die Radiation Randbedingungen (3.14) in Verbindung mit klassischen FD-Verfahren vierter Ordnung eingesetzt. Der Ursprung des Richtungsvektors, $re_r = x - x_o$, liegt im LES-Gebiet und ist $x_o = (C, 0)$. Zur Stabilisierung der Rechnung wird die Lösung zu jedem Zeitschritt mit dem Filter (3.13) in sechster Ordnung gefiltert. Am Auslassrand bei $x = 2c$ und an den Seitenrändern bei $y = \pm 0.6C$ der LES startet eine quadratisch in der Stärke zunehmende Dämpfungszone. Die Berechnungen erfolgen dimensionslos mit den Referenzskalen $\rho_\infty, a_\infty, a_\infty^2 \rho_\infty$ für Dichte, Geschwindigkeit und Druck, sowie der Sehnenlänge C als Längenskale.

Für den 3-D Fall wird das Gitter des 2-D NACA0012 um $\pm 0.05C$ in die dritte Raumrichtung extrudiert. Die Auflösung beträgt $N_x \times N_y \times N_z = 701 \times 351 \times 65$ für das kartesische Hintergrundgitter und $961 \times 101 \times 129$ Gitterlinien für das O-Gitter. Untersuchungen von Wolf *et al.* [39] haben gezeigt, dass die Druckkorrelation bereits bei $z \approx 0.0025C$ verschwindet, weswegen hier davon ausgegangen wird, dass die oben genannte Ausdehnung in z -Richtung ausreicht. Die Gitterweite in Spannweitenrichtung ist konstant und beträgt für das Hintergrundgitter $\Delta z = 1.6 \times 10^{-3}C$ und für das O-Gitter $\Delta z = 7.8 \times 10^{-4}C$. Die charakteristischen Zeitparameter sind mit jenen der 2-D Simulationen identisch und in Tabelle 3.3 dargestellt. Die Berechnung der Mittelwerte erfolgt hier über die Mittelung in Spannweitenrichtung z und über die Zeit t mit Gleichung (2.17). Um ein glattes dreidimensionales akustisches Startfeld zu gewährleisten, wurde als Anfangsbedingung der 3-D Simulation die in Spannweitenrichtung extrudierte Lösung der voll entwickelten zweidimensionalen Umströmung verwendet.

Aerodynamisches Feld. Für eine Betrachtung der Entwicklung der Grenzschicht, sind in Abbildung 3.11 Momentaufnahmen des Wirbelstärkefelds der zwei- und dreidimensionalen Si-

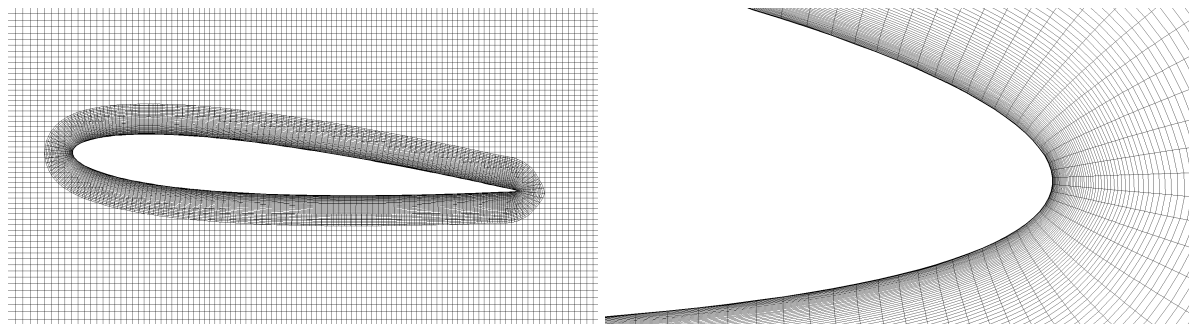


Abb. 3.10: NACA0012 mit $\text{AoA}=5^\circ$: Detailansicht des O-grid (gezeigt ist jede vierte Gitterlinie) (links), Detailansicht der abgerundeten Hinterkante (rechts).

Tab. 3.3: Charakteristische Zeitparameter der LES/LEE-Simulation

	LES	LEE
Überströmzeit $T_C = C/u_\infty$	$2.5C/a_\infty \simeq 3.3 \times 10^4 \text{ s}$	–
Initiale Entwicklungszeit T_i	$5T_C$	–
Simulationszeit $T = T_i + T_{\text{avg}} + T_{\text{sp}}$	$42.5C/a_\infty \simeq 3 \times 10^6 \Delta t$	$10C/a_\infty$
Mittelungszeit T_{avg}	$10T_C \simeq 2.5 \times 10^4 \Delta t_{\text{sp}}$	–
Samplingzeit T_{sp}	$2T_C \simeq 5 \times 10^3 \Delta t_{\text{sp}}$	–
Δt	$1.4 \times 10^{-5} C/a_\infty$	$10^{-3} C/a_\infty$
Δt_{sp}	$10^{-3} C/a_\infty$	$10^{-3} C/a_\infty$
$f_c^{\text{SP}} = 1/(2\Delta t_{\text{sp}})$	$500a_\infty/C \simeq 3800 \text{ kHz}$	3800 kHz
$St_c^{\text{SP}} = f_c^{\text{SP}} 0.12C/u_\infty$	150	150
$St_c^{\text{SP}} = f_c^{\text{SP}} 0.12C/a_\infty$	60	60
$\lambda_c = 2\pi/k_c = ppw\Delta x$	$21\Delta x \simeq 0.12C$	$6\Delta x \simeq 0.034C$
$f_c^{\text{G}} = a_\infty/\lambda_c$	$8.33a_\infty/C \simeq 64 \text{ kHz}$	$29a_\infty/C \simeq 221 \text{ kHz}$
$f_c^{\text{G}} = u_\infty/\lambda_c$	$3.33a_\infty/C \simeq 25 \text{ kHz}$	$12a_\infty/C \simeq 190 \text{ kHz}$
$St_c^{\text{G}} = 0.12C/\lambda_c$	1	3.5
$St_{\text{min}} = 0.12C/(T_{\text{sp}}a_\infty)$	0.024	–

$f_c^{\text{G}} = \frac{k_c U}{2\pi}$ ist die maximal durch das Gitter aufzulösende Frequenz, wobei U die Referenzgeschwindigkeit ist. Die Anzahl Punkte pro Wellenlänge ist $ppw := \frac{2\pi}{k_c \Delta x}$ (alternativ $(ppw - 1) := \frac{2\pi}{k_c \Delta x}$), $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ ist die cut-off Wellenzahl des verwendeten FD-Schemas und $\lambda_c = ppw\Delta x$. Die maximale, mit dem sampling Zeitschritt, aufzulösende Frequenz folgt aus dem Nyquist-Kriterium $f_c^{\text{SP}} = \frac{1}{2\Delta t_{\text{sp}}}$. Die Samplingzeit, T_{sp} , beschränkt die minimale Strouhal-Zahl $St_{\text{min}} = L_{\text{ref}}/(T_{\text{sp}}U_{\text{ref}})$. Die Strouhal-Zahl wird mit der Dicke des Profils, $0.12C$, gebildet.

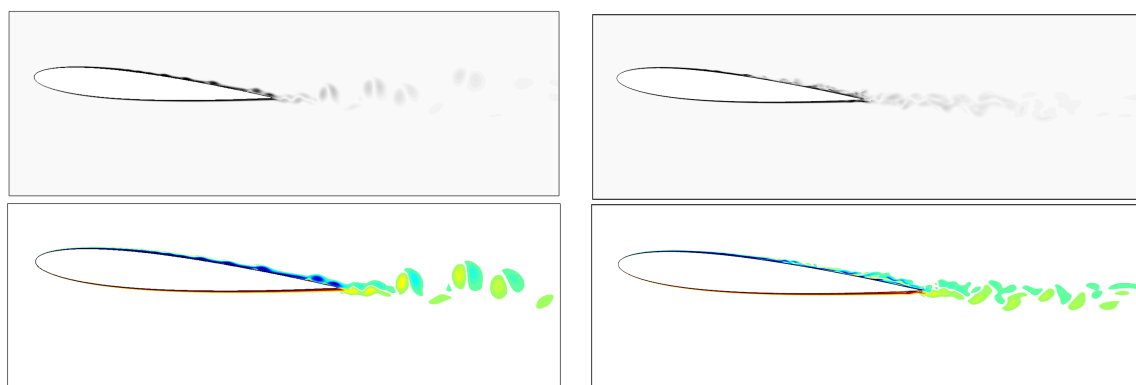


Abb. 3.11: Instantane Visualisierung der Wirbelstärkennorm $\|\omega\|$ (oben) und ω_z (unten): 2-D Konfiguration (links) und 3-D bei $z = 0$ (rechts). Die Farbskala reicht von 0 (weiß) bis $60a_\infty/C$ (schwarz).

mulation dargestellt. Das unterschiedliche Verhalten zwischen zwei- und dreidimensionalen Grenzschichten wird hier gut deutlich: Die Grenzschicht rollt in beiden Fällen im Bereich um $x = 0.3C$ zu Wirbelstrukturen auf. Die im 3-D Fall beobachteten Strukturen ähneln Tollmien-Schlichting Instabilitäten aus anderen Simulationen [105, 107], welche ein charakteristisches Zeichen für den Beginn des laminar-turbulenten Übergangs in einer Grenzschicht darstellen. Während die Wirbel im 2-D Fall laminar bleiben und stromab größer werden, setzt im 3-D Fall in diesem Bereich die Transition zur Turbulenz ein, in dessen Verlauf die Wirbel in Stromrichtung gestreckt werden, in kleinere Strukturen zerfallen und schließlich die Grenzschicht turbulent werden lassen. Davidson beschreibt in [108] S.569ff. ausführlich die Eigenschaften „zweidimensionaler“ Turbulenz. Dieses prinzipielle Verhalten zeigt sich in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Marsden *et al.* [105, 38]. Auch der Nachlauf ist zu unterscheiden: Bei der zweidimensionalen Strömung erfolgt eine Wirbelpaarung mit bestimmter Frequenz, was zu einem Druckspektrum mit Frequenzpeak führen sollte. Bei der in z -Richtung erweiterten Konfiguration ist der Nachlauf durch Strukturen diverser Längenskalen gekennzeichnet.

Der Verlauf des Druckbeiwertes, C_p , entlang der Profilkontur ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Im zweidimensionalen Fall ist er in guter Übereinstimmung mit der XFOIL-Lösung, die Abweichung an der Oberseite resultiert aus dem Aufrollen der Grenzschicht bei $x/C \approx 0.3$ und die Abweichung bei $x/C \approx 1$ ist auf die abgerundete Hinterkante und die entstehende Ablöseblase an dieser Stelle (siehe Abbildung 3.14) zurückzuführen. Der C_p -Verlauf der 3-D Simulation wird mit den Ergebnissen von Wolf [106] verglichen und ist diesen sehr ähnlich. Bei Ref. [106] setzt die laminar-turbulente Transition etwas früher und abrupter ein, die Ursache dafür wird in einer schwächeren artifiziellen Viskosität bei der Referenzsimulation vermutet. Der Reibungsbeiwert, C_f , auf der Flügeloberfläche ist in Abbildung 3.13 zu sehen. In Abbildung 3.14 fällt auf, dass die Rezirkulationsgebiete qualitativ sehr ähnlich sind und sich in Stromrichtung auf gleicher Position befinden. Im dreidimensionalen Fall befinden sie sich allerdings weiter von der Profilkontur entfernt. Abbildung 3.15 zeigt kolorierte Isoflächen von Q , Glg. (2.13), wobei die Farbskala mit der Wirbelstärkemagnitude korrespondiert. Dabei beschreibt Q das lokale Gleichgewicht zwischen Rotation und Scherung in allen Raumrichtungen. Für den Fall $Q > 0$ überwiegt die Rotation die Scherung, was aber noch keine hinreichende Bedingung für einen Wirbel darstellt. Es ist zu sehen, dass die Grenzschicht bei $x \approx 0.3C$ beginnt aufzurollen. Bei $x \approx 0.45C$ lösen die instabilen Wirbelrollen von der Oberfläche ab und es bilden sich Hufeisenwirbel. Der Transitionsbereich erstreckt sich zwischen $0.3 \leq x/C \leq 0.6$ und zeigt den klassischen Übergang (beschrieben in Davidson [108], S. 11,107ff. und 443-444) von zwei- zu

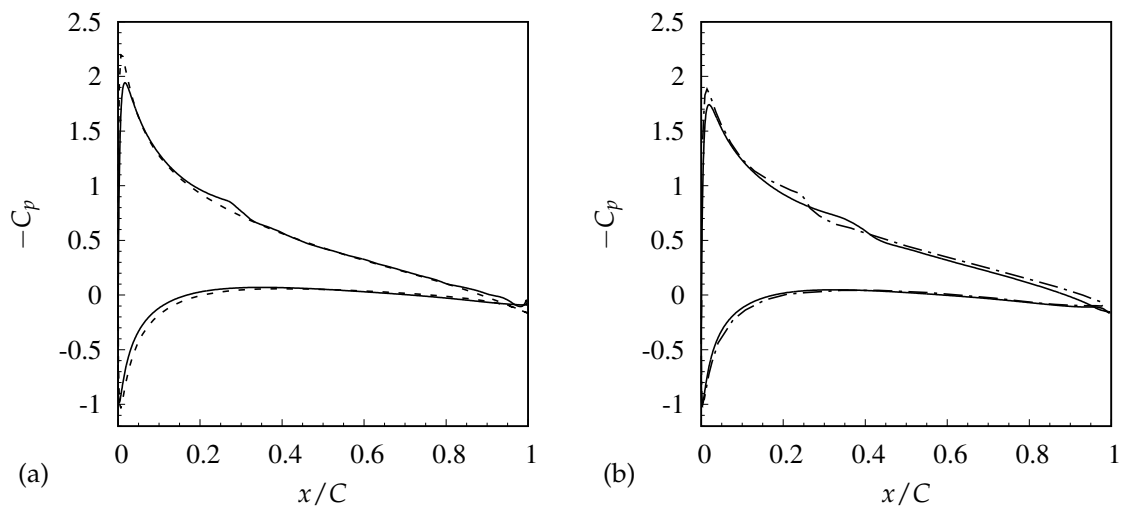


Abb. 3.12: Verlauf des negativen Druckbeiwerts, $-C_p = (p_\infty - \bar{p}) / (0.5\bar{\rho}u_\infty^2)$, auf der Flügeloberfläche für (a) 2-D und (b) 3-D: —, Simulation; ---, XFOIL viskos; - · -, Wolf [106].

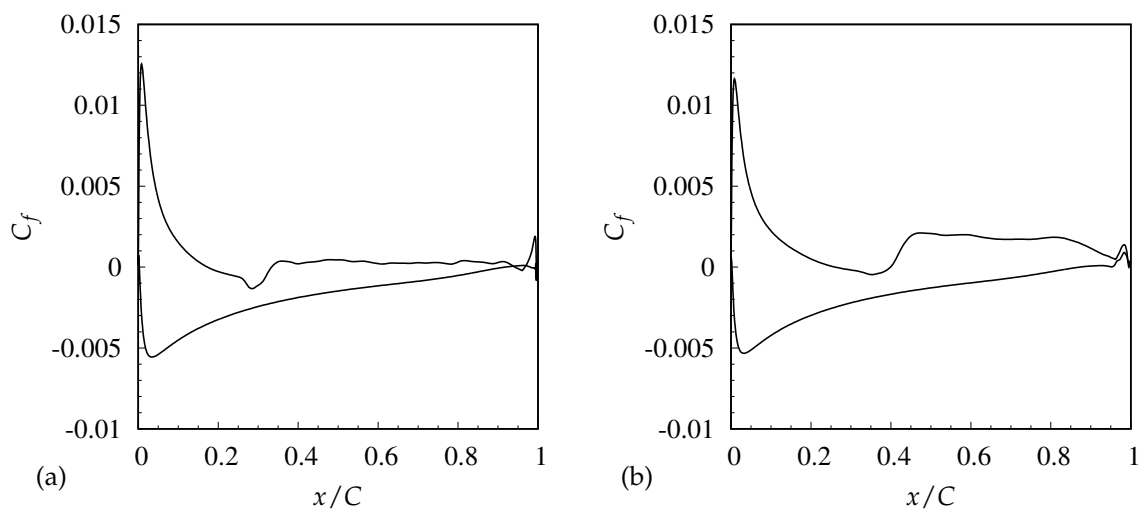


Abb. 3.13: Verlauf des Reibungsbeiwerts, $C_f = \tau_w / (0.5\bar{\rho}u_\infty^2)$ mit $\tau_w = \mu d\bar{u}/dy|_w$, auf der Flügeloberfläche für (a) 2-D und (b) 3-D.

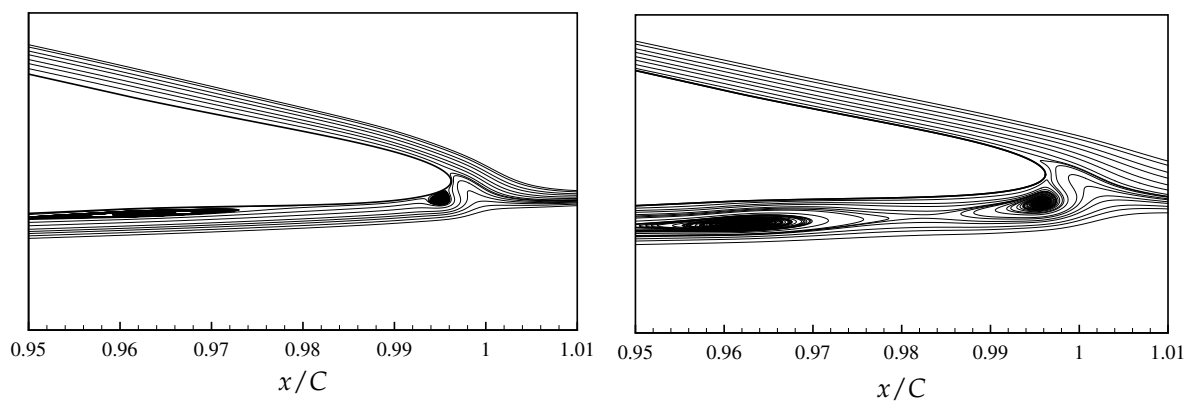


Abb. 3.14: Stromlinien der mittleren Strömung: 2-D (links), 3-D (rechts).

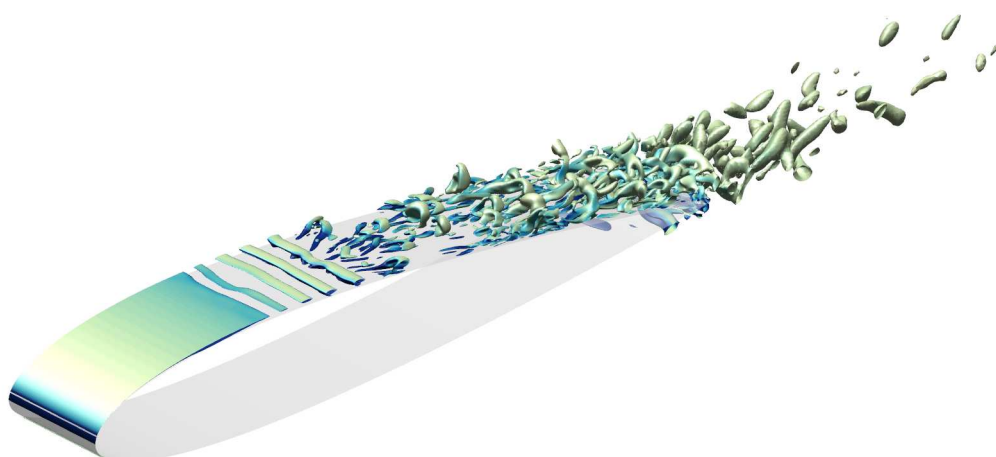


Abb. 3.15: Turbulente Strukturen visualisiert mit dem Q -Kriterium. Gezeigt sind die Isoflächen von $Q = 7a_\infty^2/C^2$. Die Farbskala repräsentiert die Wirbelstärkennorm $\|\omega\|$, sie reicht von 0 (gelb) bis $60a_\infty/C$ (blau).

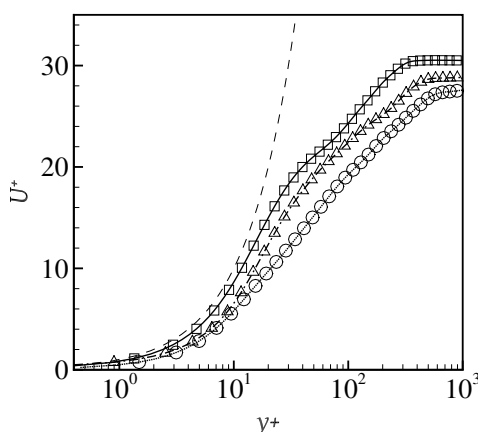


Abb. 3.16: Mit u_τ normierte Geschwindigkeitsprofile aufgetragen über der Wandeinheit y^+ in der oberen Grenzschicht für die Positionen: \square , $x/C = 0.78$; \triangle , $x/C = 0.89$ und \circ , $x/C = 0.97$. ---, $U^+ = y^+$.

dreidimensionalen Instabilitäten über Λ -Wirbel und Hufeisenwirbel bis hin zur voll turbulenten Grenzschicht.

Der Verlauf der normierten mittleren Geschwindigkeit, $U^+ = \bar{u}/u_\tau$, in der Grenzschicht aufgetragen über der Wandeinheit y^+ ist in Abbildung 3.16 zu sehen. Die drei Zonen viskose Unterschicht, logarithmische Zwischenschicht und Außenbereich sind deutlich zu erkennen; die Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit anderen Simulationen (siehe Ref. [38] und [106] S.189). In Abbildung 3.17 sind die Geschwindigkeitsfluktuationen u' und v' für unterschiedliche x -Werte in Spannweitenrichtung aufgetragen (der Abstand zur Profilloberfläche beträgt $h_y = 0.0032C$ was einem Wandabstand von $h_y^+ = h_y u_\tau / \nu \simeq 54$ entspricht). Wie zu erwarten sind die longitudinalen Fluktuationen stärker als die transversalen. Als Kriterium für eine hinreichende Ausdehnung des Simulationsgebiets in Spannweitenrichtung, wird der

Abfall der Zweipunktkorrelation

$$\mathcal{R}_{ij}^{(z)}(z, r_z, t) = \frac{\langle u'_i(z, t) u'_j(z + r_z, t) \rangle}{\langle u'_i(z, t)^2 \rangle^{1/2} \langle u'_j(z, t)^2 \rangle^{1/2}}$$

innerhalb $L_z/2$ auf nahe Null gefordert. In homogene Richtung kann die Zweipunktkorrelation via Fouriertransformation des eindimensionalen Energiespektrums

$$\mathcal{R}_{ii}^{(z)}(r_z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{E_{ii}^{(z)}(k_z)}{\langle u_i'^2 \rangle} \right\} = \int_0^\infty \frac{E_{ii}^{(z)}(k_z)}{\langle u_i'^2 \rangle} \cos(k_z r_z) dk_z$$

berechnet werden. Das eindimensionale Energiespektrum wird berechnet mit

$$E_{ii}(k_z) = |\hat{u}_i(k_z)|^2 = \hat{u}_i(k_z) \hat{u}_i^*(k_z),$$

wobei $\hat{u}_i(k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty u'_i(z) e^{-ik_z z} dz$ die Fouriertransformierte des Signals $u'_i(z)$ und $\hat{u}_i^*(k_z)$ die konjugiert Komplexe ist.

Abbildung 3.18 zeigt die Energiespektren und die Zweipunktkorrelationen in Spannweitenrichtung für zwei unterschiedliche Positionen auf der Saugseite. Es ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeitsfluktuationen schon bei $x = 0.5C$ innerhalb der halben Gebietsbreite auf nahe Null abklingen, für $x = 0.95C$ sind sie kaum noch korreliert. Die Druckkorrelation, zu sehen in Abbildung 3.19, klingt ebenfalls innerhalb des Simulationsgebiets auf Werte nahe Null ab. Die kenntlich gemachte Helmholtzzahl von $k_z C = 240$ korrespondiert mit einer Wellenlänge der aerodynamischen Druckfluktuationen von $\lambda \approx 0.026C$.

Laut Hwang *et al.* [109] gibt es keine universelle Skalierung, die zu einem zufriedenstellenden Abfall der Druckspektren bei allen Frequenzen führt. Nach Gravante *et al.* [110] sollte das Wanddruckspektrum einem Potenzgesetz $\Phi(\omega) \propto \omega^n$ folgen, wobei n vom Frequenzbereich des turbulenten Spektrums abhängt. Sie beschreiben drei Frequenzbereiche des Spektrums, die $\Phi(\omega) \propto \omega^{-1}$, $\Phi(\omega) \propto \omega^{-7/3}$ und $\Phi(\omega) \propto \omega^{-5}$ aufweisen. Ein Abfall proportional zu ω^{-1} und $\omega^{-7/3}$ steht mit Druckfluktuationen im logarithmischen Teil der Grenzschicht bzw. im oberen Teil der Pufferzone in Verbindung. Das ω^{-5} -Verhalten korrespondiert mit Druckfluktuationen in der Grenzschicht unterhalb $y^+ \approx 20$. In Abbildung 3.19 ist zu sehen, dass die LES in der Lage ist, das ω^{-5} -Verhalten zu erfassen und damit die Grenzschicht adäquat aufzulösen.

In Abbildung 3.20 sind die λ_2 -Isokonturen, koloriert mit der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung zu sehen. Für negative Werte von λ_2 weist der Druck ein lokales Minimum auf. Die Visualisierung des λ_2 -Kriteriums liefert so eine erste qualitative Sicht auf die Kohärenz der aerodynamischen Druckfluktuationen in Wandnähe. In Abbildung 3.21 sind die Geschwindigkeitsfluktuationen der zweidimensionalen Strömung für unterschiedliche x -Positionen in der oberen Grenzschicht über der Zeit aufgetragen. Sie sind deutlich regelmäßiger als im 3-D Fall und die y -Komponente wächst stromab an und wird im Nachlauf größer als u' . Aus der Abbildung kann eine Periodendauer von etwa $0.5C/a_\infty$ abgelesen werden, dies entspricht einer Frequenz von $f_v = 2a_\infty/C$ und die Wellenlänge wird abgeschätzt mit $\lambda_v \approx u_\infty/f_v = 0.2C$. Die Leistungsdichtespektren der Geschwindigkeitsverläufe in Stromrichtung bei $x = 0.65C$ und $x = 0.95C$, sind in Abbildung 3.22 gegeben. Die dominante Frequenz korrespondiert mit einer Strouhalzahl, basierend auf der Profildicke, von $St_{0.12c} = f_v 0.12C/u_\infty = 0.6$. Die korrespondierende dominante Wellenlänge ist $\lambda = u_\infty/f_v = 0.12C/St_{0.12c} = 0.2C$ und damit in guter Übereinstimmung mit $\lambda = C/4.5$, der von Marsden *et al.* [105] bestimmten Wellenlänge. Abbildung 3.23 zeigt das Druckspektrum und den Druckverlauf im akustischen Nahfeld bei $x = 0.5C$ auf der Saug- und Druckseite des Profils.

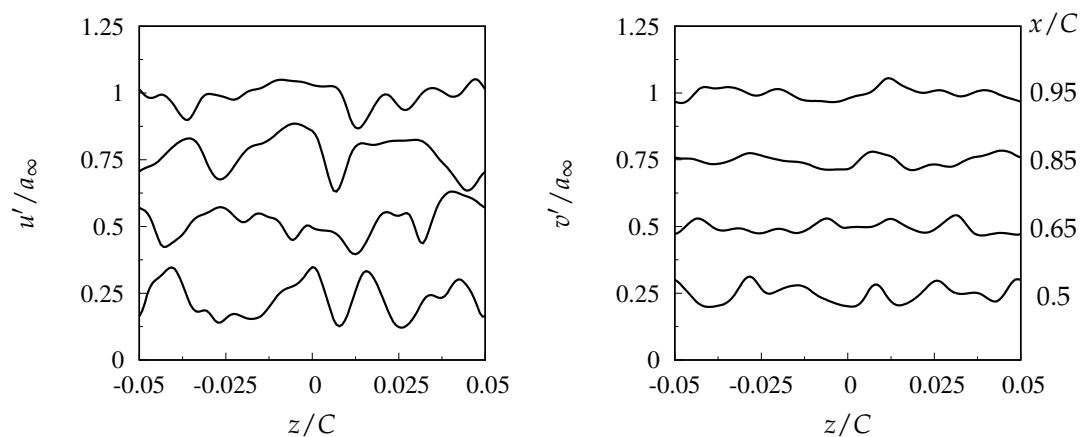


Abb. 3.17: 3-D NACA: Geschwindigkeitsfluktuationen in z -Richtung in der Grenzschicht der Saugseite bei $y^+ \simeq 54$. Werte um beliebigen Betrag (0.25, 0.5, ..., 1) geschiftet.

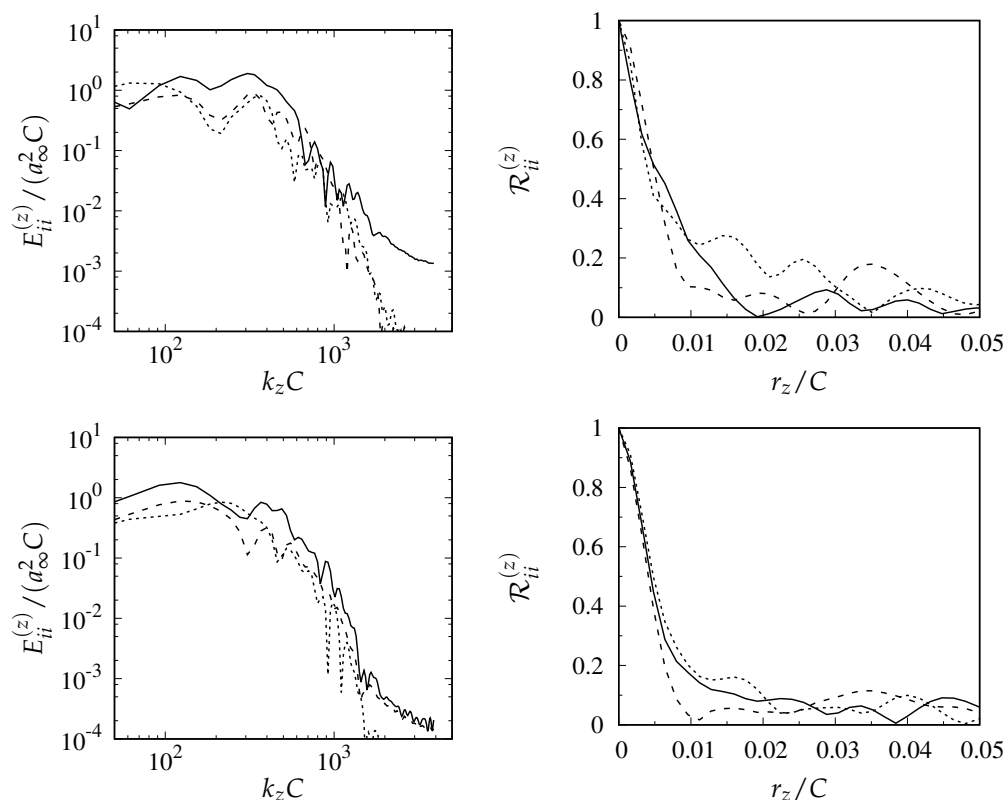


Abb. 3.18: 3-D NACA: Energiespektrum (*links*) und Korrelationsfunktion (*rechts*) in Spannweitenrichtung bei $x = 0.5C$ (*oben*) und $x = 0.95C$ (*unten*) in der Grenzschicht der Saugseite für $i =: u'$ (—), v' (- -) und w' (· · ·).

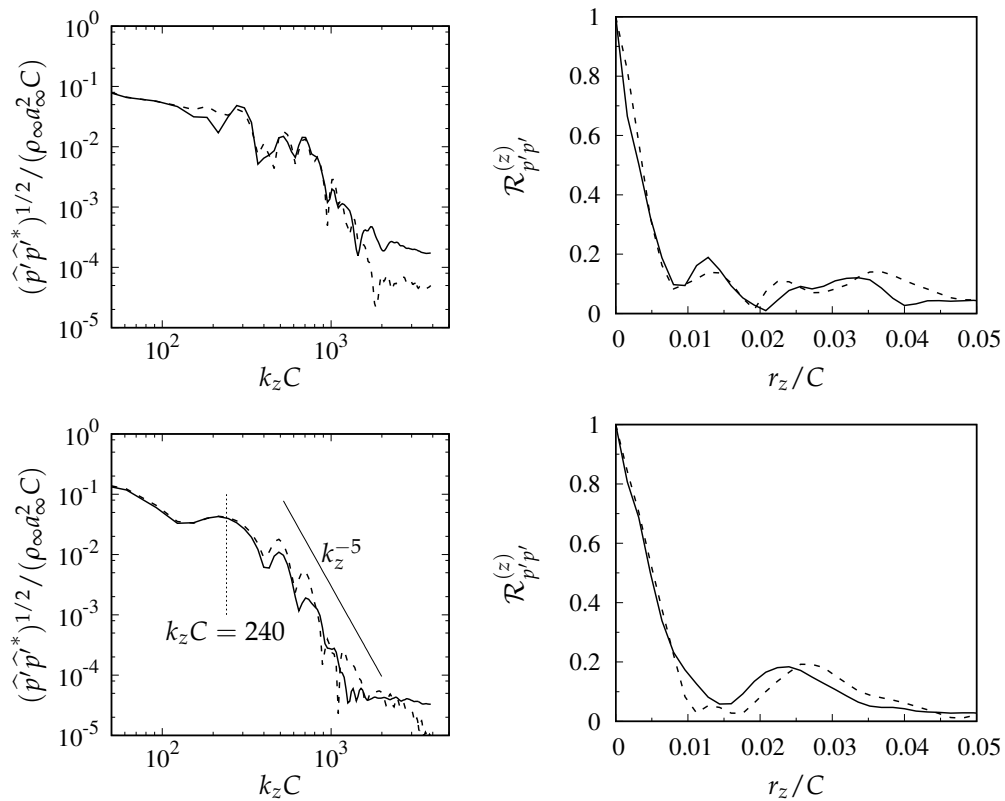


Abb. 3.19: 3-D NACA: Spektrum des Drucks und Korrelation der Saugseite bei $x = 0.5C$ (oben) und $x = 0.95C$ (unten): auf der Oberfläche (—) und in der Grenzschicht (- -).

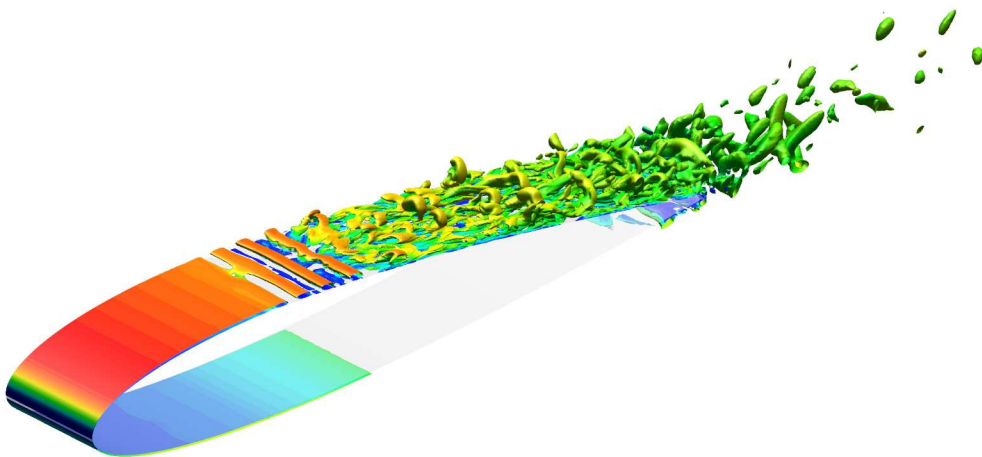


Abb. 3.20: Darstellung der Isoflächen von $\lambda_2 = -7a_\infty^2 / C^2$ koloriert mit der Longitudinalgeschwindigkeit, von $u = 0$ (blau) zu $u = 0.6a_\infty$ (rot).

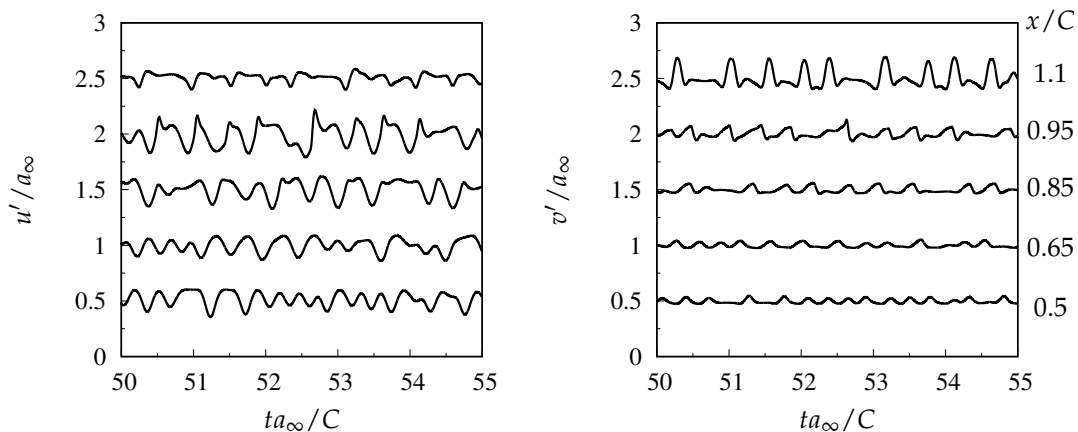


Abb. 3.21: 2-D NACA: Geschwindigkeitsfluktuation in der Grenzschicht und im Nachlauf. Werte um beliebigen Betrag (0.5, 1, ..., 2.5) geschiftet.

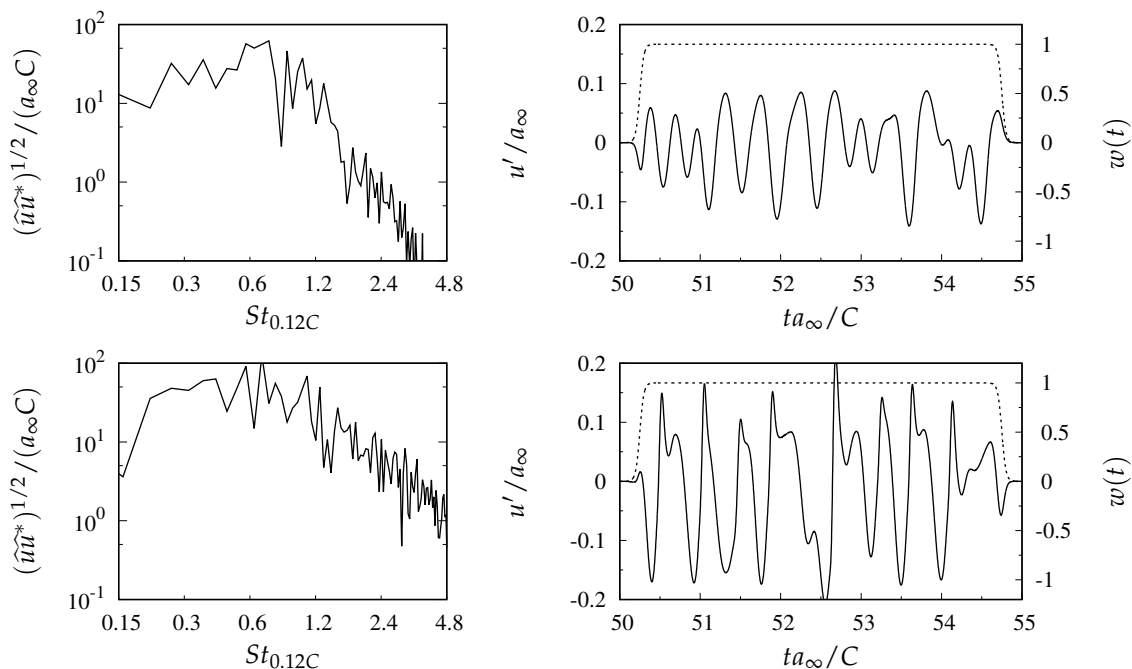


Abb. 3.22: 2-D NACA0012: Amplitudenspektrum und gefensterter Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht der Saugseite bei $x = 0.95C$ (oben) und $x = 0.65C$ (unten). Fensterfunktion $w(t)$.

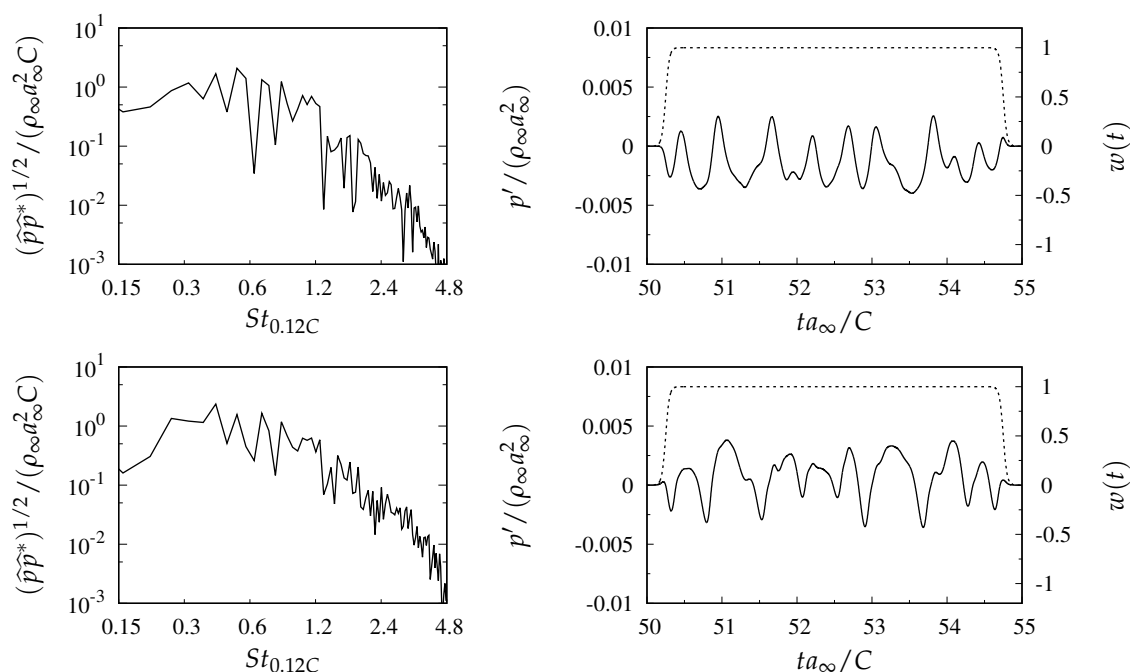


Abb. 3.23: 2-D NACA0012: Druckspektrum der Saugseite bei $(x, y) = (0.5C, 0.3C)$ (oben) und Druckseite bei $(x, y) = (0.5C, -0.3C)$ (unten). Der gefensterter Druckverlauf ist jeweils rechts dargestellt.

Akustisches Feld. Ausgehend von einer Momentaufnahme des akustischen Nah- und Fernfeldes der zweidimensionalen Konfiguration, soll nun die Schallemission kurz diskutiert werden. Außerhalb der Scherregionen steht die Divergenz der Geschwindigkeit in direkter Beziehung zum akustischen Druck:

$$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u} \simeq -\frac{1}{\rho_\infty a_\infty^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Sie ist nicht sensitiv bezüglich des mittleren Drucks und eignet sich daher gut zur Visualisierung des akustischen Feldes. Abbildung 3.24 zeigt ein instantanes Divergenzfeld der LES und LEE-Simulation und Konturlinien der Wirbelstärke: Bedingt durch die Interaktion von aerodynamischen Druckfluktuationen (z.B. Druckminima im Wirbelzentrum wie in der Einleitung im Abschnitt zum Tragflügelärm erläutert) mit der Hinterkante, ist die Strahlung stark dipolartig mit einer deutlichen Richtwirkung stromaufwärts. Die Konturebenen der Divergenz im LEE-Gebiet gehen in Form und Farbe sehr gut in die des LES-Gebiets über. Die akustischen Wellen werden ohne signifikante numerische Artefakte aus dem LES-Gebiet in das LEE Gebiet propagiert. Dort überlagern die akustischen Fluktuationen die uniforme Hauptströmung $(\rho_0, u_0, v_0) = (\rho_\infty, 0.4a_\infty, 0)$ und verlassen das Gebiet ohne unphysikalische Reflexionen am Fernfeldrand. Die akustischen Wellen der Ober- und Unterseite des Profils haben an der Hinterkante einen Phasenunterschied von π . Aufgrund der erhöhten Geschwindigkeit auf der Saugseite, sinkt der Betrag der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, $|\bar{u} - a_\infty|$, die Schallwellen werden gestaucht und der Phasenunterschied verschwindet stromauf.

Die Verläufe der Dichte entlang der x -Achse bei $y \approx -0.6C$ sind in Abbildung 3.25 gezeigt. Die ρ -Profile der LES und LEE-Simulation stimmen in Amplitude und Phase sehr gut überein. Auf der Druckseite des Profils ist die Annahme einer uniformen mittleren Strömung am Interface nicht ganz erfüllt, was sich in der etwas höheren mittleren Dichte ($\bar{\rho} > \rho_\infty$) widerspiegelt. Die Abbildungen 3.26 zeigen die Übergabe der LES-Lösung in das LEE-Gebiet in lateraler Rich-

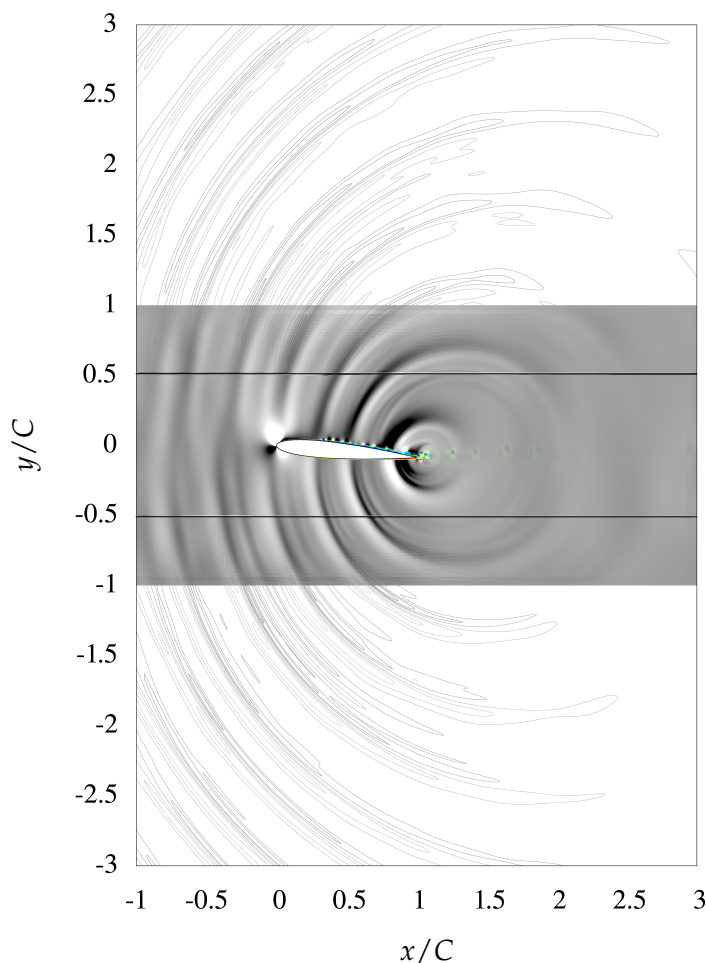


Abb. 3.24: 2-D NACA0012: Divergenzfeld $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ zur Zeit $t = 45C/a_\infty$ mit kontinuierlicher Farbskala zwischen $\Theta = \pm 0.1a_\infty/C$ im NSE Gebiet und 10 Konturebenen im LEE Gebiet. Konturebenen der Wirbelstärke ω_z : min: $-87a_\infty/C$ (blau), max: $87a_\infty/C$ (rot), Inkr.: $4a_\infty/C$. Die Interfaces befinden sich bei $y = \pm 0.5$, gekennzeichnet mit den schwarzen Linien.

tion an unterschiedlichen x -Positionen. Die Abweichung der LES-Lösungen ab $y > 0.6C$ ist auf die laterale Dämpfungszone sowie die Gitterstreckung im LES-Gebiet zurückzuführen. Ein Vergleich der Schallemission in der Grenzschicht und an der Profilhinterkante zwischen zwei- und dreidimensionaler Umströmung ist in Abbildung 3.27 zu sehen: Visualisiert sind die Divergenz und der nicht-lineare Anteil des Lighthill Quellterms $S^n = \partial^2(\rho u'_i u'_j)/\partial x_i \partial x_j$. Die Struktur der Quellterme ähnelt in beiden Fällen sehr stark der dazugehörigen Wirbelstärke in Abb. 3.11. Im zweidimensionalen Fall sind sie kohärent, wachsen im Verlauf stromab an und interagieren dann mit der Hinterkante. Bei der dreidimensionalen Strömung ist dagegen auch eine akustische Abstrahlung aus der Grenzschicht zu erkennen. Die Wirbelstrukturen interagieren hier nicht nur mit der Hinterkante, sondern auch untereinander. Dies deckt sich mit den Beobachtungen in Wolf & Lele [39] wonach bei der untersuchten Machzahl von $M_\infty = 0.4$ nichtlineare Quadrupolquellen (wie sie durch turbulente Interaktion entstehen) eine wichtige Rolle bei der Schallemission der 3-D NACA0012-Konfiguration spielen; für $M_\infty = 0.115$ können diese noch verglichen mit den Dipolquellen vernachlässigt werden. Es scheint als sei nicht das räumliche Anwachsen der Quellen, sondern das Aufbrechen kohärenter Quellen für

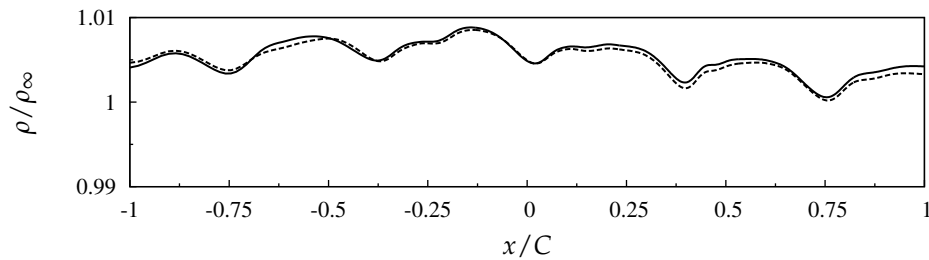


Abb. 3.25: 2-D NACA0012: Dichte zur Zeit $t = 45C/a_\infty$ entlang x bei $y \approx -0.6C$. —, LES, ---, LEE. Die LES Lösung wurde um $-0.0015\rho_\infty$ verschoben.

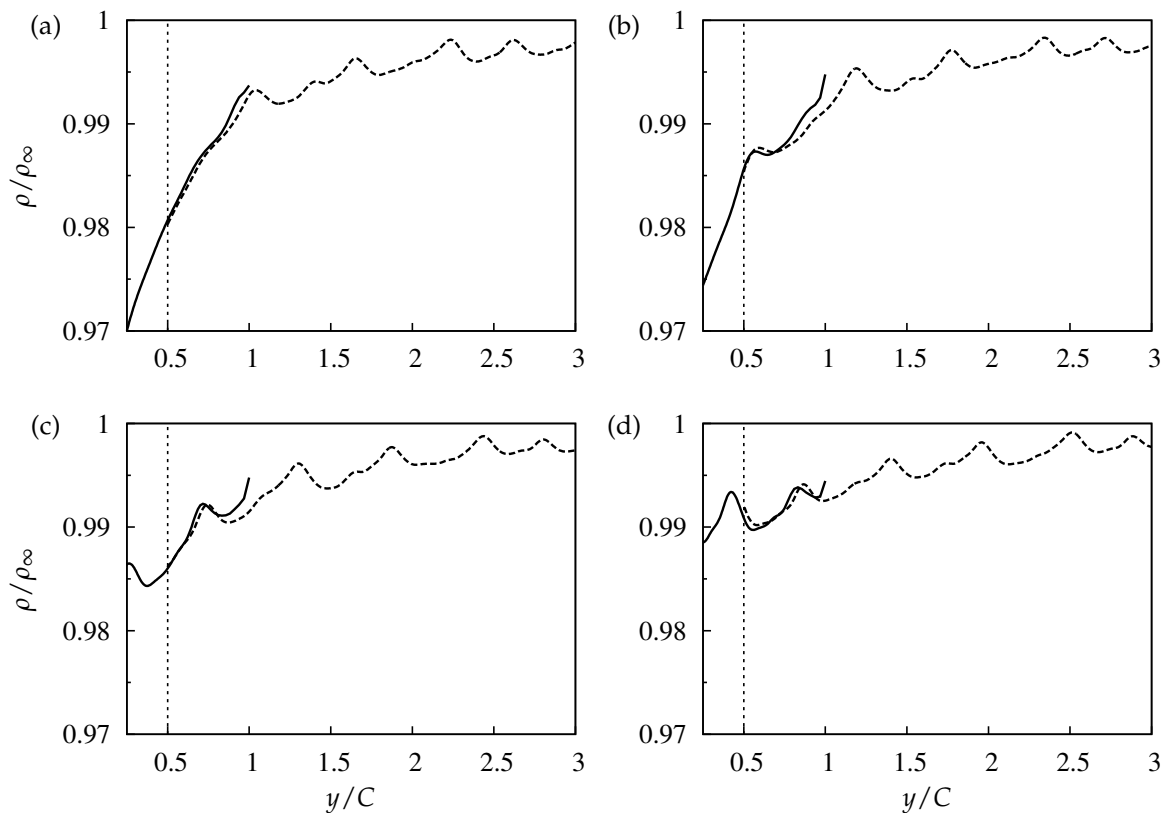


Abb. 3.26: 2-D NACA0012: Dichte zur Zeit $t = 45C/a_\infty$ entlang y bei (a) $x \approx 0.36C$, (b) $x \approx 0.5C$, (c) $x \approx 0.64C$, (d) $x \approx 0.78C$. —, NSE-Simulation, --- LEE-Simulation. Die vertikale Linie kennzeichnet das Interface. Im Bereich $0.5 < |y/C| < 1$ wirken die Gitterstreckung und Dämpfungszone auf die NSE-Lösung.

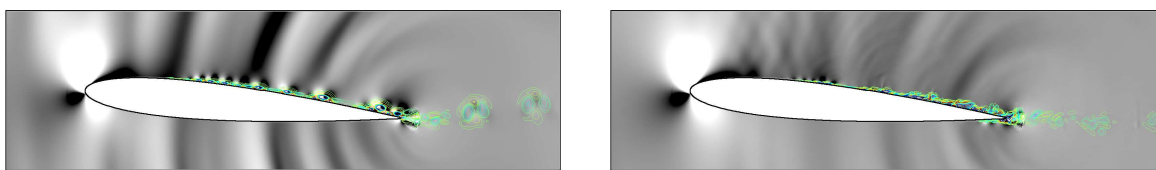


Abb. 3.27: Instantane Visualisierung der nicht-linearen Komponente des Lighthill Quellterms, $S^n = \partial^2(\rho u_i' u_j') / \partial x_i \partial x_j$, und der Dillatation Θ . 2-D Konfiguration (*links*) und 3-D (*rechts*). Farbskala von blau zu rot zwischen $S^n = \pm 160 \rho_\infty a_\infty^2 / C^2$; Farbskala der Dillatation wie in Abb. 3.24.

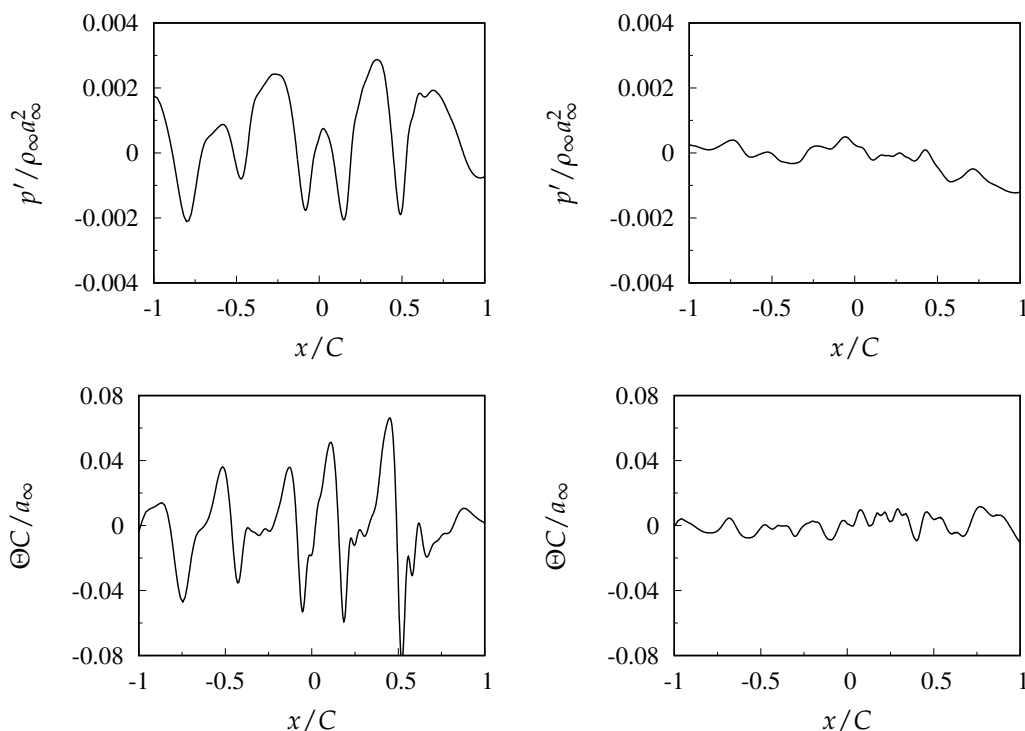


Abb. 3.28: Druckfluktuation (*oben*) und Dillatation (*unten*) bei $y \simeq -0.6C$: 2-D NACA (*links*), 3-D NACA (*rechts*).

die Emission von Schall verantwortlich. Bei der zweidimensionalen Umströmung kommt es dazu nur an der Hinterkante, bei der dreidimensionalen auch innerhalb der Grenzschicht. Insgesamt ist die Dillatation des Geschwindigkeitsfeldes, zu sehen in Abbildung 3.28, und damit die Schallintensität, im 3D-Fall geringer. In den Leistungsdichtespektren des Drucks im akustischen Bereich (Abbildung 3.29) ist eine Erhöhung im Bereich um die Helmholtzzahl $kC = 17$ zu erkennen. Dies entspricht einer Wellenlänge von $\lambda \simeq 0.37C$, welche auch aus z.B. Abb.3.25 heraus gelesen wird.

Damit wird die Validierung der oben vorgestellten LES-LEE-Prozedur hier abgeschlossen und das Verfahren als hinreichend validiert angesehen.

3.2 Integrale-Methode basierend auf FWH

Durch geschickte Umformungen der strömungsmechanischen Grundgleichungen entwickelte Lighthill [11] 1952 ohne Näherungen und Linearisierungen die inhomogene lineare Wellen-

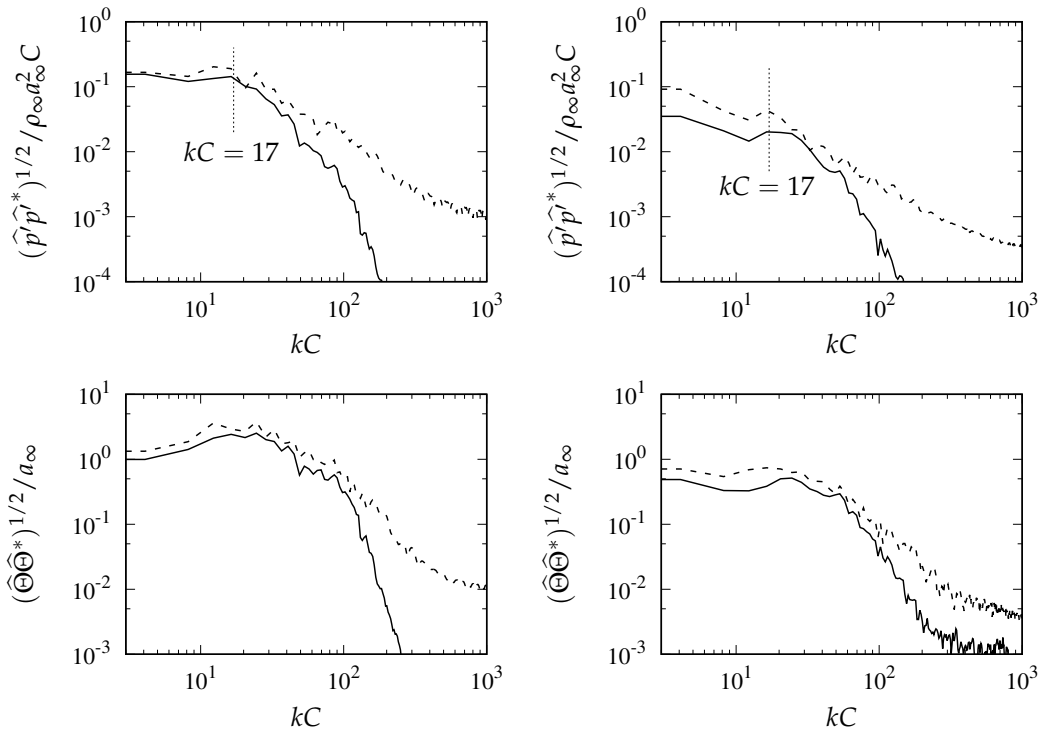


Abb. 3.29: Fouriertransformation der Druckfluktuation (*oben*) und Dillatation (*unten*) bei $y \simeq -0.6C$: 2-D NACA (*links*), 3-D NACA (*rechts*): —, mit Hanning Fensterung; - - -, ohne Fensterung.

gleichung

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_\infty^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3.15)$$

wobei $T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - a_\infty^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}$ dabei der Lighthillspannungstensor, ρ die Dichte, u_i die Geschwindigkeit in i -Richtung, τ_{ij} der Spannungstensor, ρ' die Dichtefluktuation und a_∞ die Schallgeschwindigkeit in der Umgebung ist. Da der mittlere Druck, \bar{p} , im Fall freier Scherschichten annähernd uniform ist und die Druckfluktuation, $p' \equiv p'_{dy} + p'_{ac} = p - \bar{p}$, sich in der uniformen Außenströmung auf $p' = p'_{ac} = a_\infty^2 \rho'$ reduziert, verschwindet T_{ij} dort.

Zur Berechnung der akustischen Dichte ρ' müssen im Quellgebiet $\Omega_s \in \Omega_{CFD}$ (vgl. schematische Darstellung 1.5), welches alle relevanten akustischen Quellen umschließt, T_{ij} oder Vereinfachungen davon berechnet und abgespeichert werden. Im zweiten Schritt wird dann die Lighthill-Gleichung (3.15) im gesamten Gebiet Ω_{CAA} numerisch gelöst, indem zu jedem Zeitschritt der zuvor abgespeicherte Quellterm eingelesen wird. Randbedingungen infolge in der Strömung befindlicher Objekte werden in (3.15) nicht berücksichtigt, wodurch die Analogie auf freie Scherströmungen mit Volumenquellen (Quardupole) beschränkt ist.

Curle [111] erweiterte 1955 die Analogie von Lighthill um den Einfluss fester Berandungen in der Strömung. Dazu erfasst die Curle-Lighthill Analogie zu den Quardupolen auch den Beitrag von akustisch sehr effektiven Dipolen, welche durch die akustische Aufladung von Oberflächen (z.B. Tragflügel) entstehen. Damit war es möglich auch Effekte wie die Reflexion und Brechung an stationären Objekten in der Strömung zu erfassen.

Ffowcs Williams & Hawkins [58] (FWH) erweiterten diese Theorie so, dass eine beliebige Bewegung der Objekte möglich wurde. Abhängig von der Bewegung des Beobachters und des

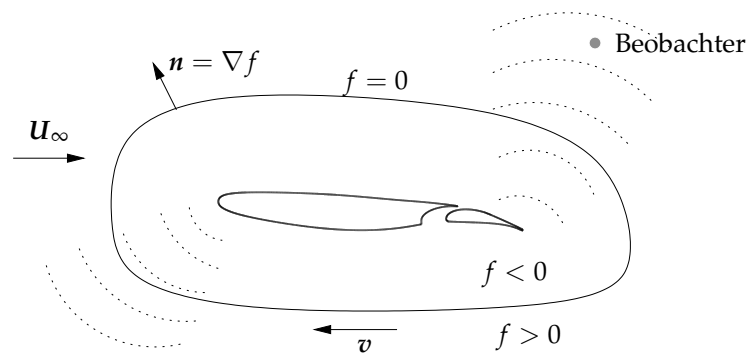


Abb. 3.30: Schematische Darstellung der FWH-Analogie mit durchlässiger Integrationsfläche.

ihn umgebenden Fluids lassen sich drei Problemtypen klassifizieren: (i) Beobachter und Umgebung befinden sich in Ruhe (z.B. Flug über Mikrofonarray), (ii) Beobachter wird konstant bewegt (z.B. Mikrofon montiert an Tragflügel), und Problem (iii) mit stationärem Beobachter und uniform bewegtem Umgebungsmittel (z.B. Messungen in einem Windkanal). In allen drei Fällen kann zudem das Kontrollvolumen bewegt oder ortsfest sein.

Je nach Fall wurden spezielle Lösungen der FWH-Gleichung hergeleitet. Ursprünglich wurden die jeweiligen Quellanteile auf der Objekt Oberfläche und im Volumen erfasst. Mit der Formulierung von Di Francescantonio [112] war es möglich die Quellen weit entfernt von den physikalischen Oberflächen auf einer durchlässigen Integrationsfläche zu erfassen, was die praktische Umsetzung des Verfahrens deutlich vereinfachte und die Vernachlässigung der rechenintensiven Volumenquellen ermöglichte. Brentner & Farassat [113] untersuchten ausführlich den Einfluss der Lage der Integrationsfläche auf den berechneten Schalldruckpegel bei Rotorlärm. Die Autoren Uzun *et al.* [114, 115], Shur *et al.* [116], Mendez *et al.* [26], Nichols *et al.* [117, 27] und Brès *et al.* [28] wendeten das Verfahren zur Berechnung von Freistrahllärm an. Wolf *et al.* [39] und Zhong & Zhang [118] setzten die Analogie erfolgreich bei der Vorhersage von Tragflügellärm ein.

Aktuell ist die FWH-Analogie einer der allgemeinsten Ansätze zur Schallfeldberechnung. Für die Vorhersage des akustischen Fernfelds der Freistrah-Klappen Interaktion, basierend auf einer akkuraten, instationären Strömungssimulation, scheint die Ffowcs Williams & Hawkings Analogie gut geeignet und wurde daher zu diesem Zweck in das OVERTURE Paket implementiert. Der entwickelte FWH-Löser ermöglicht die parallele und simultane Berechnung des akustischen Drucks auf der Grundlage von CFD-Simulationen mit überlappenden Gittern und in Anwesenheit einer Hintergrundströmung. Der Löser und dessen Validierung wurden in [119] veröffentlicht.

3.2.1 Theorie

Die Integrationsfläche S (auch Kontrollfläche genannt) wird mathematisch durch die Funktion $f(x, t)$ definiert. Auf der Kontrollfläche ist $f = 0$ und $|\nabla f| = 1$, im Inneren ist $f < 0$ und außerhalb des Kontrollvolumens ist $f > 0$; $\nabla f = \hat{n}$ ist der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor (Abbildung 3.30 veranschaulicht dies schematisch). Weiter wird benötigt die Heavisidefunktion $H(f)$, definiert als

$$H(f) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f < 0, \\ 1, & \text{wenn } f \geq 0. \end{cases}$$

Der Gradient von $H(f)$ ist gegeben mit

$$\frac{\partial H(f)}{\partial x_i} = \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \hat{n}_i \delta(f),$$

wobei $\delta(f)$ die Dirac δ -Funktion ist. Die zeitliche Ableitung von $H(f)$ folgt aus

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla f \delta(f) = -v_n \delta(f),$$

wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit der Integrationsfläche ist.

Bei den in dieser Arbeit untersuchten Konfigurationen treten die oben genannten Fälle (i) und (iii) auf. Die für diese Fälle entwickelten FWH-Formulierungen wurden für eine durchlässige Integrationsfläche implementiert und werden im Folgenden beschrieben.

Formulierung ohne Konvektion

Die für Fall (i) mit ruhendem Bobachter ohne Hauptströmung verwendete Formulierung für eine durchlässige Integrationsfläche wurde von Brentner & Farassat [113] vorgestellt. Die diskrete Ffowcs Williams & Hawkings Gleichung für diesen Fall kann geschrieben werden als:

$$\square^2 p'(\mathbf{x}, t) H(f) = \frac{\partial}{\partial t} [(\rho_0 U_n) \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij} H(f)] \quad (3.16)$$

mit $\square^2 = \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ als dem Wellenoperator, a_∞ der Schallgeschwindigkeit, $p' = \rho' a_\infty^2$ dem akustischen Druck, der Dichtefluktuations ρ' und der mittleren Dichte ρ_0 . Die Ausdrücke auf der rechten Seite von (3.16) sind definiert mit:

$$\begin{aligned} U_n &= U_i \hat{n}_i = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) v_i \hat{n}_i + \frac{\rho u_i}{\rho_0} \hat{n}_i, \\ L_i &= L_{ij} \hat{n}_j = \rho u_i (u_j - v_j) \hat{n}_j + P_{ij} \hat{n}_j, \\ T_{ij} &= \rho u_i u_j + P_{ij} - a_\infty^2 \delta_{ij} \rho', \end{aligned}$$

wobei ρ die totale Dichte, ρu_i der Impuls in i -Richtung, P_{ij} der kompressive Spannungstensor und v_i die Geschwindigkeit auf der Integrationsfläche $f = 0$ ist. Für ein viskoses Fluid ist $P_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij}$ wobei $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$ und δ_{ij} das Kroneckerdelta ist. Der Schallbeitrag des viskosen Terms in P_{ij} ist im Allgemeinen vernachlässigbar [28], sodass $P_{ij} = (p - p_0) \delta_{ij}$. Die Projektion eines Vektorwertes in Richtung der Flächennormalen wird mit dem Index n gekennzeichnet.

Die integrale Formulierung der Gleichung (3.16) für ein beliebig bewegtes Kontrollvolumen mit Strömung auf der Kontrollfläche lautet dann (Brentner & Farassat [113]):

$$p'(\mathbf{x}, t) = p'_T(\mathbf{x}, t) + p'_L(\mathbf{x}, t) + p'_Q(\mathbf{x}, t), \quad (3.17)$$

mit⁵

$$\begin{aligned}
4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) &= \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0(\dot{U}_n + U_{ii})}{r(1 - M_r)^2} \right]_{\text{ret}} dS \\
&\quad + \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n (r\dot{M}_r + a_\infty(M_r - M^2))}{r^2(1 - M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS, \\
4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{a_\infty} \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{r(1 - M_r)^2} \right]_{\text{ret}} dS \\
&\quad + \int_{f=0} \left[\frac{L_r - L_M}{r^2(1 - M_r)^2} \right]_{\text{ret}} dS \\
&\quad + \frac{1}{a_\infty} \int_{f=0} \left[\frac{L_r(r\dot{M}_r + a_\infty(M_r - M^2))}{r^2(1 - M_r)^3} \right]_{\text{ret}} dS,
\end{aligned}$$

wobei $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ der Abstand zwischen der Quelle bei \mathbf{y} und dem Beobachter \mathbf{x} ist. Der Punkt \cdot kennzeichnet die Zeitableitung zur Quellzeit τ , der Index r und n meint das Skalarprodukt des Vektors mit dem Einheitsvektor in Abstrahlrichtung $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/r$ bzw. Flächennormalenrichtung $\hat{\mathbf{n}}$; $M = |\mathbf{M}|$ und $L_M = L_i M_i$, wobei $M_i = v_i/a_\infty$ die lokale Machzahl von $f = 0$ in i -Richtung ist. $M_r = M_i \hat{r}_i$ ist die Machzahl mit der sich der Quellpunkt auf den Beobachter zu bewegt. Der Ausdruck $[\dots]_{\text{ret}}$ kennzeichnet die Auswertung zur retardierten Zeit (Emissionszeit)

$$\tau_e = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau_e)|}{a_\infty} = t - \frac{r}{a_\infty}. \quad (3.18)$$

Die Terme in Gleichung 3.17 korrespondieren mit jenen in Gleichung 3.16 und erhalten im Fall einer *undurchlässigen* Integrationsfläche die physikalische Bedeutung von Thickness-, Loading- und Quadrupol-Lärm Termen. Der Term $p'_Q(\mathbf{x}, t)$ berücksichtigt alle Quadrupole außerhalb der Integrationsfläche ($f > 0$). Liegen alle akustischen Quellen innerhalb der Integrationsfläche, wie bei den Untersuchungen hier, darf dieser Term vernachlässigt werden. Im Fall einer *durchlässigen* Integrationsfläche, ist die Separation in p'_T , p'_L und p'_Q lediglich von mathematischer Bedeutung [113, 120].

Da alle Simulationskonfigurationen in dieser Arbeit stationär sind, ist der Ortsvektor \mathbf{y} nicht von τ_e abhängig. Für eine stationäre Integrationsfläche ($v_i = 0$) ist $M_r = 0$ und die Terme vereinfachen sich zu:

$$4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{r} \right]_{\tau_e} dS, \quad (3.19)$$

$$4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{a_\infty r} + \frac{L_r}{r^2} \right]_{\tau_e} dS, \quad (3.20)$$

mit

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{\rho u_n}{\rho_0}, \\
L_i &= \rho u_i u_n + P_{ij} \hat{n}_j.
\end{aligned}$$

⁵Um mathematisch korrekt zu bleiben, müssten die Ausdrücke für den akustischen Druck jeweils $p'H(f)$ lauten. Da sich die Beobachterpunkte aber gewöhnlich außerhalb der Integrationsfläche $f = 0$ befinden, wird zur besseren Lesbarkeit meist darauf verzichtet.

Bei manchen der hier untersuchten Fälle der Freistrahklappen Konfiguration liegt eine uniforme Hintergrundströmung (co-flow) vor, die klassische Formulierung berücksichtigt jedoch nicht die Anwesenheit einer Hauptströmung. Durch eine Galilei-Transformation ließe sich das Problem zwar in ein äquivalentes Problem, bestehend aus der Kombination der Fälle (i) und (ii) mit bewegter Integrationsfläche, transformieren, was aber fehleranfällig ist und in manchen Fällen unkorrekte Ergebnisse liefert [121]. Aus diesem Grund wurde eine uniforme Konvektion explizit in den Gleichungen berücksichtigt.

Formulierung mit uniformer Konvektion

Casalino [122, 123] erweiterte die Formulierung von Brentner & Farassat [113] für einen mit der konstanten Geschwindigkeit $a_\infty \mathbf{M}_o$ bewegten Beobachter und schlug vor, eine uniforme Hauptströmung, \mathbf{U}_∞ , durch die Bewegung des Beobachters mit $a_\infty \mathbf{M}_o = -\mathbf{U}_\infty$ und eine ebenfalls mit $\mathbf{v} = -\mathbf{U}_\infty$ bewegte Integrationsfläche implizit zu berücksichtigen. Durch die Galilei-Invarianz der Problemtypen ist dieser Ansatz zwar möglich, allerdings ist es eleganter die Anwesenheit einer Hintergrundströmung direkt in den Gleichungen zu berücksichtigen. Folgt man Najafi-Yazdin *et al.* [121] und berücksichtigt ein mit \mathbf{U}_∞ uniform bewegtes Medium explizit in der Formulierung der FWH-Analogie, und spaltet die Geschwindigkeit in $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{U}_\infty$ auf⁶, so lautet die diskrete Ffowcs Williams & Hawkings Gleichung für diesen Fall:

$$\left[\left(\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \right)^2 - \nabla^2 \right] p'(\mathbf{x}, t) H(f) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \right] [(\rho_0 U_n) \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij} H(f)] \quad (3.21)$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite sind im Detail:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{\rho}{\rho_0} (u'_i + U_{\infty i} - v_i) + v_i - U_{\infty i} \\ &= \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) v_i + \frac{\rho u_i}{\rho_0} - U_{\infty i}, \\ L_i &= \rho u'_i (u'_j \hat{n}_j + U_{\infty j} \hat{n}_j - v_j \hat{n}_j) + P_{ij} \hat{n}_j \\ &= \rho u'_i (u_n - v_n) + P_{ij} \hat{n}_j, \end{aligned}$$

wobei $U_n = U_i \hat{n}_i$ ist. Die Terme für Thickness-Lärm und Loading-Lärm enthalten jetzt die Hauptströmungsgeschwindigkeit, der Lighthill-Spannungstensor T_{ij} bleibt zur klassischen Formulierung unverändert. Für $\mathbf{U}_\infty = 0$ erhält man wieder die klassische FWH-Gleichung (3.16). Für die Lösung von (3.21) benötigt man die konvektive Green's Funktion (Najafi-Yazdin *et al.* [121]):

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \frac{\delta(g)}{4\pi\mathcal{R}} = \frac{\delta(\tau - t + R/a_\infty)}{4\pi\mathcal{R}} \quad (3.22)$$

wobei \mathbf{x} der Ort und t die Zeit des Beobachters sind und \mathbf{y} und τ sind Quellort bzw. Quellzeit (dabei ist $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\tau)$). R ist der effektive akustische Abstand zwischen Beobachter und Quelle. Für eine uniforme Hauptströmung in beliebige Richtung sind die Größen \mathcal{R} und R definiert

⁶Wenn die mittlere Strömung nicht uniform ist (d.h. $\bar{\mathbf{u}} \neq \mathbf{U}_\infty$) ist diese Annahme nicht mehr korrekt und es kommt zu Fehlern. Zhong & Zhang [118] entwickelten für diesen Fall eine spezielle Formulierung, die den Fehler reduziert. Bei den Fällen hier wird $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{U}_\infty$ angenommen.

mit (Zhong & Zhang [118]):

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r^2 + (\alpha \mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{r})^2}, \quad R = \alpha^2 (\mathcal{R} - \mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{r}), \quad \text{mit } \alpha^2 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{1 - |\mathbf{M}_\infty|^2}$$

wobei $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ und $r = |\mathbf{r}|$ der geometrische Abstand zwischen Beobachter und Quelle ist. Die Lösung der diskreten konvektiven FWH-Gleichung (3.21) lautet dann in der integralen Form (der Quadrupolterm ist der Vollständigkeit wegen angegeben, er wird im Folgenden aber vernachlässigt):

$$\begin{aligned} H(f)p'(\mathbf{x}, t) = & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \right] \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} G \rho_0 U_n \delta(f) \, d^3 \mathbf{y} \, d\tau \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} G L_i \delta(f) \, d^3 \mathbf{y} \, d\tau \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^3} G T_{ij} H(f) \, d^3 \mathbf{y} \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Um die Schwierigkeit der Berechnung von $\partial/\partial x_i$ zu Umgehen (die räumlichen Ableitungen sind in Bezug auf die Beobachterkoordinate x_i durchzuführen) und für eine adäquate numerische Implementierung, werden die räumlichen Ableitungen in zeitliche Ableitungen überführt: Mit der Ketten- und Produktregel kann man die räumliche Ableitung der Green's Funktion (3.22) schreiben als:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta(g)}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\delta'(g)}{\mathcal{R}} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \frac{\delta(g)}{\mathcal{R}^2} = \frac{1}{a_\infty} \frac{\tilde{R}_i}{\mathcal{R}} \delta'(g) - \frac{\tilde{R}_i}{\mathcal{R}^2} \delta(g), \quad (3.24)$$

mit dem Argument $g = \tau - t + R/a_\infty$. Die Ableitungen von \mathcal{R} und R bezüglich x_i sind direkt zu berechnen via

$$\tilde{\mathcal{R}}_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} = \frac{r_i + \alpha^2 M_{\infty i} (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{r})}{\alpha^2 \mathcal{R}}, \quad \tilde{R}_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} = \alpha^2 (\tilde{\mathcal{R}}_i - M_{\infty i}). \quad (3.25)$$

Für einen stationären Beobachter sind \mathcal{R} und \tilde{R}_i unabhängig von t und man erhält den Ausdruck (Ghorbaniasl & Lacor [124]):

$$\frac{\tilde{R}_i}{\mathcal{R}} \delta'(g) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{R}_i \delta(g)}{\mathcal{R}} \right). \quad (3.26)$$

Setzt man die Beziehung (3.26) in (3.24) ein, folgt der numerisch effiziente Ausdruck zur Berechnung von $\partial/\partial x_i$ in Gleichung (3.23) zu:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta(g)}{\mathcal{R}} \right) = - \frac{1}{a_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{R}_i \delta(g)}{\mathcal{R}} \right) - \frac{\tilde{R}_i \delta(g)}{\mathcal{R}^2}.$$

Diese Beziehungen angewandt auf (3.23) und Reduktion der Volumenintegrale in Flächenintegrale auf $f = 0$ folgt der Thickness-Lärm Term (in Einsteinscher Summenkonvention) als:

$$\begin{aligned}
4\pi H(f)p'_T(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \int_{f=0} \rho_0 U_n \delta(f) \frac{\delta(g)}{\mathcal{R}} dS(\mathbf{y}) d\tau \\
&\quad - M_{\infty i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \int_{f=0} \rho_0 U_n \delta(f) \frac{\tilde{\mathcal{R}}_i \delta(g)}{\mathcal{R}} dS(\mathbf{y}) d\tau \\
&\quad - U_{\infty i} \int_{-\infty}^t \int_{f=0} \rho_0 U_n \delta(f) \frac{\tilde{\mathcal{R}}_i \delta(g)}{\mathcal{R}^2} dS(\mathbf{y}) d\tau,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

und der Ausdruck für den Loading-Lärm lautet:

$$\begin{aligned}
4\pi H(f)p'_L(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{a_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \int_{f=0} L_i \delta(f) \frac{\tilde{\mathcal{R}}_i \delta(g)}{\mathcal{R}} dS(\mathbf{y}) d\tau \\
&\quad + \int_{-\infty}^t \int_{f=0} L_i \delta(f) \frac{\tilde{\mathcal{R}}_i \delta(g)}{\mathcal{R}^2} dS(\mathbf{y}) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Die Zeitintegrale in (3.27) und (3.28) können vereinfacht werden mit:

$$\int_{-\infty}^t F(\tau) \delta(g(\tau)) d\tau = \left[\frac{F(\tau)}{|\partial g / \partial \tau|} \right]_{g=0},$$

wobei $F(\tau)$ eine beliebige Funktion von τ ist. Mit $\partial R / \partial y_i = -\partial R / \partial x_i$ und $\partial y_i / \partial \tau = v_i$ kann dann die Ableitung $\partial g / \partial \tau$ berechnet werden über

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{a_{\infty}} \frac{\partial R}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{a_{\infty}} \frac{\partial R}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \tau} = 1 - \frac{1}{a_{\infty}} \frac{\partial y_i}{\partial \tau} \tilde{\mathcal{R}}_i = 1 - M_i \tilde{\mathcal{R}}_i = 1 - M_R$$

wobei $M_i = v_i / a_{\infty}$ die Machzahl der Integrationsfläche in i -Richtung zur Zeit $\tau = \tau_e = t - R / a_{\infty}$ ist (für diese Zeit ist $g = 0$) und die Gleichungen (3.27) und (3.28) vereinfachen sich in der Folge zu:

$$\begin{aligned}
4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n}{\mathcal{R}(1 - M_R)} \right]_{\tau_e} dS - M_{\infty i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n \tilde{\mathcal{R}}_i}{\mathcal{R}(1 - M_R)} \right]_{\tau_e} dS \\
&\quad - U_{\infty i} \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n \tilde{\mathcal{R}}_i}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)} \right]_{\tau_e} dS
\end{aligned}$$

und

$$4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{a_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{f=0} \left[\frac{L_i \tilde{\mathcal{R}}_i}{\mathcal{R}(1 - M_R)} \right]_{\tau_e} dS + \int_{f=0} \left[\frac{L_i \tilde{\mathcal{R}}_i}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS.$$

Für eine fehlerfreie und effiziente Anwendung des Quell-Zeit Verfahrens (beschrieben im folgenden Abschnitt), ist es erforderlich die Zeitableitungen in die Integrale zu ziehen [122]. Die

finale, numerisch effiziente Formulierung mit Zeitableitungen zur Quell-Zeit lautet dann:

$$\begin{aligned}
4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) &= \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0(\dot{U}_n + U_{\dot{n}})}{\mathcal{R}(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS - \int_{f=0} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau} \frac{\rho_0 U_n}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS \\
&+ \int_{f=0} \left[\frac{\partial M_R}{\partial \tau} \frac{\rho_0 U_n}{\mathcal{R}(1 - M_R)^3} \right]_{\tau_e} dS - M_{\infty i} \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0(\dot{U}_n \tilde{R}_i + U_{\dot{n}} \tilde{R}_i + U_n \dot{\tilde{R}}_i)}{\mathcal{R}(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS \\
&+ M_{\infty i} \int_{f=0} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau} \frac{\rho_0 U_n \tilde{R}_i}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS - M_{\infty i} \int_{f=0} \left[\frac{\partial M_R}{\partial \tau} \frac{\rho_0 U_n \tilde{R}_i}{\mathcal{R}(1 - M_R)^3} \right]_{\tau_e} dS \\
&- U_{\infty i} \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n \tilde{R}_i}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)} \right]_{\tau_e} dS
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{a_\infty} \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_{ij} \hat{n}_j \tilde{R}_i + L_{ij} \dot{\hat{n}}_j \tilde{R}_i + L_{ij} \hat{n}_j \dot{\tilde{R}}_i}{\mathcal{R}(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS - \frac{1}{a_\infty} \int_{f=0} \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau} \frac{L_i \tilde{R}}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)^2} \right]_{\tau_e} dS \\
&+ \frac{1}{a_\infty} \int_{f=0} \left[\frac{\partial M_R}{\partial \tau} \frac{L_i \tilde{R}_i}{\mathcal{R}(1 - M_R)^3} \right]_{\tau_e} dS + \int_{f=0} \left[\frac{L_i \tilde{R}_i}{\mathcal{R}^2(1 - M_R)} \right]_{\tau_e} dS
\end{aligned}$$

Bei den Untersuchungen hier ist die Integrationsfläche $f = 0$ stationär. D.h. $v_i = 0$ und $M_R = 0$ und die akustischen Distanzen \mathcal{R} und R sind nicht mehr von der Quellzeit τ_e abhängig. Für diesen Fall vereinfachen sich die Ausdrücke zu:

$$4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[(1 - M_{\infty i} \tilde{R}_i) \frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} - U_{\infty i} \tilde{R}_i \frac{\rho_0 U_n}{\mathcal{R}^2} \right]_{\tau_e} dS, \quad (3.29)$$

$$4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_i \tilde{R}_i}{a_\infty \mathcal{R}} + \frac{L_i \tilde{R}_i}{\mathcal{R}^2} \right]_{\tau_e} dS. \quad (3.30)$$

Ist die Hauptströmung zudem nur in x -Richtung gerichtet, d.h. $\mathbf{U}_\infty = (U_\infty, 0, 0)$, so vereinfacht sich der Ausdruck für den Thickness-Lärm (3.29) weiter zu

$$4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[(1 - M_\infty \tilde{R}_1) \frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} - U_\infty \tilde{R}_1 \frac{\rho_0 U_n}{\mathcal{R}^2} \right]_{\tau_e} dS,$$

und die Komponenten des Abstrahlvektors $\tilde{\mathbf{R}}$ lassen sich direkt berechnen über

$$\tilde{R}_1 = \alpha^2(\tilde{\mathcal{R}}_1 - M_\infty), \quad \tilde{R}_2 = \frac{x_2 - y_2}{\mathcal{R}}, \quad \tilde{R}_3 = \frac{x_3 - y_3}{\mathcal{R}},$$

und

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \frac{x_1 - y_1}{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_2 = \frac{x_2 - y_2}{\alpha^2 \mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_3 = \frac{x_3 - y_3}{\alpha^2 \mathcal{R}},$$

und die effektive akustische Distanz

$$R = \alpha^2 [\mathcal{R} - M_\infty(x_1 - y_1)], \quad \mathcal{R} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2 [(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]}$$

ist für jeden gegebenen Beobachter und Quellpunkt fix. Die korrespondierende Emissionszeit

kann einfach berechnet werden über

$$\tau_e = t - \frac{R}{a_\infty}, \quad (3.31)$$

wobei R hier dem effektiven akustischen Abstand zwischen Beobachter und Quelle zur Zeit τ_e entspricht und nicht mehr dem geometrischen Abstand r wie in Gleichung (3.18). Zudem erfolgen die Berechnungen auf kartesischen, strukturierten Gittern, sodass eine Aufteilung der Integrationsfläche in einzelne Subflächen mit konstantem Flächennormalenvektor vorgenommen werden kann. Für die Beschreibung der Numerik, wird diese vereinfachte Form behandelt.

Retardierte Zeit Ansatz oder Quell-Zeit Ansatz

Für die Berechnung von p' lassen sich zwei Vorgehensarten unterscheiden: (i) Bei dem historisch zuerst vorgeschlagenen *retarded time* Ansatz von Brentner & Farassat [113] wird der akustische Druck am Ort x zur Zeit t durch die Auswertung aller Quellterme am Ort y zur retardierten Zeit τ_e , Gleichung (3.31), mit anschließender Integration berechnet. Das Drucksignal wird bei diesem Ansatz entlang der Zeitachse aufgebaut (FWH-Berechnungszeit t entspricht der *Empfangszeit* $t = \tau_e + \frac{R}{a_\infty} = t_{\text{CFD}} + \frac{R}{a_\infty}$).

(ii) Bei der Arbeit hier kommt für den Aufbau von p' der *advanced time* Ansatz von Casalino [122] (verwendet z. B. von Casalino & Lele [33]) zum Einsatz. Bei diesem Ansatz erfolgt die Berechnung nicht aus Sicht des Beobachters, sondern aus Sicht der Quelle. Alle Quellterme am Ort y werden zur Zeit t ausgewertet und dem akustischen Druck am Ort x zur Zeit t_{adv} , Gleichung (3.32), zugeschrieben. Das Drucksignal wird bei diesem Ansatz entlang der Druckachse aufgebaut (FWH-Berechnungszeit t entspricht der *Emissionszeit* $\tau_e = t_{\text{CFD}}$). Ein großer Vorteil dieses Ansatzes gegenüber dem *retarded time* Ansatz besteht in seiner einfachen Parallelisierbarkeit und der Möglichkeit die FWH-Lösung simultan zur CFD-Simulation zu berechnen. Der Ansatz und die Bestimmung des Zeitfensters in welchem die FWH-Lösung auskonvergiert ist, wird im Folgenden formal beschrieben.

Führt man für die Zeit die eine akustische Störung benötigt um von ihrem Quellort y zum Beobachter bei x zu gelangen den Ausdruck

$$\mathcal{T} = \frac{R}{a_\infty}$$

ein, wobei $R = \alpha \sqrt{r^2 + (\alpha M_\infty \cdot \mathbf{r})^2} - \alpha^2 M_\infty \cdot \mathbf{r}$, und setzt die Beobachterzeit in Gleichung (3.31) zu $t + \mathcal{T}$, so folgt die Gleichung für die Emissions-Zeit aus der Perspektive des Beobachters zu

$$\tau'_e = t + \mathcal{T} - \frac{R}{a_\infty}.$$

Mit der Definition von \mathcal{T} folgt dann $\tau'_e \equiv t$, und die Zeit zu der die Störung, emittiert bei y zur Zeit t , den Ort x erreicht ist, zu berechnen mit

$$t_{\text{adv}} = t + \mathcal{T}. \quad (3.32)$$

In Abbildung 3.31 ist der Zusammenhang zwischen der Zeit in der LES-Domain und der FWH-Domain schematisch dargestellt. Im Intervall zwischen den Zeiten $t_{\text{adv}}^{\text{min}} = t_{\text{start}} + \mathcal{T}_{\text{max}}$ und $t_{\text{adv}}^{\text{max}} = t_{\text{end}} + \mathcal{T}_{\text{min}}$ ist die FWH-Lösung $p'(x, t_{\text{adv}})$ vollständig auskonvergiert, wobei t_{start} und t_{end} die Start- bzw. Endzeit der LES-Simulation ist. Die minimale und maximale Ausbreitungsdauer $\mathcal{T}_{\text{min}/\text{max}} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{\text{min}/\text{max}}/a_\infty$ ergibt sich aus der minimalen respektive maximalen

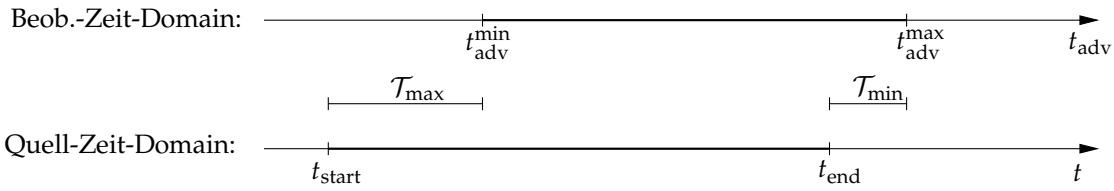


Abb. 3.31: Schematische Darstellung der Zeitebenen der LES und FWH-Lösung.

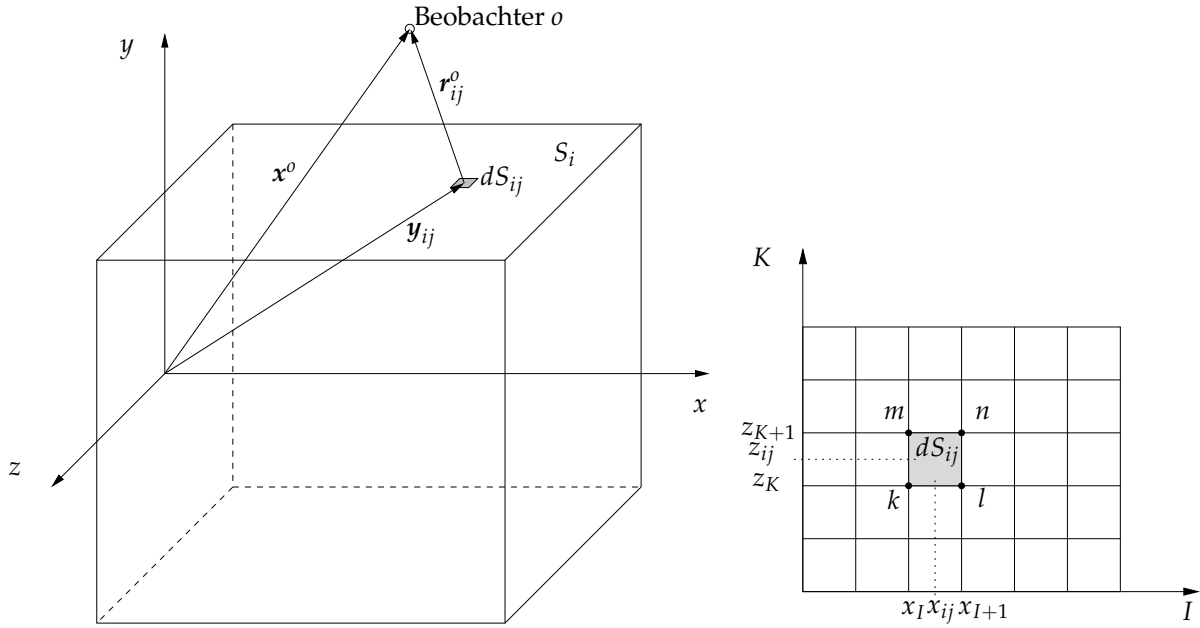


Abb. 3.32: Zellenbasierte FW-H Methode. Die Knotenpunkte sind hier $k = (I, K)$, $l = (I + 1, K)$, $m = (I, K + 1)$ und $n = (I + 1, K + 1)$.

Distanz zwischen Quellelement y und Beobachter x .

3.2.2 Numerik

Da die Integrationsfläche bei den in dieser Arbeit untersuchten Fällen immer im Gebiet des Hintergrundgitters platziert wird und das Hintergrundgitter zwar nicht uniform aber geradlinig ist, erfolgt die im Folgenden beschriebene Approximation der Flächenintegrale (3.29) und (3.30) für geradlinige nicht uniforme Gitter. Die Gleichungen wurden unter Verwendung des Quell-Zeit Domain Ansatzes d.h.

$$\tau_e \rightarrow t \quad \text{und} \quad t \rightarrow t_{adv} \quad (3.33)$$

diskretisiert. Die Beschreibung der vorgenommenen Approximationen zur numerischen Berechnung erfolgt exemplarisch für den ersten Term des Integrals (3.29); die Näherung der anderen Terme erfolgt ganz analog dazu.

Zunächst wird das Integral (3.29) über die gesamte Integrationsfläche S in die Summe der Integrale über die Subflächen S_i aufgespalten:

$$\int_S \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} \right]_t dS = \sum_{i=1}^{N_s} \int_{S_i} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} \right]_t dS_i \quad (3.34)$$

wobei N_s die Anzahl der Subflächen ist, sodass $S = \sum_{i=1}^{N_s} S_i$. Das Integral über eine Subfläche lässt sich mit der Summe der Integrale über die einzelnen Zellflächen bilden:

$$\int_{S_i} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} \right]_t dS_i = \sum_{j=1}^{N_c^{(i)}} \int_{dS_{ij}} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} \right]_t d(dS_{ij})$$

wobei $N_c^{(i)}$ die Anzahl der Zellen der Subfläche i ist, und dS_{ij} ist die Fläche der Zelle j der Fläche i , sodass $S = \sum_{i=1}^{N_s} S_i = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c^{(i)}} dS_{ij}$. Das Integral über die Zellfläche dS_{ij} kann nun mittels bekannter numerischer Integrationsmethoden approximiert werden. Eine einfache Zellen-basierte Approximation des Integrals, veranschaulicht in Abbildung 3.32, ist

$$\int_{dS_{ij}} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} \right]_t d(dS_{ij}) \approx \frac{\rho_0 dS_{ij}}{\mathcal{R}_{ij}} [\dot{U}_n]_{t,ij}$$

wobei $[\dot{U}_n]_{t,ij}$ der Wert \dot{U}_n im Zellmittelpunkt der Zelle j der Fläche i zur Zeit t ist, und $\mathcal{R}_{ij} = \sqrt{r_{ij}^2 / \alpha^2 + (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{r}_{ij})^2}$ mit $r_{ij} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_{ij}|$ als dem geometrischen Abstand der Zelle ij zum Beobachterpunkt \mathbf{x} , wobei $\mathbf{y}_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^T$. Dabei berechnet sich die Zellfläche beispielsweise in der x - y -Ebene zu $dS_{ij} = (x_n - x_k)_{ij} (y_n - y_k)_{ij}$.

Alle Vereinfachungen in Gleichung 3.34 eingesetzt, ergibt:

$$\int_S \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{\mathcal{R}} \right]_t dS \approx \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c^{(i)}} \frac{\rho_0 dS_{ij}}{\mathcal{R}_{ij}} [\dot{U}_n]_{t,ij}$$

Die Approximation der anderen Terme in Gleichung 3.29 erfolgt analog dazu und die numerische Berechnung von p'_T erfolgt via (mit Summenkonvention über k):

$$p'_T(\mathbf{x}, t_{\text{adv}}) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c^{(i)}} \frac{dS_{ij}}{4\pi} \frac{\rho_0}{\mathcal{R}_{ij}^2} \left\{ (1 - M_{\infty k} \tilde{\mathcal{R}}_{k,ij}) \mathcal{R}_{ij} [\dot{U}_n]_{t,ij} - U_{\infty k} \tilde{\mathcal{R}}_{k,ij} [U_n]_{t,ij} \right\} \quad (3.35)$$

Die numerische Berechnung von Gleichung 3.30 erfolgt über:

$$\begin{aligned} p'_L(\mathbf{x}, t_{\text{adv}}) &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c^{(i)}} \frac{dS_{ij}}{4\pi} \left\{ \frac{[\dot{L}_k]_{t,ij} \tilde{\mathcal{R}}_{k,ij}}{a_\infty \mathcal{R}_{ij}} + \frac{[L_k]_{t,ij} \tilde{\mathcal{R}}_{k,ij}}{\mathcal{R}_{ij}^2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c^{(i)}} \frac{dS_{ij}}{4\pi} \left\{ \frac{[\dot{L}_{\tilde{\mathcal{R}}}]_{t,ij}}{a_\infty \mathcal{R}_{ij}} + \frac{[L_{\tilde{\mathcal{R}}}]_{t,ij}}{\mathcal{R}_{ij}^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die Gleichung zur Berechnung des akustischen Drucks für eine beliebige Anzahl an Beobachtern N_o in Zellen-basierter Formulierung ist dann:

$$p'(\mathbf{x}^o, t_{\text{adv}}) = p'_T(\mathbf{x}^o, t_{\text{adv}}) + p'_L(\mathbf{x}^o, t_{\text{adv}}) \quad (3.37)$$

wobei x^o die Position des Beobachters $o \in [1, 2, \dots, N_{obs}]$ ist. Die Werte für U_n , $L_{\tilde{R}}$ und $L_{\tilde{\mathcal{R}}}$ werden wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} U_n &= \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{\rho u_k}{\rho_0} - U_{\infty k} \right) \hat{n}_k = \frac{\rho u_n}{\rho_0} - U_{\infty} \hat{n}_x - V_{\infty} \hat{n}_y - W_{\infty} \hat{n}_z, \\ L_{\tilde{R}} &= \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = L_k \tilde{R}_k = (\rho u_n u'_k + p' \hat{n}_k) \tilde{R}_k, \\ L_{\tilde{\mathcal{R}}} &= \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathcal{R}} = L_k \tilde{\mathcal{R}}_k = (\rho u_n u'_k + p' \hat{n}_k) \tilde{\mathcal{R}}_k, \\ u_n &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = u_k \hat{n}_k = u \hat{n}_x + v \hat{n}_y + w \hat{n}_z, \end{aligned}$$

wobei $u'_k = u_k - U_{\infty k}$ ist. Der Einheitsnormalenvektor, $\hat{\mathbf{n}}$, wird bei den Fällen hier allein durch die Teilfläche S_i bestimmt, kann aber auch für jede Zelle berechnet werden. Die Werte im Zellmittelpunkt werden mit dem arithmetischen Mittel der vier Knotenwerte der Zelle ij approximiert (s. Abbildung 3.32):

$$[q]_{t,ij} \approx \frac{1}{4} [q_k + q_l + q_m + q_n]_{t,ij},$$

wobei q hier für ρ , \mathbf{u} oder p steht. Die zeitlichen Ableitungen der Größen, werden mit dem Differenzenquotienten berechnet:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{Q^{(n)} - Q^{(n-1)}}{\Delta t_{\text{FWH}}}.$$

für $Q = [U_n, L_{\tilde{R}}]$. Die Beziehung zwischen dem FWH- und dem CFD-Zeitschritt liegt in einem Bereich um $\Delta t_{\text{FWH}} = 1 \times$ bis $10 \times \Delta t_{\text{CFD}}$.

Es sei bemerkt, dass auch eine Knoten basierte Diskretisierung implementiert und getestet wurde. Die Unterschiede waren jedoch nicht signifikant, weswegen hier nur die Zellen basierte Version vorgestellt wurde.

3.2.3 Numerische Implementierung

Implementiert wurden die konvektiven Gleichungen (3.35) und (3.36). Das Verfahren wurde so implementiert, dass die Berechnung und der Aufbau von $p'(x, t_{\text{adv}})$ parallel und simultan zur LES stattfindet. Die Vorteile einer solchen Handhabung liegen auf der Hand: Durch die simultane Ausführung greift der FWH-Löser direkt auf die im Arbeitsspeicher Cachelevel 1-3 liegenden Strömungsgrößen zurück. Latenzen durch z.B. das Einlesen der Daten, wie sie bei einer sequentiellen Ausführung auftreten würden, werden so vermieden. Darüber hinaus lässt sich eine sehr hohe zeitliche Auflösung bis hin zu $\Delta t_{\text{FWH}} = \Delta t_{\text{LES}}$ effizient realisieren. Das zudem praktisch kein zusätzlicher Speicherplatz benötigt wird (der benötigter Speicher für die Speicherung von $p'(x, t_{\text{adv}})$ ist verschwindend gering) ist dabei ein schöner Nebeneffekt. Denn die Aufsummierung der berechneten Druckbeiträge, erfolgt hier ebenfalls während und nicht am Ende der Simulation. Dazu wird aus $p'(x, t_{\text{adv}})$ die zeitliche diskrete Formulierung $p'(x, n_{\text{adv}})$ mit

$$n_{\text{adv}} = \text{int} \left(\frac{t_{\text{adv}}}{\Delta t} \right),$$

wobei $t_{\text{adv}}^n = t^n + \mathcal{T}_i$ von der diskreten Zeit $t^n = n\Delta t$ und über $\mathcal{T}_{ij} = \frac{|x - y_{ij}|}{a_{\infty}}$ vom diskreten Ort y_{ij} abhängt.

Die Integrationsfläche S wird durch das, mithilfe von zwei Punkten aufgespannte Kontrollvo-

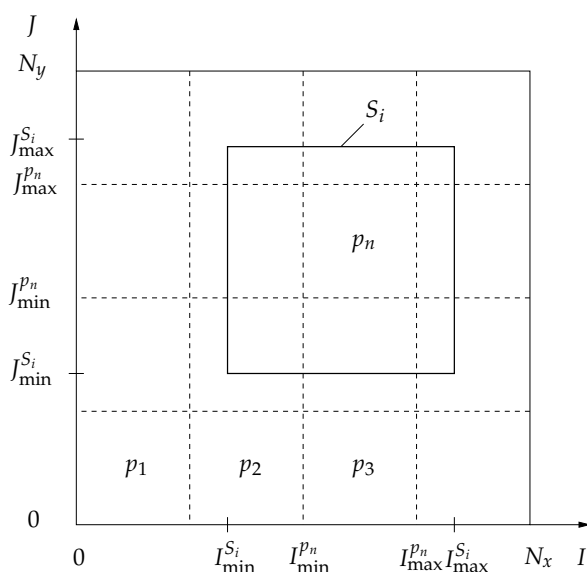


Abb. 3.33: Beispiel einer Gebietszerlegung für 16 Prozessoren. Die Grenzen von S sind unabhängig von der Gebietszerlegung wählbar.

lumen definiert. Lage und Größe von S sind, wie in Darstellung 3.33 zu sehen, unabhängig von der Partitionierung. Die Integration über die Teilfläche S_i erfolgt dazu immer mindestens über das dem Prozessor p_n vorliegende lokale Gebiet, $(I_{\min}, J_{\min})^{p_n} \leq I, J \leq (I_{\max}, J_{\max})^{p_n}$, und/oder maximal bis zu den Grenzen von S_i , $(I_{\min}, J_{\min})^{S_i} \leq I, J \leq (I_{\max}, J_{\max})^{S_i}$.

3.2.4 Validierung und Verifikation

Die Vorhersagen der implementierten FWH-Methode werden mit analytischen Lösungen und Messungen für die folgenden Validierungsfälle verglichen: Einen abgestrahlten akustischen Impuls in (i) einem ruhenden Medium, (ii) einer uniformen Strömung mit $M_\infty = (0.5, 0, 0)$ und (iii) $M_\infty = (0.5, 0.5, 0.5)$; und einen runden Freistrahls mit Reynoldszahl $Re = 3600$ und Machzahl $M_j = 0.9$. Die ersten drei Fälle dienen zur Verifikation der numerischen Implementierung, während der vierte die Fähigkeit der Methode zur Vorhersage von turbulenzinduziertem Lärm demonstrieren soll.

3-D akustischer Impuls

Als einfacher Testfall zur Validierung wurde der dreidimensionale akustische Impuls aus Kapitel 2.1.4 simuliert. Die analytische Lösung für eine uniforme Hauptströmung mit $M_\infty = (M_x, M_y, M_z)$ ist gegeben mit:

$$p_e = p'(x, y, z, t) = \frac{R-t}{2R} e^{-\alpha(R-t)^2} + \frac{R+t}{2R} e^{-\alpha(R+t)^2}, \quad (3.38)$$

wobei $R = [(x - M_x t)^2 + (y - M_y t)^2 + (z - M_z t)^2]^{1/2}$, $\alpha = \ln(2)/b^2$ und $b = 3$ ist. Im LES-Gebiet wurden die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und im Randgebiet die dreidimensionalen Radiation-Randbedingungen von Tam & Webb [73, 74] gelöst. Tabelle 3.4 zeigt die Parameter der fünf simulierten Fälle. In allen Fällen ist die Auflösung in die drei Raumrichtungen identisch und außer in Fall C4 zudem uniform. Das LES-Gebiet ist mit $-50 \leq x, y, z \leq 50$ definiert und die Kontrollfläche wird durch einen Kubus der Kantenlänge $L = 50$, lokalisiert mit $-25 \leq x, y, z \leq 25$, gebildet. Alle Rechnungen erfolgten auf 8 CPU-Kernen. In Tabelle 3.6

Fall	N_{obs}	Beobachter o	N_x	N_{cell}	Δx	Δt	T_{sim}	exec-time	TPSM	nTPSM
Ref	0	–	101	14406	1	0.25	50	227	1.1125	1
C1	1	2	101	14406	1	0.25	50	231	1.125	1.01
C2	1	2	101	14406	1	0.125	50	461	1.125	1.01
C3	1	2	201	58806	0.5	0.125	50	2560	0.7875	0.71
C4	1	2	101	14406	$f(x)$	0.125	50	923	2.25	2.02
C5	6	1, 2, 3, 4, 5, 6	101	14406	1	0.25	100	485	1.175	1.06

Tab. 3.4: Parameter der simulierten Testfälle. exec-time ist die Ausführungszeit des Programms auf 8 Kernen. TPSM (time-per-step-per-million-grid-points) und nTPSM ist die mit der TPSM des Referenzfalls normierte Ausführungszeit pro Zeitschritt und 10^6 Gitterpunkte.

Beobachter o	x^o	y^o	z^o	r_{min}^o	r_{max}^o	\mathcal{T}_{min}^o	\mathcal{T}_{max}^o	$[t_{start}^o, t_{end}^o]$
1	0	26	0	1	62.06	1	62.06	$[-32.06, 99]$
2	0	50	0	25	82.92	25	82.92	$[-52.92, 75]$
3	0	75	0	50	106.07	50	106.07	$[-76.07, 50]$
4	26	26	26	1.73	88.33	1.73	88.33	$[-58.33, 98.27]$
5	28.87	28.87	28.87	6.70	93.3	6.70	93.3	$[-63.3, 93.3]$
6	43.3	43.3	43.0	31.70	118.3	31.70	118.3	$[-88.3, 68.3]$

Tab. 3.5: Position der Beobachter, $x^o = (x^o, y^o, z^o)$, und theoretisch minimales LES-Simulationintervall, $ta_{\infty}/\Delta = [t_{start}^o, t_{end}^o]$, für eine konvergente FWH-Lösung im Zeitintervall $ta_{\infty}/\Delta = [30, 100]$. $\mathcal{T}^o = r^o/\Delta$ ist die dimensionslose Laufzeit der akustischen Wellen von der Kontrollfläche zum Beobachter o .

sind die Positionen der Beobachter gegeben und die jeweiligen theoretischen Simulationsintervalle, für die die FWH-Lösung ohne Konvektion im Intervall $[30, 100]$ auskonvergiert ist. Da die LES-Lösung für $t < 0$ verschwindet, wurde in allen Fällen von $t = 0$ bis 100 simuliert.

Ohne Konvektion ((i) $|M_{\infty}| = 0$)

Für die Fälle C1 und C2 beträgt der zusätzliche Rechenaufwand für die Berechnung der FWH-Lösung 1% und er skaliert linear mit der Anzahl der Beobachter (siehe Fall C5). Die relativ zu C1 geringere Ausführungszeit je Zeitschritt (TPSM) des Falls C3 ist durch den geringeren relativen Overhead infolge der höheren räumlichen Auflösung begründet und der zeitliche Mehraufwand des Falls C4 rührt von der nicht-Uniformität des Gitters her. Die Variablen wurden mit der Dichte ρ_0 , dem Druck $a_{\infty}^2 \rho_0$, der Gitterweite des Referenzgitters Δ und der Zeit Δ/a_{∞} , wobei a_{∞} die Schallgeschwindigkeit ist, entdimensionalisiert. In Abbildung 3.34 ist der akustische Druck p' (links) und normierte Fehler (rechts) am Punkt $x = (0, 50, 0)$ für die Fälle C1, C3, C4, sowie die Referenzlösung dargestellt. Bei dem Fehler der Referenzlösung (Abb. 3.34 oben rechts) handelt es sich um den Fehler der LES gegenüber der analytischen Lösung am betrachteten Beobachterpunkt. Er beträgt rund 10% der Druckamplitude und resultiert aus der Dispersion (Phasenfehler) und Dissipation (Amplitudenfehler) des LES-Verfahrens in Kombination mit der relativ geringen Auflösung bei den Testfällen hier. Der Phasen- (P) und Amplitudenfehler (A) der FWH-Lösung mit geringer räumlicher und zeitlicher Auflösung, Fall C1, beträgt weniger als 6% der Druckamplitude. Wird die Auflösung jeweils verdoppelt, reduziert sich der Fehler auf unter 2%. Eine ähnliche Fehlerreduktion kann durch die Verfeinerung des Gitter im Bereich der für den Beobachter primär relevanten Zellen erzielt werden (C4). Allerdings kommt es zu leichten Oszillationen im Bereich $t > 55$. Da das LES-Verfahren im Gegensatz zum FWH-Verfahren dispersiv und dissipativ ist, nimmt der Fehler mit der Entfernung zu. Der Fehler der FWH-Lösung wird durch den Fehler der LES-Lösung auf der Kontrollfläche und den Rundungsfehler bei der Berechnung von t_{adv} sowie durch die Approximation

Fall	M_x	M_y	M_z	r_{\min}	r_{\max}	R_{\min}	R_{\max}	\mathcal{T}_{\min}	\mathcal{T}_{\max}	$[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$
(ii)	0.5	0	0	25	82.92	28.87	80.52	28.87	80.52	$[-50.52, 71.13]$
(iii)	0.5	0.5	0.5	25	82.92	20.72	50	20.72	50	$[-20, 79.29]$

Tab. 3.6: Position der Beobachter, $\mathbf{x} = (0, 50, 0)$, und theoretisch minimales LES-Simulationintervall für Fall (ii) $|\mathbf{M}_\infty| = 0.5$ und (iii) $|\mathbf{M}_\infty| \simeq 0.866$.

der Flächenintegrale bestimmt. Approximationsfehler nehmen mit der Entfernung des Beobachters von der Kontrollfläche ab. Die Ergebnisse des kritischsten Falls, C5 Beobachter 4, sind in Abbildung 3.35 zu sehen. Der Richtungsvektor des Beobachters läuft dabei exakt durch die Ecke des Kontrollquaders. Auch hier bleibt der relative Fehler unter 8% und ist damit nur marginal größer als der Fehler der Referenzlösung. Nimmt man den Fehler bedingt durch die LES-Lösung heraus, reduziert sich der Fehler, bedingt allein durch das FWH-Verfahren, auf unter 3% (gestrichelte Linie in Abbildung 3.35 (*rechts*)). Die Aufteilung des Schalls in Loading und Thickness-Noise hat im Fall einer permeablen Kontrollfläche keine physikalische Bedeutung, siehe dazu Abbildung 3.36. Für den Beitrag zum gesamten Druckfeld der Teilfläche des Kontrollkubus welche in direkter Ausrichtung zum Beobachter steht sind p'_T und p'_L gleichen Vorzeichens und gleicher Amplitude, für die Beiträge der übrigen fünf Flächen ist $p'_T = -p'_L$, sodass sich die Beiträge der nicht unmittelbar beteiligten Flächen gegenseitig aufheben.

Mit Konvektion ((ii) $M_x = 0.5$ und (iii) $|\mathbf{M}_\infty| \simeq 0.866$)

Die Fälle mit Konvektion wurden auf dem C3-Gitter mit $\Delta t = 0.125$ und $\Delta t = 0.094$ für $|\mathbf{M}_\infty| = 0.5$ bzw. $|\mathbf{M}_\infty| \simeq 0.866$ simuliert. Der Druck wurde für den Punkt B2 bei $\mathbf{x} = (0, 50, 0)$ berechnet. Die erforderlichen Simulationsintervalle von B2, $[t_{\text{start}}^2, t_{\text{end}}^2]$, für eine konvergente Lösung im Intervall $t = [30, 100]$ sind $[-50.52, 71.13]$ bzw. $[-20, 79.29]$.

Die Druckverläufe und der Fehler gegenüber der analytischen Lösung beider Fälle sind in Abbildung 3.37 zu sehen. Die Übereinstimmung mit der analytischen Lösung, Gleichung 3.38, ist in beiden Fällen sehr gut. Für $\mathbf{M}_\infty = (0.5, 0, 0)$ ist der Fehler zu allen Zeiten kleiner als 1% und für $\mathbf{M}_\infty = (0.5, 0.5, 0.5)$ kleiner als 1.5% der Druckamplitude. Damit ist die Theorie für den Fall mit und ohne Konvektion validiert und deren Implementierung verifiziert worden.

Runder isothermer Freistrah

Um das Verfahren auch hinsichtlich der eigentlichen Problemstellung zu validieren, wurde ein dreidimensionaler runder Freistrah, als Teil der Freistrah-Klappen Interaktion, simuliert. Der Freistrah mit den hier verwendeten Parametern wurde in der Vergangenheit intensiv untersucht und es existiert eine breite Datenbasis (z.B. Freund [14], Stromberg et al. [125]) in der Literatur.

Strömungsparameter. Der Freistrah besitzt eine Machzahl von 0.9 und die Reynoldszahl, basierend auf dem Durchmesser, ist $Re_D = \rho_j U_j D_j / \mu_j = 3600$. Die Dichte und die Temperatur des Freistrahls sind $\rho_j / \rho_\infty = 1$ beziehungsweise $T_j / T_\infty = 1$. Der Index $(\cdot)_j$ kennzeichnet jeweils die Bedingungen im Freistrahzentrum am Einlass. Die axiale Geschwindigkeit wird über ein tanh-Profil initialisiert:

$$\frac{u_0(r)}{U_j} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{r_0 - r}{2\delta_\theta} \right) \right],$$

wobei r_0 der Freistrahradius und δ_θ die initiale Impulsverlustdicke ist. Sie liegt Experimenten

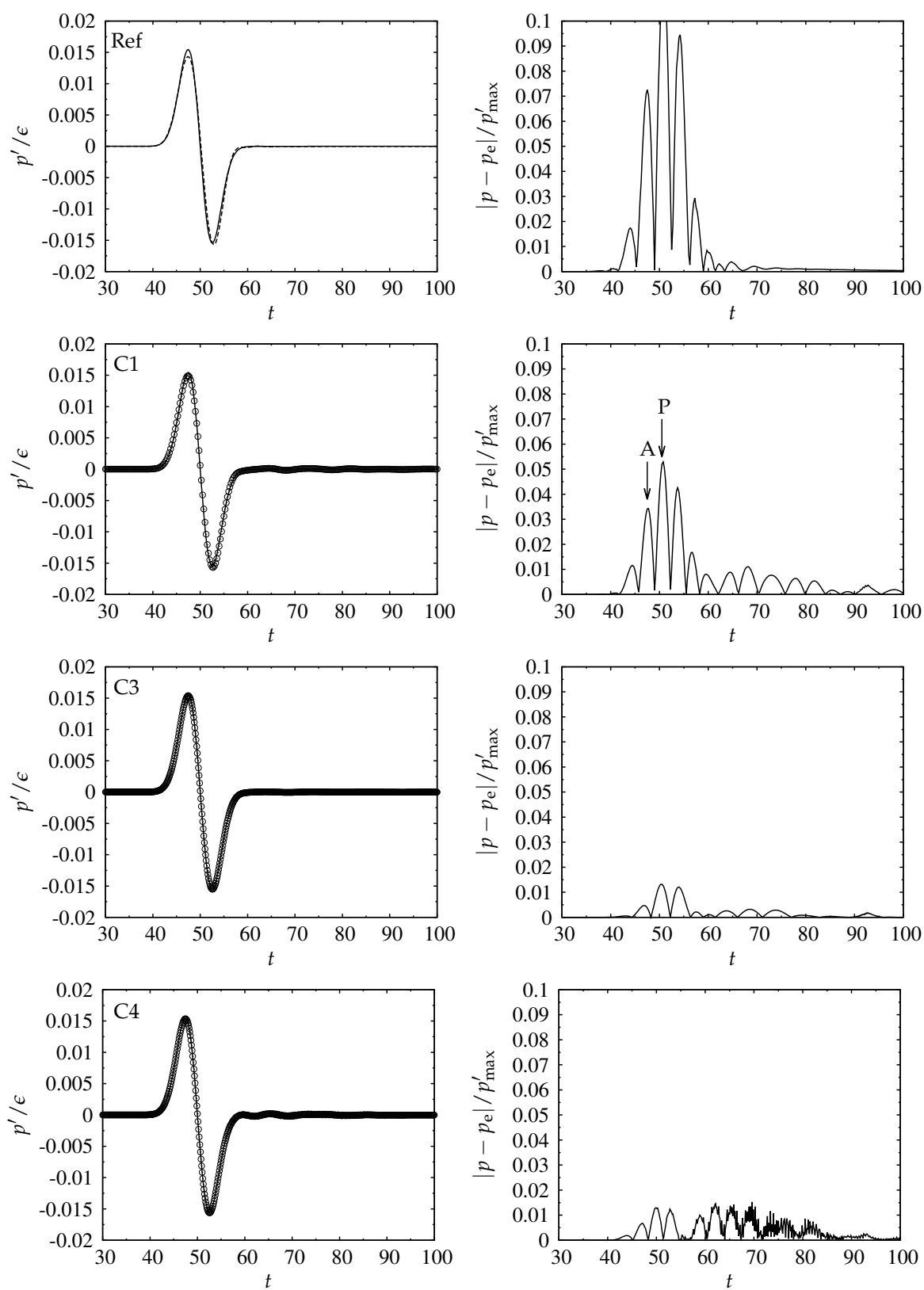


Abb. 3.34: Akustischer Druck bei $x = (0, 50, 0)$ (links): —, analytische Lösung; - - -, LES-Lösung und \circ , FWH-Lösung. Normierter Fehler $|p - p_e|$ (rechts), wobei p_e die analytische Lösung ist und $p'_{\max} = \max\{|p'_e|\}$.

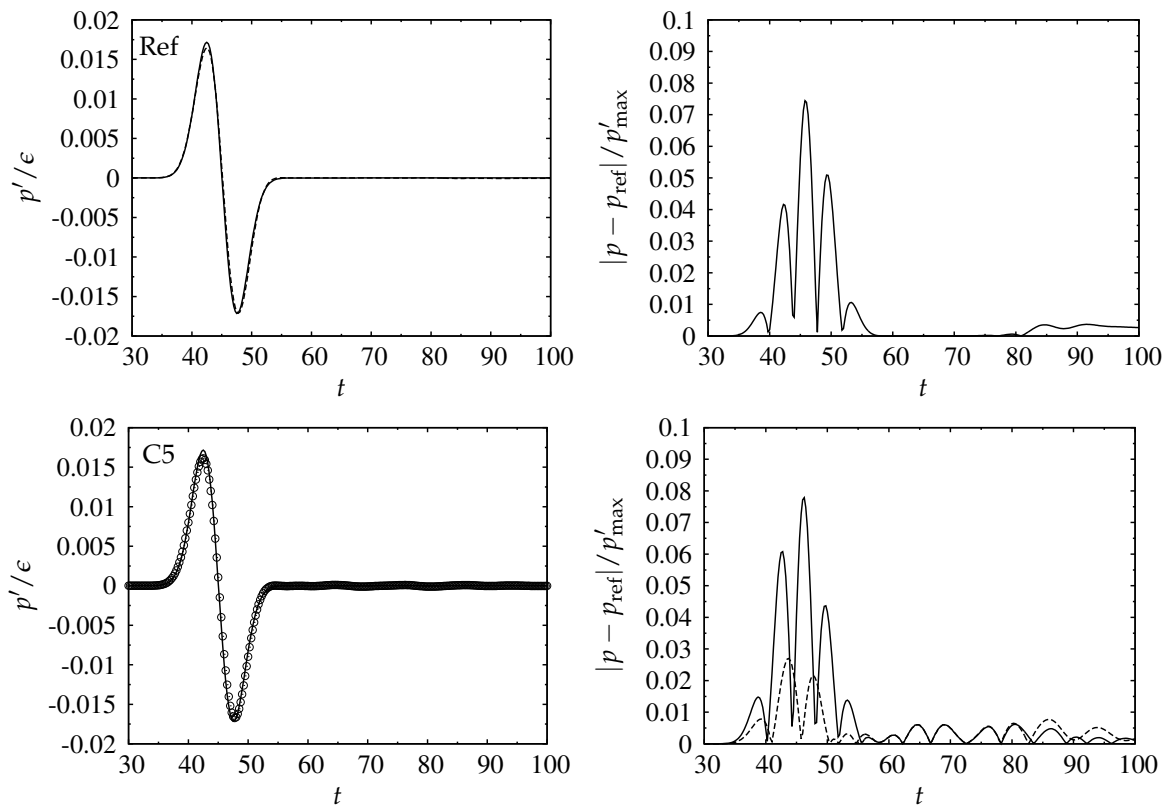


Abb. 3.35: Akustischer Druck bei $x = (26, 26, 26)$ (links): —, analytische Lösung; ---, LES-Lösung und \circ , FWH-Lösung. Normierter Fehler (rechts) mit $p_{\text{ref}} = p_e$ (—) und $p_{\text{ref}} = p_{\text{LES}}$ (---).

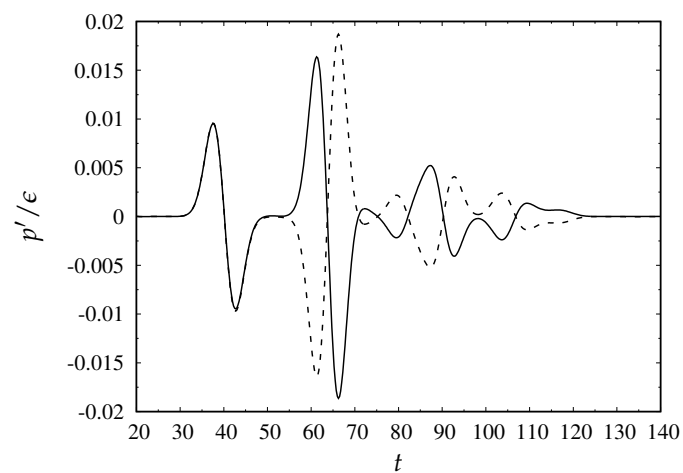


Abb. 3.36: Verteilung der Druckkomponenten bei $x = (0, 40, 0)$: —, p'_T , ---, p'_L .

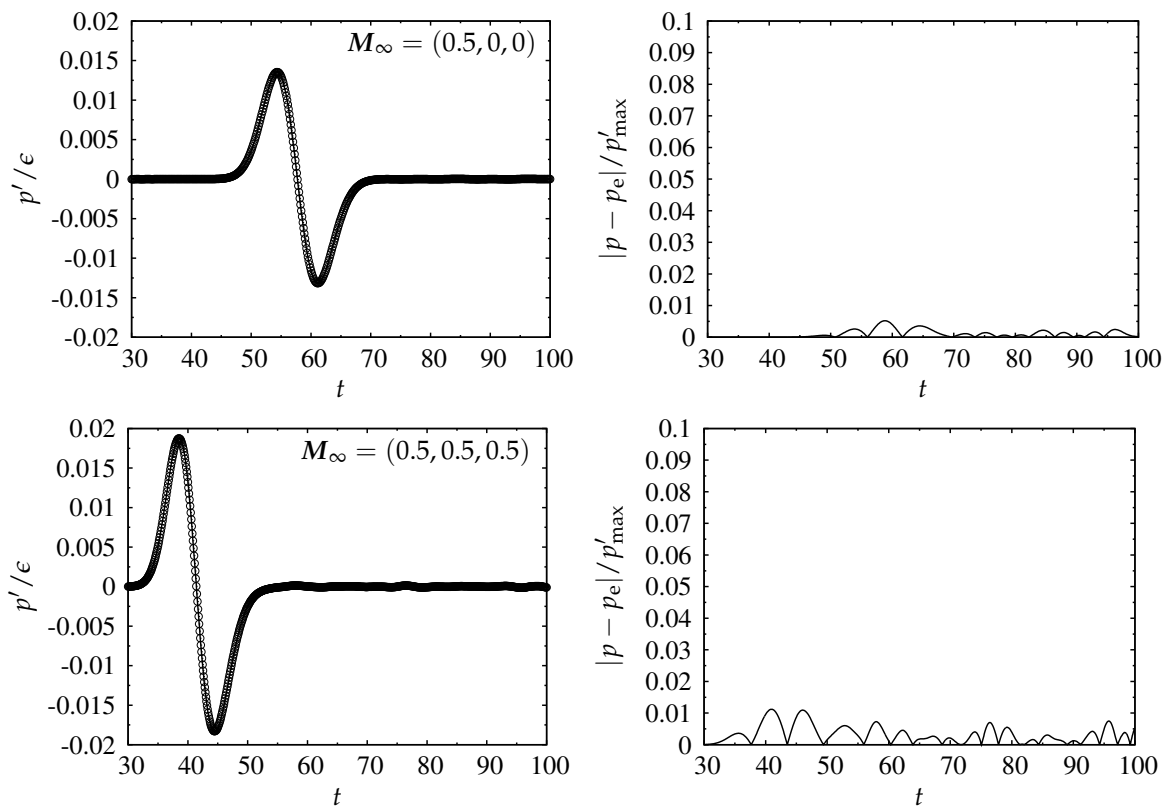


Abb. 3.37: Akustischer Druck bei $x = (0, 50, 0)$ (links): —, analytische Lösung; und \circ , FWH-Lösung. Normierter Fehler $|p - p_e|$ (rechts), wobei p_e die analytische Lösung ist und $p'_{\max} = \max\{|p'_e|\}$.

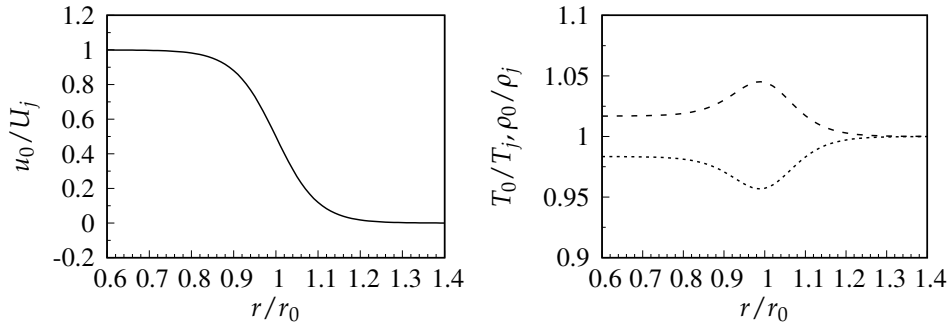


Abb. 3.38: Initiale Profile des isothermen Freistrahls: —, axiale Geschwindigkeit, $u_0(r)$; ---, Temperatur, $T_0(r)$; ···, Dichte, $\rho_0(r)$.

von Zaman [126] zu folge in Bereichen unter $0.01r_0$ was für die Simulation eine immens hohe Auflösung erfordern würde; Freund [14] und Bogey *et al.* [22] wählten daher δ_θ/r_0 gleich 0.02 beziehungsweise 0.05. Hier wurde $\delta_\theta/r_0 = 0.05$ gewählt. Die Geschwindigkeitskomponenten in y und z -Richtung sind am Einlass $v_0 = w_0 = 0$. Das initiale Einlass-Temperaturprofil, $T_0(r)$, ist unter der Annahme konstanten Drucks, $\frac{p_j}{p_\infty} \simeq 1$, mit der Crocco-Buseman Beziehung gegeben:

$$\frac{T_0(r)}{T_j} = \frac{T_\infty}{T_j} + \left[1 - \frac{T_\infty}{T_j} + \frac{\gamma - 1}{2} M_j^2 \left(1 - \sigma \frac{u_0(r)}{U_j} \right) \right] \frac{u_0(r)}{U_j}$$

wobei $\sigma = Pr^{1/3}$ und $M_j = U_j/c_\infty$. Für einen isothermen Jet, $\frac{T_j}{T_\infty} = 1$, gilt dann:

$$\frac{T_0(r)}{T_j} = 1 + \left[\frac{\gamma - 1}{2} M_j^2 \left(1 - \sigma \frac{u_0(r)}{U_j} \right) \right] \frac{u_0(r)}{U_j}.$$

Die Dichte, $\rho_0(r) = \frac{p_0(r)}{\mathcal{R}_g T_0(r)}$, ergibt sich unter der Annahme das der Druck über dem Freistrahls konstant bleibt $p_0(r) = p_\infty$ zu $\frac{\rho_0(r)}{\rho_j} = \frac{\rho_\infty T_\infty}{\rho_j T_0(r)}$ und mit $\frac{\rho_\infty}{\rho_j} = \frac{T_j}{T_\infty}$ folgt die Beziehung $\frac{\rho_0(r)}{\rho_j} = \frac{T_j}{T_0(r)}$. Die initialen Verläufe von $u_0(r)$, $T_0(r)$ und $\rho_0(r)$ sind in Abbildung 3.38 für den isothermen und kalten Freistrahls dargestellt. Die Variablen wurden mit dem Freistrahlsradius, r_0 , und den Bedingungen an der Düse, ρ_j , U_j und T_j , dimensionslos gemacht. Tabelle 3.7 listet die physikalischen Stoffgrößen, die Skalen zur Entdimensionalisierung und die dimensionslosen Simulationsparameter auf.

Die Positionen der Beobachter (virtuelle Mikrophone) und die daraus resultierenden Mindestanforderungen an die Simulationszeit für eine konvergente Lösung im betrachteten Zeitintervall sind in Tabelle 3.8 gegeben. Da der Beobachter B1 weder die Bedingung für das akustische Fernfeld ($|r| \gg \lambda$) noch die Bedingung für das geometrische Fernfeld ($|r| \gg \Omega_s$) erfüllt, wird für diesen Punkt die schlechteste Übereinstimmung mit der Referenzlösung erwartet.

Numerische Spezifikationen. Das LES-Gebiet ist mit $-2 \leq x/r_0 \leq 30$, $7 \leq y/r_0 \leq 25$ und $-6 \leq z/r_0 \leq 6$ definiert und die Navier-Stokes-Gleichungen wurden darin mit $277 \times 187 \times 127$ Gitterpunkten diskretisiert. Die Gitterweiten als Funktion des Ortes sind in Abbildung 3.39 dargestellt. Die Kontrollfläche wird durch einen Quader der Kantenlänge $(28, 10, 10)r_0$ aufgespannt. Die genauen Werte, die Beobachterpositionen sowie die sich daraus ergebenden radialen Distanzen, Laufzeiten und minimalen Simulationsintervalle sind in Tabelle 3.8 gegeben. Das kartesische Gitter ist im Bereich der Scherschicht bei $y = \pm r_0$ und $z = \pm r_0$ gestaucht, sodass sich mindestens 21 Punkte im Radius befinden. Die minimale Gitterweite in y - und

	Wert	Simulationsparameter	
μ_j	$1.827 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{ms})$	$\frac{1}{\rho_j U_j r_0}$	$\frac{1}{Re_{r_0}} \simeq 5.556 \times 10^{-4}$
\mathcal{R}_g	$287.15 \text{ J}/(\text{kgK})$	T_j/U_j^2	$1/(\gamma M_j^2) \simeq 0.8818$
c_p	$1.005 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kgK})$	T_j/U_j^2	$1/((\gamma - 1)M_j^2) \simeq 3.0864$
γ	1.4	1	1.4
Re_{r_0}	1800	1	1800
Pr	0.72	1	0.72
M_j	0.9	1	0.9
ρ_j	$1.2 \text{ kg}/\text{m}^3$	$1/\rho_j$	1
T_j	293.15 K	$1/T_j$	1
$c_j = (\gamma \mathcal{R}_g T_j)^{1/2}$	$\simeq 343.3 \text{ m}/\text{s}$	$1/U_j$	$1/M_j \simeq 1,1111$
$U_j = M_j c_j$	$\simeq 308.97 \text{ m}/\text{s}$	$1/U_j$	1
$p_j = \rho_j \mathcal{R}_g T_j$	$\simeq 1.01013 \times 10^5 \text{ Pa}$	$1/\rho_j U_j^2$	$1/(\gamma M_j^2) \simeq 0.8818$
$r_0 = \mu_j Re_{r_0} / (\rho_j U_j)$	$\simeq 8.87 \times 10^{-5} \text{ m}$	$1/r_0$	1
$k = c_p \mu_j / Pr$	$\simeq 2.55 \times 10^{-2} \text{ kgm}/(\text{s}^3\text{K})$	-	-
$\bar{k} = k / \mathcal{R}_g$	$\simeq 8.88 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{ms})$	$\frac{1}{\rho_j U_j r_0}$	$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_{r_0}} \simeq 2.7 \times 10^{-3}$

Tab. 3.7: Referenzgrößen, Stoffgrößen (Luft) und dimensionslose Simulationsparameter.

Beobachter o	x^o / r_0	y^o / r_0	r_{\min}^o / r_0	r_{\max}^o / r_0	\mathcal{T}_{\min}^o	\mathcal{T}_{\max}^o	$[t_{\text{start}}^o, t_{\text{end}}^o]$
1	19.3132	5.0439	0.34	22.29	0.31	20.06	[329, 400]
2	17.3436	9.8602	5.16	23.33	4.64	20.99	[329, 396]
3	14.0143	13.9892	9.29	24.07	8.36	21.66	[328, 392]
4	10.0034	17.4301	12.73	28.98	11.46	26.08	[323, 389]
5	5.1774	19.1505	14.45	33.40	13.01	30.06	[319, 387]
6	0.0317	19.8387	15.14	37.52	13.62	33.77	[316, 387]

Tab. 3.8: Position der Beobachter ($z^o = 0$) und theoretisch minimales LES-Simulationintervall, $[t_{\text{start}}^o, t_{\text{end}}^o]$, für eine konvergente FWH-Lösung im Zeitintervall $tU_j/r_0 = [350, 400]$. $\mathcal{T}^o = r^o U_j / (a_\infty r_0)$ ist die dimensionslose Laufzeit der akustischen Wellen von der Kontrollfläche zum Beobachter o . Der Kontrollquader ist definiert mit $0.0317 \leq x/r_0 \leq 27.7516$, $-4.9366 \leq y/r_0 \leq 4.7009$ und $-5.0479 \leq z/r_0 \leq 4.8576$.

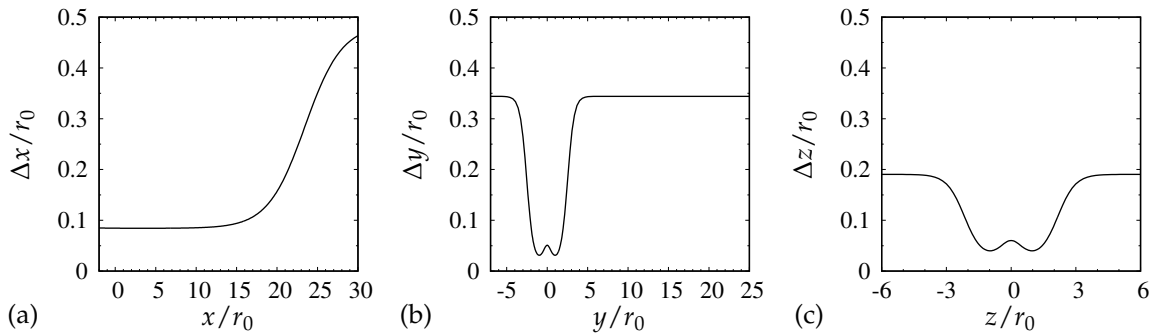


Abb. 3.39: Gitterweite: (a) in Stromrichtung, (b) in y -Richtung und (c) in z -Richtung.

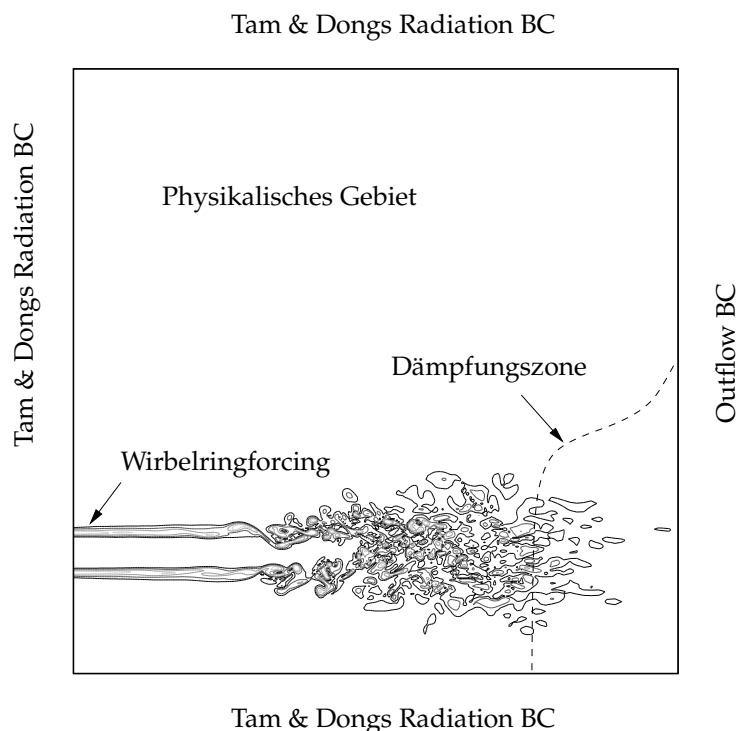


Abb. 3.40: Schematische Darstellung des numerischen Setups der 3-D Freisstrahl-Simulation. Zu sehen sind Isokonturen der Wirbelstärkeamplitude für $|\omega_z|r_0/U_j = 0.35, 1, 2, 3, 4$ in der x - y -Ebene bei $z = 0$. Die gestrichelte Linie kennzeichnet eine Isokontur der Dämpfungstärke σ .

z -Richtung beträgt $\Delta y_{\min} \simeq 0.031r_0 (= 0.62\delta_\theta)$ respektive $\Delta z_{\min} \simeq 0.039r_0$, die maximale Gitterweite ist $\Delta y_{\max} = 0.344r_0$ und $\Delta z_{\max} = 0.19r_0$. In axialer Richtung ist die minimale Gitterweite $\Delta x_{\min} \simeq 0.084r_0$ und bis $x \approx 15r_0$ annähernd konstant, ab da wird das Gitter auf $\Delta x_{\max} = 0.467r_0$ gedehnt. In der Dämpfungszone, ab $x = 20r_0$, wird der Dämpfungsterm (2.9) zur rechten Seite der Navier-Stokes-Gleichungen hinzu addiert. Die Stärke wächst quadratisch mit x bis auf $\sigma_{\max} = 0.15$ am Auslass bei $y = 0$. Zur Vergrößerung des physikalischen akustischen Gebiets wird über die tanh-Funktion

$$\mathcal{P}(y) = 0.5 [\tanh(0.7(y + 15r_0)) - \tanh(0.7(y - 7r_0))]$$

ein Abfall der Dämpfungstärke für positive y bewirkt (siehe Abbildung 3.40). Die Ableitungen wurden mit dem klassischen 7-Punkte Stencil sechster Ordnung berechnet. Der Zeitschritt war $\Delta t = 0.007r_0/U_j$ und konstant. Die Lösung wurde jeden fünften Zeitschritt mit dem expliziten Filter, Gleichung (3.12), zehnter Ordnung gefiltert. Bei der Verwendung der Radiation-Randbedingungen von Tam & Webb [73] kommt es bei nicht-uniformen Strömungen zu einem Driften der Mittelwerte (siehe dazu [127]). Bogey & Bailly [91] schlagen aus diesem Grund eine Anpassung der Lösung am Rand vor:

$$U^r = (1 - \sigma_r)U + \sigma_r U_{\text{ref}}$$

mit $U = \{\rho, u, v, w, p\}$, $U_{\text{ref}} = U_{\text{inflow}} = \{\rho_0, u_0, v_0, w_0, p_0\}$ und $\sigma_r = 0.05$ am Jet-Einlass, $U = \{\rho, p\}$, $U_{\text{ref}} = \{\rho_\infty, p_\infty\}$ und $\sigma_r = 0.005$ im Fernfeld außerhalb der Strömung; U^r repräsentiert die modifizierte Variable. Alternativ dazu wurden für die Simulation hier die generalisierten Randbedingungen von Tam & Dong [71] implementiert und verwendet. Diese sind zwar rechenintensiver aber auch exakter als die vorgeschlagene Modifikation von Bogey & Bailly.

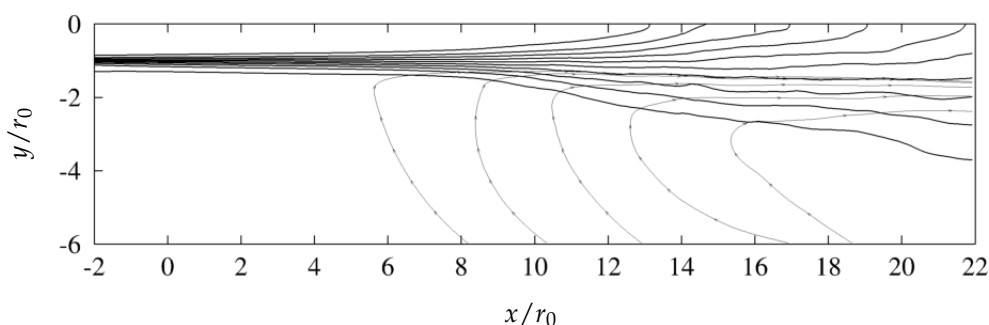


Abb. 3.41: Visualisierung der Hauptströmung: —, zehn Konturebenen der mittleren longitudinalen Geschwindigkeit von $0.05U_j$ bis $0.95U_j$; —, fünf Stromlinien.

Der Ursprung des Richtungsvektors, re_r , für die Radiation- und Outflow-Randbedingungen wurde bei $x = 15r_0$ gelegt.

Zur Anregung der laminar-turbulenten Transition wurde das Wirbelring-Forcing, Gleichung (2.12) mit $\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_1 = 1$, verwendet. Die axiale Position, x_0 , wurde mit $-0.983r_0$ gewählt, die Amplitude, α , war 0.1 und die Halbwertbreite $\Delta_0 = 0.084r_0$ entsprach der axialen Gitterweite bei $x = x_0$. Abbildung 3.40 zeigt nochmal eine schematische Darstellung des Simulationssetups. Zur Berechnung der Mittelwerte wurde, nach dem Erreichen der Stationarität, über 4×10^4 Zeitschritte gemittelt. Anschließend wurden die statistischen Werte über weitere 5×10^4 Zeitschritte berechnet.

Aerodynamisches Feld. Die Entwicklung des Freistrahls ist in guter Übereinstimmung mit der DNS von Freund [14]: Die laminar-turbulente Transition wird durch das Aufrollen der Scherschicht zu großen Wirbeln um $x \approx 10r_0$ eingeleitet. Weiter stromab bei $x \approx 13r_0$ fällt der Potentialkern zusammen und eine dreidimensionale Turbulenz entsteht. Aufgrund der geringeren Auflösung und der damit einhergehenden stärkeren Filterung als bei der Referenzlösung werden die Gradienten allerdings etwas unterschätzt. Die Visualisierung der mittleren Strömung, Abbildung 3.41, zeigt, dass das Entrainment realistisch wiedergeben und nicht durch den relativ dichten unteren Rand verzerrt wird. Abbildung 3.42 zeigt die zeitlich gemittelten Verläufe der Machzahl an verschiedenen Stellen stromab. Auch hier weisen die Ergebnisse aus der vorgestellten Simulation eine exzellente Übereinstimmung mit den Messungen von Stromberg *et al.* [125] und der Simulation von Freund [14] auf: Das Machzahlprofil weitet, in guter Übereinstimmung mit den Referenzdaten, mit der Entwicklung des Freistrahls stromab auf (Abbildungen 3.42(a)-(c)). Die mittlere Länge des Potentialkerns, gemessen von der Position des Forcings x_0 , ist aus dem Verlauf der Machzahl entlang der Freistrahlachse, Abbildung 3.42(d), abzulesen und beträgt etwa $14r_0$. Abbildung 3.43 zeigt weitere Eigenschaften der simulierten Strömung, wobei auch hier wieder die Übereinstimmung mit der Simulation von Freund [14] sehr gut ist: Die Halbwertsbreite des Freistrahls, $r_{0.5}$, definiert mit $\bar{u}(r_{0.5}) = 0.5U_c$, wächst im turbulenten Bereich, ab $x \approx 13r_0$, linear mit $A(x - x_0)$ an, wobei x_0 der virtuelle Ursprung des Freistrahls und $A \simeq 0.102$ ist (siehe Abbildung 3.43(a)). Die Geschwindigkeit auf der Achse U_c , normiert mit U_j , ist in Abbildung 3.43(b) aufgetragen. Der normierte Wert ist bis zum Ende des Potentialkerns eins und fällt dann proportional zu x^{-1} , in guter Übereinstimmung mit der Approximation von Hussein *et al.* [128], ab. Die radialen Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit, zu sehen in Abbildung 3.44, normiert mit der Geschwindigkeit im Zentrum, U_c , und aufgetragen über der dimensionslosen Koordinate $y/(x - x_0)$ liegen im Bereich $14 \leq x/r_0 \leq 20$ sehr gut übereinander und kennzeichnen so den selbstähnlichen Bereich des Freistrahls. Wie bei anderen Simulationen (z.B.[22]) lassen sich die Profile sehr gut mit der Gaußfunktion $\bar{u}/U_c = \exp(-K_u(y/(x - x_0))^2)$, mit $K_u = \ln 2/A^2$, approximieren. Auch die

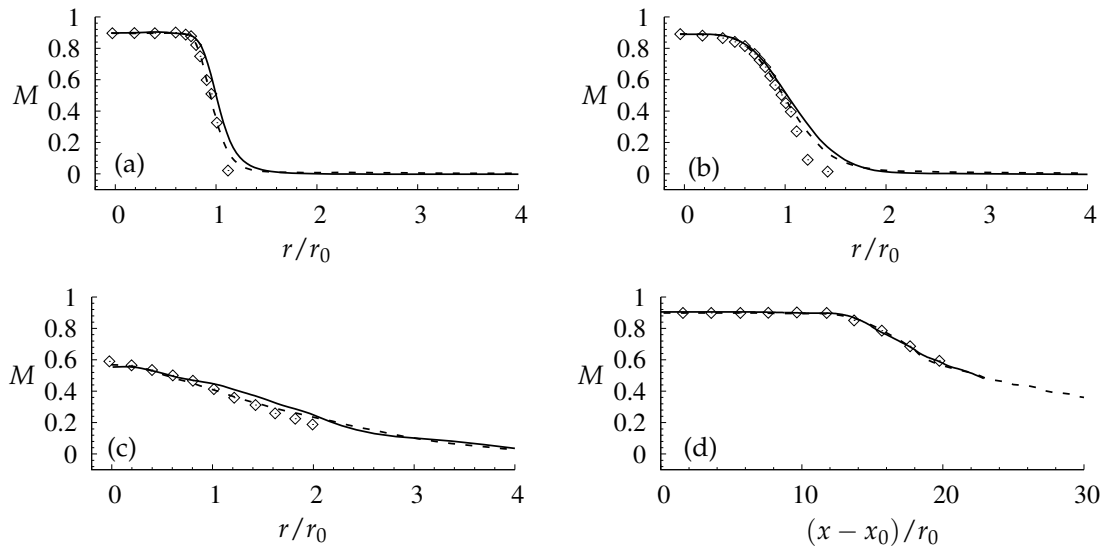


Abb. 3.42: Verlauf der Machzahl von: —, vorgestellte Simulation; - - -, Freund [14]; \diamond , Stromberg et al. [125]. (a) $x = 2r_0$; (b) $x = 10r_0$; (c) $x = 20r_0$; (d) Freistrahllachse ($r = 0$).

rms-Werte von u' entlang der Mittellinie sowie der totale Schalldruckpegel parallel zur Mittellinie stimmen gut mit Messungen bzw. ähnlichen Simulationen aus der Literatur überein (s. Abbildung 3.45). In Abbildung 3.46 sind die Reynoldsspannungen in axiale, radiale und azimutale Richtung an vier unterschiedlichen Positionen zwischen $x = 14r_0$ und $x = 19r_0$ über der dimensionslosen Koordinate $y/(x - x_0)$ aufgetragen. Sie liegen gut übereinander und signalisieren so die Selbstähnlichkeit voll entwickelter turbulenter Freistrahlen. Die Profile stimmen sehr gut mit jenen in Freund [14] überein und für $x \geq 15r_0$ fallen sie zudem zwischen die gemessenen Profile von Panchapakesan & Lumley [130] und Hussein *et al.* [128] (gleiches ist auch in Ref. [14] zu sehen). Die eindimensionalen turbulenten Energiespektren in x -Richtung bei $y = r_0$ (Abbildung 3.48) sind für alle drei Geschwindigkeitskomponenten breitbandig und fallen im betrachteten Wellenzahlbereich über fast vier Größenordnungen ab. Als Kriterium für eine gut aufgelöste LES wird im Allgemeinen ein Abfall über drei Größenordnungen gefordert [100]. Die Spektren $E_{v'v'}$ und $E_{w'w'}$ weisen ein deutliches Maximum im Injektionsbereich um $k_x = 2r_0$ auf. Die Geschwindigkeitsfluktuationen v' und w' nehmen also bei Skalen in der Größe des Freistrahldurchmessers Energie auf. Der folgende Inertialbereich mit seinem typischen $k^{-3/5}$ -Abfall ist in allen Spektren zu beobachten. Die Kolmogorov-Wellenzahl, k_η , ist größer als die cut-off Wellenzahl der räumlichen Diskretisierung, $k_c^g = 2\pi/(5\Delta_c)$, und wird wie bei einer LES üblich nicht aufgelöst. Die cut-off Wellenzahl ist die größte vom Finite-Differenzen Verfahren (Anzahl benötigter Punkte pro Wellenlänge) und Gitter (Gitterweite Δ_c) gut aufgelöste Wellenzahl. Skalen mit Wellenzahlen $k > k_c^g$ werden durch die explizite Filterung, welche als Feinstrukturmodell dient, dissipiert. Die dargestellten gemittelten Spektren wurden jeweils aus den Spektren von 25 instantanen Datenreihen der Fluktuation berechnet (Abbildung 3.47 zeigt fünf exemplarische Datenreihen). Die Strömung zeigt damit die wichtigen Kennzeichen von Turbulenz: Sie ist dreidimensional, die Reynoldsspannungen sind selbstähnlich und daher unabhängig von der Reynoldszahl und die Energiespektren sind breitbandig und fallen proportional zu $k^{-5/3}$ ab.

Aeroakustisches Feld. In Abbildung 3.49 ist eine Isofläche der zweiten Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors und die Divergenz der Geschwindigkeit (Dilatation) dargestellt. Da die Divergenz der Geschwindigkeit $\nabla \cdot \mathbf{u} \propto \frac{dp}{dt}$ ist und räumliche Änderungen des mittleren

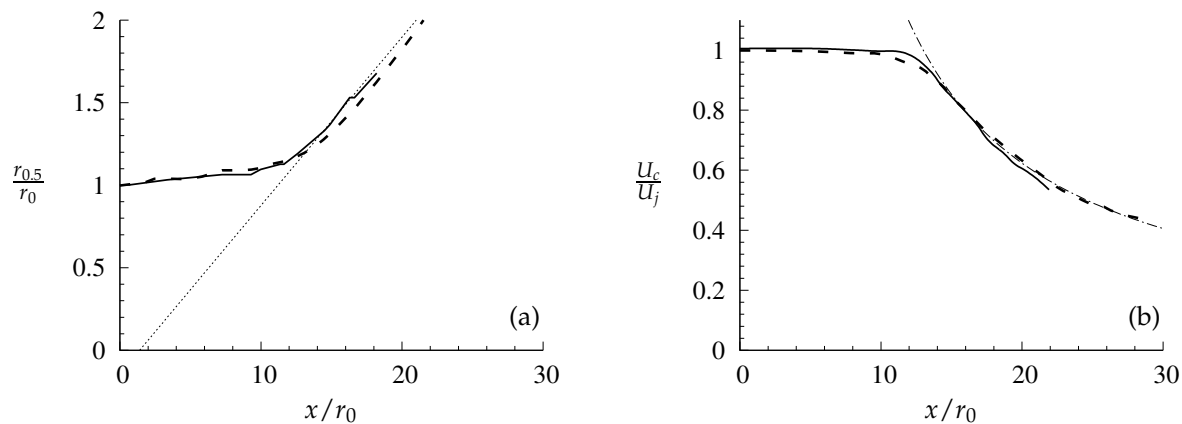


Abb. 3.43: (a) Halbwertradius des Freistrahls: —, vorgestellte Simulation; - - -, Freund [14]; ···, lineare Verlängerung $A(x - x_0)$ mit $A = 0.102$ zur Bestimmung des virtuellen Ursprungs ($x_0 = 1.4r_0$). (b) Geschwindigkeit auf der Zentrallinie: —, vorgestellte Simulation; - - -, Freund [14] (um $-2r_0$ verschoben); ···, Gleichung $\frac{U_c}{U_j} = B_u \left[\frac{2r_0}{x-x_0} \right]$ mit $B_u = 5.8$ (Hussein *et al.* [128]).

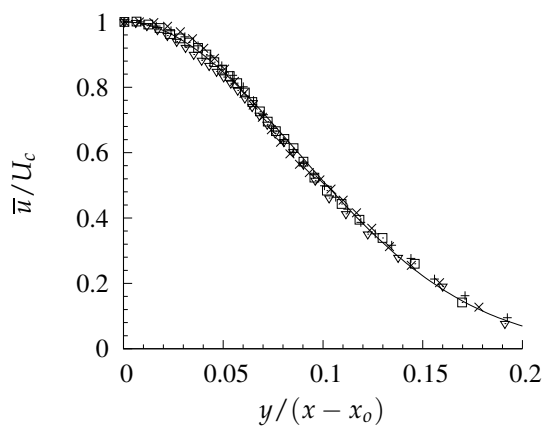


Abb. 3.44: Radiale Profile der mittleren axialen Geschwindigkeit normiert mit der lokalen Geschwindigkeit im Zentrum \bar{u}/U_c : +, bei $x = 14r_0$; x, bei $x = 15r_0$; □, bei $x = 18r_0$; ∇, bei $x = 19r_0$; —, Approximation mit Gaußprofil.

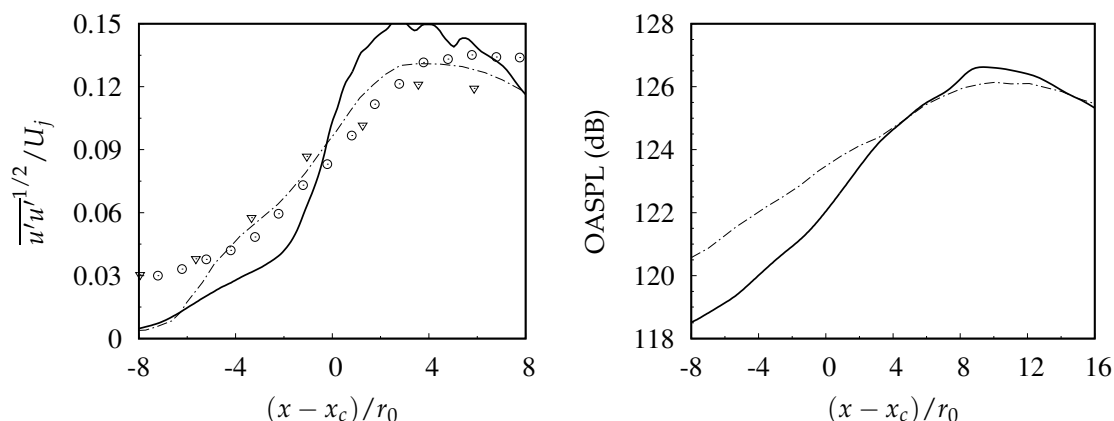


Abb. 3.45: (a) Profil der rms-Werts der axialen Geschwindigkeit entlang der Mittellinie, und (b) Akkumulierter Schalldruckpegel entlang der x -Linie bei $y = 10r_0$ und $z = 0$: —, präsentierte Simulation ($M_j = 0.9, Re = 3600$); ---, Bogey & Bailly [91] ($M_j = 0.9, Re = 4 \times 10^5$). Messungen: ∇ , Arakeri *et al.* [129] ($M_j = 0.9, Re = 5 \times 10^5$); \circ , Jordan *et al.* aus [91] ($M = 0.9, Re = 10^6$).

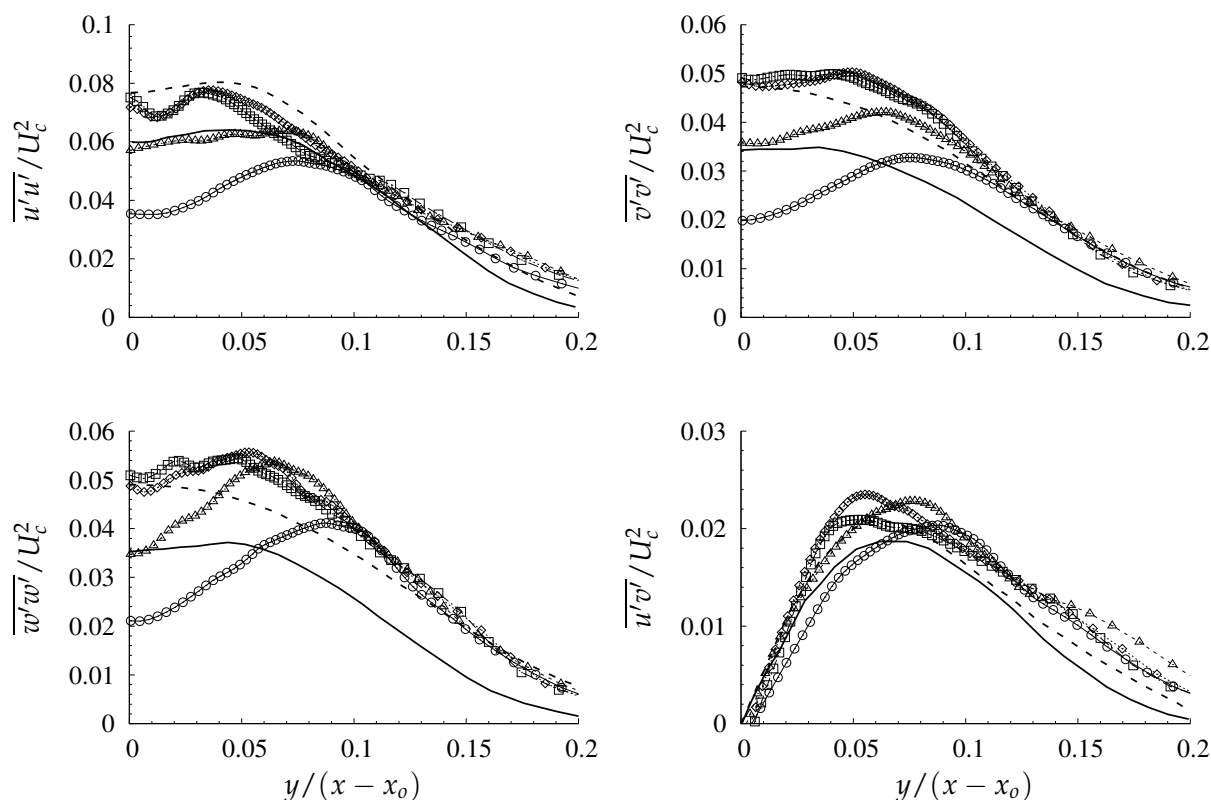


Abb. 3.46: Zweite Momente der Geschwindigkeit normiert mit der lokalen Geschwindigkeit im Zentrum: \circ , bei $x = 14r_0$; \triangle , bei $x = 16r_0$; \diamond , bei $x = 18r_0$; \square , bei $x = 19r_0$; —, Experimentelle Daten von Panchapakesan & Lumley [130]; und ---, Daten von Hussein *et al.* [128].

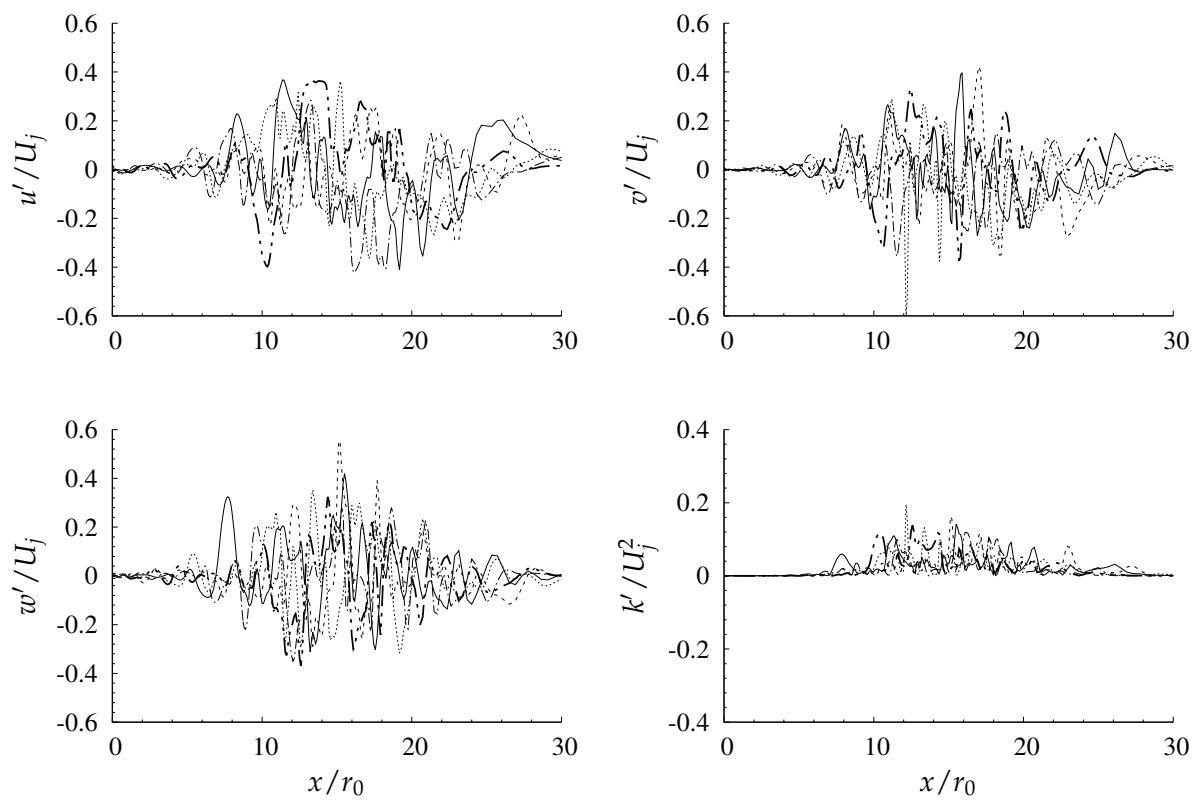


Abb. 3.47: Fluktuation der Geschwindigkeitskomponenten und turbulenten kinetischen Energie, $k' = 0.5(u'^2 + v'^2 + w'^2)$, entlang der x -Koordinate bei $y = r_0$ und $z = 0$: —, bei $t = 490r_0/U_j$; - - -, bei $t = 500r_0/U_j$; ···, bei $t = 510r_0/U_j$; ---, bei $t = 520r_0/U_j$; -·-·-, bei $t = 530r_0/U_j$.

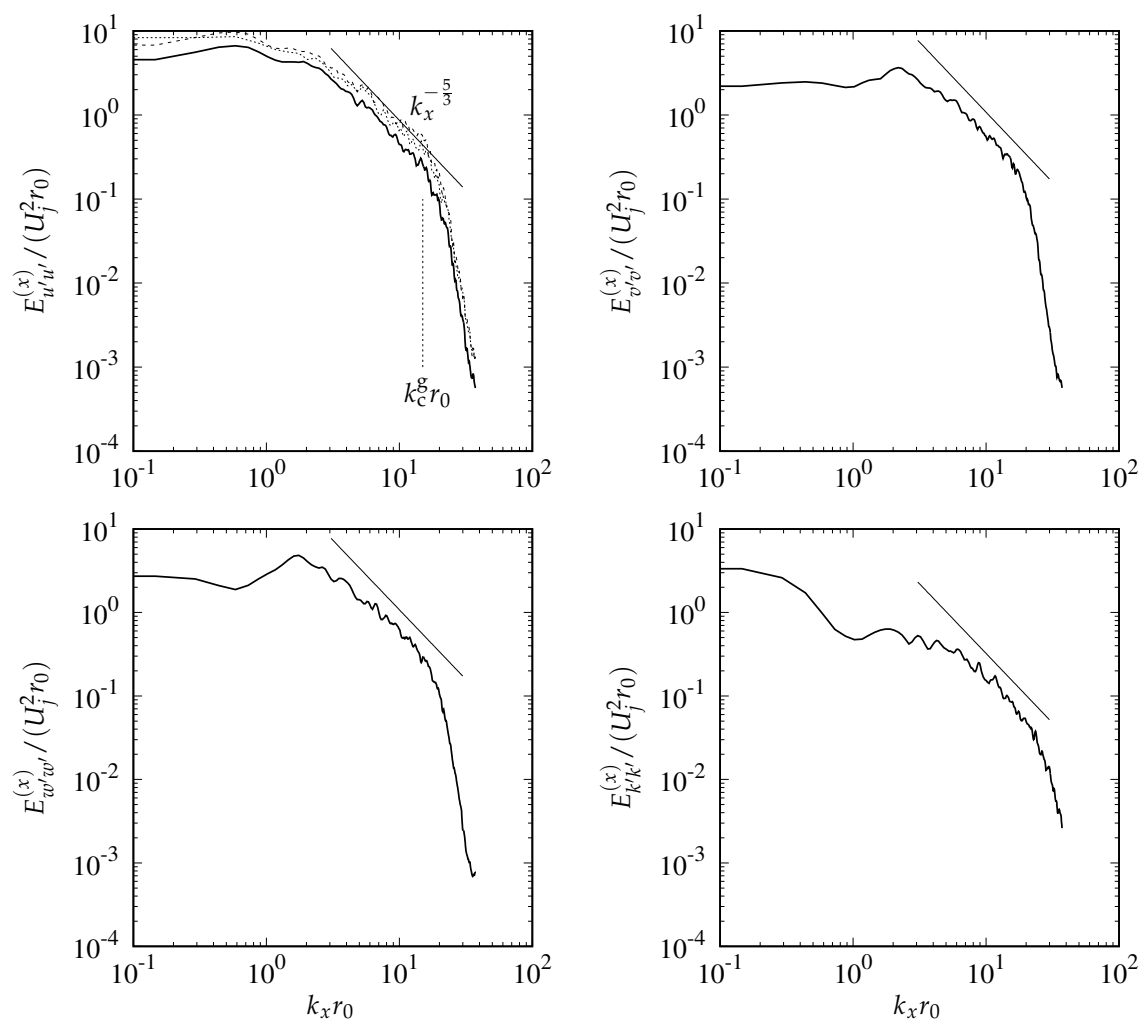


Abb. 3.48: Eindimensionale Energiespektren bei $y = r_0$ und $z = 0$ berechnet aus den Geschwindigkeitsfluktuationen entlang der x -Koordinate: —, Hanning-Fenster; - - -, tanh-Fenster Gleichung (3.39); \cdots , tanh-Fenster angewandt auf den Bereich $-2 \leq x/r_0 \leq 20$. Die cut-off Wellenzahl des Gitters ist $k_c^g = 2\pi/(5\Delta_c) \simeq 15/r_0$, wobei Δ_c die lokale maximale Gitterweite und hier $\Delta_c = 0.084r_0$ ist, und die cut-off Wellenzahl nach dem Nyquist-Kriterium ist $k_c^{\text{Ny}} = \pi/\Delta_c \simeq 37/r_0$. Für die dargestellten gemittelten Spektren wurde jeweils über 25 instantane Spektren, erhalten aus 25 Datenreihen mit einem zeitlichen Abstand von $5r_0/U_j$, gemittelt.

Drucks eliminiert, eignet sie sich gut zur Visualisierung der akustischen Druckschwankungen. Die Schallwellen werden radial aus dem Bereich unmittelbar nach dem Potentialkern bei $x \approx 15r_0$ abgestrahlt. Es fällt auf, dass der rechte Bereich des akustischen Feldes ($x > 15r_0$) von niederfrequenten Wellen mit großen Amplituden dominiert wird und der linke Bereich ($x < 13r_0$) tendenziell kurzweiligere Druckschwankungen aufweist. Zwischen diesen zwei Gebieten ist eine Zone relativ niedriger Druckamplituden zu beobachten. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich bemerkt, dass der Freistrahler in seiner räumlichen Entwicklung durch das in Stömungsrichtung relativ kurze Simulationsgebiet eingeschränkt ist und das resultierende akustische Fernfeld daher nicht alle Anteile voll entwickelter Freistrahler enthalten kann. Da das Ziel dieser Untersuchung jedoch nicht darin besteht, neue Erkenntnisse hinsichtlich der Aeroakustik von Freistrahler zu liefern, sondern darin den oben beschriebenen FWH-Ansatz zu validieren, ist das Gebiet für diesen Zweck ausreichend dimensioniert. Die schwarzen Punkte in der Darstellung kennzeichnen die Position der virtuellen Beobachter auf einem Bogen mit Radius $20r_0$ gemessen aus dem Koordinatenursprung. An diesen Stellen wird die Lösung, erhalten aus der FWH-Gleichung mit der LES-Lösung und Lösungen aus der Literatur verglichen. Nach qualitativen Betrachtungen anderer Simulationen aus der Literatur korrespondiert der Bereich dominanter Schallquellen mit einer positiven zweiten Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors ($II_{\nabla u} = Q > 0$). Legt man diese Annahme für die Dimensionierung der Kontrollfläche zugrunde, dann werden die Schallquellen durch die Kontrollfläche (gekennzeichnet durch die Punktlinie) eingeschlossen und die Fläche ist ausreichend weit vom Freistrahler entfernt, sodass nicht abstrahlende aerodynamische Druckschwankungen die Lösung nicht stören und die Annahme quasi-linearer Akustik auf der Kontrollfläche zulässig ist. Der Beobachter bei $\theta = 15^\circ$ liegt sehr dicht an der Kontrollfläche und in einem Gebiet relativ starker Dilatation. Es wird daher angenommen, dass der akustische Druck, erhalten aus der FWH-Gleichung, für diesen Beobachter den größten Fehler aufweist. Weiter wird vermutet, dass der skalierte rms-Druck, bei $R = 60r_0$ für $\theta = 15^\circ$ bis 30° überschätzt wird. Die erhöhte Dilatation im Bereich um $x = -1$ und $y = r_0$ wird durch das nicht gänzlich divergenzfreie Wirbelringforcing hervorgerufen. Es scheint aber, dass die Kontamination des akustischen Feldes gering und auf einen kleinen Bereich um den Wirbelring begrenzt ist.

In Abbildung 3.50 werden die Druckfluktuationen berechnet via FWH-Löser an den sechs diskreten Beobachterpositionen mit der LES-Lösung verglichen. Die FWH-Lösung stimmt in Amplitude und Phase wie erwartet für $\theta \geq 30^\circ$ sehr gut mit der LES-Lösung überein. Aber auch für den Beobachter B1 bei $\theta = 15^\circ$ ist die Übereinstimmung in der Phase erstaunlich gut. Lediglich die Amplitude wird unterschätzt, was aber aufgrund der sehr geringen Distanz des Beobachterpunktes zur Kontrollfläche auch nicht anders erwartete wurde. Weil das mittlere Druckfeld im Fernfeld uniform wird ($\bar{p}(\mathbf{x}) \rightarrow p_\infty$), nimmt auch die Verschiebung im mittleren Druck mit zunehmender Entfernung des Beobachters von der Kontrollfläche ab. Es fällt noch auf, dass der Druckverlauf, erhalten aus der LES, glatter ist als die FWH-Lösung. Dies liegt an der numerischen Dissipation und der Glättung der LES-Lösung durch das numerische Filter. Dass die FWH-Lösung höhere Frequenzen enthält, wird noch besser an den langsamer abfallenden Leistungsdichtespektren in Abbildung 3.51 ersichtlich. Die spektrale Leistungsdichte des akustischen Drucks, bekannt als Schalldruckpegel (SPL), wird berechnet mit

$$SPL(\mathbf{x}, St) = 10 \log \left(\frac{\widehat{p}(\mathbf{x}, f) \widehat{p}^*(\mathbf{x}, f)}{St_{\min} p_{\text{ref}}^2} \right) \text{ dB}$$

wobei $\widehat{p}^*(\mathbf{x}, f)$ die konjugiert Komplexe von \widehat{p} ist und der Referenzdruck $p_{\text{ref}} = 20 \mu\text{Pa}$ be-

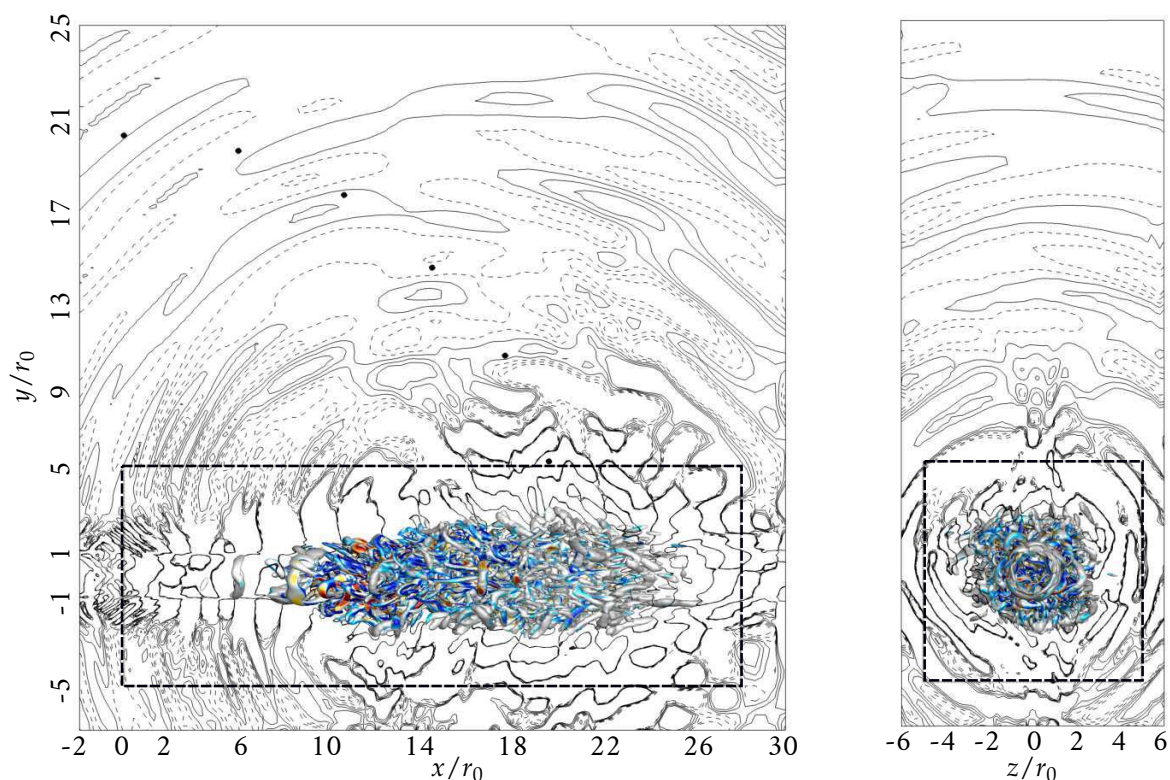


Abb. 3.49: Instantane Visualisierung von $II_{\nabla u}$ und der Dilatation $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ in der x - y -Ebene bei $z = 0$ (links) und in der y - z -Ebene bei $x = 15r_0$ (rechts). Konturebenen der Dilatation $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ zwischen $\pm 5 \times 10^{-4} U_j / r_0$ (Inkrememente: $2 \times 10^{-4} U_j / r_0$; —, $\Theta > 0$; ---, $\Theta < 0$) und Isofläche für $Q = 0.25 U_j^2 / r_0^2$ koloriert mit der instantanen Lighthill-Quelle S (Gl. (3.40)) mit Farbskala von blau ($S = -6\rho_j U_j^2 / r_0^2$) bis rot ($S = 6\rho_j U_j^2 / r_0^2$), Werte zwischen $-1.5 < Sr_0^2 / (\rho_j U_j^2) < 1.5$ sind grau koloriert. Die gepunktete Box kennzeichnet die Kontrollfläche und die Punkte • definieren die Position der 6 Beobachter bei $R = 20r_0$ im Abstand von 15° zwischen $\theta = 15^\circ$ bis 90° . Die instantane Zeit ist $t = 570r_0 / U_j$.

trägt. \hat{p} folgt aus der Fouriertransformation des gefensternten Drucksignals

$$\hat{p}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p'(t) w(t) e^{-i\omega t} dt,$$

wobei diesmal die Fensterfunktion analog zu [14]⁷

$$w(t) = \frac{1}{2} \left[\tanh \left(5 \frac{t - t_1}{t_1 - t_0} \right) - \tanh \left(5 \frac{t - t_2}{t_f - t_2} \right) \right], \quad (3.39)$$

mit t_0 und t_f als der Start- respektive Endzeit der Aufnahmedauer (Samplingdauer), $T_{sp} = t_f - t_0$, und $t_1 = 0.05T_{sp}$, $t_2 = 0.95T_{sp}$ verwendet wurde. Diese Fensterfunktion hat gegenüber dem sonst verwendeten Hanning-Fenster den Vorteil, dass das Drucksignal über einen größeren Aufnahmebereich unbeeinflusst bleibt und niedrige Frequenzen nicht so unterschätzt werden.

Im ganzen stimmen die Leistungsdichtespektren im relevanten Frequenzbereich sehr gut mit der LES-Lösung überein. Die Spektren des Drucksignals aus der LES fallen für die Beobachter

⁷Die Formulierung der Fensterfunktion in Ref.[14] ist fehlerhaft.

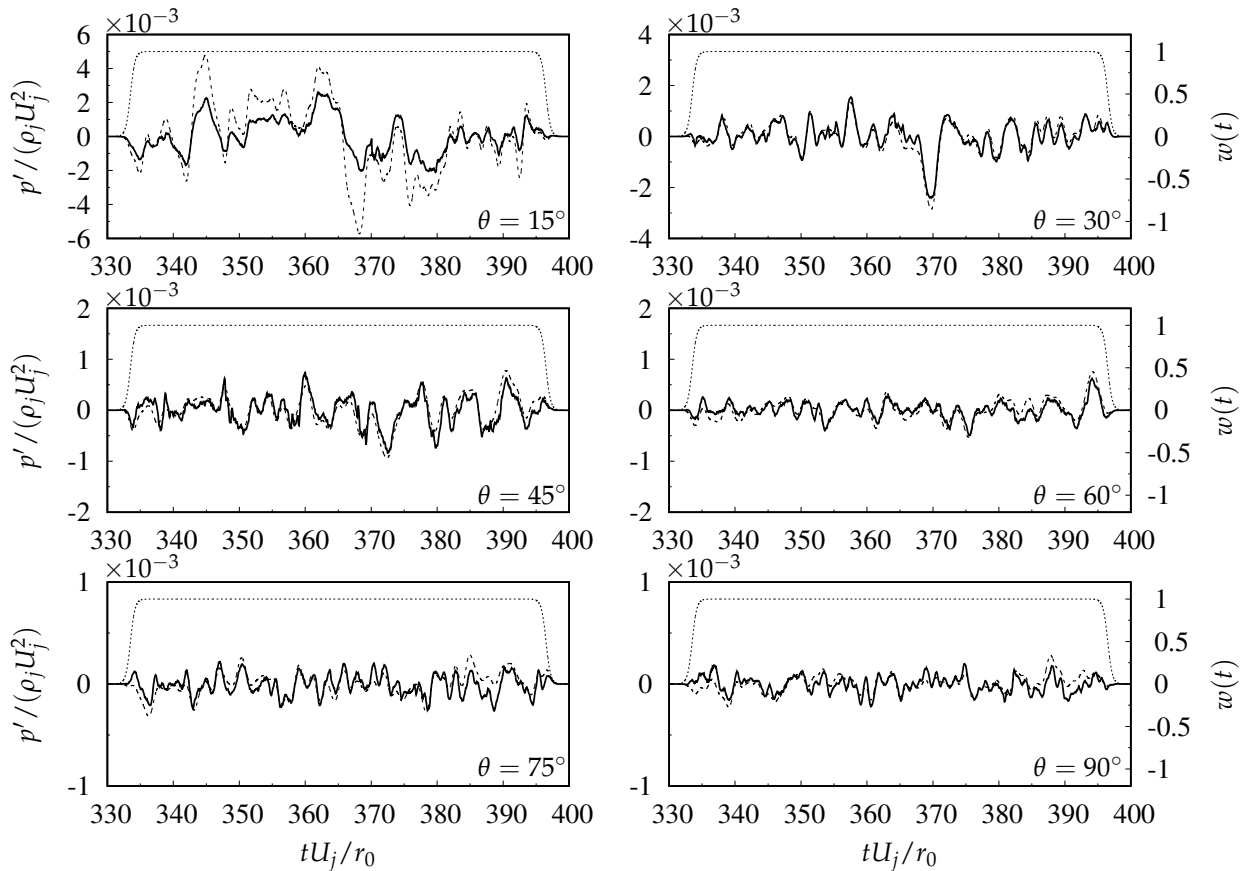


Abb. 3.50: Gefensterter akustischer Druck für die 6 Beobachter bei $R = 20r_0$: —, FWH-Lösung; - - -, LES-Lösung. \cdots , tanh-Fenster, $w(t)$, Gleichung (3.39). Die Profile wurden so verschoben, dass $\overline{p'} = 0$.

mit $\theta > 15^\circ$ bei der lokalen cut-off Strouhal-Zahl des Gitters wie erwartet ab (siehe Abbildung 3.51). Sie ist im akustischen Gebiet $St_c^g = 1.17$ und deutlich geringer als die Nyquist Strouhal-Zahl, $St_c^{Ny} = 2r_0 / (2\Delta t_{sp} U_j)$, welche mit dem Samplingzeitschritt von $\Delta t_{sp} = 0.007r_0 / U_j$ rund 142 beträgt. Die zeitliche Auflösung wird daher von St_c^g und nicht vom Nyquist-Kriterium limitiert. Die minimale aufzulösende Strouhal-Zahl wird durch die Samplingdauer $T_{sp} = 70r_0 / U_j$ bestimmt und ist $St_{min} = 2r_0 / (T_{sp} U_j) = 0.029$. Weil das Gitter erst ab $y > 5r_0$ eine geringere Auflösung besitzt, ist der Leistungsabfall für große Frequenzen bei Beobachter B1 ($\theta = 15^\circ$) noch nicht so ausgeprägt. Mit zunehmender Ausbreitung der Welle nimmt der Amplitudenfehler der LES-Lösung für Frequenzen größer St_c^g zu; die FWH-Prozedur dagegen besitzt keine inhärente Dissipation, ihre Lösung wird diesbezüglich nur vom schon vorhanden Amplitudenfehler an der Kontrollfläche beeinflusst. Um diesen so gering wie möglich zu halten, sollte die Kontrollfläche daher möglichst nah an das Quellgebiet gelegt werden, was auch die Untersuchungen von Uzun [115] und Nichols *et al.* [117] zeigten.

Die Schalldruckpegel für die Beobachter B1 und B2 bei $\theta = 15^\circ$ bzw. $\theta = 30^\circ$ weisen den für diesen Winkelbereich typischen Peak bei $St_D = 0.2$ auf (zu sehen bei diversen anderen Untersuchungen, z.B. Freund [14]). Diese Tatsache unterstützt die Beobachtung aus Abbildung 3.49, dass das Gebiet im Bereich $15 < \theta < 45$ vorwiegend von langwelligem, niederfrequentem Schall dominiert wird. Mit zunehmendem Winkel nimmt diese Signifikanz ab und des Spektrum wird flacher.

Der totale Schalldruckpegel (OASPL) in Abbildung 3.52 wurde aus dem rms-Wert des Drucks

im betrachteten Zeitintervall berechnet. Die allgemeine Formel dazu lautet

$$OASPL(r, \theta) = 10 \log \left(\frac{p_{\text{rms}}^2(r, \theta)}{p_{\text{ref}}^2} \right) \text{ dB}$$

wobei der Referenzdruck wieder $p_{\text{ref}} = 20 \mu\text{Pa}$ beträgt. Zum Vergleich mit Referenzdaten wurden die Werte mit $p_{\text{rms}}(60r_0) = \frac{20}{60} p_{\text{rms}}(20r_0)$ auf den Wert bei $60r_0$ skaliert und über dem Winkel θ aufgetragen. Für die Beobachter mit $\theta > 30$ ist die Übereinstimmung mit den Messungen sehr gut (Abbildung 3.52(a)). Entlang der Freistrahachse sind die Druckpegel größer. Das liegt daran, dass die vorgenommene Skalierung nur für Druckfluktuationen rein akustischer Natur gültig ist. Der Beobachter B1 wird aufgrund des relativ kleinen Bogenradius jedoch noch von aerodynamischen Druckschwankungen beaufschlagt (zu sehen auch an der Dilatation in Abbildung 3.49), weswegen der rms-Wert dort deutlich höher ist. Für einen größeren Bogenradius sollte dieser Effekt verschwinden. Ähnliche Verläufe zeigten sich auch bei den FWH-Simulationen von Uzun *et al.* [115] (Abbildung 3.52(b)). Uzun hatte noch das Problem, dass für eine am Auslass geschlossene Kontrollfläche der Schall bei großen Winkeln überschätzt wurde, und für eine am Auslass offene Kontrollfläche der Schall für kleine Winkel stark unterschätzt wurde. Ersteres liegt daran, dass über die Auslassfläche strömende Wirbel- und Entropiemoden Quadrupole darstellen, welche die FWH-Lösung im Bereich gegenüber der Auslassfläche (große Winkel) verfälschen.

Die Herleitung der Lighthill-Analogie setzt eine geschlossene Kontrollfläche voraus, was die zweite Problematik erklärt. Die Bedeutung einer geschlossenen Kontrollfläche wird an dem einfachen Impuls-Testfall in Abbildung 3.36 deutlich: Thickness-Noise und Loading Noise Komponenten, ausgestrahlt von unterschiedlichen Ebenen des Kontrollkubus löschen sich für nicht vom Beobachtervektor geschnittene Ebenen gegenseitig aus. Wird eine Ebene nicht in die Berechnung des Schalls am Punkt x einbezogen, kommt es zu einer Veränderung des Drucksignals über der Zeit. Shur *et al.* [131] untersuchten diese Problematik und stellten fest, dass der Fehler mit zunehmender Ausdehnung der Kontrollfläche stromab geringer wird. Das ist naheliegend und ist in den stromab nachlassenden Amplituden der Wirbelstärkefluktuationen begründet. Zur Behebung dieser Auslassrand Problematik schlugen sie eine Mittelung der Strömungsgrößen über mehrere in einem fixen Abstand Δ platzierte Auslassscheiben vor. Brès *et al.* [28] erzielten mit diesem Vorgehen auch tatsächlich sehr gute Resultate. Sinayoko *et al.* [132] versuchten die Problematik ausströmender Wirbel mit Gewichtungsfaktoren in den Griff zu bekommen, was allerdings nicht besonders erfolgreich war. Sie suchten auch einen optimalen Abstand Δ zwischen den Auslassflächen für einen stromab konvergierenden Wirbel mit konstantem Durchmesser. Für praktische Anwendungen sind die Werte jedoch wenig hilfreich, da Wirbelstärkefluktuationen in turbulenten Strömungen naturgemäß diverse Längenskalen besitzen.

Eine einfache aber dennoch effektive Alternative ist es, die Auslassfläche wie hier im Bereich der Dämpfungszone zu platzieren. Die Dämpfungszone dämpft starke Wirbelstärke- und Entropiemoden und sorgt so für eine Glättung und damit implizite Mittelung der Lösung. Dieser Ansatz ist zwar weniger deterministisch aber dafür deutlich kosteneffizienter als die von Brès vorgenommene Mittelung über 16 Auslassebenen.

Mit den guten Resultaten aus dem Impuls-Testfall und der Simulation des dreidimensionalen Freistrahls wurde gezeigt, dass der im Rahmen der Arbeit implementierte Ffowcs Williams & Hawkings Löser eine genaue und effiziente Vorhersage des Schalldrucks im Fernfeld ermöglicht. Die Formulierung und deren Implementierung in das OVERTURE Paket ist damit validiert.

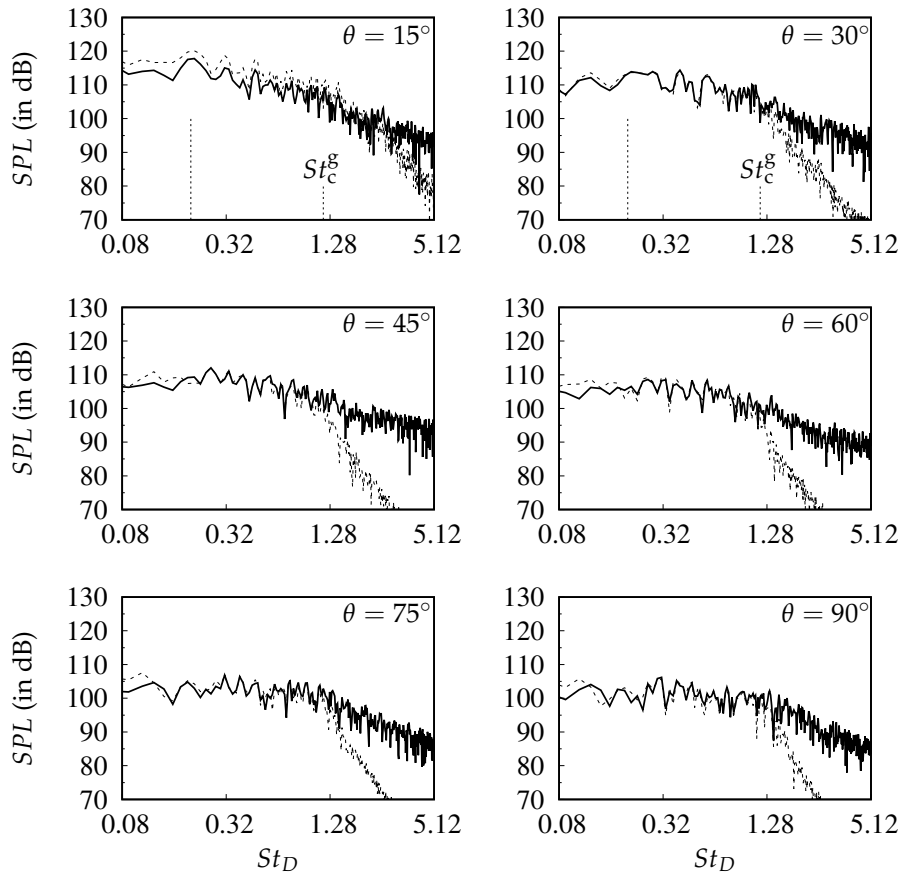


Abb. 3.51: Spektrale Leistungsdichte als Funktion der Strouhalzahl $St_D = 2r_0f/U_j$ bei $R = 20r_0$: —, FWH-Lösung; - - -, LES-Lösung. Die erste senkrechte Punktlinie kennzeichnet $St_D = 0.2$. Die cutoff Strouhal-Zahl des Gitters, $St_c^g = 2r_0f_c/U_j$ mit $f_c = k_c^g U_j / (2\pi)$, ist an der Kontrollfläche $St_c^g = 2r_0k_c^g / (2\pi) = 2r_0 / (5\Delta_c) = 2r_0 / (5 \times 0.34r_0) = 1.17$.

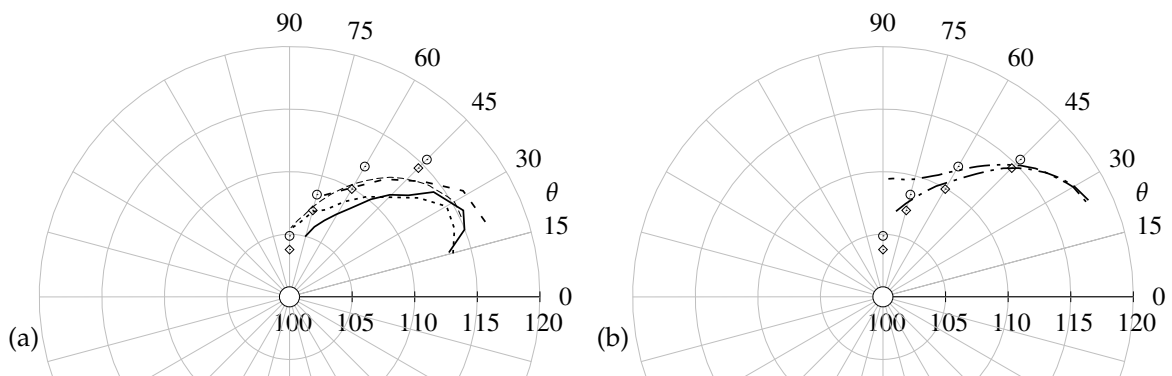


Abb. 3.52: Totaler Schalldruckpegel (OASPL) entlang eines Bogens bei $R = 60r_0$ von der Düse und mit θ gemessen von der Freistrahllachse: \diamond , FWH-Lösung und \circ , LES-Lösung, (jeweils um -9.54 dB von Radius $20r_0$ zu $60r_0$ verschoben). (a) Vergleich mit experimentellen Daten: —, $Re = 3600$ Stromberg *et al.* [125]; - - -, $Re = 2 \times 10^5$ Mollo-Christensen [133]; \cdots , $Re = 6 \times 10^5$ Lush [134] (um 12 dB von Radius $240r_0$ zu $60r_0$ verschoben); - - -, SAE ARP 876C Abschätzung. (b) Vergleich mit Simulationsdaten: ---, LES; - · - ·; FWH jeweils mit $Re = 4 \times 10^5$ Uzun [114].

3.3 Identifikation von Schallquellen

Bereits in diversen Veröffentlichungen (z.B. [15, 115]) wurde der Quellterm, $\partial_i \partial_j T_{ij}$, der Lighthill-Gleichung (3.15) betrachtet. Es ist aber wichtig darauf hinzuweisen, dass die zweifache Divergenz von T_{ij} auf der rechten Seite von (3.15) eine nominale, aber nicht a priori reale akustische Quelle ist. Das liegt erstens daran, dass die Lighthill-Gleichung aus den strömungsmechanischen Grundgleichungen ohne weitere Näherungen und Linearisierungen abgeleitet wurde und der nominale Quellterm alle Effekte außer der Ausbreitung in einem homogenen stationären Medium, beschrieben von der Wellengleichung auf der linken Seite von (3.15), wie z. B. die Brechung, zusammenfasst und somit implizit berücksichtigt. Die akustische Analogie von Lilley [135] dagegen versucht Brechungseffekte in Gebieten großer Gradienten im mittleren Strömungsfeld explizit zu erfassen, wird aber dadurch auch analytisch anspruchsvoller. Der zweite Grund ist, dass der größte Teil von $\partial_i \partial_j T_{ij}$ nicht in das akustische Fernfeld strahlt und die standard Lighthill-Gleichung keine einfache Aussage darüber machen kann, welcher Lärm aus welcher Region des Freistrahls stammt [15].

Im Kontext der JFI soll ermittelt werden, wo sich die relevanten Quellen befinden und wie sich diese hinsichtlich ihrer Abstrahlrichtung verhalten. Die dazu von den oben genannten Autoren verwendeten Techniken, sind entweder auf freie Strömungen beschränkt oder auf die komplexen JFI-Konfigurationen hier nicht effizient anzuwenden. Es wird daher versucht, Aussagen basierend auf der aufbereiteten instantanen Lösung zu treffen. Der vorgeschlagene Ansatz dazu, wurde anhand des oben simulierten Freistrahls und der Daten von Freund [15] und Uzun *et al.* [114, 115] verprobt und wird im Folgenden vorgestellt.

Hinsichtlich des Fernfeldschalls kann der Beitrag des viskosen Terms $\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$ vernachlässigt werden [136, 137] und Untersuchungen von Colonius & Freund [138] zeigten, dass viskose Effekte im Fall von Freistrahllärm auch dann keinen signifikanten Beitrag liefern, wenn die Reynoldszahl gering ist. Im Folgenden wird daher der Quellterm definiert mit

$$S := \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (p' - a_\infty^2 \rho') \quad (3.40)$$

betrachtet. Abbildung 3.53 zeigt eine instantane Visualisierung von S . Im Bereich laminarer Strömung sind die akustischen Quellen sehr schwach, die Minima und Maxima von S liegen in der Mischungszone und am Ende des Potentialkerns in Anwesenheit hoher turbulenter Intensität. In der Dämpfungszone ($x > 20r_0$) werden die Quellen wieder schwächer, sodass die Kontrollfläche alle relevanten Quadrupole einschließt und keine starken Quellen die Kontrollfläche durchqueren.

Es ist bekannt, dass der größte Teil von S nicht ins akustische Fernfeld abstrahlt. Für eine tiefere Einsicht in die Schall generierenden Mechanismen ist es daher sinnvoll S weiter aufzuspalten. Ribner [16] leistete mit seiner Arbeit dazu schon 1969 wichtige Erkenntnisse. Er teilte die Schallquelle in einen linearen Anteil, den er „shear noise“ nannte, und einen nicht-linearen Anteil, den er „self noise“ nannte auf. Dazu wird die Reynoldsauflösung auf den Lighthillspannungstensor, T_{ij} , angewandt und es folgt

$$T_{ij} = \bar{T}_{ij} + \rho(\bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j) + \rho u'_i u'_j + (p' - a_\infty^2 \rho') \delta_{ij} - \tau'_{ij},$$

wobei $\bar{T}_{ij} = \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + (\bar{p} - a_\infty^2 \bar{\rho}) \delta_{ij} - \bar{\tau}_{ij}$ ist. Folgt man Freund [15] und lässt τ_{ij} unberücksichtigt, so können die einzelnen Terme als mittlere Komponente, T_{ij}^m , eine lineare Komponente, T_{ij}^l , eine nicht-lineare Komponente, T_{ij}^n , und eine Entropiekomponente, T_{ij}^s , interpretiert werden

und man kann schreiben

$$T_{ij} = T_{ij}^m + T_{ij}^l + T_{ij}^n + T_{ij}^s,$$

wobei

$$\begin{aligned} T_{ij}^m &= \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + (\bar{p} - a_\infty^2 \bar{\rho}) \delta_{ij}, \\ T_{ij}^l &= \rho (\bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j), \\ T_{ij}^n &= \rho u'_i u'_j, \\ T_{ij}^s &= (p' - a_\infty^2 \rho') \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Da der Schall von $T_{ij}^{\bar{p}} = \bar{\rho} u_i u_j + (p' - a_\infty^2 \rho') \delta_{ij}$ annähernd gleich mit dem von T_{ij} ist [15], wird die Dichte hier nicht explizit in $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ aufgespalten. Die korrespondierenden Quellterme, S^m , S^l , S^n , und S^s , berechnet mit $S^k = \frac{\partial^2 T_{ij}^k}{\partial x_i \partial x_j}$, sind in Abbildung 3.54 für die selbe Zeit wie die instantane Darstellung der vollen Quelle S in Abbildung 3.53 zu sehen. Der mittlere Anteil, S^m , liefert per Definition keinen Lärmbeitrag. Er ist nur im laminaren Bereich der Scherschicht, aufgrund der nicht uniformen mittleren Dichte dort, und im Bereich des Potentialkerns, $\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$ -Term, mit sehr geringen Amplituden ungleich null. Die linearen Quellen, S^l , (Abbildung 3.54(b)) liegen, wie bei der vollen Quelle S , im Bereich kohärenter Strukturen am Ende der laminar-turbulenten Transition und im voll turbulenten Gebiet am Ende des Potentialkerns bei $x \approx 15r_0$. Die Amplituden sind in diesen Gebieten etwas geringer als die der vollen Quelle. Der nicht-lineare Anteil von S , zu sehen in Abbildung 3.54(c), ist in Amplitude und räumlicher Ausdehnung etwas größer als S^l und suggeriert der dominante Teil für die ungerichtete Schallabstrahlung zu sein. Werte von S^n ungleich null bleiben auf den letzten Teil der Mischungsschicht und den voll turbulenten Bereich beschränkt. Obwohl die Amplituden des Entropie-Anteils, S^s , (Abbildung 3.54(d)) geringer sind als die der totalen Quelle S , ist ihre Struktur und Ausdehnung sehr ähnlich mit derer von S .

Diese Betrachtung lässt noch keine Aussagen darüber zu, in welche Richtung eine Geräuschquelle emittiert. Daher führen wir einen richtungsgewichteten Quellterm S_r^k ein (veröffentlicht in [139], Herleitung s. Anhang A), der die Abstrahlung in Richtung der Beobachterposition bei $\mathbf{x} = (x^o, y^o, z^o)$ beschreiben soll, als

$$S_r^k = \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \frac{\partial^2 T_{ij}^k}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Dabei ist $\mathbf{y} = (x, y, z)$ die Position im LES-Bereich; wenn der Abstand $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ zwischen Beobachter und Quelle gegen unendlich geht, hängt S_r^k nur von der Beobachterrichtung $\hat{\mathbf{r}}$ ab und die Quellenkomponenten in der x - y -Ebene bei $z = 0$ ($\phi = \pi/2$) projiziert in Richtung $\hat{\mathbf{r}} = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ werden bestimmt über

$$S_\theta^k = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 T_{xx}^k}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 T_{yy}^k}{\partial y^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 T_{xy}^k}{\partial x \partial y}, \quad (3.41)$$

wobei θ der Winkel gemessen von der x -Achse und ϕ der Winkel gemessen von der z -Achse ist. Freund [15] fand heraus, dass der Beitrag von T_{ij}^s zum Schallfeld für alle Winkel der kleinste aller Komponenten ist, daher wird die Entropiekomponente hier nicht betrachtet. Wir nehmen im Folgenden an, dass eine Annäherung an die Schallquellen, die aus dem JFI resultieren, durch Mittelung der Quellenkomponenten über die Zeit für die JFI-Konfiguration und

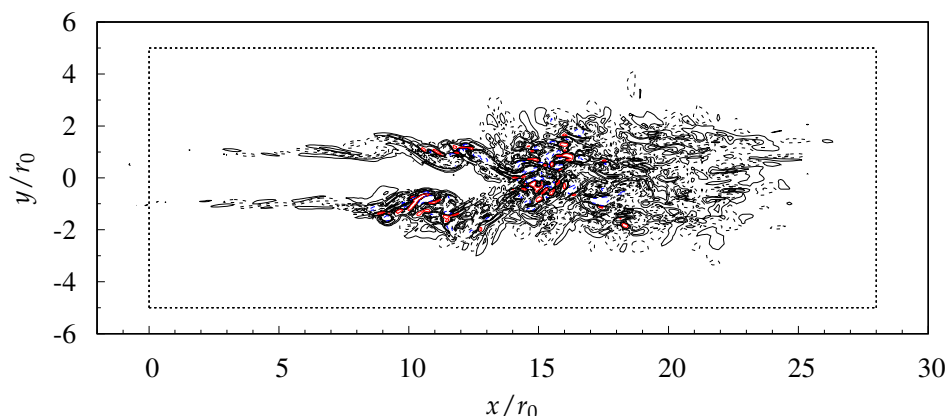


Abb. 3.53: Instantane Visualisierung bei $t = 570r_0/U_j$ der Lighthill-Quelle S in der x - y -Ebene bei $z = 0$. Konturen: 8 Ebenen bei $Sr_0^2/(\rho_j U_j^2) = \pm 0.5, 1.5, 3, 6$. Positive und negative Werte sind solide bzw. gestrichelt dargestellt, die maximale Ebene ist zudem rot und die minimale blau koloriert. \dots , kennzeichnet die FWH-Kontrollfläche.

das isolierte Strahl- und Flügelfeld erhalten wird, und kombinieren diese dann, um die JFI-Komponente aus der gesamten Konfiguration wie folgt abzuleiten

$$\overline{S_{JFI}^k} = \overline{S_{Jet+Flap}^k} - \overline{S_{Jet}^k} - \overline{S_{Flap}^k}. \quad (3.42)$$

Dies ergibt keine perfekte Darstellung der wahren JFI-Schallquellen, da z.B. Auslöschungen auftreten können, aber es sollte auf Regionen hinweisen, in denen sich die relevanten Quellen befinden könnten. Aus diesen Regionen werden dann Zeitreihen der transienten Quellen in der LES in diesem Bereich extrahiert, gespeichert und zur Bestimmung des resultierenden Schallfeldes nach dem Verfahren von [15] verwendet. S_r^k und S_θ^k wurde für alle sechs Beob-

θ	S_θ	S_θ^l	S_θ^n	S_θ^s	$S_\theta^{u'}$	$S_\theta^{p'}$	S_r	S_r^l	S_r^n	S_r^s
15	0.97	1.03	0.37	0.13	0.39	0.26	0.62	0.55	0.38	0.23
30	0.74	0.78	0.32	0.16	0.34	0.25	0.60	0.31	0.48	0.32
45	0.60	0.56	0.34	0.22	0.37	0.28	0.65	0.21	0.55	0.36
60	0.59	0.40	0.42	0.30	0.46	0.33	0.72	0.35	0.57	0.35
75	0.63	0.25	0.50	0.35	0.55	0.37	0.82	0.58	0.57	0.33
90	0.65	0.07	0.56	0.37	0.60	0.39	0.95	0.81	0.55	0.28
15	0.75	0.67	0.31	0.13	0.33	0.22	0.55	0.40	0.34	0.21
30	0.60	0.52	0.28	0.16	0.30	0.22	0.56	0.22	0.45	0.30
45	0.52	0.37	0.31	0.21	0.33	0.25	0.62	0.14	0.52	0.34
60	0.53	0.26	0.40	0.28	0.42	0.29	0.65	0.20	0.54	0.33
75	0.59	0.16	0.49	0.33	0.52	0.34	0.69	0.34	0.53	0.31
90	0.63	0.06	0.54	0.35	0.58	0.36	0.74	0.48	0.49	0.27

Tab. 3.9: L_2 -Norm der Quellen S_θ^k und S_r^k normiert mit L_2^S in der x - y -Ebene (oben) und im gesamten Kontrollkubus (unten) in Abhängigkeit vom Winkel θ . $L_2^S = 1.86$ für die x - y -Ebene und $L_2^S = 1.83$ für das Kontrollvolumen.

achter bzw. Beobachterwinkel für die totale Quelle und jeden Anteil k berechnet und ist in den

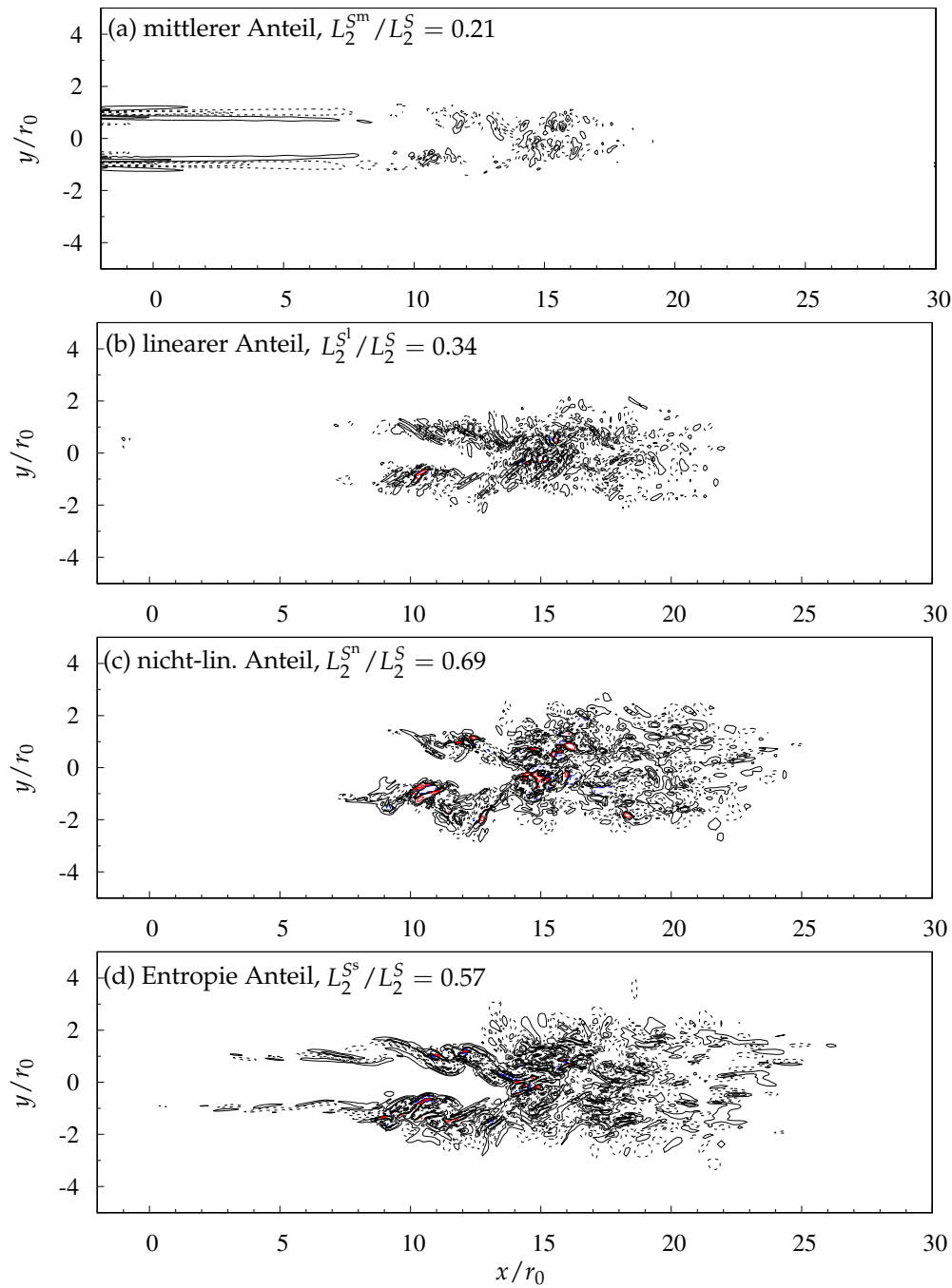


Abb. 3.54: Instantane Visualisierung von (a) S^m , (b) S^l , (c) S^n und (d) S^s . Die instantane Zeit, die Ebene und die Konturen sind mit Abbildung 3.53 identisch.

Abbildungen 3.56 bis 3.69 visualisiert. Die instantane Zeit, die Ebene und die Konturebenen sind für alle Darstellungen, wenn nicht anders erwähnt, mit Abbildung 3.53 identisch. Einen integralen Wert der Quellstärke liefert die L_2 -Norm des jeweils betrachteten Quellanteils. Sie ist für die x - y -Ebene und das gesamte Kontrollvolumen in Tabelle 3.9 aufgelistet.

In der Darstellung der totalen Quelle S in 3.56 scheint der zum Beobachter B6 gerichtete nominale Quellenteil größer zu sein, als der für die Beobachter nahe der Freistrahachse. Auch die L_2 -Norm nimmt mit dem Winkel zu. Diese Beobachtung steht jedoch im Widerspruch zum totalen Schalldruckpegel in Abbildung 3.52 der mit zunehmendem Winkel abnimmt. Betrachtet man dagegen die mit der Distanz zum Beobachter gewichtete Quelle, $S_r^k/r \equiv \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3} \frac{\partial^2 T_{ij}^k}{\partial y_i \partial y_j}$, in Abbildung 3.57, und berücksichtigt so das $1/r$ -Abstandsgesetz, passen die Quellstärken zu den berechneten Schalldruckpegeln am Beobachter. Die skalierte Quelle in Richtung des Beobachters B1 ist am intensivsten, jene für B6 am schwächsten.

Für die linearen Quellen, Abbildung 3.58 und 3.59, ist ähnliches zu beobachten: Die in Richtung Beobachter B6 abstrahlenden Quellen sind zwar stärker, der bei B6 ankommende Scherlärm ist aber aufgrund der Entfernung geringer als der Lärm bei B1. Zudem fällt auf, dass die Quellregionen zu denen der Beobachter orthogonal positioniert ist fast keinen Beitrag liefern. Daraus kann man mutmaßen, dass Scherlärmquellen eine starke Richtung aufweisen und orthogonal zur mittleren Strömung kaum abstrahlen. Diese Beobachtungen passen erstaunlich gut zu den mittleren Richtcharakteristiken der einzelnen Quellanteile von Freund [15], zu sehen in Abbildung 3.55. Während der Schalldruckpegel des linearen Anteils im Bereich um 90° ein deutliches Minimum aufweist, fällt der Schalldruckpegel des nicht-linearen Anteils annähernd monoton mit zunehmendem Winkel ab. Im Gegensatz dazu ist bei den nichtlinearen Quellen, zu sehen in den Abbildungen 3.60 und 3.61, keine signifikante Vorzugsrichtung erkennbar. Sie scheinen in alle Richtungen, aber mit zunehmendem Winkel intensiver, abzustrahlen. Die starke Lärmbelastung von B1 ist auch hier wieder durch die Nähe zur Quelle begründet. Die Stärke des Entropie-Anteils ist für alle Positionen ähnlich und es ist keine Vorzugsrichtung offensichtlich. Freund [15] fand heraus, dass der Beitrag von S^s zum Schallfeld von allen Anteilen für alle Winkel am geringsten ist.

Für eine allgemeinere Betrachtung wurde das Quellgebiet global in Richtung θ projiziert, Gleichung (3.41), und in den Abbildungen 3.64 bis 3.67 instantan visualisiert. Hier zeigt sich die Richtcharakteristik für einen im Winkel θ , gemessen von der Freistrahachse, sehr weit von der Düse entfernten Beobachter: Für $\theta = 15^\circ$ ist $L_2(S_\theta)$ maximal und nimmt mit zunehmen-

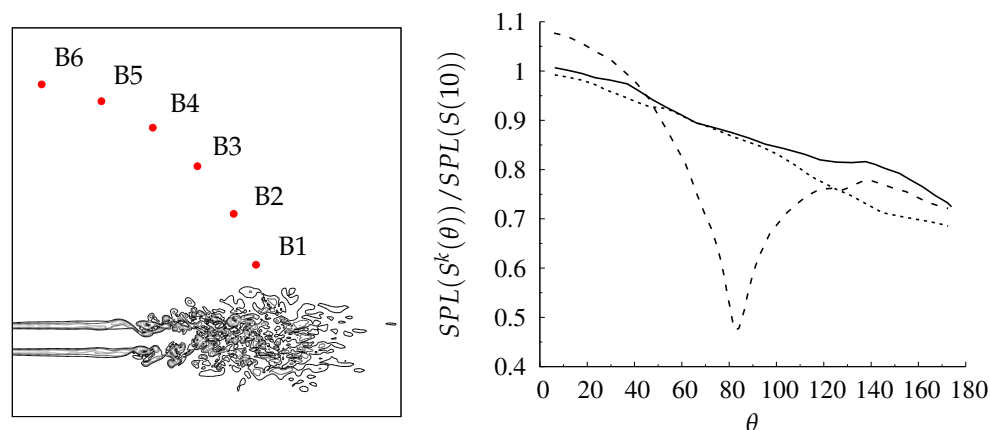


Abb. 3.55: Position der Beobachter (*links*). Normierter Schalldruckpegel der totalen Quelle S (—), des linearen Anteils S^l (- - -) und des nicht linearen Anteils S^n (· · ·). Die Daten stammen aus [15].

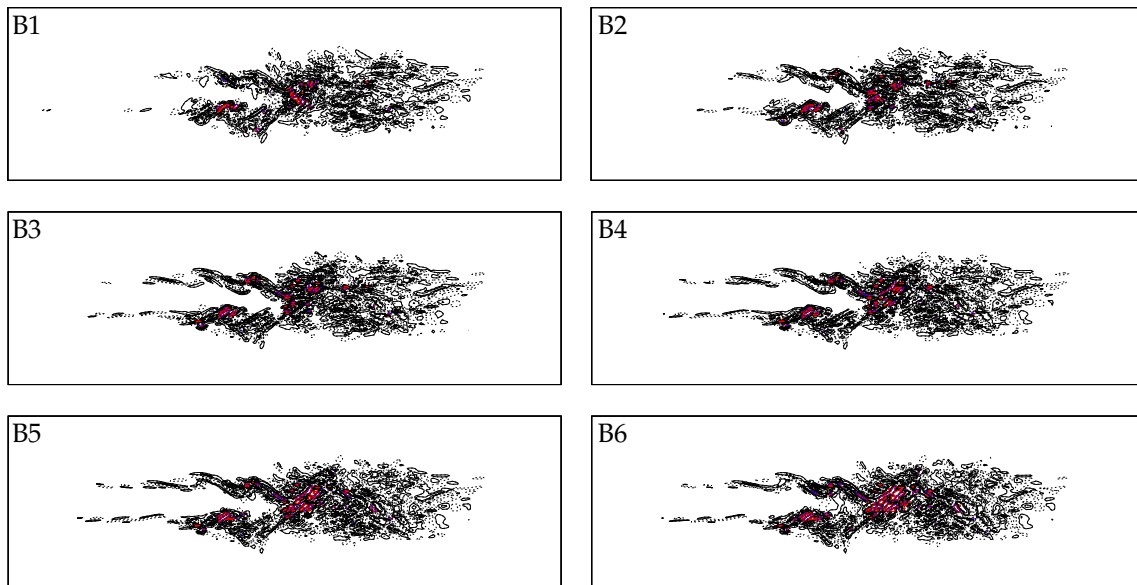


Abb. 3.56: Instantane Visualisierung von S_r . Die normierte L_2 -Norm in der x - y -Ebene für aufsteigende Winkel ist $L_2(S_r)/L_2(S) = [0.62, 0.60, 0.65, 0.72, 0.82, 0.95]$.

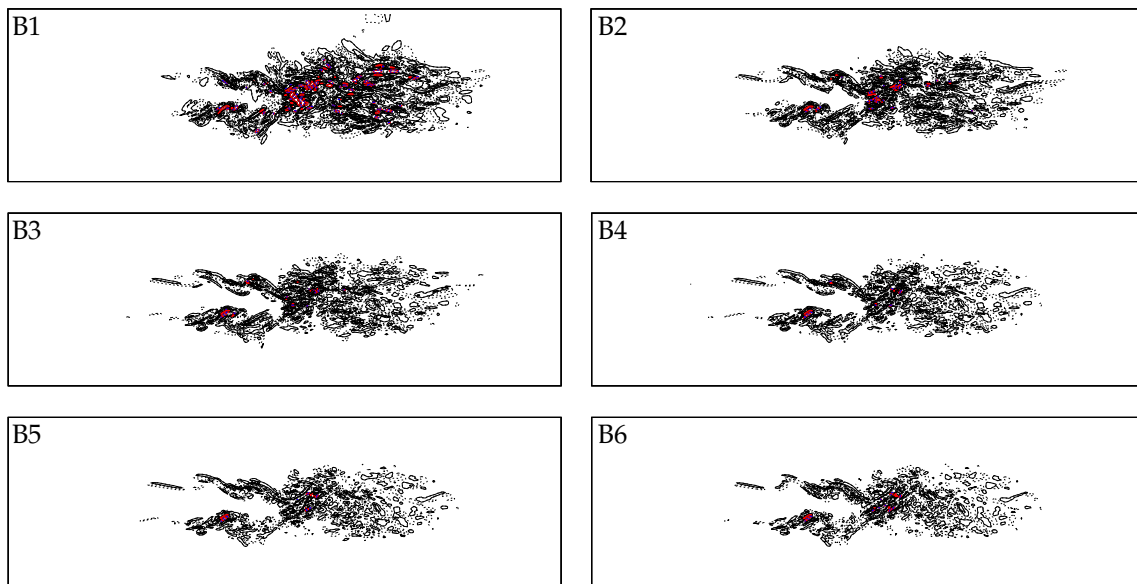


Abb. 3.57: Instantane Visualisierung von S_r/r . Konturen: 8 Ebenen bei $S_r/r \times r_0^3/(\rho_j U_j^2) = \pm 0.05, 0.15, 0.3, 0.6$. Positive und negative Werte sind solide bzw. gestrichelt dargestellt, die maximale Ebene ist zudem rot und die minimale blau koloriert.

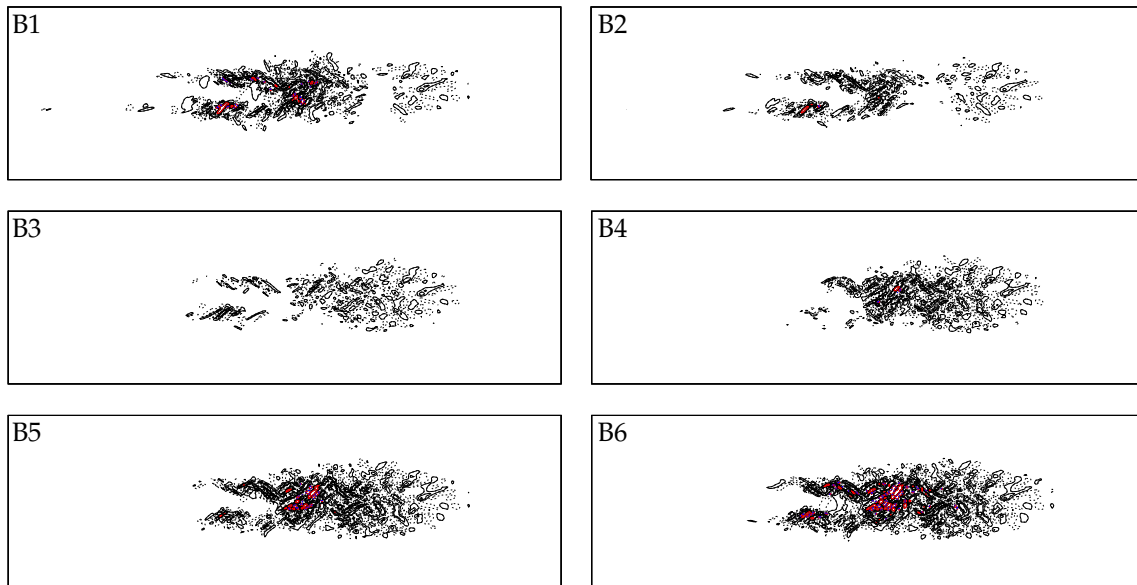


Abb. 3.58: Instantane Visualisierung von S_r^1 . $L_2(S_r^1)/L_2(S) = [0.55, 0.31, 0.21, 0.35, 0.58, 0.81]$.

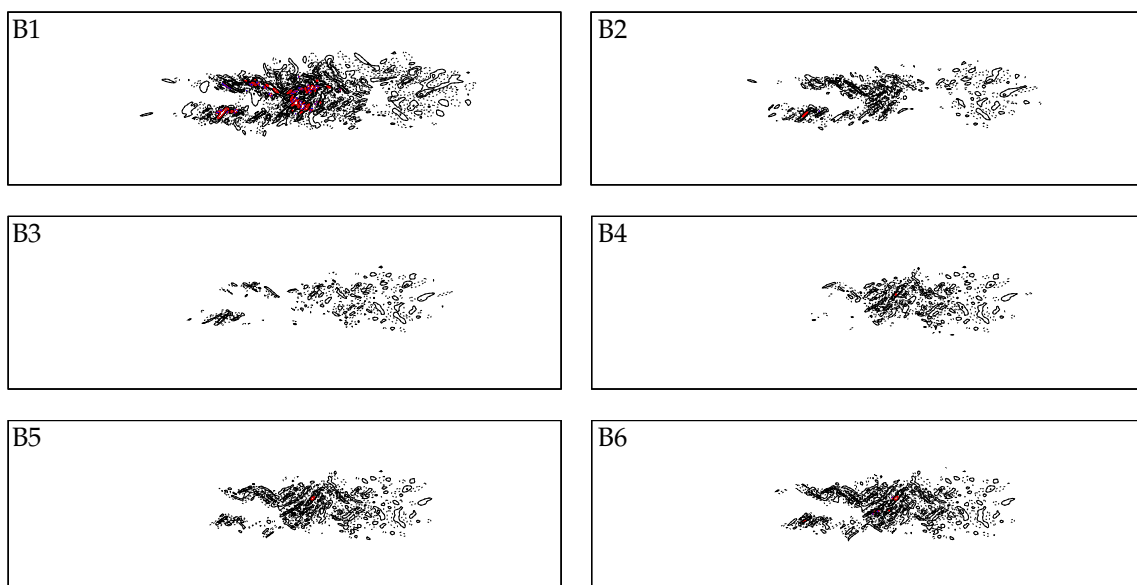


Abb. 3.59: Instantane Visualisierung von S_r^1/r . Die Konturebenen sind in Abbildung 3.57 definiert.

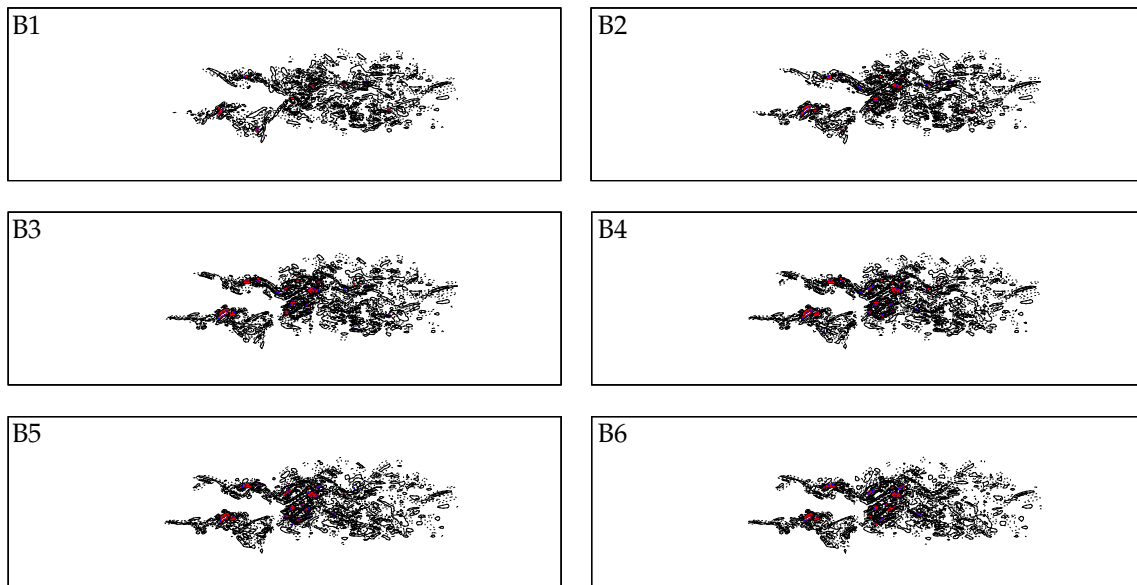


Abb. 3.60: Instantane Visualisierung von S_r^n . $L_2(S_r^n)/L_2(S) = [0.38, 0.48, 0.55, 0.57, 0.57, 0.55]$.

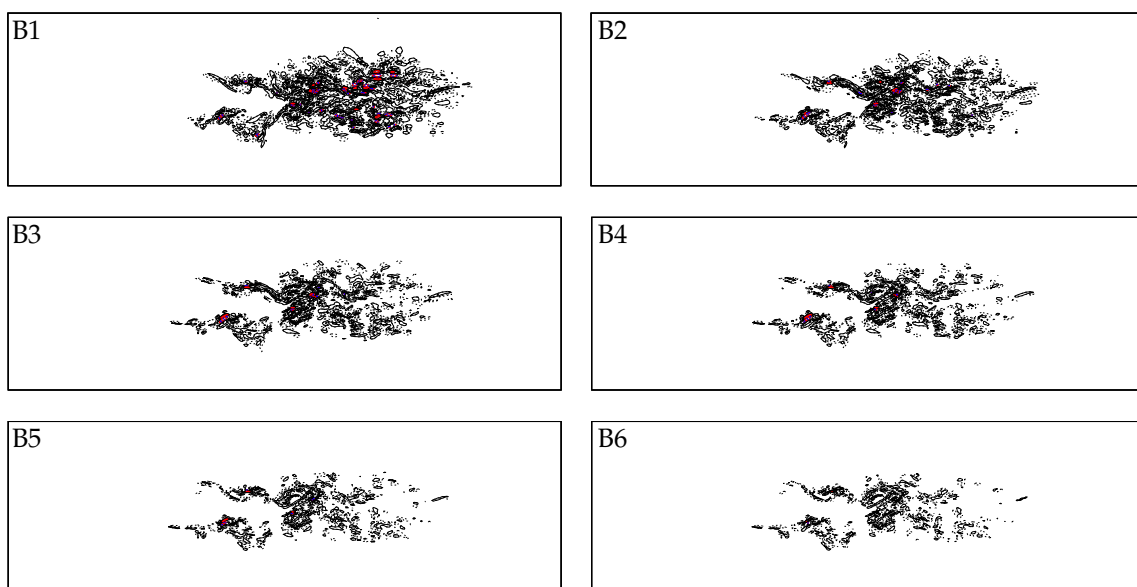


Abb. 3.61: Instantane Visualisierung von S_r^n / r . Die Konturebenen sind in Abbildung 3.57 definiert.

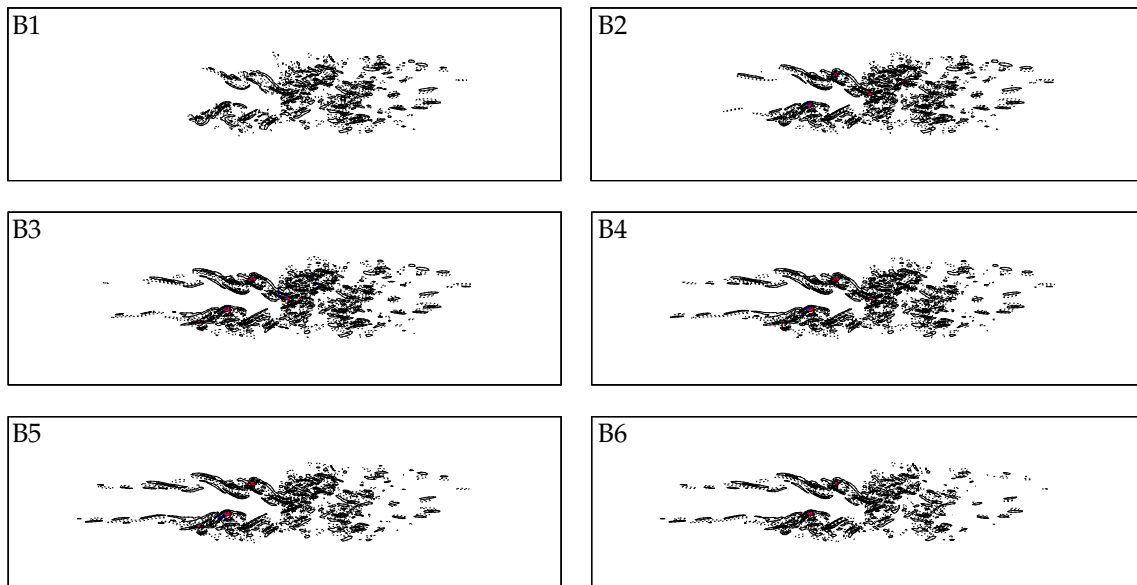


Abb. 3.62: Instantane Visualisierung von S_r^s . $L_2(S_r^s)/L_2(S) = [0.23, 0.32, 0.36, 0.35, 0.33, 0.28]$.

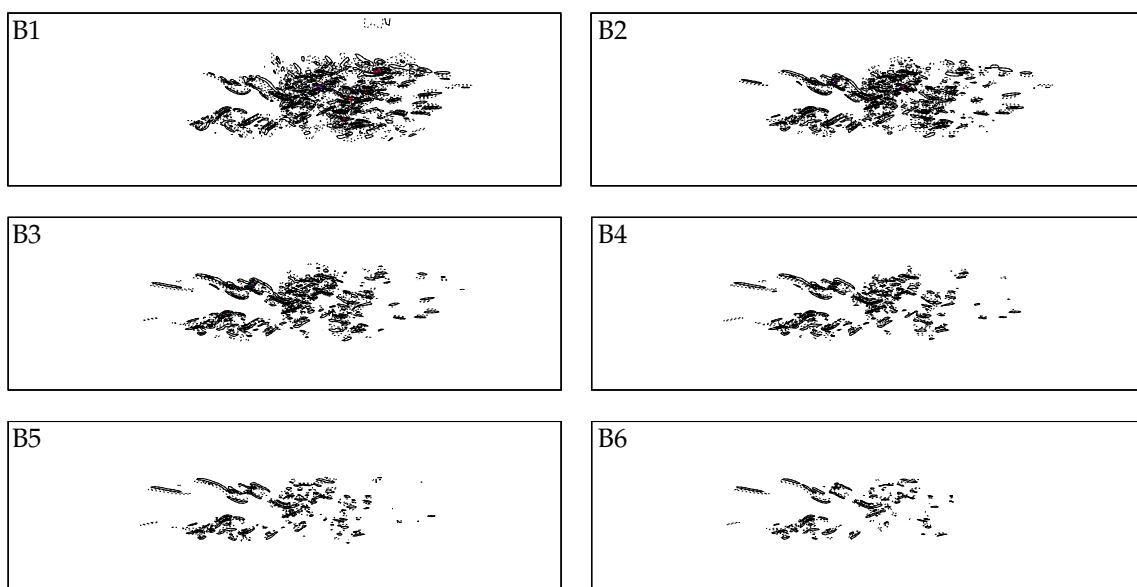


Abb. 3.63: Instantane Visualisierung von S_r^s/r . Die Konturebenen sind in Abbildung 3.57 definiert.

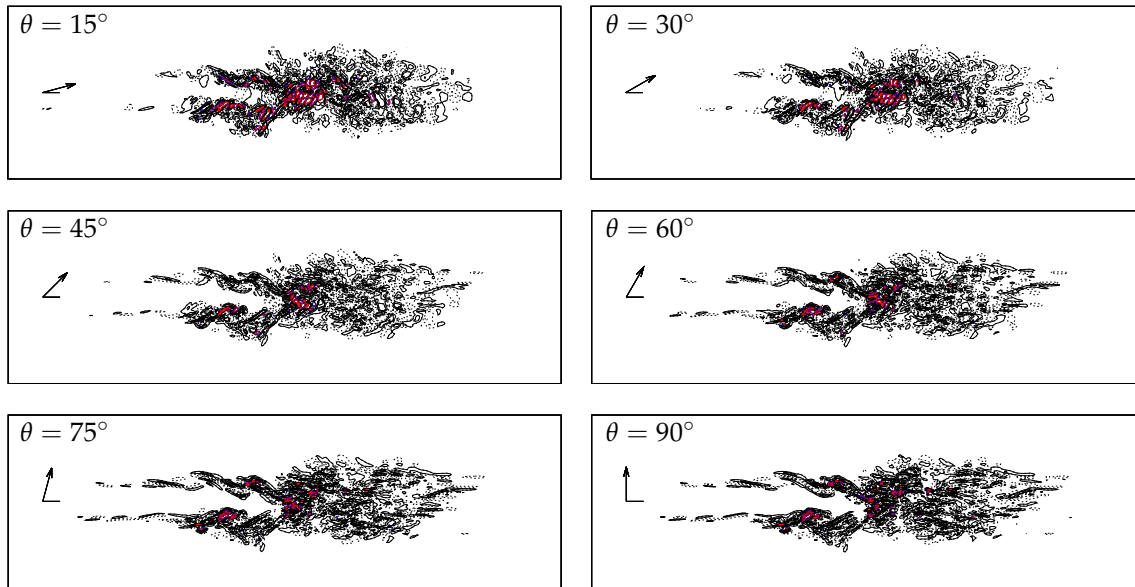


Abb. 3.64: Instantane Visualisierung von S_θ . $L_2(S_\theta)/L_2(S) = [0.97, 0.74, 0.60, 0.59, 0.63, 0.65]$.

dem Winkel ab (siehe 3.64).

Die Scherquellen in Abbildung 3.65 sind für $\theta = 15^\circ$ ebenfalls maximal und um 3% stärker in der L_2 -Norm als die gesamte Quelle S (auch diese Beobachtung stimmt mit den Ergebnissen in Abb. 3.55 überein). Das Gebiet hoher Aktivität beschränkt sich auf den Bereich am Ende der Mischungsschicht, wo Wirbel paaren und die Strömung von kohärenten Strukturen gekennzeichnet ist, und am Ende des Potentialkerns. Die L_2 -Norm nimmt mit zunehmendem Winkel ab und um $\theta = 90^\circ$ ist ein deutlicher Einbruch der Quellstärke zu erkennen.

Bei den nichtlinearen Quellen, Abbildung 3.66, ist hinsichtlich der Richtungskomponenten ein gegenteiliges Verhalten zu beobachten. $L_2(S_\theta^n)$ nimmt leicht mit dem Winkel zu. Es scheint also, als würde S^n stärker in Richtung orthogonal zur Hauptströmung abstrahlen.

Der Entropie-Anteil in 3.67 ist stark für große Winkel im Bereich großer Gradienten der mittleren Strömung. Vergleicht man sie mit den Quellen aus der Druckfluktuation fällt auf, dass sich Stärke und räumliche Ausdehnung des Quellgebiets kaum mit der Richtung ändern. Der mittlere Druck ist über dem Querschnitt konstant, die mittlere Dichte nicht. Für die Dichte-Komponente in Abbildung 3.69 ist die gleiche Richtungsabhängigkeit zu beobachten. Das lässt vermuten, dass der Entropie-Anteil selbst kaum akustisch abstrahlt sondern eine nominalen Quellanteil in der Lighthill-Quelle darstellt über den die Brechung des Schalls berücksichtigt wird.

Diese Annahme wird durch den Vergleich der Lighthill-Quelle mit den Lilley-Quellen gestärkt. Wie oben bereits erwähnt, behandelt die Analogie von Lilley die Brechung separat und die Lilley-Quellen $L_i - \bar{L}_i$, wobei

$$L_i = \frac{\partial \rho u'_i u'_j}{\partial x_j}, \quad \bar{L}_i = \frac{\overline{\partial \rho u'_i u'_j}}{\partial x_j},$$

sollten eher die tatsächliche Schallquelle repräsentieren als Gleichung (3.40). Da die zweiten Momente der Geschwindigkeit berechnet wurden, und die Dichte keinen Signifikanten Beitrag

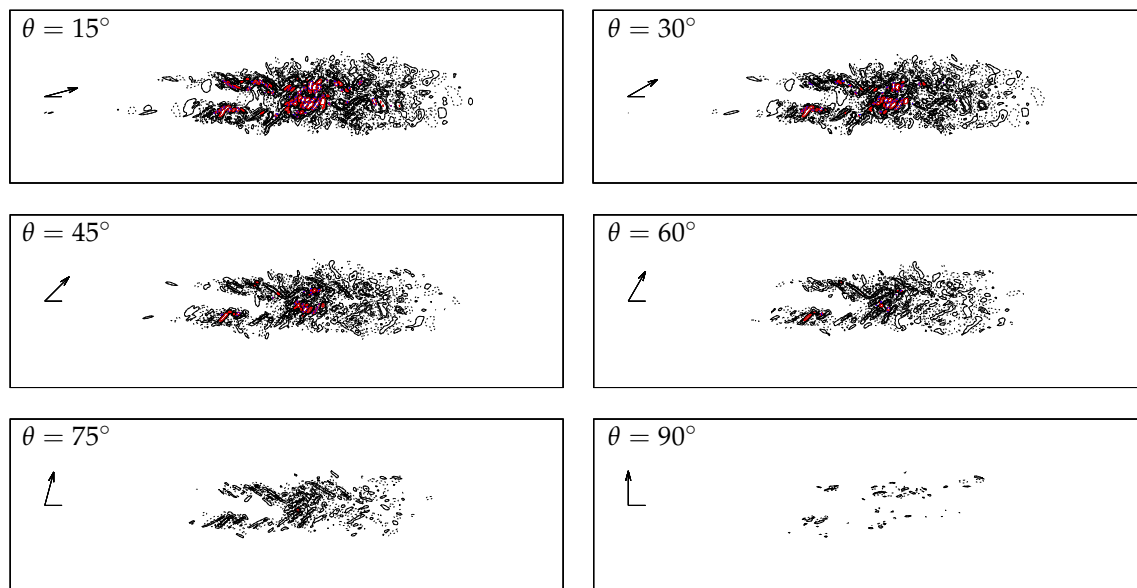


Abb. 3.65: Instantane Visualisierung von S_θ^1 . $L_2(S_\theta^1)/L_2(S) = [1.03, 0.78, 0.56, 0.40, 0.25, 0.07]$

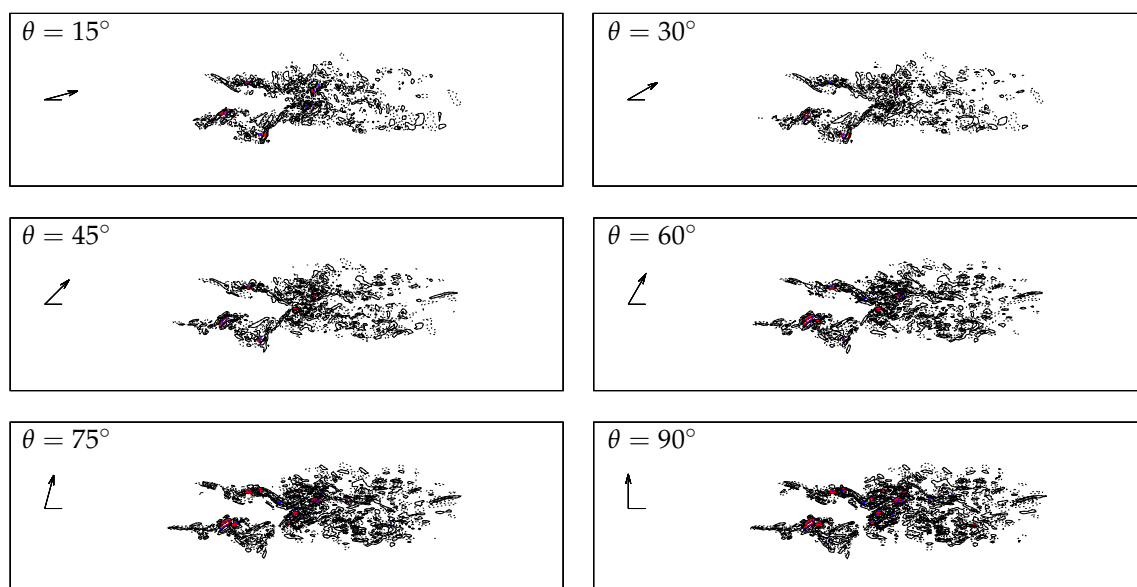


Abb. 3.66: Instantane Visualisierung von S_θ^n . $L_2(S_\theta^n)/L_2(S) = [0.37, 0.32, 0.34, 0.42, 0.50, 0.56]$.

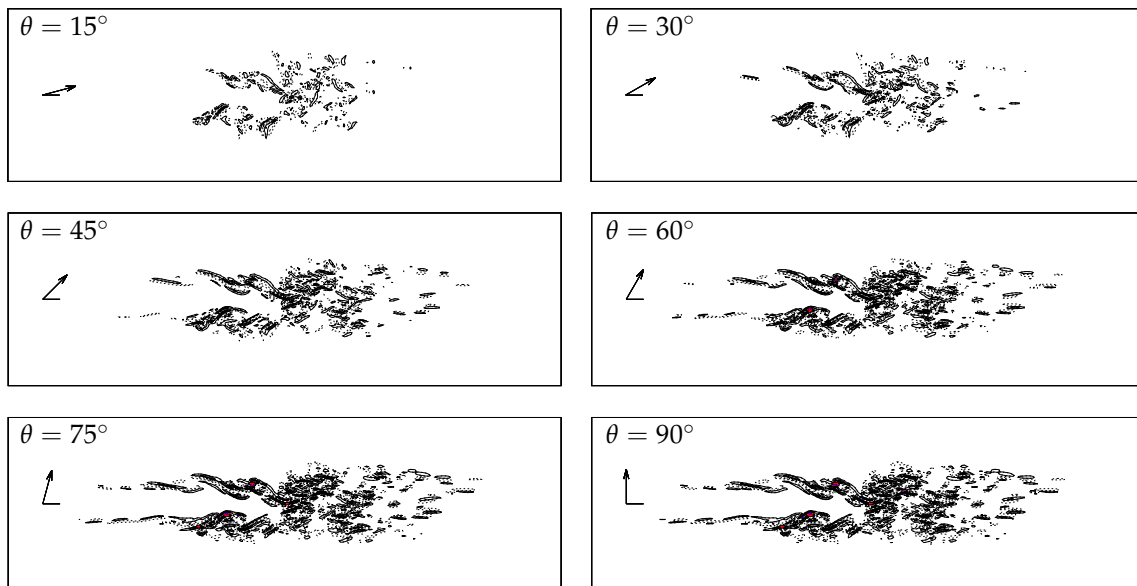


Abb. 3.67: Instantane Visualisierung von S_θ^S . $L_2(S_\theta^S)/L_2(S) = [0.13, 0.16, 0.22, 0.30, 0.35, 0.37]$.

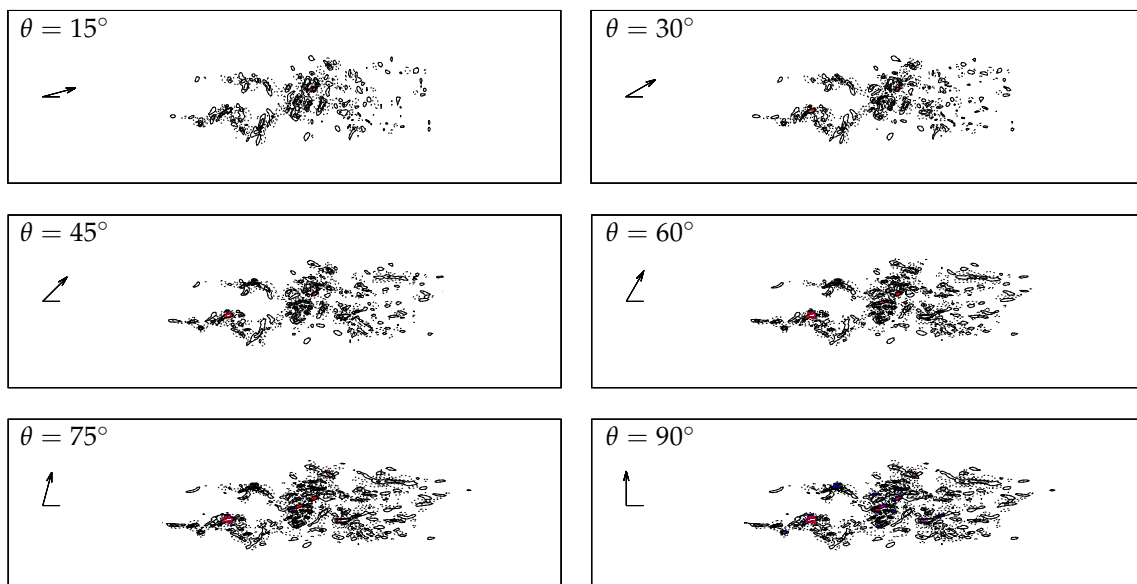


Abb. 3.68: Instantane Visualisierung von $\cos \theta d_x^2 p' + \sin \theta d_y^2 p'$. $L_2(S_\theta^{p'}) / L_2(S) = [0.26, 0.25, 0.28, 0.33, 0.37, 0.39]$.

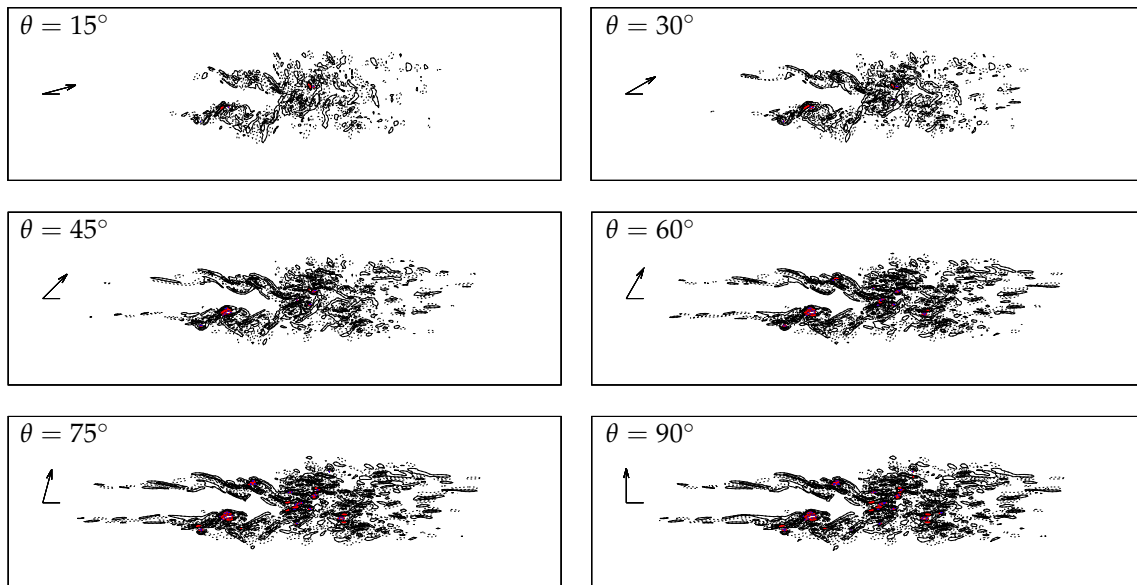


Abb. 3.69: Instantane Visualisierung von $-a_\infty^2 (\cos \theta \rho' + \sin \theta \rho')$. Die instantane Zeit, die Ebene und die Konturen sind mit Abbildung 3.53 identisch.

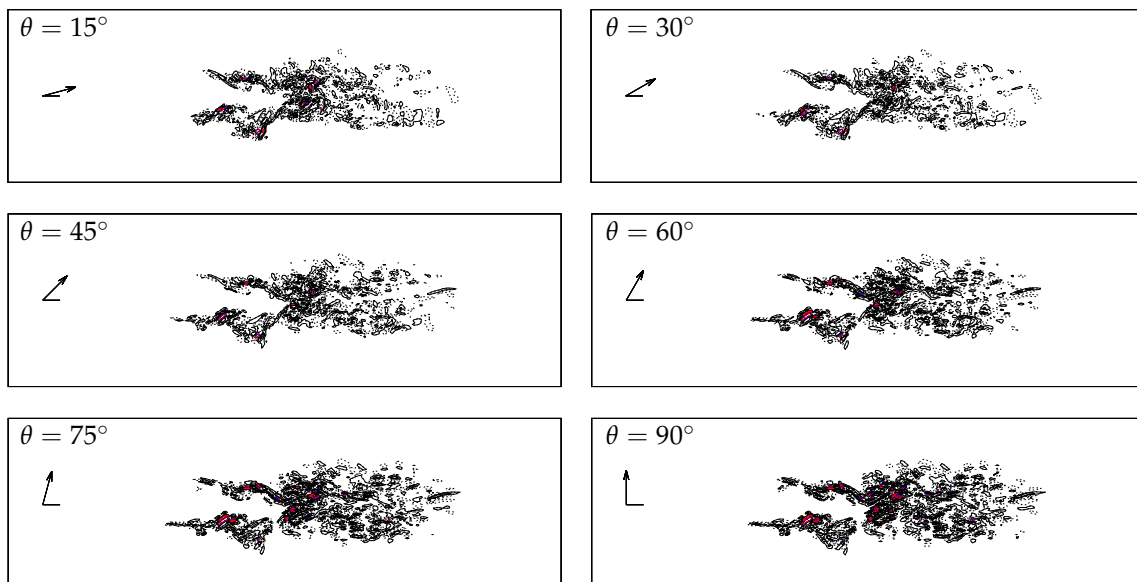


Abb. 3.70: Instantane Visualisierung von $\cos \theta \partial_x^2 u'^2 + \sin \theta \partial_y^2 v'^2 + \cos \theta \sin \theta \partial_x \partial_y u' v'$. $L_2(S_\theta^{u'}) / L_2(S) = [0.39, 0.34, 0.37, 0.46, 0.55, 0.60]$.

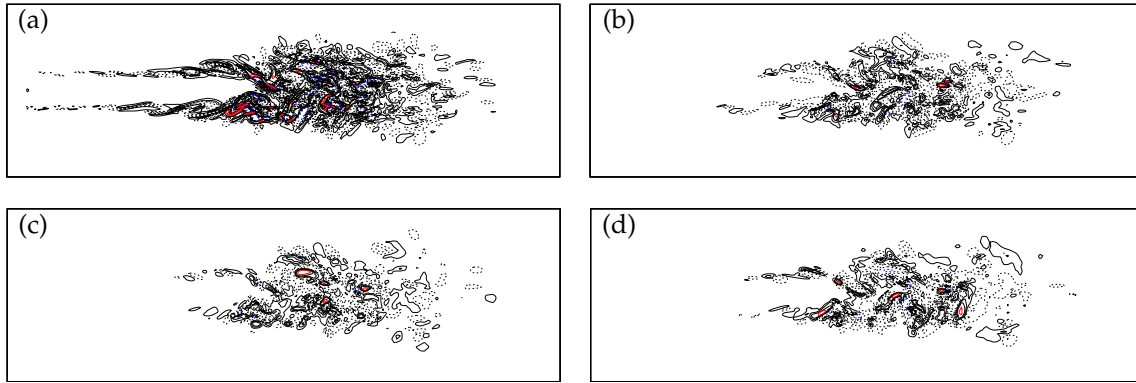


Abb. 3.71: Instantane Visualisierung der Lighthill-Quelle und Lilley-Quelle in der x - y -Ebene bei $z = 0$ zur Zeit $t = 1050r_0/U_j$: (a) S , (b) \mathcal{L}_u , (c) \mathcal{L}_v und (d) \mathcal{L}_w . Die Konturebenen für S sind mit Abbildung 3.53 identisch. Die Konturebenen für die Lilley-Quellen sind um eine Größenordnung geringer und $\mathcal{L}_i r_0 / U_j^2 = \pm 0.05, 0.15, 0.3, 0.6$.

liefert (aus vgl. von Abbildung 3.70 mit 3.66), wird hier die Quelle definiert als:

$$\mathcal{L}_i = \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} - \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}. \quad (3.43)$$

Mit der Annahme, dass $\overline{u'v'} = \overline{u'w'}$ und $\overline{v'w'} = 0$ wurden die Quellterme \mathcal{L}_u , \mathcal{L}_v und \mathcal{L}_w berechnet und in Darstellung 3.71 zusammen mit der nominalen Lighthillquelle S visualisiert. Dabei wird deutlich, dass ein großer Teil der Lighthillquelle zur Berücksichtigung von Brechungseffekten dient und nicht als echte Schallquelle wirkt. In der Ausdehnung und Struktur ähneln die Quellen \mathcal{L}_i eher dem nicht-linearen Anteil von S .

Die hier beobachteten instantanen Eigenschaften der Quellanteile hinsichtlich ihrer Stärke und Richtcharakteristik, passen erstaunlich gut mit der gemittelten Richtcharakteristik aus Ref. [15] und Ref. [114, 115] überein. Die genannten Referenzen spalteten den totalen Quellterm wie oben beschrieben auf, und berechneten das Schallfeld der jeweiligen Quelltermkomponenten. Wie bei den Visualisierungen hier, fallen die Schalldruckpegel der Gesamtquelle S bei der Referenz mit zunehmendem Winkel monoton leicht ab; der lineare Anteil fällt bis zu seinem Minimum bei $\theta \approx 90^\circ$ deutlich stärker, für $90^\circ < \theta < 140^\circ$ steigt der Pegel an und für Winkel größer 140° beginnt er wieder zu fallen. Der nicht-lineare Anteil nimmt bei den Visualisierungen hier, im Gegensatz zum mittleren akustischen Druck bei der Referenz, mit dem Winkel leicht zu. Dies könnte in der instantanen Sicht begründet sein und mahnt zu Vorsicht bei der Interpretation. Die einzige signifikante Diskrepanz zwischen den instantanen Quelldaten und den gemittelten Druckpegeln ist beim Entropieanteil zu beobachten. Dieser Anteil scheint stark von den Gradienten der mittleren Strömung beeinflusst zu sein und ist der mit Abstand am geringsten abstrahlende. Niederfrequenter Schall, primär aufgrund von S^l , dominiert den Bereich kleiner Winkel entlang der x -Achse, der Lärm von S^n ist hier gering. Aber aufgrund der hohen negativen Korrelation von S^s und S^l für Winkel kleiner 90° , wird ein großer Teil des abgestrahlten Schalls aus den linearen Quellen von dem des Entropieschalls eliminiert [15, 115]. Hochfrequenter Lärm, primär abgestrahlt von S^n , ist für Winkel zwischen 30° und 90° dominant und im nahe der Freistrahlachse reduziert.

Die hier vorgeschlagene Prozedur ermöglicht es, Aussagen hinsichtlich der Abstrahleigenschaften auf der Basis instantaner Daten zu machen.

4 Flügel-Klappe Konfiguration

Um Wechselwirkungseffekte mit dem Düsenstrahl besser von den reinen Umströmungseffekten trennen zu können, wurde die Umströmung der isolierten Flügel-Klappe Konfiguration (im Folgenden als Wing bezeichnet) simuliert. Dazu wurde das Profil des originalen gepfeilten Tragflügels bei $z = 0$ (Scheitelpunkt der Düse) verwendet. Es wurden zwei- und dreidimensionale Simulationen jeweils mit Klappenwinkel $\delta = 8^\circ$ und $\delta = 22^\circ$ durchgeführt. Alle geometrischen Konfigurationen wurden jeweils für zwei unterschiedliche Anströmgeschwindigkeiten untersucht. Die ursprünglich von der Airbus SE geplanten experimentellen Untersuchungen dieser Konfigurationen konnten nicht durchgeführt werden. Daher fehlt in der nun folgenden Vorstellung der Ergebnisse der Vergleich mit Messungen.

4.1 Strömungsparameter

Die Machzahlen der uniformen Anströmung sind $M_\infty = 0.175$ (Fall M175) und $M_\infty = 0.4$ (Fall M40). Die Reynoldszahl, basierend auf der Tragflügelänge, ist in beiden Fällen $Re_C = \rho_\infty U_\infty C / \mu = 1.19 \times 10^6$. Die Simulationen erfolgten dimensionslos, wobei die Strömungsgrößen an der Sekundärdüse und der Düsendurchmesser D_s die Referenzskalen waren (analog zur Düse-Flügel-Klappe Konfiguration). Die fallunabhängigen Simulationsparameter sind in Tabelle 4.1 aufgeführt, Tabelle 4.2 enthält die mit dem Fall variierenden Parameter.

4.2 Numerische Spezifikationen

Das Berechnungsgitter besteht aus einem, zu den Rändern hin gedehnten, Hintergrundgitter und zwei Vordergrundgittern für Tragflügel und Klappe (siehe Abbildung 4.1). Das Simulationsgebiet reicht von $-2 \leq x/D_s \leq 5$ in Strömungsrichtung und $-1 \leq y/D_s \leq 2$ in radiale Richtung. Die Gittermappings des Flügels und der Klappe werden mithilfe von geglätteten Polygonen, welche durch Konturpunkte der Profilgeometrie bei $z = 0$ definiert werden, generiert. Dazu ist es erforderlich die scharfen Hinterkanten leicht abzurunden (siehe Abb. 4.2). Durch die Abrundung der Hinterkanten ist die Vernetzung des Gebiets mit insgesamt nur drei Gittern möglich, was die Kosten der Rechnung reduziert.

Für den 3-D Fall wird das Gitter des 2-D Profils um $\pm 0.05D_s$ ($\approx \pm 0.026C$) in Spannweitenrichtung extrudiert. Die wichtigsten Angaben zum Berechnungsgitter sind in Tabelle 4.3 gegeben. Die Anzahl der Gitterlinien in z -Richtung ist $N_z = 65$ für das Hintergrundgitter und $N_z = 129$ jeweils für Flügel und Klappe. In z -Richtung ist die Gitterweite konstant und beträgt $\Delta z \simeq 1.6 \times 10^{-3}D_s$ für das Hintergrundgitter und $\Delta z \simeq 7.8 \times 10^{-4}D_s$ für die Gitter um Flügel und Klappe. Initialisiert werden die 3-D Simulation mit der jeweiligen, in Spannweitenrichtung extrudierten, 2-D Lösung.

Tabelle 4.4 gibt die relevanten Daten hinsichtlich der wandnahen Auflösung der zwei untersuchten Fälle an. Die relevanten Angaben hinsichtlich der zeitlichen Auflösung, der zeitlichen und räumlichen cut-off Frequenz sowie der Erhebung der Mittelwerte und Frequenzspektren sind in Tabelle 4.5 gegeben.

Parameter	physikalischer Wert		dimensionsloser Wert
γ	1.4	1	1.4
\mathcal{R}_g	287.15 J/(kgK)	T_s/U_{ref}^2	$1/(\gamma M_{\text{ref}}^2) \simeq 5.1$
c_p	1.005×10^3 J/(kgK)	T_s/U_{ref}^2	$1/((\gamma - 1)M_{\text{ref}}^2) \simeq 17.84$
Pr	0.715	1	0.715
ρ_∞	1.205 kg/m ³	$1/\rho_s$	1
T_∞	293.15 K	$1/T_s$	1
$p_\infty = \rho_\infty \mathcal{R}_g T_\infty$	$\simeq 1.01434 \times 10^5$ Pa	$1/\rho_s U_{\text{ref}}^2$	$1/(\gamma M_{\text{ref}}^2) \simeq 5.1$
$a_\infty = (\gamma \mathcal{R}_g T_\infty)^{1/2}$	$\simeq 343.3$ m/s	$1/U_{\text{ref}}$	$1/M_{\text{ref}} \simeq 2.67$
ρ_s	1.205 kg/m ³	$1/\rho_s$	1
U_{ref}	128.5 m/s	$1/U_{\text{ref}}$	1
T_s	293.15 K	$1/T_s$	1
D_s	0.15548 m	$1/D_s$	1
$a_s = (\gamma \mathcal{R}_g T_s)^{1/2}$	$\simeq 343.3$ m/s	$1/U_{\text{ref}}$	$1/M_{\text{ref}} \simeq 2.67$
$M_{\text{ref}} = U_{\text{ref}}/a_s$	$\simeq 0.374$	1	$\simeq 0.374$
C	0.3 m	$1/D_s$	$\simeq 1.93$
C_{wing}	0.25471 m	$1/D_s$	$\simeq 1.64$
C_{flap}	0.08238 m	$1/D_s$	$\simeq 0.53$
$C_{\text{wing+flap}}$	0.32292 m	$1/D_s$	$\simeq 2.08$
δ	8°	1	8°
$Re_C = \rho_\infty U_\infty C/\mu$	$\simeq 1.19 \times 10^6$	1	$\simeq 1.19 \times 10^6$

Tab. 4.1: 2-D/3-D Wing: Fallunabhängige Simulationsparameter.

Fall	M_∞	U_∞/U_{ref}	$\mu/(\rho_s U_{\text{ref}} D_s)$	$\nu/(U_{\text{ref}} D_s)$	$kT_s/(\rho_s U_s^3 D_s)$
M40	0.4	1.068	1.73×10^{-6}	1.73×10^{-6}	4.32×10^{-5}
M175	0.175	0.467	7.57×10^{-7}	7.57×10^{-7}	1.89×10^{-5}

Tab. 4.2: 2-D/3-D Wing: Fallabhängige Simulationsparameter. Die Viskosität berechnet sich aus $\mu = \rho_\infty U_\infty c/Re_C$ womit die dimensionslose Viskosität mit $\mu^* = \frac{1}{Re_C} \frac{\rho_\infty U_\infty c}{\rho_s U_{\text{ref}} D_s} = \frac{1.93}{Re_C} \frac{U_\infty}{U_{\text{ref}}}$ gegeben ist. Die thermische Leitfähigkeit wird mit $k = \frac{c_p \mu}{Pr}$ bestimmt und ist im dimensionslosen Fall identisch $k^* = \frac{1}{Pr Re_C} \frac{c_p T_s}{U_{\text{ref}}^2} \frac{\rho_\infty U_\infty c}{\rho_s U_{\text{ref}} D_s} = \frac{1.93}{Pr Re_C} \frac{1}{(\gamma - 1) M_{\text{ref}}^2} \frac{U_\infty}{U_{\text{ref}}} = \frac{34.43}{Pr Re_C} \frac{U_\infty}{U_{\text{ref}}}$.

Gitter	N_x	N_y	N_z	$\overline{\Delta x}/D_s$	$\Delta x_{\text{min}}/D_s$	$\overline{\Delta y}/D_s$	$\Delta y_{\text{min}}/D_s$	$\Delta z/D_s$
Hintergrund	1201	451	65	5.8×10^{-3}	4×10^{-3}	6.7×10^{-3}	1.6×10^{-3}	1.6×10^{-3}
Flügel	961	51	129	4×10^{-3}	2×10^{-3}	6×10^{-3}	6.5×10^{-5}	7.8×10^{-4}
Klappe	451	51	129	3×10^{-3}	2×10^{-3}	6×10^{-3}	6.5×10^{-5}	7.8×10^{-4}

Tab. 4.3: Gitterparameter der 2-D/3-D Wing Simulationen. Der Oberstrich kennzeichnet die mittlere Auflösung $\overline{\Delta x}_i = L_i/N_i$.

Case	$\tau_w/(\rho_s U_{\text{ref}}^2)$	u_τ/U_{ref}	Δx^+	Δy^+	Δz^+
M175	2×10^{-4}	0.014	≈ 32	≈ 0.6	≈ 6
M40	4×10^{-4}	0.02	≈ 46	≈ 0.75	≈ 9

Tab. 4.4: Angaben zur Grenzschichtauflösung: $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ und $\Delta x_i^+ = \Delta x_i u_\tau/\nu$, wobei $\tau_w = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ aus der mittleren Longitudinalgeschwindigkeit auf der Flügeloberseite bei etwa $x/D_s = 0.85$ berechnet wurde.

	M40	M175
Überströmzeit $t_C = C/U_\infty$	$1.8D_s/U_{\text{ref}}$	$4.1D_s/U_{\text{ref}}$
Initiale Entwicklungszeit $t_i \approx 5t_C$	$9D_s/U_{\text{ref}}$	$20D_s/U_{\text{ref}}$
Simulationszeit $T = t_i + 10t_C + 2t_c$	$30D_s/U_{\text{ref}} \simeq 2 \times 10^6 \Delta t$	$70D_s/U_{\text{ref}} \simeq 5 \times 10^6 \Delta t$
Mittelungszeit T_{avg}	$10t_C \simeq 1.8 \times 10^4 \Delta t_{\text{sp}}$	$10t_C \simeq 1.8 \times 10^4 \Delta t_{\text{sp}}$
Samplingzeit T_{sp}	$2t_C \simeq 3.6 \times 10^3 \Delta t_{\text{sp}}$	$2t_C \simeq 3.6 \times 10^3 \Delta t_{\text{sp}}$
Δt	$1.4 \times 10^{-5} D_s/U_{\text{ref}}$	$1.4 \times 10^{-5} D_s/U_{\text{ref}}$
$0.22D_s/(TU_\infty) \sim St$	—	—
Δt_{sp}	$100\Delta t$	$100\Delta t$
$f_c^{\text{sp}} = 1/(2\Delta t_{\text{sp}})$	$357U_{\text{ref}}/D_s$	$357U_{\text{ref}}/D_s$
$St_c^{\text{sp}} = f_c^{\text{sp}} 0.22D_s/U_\infty$	206	168
$\lambda_c = 2\pi/k_c = ppw\Delta x$	$21\overline{\Delta x} \simeq 0.12D_s$	$21\overline{\Delta x} \simeq 0.12D_s$
$f_c^g = U_\infty/\lambda_c$	$8.9U_{\text{ref}}/D_s \simeq 7 \text{ kHz}$	$3.9U_{\text{ref}}/D_s \simeq 3 \text{ kHz}$
$St_c^g = f_c^g 0.22D_s/U_\infty = 0.22D_s/\lambda_c$	1.8	1.8
$St_{\text{min}} = 0.22D_s/(T_{\text{sp}}U_\infty)$	0.06	0.06

Tab. 4.5: Zeitparameter: Beschreibung siehe Tabelle 3.3.

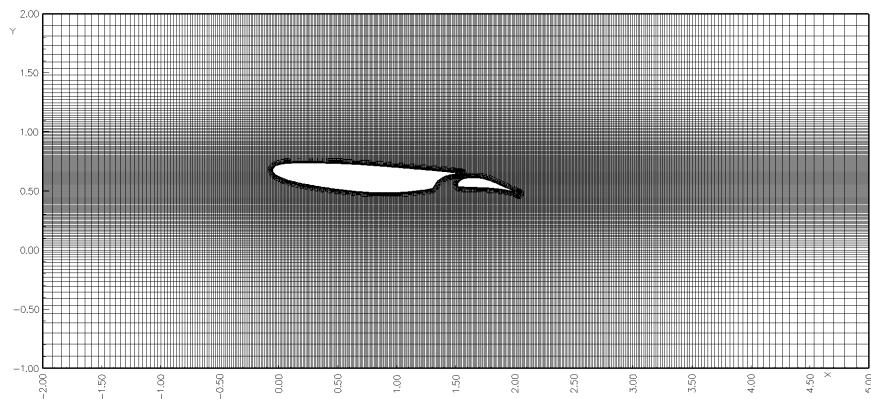


Abb. 4.1: Gitter der Konfiguration Wing δ 8: Gesamtes Berechnungsgitter (gezeigt ist jede dritte Gitterlinie).

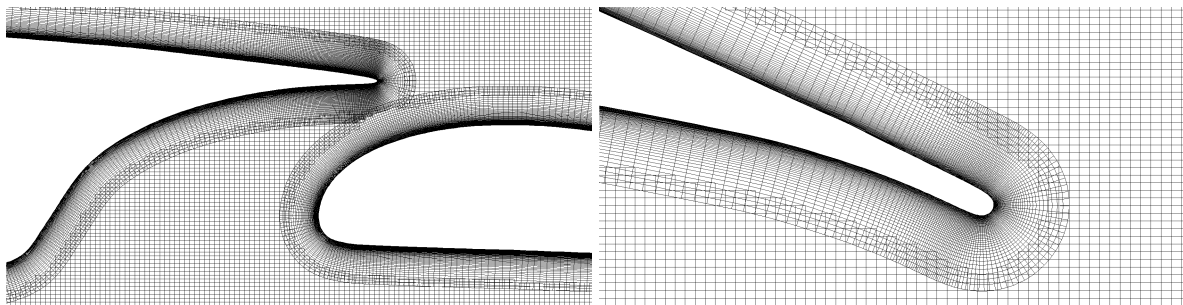


Abb. 4.2: Gitter der Konfiguration Wing δ 8: Spaltregion (links), Hinterkante der Klappe (rechts).



Abb. 4.3: Instantane Visualisierung der Wirbelstärkemagnitude $|\omega_z|$: 2-D Konfiguration Wing $\delta 8$ (oben) und Wing $\delta 22$ (unten), jeweils mit $M_\infty = 0.175$ (links) und $M_\infty = 0.4$ (rechts). Die Farbskala reicht von 0 (weiß) bis $60U_{\text{ref}}/D_s$ (schwarz).

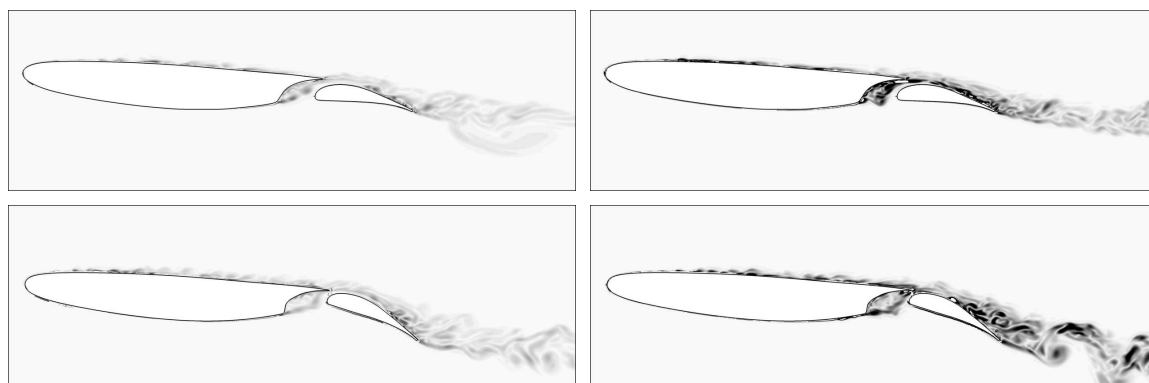


Abb. 4.4: Instantane Visualisierung der Wirbelstärkemagnitude $\|\omega\|$: 3-D Konfiguration Wing $\delta 8$ (oben) und Wing $\delta 22$ (unten), jeweils mit $M_\infty = 0.175$ (links) und $M_\infty = 0.4$ (rechts). Die Farbskala ist in Abb. 4.3 spezifiziert.

4.3 Aerodynamisches Feld

In Abbildung 4.3 ist der Betrag der Wirbelstärke für die 2-D Simulationen der beiden Konfigurationen dargestellt. Wie erwartet sind die Wirbelstärkeamplituden für die Fälle mit $M_\infty = 0.4$ größer. Die Grenzschichten auf der Druckseite von Flügel und Klappe bleiben in allen Fällen laminar, beginnen aber auf der Saugseite unmittelbar nach der Flügelvorderkante aufzurollen. In allen Fällen kommt es zu einer Interaktion des Flügelnachlaufs mit der Grenzschicht auf der Klappenoberseite. Für die Konfiguration mit Klappenwinkel $\delta = 22^\circ$ löst sich die Grenzschicht von der Klappe was ein größeres Durchmischungsgebiet zu Folge hat und die Strömung in der Spaltregion scheint deutlich ungeordneter zu sein, als es bei $\delta = 8^\circ$ der Fall ist. Interessant ist, dass es im Fall mit $\delta = 8^\circ$ und $M_\infty = 0.175$ keine Tollmin-Schlichting Wellen in der Flügel-Grenzschicht zu beobachten sind. Ein wahrscheinlicher Grund dafür wird in Abschnitt 4.4 geliefert. Bei den 3-D Simulationen, Abbildung 4.4, ist hinsichtlich der Lage der Transition und der Ausdehnung der Grenzschicht und des Nachlaufs ein ähnliches Verhalten zu beobachten. Allerdings wird die Grenzschicht auf der Oberseite turbulent und weist damit ein breitbandiges Spektrum unterschiedlicher Längen und Zeitskalen auf. Zur Visualisierung instantaner Trubulenzstrukturen, zeigt Abbildung 4.5 Isoflächen des Q-Kriteriums der zwei 3-D Konfigurationen, wobei die Isoflächen mit der Wirbelstärkenorm koloriert wurden. In allen

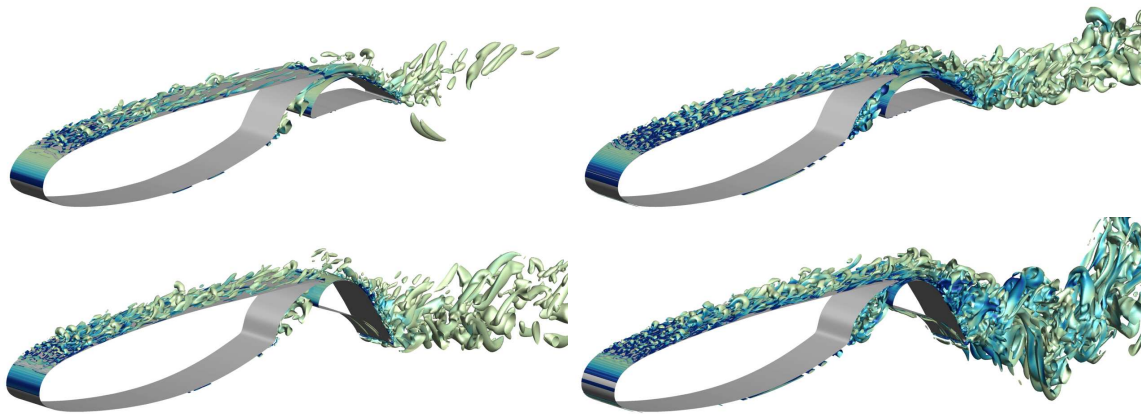


Abb. 4.5: Turbulente Strukturen der 3D-Konfiguration mit $\delta = 8^\circ$ (oben) und $\delta = 22^\circ$ (unten) visualisiert mit dem Q -Kriterium (Isoflächen mit $Q = 7U_{\text{ref}}^2/D_s^2$). Die Farbskala repräsentiert die Wirbelstärkennorm $\|\omega\|$, sie reicht von 0 (gelb) bis $60U_{\text{ref}}/D_s$ (blau): $M_\infty = 0.175$ (links) und $M_\infty = 0.4$ (rechts).

Fällen ist ein typischer laminar-turbulenter Übergang der Grenzschicht (ausführlich beschrieben in Davidson [108], S.11, 107ff.) auf der Oberseite des Flügels zu beobachten. Die räumliche Ausdehnung und Intensität der Turbulenz nimmt mit der Machzahl und dem Klappenwinkel zu, wobei die transiente Grenzschicht bei Fall $\delta 8M175$, wie bei den 2-D Simulationen, auf der Flügeloberseite teilweise relaminarisiert (siehe dazu auch Abb. 4.6). Dies zeigt, dass selbst die zweidimensionalen Simulationen das prinzipielle Verhalten der Strömung für diese Fälle treffend vorhersagen. Diese Erkenntnis erlaubt uns, erste Einschätzungen zum Verhalten der Strömung auf Basis der deutlich günstigeren 2-D Simulationen zu treffen. Die Längenskalen der Wirbelstrukturen in der Grenzschicht sind aufgrund identischer Reynoldszahlen trotz unterschiedlicher Machzahlen ähnlich. Wie erwartet ist die Wirbelstärke für den Fall M40 höher und oberhalb der Klappe findet eine deutlich stärkere Durchmischung des Nachlaufs statt. Abbildung 4.6 liefert eine Sicht auf die räumliche Entwicklung der Grenzschicht des $\delta 8M175$ -Falls zu aufeinander folgenden Zeiten: In (a) ist zunächst eine charakteristische Entwicklung der turbulenten Grenzschicht über zwei-/dreidimensionale Störungen, λ -Wirbel und Hufeisenwirbel für $x/D_s < 0.8$ zu beobachten. Stromab nehmen die Fluktuationen wieder ab und die Grenzschicht ist im Bereich $0.8 < x/D_s < 1.1$ annähernd laminar. Bei (b) erreicht die Strömung nur die erste Phase der Transition (zweidimensionale Wirbelwalzen) bevor sie sich wieder anlegt, um bei $x/D_s \approx 1.1$ dann sprunghaft turbulent zu werden. Einige Zeit später ähnelt die räumliche Entwicklung der Grenzschicht wieder der Struktur in (a). Das Phänomen einer pulsierenden Relaminarisierung der Grenzschicht wurde auch bei der korrespondierenden zweidimensionalen Simulation beobachtet. Als Grund wird eine Rückkopplung zwischen an der Hinterkante generierten Schallwellen und der Grenzschicht vermutet. Die Störungen regen die instabile laminare Grenzschicht zu Tollmien-Schlichting Wellen an, welche dann mit der Hinterkante interagieren (TS- p' -Prozess). Bei dem Fall mit $M_\infty = 0.4$ zeigte sich diese Pulsation der Grenzschicht nicht, sondern eine zu allen Zeiten ähnliche Grenzschichtentwicklung wie in Abbildung 4.6 (c).

Die Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeits- und Druckfluktuationen in Spannweitenrichtung der $\delta 8$ - und $\delta 22$ -Konfigurationen, sind in Abbildung 4.7 respektive 4.8 zu sehen. In allen Fällen sind die Größen für $r_z > 0.02D_s$ ($\hat{=} 0.01C$) weitestgehend unkorreliert.

In den Abbildungen 4.9 und 4.10 ist das mittlere Geschwindigkeitsfeld für die zwei- respektive dreidimensionalen Simulationen dargestellt. Es ist kein signifikanter Unterschied abhängig von der Dimensionalität zu beobachten. Weitere Einsicht in die mittleren Geschwindig-

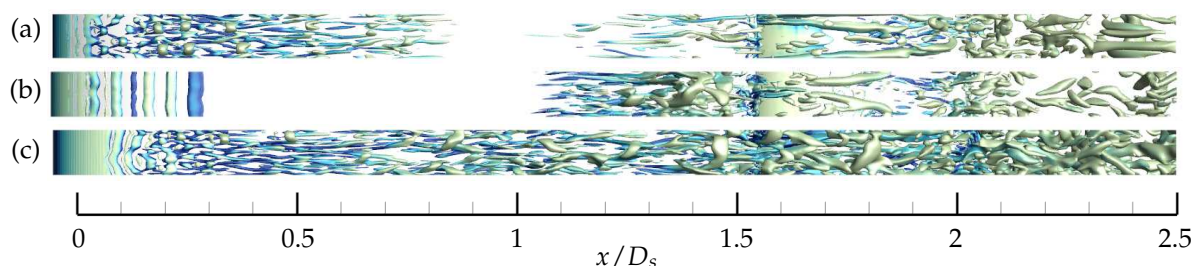


Abb. 4.6: Draufsicht auf die Transitionsstrukturen der oberen Grenzschicht der 3D-Fälle: (a) $\delta 8M175$ bei $t = 32D_s/U_{ref}$, (b) $\delta 8M175$ bei $t = 34D_s/U_{ref}$, (c) $\delta 8M40$. Die Isoflächen und Farbcodierung sind identisch mit Abbildung 4.5.

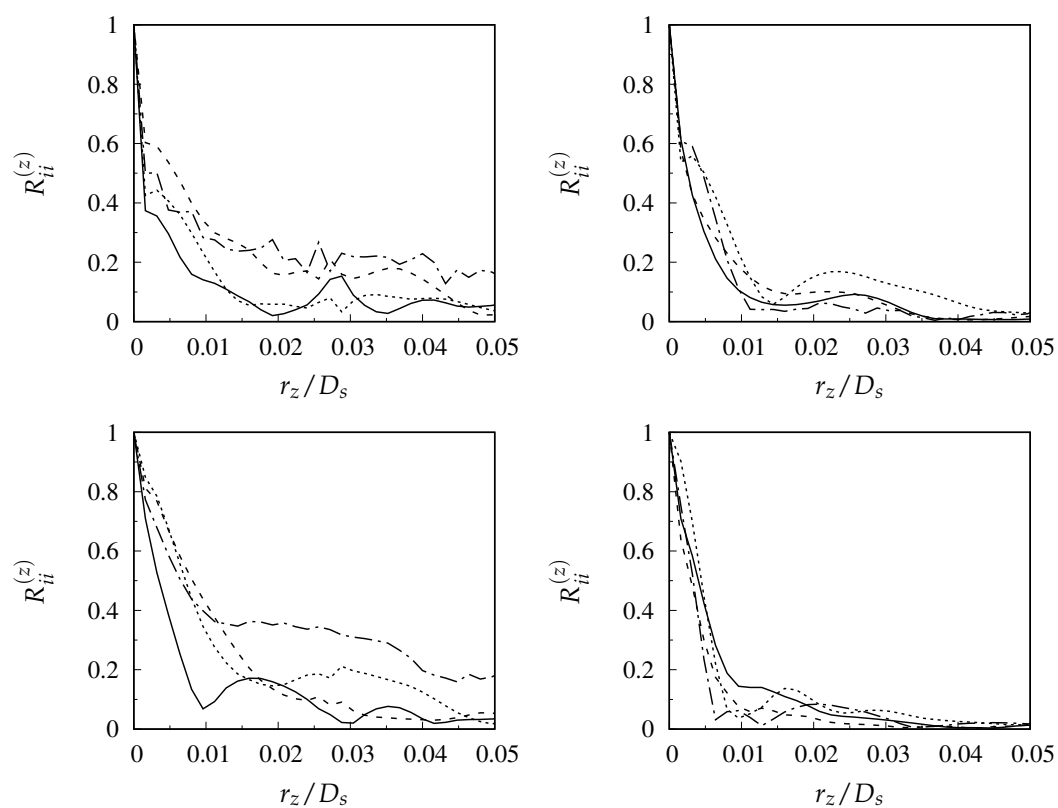


Abb. 4.7: $\delta 8$ -Wing: Korrelationsfunktion in Spannweitenrichtung bei $x = 1.44D_s$ (links) und der Klappe $x = 1.98D_s$ (rechts) in der Grenzschicht der Saugseite für $M_\infty = 0.175$ (oben) und $M_\infty = 0.4$ (unten) mit $i =: u'$ (—), v' (- - -), w' (· · ·) und p' (- · -).

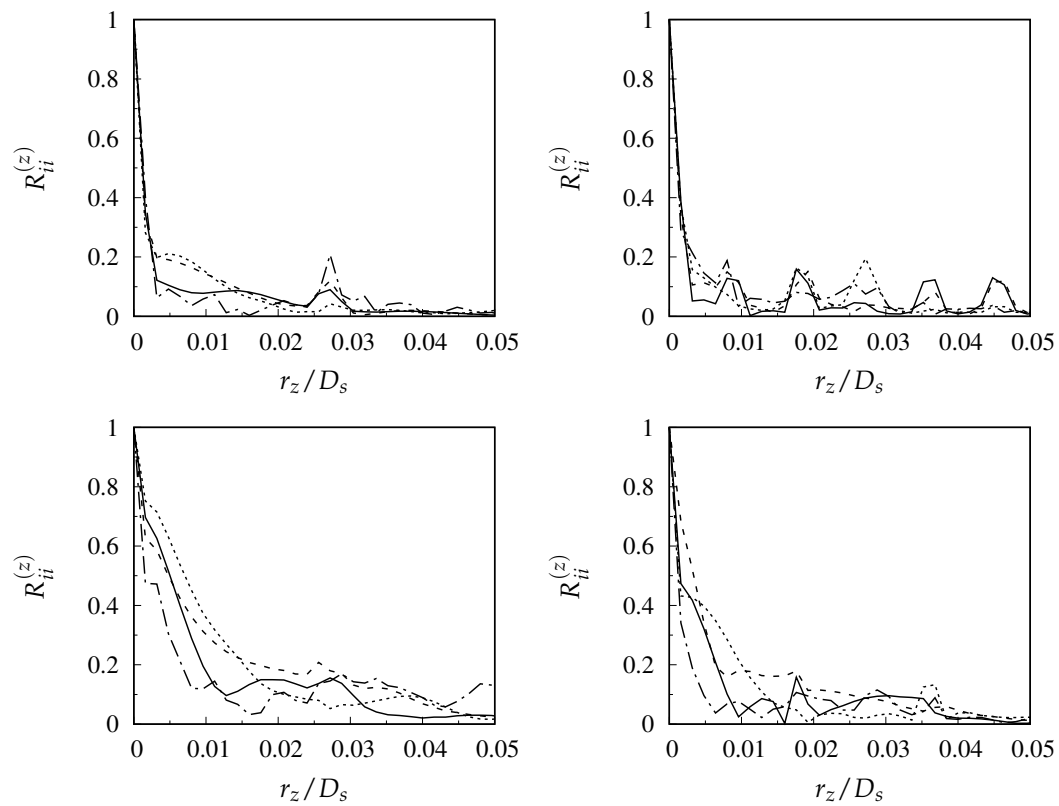


Abb. 4.8: $\delta 22$ -Wing: Korrelationsfunktion in Spannweitenrichtung bei $x = 1.46D_s$ (links) und der Klappe $x = 2.05D_s$ (rechts) in der Grenzschicht der Saugseite. Anordnung der Fälle und Legende der Linientypen wie in Abb. 4.7.

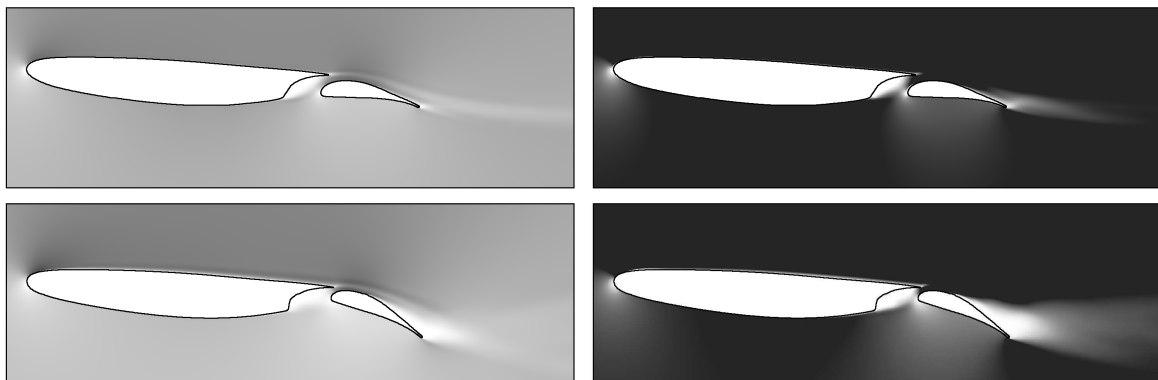


Abb. 4.9: Mittlere Longitudinalgeschwindigkeit \bar{u} : 2-D Konfiguration Wing $\delta 8$ (oben) und Wing $\delta 22$ (unten), jeweils mit $M_\infty = 0.175$ (links) und $M_\infty = 0.4$ (rechts). Die Farbskala reicht von 0 (weiß) bis U_{ref} (schwarz).

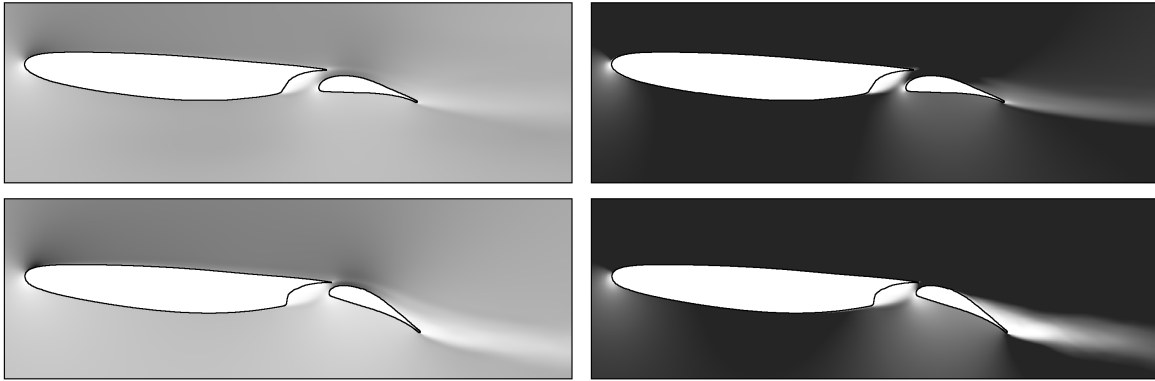


Abb. 4.10: Mittlere Longitudinalgeschwindigkeit \bar{u} : 3-D Konfiguration Wing δ 8 (*oben*) und Wing δ 22 (*unten*), jeweils mit $M_\infty = 0.175$ (*links*) und $M_\infty = 0.4$ (*rechts*). Die Farbskala ist in Abb. 4.9 spezifiziert.

keitsprofile in der Grenzschicht liefern die Abbildungen 4.11 und 4.12: Die mittlere longitudinale Geschwindigkeit, \bar{u} , wurde an verschiedenen Punkten entlang der Flügel- und Klappenoberfläche mit u_τ normiert und in Wandeinheiten, $y^+ = (y - y_w)u_\tau/\nu$, aufgetragen. In allen Fällen ist die Grenzschicht bis hin zur viskosen Unterschicht ($U^+ \propto y^+$) sehr gut aufgelöst. Auf der Klappenoberseite der δ 22-Konfiguration kommt es zu einer deutlichen Rückströmung, zu sehen an den negativen Werten für U^+ in dieser Region. Der Klappenwinkel beeinflusst auch den Geschwindigkeitsverlauf im hinteren Teil der Flügeloberseite. Für $\delta = 8^\circ$ steigt die Geschwindigkeit in der Flügelgrenzschicht monoton an, für $\delta = 22^\circ$ besitzt das Profil nahe der Flügelhinterkante einen Wendepunkt. Dies zeigt sich auch in der Darstellung der Stromlinien der mittleren Strömung in Abbildung 4.13 *rechts*: Für beide Klappenwinkel ist eine deutliches Rezirkulationsgebiet im Spaltbereich zu beobachten. Für $\delta = 22^\circ$ tritt zudem eine Ablöseblase im hinteren Bereich der Klappenoberseite auf.

In Abbildung 4.13 *links* ist die Verteilung des Druckkoeffizienten über der Profilkontur für beide Anströmgeschwindigkeiten aufgetragen. Für die δ 8-Konfiguration stellt sich die erwartete Druckverteilung ein. Im vorderen Bereich der Flügelunterseite und auf der gesamten Unterseite der Klappe liegt ein Überdruckgebiet vor, während sich für die entsprechenden Gebiete auf der Oberseite ein Unterdruckgebiet einstellt. Der Impulseintrag durch den Spalt zwischen Flügel und Klappe führt zu einer Beschleunigung der Strömung auf der Klappenoberseite und der Druck sinkt ab. Wird die Klappe weiter angestellt, erhöht sich die Druckdifferenz zwischen Flügelober- und Unterseite und das Überdruckgebiet auf der Klappenunterseite erstreckt sich über einen größeren Bereich, siehe C_p -Verlauf und Druckfeld in Abbildung 4.13 (b).

4.4 Akustisches Feld

Das instantane akustische Feld der 2-D Simulationen wird in Abbildung 4.14 mithilfe der Dilation des Geschwindigkeitsfeldes, $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$, visualisiert. Zudem zeigt die Darstellung Konturebenen der Wirbelstärke. Es fällt sofort auf, dass die Schallintensität mit der Strömungsgeschwindigkeit deutlich zunimmt. Für die Konfiguration mit $\delta = 8^\circ$ werden Schallquellen an der Flügelvorderkante, im Spaltbereich und an der Klappenhinterkante lokalisiert, wobei Spalt- und Hinterkantenlärm das Schallfeld dominieren. Bei der δ 22-Konfiguration konnte für beide Machzahlen eine deutliche Interaktion von Wirbeln mit der Hinterkante eingefangen werden. Die Wirbel auf der Klappenoberseite sind im Vergleich zur δ 8-Konfiguration größer und der generierte Hinterkantenlärm dominiert das Schallfeld. Wie erwartet, nimmt die dominante Frequenz des generierten Hinterkantenschalls mit der Machzahl zu. Aus den Abbildun-

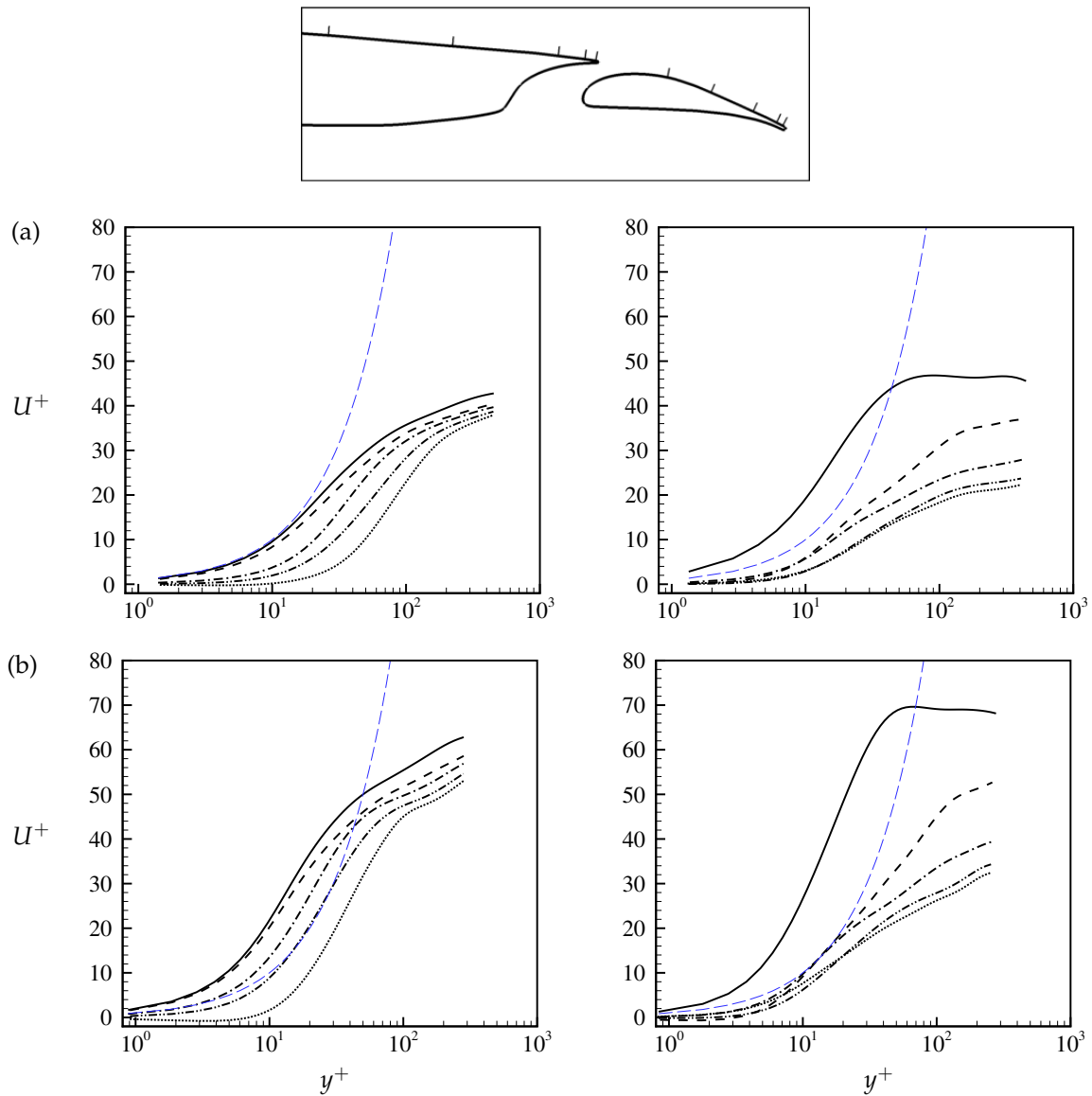


Abb. 4.11: Geschwindigkeitsprofile $U^+ = \bar{u}/u_\tau$ aufgetragen über der Wandeinheit y^+ für den Fall (a) $\delta 8M175$ und (b) $\delta 8M40$ jeweils in der oberen Grenzschicht des Flügels (*links*): —, $x/D_s = 0.85$; - - -, $x/D_s = 1.16$; - · - ·, $x/D_s = 1.44$; - · · - ·, $x/D_s = 1.51$; · · ·, $x/D_s = 1.53$ und der Klappe (*rechts*): —, $x/D_s = 1.72$; - - -, $x/D_s = 1.84$; - · - ·, $x/D_s = 1.94$; - · · - ·, $x/D_s = 2$ und · · ·, $x/D_s = 2.02$. - - - - -, $U^+ = y^+$. Oben: Darstellung der jeweils fünf Probenlinien.

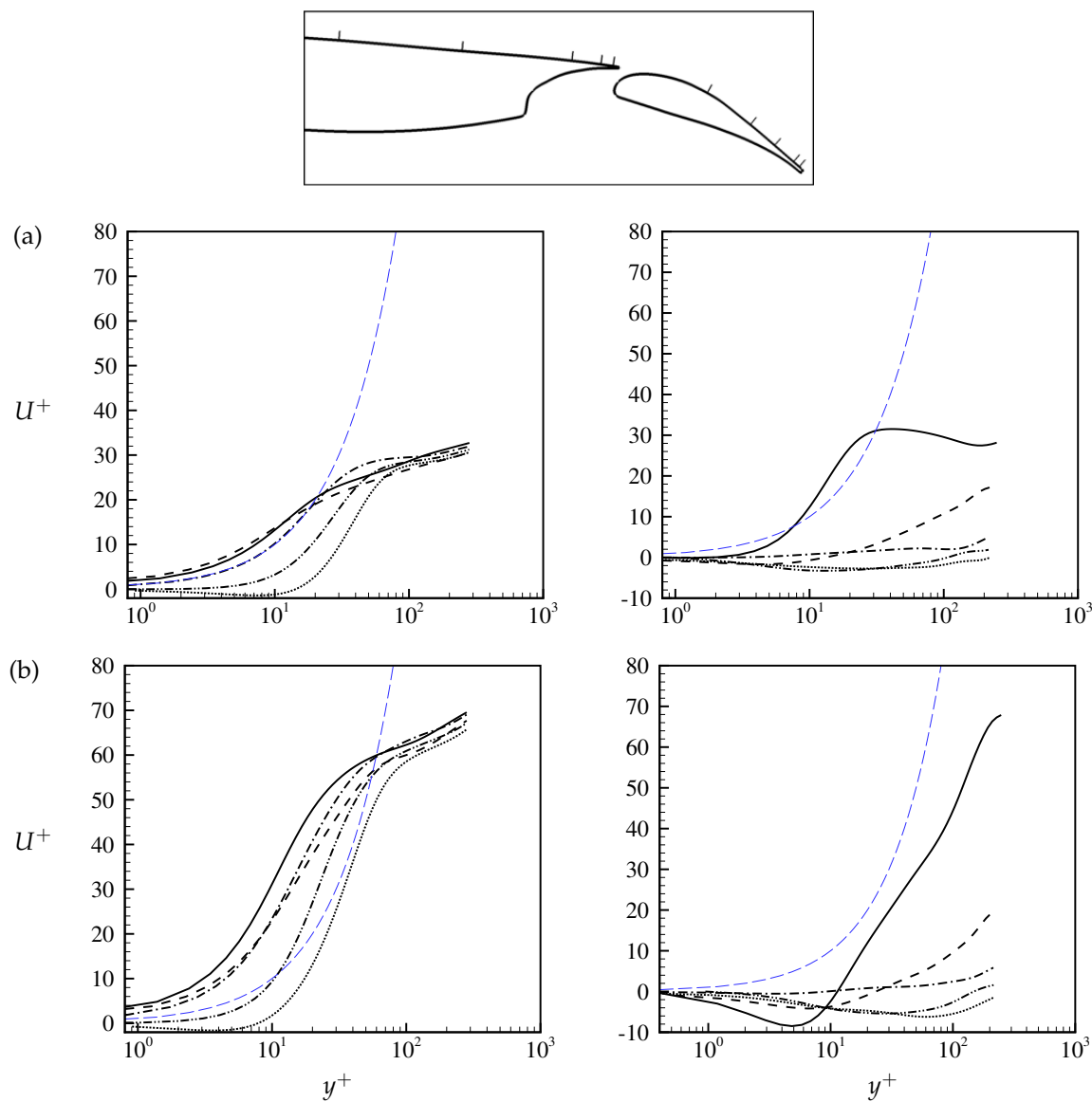


Abb. 4.12: Geschwindigkeitsprofile $U^+ = \bar{u}/u_\tau$ aufgetragen über der Wandeinheit y^+ für den Fall (a) $\delta 22M175$ und (b) $\delta 22M40$ jeweils in der oberen Grenzschicht des Flügels (*links*): —, $x/D_s = 0.85$; - - -, $x/D_s = 1.16$; - · - ·, $x/D_s = 1.44$; - · · - ·, $x/D_s = 1.51$; · · ·, $x/D_s = 1.53$ und der Klappe (*rechts*): —, $x/D_s = 1.80$; - - -, $x/D_s = 1.91$; - · - ·, $x/D_s = 1.98$; - · · - ·, $x/D_s = 2.02$ und · · ·, $x/D_s = 2.04$. - - - - -, $U^+ = y^+$. Oben: Darstellung der jeweils fünf Probenlinien.

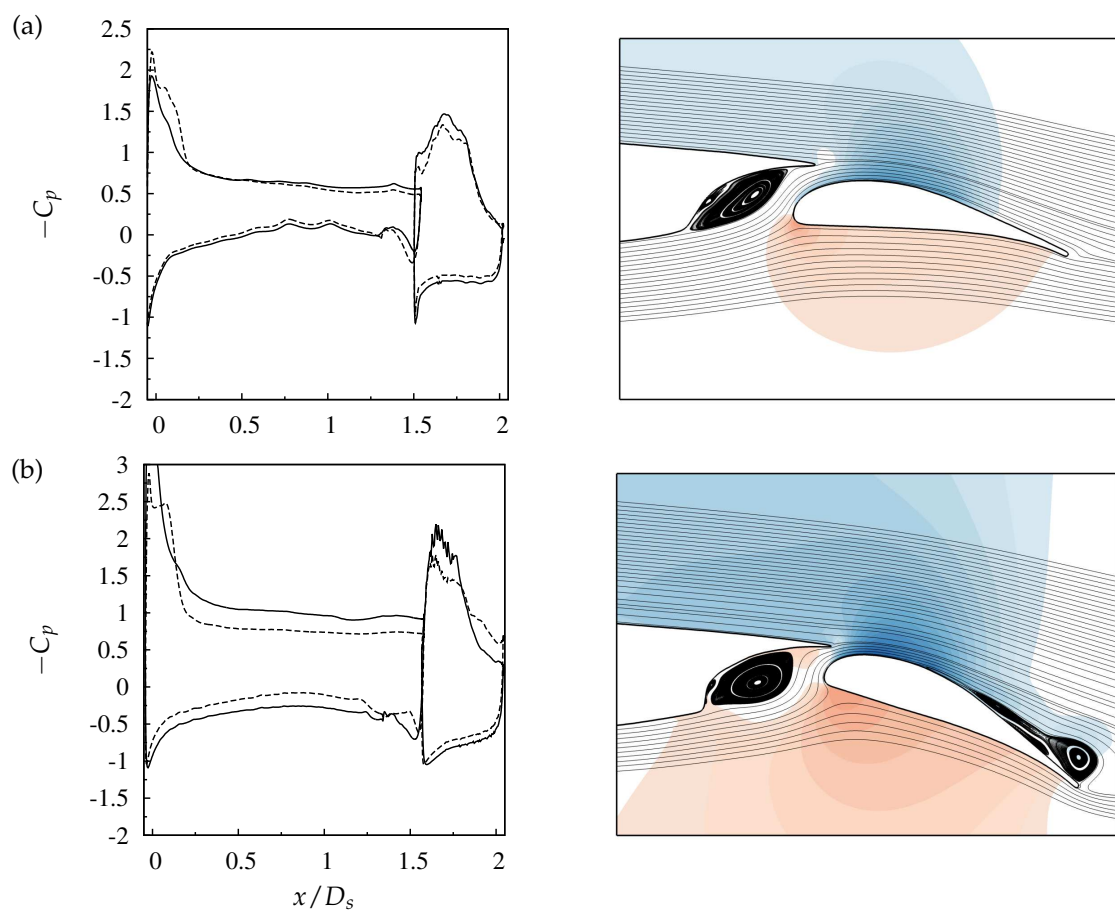


Abb. 4.13: Verteilung des Druckkoeffizienten, C_p , von Konfiguration (a) 2D-Wing $\delta 8$ und (b) 2D-Wing $\delta 22$ (links): —, $M_\infty = 0.175$; ---, $M_\infty = 0.4$. Druckfeld und Stromlinien der mittleren Strömung für den 2D-Fall mit $M_\infty = 0.175$ (rechts): Die Farbskala reicht von Unterdruck $4.9\rho_s U_{\text{ref}}^2$ (blau) bis Überdruck $5.3\rho_s U_{\text{ref}}^2$ (rot).

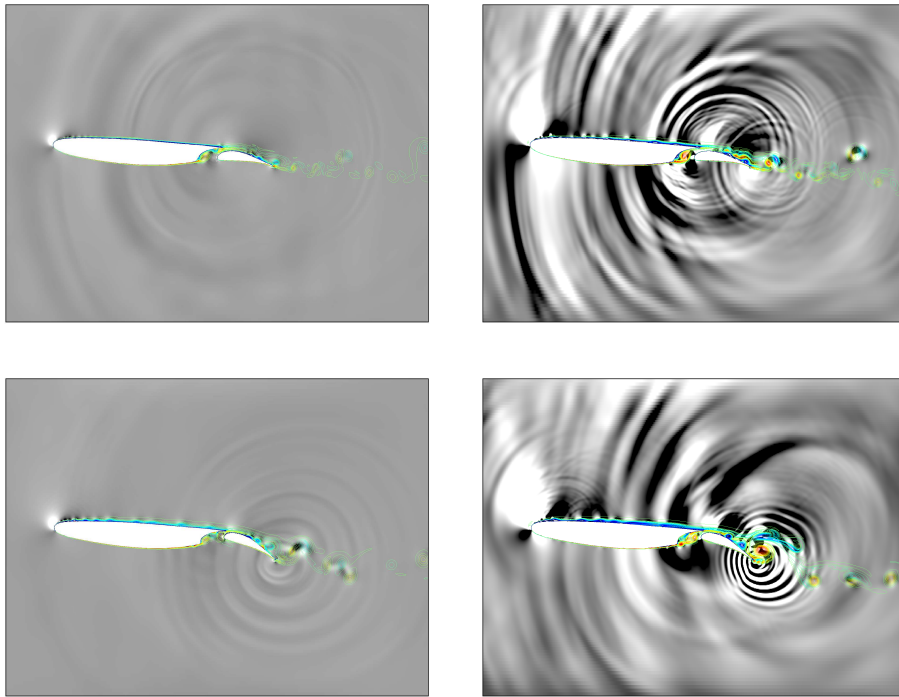


Abb. 4.14: Divergenzfeld der 2-D Konfigurationen $\delta = 8^\circ$ (oben) und $\delta = 22^\circ$ (unten) jeweils mit $M_\infty = 0.175$ (links) und $M_\infty = 0.4$ (rechts). Farbintervall des Divergenzfelds: $\pm 0.1U_{\text{ref}}/D_s$. Konturebenen der Wirbelstärke: von $-87U_{\text{ref}}/D_s$ (blau) bis $87U_{\text{ref}}/D_s$ (rot), Inkremente: $4U_{\text{ref}}/D_s$.

gen der $\delta 22$ -Konfiguration wird eine Wellenlänge von $\lambda \approx 0.13C_{\text{wing}}$ und $\lambda \approx 0.04C_{\text{wing}}$ für $M_\infty = 0.175$ beziehungsweise $M_\infty = 0.4$ abgelesen. Mit $f = a_\infty/\lambda$ folgen dann die Frequenzen zu rund $13U_{\text{ref}}/D_s$ beziehungsweise $39U_{\text{ref}}/D_s$. Aus diesen Darstellungen wird eine typische Rückkopplung zwischen den an der Klappenhinterrkante abgestrahlten Schallwellen und den Tollmien-Schlichting Instabilitäten im vorderen Bereich des Flügels deutlich: Grund für die deutlich früher auftretenden TS-Wellen in der Grenzschicht könnte ihre Anregung durch die an der Klappenkante generierten Druckwellen sein.

In den Abbildungen 4.15 (2-D) und 4.16 (3-D) wurde der nichtlineare Anteil des Lighthill-Quellterms zusammen mit der Dilatation visualisiert. Hinsichtlich des Orts hoher Amplituden für S^n und Θ sind 2-D und 3-D Simulationen nahezu identisch. Verfolgt man die konzentrischen Divergenzmuster zu ihrem Zentrum, lassen sich auch hier Schallquellen in der Spaltregion beziehungsweise an der Flügelhinterrkante und an der Hinterrkante der Klappe lokalisieren. Das akustische Feld der 3-D Simulation ist infolge der großen Skalenerunterschiede in der Grenzschicht breitbandiger als das entsprechende Feld der zweidimensionalen Simulationen.

Im Hinblick auf die JFI-Konfiguration, wird es interessant sein, zu untersuchen inwiefern sich das akustische Feld oberhalb des Flügels durch die Anwesenheit des Düsenstrahls verändert. Folgt man der einleitend formulierten Hypothese, so sollte sich die Schallabstrahlung an der Vorderkante und aus der Spaltregion im Vergleich zum isolierten Flügel deutlich erhöhen.

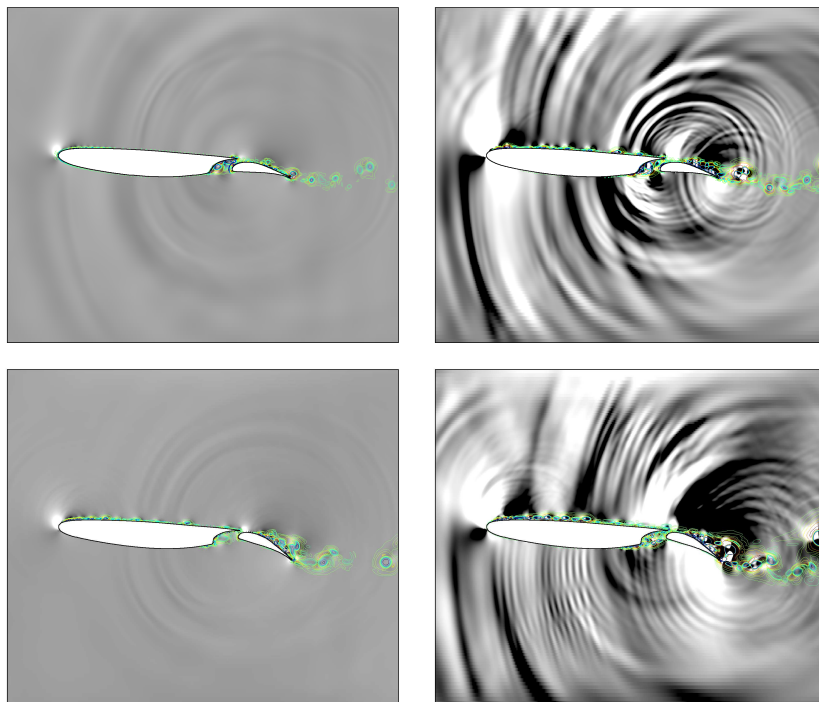


Abb. 4.15: Instantane Visualisierung der nicht-linearen Komponente des Lighthill Quellterms, $S^n = \partial^2(\rho u'_i u'_j) / \partial x_i \partial x_j$, und der Dilatation Θ der 2-D Konfigurationen $\delta = 8^\circ$ (oben) und $\delta = 22^\circ$ (unten) jeweils mit $M_\infty = 0.175$ (links) und $M_\infty = 0.4$ (rechts). Farbskalen: $S^n = \pm 160 \rho_s U_{\text{ref}}^2 / D_s^2$ und $\Theta = \pm 0.1 U_{\text{ref}} / D_s$.

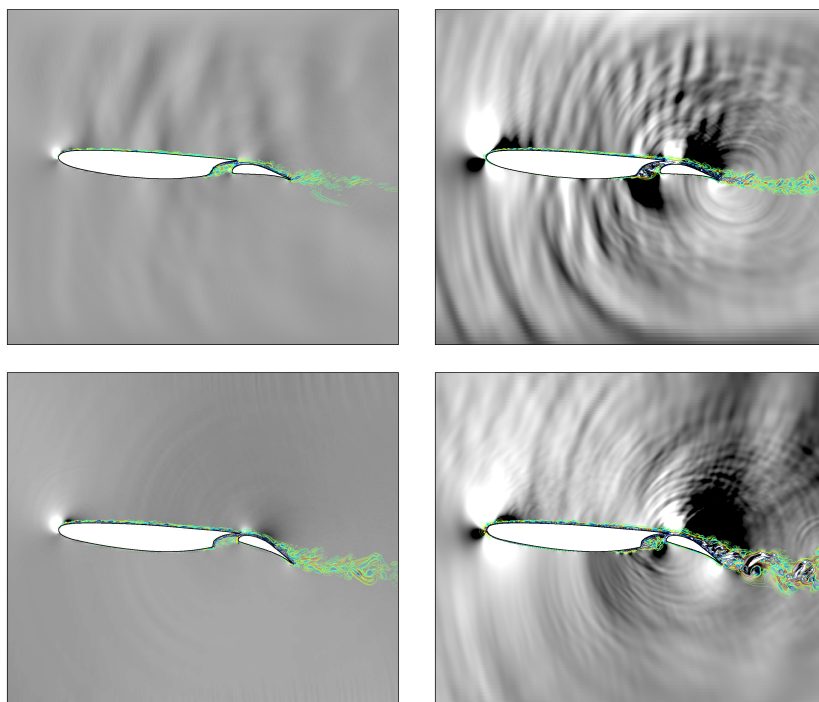


Abb. 4.16: Instantane Visualisierung der nicht-linearen Komponente des Lighthill Quellterms, S^n , und der Dilatation Θ der 3-D Konfigurationen. Anordnung und Farbskalen wie in Abbildung 4.15.

5 Düse-Flügel-Klappe Konfiguration

Die zugrundeliegende Geometrie und Parameter der untersuchten Düse-Flügel-Klappe Konfiguration wurde vom Projektpartner Airbus SE vorgegeben. Ursprünglich war geplant, dass die numerischen Simulationen von der Universität Siegen und die experimentellen Messungen von EADS Innovation Works durchgeführt werden. Jedoch wurde der Projektumfang im Verlauf zunächst deutlich reduziert und schließlich die EADS Arbeitsgruppe aufgelöst. Als Folge stehen keine brauchbaren Messdaten zur Verfügung und die Diskussion der Simulationsergebnisse stützt sich auf die ausführliche Validierung des Modells in den Kapiteln 2 und 3 oben.

Erste Simulationen der Düse-Flügel-Klappe Konfiguration mit runder Düse, siehe Appendix B, haben gezeigt, dass die Auflösung mit rund 10^8 Gitterpunkten nicht ausreicht, um wichtige Mechanismen der Wirbelbildung zu erfassen und eine realistische räumliche Entwicklung der Turbulenz zu gewährleisten. Die dafür erforderliche Auflösung in der Größenordnung von 10^9 Gitterpunkten, war mit den vorhandenen Rechenkapazitäten im Rahmen dieser Arbeit nicht zu leisten. Daher wurden die Untersuchungen an einem Ausschnitt der realistischen Konfiguration durchgeführt. Dazu wurde die Gesamtkonfiguration im Scheitelpunkt der Düse geschnitten und um 10% des Düsendurchmessers in Spannweitenrichtung extrudiert. Die unmittelbare Freistahl-Klappe Interaktion (JFI) am Scheitelpunkt des Düsenstrahls, Effekte normal zum Tragflügel und in Hauptströmungsrichtung werden durch die Simulation des Ausschnitts erfasst, in Spannweitenrichtung wirkende Effekte aus der Pfeilung des Flügel und der runden Düse jedoch vernachlässigt. Hinsichtlich der zu untersuchenden JFI werden diese Effekte als untergeordnet eingeschätzt.

5.1 Simulationskonfigurationen

Es wurden zwei unterschiedliche Geometrie Konfigurationen mit jeweils zwei verschiedenen Strömungskonfigurationen simuliert. Die variierten Geometrieparameter waren die Flügel- und Klappenposition und der Klappenwinkel. Die variierten Strömungsparameter waren die Strömungsgeschwindigkeit der Sekundärdüse. Als Referenz wurde zudem die isolierte Düse für beide Strömungskonfigurationen simuliert. Analog zur isolierten Düse, entsprechen die Flügelkonfigurationen aus Kapitel 4 mit $M_\infty = 0.175$, dem isolierten Flügel. Zu jedem Fall wurden zwei- und dreidimensionale Simulationen durchgeführt.

5.1.1 Geometrieparameter

In Abbildung 5.1 ist eine der untersuchten Konfigurationen zu sehen: Die Düse setzt sich aus einer Sekundärdüse (Index s), einer Primärdüse (Index p) und einem Düsenkern zusammen und wurde nicht variiert. Variiert wurden die vertikale Position des Flügels ΔY , der vertikale Abstand zwischen Mittellinie und Klappenhinterkante H und der Klappenwinkel δ . Der horizontale Abstand zwischen Sekundärdüse und Klappenhinterkante L und die horizontale Position der Flügelvorderkante ΔX blieben unverändert. In Tabelle 5.1 sind die relevanten Daten zu den simulierten Konfigurationen aufgeführt. Die Kombination aus jeweils einer Geometrie Konfiguration und einem Strömungsfall ergeben ein Simulationssetup.

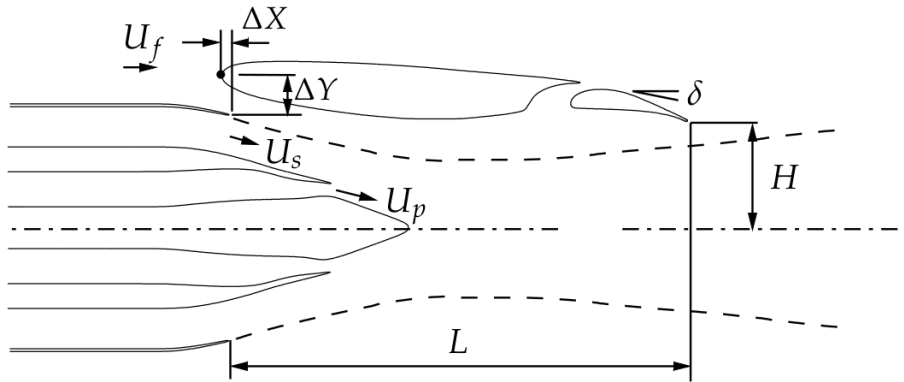


Abb. 5.1: Geometrie der Ref δ 8-Konfiguration.

Konfiguration	$\Delta X/D_s$	$\Delta Y/D_s$	L/D_s	H/D_s	δ
Ref δ 8	0.05	0.2	2.04	0.49	8°
P1 δ 22	0.05	0.1	2.04	0.29	22°

Tab. 5.1: Geometrieparameter

5.1.2 Strömungsparameter

Hinsichtlich der Strömungsparameter der hier diskutierten Fälle wurde nur die Strömungsgeschwindigkeit der Sekundärdüse variiert¹: Für den Fall C3 beträgt sie $U_s = 128.5 \text{ m/s}$, die resultierende Machzahl ist $M_s = U_s/a_\infty = 0.374$ und die Reynoldszahl basierend auf dem Düsendurchmesser, $Re_{D_s} = \rho_s U_s D_s / \mu$, ist rund 1.3×10^6 . Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der Strömung der Sekundärdüse und der Umgebungsströmung, $\Delta U = U_s - U_\infty$, beträgt bei C3 etwa $0.2a_\infty$ ($Re_{\Delta U} = \rho_s |\Delta U| D_s / \mu \simeq 7 \times 10^5$) und die Konvektionsgeschwindigkeit ist $U_c = (U_\infty + U_s)/2 \simeq 0.27a_\infty$. Für die Scherschicht zwischen primärer und sekundärer Düse ergibt sich eine negative Geschwindigkeitsdifferenz von $U_p - U_s = -0.06a_\infty$ und eine Konvektionsgeschwindigkeit von $U_c = (U_p + U_s)/2 \simeq 0.34a_\infty$.

Für Fall C3-50 ist $U_s = 50 \text{ m/s}$, $M_s = 0.146$, $Re_{D_s} \simeq 5 \times 10^5$ und die Geschwindigkeitsdifferenz zur Außenströmung negativ, $\Delta U \simeq -0.03a_\infty$ ($Re_{\Delta U} \simeq 10^5$), und die Konvektionsgeschwindigkeit der äußeren Scherschicht beträgt $U_c \simeq 0.16a_\infty$ und die der inneren $U_c \simeq 0.23a_\infty$. Hier ist die Strömung der Primärdüse relativ zur Sekundärströmung schneller und die Geschwindigkeitsdifferenz beträgt $U_p - U_s = 0.17a_\infty$.

Die Düsenstrahlen sind isotherm und mit $T_s = T_p = T_\infty = 293.15 \text{ K}$ spezifiziert. Die Reynoldszahl, basierend auf der fiktiven Sehnenlänge des Hauptflügels $C = 0.3 \text{ m}$, beträgt $Re_C = \rho_\infty U_\infty C / \mu \simeq 1.19 \times 10^6$. In Tabelle 5.2 sind die fallunabhängigen Strömungsparameter aufgeführt.

Spezifikation des Düseninlasses. Zur Spezifikation des axialen Geschwindigkeitsprofils am Einlass der Düsen und der Grenzschicht der Außenströmung an der Sekundärdüse, wird ein laminares Blasius-Profil verwendet. Das Geschwindigkeitsprofil am Einlassrand wurde wie folgt definiert:

$$u_o(y) = u_{po}(y) + u_{so}(y) + u_{\infty o}(y)$$

¹Für die runde Düse, wurden zudem noch die Fälle C1 ($U_\infty = 0$) und C2 ($U_\infty = 0$, $T_p = 493 \text{ K}$) simuliert.

Parameter	physikalischer Wert		dimensionsloser Wert
γ	1.4	1	1.4
\mathcal{R}_g	287.15 J/(kgK)	T_s/U_{ref}^2	$1/(\gamma M_{\text{ref}}^2) \simeq 5.1$
c_p	1.005×10^3 J/(kgK)	T_s/U_{ref}^2	$1/((\gamma - 1)M_{\text{ref}}^2) \simeq 17.84$
Pr	0.715	1	0.715
μ	1.823×10^{-5} kg/(ms)	$1/(\rho_s U_{\text{ref}} D_s)$	$\simeq 7.57 \times 10^{-7}$
U_{ref}	128.5 m/s	$1/U_{\text{ref}}$	1
$M_{\text{ref}} = U_{\text{ref}}/a_s$	$\simeq 0.374$	1	$\simeq 0.374$
$Re_{\text{ref}} = \rho_s U_{\text{ref}} D_s/\mu$	$\simeq 1.32 \times 10^6$	1	$\simeq 1.32 \times 10^6$
ρ_∞	1.205 kg/m ³	$1/\rho_s$	1
U_∞	60 m/s	$1/U_{\text{ref}}$	$\simeq 0.467$
T_∞	293.15 K	$1/T_s$	1
$p_\infty = \rho_\infty \mathcal{R}_g T_\infty$	$\simeq 1.01434 \times 10^5$ Pa	$1/(\rho_s U_{\text{ref}}^2)$	$1/(\gamma M_{\text{ref}}^2) \simeq 5.1$
$a_\infty = (\gamma \mathcal{R}_g T_\infty)^{1/2}$	$\simeq 343.3$ m/s	$1/U_{\text{ref}}$	$1/M_{\text{ref}} \simeq 2.67$
D_s	0.15548 m	$1/D_s$	1
h_s	0.02829 m	$1/D_s$	0.182
ρ_s	1.205 kg/m ³	$1/\rho_s$	1
D_p	0.06004 m	$1/D_s$	$\simeq 0.386$
h_p	0.0087 m	$1/D_s$	0.056
U_p	108.2 m/s	$1/U_{\text{ref}}$	$\simeq 0.842$
ρ_p	1.205 kg/m ³	$1/\rho_s$	1
$p_p = \rho_p \mathcal{R}_g T_s$	$\simeq 1.01434 \times 10^5$ Pa	$1/(\rho_s U_{\text{ref}}^2)$	$1/(\gamma M_{\text{ref}}^2) \simeq 5.1$
$M_p = U_p/a_\infty$	0.315	1	0.315

Tab. 5.2: Fallunabhängige Simulationsparameter. Die totale Temperatur in der Düse i ist $T_{0i} = T_i + \frac{1}{2c_p} U_i^2$. Die thermische Leitfähigkeit wird mit $k = \frac{c_p \mu}{Pr}$ bestimmt und ist im dimensionslosen Fall identisch $\frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_{\text{ref}} M_{\text{ref}}^2}$, d.h. $k T_s / (\rho_s U_{\text{ref}}^3 D_s) = 1.89 \times 10^{-5}$. Angaben zum Tragflügel werden in Tabelle 4.1 gemacht.

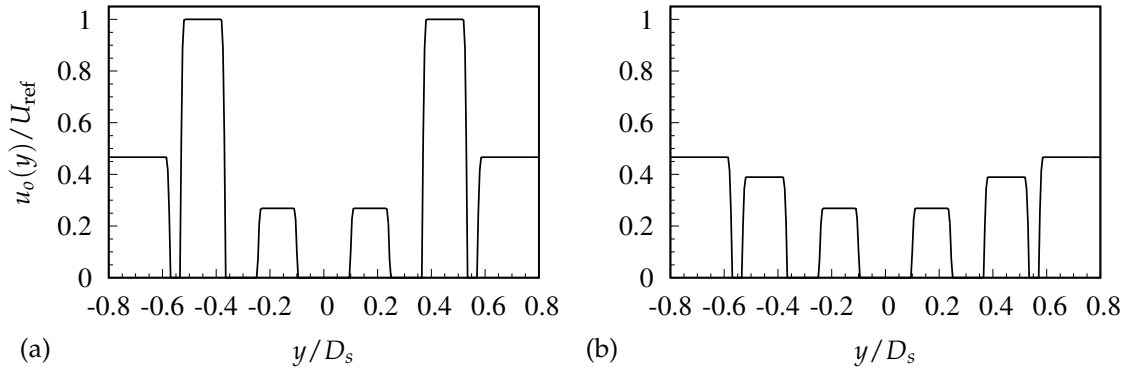


Abb. 5.2: Geschwindigkeitsprofile am Düseneinlass: C3 (a), C3-50 (b).

mit dem Geschwindigkeitsverlauf für Düse j :

$$u_{jo}(y) = \begin{cases} U_{jo}, & \text{für } |y'_j| < h_{jo}/2 - \delta_{jo}, \\ U_{jo} \frac{h_{jo}/2 - |y'_j|}{\delta_{jo}} \left[2 - 2 \left(\frac{h_{jo}/2 - |y'_j|}{\delta_{jo}} \right)^2 + \left(\frac{h_{jo}/2 - |y'_j|}{\delta_{jo}} \right)^3 \right], & \text{für } h_{jo}/2 - \delta_{jo} \leq |y'_j| \leq h_{jo}/2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und dem Geschwindigkeitsverlauf der Außenströmung:

$$u_{\infty o}(y) = \begin{cases} U_{\infty}, & \text{für } |y| > R + \delta_o, \\ U_{\infty} \frac{|y-R|}{\delta_o} \left[2 - 2 \left(\frac{|y-R|}{\delta_o} \right)^2 + \left(\frac{|y-R|}{\delta_o} \right)^3 \right], & \text{für } R \leq |y| \leq R + \delta_o, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist h_{jo} die Kanalhöhe, U_{jo} die Geschwindigkeit in der Kanalmitte und δ_{jo} die Grenzschichtdicke jeweils am Einlass der Düse j . Die Koordinate $y'_j = y - y_{jo}$ startet in der Kanalmitte der jeweiligen Düse. R ist der Außenradius der Sekundärdüse am Einlassrand. Das Kanalhöhenverhältnis, definiert durch das Verhältnis der Kanalhöhe am Einlass und am Auslass, ist $h_{s0}/h_s = 1$ und $h_{p0}/h_p = 2.84$ für die Sekundär- beziehungsweise Primärdüse. Mit der Annahme einer isentropen Strömung können die Bedingungen am Düseneinlass (Index o) mithilfe der Kontinuitätsgleichung und der kompressiblen Bernoulligleichung iterativ über

$$U_{po} = U_p \frac{h_p}{h_{po}} \left(\frac{T_p}{T_p + \frac{1}{2c_p}(U_p^2 - U_{po}^2)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

berechnet werden. Sie folgen dann für die Primärdüse zu $U_{p0}/U_{\text{ref}} = 0.284$, $\rho_{p0}/\rho_s = 1.045$, $T_{p0}/T_s = 1.018$ und $p_{p0}/(\rho_s U_{\text{ref}}^2) = 5.429$; für die Sekundärdüse gilt $(\cdot)_{s0} = (\cdot)_s$. Abbildung 5.2 zeigt die Geschwindigkeitsprofile am Düseneinlass für die Testfälle C3 und C3-50. Um unphysikalische Moden im Inneren der Düse zu vermeiden, wurden keine Tripping-Prozeduren zur Anregung der Grenzschichttransition verwendet; für die Grenzschichtdicke am Einlass wurde $\delta_{jo}/h_{jo} = 0.1$ gewählt.

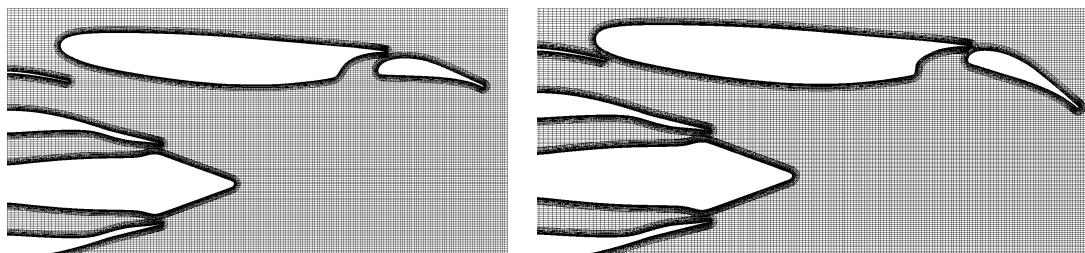


Abb. 5.3: Berechnungsgitter: Ref δ 8 (links); P1 δ 22 (rechts). Gezeigt ist jede dritte Gitterlinie.

Gitter	N_x	N_y	N_z	$\overline{\Delta x}/D_s$	$\overline{\Delta y}/D_s$	$\Delta y_{\min}/D_s$	$\Delta z/D_s$
Hintergrund	2026	1001	33	6×10^{-3}	5×10^{-3}	1.6×10^{-3}	3×10^{-3}
Flügel	961	51	65	4×10^{-3}	6×10^{-3}	6×10^{-5}	1.6×10^{-3}
Klappe	451	51	65	3×10^{-3}	6×10^{-3}	6×10^{-5}	1.6×10^{-3}
s-Düse (2x)	1951	51	65	4×10^{-3}	5×10^{-4}	8×10^{-5}	1.6×10^{-3}
p-Düse (2x)	3251	51	65	3×10^{-3}	5×10^{-4}	8×10^{-5}	1.6×10^{-3}
Kern	1301	51	65	2×10^{-3}	5×10^{-4}	8×10^{-5}	1.6×10^{-3}

Tab. 5.3: Gitterparameter. Erläuterungen siehe Tabelle 4.3.

5.2 Numerische Spezifikationen

Abbildung 5.3 zeigt eine Detailansicht des Gitters der beiden Konfigurationen. Bei Konfiguration P1 δ 22 ist der Flügel in vertikaler Richtung dichter an der Düse montiert und die Klappe ist weiter ausgefahren. Das Simulationsgebiet wird mit insgesamt acht Gittern vernetzt. Die relevanten Daten zu den einzelnen Gittern des großen Simulationsgebiets, mit der Ausdehnung von $-2 \geq x/D_s \leq 10$, $-2.5 \geq y/D_s \leq 2.5$ und $-0.05 \geq z/D_s \leq 0.05$, sind in Tabelle 5.3 dargestellt. Dabei ist die Grenzschichtauflösung mit $\Delta x^+ \approx 35$, $\Delta y^+ \approx 0.7$ und $\Delta z^+ \approx 14$ sehr gut für eine LES. Alle relevanten Zeitangaben, wie der Samplingzeitschritt, die Samplingdauer und die daraus resultierenden cut-off Frequenzen sind in Tabelle 5.4 aufgelistet.

5.2.1 Einfluss der Auflösung

Das Divergenzfeld der isolierten 2-D Düse des Falls C3 ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Der Einfluss der Auflösung auf die Entwicklung der Grenzschicht wird hier gut deutlich: Während mit dem feinen Gitter (Gitter nach den Angaben in Tabelle 5.3), Abbildung 5.4 (rechts), die Grenzschichten schon in der Düse aufrollen (zu erkennen an den feinen Divergenzmustern innerhalb der p- und s-Düse), vollzieht sich ein Aufrollen der Grenzschichten im weniger aufgelösten Fall (Gitter mit um Faktor 1/10 geringeren Grenzschichtauflösung und um Faktor 1/2 geringeren Fernfeldauflösung) erst außerhalb der Düse weiter stromab. Die Ursache dafür ist in der erheblich geringeren Auflösung der Grenzschicht zu suchen. Kleine Störungen in der Grenzschicht werden vom Gitter nicht erfasst und die numerische Dissipation führt zu einer Glättung der Lösung. Da es im Fall des groben Gitters zu keiner Interaktion zwischen den Wirbeln und der Düsenkante sowie weiter stromab zwischen den Wirbeln untereinander kommt, resultiert daraus ein hinsichtlich Frequenzband und Richtcharakteristik anders akustisches Feld.

	Dimensionslos	In SI-Einheiten
Überströmzeit $t_C = C/U_\infty$	$4.1D_s/U_{\text{ref}}$	$5 \times 10^{-3} \text{ s}$
Durchströmzeit $t_{L_x} = L_x/U_{\text{ref}}$	$8D_s/U_{\text{ref}}$	$9.7 \times 10^{-3} \text{ s}$
Akustische Durchströmzeit $\tilde{t}_{L_x} = L_x/a_\infty$	$3D_s/U_{\text{ref}}$	$3.6 \times 10^{-3} \text{ s}$
Initiale Entwicklungszeit t_i	$3t_C$	$1.5 \times 10^{-2} \text{ s}$
Charakteristisches Zeitmaß $t_{h_p} = h_p/U_p$	$0.067D_s/U_{\text{ref}}$	$8 \times 10^{-5} \text{ s}$
LES-Domain^a		
Δt	$1.4 \times 10^{-5} D_s/U_{\text{ref}}$	$1.7 \times 10^{-8} \text{ s}$
Δt_{sp}	$100\Delta t$	$1.7 \times 10^{-6} \text{ s}$
Mittelungszeit T_{avg}	$t_C \simeq 2600\Delta t_{\text{sp}}$	$5 \times 10^{-3} \text{ s}$
Samplingzeit T_{sp}	$t_C/2 \simeq 1300\Delta t_{\text{sp}}$	$2.5 \times 10^{-3} \text{ s}$
Simulationszeit $T = t_i + T_{\text{avg}} + T_{\text{sp}}$	$18.5D_s/U_{\text{ref}}$	$2.2 \times 10^{-2} \text{ s}$
$D_s/(TU_{\text{ref}}) \sim St$	0.05	–
$f_c^{\text{SP}} = 1/(2\Delta t_{\text{sp}})$	$357U_{\text{ref}}/D_s$	$3 \times 10^5 \text{ Hz}$
$St_c^{\text{SP}} = f_c^{\text{SP}}D_s/U_{\text{ref}}$	357	–
$\lambda_c = 2\pi/k_c = p\overline{pw}\Delta x$	$21\overline{\Delta x} \simeq 0.1D_s$	$1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$
$f_c^{\text{G}} = U_{\text{ref}}/\lambda_c$	$10U_{\text{ref}}/D_s$	8264 Hz
$St_c^{\text{G}} = f_c^{\text{G}}D_s/U_{\text{ref}} = D_s/\lambda_c$	10	–
$St_{\text{min}} = D_s/(T_{\text{sp}}U_{\text{ref}})$	0.48	–
LEE-Domain (2-D)		
Δt_{LEE}	$0.001D_s/U_{\text{ref}}$	$1.2 \times 10^{-6} \text{ s}$
Simulationszeit $T = 3t_C$	$12D_s/U_{\text{ref}}$	$1.5 \times 10^{-2} \text{ s}$
$f_c^{\text{SP}} = 1/(2\Delta t_{\text{LEE}})$	$500U_{\text{ref}}/D_s$	$4 \times 10^5 \text{ Hz}$
$St_c^{\text{SP}} = f_c^{\text{SP}}D_s/U_{\text{ref}}$	500	–
λ_c	$6\overline{\Delta x} \simeq 0.036D_s$	$5.6 \times 10^{-3} \text{ m}$
$f_c^{\text{G}} = U_{\text{ref}}/\lambda_c$	$28U_{\text{ref}}/D_s$	23000 Hz
$St_c^{\text{G}} = f_c^{\text{G}}D_s/U_{\text{ref}} = D_s/\lambda_c$	28	–

Tab. 5.4: Zeitparameter: ^a Für die LES-Domain sind die Zeitparameter der 3-D Simulationen aufgeführt, die Zeitschrittweite der 2-D Simulationen war identisch, die Mittelungs-, und Simulationsdauer aber deutlich länger. Beschreibung siehe Tabelle 3.3.

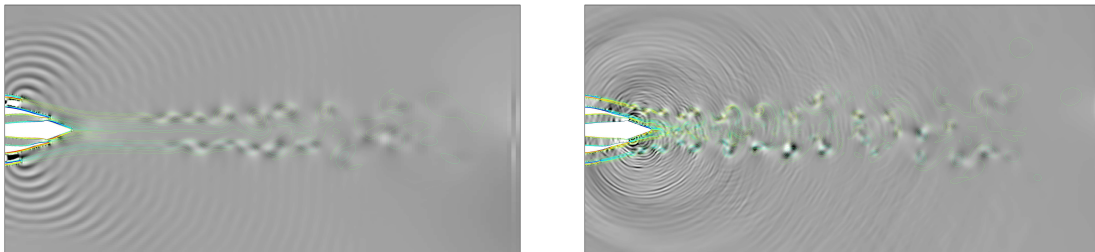


Abb. 5.4: 2-D Düse (Fall C3): Grobes Gitter (*links*); Standardgitter (*rechts*). Farbintervall Divergenzfeld: $\pm 0.1U_{\text{ref}}/D_s$. Konturebenen der Wirbelstärke: min: $-87U_{\text{ref}}/D_s$ (blau), max: $87U_{\text{ref}}/D_s$ (rot), Inkr.: $4U_{\text{ref}}/D_s$.

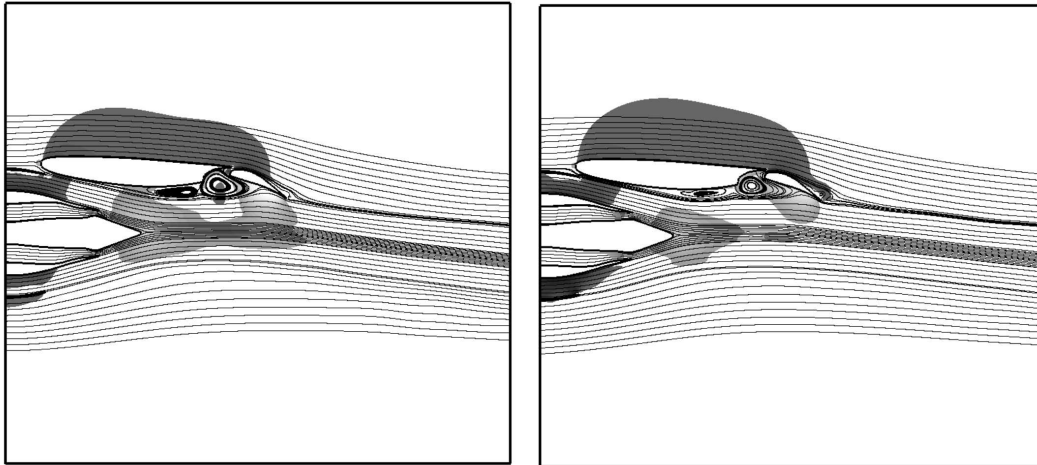


Abb. 5.5: Mittleres Druckfeld und Stromlinien des mittleren Geschwindigkeitsfeldes für P1 δ 22-C3: Standardgebiet (*links*) und erweitertes Gebiet (*rechts*). Dunkelgrau steht für Unterdruckgebiete und hellgrau steht für Überdruckgebiete.

5.2.2 Einfluss der Gebietsgröße

Um den Einfluss der Gebietsgröße auf die Lösung zu untersuchen, wurde der Testfall P1 δ 22-C3 im Standardgebiet und in einem erweiterten Gebiet simuliert. Die Ausdehnung des Standardgebiets ist $-0.25 \geq x/D_s \leq 8$ und $-2 \geq y/D_s \leq 2$ und die des erweiterten Gebiets ist $-2 \geq x/D_s \leq 10$ und $-2.5 \geq y/D_s \leq 2.5$, in x - respektive y -Richtung. Ein Vergleich der Lösungen zeigt beispielsweise keine signifikanten Unterschiede der mittleren Druckfelder und Stromlinien, dargestellt in Abbildung 5.5. Wichtig dabei ist die Druckverteilung an der Flügelvorderkante. Diese sollte nicht vom Einlassrand beeinflusst werden. Das dies so ist, zeigt auch die gute Übereinstimmung des C_p -Verlaufs in diesem Bereich des Flügels für beide Gebietsgrößen in Abbildung 5.12 (unten).

In Abbildung 5.6 ist das akustische Feld mithilfe der Divergenz visualisiert. Die Lösung des Standardgebiets unterscheidet sich nicht wesentlich von der korrespondierenden Zone des erweiterten Gebiets und die akustischen Wellen verlassen das Gebiet in beiden Fällen ohne unphysikalische Reflexionen. Diese einfache Untersuchung des Randeinflusses soll an dieser Stelle genügen und das Standardgebiet wird als ausreichend für die hier verfolgten Ziele angesehen. Dennoch wurde für die hier besprochenen Simulationen, die große Domain verwendet. Die 3-D Simulationen mit der Runden Düse, in Anhang B, wurden mit der Standarddomain durchgeführt.

5.3 Aerodynamisches Feld

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse zur Entwicklung der Grenz- und Mischungsschichten sowie die mittleren aerodynamischen Felder der untersuchten Konfigurationen Ref δ 8 und P1 δ 22 vorgestellt. Bei den 2-D Simulationen wurden jeweils die Fälle C3 und C3-50 simuliert, bei den 3-D Simulationen nur der Fall C3-50.

5.3.1 Instantanes Strömungsfeld

Abbildung 5.7 zeigt den Betrag der Wirbelstärke, $|\omega_z|$, für die untersuchten Fälle C3 ($U_s = 128.5$ m/s) und C3-50 ($U_s = 50$ m/s) der Konfigurationen Ref δ 8 und P1 δ 22. Zunächst soll allein

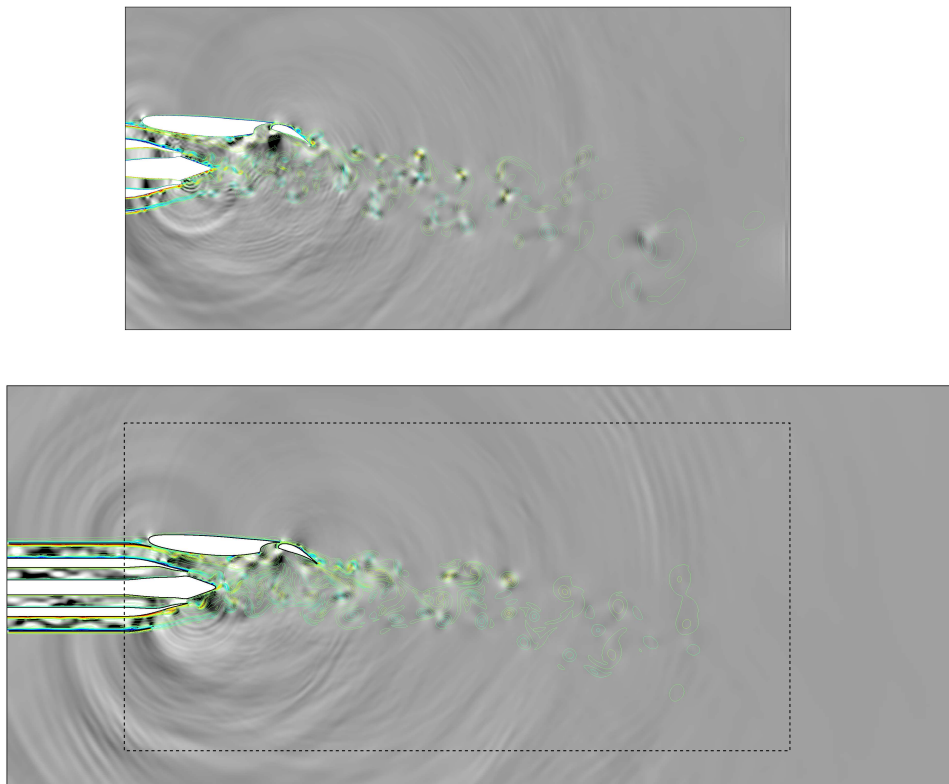


Abb. 5.6: P1 δ 22-C3 Standard-Gebiet (*oben*) und erweitertes Gebiet (*unten*): Divergenzfeld, $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Farbin-
tervall: $\pm 0.1U_{\text{ref}}/D_s$. Konturebenen der Wirbelstärke ω_z : min: $-87U_{\text{ref}}/D_s$ (blau), max: $87U_{\text{ref}}/D_s$ (rot),
Inkr.: $4U_{\text{ref}}/D_s$. - - -, Rand des Standardgebiets.

die Düse für die Fälle C3 und C3-50, Abbildung 5.7 (a) und (b), betrachtet werden. Die Grenzschichten beginnen sich nach dem jeweiligen Düsenauslass auf der Innenseite zu entwickeln. Die Mischungsschichten im Düsennachlauf sind deutlich als Linien mit erhöhter Wirbelstärke zu erkennen. Im Fall C3 beginnt die äußere Scherschicht auf Höhe des Primärdüsenauslasses aufzurollen, darauf folgt eine erste Wirbelpaarung welche sich weiter stromab wiederholt. Die Paarung von Wirbeln in zweidimensionalen Mischungsschichten ist ein wesentlicher Prozess zur Schallerzeugung und wurde intensiv von z.B. Bogey *et al.* [86, 140] untersucht. Erste Untersuchungen von Colonius *et. al* [85] zeigten, dass die Wirbelpaarung eine Schallabstrahlung mit Wellenlängen von $\lambda_p = v_g / f_p$ generiert. Dabei steht die Wellenlänge in direktem Zusammenhang mit der Paarungsfrequenz f_p . Für ein Fluid in Ruhe ist die Gruppengeschwindigkeit der Schallwellen v_g , mit der Schallgeschwindigkeit identisch. Die Geschwindigkeitsdifferenz $U_s - U_\infty$ für den Fall C3 ist positiv und beträgt $0.53U_{\text{ref}}$. Ein ganz anders Verhalten zeigt sich im Fall C3-50, Abbildung 5.7 (b). Hier ist die Geschwindigkeitsdifferenz zur Außenströmung $-0.08U_{\text{ref}}$ und damit leicht negativ. Aufgrund der geringen Geschwindigkeitsdifferenz ist die Wirbelstärkemagnitude gegenüber C3 reduziert. Bemerkenswert ist aber, dass die äußere Scherschicht früher instabil wird und sich eine Art Kelvin-Helmholtz-Instabilität zeigt. Es bildet sich eine Wirbelstraße aus, in der es aber nicht zu einer Paarung von Wirbeln kommt. Die inneren Mischungsschichten der beiden Fälle verhalten sich dagegen annähernd ähnlich. Der Fall Ref δ 8-C3 ist in Abbildung 5.7 (c) gezeigt. Die untere äußere Scherschicht wird stromab instabil und auf Höhe der Kernspitze erfolgt die erste Wirbelpaarung. Die Scherschicht des Bypassstrahls wird unterhalb des Flügels beschleunigt und bleibt in der Folge länger stabil. Die erste Wirbelpaarung findet unterhalb der Klappe statt. Dies kann auf die reduzierte Geschwindigkeitsdifferenz und damit geringere effektive Reynoldszahl zurückgeführt werden. Die inneren Scherschichten werden unmittelbar am Auslass der Primärdüse instabil und beginnen mit der Grenzschicht des Düsenkerns zu interagieren. Durch den Freistrahls kommt es zu einem Impulseintrag in die Strömung unterhalb des Flügels, die Geschwindigkeit steigt und der Druck sinkt lokal. Daraus resultiert ein positiver Druckgradient unterhalb des Flügels und die Grenzschicht beginnt bei etwa $c/3$ aufzurollen. Im Fall von Ref δ 8-C3-50, zu sehen in Abbildung 5.7 (d), wird die Grenzschicht auf der Flügelunterseite nicht ausreichend gestört und bleibt daher laminar. Auch bleibt die obere Düsenscherschicht bedeutend länger stabil und bricht erst unmittelbar vor der Klappenhinterkante auf.

In Abbildung 5.7 (e) und (f) sind die Fälle C3 und C3-50 für Konfiguration P1 δ 22 zu sehen. Unterschiede zu den jeweiligen Fällen der Ref δ 8-Konfiguration sind vorwiegend auf der Flügelunterseite und im Bereich der Klappe auszumachen. Die obere Scherschicht der Sekundärdüse interagiert unmittelbar mit der Grenzschicht auf der Flügelunterseite. Wirbel lösen sich von der unteren Hinterkante des Flügels, durchqueren die Spaltzone und treffen auf die Unterseite der Klappe. Hierin könnte eine weitere akustische Quelle begründet sein: Waren es im Fall ohne Düse nur die abrollenden Wirbel auf der Klappenoberseite, welche mit der Hinterkante interagierten (siehe Abbildung 4.14), sind es jetzt auch die auftreffenden Wirbel aus der Mischungsschicht der Sekundärdüse. Besonders für den Fall P1 δ 22-C3 werden daher eine starke JFI und Resonanzphänomene erwartet.

Die Wirbelstärkeamplituden der 3-D Simulationen, Abbildung 5.8, sind wie erwartet geringer. Auch kommt es weniger zu einer Aggregation der Strukturen als im zweidimensionalen Fall. Da die Grenzschichten in der Düse turbulent und nicht wie im 2-D Fall laminar sind, sind die klassischen KH-Instabilitäten im frühen Stadium einer Mischungsschicht hier nicht zu beobachten.

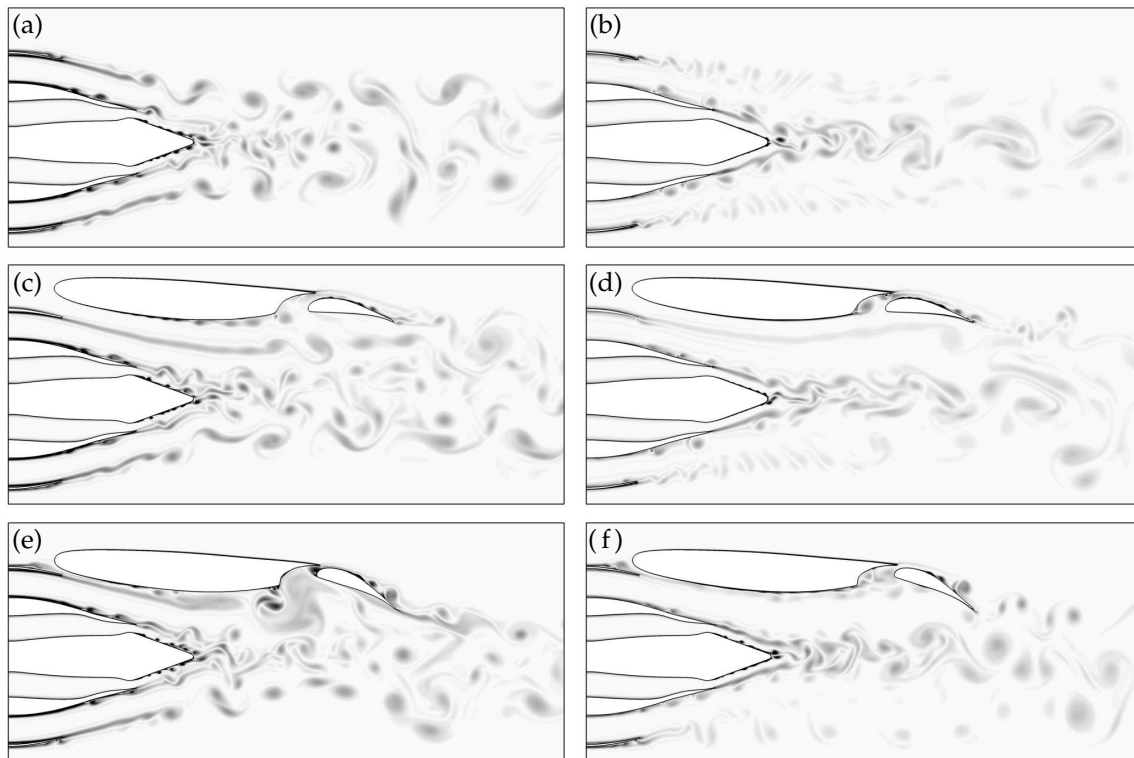


Abb. 5.7: Wirbelstärkemagnitude $|\omega_z|$ für die 2D-Fälle: (a) Düse-C3; (b) Düse-C3-50; (c) Ref δ 8-C3; (d) Ref δ 8-C3-50; (e) P1 δ 22-C3 und (f) P1 δ 22-C3-50. Farbskala von 0 (weiß) bis $60U_{ref}/D_s$ (schwarz).

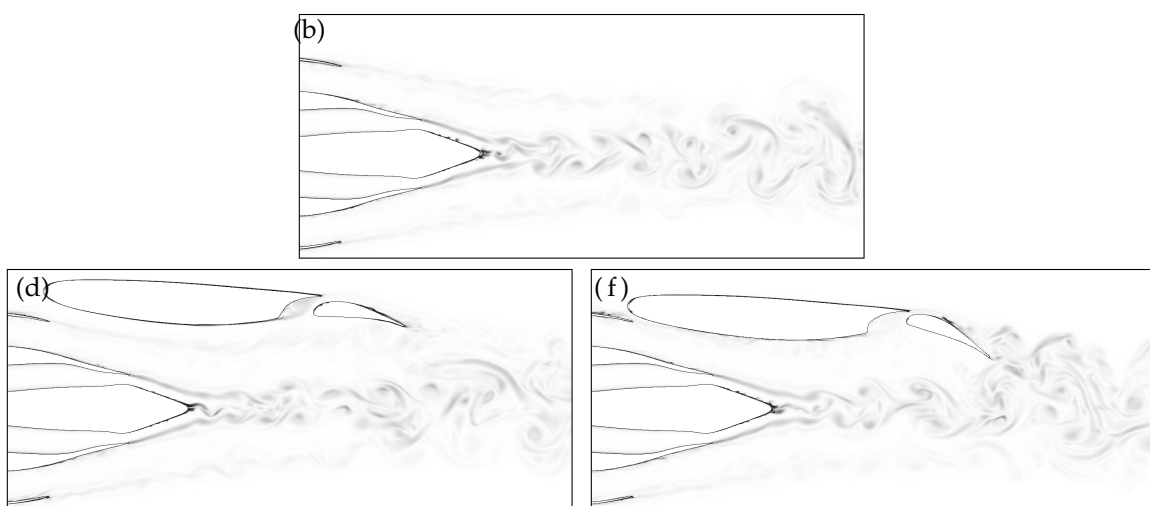


Abb. 5.8: Wirbelstärkenorm $\|\omega\|$ für die 3D-Fälle: (b) Düse-C3-50; (d) Ref δ 8-C3-50 und (f) P1 δ 22-C3-50. Kennzeichnung und Farbskala wie bei Abbildung 5.7.

5.3.2 Mittleres Strömungsfeld

Einen ersten Einblick in die mittlere Strömung der simulierten Konfigurationen liefern die Abbildungen 5.9 und 5.10 für die zwei- beziehungsweise dreidimensionalen Konfigurationen. Wie schon beim isolierten Tragflügel, sind auch hier keine deutlichen Unterschiede zwischen dem mittleren Geschwindigkeitsfeld der 2-D und 3-D Simulationen (planare Düse) zu erkennen. Für eine runde Düse gilt dies natürlich nicht.

Abbildung 5.11 zeigt die C_p -Verteilung auf der Flügeloberfläche und das mittlere Druckfeld mit den Stromlinien des mittleren Geschwindigkeitsfeldes für den Fall C3 und C3-50 der Konfiguration Ref δ 8. Für den Fall C3 mit Düse, Abbildung 5.11 (c), ändert sich die Druckverteilung gegenüber der reinen Flügelumströmung, Abbildung 4.13 (a), signifikant. Der Strahl der Sekundärdüse beschleunigt die Strömung auf der Unterseite des Flügels, sodass sich ein Unterdruckgebiet einstellt, zu sehen an den positiven Werten für $-C_p$ im Bereich $0 \leq x/D_s \leq 1$. Zudem verschiebt sich der Staupunkt leicht von der Vorderkante der Klappe auf deren Unterseite, siehe Stromlinien in Abbildung 5.11 (c). Dies führt zu einer stärkeren Umlenkung der Hauptströmung in der Spaltzone. Infolge des veränderten Strömungsverlaufes kommt es zu einem verringerten Impulseintrag auf der Klappenoberseite, der Druck auf der Oberseite steigt, siehe C_p -Verteilung in Abbildung 5.11 (c).

Wird die Strömung der Sekundärdüse auf $U_s = 50$ m/s verringert (Fall C3-50), reduziert sich auch der oben beschriebene Effekt, zu sehen in Abbildung 5.11 (d), und der Druck unterhalb des Flügels nimmt wieder zu.

In Abbildung 5.12 sind die gleichen Größen für Konfiguration P1 δ 22 dargestellt. Für den Fall C3-50 stellt sich das erwartete Verhalten ein: Durch den vergrößerten Anstellwinkel der Klappe, fällt der Druck auf deren Oberseite im Vergleich zur δ 8-Konfiguration weiter ab und das Unterdruckgebiet auf der Saugseite der Konfiguration wird insgesamt größer. Die Effekte auf der Druckseite sind nicht besonders signifikant. Dies gilt jedoch nicht für den Fall C3, zu sehen in Abbildung 5.12 (e). Das mittlere Strömungsfeld zeigt ein deutlich größeres Rezirkulationsgebiet in der Spaltregion, der Druck auf den Flügel in diesem Bereich steigt, und zusätzlich eines im unteren hinteren Teil des Flügels. Der Staupunkt wandert bis zur Mitte der Klappe und der Druck auf deren Unterseite nimmt stark zu. Für beide Fälle mit $\delta = 22^\circ$ gilt, dass die Strömung auf der Klappensaugseite ablöst und der Düsenstrahl nach unten abgelenkt wird. Das Ablösen der Strömung ist jedoch nicht auf die Anwesenheit des Düsenstrahls zurückzuführen, wie Abbildung 4.13 (b) zeigt, ist es auch bei der reinen Flügelumströmung der Fall.

Die Betrachtung der mittleren Strömung, verstärkt die Vermutung aus Abbildung 5.7, dass es sich bei dem Fall P1 δ 22-C3 um die am intensivsten akustisch abstrahlende Konfiguration handelt.

5.4 Akustisches Feld

Für eine erste Beurteilung der Abstrahlcharakteristik, ist in Abbildung 5.13 das akustische Nah- und Fernfeld der Ref δ 8-C3 Konfiguration, erhalten aus der LES-Lösung mithilfe der linearisierten Euler-Gleichungen, visualisiert. Die am Auslass der Primärdüse generierten Schallwellen werden an der Flügelunterseite reflektiert und erhöhen die Lärmbelastung im Gebiet unter der Düse. Der Düsenlärm wird in einem großen Bereich oberhalb des Tragflügels durch diesen abgeschirmt. Dieser Bereich ist vorwiegend von Spalllärm kontaminiert. Diese Darstellung zeigt auch, dass es für die Beurteilung der eingangs postulierten Hypothesen genügt, sich auf die Betrachtung der Akustik im LES-Gebiet zu konzentrieren. Dies soll im Folgenden geschehen.

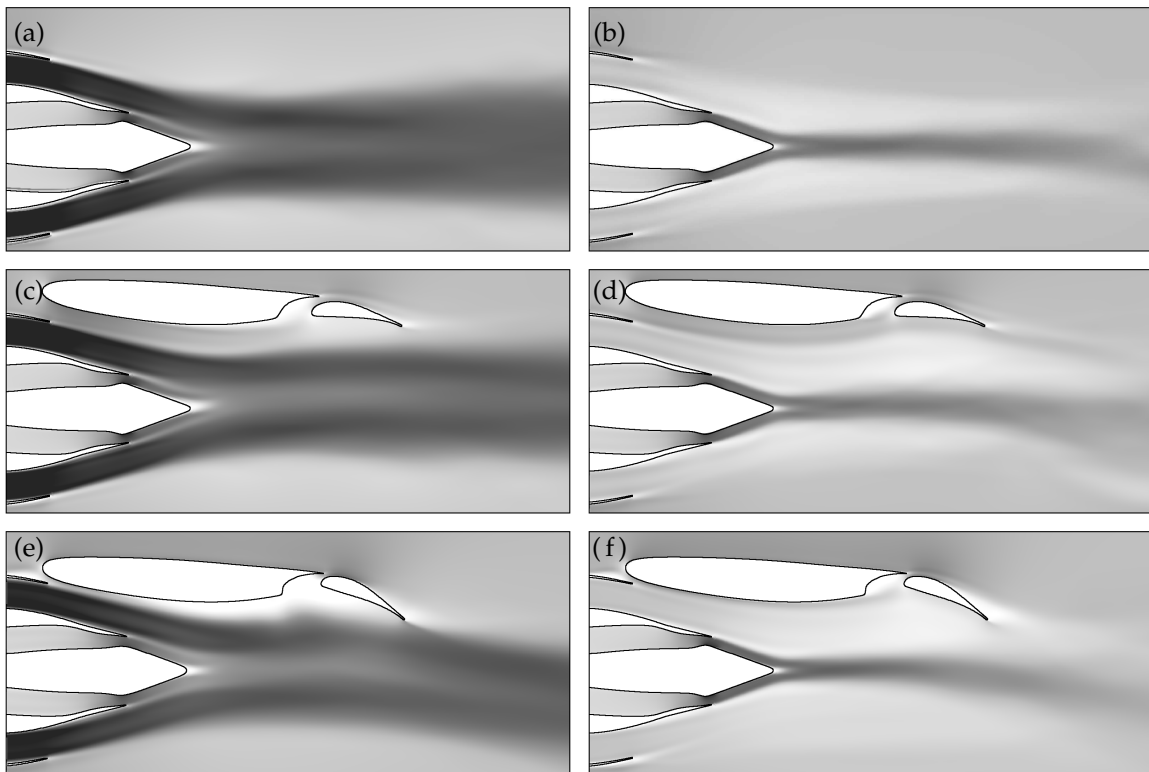


Abb. 5.9: Mittlere Longitudinalgeschwindigkeit \bar{u} : (a) Düse-C3; (b) Düse-C3-50; (c) Ref δ 8-C3; (d) Ref δ 8-C3-50; (e) P1 δ 22-C3 und (f) P1 δ 22-C3-50. Die Farbskala für \bar{u} reicht von 0 (weiß) bis U_{ref} (schwarz).

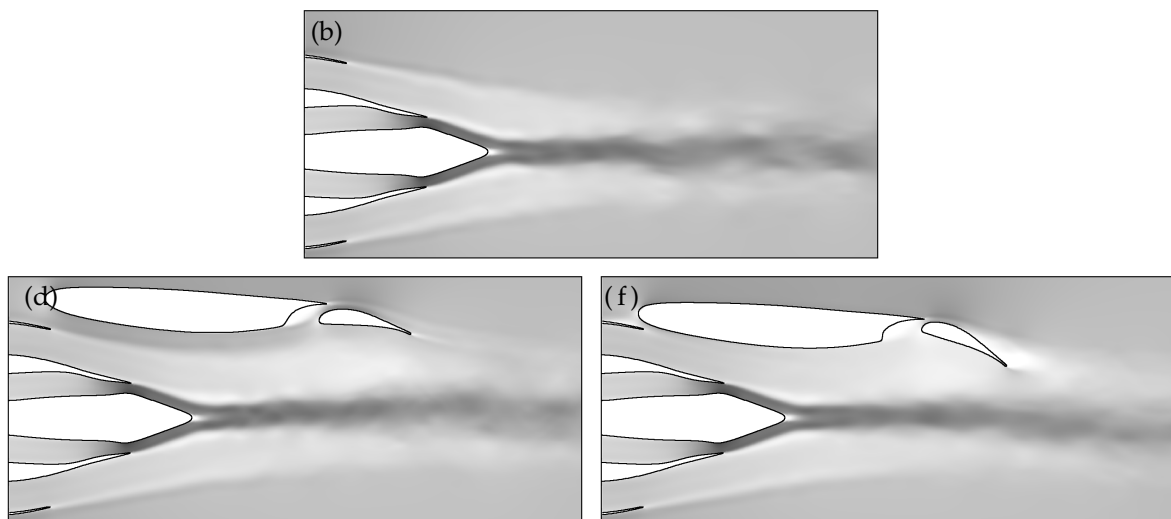


Abb. 5.10: Mittlere Longitudinalgeschwindigkeit \bar{u} der 3D-Fälle: (b) Düse-C3-50; (d) Ref δ 8-C3-50 und (f) P1 δ 22-C3-50. Kennzeichnung und Farbskala wie bei Abbildung 5.9.

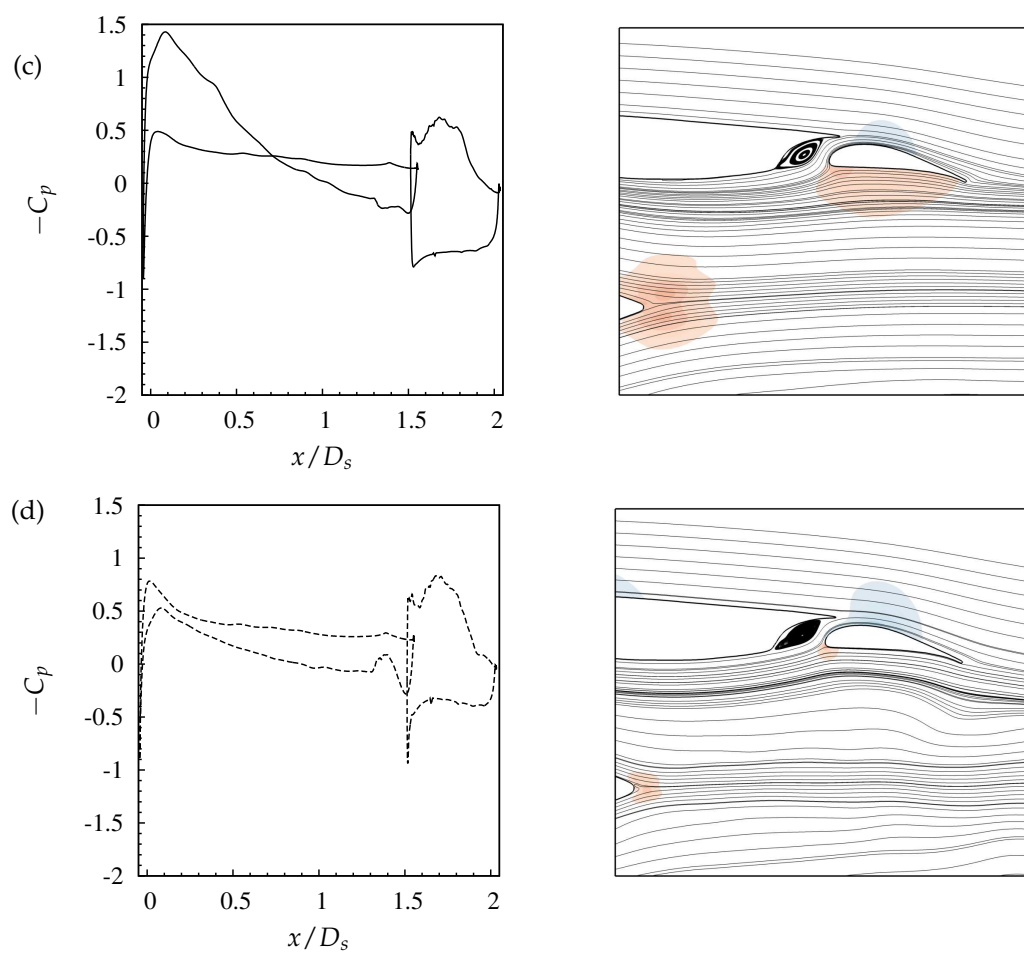


Abb. 5.11: Ref δ 8: Druckkoeffizient, C_p , entlang der Flügeloberfläche und mittleres Druckfeld, \bar{p} , mit Stromlinien des mittleren Geschwindigkeitsfeldes (\bar{u} , \bar{v}) für die Fälle (c) C3 und (d) C3-50. Die Farbco-dierung ist identisch mit der von Abbildung 4.13.

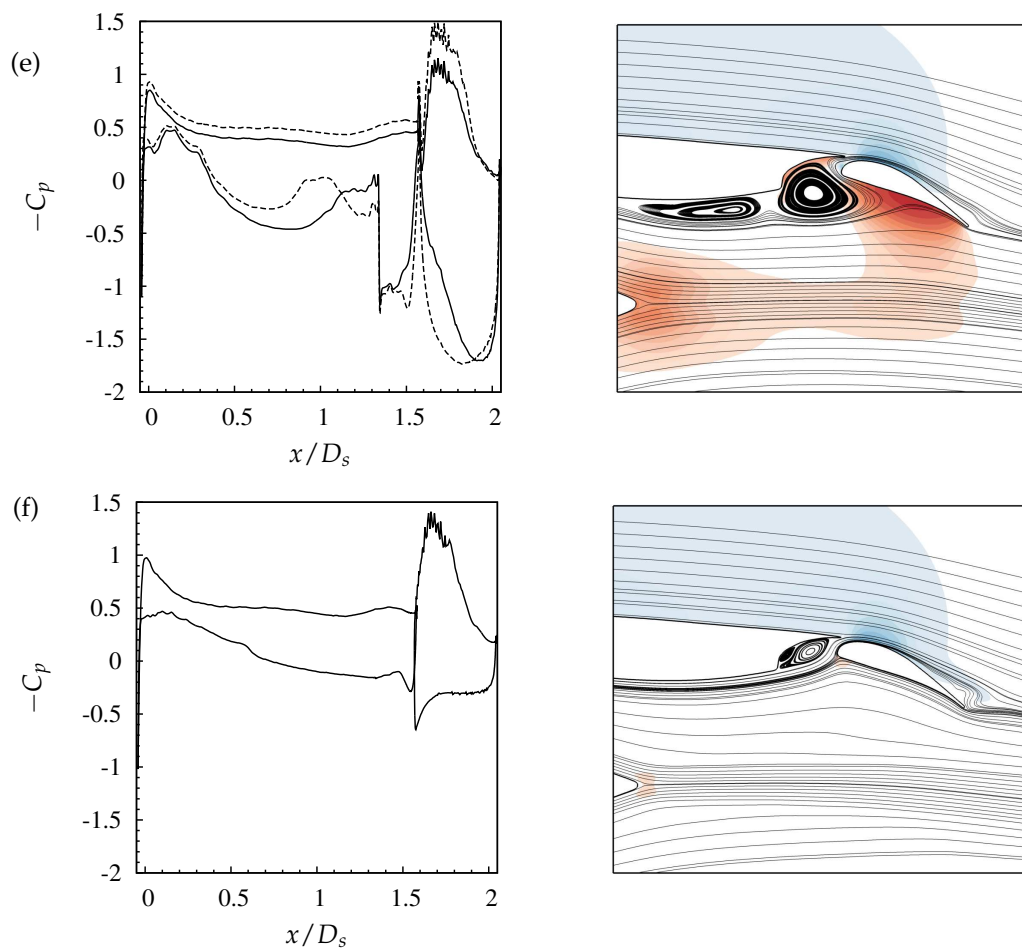


Abb. 5.12: P1 δ 22: Druckkoeffizient, C_p , entlang der Flügeloberfläche und mittleres Druckfeld, \bar{p} , mit Stromlinien des mittleren Geschwindigkeitsfeldes (\bar{u} , \bar{v}) für die Fälle (e) C3 und (f) C3-50: —, standard Domain; - - -, erweiterte Domain. Die Farbcodierung ist identisch mit Abbildung 4.13.

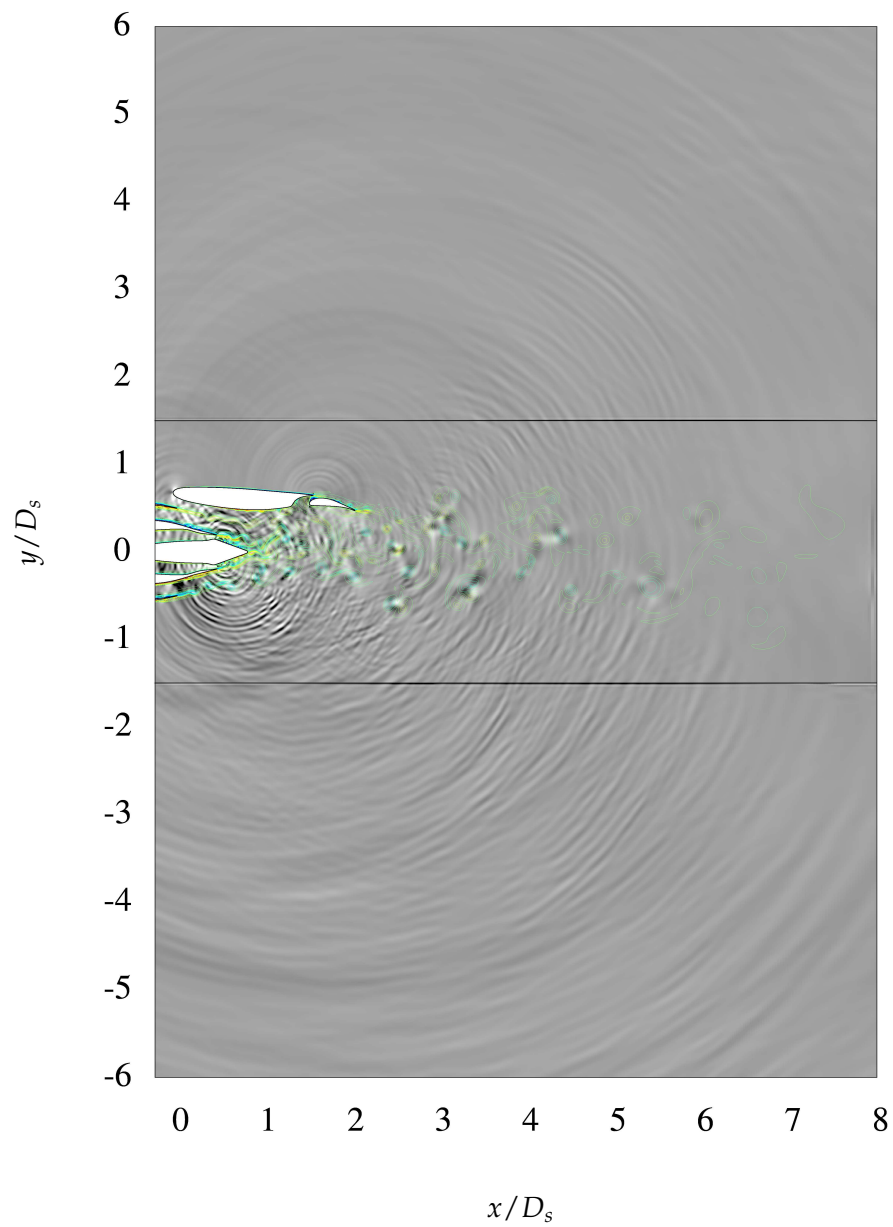


Abb. 5.13: 2-D Ref δ 8-C3: Divergenzfeld mit kontinuierlicher Farbskala zwischen $\pm 0.1 U_{\text{ref}}/D_s$ im LES-Gebiet und LEE-Gebiet. Konturebenen der Wirbelstärke sind gezeigt zwischen $\omega_z = -87 U_{\text{ref}}/D_s$ (blau) und $\omega_z = 87 U_{\text{ref}}/D_s$ (rot), Inkremente: $4 U_{\text{ref}}/D_s$. Die zwei horizontalen Linien kennzeichnen die Interfaces bei $y = \pm 1.5 D_s$.

5.4.1 Instantanes Divergenzfeld

In Abbildung 5.14 ist eine Momentaufnahme der Dilatation und Wirbelstärke der 2-D Fälle zu sehen. Vergleichen wir zunächst die beiden isolierten Düsen: In Fall C3 (a) sind starke Fluktuationen des dynamischen Drucks in den Mischungsschichten der Sekundärdüse zu erkennen. Diese interagieren mit der Kante der Primärdüse und der Grenzschicht am Ende des Düsenkerns. Bei Fall C3-50 (b) sind die dynamischen Fluktuationen in der Grenzschicht deutlich geringer, dennoch wird die äußere Scherschicht unmittelbar nach dem Auslass instabil und rollt auf. Das akustische Feld wird von einer Schallquelle am Ende des Düsenkerns dominiert, überlagert von einer gerichteten schwachen Abstrahlung aus der Sekundärdüse.

Bei den Fällen mit Flügel ist zu erkennen, dass der Flügel das Feld oberhalb der Düse akustisch abschirmt. Dieser Bereich ist vorwiegend von Spalltlärm kontaminiert, Freistrahllärm wird von Flügel und Klappe reflektiert und erhöht den Schallpegel unterhalb der Düse. Bemerkenswert ist, dass der Spalltlärm deutlicher wahrzunehmen ist, als es bei den Fällen mit isoliertem Tragflügel der Fall war (siehe Abbildungen 4.14 u.4.15).

Bei Konfiguration P1 δ 22-C3 (e) sind deutliche starke Fluktuationen des dynamischen Drucks unterhalb des Flügels und der Klappe zu erkennen. Diese sind in fast allen Momentaufnahmen dieser Konfiguration zu sehen und konnten so in keiner anderen untersuchten Konfiguration nachgewiesen werden. Diese Tatsache stellt einen ersten deutlichen Hinweis auf das Vorhandensein einer Rückkopplung zwischen aerodynamischen Druckfluktuationen und der Klappe dar: An der Hinterkante generierte Druckwellen laufen stromauf und regen dort die Grenzschicht der Flügelunterseite und die Scherschicht der Sekundärdüse an. Die Grenzschicht bildet TS-Wellen die Scherschicht KH-Wellen. Die Wellen verschmelzen zu großen Wirbeln (siehe Abbildung 5.7 (e)), die auf die Klappenkante treffen und Schall erzeugen. Die Schallwellen laufen im Spalt stromauf und der Vorgang beginnt von neuem. In der Bilderfolge in Abbildung 5.15 ist ein solcher Ablauf visualisiert: Die Bildfolge illustriert die Interaktion von Wirbeln mit der Klappenhinterkante. Dabei kommt es zur Abstrahlung eines ganzen Wellenpaketes gleicher Wellenlänge gefolgt von einer Zone relativer Stille. Ob es sich um Wirbel der Mischungsschicht handelt oder um abrollende Wirbel von der Klappenoberseite (TS/ ω - p' -Prozess) wird aus diesen Schnappschüssen nicht klar. Wie Abbildung 4.14 zeigt, treten auch in Abwesenheit des Düsenstrahls aber gleicher Klappenkonfiguration ähnliche Wellenpakete auf. Ist dieser Vorgang alternierend, sollte er sich in einer erhöhten gemittelten Norm des Lighthill-Quellterms auf der Ober- und Unterseite der Klappe widerspiegeln.

5.4.2 Lighthill Quellen

In Abbildung 5.16 ist eine Momentaufnahme des nicht-linearen Anteils des Lighthill-Quellterms, S^n , über der zeitlich gemittelten Norm des totalen Lighthill-Quellterms, $|\overline{S}|$, dargestellt: In allen Fällen scheint die Zone an der Spitze des Düsenkerns, wo die beiden Primärstrahlen aufeinandertreffen, und die Oberseite der Klappe eine Zone dominanter Schallquellen zu sein. Bei den Konfigurationen mit hoher Bypassgeschwindigkeit, (c) und (e), sind Gebiete erhöhter Quellaktivität auch unterhalb des Hauptflügel zu erkennen. Der vergrößerte Ausschnitt in Abbildung 5.17 und Vergleich mit dem isolierten Tragflügel zeigt: Im Falle mit Freistrahler streckt sich die Zone starker Quellaktivität von der Saugseite über die Hinterkante bis auf die Unterseite der Klappe und ist dort im Vergleich zum isolierten Flügel deutlich erhöht. Auch, und das ist besonders interessant, sind die Werte von $|\overline{S}|$ im hinteren Teil des Hauptflügels verglichen mit dem Fall ohne Düsenstrahl signifikant erhöht.

Mit diesen Ergebnissen, wird folgende Beschreibung der physikalischen Vorgänge der JFI vorgeschlagen:

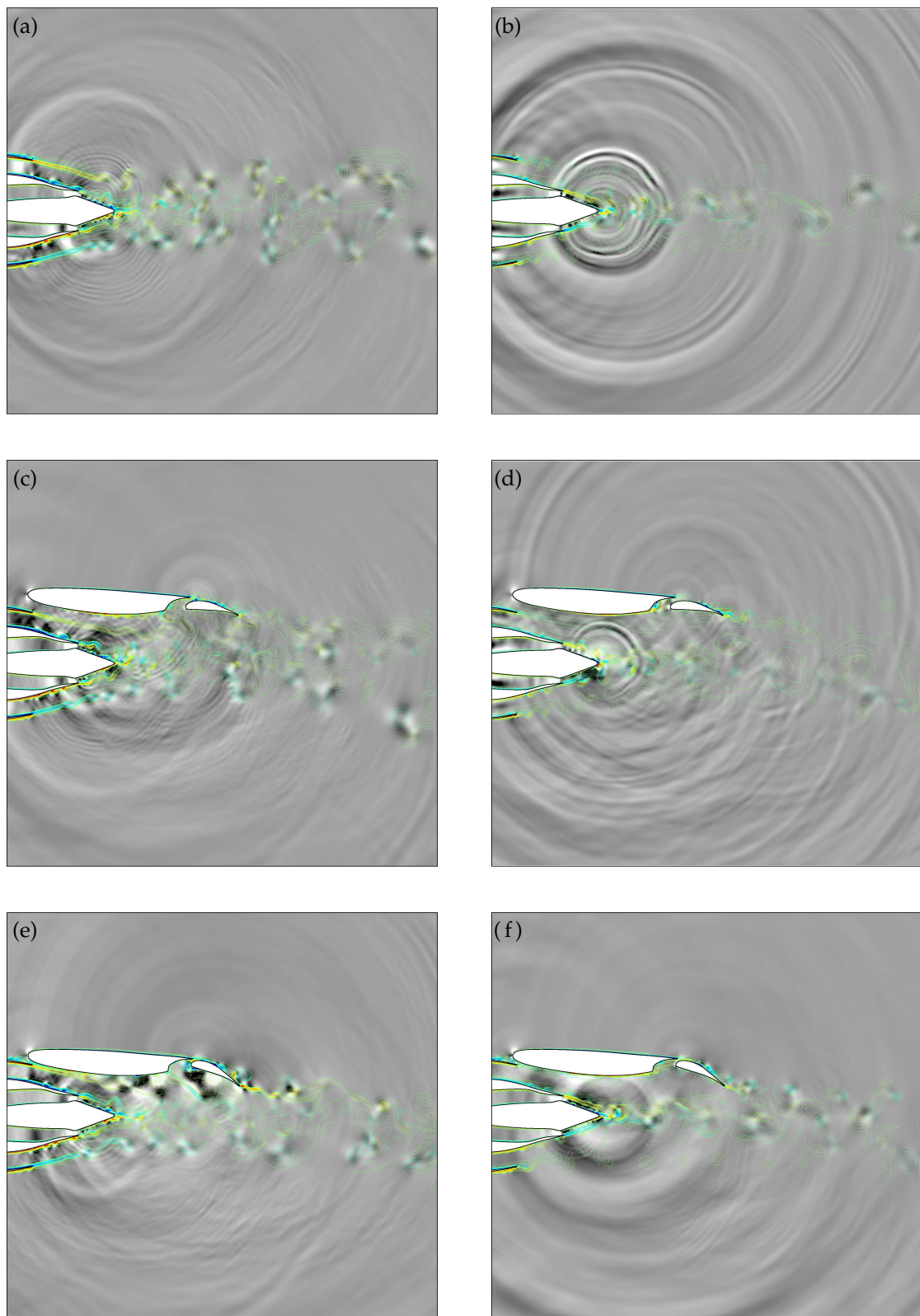


Abb. 5.14: 2-D Divergenzfeld und Konturebenen der Wirbelstärke: (a) Düse-C3; (b) Düse-C3-50; (c) Ref δ 8-C3; (d) Ref δ 8-C3-50; (e) P1 δ 22-C3 und (f) P1 δ 22-C3-50. Farbskalen wie in Abbildung 4.14.

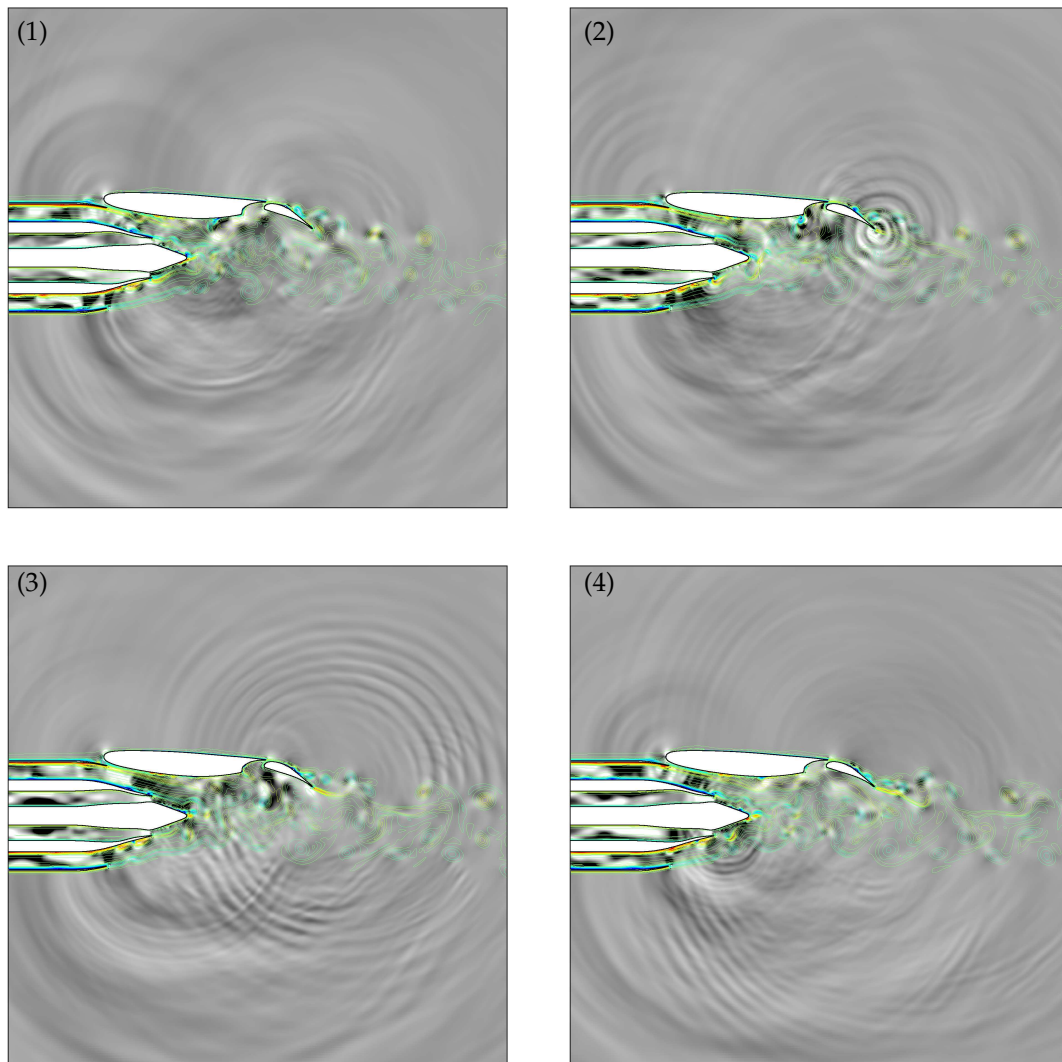


Abb. 5.15: 2-D Divergenzfeld von P1 δ 22-C3 in zeitliche Abfolge von (1)-(4) mit einem Zeitabstand von $T = 0.5D_s/U_s$. Die Strömung der Sekundärdüse legt in dieser Zeit eine Strecke von $s = U_s T = 0.5D_s$ zurück. Farbskalen wie in Abbildung 4.14.

Im hinteren Teil der Klappenoberseite ist die Grenzschicht im 2-D Fall zu Wirbeln aufgerollt und im 3-D Fall turbulent. In beiden Fällen interagieren Wirbel mit der Hinterkante. Im 2-D Fall ist die Grenzschicht nicht turbulent und es kommt zu einer Interaktion der diskreten Wirbelstrukturen mit der Hinterkante. Als Folge wird Schall mit korrespondierender Wellenlänge abgestrahlt, hier ω - p' -Prozess genannt. Im 3-D Fall ist das Wirbelspektrum breitbandig und das entstehende Schallfeld weist den typischen breitbandigen TE-Lärm auf. Diese Mechanismen wurden auch bei der reinen Tragflügelumströmung beobachtet und sind gut erforscht (siehe Einleitung). Durch die Montage der Düse kommen nun drei weitere Mechanismen dazu:

(i) Der Bypassstrahl regt die Grenzschicht auf der Flügelunterseite an, wodurch Tollmenschlichting Wellen entstehen, welche stromab anwachsen. Ist die Düse dicht am Flügel montiert, interagieren die TS-Wellen mit KH-Wellen der Bypass-Mischungsschicht. Im 2-D Fall kommt es zu einem Verschmelzen der Wellen, es entstehen große kohärente Wirbel, die bei ausgefahrener Klappe mit deren Unterseite und Hinterkante interagieren. Ein Vorgang beginnt, bei dem Wirbel aus der Mischungsschicht und Wirbel aus der Klappengrenzschicht alternierend mit der Klappenhinterkante interagieren. Beide Vorgänge werden als ω - p' -Prozess eingestuft und manifestierten sich in einer erhöhten gemittelten Norm des Lighthill-Quellterms auf der Ober- und Unterseite der Klappe. Kommt es zu keinem Verschmelzen der Wirbel, interagiert die Mischungsschicht in Form eines KH- p' -Prozess mit der Klappe. Die Beaufschlagung der Klappe mit der Turbulenz aus Klappengrenzschicht und Mischungsschicht ist bei der Konfiguration P1 δ 22-C3 am stärksten.

(ii) Darüber hinaus kann es aufgrund der instabilen Grenzschicht auf der Flügelunterseite zu einer Interaktion von TS-Wellen mit der unteren Hinterkante des Hauptflügels kommen. Dieser TS- p' -Prozess nimmt, hinsichtlich der Schalleffizienz, relativ zu (i) eine untergeordnete Rolle ein, manifestiert sich aber deutlich in einem erhöhten $|\bar{S}|$ -Wert im hinteren Teil der Flügelunterseite.

(iii) Die Reflexion von Freistrahllärm an Flügel und Klappe ist ein wesentlicher Einflussfaktor für die Lärmbelastung unterhalb des Strahls wenn die Klappenwinkel moderat und der Abstand zwischen Strahl und Flügel nicht zu klein ist. Dieser Effekt, ist besonders deutlich bei der 3-D Simulation der Ref δ 8-Konfiguration, in Abbildung 5.18 zu beobachten. Warum weniger bei der P1 δ 22-Konfiguration? Ein möglicher Grund könnte sein, dass die akustischen Wellen aus dem Primärstrahl im Falle der P1-Konfiguration zu wenig Raum zur Entfaltung haben, bevor sie auf die Schallharte Flügeloberfläche treffen. Weiter fällt auf, dass der nach unten reflektierte Schall eine dominante Wellenlänge von $\lambda = 0.6D_s$ aufweist. Dies entspricht einer Frequenz von $f = a_\infty / \lambda = 4.45U_{\text{ref}} / D_s \approx 3.6\text{kHz}$.

In Abbildung 5.19 ist der totale Lighthill-Quellterm S_θ , Gleichung (3.41), für die drei 3-D Simulationen, jeweils für die vier Abstrahlrichtungen $-\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ und 120° visualisiert. Analog zum runden Freistrahls aus Kapitel 3.2.4, befinden sich die stärksten totalen Quellen im Strahlzentrum und nehmen mit dem Winkel leicht ab.

Der lineare Anteil, S^l , ist in der Bilderserie 5.20 dargestellt. Auch hier zeigt sich die gleiche deutliche Vorzugsrichtung von S^l entlang der Strömungsachse. Radial dazu ($\theta = -90^\circ$) ist S^l minimal. Für diesen Anteil ist ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden JFI-Konfigurationen auszumachen: Infolge des, bei P1 δ 22 enger an der Düse anliegenden Flügels, interagiert die Düsengrenzschicht mit der Flügelvorderkante und S^l ist in diesem Bereich deutlich erhöht.

Für den nichtlinearen Anteil, S^n , (Bilderserie 5.21) zeigt sich, wie erwartet, keine bevorzugte Abstrahlungsrichtung. Bei P1 δ 2 ist die Quellaktivität oberhalb der Klappe und in der Grenzschicht der Flügelunterseite gegenüber Ref δ 8 erhöht.

Aus der Betrachtung dieser Bilderserien wird vermutet, dass Konfiguration P1 δ 2 zwar stärker-

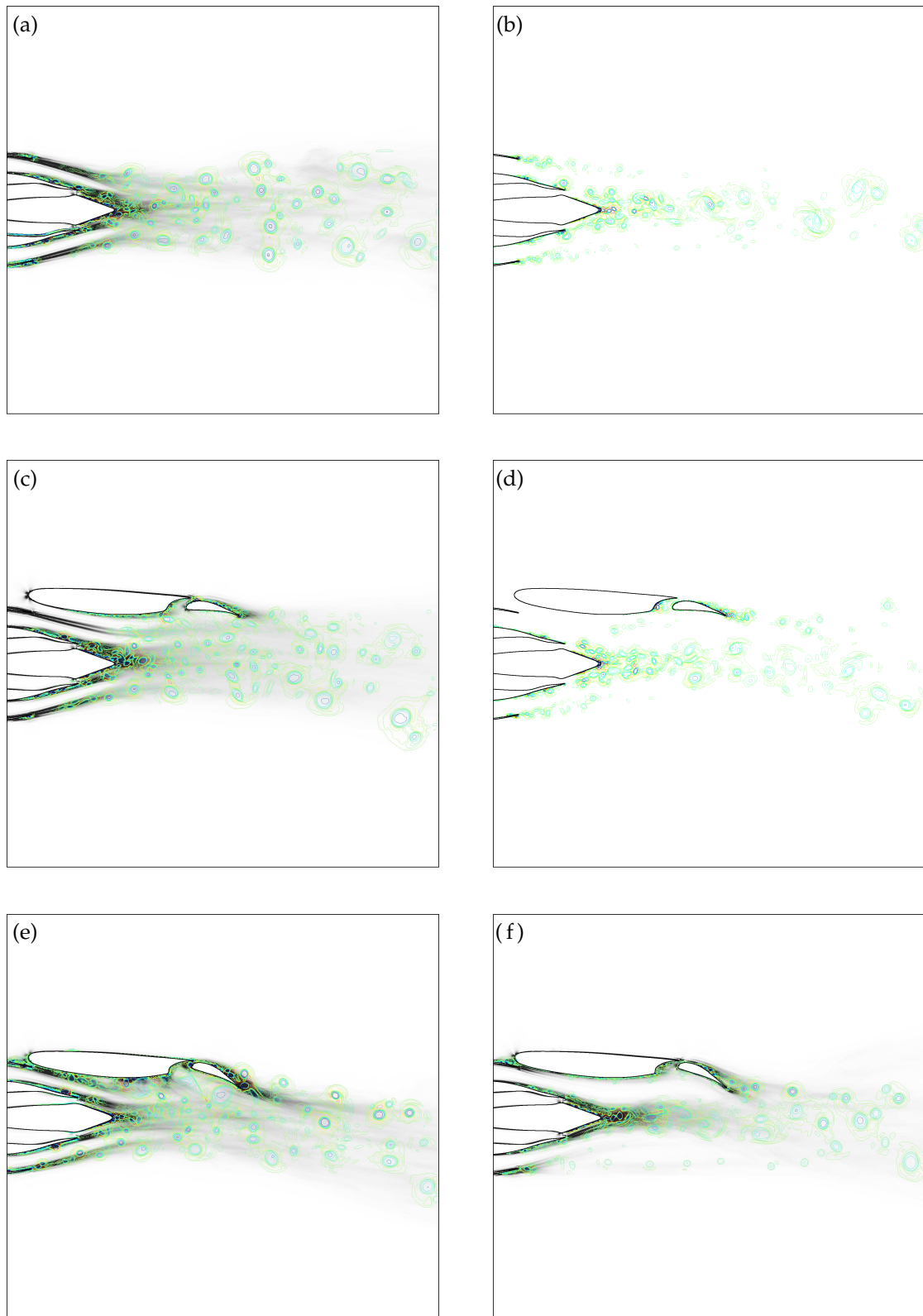


Abb. 5.16: 2-D $\overline{|S|}$ und instantane Visualisierung von S^n : (a) Düse-C3; (b) Düse-C3-50; (c) Ref δ -C3; (d) Ref δ -C3-50; (e) P1 δ 22-C3 und (f) P1 δ 22-C3-50. Die Farbskala für $\overline{|S|}$ reicht von 0 (weiß) bis $400\rho_s U_{\text{ref}}^2/D_s^2$ (schwarz) und $S^n = \pm 160\rho_s U_{\text{ref}}^2/D_s^2$. Bei (e) und (f) wurde $\overline{|S|}$ nicht berechnet.

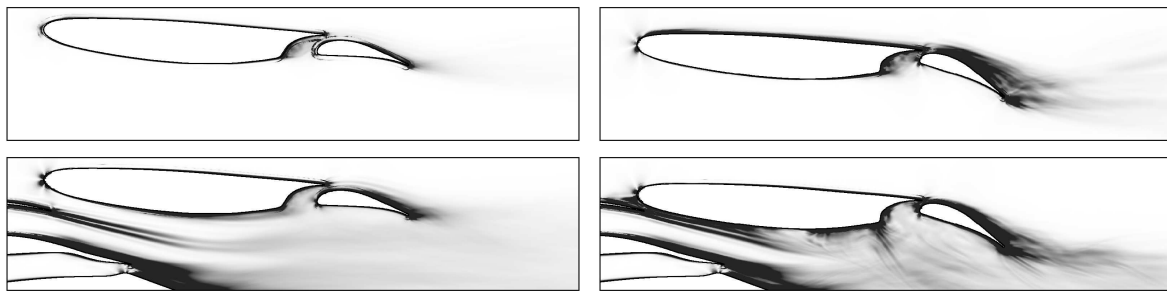


Abb. 5.17: $|\overline{S}|$ für den isolierten 2D Flügel mit $M_\infty = 0.175$ und die Gesamtkonfiguration (C3).

ren Vorderkantenlärm verursacht aber nicht unbedingt intensiver hinsichtlich des JFI-Lärms ist, als Konfiguration Ref δ 8. Es ist auch klar, dass bei der Visualisierung der Quellterme Reflexionen von Schallwellen an Flügel und Klappe unberücksichtigt bleiben.

5.5 Maßnahmen zur Schallreduktion

In den vergangenen Jahren wurde im Bereich der Schallreduktion intensiv geforscht. Dabei wurde sich auf die Reduktion des Hinterkantenlärms konzentriert. Inspiriert vom leisen Flug der Eule folgten unterschiedliche Ausführungen gezackter oder mit Bürsten versehener Hinterkanten [141, 142] oder Hinterkanten aus porösen Medien. Poröse Medien sind hinsichtlich der Schallabsorption sehr gut im niederfrequenten Bereich, versagen aber bei Frequenzen $f > 10$ kHz. Jaworski & Peake [143] zeigten, dass eine porös-elastische Ausgestaltung der Hinterkante verglichen mit einer rein porösen oder rein elastischen Hinterkante für hohe Frequenzen von Vorteil ist.

Mit den Erkenntnissen aus den Untersuchungen zu Reduktion von Hinterkantenlärm und den Ergebnissen dieser Arbeit, könnte ein Konzept sein, die Unterseite des Flügels und der Klappe im Bereich der Düse porös zu gestalten. Dadurch sollte die Reflexion von Schall an Flügel und Klappe abnehmen und es könnte sich ein positiver Effekt auf die Entwicklung der turbulenten Grenzschicht hin zu feinskaliger Turbulenz einstellen. Ein weiterer Ansatz könnte die Schwächung der Instabilitätswellen in der Strahlmischungsschicht adressieren und darin bestehen, die Struktur dieser Wellen zu kontrollieren. Die Manipulation der Struktur von Instabilitätswellen wurde bei isolierten Freistrahlen bereits untersucht. Diese können passiv (z.B. gezackte Düsenkante) oder aktiv (z.B. Regelung der Auslasstemperatur) sein. Der Hauptunterschied zur Steuerung des Rauschens eines Freistrahls besteht darin, dass zur Reduzierung des Wechselwirkungslärms weniger der strahlende Teil von S gesteuert werden muss, sondern die im Fall von subsonischen Freistrahlen nicht viel zum Lärm beitragenden, Energie transportierenden aerodynamischen Störungen (KH-Wellen und Wirbel im Bereich der Bypasserschicht). Dies ist höchstwahrscheinlich leichter zu erreichen, da diese Moden im Nahfeld des Strahls experimentell wesentlich einfacher zu isolieren und/oder technisch in kleinere Strukturen geringerer Energie aufzubrechen sein sollten. Daher ist das Konzept der aktiven Steuerung für die JFI vielversprechender als für isolierten Freistrahllärm.

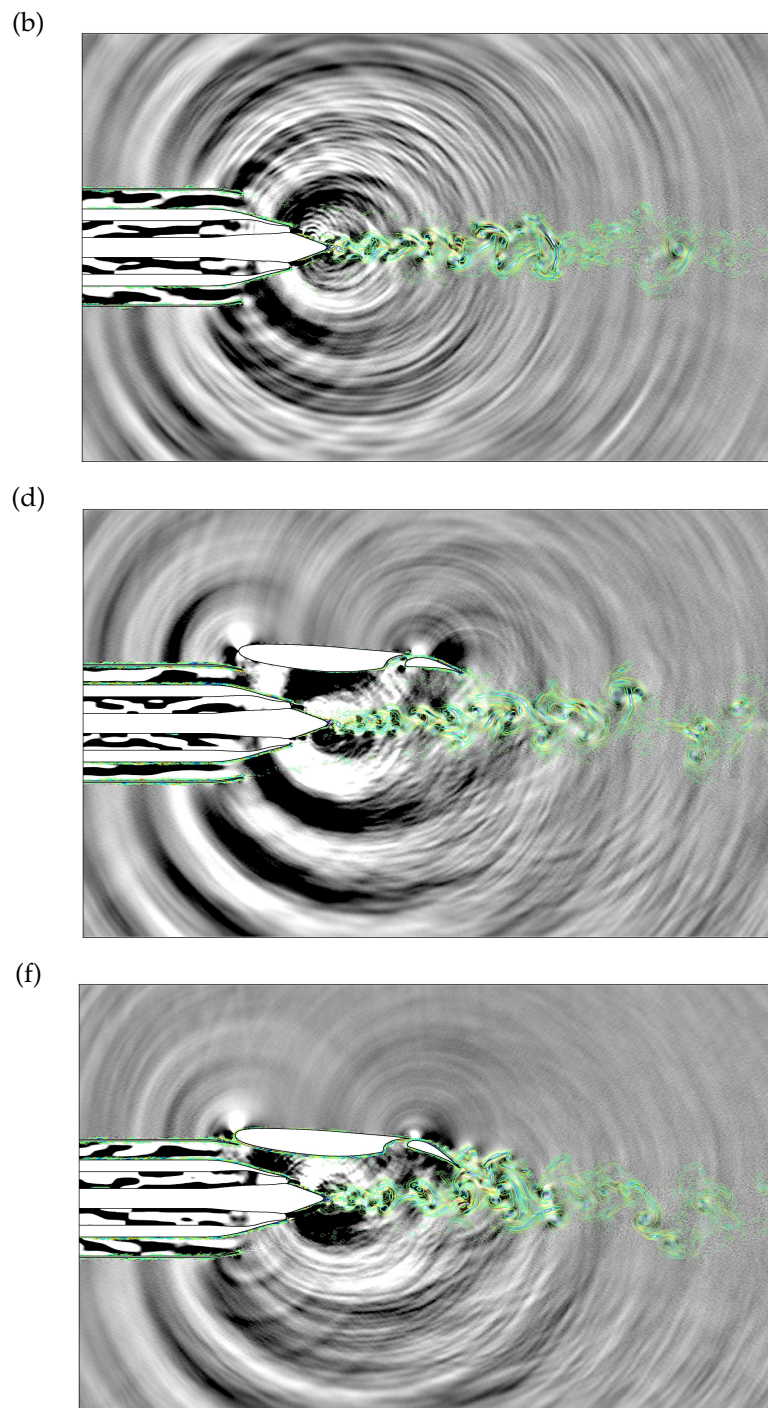


Abb. 5.18: 3-D Instantane Visualisierung der nicht-linearen Komponente des Lighthill Quellterms, $S^n = \partial^2(\rho u'_i u'_j) / \partial x_i \partial x_j$, und der Dillatation Θ für den Fall C3-50: (b) Düse, (d) Ref δ 8 JFI und (f) P1 δ 22 JFI. Farbskalen: $S^n = \pm 160 \rho_s U_{\text{ref}}^2 / D_s^2$ und $\Theta = \pm 0.01 U_{\text{ref}} / D_s$.

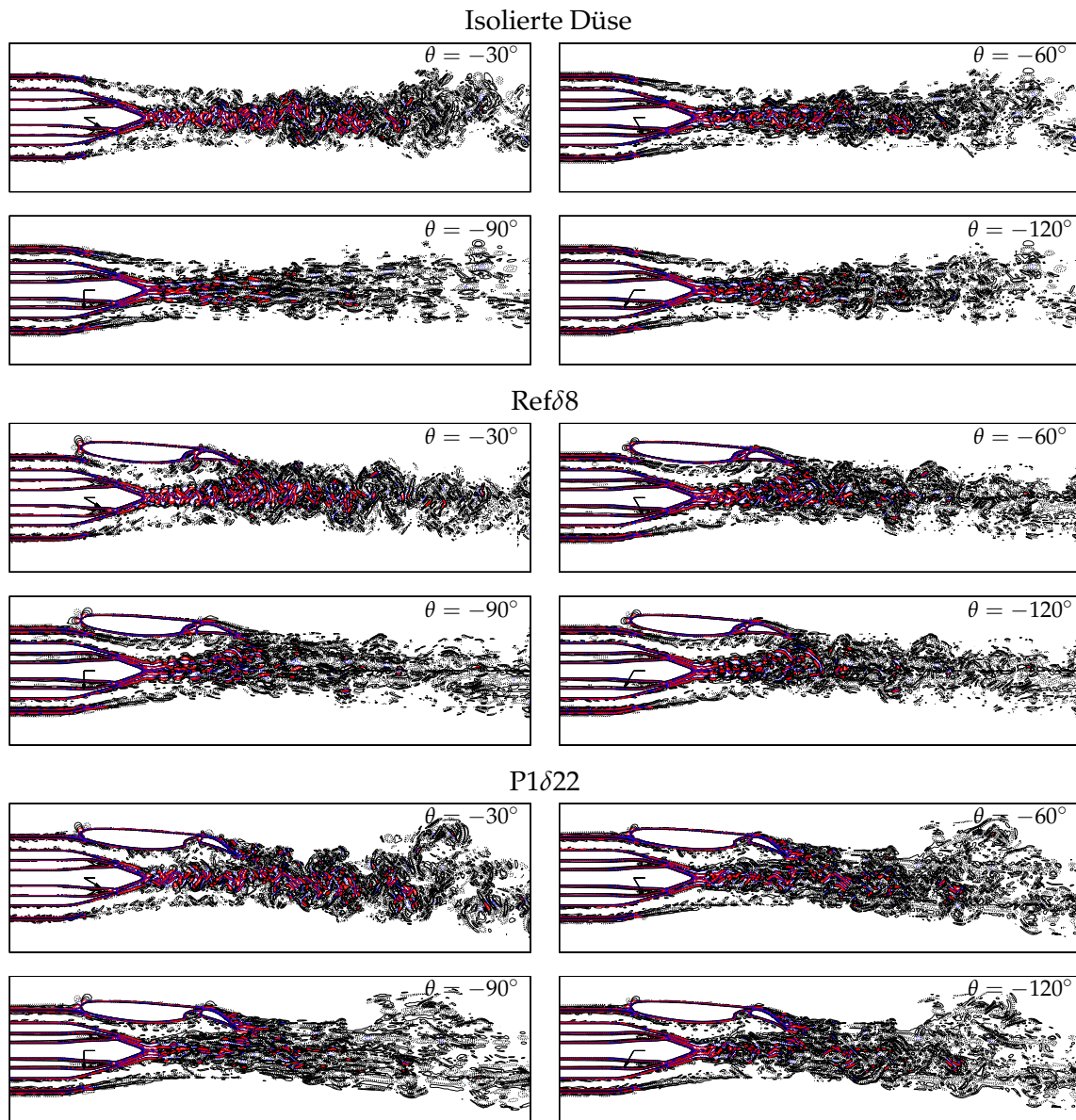


Abb. 5.19: 3-D Instantane Visualisierung der Lighthill-Quelle S_θ in der x - y -Ebene bei $z = 0$. Konturen: 8 Ebenen bei $SD_s^2 / (\rho_s U_{\text{ref}}^2) = \pm 0.5, 1.5, 3, 6$. Positive und negative Werte sind solide bzw. gestrichelt dargestellt, die maximale Ebene ist zudem rot und die minimale blau koloriert.

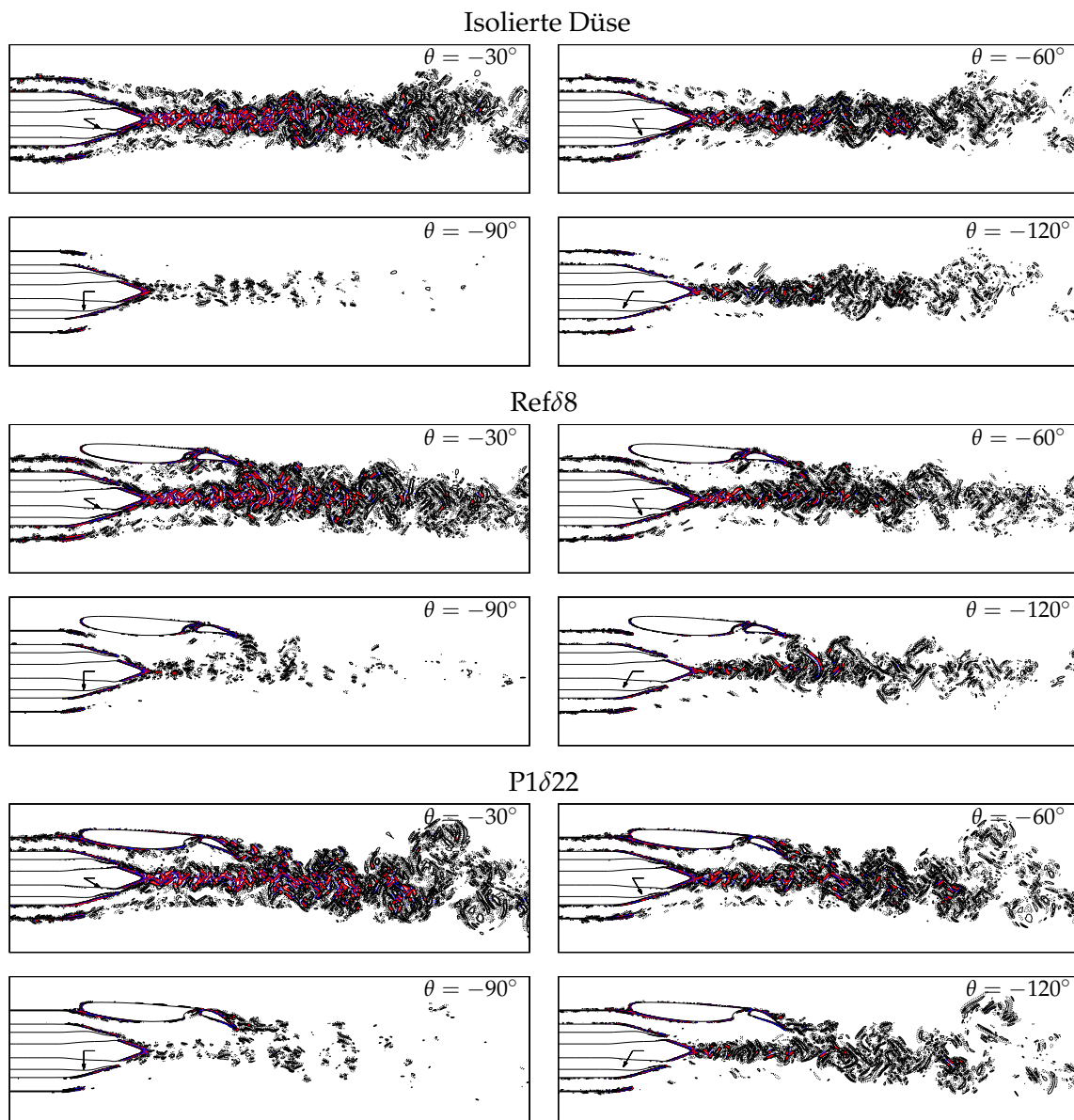


Abb. 5.20: 3-D Instantane Visualisierung von S_0^l . Die Konturen sind mit Abbildung 5.19 identisch.

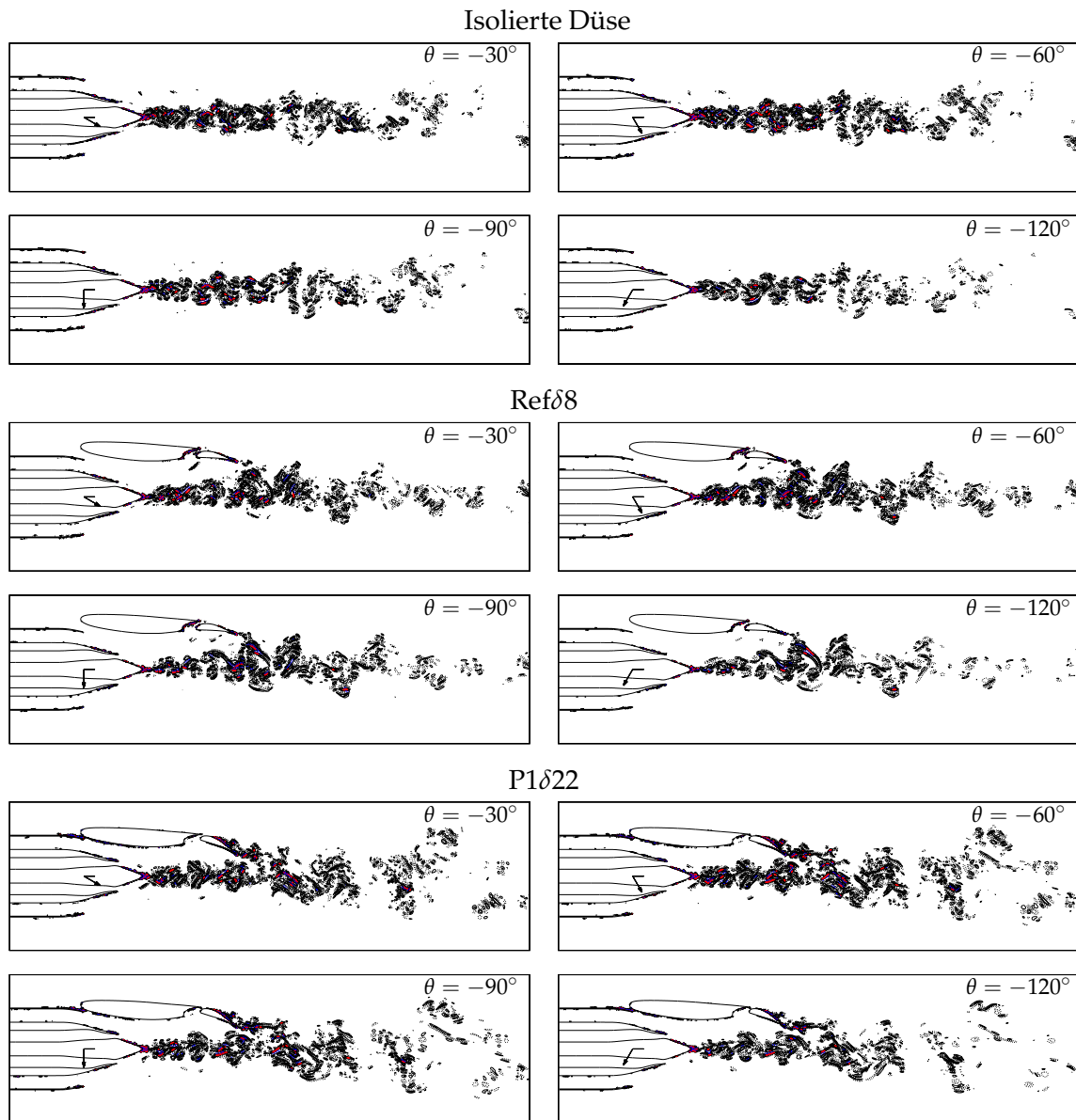


Abb. 5.21: 3-D Instantane Visualisierung von S_θ^n . Die Konturen sind mit Abbildung 5.19 identisch.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die methodische Weiterentwicklung des Open Source Pakets OVERTURE im Hinblick auf die Simulation der Strömung und des Schalls von Düse-Flügel-Klappen Konfigurationen. Dabei wurden zwei Hauptprobleme des Standard Pakets behoben: bis dato lag kein, hinsichtlich akustischer Problemstellungen hinreichend genauer, paralleler Löser für Simulationen des Nahfeldes und keine effiziente akustische Analogie zur Berechnung des akustischen Fernfeldes vor. Im Rahmen der Arbeit wurden die bestehenden Löser für kompressible Strömungen erweitert, parallelisiert und hinsichtlich Genauigkeit verbessert und ein paralleler FWH-Löser sowie ein LEE-Löser in das Paket implementiert. Darüber hinaus wurden zwei Düse-Flügel-Klappen Konfigurationen mithilfe der entwickelten Methoden untersucht. Die entwickelten Methoden (erster Teil) und wesentlichen Erkenntnisse aus den Simulationen (zweiter Teil) werden im Folgenden zusammengefasst.

Im ersten Teil der Arbeit wurden der konservative und nicht-konservative Löser des Open-Source Pakets OVERTURE methodisch erweitert und hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz optimiert.

Die parallele Effizienz des konservativen Löser konnte durch die Konsolidierung der PARTI-Bibliothek verbessert werden. Eine intensive Analyse des Codes auf dem HorUS-Cluster zeigte, dass mit zunehmender Anzahl aktiver Prozesse pro Knoten die Kommunikationszeit und die Rechenzeit gegenüber dem Fall mit einem aktiven Prozess pro Knoten zunimmt. Dies deutet darauf, dass der pro Knoten zur Verfügung stehende schnelle Puffer-Speicher (Cache) bei voller Knotenauslastung für die Anforderungen hier unterdimensioniert ist. Je mehr Prozesse aktiv sind, desto weniger schnellen L3-Caches stehen pro Prozess zur Verfügung. Die Optimierung der Prozessorkommunikation führte aus diesem Grund nur zu einer leichten Erhöhung des Speedups. Eine speicheroptimierte Refaktorisierung des Codes erwies sich als sehr aufwendig und ohne Garantie auf Erfolg, weswegen dieser Ansatz nicht weiter verfolgt wurde.

Der nicht-konservative Löser ist in der offiziellen Version von zweiter Ordnung in der Genauigkeit und nicht parallelisiert, diese Einschränkungen konnten im Rahmen dieser Arbeit behoben werden. Dabei wurde eine Parallelisierung basierend auf den A++/P++-Bibliotheken vorgenommen, wobei bis zu einer Anzahl von 96 Prozessen, ein nahezu idealer Speedup erreicht wird. Die räumliche Genauigkeit wurde um Verfahren vierter und sechster Ordnung erhöht, artifizielle Filter diverser Ordnungen [144] und nicht reflektierende Fernfeldrandbedingungen [71] implementiert. Hinsichtlich der Rechenzeit pro Zeitschritt ist der konservative Löser zweiter Ordnung im Mittel rund 20% schneller als der nicht-konservative Löser sechster Ordnung. Da die maximale Gitterweite aufgrund einer Mindestauflösung der Grenzschicht von $\Delta y^+ \leq 1$ im Allgemeinen limitiert ist, konnte der Aufwand einer hohen Ordnung des Finite-Differenzen Schemas nicht durch eine geringere räumliche Auflösung überkompensiert werden. Aus diesem Grund wurde bei den meisten Simulationen, der konservative Löser verwendet. Ziel und Motivation des Ausbaus des nicht-konservativen Löseres war es, eine Plattform für sehr genaue CFD/CAA-Simulationen bereitzustellen. Dieses Ziel wurde erreicht, der Löser kann nun für weiterführende Untersuchungen genutzt werden.

Für die akkurate Vorhersage des akustischen Feldes, ist die Qualität des Informationsaustauschs zwischen den sich überlappenden Gittern essenziell. Diese wurde anhand eines akustischen Impulses, der Konvektion eines kompressiblen Wirbels durch unterschiedlich gestaltete

Überlappungszonen und anhand einer akustischen Quelle mit zwei Zylindern untersucht. Der Vergleich von impliziter und expliziter Interpolation zeigte, wie bei diversen anderen Untersuchungen [80, 79, 81], dass die explizite Interpolation der impliziten hinsichtlich der Genauigkeit zu bevorzugen ist. Für die explizite quadratische Interpolation (Interpolationsstencil mit $N = 3$ Punkten je Richtung) liegt der Fehler für den Fall mit zwei Gittern identischer Gitterweite und einem Gitterversatz von $\Delta x/2$, knapp zwei Größenordnungen unterhalb der, das Gitterinterface passierenden, Wellenamplitude. Für die Interpolation mit Stencils der Größe $N = 5$ und $N = 7$ reduziert sich der Fehler weiterhin mehr als eine Größenordnung. Ist das Verhältnis der Gitterweiten 2:1, steigt der Fehler deutlich an und verringert sich nur marginal durch die Erhöhung der Interpolationsordnung. Wird die Auflösung der Gitter konstant gehalten, der Gitterversatz aber auf Null reduziert (in diesem Fall kommt es zu keiner Interpolation, sondern nur zu einem Datenaustausch zwischen den Gittern), ist ein nahezu identisches Ergebnis zu beobachten. Dies deutet darauf hin, dass der Fehler primär durch den Sprung in der Gitterweite und die dadurch erhöhte Dispersion begründet ist. Für $N = 3$ und $N = 5$ liegt der reine Interpolationsfehler im Fall der Wirbelkonvektion in der Größenordnung von 5% beziehungsweise 0.2% des Druckabfalls im Wirbelzentrum. Eine Erhöhung der Ordnung auf $N = 7$ reduzierte den Fehler nur marginal, weswegen die Verwendung von Lagrange-Polynomen sechster Ordnung unter Kosten/Nutzen Aspekten nicht sinnvoll erschien. Bei allen Simulationen wurde daher eine Interpolation fünfter Ordnung (Lagrange-Polynome vierter Ordnung) verwendet.

Zur Berechnung des mittleren Strömungsfeldes wurden räumliche und zeitliche parallele Mittelungsverfahren implementiert. Die im Vorfeld vom Autor implementierten Forcing-Verfahren [14, 89] und Dämpfungszonen [88] wurden teilweise für die Anforderungen hier erweitert und ebenfalls für parallele Berechnungen restrukturiert. Darüber hinaus wurden Low-Storage Runge-Kutta Verfahren [64, 65] implementiert und die bestehenden Outputformate um die Formate für die Programme TECPLOT und ENSIGHT, jeweils für unstrukturierte und strukturierte Gitter sowie für GNUPLOT erweitert.

Für die Berechnung des akustischen Fernfeldes wurden zwei neue Löser in das OVERTURE-Paket integriert. Der LEE-Fernfeldlöser (LEE-FS) wurde zunächst für zweidimensionale Strömungen implementiert und validiert, ist aber konzeptionell gut für dreidimensionale Anwendungen zu erweitern. Die Approximation der räumlichen Ableitungen erfolgt wahlweise mit klassischen FD-Schemata oder 7-Punkte DRP-Schemata [73]. Die Integration der Gleichungen in der Zeit, erfolgt wahlweise mit klassischen Low-Storage Runge-Kutta Verfahren [64] oder Zweischritt LDDRK-Verfahren [99]. Der LEE-Löser wurde mit CAA-Benchmark Fällen und der Umströmung eines NACA0012-Profiles validiert und für die Berechnung des akustischen Fernfeldes einer Düse-Flügel-Klappe Konfiguration erfolgreich eingesetzt.

Für die dreidimensionalen Strömungen wurde ein hinsichtlich Rechenzeit günstiger konvektiver Ffowcs Williams & Hawkings Löser (cFWH-FS) in C++ codiert und in das OVERTURE-Framework aufgenommen. Der hier verwendete Ansatz erlaubt die Berechnung des akustischen Drucks an definierten Beobachterpunkten simultan zur LES und basiert auf der Arbeit von Najafi-Yazdin *et al.* [121] in Kombination mit dem Quell-Zeit Ansatz von Casalino [122]. Als Vorteil dieser Kombination ist die elegante Schallfeldberechnung in konvektierten Medien zu betonen. Der Ansatz erlaubt deutlich kürzere Simulationszeiten, als sequenzielle FWH-Verfahren bei denen das Einlesen, der oft massiven Datenmengen, die Performanz zum Teil deutlich dämpft. Der FWH-Löser zeigte sich mit einer Rechenzeiterhöhung von rund 1% pro Beobachter gegenüber der solo LES als sehr effizient; die Rechenzeit skalierte im Untersuchten Bereich linear mit der Beobachteranzahl. Auch dieser Löser konnte anhand analytischer Lösungen ausgewählter CAA-Benchmark Fälle und durch die umfangreiche LES/FWH-Simulation eines runden Freistrahls mit $Re = 3600$ und $M_j = 0.9$ erfolgreich validiert und

verifiziert werden. Die Übereinstimmung mit der analytischen Lösung des dreidimensionalen Druckimpulses, ist selbst für den härtesten Fall mit Konvektion in alle Raumrichtungen und Beobachtervektor durch eine Ecke des Integrationskubus sehr gut. Für $M_\infty = (0.5, 0, 0)$ betrug der Fehler zu allen Zeiten weniger als 1% und für $M_\infty = (0.5, 0.5, 0.5)$ weniger als 1.5% der Druckamplitude. Im Fall des Freistrahls ist die Übereinstimmung der Zeitreihen des akustischen Drucks erhalten aus der Kombination LES-FWH und erhalten aus der direkten Berechnung via reiner LES ebenfalls erstaunlich gut. Für fünf der sechs Beobachterpunkte lagen die instantanen Druckverläufe im berechneten Zeitraum nahezu perfekt übereinander. Lediglich für einen Beobachterpunkt unmittelbar an der Integrationsfläche war ein erwarteter Amplitudenfehler, welcher auf die zu geringe Distanz zur Kontrollfläche und die starke Kontamination mit dynamischen Druckschwankungen in diesem Bereich zurückzuführen ist, aber nahezu kein Phasenfehler zu beobachten. Die gemittelten Schalldruckpegel zeigten sich in guter Übereinstimmung mit den Messungen aus der Literatur.

Motiviert durch die Problematik, möglichst viele Geometrien und Parametervariationen hinsichtlich ihrer akustischen Abstrahlung zu akzeptablen Kosten beurteilen zu können, sollte eine alternative zur Bewertung via Schalldruckpegel (SPL) im Fernfeld getestet werden. Die LES des Freistrahls diene daher auch zur Untersuchung, inwiefern eine Betrachtung instantaner Lighthill-Quellen, S , und deren Anteile nach erfolgter Reynoldsaufspaltung (S^l , S^n , S^s), Rückschlüsse auf die Richtcharakteristik des emittierten Schallfelds zulassen. Die Ergebnisse von Freund [15] und Uzun *et al.* [114, 115] dienten dabei als Vergleichsgrundlage. In Ref. [15] wurde der totale Lighthill-Quellterm in einen linearen, S^l , einen nichtlinearen, S^n , und einen Entropie-Anteil, S^s , aufgespalten und das emittierte Schallfeld des jeweiligen Anteils berechnet und der Schalldruckpegel über dem Winkel θ aufgetragen. In der Arbeit hier, wurden die oben genannten Anteile aus der LES extrahiert und in Richtung der sechs FWH-Beobachter sowie uniform in unterschiedliche θ -Richtungen abgeleitet. Während, wie in den SPL-Verläufen der Vergleichsarbeiten, der lineare Anteil eine klare Vorzugsrichtung entlang der Freistrahllachse aufweist, ist für den nichtlinearen Anteil keine solche zu erkennen. In den Referenzen ist der SPL aus S^l für Winkel von $\theta < 30^\circ$ größer als jener aus der totalen Quelle S und fällt für $\theta \approx 90^\circ$ auf ein deutlich ausgeprägtes Minimum; das gleiche trifft auf die L_2 -Norm der in diese Richtungen abgeleiteten instantanen Quellfelder zu. Interessant ist auch, dass bei der Ableitung in Beobachterrichtung, jene Quellregionen in denen der Quelle-Beobachter-Vektor, $r = x - y$, orthogonal zur Freistrahllachse ausgerichtet ist, die linearen Quellanteile nahezu verschwinden. Anders ausgedrückt: Aus Regionen für die r orthogonal zur Freistrahllachse ausgerichtet ist, dominiert der Schall aus nichtlinearen Quellen S^n und der Schall aus linearen Quellen geht gegen Null; ist r entlang der Freistrahllachse ausgerichtet, liefert S^l den Löwenanteil zum SPL am Beobachterpunkt x . Dies korrespondiert mit der Feststellung, dass kohärente Wirbelstrukturen zwar in der Lagrange-Berachtung nur sehr kleine Änderungen erfahren und als akustisch Kompakt angesehen werden können, in einem ortsfesten Bezugssystem aber infolge der Konvektion durchaus große Änderungen während ihrer Lebensdauer erfahren können. Diese Änderungen in Konvektionsrichtung manifestieren sich in erhöhten Werten für S^l in Gebieten konvektierter Wirbel (z.B. am Ende des Potentialkerns) und der bevorzugten akustischen Abstrahlung von S^l in Richtung der Freistrahllachse. Weiter stromab, wo die Konvektion nachlässt und die kohärenten Strukturen zu kleineren Skalen kaskadiert sind, nimmt auch S^l kleine Werte an.

Die gute Korrespondenz zwischen den richtungsabgeleiteten Quelltermen und dem gemittelten Schalldruckpegel im Fernfeld, erlaubt nach diesen Erkenntnissen eine qualitative Beurteilung der Abstrahlcharakteristik basierend auf instantanen Nahfelddaten und damit deutlich mehr Parametervariationen innerhalb eines Zeitbudgets.

Im zweiten Teil der Arbeit wurden der isolierte Tragflügel, die isolierte Düse und die gesamte

Düse-Flügel-Klappe Konfiguration für zwei unterschiedliche Klappenwinkel und zwei unterschiedliche Bypassstrahlggeschwindigkeiten simuliert. Die zugrundeliegende Geometrie und Parameter der untersuchten Konfiguration wurde vom Projektpartner Airbus vorgegeben. Der ursprüngliche Plan sah vor, dass die numerischen Simulationen von der Universität Siegen und die experimentellen Messungen von EADS Innovation Works durchgeführt werden. Der Projektumfang wurde allerdings im Zeitverlauf zunächst deutlich reduziert und schließlich eingestellt. Aus diesem Grund werden nur die Ergebnisse aus den numerischen Simulationen an dieser Stelle diskutiert.

Zunächst zu den Simulationen des isolierten Flügels mit Klappe: Die zwei- und dreidimensionalen Strömungen verhalten sich hinsichtlich der Position der Grenzschichttransition und der mittleren Strömung außerhalb der Grenzschicht sehr ähnlich. Beim Transitionsvorgang und innerhalb der turbulenten Grenzschicht treten die erwarteten Unterschiede zwischen zwei- und dreidimensionalen turbulenten Grenzschichten auf. Bei den 3-D Fällen sind in der viskosen Unterschicht der Flügelsaugseite das Wandgesetz $U^+ \propto y^+$ und im logarithmischen Bereich das logarithmische Wandgesetz $U^+ = c_1 \ln(y^+) + c_2$ zu beobachten. Für den Klappenwinkel $\delta = 8^\circ$ steigt die Geschwindigkeit in der Flügelgrenzschicht monoton an, für $\delta = 22^\circ$ besitzt das Profil nahe der Flügelhinterkante einen Wendepunkt. Sowohl in 2-D als auch in den 3-D Fällen kommt es zu einer Interaktion von Wirbelstärke mit den Hinterkanten von Flügel und Klappe. Die dabei generierten Schallwellen breiten sich konzentrisch von den Hinterkanten aus. Mit zunehmendem Klappenwinkel kommt es im zweidimensionalen Fall zur Abstrahlung von Wellenpaketen gleicher Wellenlänge. Als Ursache dafür wird die Interaktion aufeinanderfolgender diskreter Wirbel mit der Klappenkante gesehen. Bei den 3-D Simulationen wurde dieses Phänomen klar abzugrenzender Wellenpakete nicht beobachtet, was in der breitbandigen Natur der voll turbulenten Grenzschicht und der nicht Existenz diskreter Wirbelpakete begründet sein sollte. Für eine abschließende Beurteilung bedarf es aber weiterer statistischer Untersuchungen der Druckspektren im akustischen Fernfeld.

Der nicht lineare Anteil der Lighthill-Quelle, S^n , eignet sich gut als Indikator akustischer Emission im Bereich der Grenzschicht. Aus Regionen erhöhter S^n -Werte, ist immer auch eine Emission von Schall zu beobachten. Für S^l und S^s liegt diese Eindeutigkeit nicht vor.

Die LES der Düse-Flügel-Klappe Konfiguration mit runder Zweistromdüse und gepfeiltem Flügel ist sehr aufwendig und teuer. Anfänglich durchgeführte Grobstruktursimulationen mit reduzierter Auflösung (VLES) erwiesen sich als nicht hinreichend aufgelöst, um die relevanten Skalen in den Scher- und Grenzschichten und an der Klappenhinterkante aufzulösen. Aus diesem Grund, wurde sich dafür entschieden, gut aufgelöste Simulationen einer vereinfachten Konfiguration mit ebener Düse und uniformem Tragflügel durchzuführen. Deren Ergebnisse werden nun zusammengefasst. Im Fall des isolierten Flügels interagierten nur die abrollenden Wirbelballen der Klappenoberseite mit der Hinterkante; im Fall des Gesamtkonfiguration interagieren auch die auftreffenden Wirbel aus der Mischungsschicht der Sekundärdüse mit der Klappe.

Folgende drei Mechanismen wurden identifiziert: (i) Die obere Scherschicht der Sekundärdüse interagiert mit der Grenzschicht der Flügelunterseite. Infolge der Anregung und aufgrund des positiven Druckgradienten entstehen Strukturen ähnlich Tollmien-Schlichting Wellen, welche stromab anwachsen. Ist die Düse dicht am Flügel montiert, interagieren die TS-Wellen mit KH-Wellen der Bypass-Mischungsschicht. Wirbel lösen sich von der unteren Hinterkante des Flügels und durchqueren die Spaltzone. Im 2-D Fall kommt es zu einem Verschmelzen der Wirbel, es entstehen große kohärente Wirbel, die bei ausgefahrener Klappe mit deren Unterseite und Hinterkante interagieren. Die Folge ist ein Vorgang bei dem Wirbel aus der Mischungsschicht und Wirbel aus der Klappengrenzschicht alternierend mit der Klappenhinterkante interagieren. Die Anregung ist bei der Konfiguration mit hoher Sekundär-Geschwindigkeit U_s und ge-

ringem Abstand zwischen Düse und Flügel am stärksten. (ii) Aufgrund der instabilen Grenzschicht auf der Flügelunterseite kommt es zu einer Interaktion von TS-Wellen mit der unteren Hinterkante des Hauptflügels. Dieser TS- p' -Prozess nimmt, hinsichtlich der Schalleffizienz, relativ zu (i) vermutlich eine untergeordnete Rolle ein. (iii) Die Reflexion von Freistrahllärm an Flügel und Klappe ist ein wesentlicher Einflussfaktor für die Lärmbelastung unterhalb des Strahls wenn die Klappenwinkel moderat und der Abstand zwischen Strahl und Flügel nicht zu klein sind.

Die Vorgänge (i) und (ii) manifestieren sich in einer erhöhten gemittelten Norm des Lighthill-Quellterms auf der Ober- und Unterseite der Klappe beziehungsweise im hinteren Teil der Flügelaußenseite. Vorgang (iii) dominiert bei moderaten Klappenwinkeln und manifestiert sich als nach unten reflektierter Schall der Wellenlänge $\lambda \approx 0.6D_s$ und der korrespondierenden Frequenz von $f = a_\infty/\lambda = 4.45U_{\text{ref}}/D_s \approx 3.6 \text{ kHz}$.

Das Ziel, des Aufbaus eines Frameworks zur Simulation der JFI wurde erreicht. Die durchgeführten Simulationen unterstützen die These, dass zwischen der Hinterkante der Klappe und der unteren Hinterkante des Flügels eine Rückkopplungsschleife vorliegt und der Verstärkungsmechanismus mit der Strahlgeschwindigkeit und dem Klappenwinkel zunimmt. Der Energieeintrag erfolgt dabei durch hydrodynamische Störungen des Strahls (Instabilitätswellen) an der Hinterkante der Klappe. Daneben scheint die Reflexion von Freistrahllärm an der Flügelunterseite einen nicht unerheblichen Beitrag zum Schallfeld der JFI zu liefern. Die durchgeführten Simulationen liefern hoch aufgelöste aerodynamische und akustische Felder der JFI für weiterführende Auswertungen. Darüber hinaus ermöglichen die Ergebnisse die Formulierung möglicher Konzepte zur Verringerung der Interaktionsgeräusche.

Arbeitshypothese und Ausblick für weitere Untersuchungen

Da die Amplitude und Form des zweiten Peaks im Druckspektrum der JFI vom vertikalen Abstand h/D_j und vom horizontalen Abstand L/D_j beeinflusst werden, ist es naheliegend, dass es zu einer Rückkopplung zwischen dem Düsenauslassbereich und der Klappenhinterkante kommt. Basierend auf den Erkenntnissen aus der Literatur und dieser Arbeit, wird folgende Hypothese zur Erklärung der einleitend beschriebenen zwei Peaks im Druckspektrum diverser untersuchter Freistrahlfügel-Klappe Konfigurationen vorgeschlagen:

Instabile Störungen (Kelvin-Helmholz Wellen) in der Mischungsschicht treffen auf die Klappe (siehe schematische Darstellung 1.3). Dort kommt es zu der, im Abschnitt Tragflügelärm in der Einleitung beschriebenen, linearen Interaktion mit der Hinterkante. Die daraus entstehenden Druckwellen manifestieren sich im *ersten* Peak des SPL-Spektrums um 1000 Hz (Abb. 1.4). Diese Druckwellen propagieren teilweise direkt ins Fernfeld und teilweise mit k^- stromauf in Richtung Düse, wobei sie dabei vertikal zwischen Flügel und Strahl eingeschlossen sind und nur zu den lateralen Seiten entweichen können. Im Bereich der Düsenkante, der vorderen Flügelunterseite und des Strahls kommt es am sogenannten Drehpunkt, bei $x = x_t$, zu einer teilweisen Reflexion und Transmission der Wellen, wobei der reflektierte Teil als k^+ -Moden wieder stromab propagiert (siehe Schema 6.1). Treffen diese Moden bei $x = x_r$ auf die Klappe, werden sie dort abhängig vom Auftreffwinkel α räumlich gestreut. Teile der gestreuten Moden werden durch den Strahl absorbiert, gebrochen und reflektiert oder eliminieren sich gegenseitig infolge Phasenverschiebung; die in Richtung von k^- gestreuten/reflektierten Moden propagieren dagegen wieder stromauf und der Vorgang beginnt von neuem. Der Energieeintrag in diese Rückkopplungsschleife erfolgt dabei über den KH- p -Prozess an der Klappenhinterkante. Die in das Resonanzsystem eingetragene Energie kann die Schleife nur über die lateralen Seiten, den Spalt zwischen Flügel und Düse und den Spalt zwischen Flügel und Klappe verlassen. Diese Hypothese erklärt auch, warum Lage und Höhe des ersten Peaks kaum vom Klappenwinkel δ beeinflusst werden, die des JFI-Peaks aber sehr wohl: Für jeden, in Ref.[8] und [4], untersuchten Klappenwinkel wurde ein Peak im niederfrequenten Bereich des

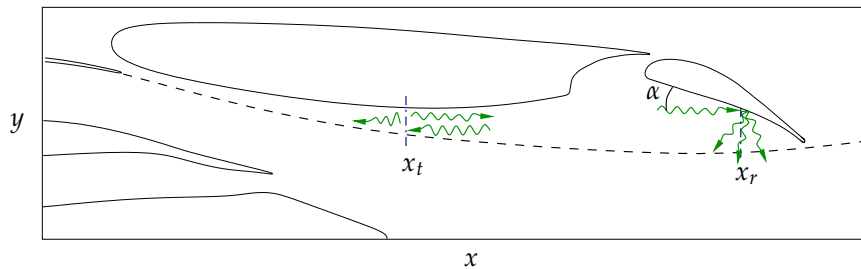


Abb. 6.1: Schematische Darstellung einer k^- -Mode die bei $x = x_t$ als k^+ -Mode reflektiert und als k^- -Mode transmittiert wird; und Streuung und Reflexion einer k^+ -Mode an der Klappe bei $x = x_r$ als Funktion des Auftreffwinkels α .

Druckspektrums beobachtet, welches im Falle ohne co-flow keine signifikante Abhängigkeit von δ zeigte (siehe Abb. 1.4 a). Es kam daher bei jedem untersuchten Klappenwinkel zu einer Interaktion der Hinterkante mit den aerodynamischen Druckschwankungen im nahen Umfeld der Mischungsschicht, welche kaum durch die Zunahme von δ (Verringerung von h) gesteigert wurde (dies müsste aber nach der Hypothese von Ref. [4] der Fall sein). Allerdings ändert sich der Winkel, α , in dem die bei $x = x_t$ reflektierten Wellen auf die Klappe treffen und die Lage des Auftreffpunktes x_r und damit der Abstand $x_r - x_t$. Mit zunehmendem Klappenwinkel δ , nimmt auch α zu und die Streuung ab, die Moden werden besser im Düse-Flügel-Strahl System (Resonanzraum) eingeschlossen und damit steigt die Fähigkeit zur Resonanz. Gleichzeitig nimmt der Abstand zwischen Drehpunkt x_t und Reflexionspunkt x_r ab. Die Resonanzlänge, $x_r - x_t$, wird verkürzt. Als Folge sollte das JFI-Peak ansteigen und es zu einer Verschiebung des Peaks in Richtung höherer Frequenzen kommen. Beides wurde in den Experimenten von Ref. [8] und [4] beobachtet. Diese Beobachtungen deuten darauf hin, dass das erste Peak aus einem linearen Prozess, ähnlich dem im Abschnitt Tragflügelärm beschriebenen Hinterkantenlärm, resultiert und die exponentielle Zunahme des Druckpegels beim zweiten Peak, entgegen der Annahme von Ref. [4], weniger durch einen erhöhten Energieeintrag (infolge der Abnahme des Abstands h), sondern mehr durch eine verstärkte Resonanz hervorgerufen wird. Eine alternative Erklärung für das statische *erste* Peak ist: *Reflexion*. Mit den Simulationsergebnissen aus Kapitel 5 ist es auch denkbar, dass das erste Peak durch am Tragflügel reflektierten Freistrahllärm hervorgerufen wird (zu sehen in Abbildung 5.18 d). Auch dieser Vorgang sollte weitestgehend unabhängig vom Klappenwinkel sein. Für Reflexion als Ursache, spricht die Tatsache, dass das Druckpeak des isolierten Düsenstrahls ebenfalls in diesem Bereich liegt.

In beiden Experimenten wurde immer auch mit einer Verringerung von h der Klappenwinkel δ und damit der Einfallswinkel α vergrößert. Damit ist ein eindeutiger Kausalschluss mangels *cet. par.* anhand der Ergebnisse aus den Experimenten kaum möglich. Für weitere numerische Untersuchungen wird daher folgende Arbeitshypothese vorgeschlagen:

Als Ursache für das erste Peak könnte ein KH- p' -Prozess *und/oder* Reflexion in Frage kommen. Das JFI-Peak dagegen generiert sich aus einer Rückkopplungsschleife zwischen Düse-Flügel-Strahl System und der Klappe mit dem KH- p' -Prozess als Energieeintrag. Diese Theorie würde unterstützt, wenn zu den Seiten und im Bereich von (1) und (2) in Abbildung 1.3 eine Zunahme des Schalldruckpegels und tonale Komponenten im Schallspektrum nachgewiesen werden können, deren Amplitude durch U_s, U_p, U_f und h und deren Lage im Frequenzband durch $L, \Delta X$ und ΔY beeinflusst werden. In der hier vorgeschlagenen Theorie ist die Intensität des KH- p' -Prozess und damit der Energieeintrag durch die Höhe h und die Geschwindigkeitsdifferenz ($U_s - U_f$) bestimmt; die Intensität der Resonanz (Profil und Höhe des *zweiten* Peaks) wird maßgeblich durch den Winkel α bzw. den Klappenwinkel δ beeinflusst und das Geräusch

der Resonanz (Lage des Peak) wird primär durch den Abstand $x_r - x_t$ bestimmt. Dabei wird die folgende Parameterabhängigkeit erwartet:

$$\begin{aligned}
 \delta \uparrow &\rightarrow \alpha \uparrow \rightarrow p_{FI}^{\prime 2} \uparrow \\
 (x_r - x_t) \uparrow &\rightarrow f_{\text{peaks}} \downarrow \\
 (U_s - U_f) \uparrow &\rightarrow p_{FI}^{\prime 2} \uparrow
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei $x_t = f(\Delta X, \Delta Y)$ und $x_r = g(L, \delta)$ ist. Bezüglich der Freistrah-Klappen Interaktion wird es daher interessant sein, weitere Simulationen

- einer Flügel-Klappen Konfiguration mit unabhängiger Parameterwahl von L , H und δ ,
- des 3-D Falls mit erhöhter Bypassgeschwindigkeit und
- der Freistrah-Klappen Konfiguration mit runder Düse

vorzunehmen.

A Herleitung der Quellengewichtung

Die Richtungsableitung einer Funktion $S(\mathbf{y})$ an der Stelle \mathbf{y} in Richtung des Punktes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ist

$$S_r = \nabla S|_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial S}{\partial y_i} \frac{(x_i - y_i)}{r},$$

wobei $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ mit $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ ist. Die zweifache Richtungsableitung ist dann

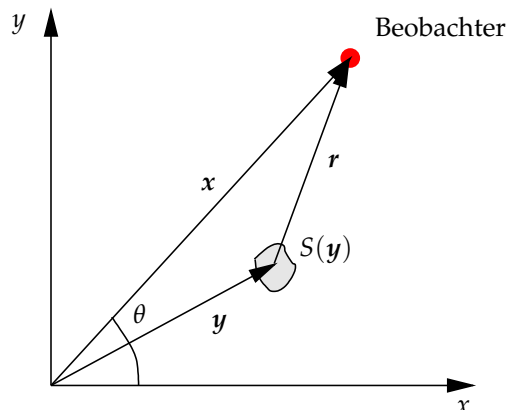
$$\begin{aligned} S_{rr} &= \nabla (\nabla S|_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}})|_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_j} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wobei $r = |\mathbf{r}|$ der Abstand zwischen Punkt \mathbf{y} (Quelle) und \mathbf{x} (Beobachter) ist. Mit $\mathbf{y} = (x, y, z)$ folgt in der x - y -Ebene bei $z = 0$ ($\phi = \pi/2$):

$$S_{rr} = \frac{(x_1 - x)^2}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{(x_2 - y)^2}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{(x_1 - x)(x_2 - y)}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.2})$$

Mit $R = |\mathbf{x}|$ als dem Abstand des Beobachters vom Ursprung des Koordinatensystems kann Gleichung (A.2) umformuliert werden zu:

$$S_{rr} = \frac{(R \cos \theta - x)^2}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{(R \sin \theta - y)^2}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{(R \cos \theta - x)(R \sin \theta - y)}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.3})$$



Für einen Beobachter im Fernfeld geht $r \rightarrow \infty$ und damit auch $R \rightarrow \infty$ und der Grenzwert von Gleichung (A.3) ist dann unter zweimaliger Anwendung der Regel von de L'Hospital:

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} &= \lim_{(r,R) \rightarrow (\infty, \infty)} S_{rr} \\ &= \lim_{(r,R) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{(R \cos \theta - x)^2}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{(R \sin \theta - y)^2}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{(R \cos \theta - y_1)(R \sin \theta - y)}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Mit der Gleichung für die Quelle S :

$$S = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y},$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} \right] + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \\ &\quad + \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Folgt man Lighthill [11], so kann der Schall im Fernfeld abgeschätzt werden via:

$$\rho'(x, t) \approx \frac{1}{4\pi a_\infty^2} \int \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a_\infty} \right) d^3 \mathbf{y} \quad (\text{A.4})$$

Betrachtet man das Argument des Integrals und nutzt die Taylor-Hypothese (frozen turbulence) $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \approx a_\infty^2 \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}$, so folgt das Argument zu:

$$\frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^3} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Trennt man die $1/r$ -Skalierung aus dem Faktor vor dem Differential heraus, folgen für das Beispiel oben in der x - y -Ebene die drei Terme

$$\frac{1}{r} \frac{(x_1 - x)^2}{r^2} \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{(x_2 - y)^2}{r^2} \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{(x_1 - x)(x_2 - y)}{r^2} \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Die mittleren Faktoren sind identisch zu jenen in Gleichung (A.2). Das Integral summiert über die richtungsgewichteten Quadrupole, $\partial T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$, am Ort \mathbf{y} zur retardierten Zeit, $t - r/a_\infty$, und skaliert sie mit $1/r$ an den Ort \mathbf{x} . Damit wird folgender richtungsgewichteter Quellterm eingeführt:

$$\tilde{S}_r = \frac{(x_1 - x)^2}{r^2} \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x^2} + \frac{(x_2 - y)^2}{r^2} \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + \frac{(x_1 - x)(x_2 - y)}{r^2} \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

B Runde Düse-Flügel-Klappe Konfiguration

B.1 Strömungsparameter

Die Strömungsparameter und Indexvergabe sind mit jenen der Simulationen mit ebener Düse identisch (siehe Tabelle 5.2).

Definition des Düseneinlasses. In Abbildung B.2 (rechts) ist die schematische Darstellung des Düseneinlasses zu sehen. Wie im zweidimensionalen Fall wird das Geschwindigkeitsprofil über ein laminares Blasius-Profil vorgegeben. Die Komponenten sind definiert über

$$u_o(r) = u_{po}(r) + u_{so}(r) + u_{\infty o}(r), \quad v_o = w_o = 0, \quad (\text{B.1})$$

mit

$$u_{j_o}(r) = \begin{cases} U_{j_o}, & \text{für } r'_j < h_{j_o} - \delta_{j_o}, \\ U_{j_o} \frac{h_{j_o} - r'_j}{\delta_{j_o}} \left[2 - 2 \left(\frac{h_{j_o} - r'_j}{\delta_{j_o}} \right)^2 + \left(\frac{h_{j_o} - r'_j}{\delta_{j_o}} \right)^3 \right], & \text{für } h_{j_o} - \delta_{j_o} \leq r'_j \leq h_{j_o}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$u_{\infty o}(r) = \begin{cases} U_{\infty}, & \text{für } r > R + \delta_{\infty o}, \\ U_{\infty} \frac{r'_{\infty}}{\delta_{\infty o}} \left[2 - 2 \left(\frac{r'_{\infty}}{\delta_{\infty o}} \right)^2 + \left(\frac{r'_{\infty}}{\delta_{\infty o}} \right)^3 \right], & \text{für } R \leq r \leq R + \delta_{\infty o}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Indizes $j = s, p$ indizieren die jeweilige Düse. $h_{j_o} = b_{j_o}/2$ ist definiert als die halbe Kanalbreite und δ_{j_o} als die Grenzschichtdicke jeweils am Düseneinlass. Darüber hinaus haben wir

$$r'_j = \sqrt{(r - r_{j_o})^2}, \quad r'_{\infty} = \sqrt{(r - R)^2}.$$

Das Verhältnis von Grenzschichtdicke zu halber Kanalbreite ist $\delta_{j_o}/h_{j_o} = 0.2$. Die Maximalwerte für Geschwindigkeit U_{po} , Temperatur, T_{po} , und Dichte, ρ_{po} , am Düseneinlass werden unter der Annahme einer isentropen Strömung aus den Werten am Düsenauslass für das Flächenverhältnis $A_{po}/A_p = 2.94$ bestimmt.

B.2 Numerische Spezifikationen

Das Simulationsgitter besteht aus einem Hintergrundgitter mit $N_x \times N_y \times N_z = 676 \times 401 \times 401$ Gitterlinien und vier Vordergrundgittern für die Düse, zu sehen in Abbildung B.2 (links). Tabelle B.1 zeigt dir relevanten Daten. Die Anzahl Gitterpunkte liegt in der Größenordnung 10^8 . Wie bei Brès *et al.* [28] ist die Gitterauflösung innerhalb der Düse nur für laminare Grenzschichten adäquat und es wird kein Wandmodell verwendet. Die Abmessungen des Simulationsgebietes, dargestellt in Abbildung B.1, sind $L_x = 8D_s$ und $L_y = L_z = 4D_s$. An

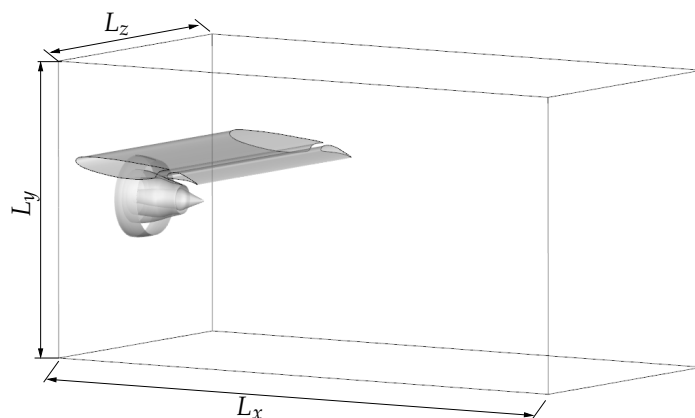
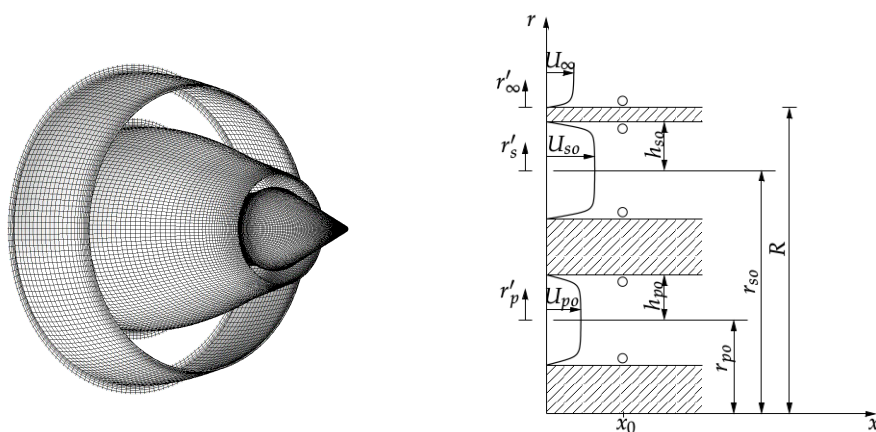


Abb. B.1: Simulationsgebiet

Abb. B.2: 3-D Nozzle: Links: Surface grid Nozzle. Rechts: Schematische Darstellung des Düseneinlasses; \circ Tripping der Grenzschicht.

Tab. B.1: Gitterparameter. Der Oberstrich kennzeichnet den Mittelwert.

Grid	N_x	N_y	$N_\theta(N_z)$	$\overline{\Delta x}/D_s$	$\overline{\Delta y}/D_s$	$\Delta y_{\min}/D_s$	$\overline{\Delta \theta}/D_s(\overline{\Delta z}/D_s)$
Flügel	426	15	(251)	0.0085	0.0017	0.00064	(0.016)
Klappe	176	15	(251)	0.0067	0.0017	0.00064	(0.016)
Düse s	121	15	563	0.0065	0.0017	0.00064	0.0055
Düse p	496	15	551	0.0036	0.0017	0.00064	0.0035
Kern ^a	246	15	199	0.0057	0.0017	0.00064	0.0038

^a Zur Vermeidung der Singularität befindet sich an der Spitze des Kerns ein Gitter-Patch mit $N_x \times N_y \times N_z = 76 \times 76 \times 15$.

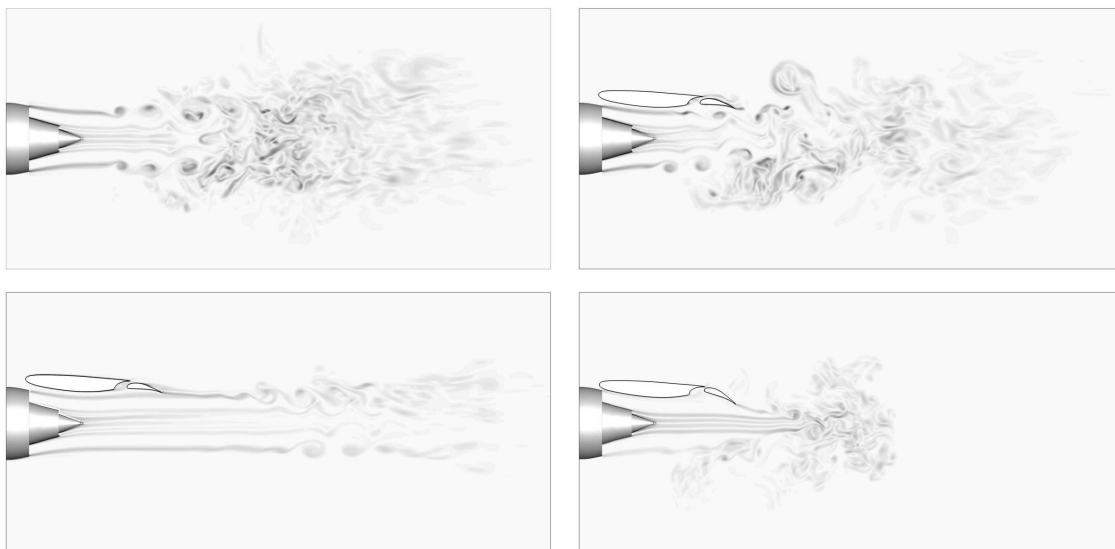


Abb. B.3: Wirbelstärkenorm $|\omega|$ für die 3D-Fälle von oben nach unten: Düse-C1; Ref δ 8-C1; Ref δ 8-C3 und P1 δ 22-C1-50 (noch nicht voll entwickelt). Farbskala von 0 bis $60U_{\text{ref}}/D_s$.

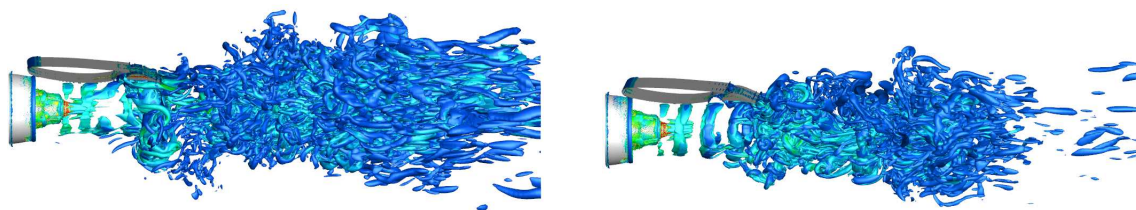


Abb. B.4: 3-D Freistrahls-Klappen Konfiguration ohne co-flow (links) und mit co-flow (rechts): $\lambda_2 = -1$ Isoflächen. Die Farbskala korrespondiert mit der Wirbelstärkemagnitude von 0 (blau) bis $40U_s/D_s$ (rot).

den Seiten in Spannweitenrichtung werden outflow Randbedingungen mit Dämpfungszone verwendet. Das Berechnungsgitter besteht aus einem Hintergrundgitter mit $n_x \times n_y \times n_z = 676 \times 401 \times 401$ Gitterlinien und zwei Vordergrundgittern für den Tragflügel sowie vier für die Düse, Tabelle B.1 gibt die relevanten Daten dazu. Der Tragflügel ist in Spannweitenrichtung uniform und der Flapwinkel, δ , beträgt 8° . Die gesamte Anzahl genutzter Gitterpunkte ist etwa 1.13×10^8 .

Die Anzahl der Gitterlinien in der Grenzschicht mit der Dicke von $\delta_{po} = 0.015D_s$ ist $\delta_{po}/\overline{\Delta y} \approx 9$. Mit dem Wert für u_τ aus Tabelle 4.4 und $\overline{\Delta x} = 0.0067D_s$, $\Delta y_{\text{min}} = 0.00064D_s$ und $\overline{\Delta z} = 0.016D_s$ folgt $\Delta x^+ \approx 150$, $\Delta y^+ \approx 10$ und $\Delta z^+ \approx 350$. Der Abstand des ersten Gitterpunktes von der Wand sollte auf $\Delta y^+ \approx 1$ und $\Delta x^+ \approx 100$, $\Delta z^+ \approx 30$ reduziert werden [51].

B.3 Ergebnisse

Die Darstellungen der Wirbelstärke in der (x, y) -Ebene bei $z = 0$, Abbildung B.3, zeigen den Einfluss des Flügels und der Klappe auf die Entwicklung der Scherschicht. Wie im 2D-Fall bleibt die Scherschicht der Sekundärdüse unterhalb des Flügels länger stabil. Die Abbildungen B.4 und B.5 illustrieren den dreidimensionalen Charakter der Strömung und geben einen ersten Eindruck hinsichtlich der vorherrschenden turbulenten Strukturen.

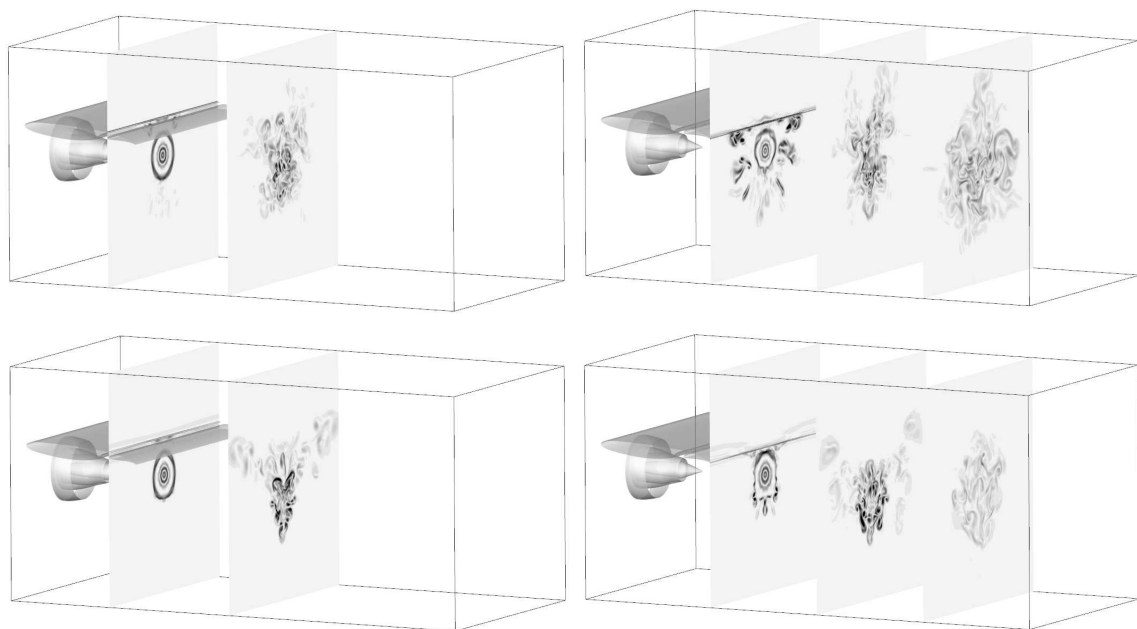


Abb. B.5: 3-D Freistrah-Klappen Konfiguration ohne co-flow (oben) und mit co-flow (unten): Wirbelstärkemagnitude in der (y, z) -Ebene bei $x = 1.5$ und 3.75 (links) und bei $x = 2, 4$ und 6 (rechts). Die Farbskala reicht von 0 bis $15U_s/D_s$ (schwarz).

C Appendix

C.1 Differenzenoperatoren

Die Differenzenoperatoren $\mathcal{D}_{l\pm\frac{1}{2}}^{\pm x_n}$ sind definiert mit:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{i+\frac{1}{2}}^{+x_n}\phi_i &:= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta\zeta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{i+\frac{1}{2}})_{j+1} - (\phi_{i+\frac{1}{2}})_j}{\Delta\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{i+\frac{1}{2}})_{k+1} - (\phi_{i+\frac{1}{2}})_k}{\Delta\zeta} \\ \mathcal{D}_{j+\frac{1}{2}}^{+x_n}\phi_i &:= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{j+\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{j+\frac{1}{2}})_{i+1} - (\phi_{j+\frac{1}{2}})_i}{\Delta\zeta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)_{j+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{j+\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{j+\frac{1}{2}})_{k+1} - (\phi_{j+\frac{1}{2}})_k}{\Delta\zeta} \\ \mathcal{D}_{k+\frac{1}{2}}^{+x_n}\phi_i &:= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{k+\frac{1}{2}})_{i+1} - (\phi_{k+\frac{1}{2}})_i}{\Delta\zeta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{k+\frac{1}{2}})_{j+1} - (\phi_{k+\frac{1}{2}})_j}{\Delta\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{k+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta\zeta} \\ \\ \mathcal{D}_{i-\frac{1}{2}}^{-x_n}\phi_i &:= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta\zeta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{i-\frac{1}{2}})_j - (\phi_{i-\frac{1}{2}})_{j-1}}{\Delta\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{i-\frac{1}{2}})_k - (\phi_{i-\frac{1}{2}})_{k-1}}{\Delta\zeta} \\ \mathcal{D}_{j-\frac{1}{2}}^{-x_n}\phi_i &:= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{j-\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{j-\frac{1}{2}})_i - (\phi_{j-\frac{1}{2}})_{i-1}}{\Delta\zeta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)_{j-\frac{1}{2}} \frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\Delta\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{j-\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{j-\frac{1}{2}})_k - (\phi_{j-\frac{1}{2}})_{k-1}}{\Delta\zeta} \\ \mathcal{D}_{k-\frac{1}{2}}^{-x_n}\phi_i &:= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{k-\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{k-\frac{1}{2}})_i - (\phi_{k-\frac{1}{2}})_{i-1}}{\Delta\zeta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_n}\right)_{k-\frac{1}{2}} \frac{(\phi_{k-\frac{1}{2}})_j - (\phi_{k-\frac{1}{2}})_{j-1}}{\Delta\eta} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\right)_{k-\frac{1}{2}} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta\zeta}\end{aligned}$$

wobei $\phi_i = \{u_i, v_i, w_i, \rho_i / p_i\}$ eine Komponente des diskreten Lösungsvektors am Gitterpunkt $\mathbf{i} = (i, j, k)$ ist und

$$\begin{aligned}\phi_{i\pm\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i\pm 1}), \\ \phi_{j\pm\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_j + \phi_{i\pm 1}), \\ \phi_{k\pm\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\phi_k + \phi_{i\pm 1}).\end{aligned}$$

Die Ableitungen werden aus den Komponenten der Transformationsmatrix und der Determinante der Jacobi-Matrix berechnet:

$$\left(\frac{\partial\zeta_m}{\partial x_n}\right)_{l\pm\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(a_{mn,l} + a_{mn,l\pm 1})}{\frac{1}{2}(J_l + J_{l\pm 1})}$$

C.2 Koeffizienten

Schema	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_j		$-\frac{1}{60}$	$\frac{9}{60}$	$-\frac{45}{60}$	0	$\frac{45}{60}$	$-\frac{9}{60}$	$\frac{1}{60}$	
a_j^{33}		$-\frac{1}{60}$	$\frac{9}{60}$	$-\frac{45}{60}$	0	$\frac{45}{60}$	$-\frac{9}{60}$	$\frac{1}{60}$	
a_j^{22}			$\frac{1}{12}$	$-\frac{8}{12}$	0	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$		
a_j^{13}				$-\frac{3}{12}$	$-\frac{10}{12}$	$\frac{18}{12}$	$-\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$	
a_j^{31}		$-\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$	$-\frac{18}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{3}{12}$			
a_j^{04}					$-\frac{25}{12}$	$\frac{48}{12}$	$-\frac{36}{12}$	$\frac{16}{12}$	$-\frac{3}{12}$
a_j^{40}	$\frac{3}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{36}{12}$	$-\frac{48}{12}$	$\frac{25}{12}$				
a_j^{12}				$-\frac{2}{6}$	$-\frac{3}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$		
a_j^{21}			$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$			
a_j^{03}					$-\frac{22}{12}$	$\frac{36}{12}$	$-\frac{18}{12}$	$\frac{4}{12}$	
a_j^{30}		$-\frac{4}{12}$	$\frac{18}{12}$	$-\frac{36}{12}$	$\frac{22}{12}$				
a_j^{02}					$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$		
a_j^{20}			$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$				

Tab. C.1: Koeffizienten des klassischen finite Differenzen Schematas. Der Index j indiziert den Abstand zu dem Gitterpunkt, für welchen die Ableitung approximiert wird. Für die Schemata des Randgebiets wird zudem das stencil im hochgestellten Index a^{kl} kenntliche gemacht. k gibt die Anzahl der Gitterpunkte in die negative und l in die positive Koordinatenrichtung an.

$a_0^{33} = 0$	$a_{-2}^{24} = -a_2^{42} = 0.0490419580$
$a_1^{33} = -a_{-1}^{33} = 0.77088238051822552$	$a_{-1}^{24} = -a_1^{42} = -0.468840357$
$a_2^{33} = -a_{-2}^{33} = -0.166705904414580469$	$a_0^{24} = -a_0^{42} = -0.474760914$
$a_3^{33} = -a_{-3}^{33} = 0.02084314277031176$	$a_1^{24} = -a_{-1}^{42} = 1.273274737$
	$a_2^{24} = -a_{-2}^{42} = -0.518484526$
	$a_3^{24} = -a_{-3}^{42} = 0.166138533$
	$a_4^{24} = -a_{-4}^{42} = -0.0263694310$
$a_{-1}^{15} = -a_1^{51} = -0.209337622$	$a_0^{06} = -a_0^{60} = -2.192280339$
$a_0^{15} = -a_{-0}^{51} = -1.084875676$	$a_1^{06} = -a_{-1}^{60} = 4.748611401$
$a_1^{15} = -a_{-1}^{51} = 2.147776050$	$a_2^{06} = -a_{-2}^{60} = -5.108851915$
$a_2^{15} = -a_{-2}^{51} = -1.388928322$	$a_3^{06} = -a_{-3}^{60} = 4.461567104$
$a_3^{15} = -a_{-3}^{51} = 0.768949766$	$a_4^{06} = -a_{-4}^{60} = -2.833498741$
$a_4^{15} = -a_{-4}^{51} = -0.281814650$	$a_5^{06} = -a_{-5}^{60} = 1.128328861$
$a_5^{15} = -a_{-5}^{51} = 0.0482304540$	$a_6^{06} = -a_{-6}^{60} = -0.203876371$

Tab. C.2: Koeffizienten des DRP-Schematas. Die Bedeutung der Indizes ist mit der in Tabelle C.1 identisch.

Schema	a_{21}	a_{31}	a_{32}	a_{43}	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4
RK3(3)	$\frac{1}{2}$	-1	2	-	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	-	0	$\frac{1}{2}$	1	-
RK4(4)	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Schema	A_2	A_3	A_4	A_5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5			
LSRK3(3)	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{153}{128}$	-	-	$\frac{1}{3}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{15}$	-	-			
LSRK4(5)	$-\frac{567301805773}{1357537059087}$	$-\frac{2404267990393}{2016746695238}$	$-\frac{3550918686646}{2091501179385}$	$-\frac{1275806237668}{842570457699}$	$\frac{1432997174477}{9575080441755}$	$\frac{5161836677717}{13612068292357}$	$\frac{1720146321549}{2090206949498}$	$\frac{3134564353537}{4481467310338}$	$\frac{2277821191437}{14882151754819}$			
Schema	α_0	α_1	α_2	α_3	β_0	β_1	β_2	β_3				
P2C2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-				
P4C4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$				
PoptC4	2.3025580888383	-2.4910075998482	1.5743409331815	-0.3858914221716	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$				

Tab. C.3: Koeffizienten der verwendeten Zeit-Integrations Verfahren. *Runge-Kutta* (RK,LSRK) Verfahren: Die erste Ziffer hinter der Bezeichnung gibt die Ordnung des jeweiligen Verfahrens an, die Ziffer in der Klammer die Stufenanzahl. Für das RK4(4) Verfahren ist $a_{41} = a_{42} = 0$ und für beide LSRK-Verfahren ist $A_1 = 0$. *Prädiktor-Korrektor* (PC) Verfahren: Die erste Ziffer gibt die Ordnung des Prädiktors, die zweite die des Korrektors an. Bei dem PoptC4 Schema wurden die Koeffizienten des Prädiktors für akustische Berechnungen optimiert [73].

Schritt 1			
Stufe	α	β	c
1	0.0	0.2687454388871343849	0.0
2	-0.60512264332862261228	0.8014706973220802933	0.26874543888713438496
3	-2.04375640234761394333	0.5051570426942272253	0.58522806929524303469
4	-0.74069990637544192841	0.5623568037900029640	0.68270664478424678821
5	-4.42317651302968168941	0.05900655127758823335	1.1646854837729261436
Schritt 2			
Stufe	α	β	c
1	0.0	0.1158488818128556168	0.0
2	-0.4412737715387738256	0.3728769905165286498	0.11584888181285561688
3	-1.073982008079781868	0.7379536892143529568	0.32418503640412806853
4	-1.706357079125675880	0.5798110936631103958	0.61932082035177792368
5	-2.797929316268244305	1.031284991300145194	0.80344726663359079059
6	-4.091353712091916045	0.15	0.91841664452065965078

Tab. C.4: Koeffizienten des verwendeten alternierenden LDDRK4(5-6) Verfahrens.

Schema	$k_c^* \Delta x$	Auflösung (PPW)	$k_{\max}^* \Delta x$
3-Punkt kl. FD (2)	0.3	21	1.0
5-Punkt kl. FD (2)	0.6	10.5	1.4
7-Punkt kl. FD (6)	0.85	7.4	1.6
7-Punkt DRP (4)	0.95	6.6	1.65

Tab. C.5: Werte für $k_c^* \Delta x$ und $k_{\max}^* \Delta x$ der verwendeten Finite-Differenzen Schemata. Der Wert in der Klammer entspricht der Ordnung in der Genauigkeit.

Schema	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	L_a	L_s
RK3(3)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	—	—	—	0.5	1.73
RK4(4)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	—	—	0.6	2.83
LSRK4(5)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{200}$	—	0.6	2.83
LDDRK2(4)	1	$\frac{1}{2}$	0.162997	0.0407574	—	—	0.85	2.85
LDDRK4(5-6)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0.00361050	—	2.00	2.85
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0.0121101	0.00285919		

Tab. C.6: Koeffizienten des Verstärkungsfaktors (3.9) der verwendeten Runge-Kutta Schemata. L_a und L_s sind die Limits für die Genauigkeit beziehungsweise Stabilität.

Schema	b_{-4}	b_{-3}	b_{-2}	b_{-1}	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
b_j^{44}	$-\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$-\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{186}{256}$	$\frac{56}{256}$	$-\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$-\frac{1}{256}$
b_j^{33}		$\frac{1}{64}$	$-\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{44}{64}$	$\frac{15}{64}$	$-\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	
b_j^{22}			$-\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{4}{16}$	$-\frac{1}{16}$		
b_j^{13}				$\frac{1}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{6}{16}$	$-\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	
b_j^{31}		$\frac{1}{16}$	$-\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{1}{16}$			
b_j^{04}					$\frac{15}{16}$	$\frac{4}{16}$	$-\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$-\frac{1}{16}$
b_j^{40}	$-\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$-\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{15}{16}$				

Tab. C.7: Koeffizienten des numerischen Filters achter Ordnung. Die Koeffizienten für die Randschemata sind aus [144] entnommen. Die Bedeutung der Indizes ist die gleiche wie in Tabelle C.1.

Literaturverzeichnis

- [1] OLSEN, W. A., DORSCH, R. G. & MILES, J. H.: Noise produced by a small-scale, externally blown flap / NASA. 1972 (NASA/TN D-6636). – Forschungsbericht
- [2] NEUWERTH, G.: Acoustic feedback phenomena of the subsonic and hypersonic free jet impinging on a foreign body / NASA. 1974 (NASA/TT F-15719). – Forschungsbericht
- [3] RUDOLPH, P. K. C.: High-lift systems on commercial subsonic airliners / NASA. NASA Ames Research Center, Moffett Field, California, 1996. – Forschungsbericht
- [4] BELYAEV, I. V., ZAYTSEV, M. Y., KOPIEV, V. F., OSTRIKOV, N. N. & FARANOSOV, G. A.: Studying the effect of flap angle on the noise of interaction of a high-bypass jet with a swept wing in a co-flow. *Acoustical Physics* **63** (2017), 14–25
- [5] D., Reckzeh: Aerodynamic design of Airbus high-lift wings in a multidisciplinary environment. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Jyväskylä, Finland, July 2004
- [6] VERA, J., SELF, R. H. & KINGAN, M. J.: The prediction of the radiated pressure spectrum produced by jet-wing interaction. In: *Proceedings of the 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Dallas, Texas, May 2015 (AIAA Paper 2015-2216)
- [7] LAWRENCE, J. L. T. & SELF, R. H.: Installed jet-flap impingement tonal noise. In: *Proceedings of the 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Dallas, Texas, May 2015 (AIAA Paper 2015-3118)
- [8] FARANOSOV, G., KOPIEV, V., OSTRIKOV, N. & KOPIEV, V.: The effect of pylon on the excess jet-flap interaction noise. In: *Proceedings of the 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Lyon, France, May 2016 (AIAA Paper 2016-3043)
- [9] JORDAN, P., JAUNET, V., TOWNE, A., CAVALIERI, A. V. G., COLONIUS, T., SCHMIDT, O. & AGARWAL, A.: Jet-flap interaction tones. *J. Fluid Mech.* **853** (2018), 333–358
- [10] SEMILETOV, V. A., YAKOVLEV, P. G., KARABASOV, S. A., FARANOSOV, G. A. & V. F. KOPIEV, V. F.: Computational modelling of jet-wing interaction: The effect of asymmetries from the jet inflow conditions and the wing. In: *Proceedings of the 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Dallas, Texas, May 2015 (AIAA Paper 2015-3129)
- [11] LIGHTHILL, M. J.: On sound generated aerodynamically: I. General theory. *Proc. R. Soc. London Ser. A* **211** (1952), 564–587
- [12] LIGHTHILL, M. J.: On sound generated aerodynamically: II. Turbulence as a source of sound. *Proc. R. Soc. London Ser. A* **222** (1954), 1–32
- [13] TAM, C. K. W.: Jet Noise: Since 1952. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **10** (1998), 393–405
- [14] FREUND, J. B.: Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at Mach 0.9. *J. Fluid Mech.* **438** (2001), 277–305

- [15] FREUND, J. B.: Noise-source turbulence statistics and the noise from a Mach 0.9 jet. *Phys. Fluids* **15** (2003), 1788–1799
- [16] RIBNER, H. S.: Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise. *J. Fluid Mech.* **38** (1969), 1–24
- [17] SINAYOKO, S., AGARWAL, A. & HU, Z.: Flow decomposition and aerodynamic sound generation. *J. Fluid Mech.* **668** (2011), 335–350
- [18] SCHMIDT, O. T., TOWNE, A., COLONIUS, T., CAVALIERI, A. V. G., JORDAN, P. & A., Brès G.: Wavepackets and trapped acoustic modes in a turbulent jet: coherent structure eduction and global stability. *J. Fluid Mech.* **825** (2017), 1153–1181
- [19] TOWNE, A., CAVALIERI, A. V. G., JORDAN, P., COLONIUS, T., SCHMIDT, O., JAUNET, V. & A., Brès G.: Acoustic resonance in the potential core of subsonic jets. *J. Fluid Mech.* **825** (2017), 1113–1152
- [20] A., Brès G., JORDAN, P., JAUNET, V., LE RALLIC, M., CAVALIERI, A. V. G., TOWNE, A., LELE, S. K., COLONIUS, T. & SCHMIDT, O. T.: Importance of the nozzle-exit boundary-layer state in subsonic turbulent jets. *J. Fluid Mech.* **851** (2018), 83–124
- [21] COLONIUS, T. & LELE, S. K.: Computational aeroacoustics: Progress on nonlinear problems of sound generation. *Prog. Aerosp. Sci.* **40** (2004), 345–416
- [22] BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D.: Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible large eddy simulation. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **16** (2003), 273–297
- [23] FOYSI, H., MELLADO, M. & SARKAR, S.: Simulation and Comparison of Variable Density Round and Plane Jets. *Int. J. Heat Fluid Flow* **31** (2010), 307–314
- [24] UZUN, A. & HUSSAINI, M. Y.: Investigation of high frequency noise generation in the near-nozzle region of a jet using large eddy simulation. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **21** (2007), 291–321
- [25] BOGEY, C., MARSDEN, O. & BAILLY, C.: Influence of initial turbulence level on the flow and sound fields of a subsonic jet at a diameter-based Reynolds number of 10^5 . *J. Fluid Mech.* **701** (2012), 352–385
- [26] MENDEZ, S., SHOEYBI, M., A., Sharma, LELE, S. K. & MOIN, P.: Post-processing for large-eddy simulations for noise predictions. In: *Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs*, 2009
- [27] NICHOLS, J. W., HAM, F. E., LELE, S. K. & MOIN, P.: Prediction of supersonic jet noise from complex nozzles. In: *Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs* 2011
- [28] BRÈS, G. A., NICHOLS, J. W., LELE, S. K. & HAM, F. E.: Towards best practices for jet noise predictions with unstructured large eddy simulations. In: *Proceedings of the 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. New Orleans, Louisiana, June 2012 (AIAA Paper 2012-2965)
- [29] CETIN, M. O., MEINKE, M. & SCHRÖDER, W.: Numerical analysis of the impact of exit conditions on low Mach number turbulent jets. *Int. J. Heat Fluid Flow* **67** (2017), 1–12

- [30] MIHĂESCU, M., GUTMARK, E., SZASZ, R.-Z. & FUCHS, L.: Flow and acoustics of a coaxial nozzle: a sensitivity study to the inlet boundary conditions. In: *Proceedings of the 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, January 2006 (AIAA Paper 93-4326)
- [31] GEORGIADIS, N. J. & DEBONIS, J. R.: Navier-Stokes analysis methods for turbulent jet flows with application to aircraft exhaust nozzles. *Prog. Aerosp. Sci.* **42** (2006), 377–418
- [32] BOGEY, C., BARRÉ, S., JUVÉ, D. & BAILLY, C.: Simulation of a hot coaxial jet: Direct noise prediction and flow-acoustics correlations. *Phys. Fluids* **21** (2009), 035105
- [33] CASALINO, D & LELE, S. K.: Coupling of integral acoustics methods with LES for jet noise prediction. In: *Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program 2014*
- [34] LAWRENCE, J.: *Aeroacoustic interactions of installed subsonic round jets*, University of Southampton, Ph.D. Dissertation, 2014
- [35] HUBBARD, H. H.: *Aeroacoustics of Flight Vehicles: Theory and Practice, Volume 1: Noise Sources* / NASA. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1991. – Forschungsbericht
- [36] UZUN, A. & HUSSAINI, M. Y.: Large-eddy simulation of a wing tip vortex on overset grids. *AIAA Journal* **44** (2006), 1229–1242
- [37] WANG, M, MOREAU, S., IACCARINO, G. & ROGER, M.: LES prediction of wall-pressure fluctuations and noise of a low-speed airfoil. *Int. J. Aeroac.* **8** (2009), 177–198
- [38] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C.: Direct noise computation of the turbulent flow around a zero-incidence airfoil. *AIAA Journal* **46** (2008), 874–883
- [39] WOLF, W. R. & LELE, S. K.: Trailing-edge noise predictions using compressible large-eddy simulation and acoustic analogy. *AIAA Journal* **50** (2012), 2423–2434
- [40] KIM, D., LEE, G.-S. & CHEONG, C.: Inflow broadband noise from an isolated symmetric airfoil interacting with incident turbulence. *J. Fluid and Structures* **55** (2015), 428–450
- [41] PARK, G. I., WALLACE, J. M., WU, X. & MOIN, P.: Boundary layer turbulence in transitional and developed states. *Phys. Fluids* **24** (2012), 035105
- [42] SCHLATTER, P. & ÖRLÜ, R.: Turbulent boundary layers at moderate Reynolds numbers: inflow length and tripping effects. *J. Fluid Mech.* **710** (2012), 5–34
- [43] SANMIGUEL VILA, C., VINUESA, R., DISCETTI, S., IANIRO, A., SCHLATTER, P. & ÖRLÜ, R.: On the identification of well-behaved turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **822** (2017), 109–138
- [44] SANDBERG, R. D.: Direct numerical simulations for flow and noise studies. *Proc. Eng.* **61** (2013), 356–362
- [45] VINUESA, R., BOBKE, A., ÖRLÜ, R. & SCHLATTER, P.: On determining characteristic length scales in pressure-gradient turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **28** (2016), 055101

- [46] WINKLER, J.: *Investigation of trailing-edge blowing on airfoils for turbomachinery broadband noise reduction*, Universität Siegen, Ph.D. Dissertation, 2011
- [47] LUMMER, M., DELFS, J. W. & LAUKE, T.: Simulation of sound generation by vortices passing the trailing edge of airfoils. In: *Proceedings of the 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Breckenridge, Colorado, June 2002 (AIAA Paper 2002-2578)
- [48] JONES, L. E. & SANDBERG, R. D.: Direct numerical simulations of noise generated by the flow over an airfoil with trailing edge serrations. In: *Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Miami, Florida, May 2009 (AIAA Paper 2009-3195)
- [49] GLOERFELT, X. & LE GARREC, T.: Trailing edge noise from an isolated airfoil at a high Reynolds number. In: *Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Miami, Florida, May 2009 (AIAA Paper 2009-3201)
- [50] TAM, C. K. W.: Gap Tones. *AIAA Journal* **39** (2001), 1442–1448
- [51] KÖNIG, D., KOH, S. R., MEINKE, M. & SCHRÖDER, W.: Two-step simulation of slat noise. *Comput. Fluids* **39** (2010), 512–524
- [52] POWELL, A.: On edge tones and associated phenomena. *Acoustica* **3** (1953), 233–243
- [53] POWELL, A.: On the edgetone. *J. Acoustical Soc. America* **33** (1961), 395–409
- [54] ZAMAN, K.B.M.Q., FAGAN, A. F., BRIDGES, J. E. & BROWN, C. A.: Investigating the feedback path in a jet-surface resonant interaction. In: *Proceedings of the 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Dallas, Texas, May 2015 (AIAA Paper 2015-2999)
- [55] COLEMAN, G. N. & SANDBERG, R. D.: A primer on direct numerical simulation of turbulence - methods, procedures and guidelines / Aerodynamics & Flight Mechanics Research Group. School of Engineering Sciences, University of Southampton, UK, 2010. – Forschungsbericht
- [56] COLONIUS, T.: Computational aeroacoustics: Overview and numerical methods / California Inst. of Techn. (Caltech). 2006. – Forschungsbericht
- [57] FREUND, J. B., LELE, S. K. & MOIN, P.: Matching of near/far-field equation sets for direct computations of aerodynamic sound. In: *Proceedings of the 15th AIAA Aeroacoustics Conference*. Long Beach, CA, October 1993 (AIAA Paper 93-4326)
- [58] FLOWCS WILLIAMS, J. E. & HAWKINGS, D. L.: Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Proc. R. Soc. London Ser. A* **264** (1151) (1969), 321–342
- [59] EWERT, R. & SCHRÖDER, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *J. Comput. Phys.* **188** (2003), 365–398
- [60] EWERT, R. & SCHRÖDER, W.: On the simulation of trailing edge noise with a hybrid LES/APE method. *J. Sound Vib.* **270** (2004), 509–524
- [61] HENSHAW, W. D.: *OverBlown: A Fluid Flow Solver For Overlapping Grids, Reference Guide, Version 1.0*. Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, California: Centre for Applied Scientific Computing, 2003
- [62] JAMESON, A.: *Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1983

- [63] PREMASUTHAN, S., LIANG, C. & JAMESON, A.: Computation of flows with shocks using spectral difference scheme with artificial viscosity. In: *Proceedings of the 48th Aerospace Sciences Meeting*. Orlando, Florida, January 2010 (AIAA Paper 2010-1449)
- [64] WILLIAMSON, J. H.: Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comput. Phys.* **35** (1980), 48–56
- [65] CARPENTER, M. H. & KENNEDY, C. A.: Fourth-Order 2N-Storage Runge-Kutta Schemes / NASA. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1994. – Forschungsbericht
- [66] TAM, C. K. W.: *Computational Aeroacoustics: A wave number approach*. Cambridge University Press, 2012
- [67] GÜTELHÖFER, T.: *Implementierung eines Zeitintegrationsverfahrens und Adaption eines Fernfeldlösers in das Open-Source Framework Overture*, Universität Siegen, Lehrstuhl für Stömungsmechanik, MSc Thesis, 2016
- [68] HARDIN, J. C. (Hrsg.), RISTORCELLI, J. R. (Hrsg.) & TAM, C. K. W. (Hrsg.): *ICASE/LaRC Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics (CAA)*. Bd. NASA CP-3300. 1995
- [69] TAM, C. K. W. (Hrsg.) & HARDIN, J. C. (Hrsg.): *Second computational aeroacoustics (CAA) workshop on benchmark problems*. Bd. NASA CP-3352. 1997
- [70] HIXON, R., SHIH, S.-H., DONG, T. & MANKBADI, R. R.: Evaluation of generalized curvilinear coordinate transformations applied to high-accuracy finite-difference schemes. In: *Proceedings of the 36th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, Nevada, January 1998 (AIAA Paper 98-0370)
- [71] TAM, C. K. W. & DONG, T. Z.: Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *J. Comput. Acoust.* **4** (1996), 175–201
- [72] SCHÜTZ, D.: *Implementierung und Anwendung von asymptotischen Fernfeldrandbedingungen in den kompressiblen Strömungslöser des Open-Source Pakets Overture*, Universität Siegen, Lehrstuhl für Stömungsmechanik, MSc Thesis, 2015
- [73] TAM, C. K. W. & WEBB, J. C.: Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.* **107** (1993), 262–281
- [74] BOGEY, C. & BAILLY, C.: Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far field formulation and validation test cases. *Acta Acustica united with Acustica* **88** (2002), 463–471
- [75] TAM, C. K. W. & KURBATSKII, K. A.: High-order overset method for blade vortex interaction. In: *Proceedings of the 38th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, Nevada, January 2000 (AIAA Paper 2000-0218)
- [76] DELFS, J. W.: An overlapped grid technique for high resolution CAA schemes for complex geometries. In: *Proceedings of the 7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Maastrich, Netherlands, May 2001 (AIAA Paper 2001-2199)
- [77] LEE, Y. & BAEDER, J. D.: High-order overset method for blade vortex interaction. In: *Proceedings of the 40th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, Nevada, January 2002 (AIAA Paper 2002-0559)

- [78] SHERER, S. E.: Further analysis of high-order overset grid method with applications. In: *Proceedings of the 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Orlando, Florida, June 2003 (AIAA Paper 2003-3839)
- [79] DESQUESNES, G., TERRACOL, M., MANOHA, E. & SAGAUT, P.: On the use of a high order overlapping grid method for coupling in CFD/CAA. *J. Comput. Phys.* **220** (2006), 355–382
- [80] GUÉNAFF, R., TERRACOL, M., MANOHA, E., SAGAUT, P. & LEWANDOWSKI, R.: Theoretical and numerical aspects of a multidomain high-order method for CAA. In: *Proceedings of the 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Hilton Head, South Carolina, May 2003 (AIAA Paper 2003-3117)
- [81] CHICHEPORTICHE, J. & GLOERFELT, X.: Direct noise computations using overset grids. In: *Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Miami, Florida, May 2009 (AIAA Paper 2009-3403)
- [82] CHESHIRE, G. & HENSHAW, W. D.: Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations. *J. Comput. Phys.* **90** (1990), 1–64
- [83] SHERER, S. E. & SCOTT, J. N.: Comparison of highly accurate interpolation methods. In: *Proceedings of the 39th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, Nevada, January 2000 (AIAA Paper 2001-0282)
- [84] SHERER, S. E.: Scattering of sound from axisymmetric sources by multiple circular cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (2004), 488–496
- [85] COLONIUS, T., S.K., Lele & MOIN, P.: Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech.* **330** (1997), 375–409
- [86] BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D.: Numerical simulation of the sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal* **38** (2000), 2210–2218
- [87] BODONY, D. J.: Analysis of sponge zone for computational fluid mechanics. *J. Comput. Phys.* **212** (2006), 681–702
- [88] MANI, A.: Analysis and optimization of numerical sponge layers as a nonreflective boundary treatment. *J. Comput. Phys.* **231** (2012), 704–716
- [89] BOGEY, C., MARSDEN, O. & BAILLY, C.: Large-eddy simulation of the flow and acoustic fields of a Reynolds number 10^5 subsonic jet with tripped exit boundary layers. *Phys. Fluids* **23** (2011), 035104
- [90] BOGEY, C. & BAILLY, C.: Effects of inflow conditions and forcing on subsonic jet flows and noise. *AIAA Journal* **43** (2005), 1000–1007
- [91] BOGEY, C. & BAILLY, C.: Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering. *Comput. Fluids* **35** (2006), 1344–1358
- [92] PIERCE, B., MOIN, P. & SAYADI, T.: Application of vortex identification schemes to direct numerical simulation data of a transitional boundary layer. *Phys. Fluids* **25** (2013), 015102
- [93] CHONG, M. S., PERRY, A. E. & CANTWELL, B. J.: A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids A* **2** (1990), 765–777

- [94] HUNT, J. C. R., WRAY, A. A. & MOIN, P.: Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. In: *Center for Turbulence Research, Research Report CTR-S88*, 1988, 193–208
- [95] JEONG, J. & HUSSAIN, F.: On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* **285** (1995), 69–94
- [96] SHIH, S. H., HIXON, D. H. & MANKBADI, R. R.: Zonal approach for prediction of jet noise. *J. Propulsion and Power* **13** (1997), 745–752
- [97] BERLAND, J., BOGEY, C. & BAILLY, C.: Numerical study of screech generation in a planar supersonic jet. *Phys. Fluids* **19** (2007), 075105
- [98] BOGEY, C. & BAILLY, C.: Influence of nozzle-exit boundary-layer conditions on the flow and acoustic fields of initially laminar jets. *J. Fluid Mech.* **663** (2010), 507–538
- [99] HU, F. Q., HUSSAINI, M. Y. & MANTHEY, J. L.: Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics. *J. Comput. Phys.* **124** (1996), 177–191
- [100] FOYSI, H.: *Transport passiver Skalare in wandgebundener und isotroper kompressibler Turbulenz*, TU München, Ph.D. Dissertation, 2004
- [101] BODONY, D. J.: *Aeroacoustic Prediction of Turbulent Free Shear Flows*, Stanford University, Ph.D. Dissertation, 2004
- [102] MATHEW, J., LECHNER, R., FOYSI, H., SESTERHENN, J. & FRIEDRICH, R.: An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows. *Phys. Fluids* **15** (2003), 2279
- [103] BOGEY, C. & BAILLY, C.: A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comput. Phys.* **194** (2004), 194–214
- [104] TAM, C. K. W.: Computational Aeroacoustics: issues and methods. *AIAA Journal* **33** (1995), 1788–1796
- [105] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C.: Noise radiated by a high-Reynolds-number 3-D airfoil. In: *Proceedings of the 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Monterey, California, May 2005 (AIAA Paper 2005-2817)
- [106] WOLF, W. R.: *Airfoil aeroacoustics: LES and acoustic analogy predictions*, Stanford Univ., Ph.D. Dissertation, 2011
- [107] WINKLER, J., CAROLUS, T. & MOREAU, S.: Airfoil trailing-edge blowing: Broadband noise prediction from large-eddy simulation. In: *Proceedings of the 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Miami, Florida, May 2009 (AIAA Paper 2009-3200)
- [108] DAVIDSON, P. A.: *Turbulence-An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2004
- [109] HWANG, Y. F., BONNESS, W. K. & HAMBRIC, S. A.: Comparison of semi-empirical models for turbulent boundary layer wall pressure spectra. *J. Sound Vib.* **319** (2009), 199–217
- [110] GRAVANTE, A. M. S. Pand Naguib N. S. Pand Naguib, WARK, C. E. & NAGIB, H. M.: Characterization of the pressure fluctuations under a fully developed turbulent boundary layer. *AIAA Journal* **36** (1998), 1808–1816

- [111] CURLE, N.: The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proc. R. Soc. London Ser. A* **231** (1955), 504–514
- [112] DI FRANCESCANTONIO, P.: A new boundary integral formulation for the prediction of sound radiation. *J. Sound Vib.* **202** (4) (1997), 491–509
- [113] BRENTNER, K. S. & FARASSAT, F.: Analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surfaces. *AIAA Journal* **36** (1998), 1379–1386
- [114] UZUN, A., S., Lyrintzis A. & BLAISDELL, G. A.: Coupling of integral acoustics methods with LES for jet noise prediction. In: *Proceedings of the 42th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. Reno, Nevada, January 2004 (AIAA Paper 2004-0517)
- [115] UZUN, A., S., Lyrintzis A. & BLAISDELL, G. A.: Coupling of integral acoustics methods with LES for jet noise prediction. *Int. J. Aeroac.* **3** (2005), 297–346
- [116] SHUR, M. L., SPALART, P. R., STRELETS, M. K. & TRAVIN, A. K.: Towards the prediction of noise from jet engines. *Int. J. Heat Fluid Flow* **24** (2003), 551–561
- [117] NICHOLS, J. W., HAM, F. E. & LELE, S. K.: High-fidelity large-eddy simulation for supersonic rectangular jet noise prediction. In: *Proceedings of the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Portland, Oregon, June 2011 (AIAA Paper 2011-2919)
- [118] ZHONG, S. & ZHANG, X.: A sound extrapolation method for aeroacoustics far-field prediction in presence of vortical waves. *J. Fluid Mech.* **820** (2017), 424–450
- [119] SCHÜTZ, D. & FOYSI, H.: A FWH Method for Aeroacoustic Prediction in Presence of Vorticity and Convection. In: *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XIII*, Springer International Publishing, 2021
- [120] S., Lyrintzis A.: Integral Methods in Computational Aeroacoustics - From the (CFD) near-field to the (Acoustic) far-field. In: *Proceedings of the CEAS Workshop*. Athens, Greece, November 2002
- [121] NAJAFI-YAZDI, A., BRÈS, G. A. & MONGEAU, L.: An acoustic analogy formulation for moving sources in uniformly moving media. *Proc. R. Soc. Lond. A* **467** (2011), 144–165
- [122] CASALINO, D.: An advanced time approach for acoustic analogy predictions. *J. Sound Vib.* **261** (2003), 583–612
- [123] CASALINO, D., JACOB, M. & ROGER, M.: Prediction of rod - airfoil interaction noise using the Ffowcs-Williams-Hawkings analogy. *AIAA Journal* **41** (2003), 182–191
- [124] GHORBANIASL, G. & LACOR, C.: A moving medium formulation for prediction of propeller noise at incidence. *J. Sound Vib.* **331** (2012), 117–137
- [125] STROMBERG, J. L., MCLAUGHLIN, D. K. & TROUTT, T. R.: Flow field and acoustic properties of a Mach number 0.9 jet at a low Reynolds number. *J. Sound Vib.* **72** (1980), 159–179
- [126] ZAMAN, K.B.M.Q.: Far-field noise of a subsonic jet under controlled excitation. *J. Fluid Mech.* **152** (1985), 83–111
- [127] FOSSO, A., M. SANJOSÉ, M. & MOREAU, S.: Subsonic jet noise simulations using both structured and unstructured grids. *AIAA Journal* **53** (2015), 55–69

- [128] HUSSEIN, H. J., CAPP, S. P. & GEORGE, W. K.: Velocity measurements in a high-Reynoldsnumber, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet. *J. Fluid Mech.* **258** (1994), 31–75
- [129] ARAKERI, V. H., KROTHAPALLI, A., SIDDAVARAM, V., ALKISLAR, M. B. & LOURENCO, L.: On the use of microjets to suppress turbulence in a Mach 0.9 axisymmetric jet. *J. Fluid Mech.* **490** (2003), 75–98
- [130] PANCHAPAKESAN, N. R. & LUMLEY, J. L.: Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1. Air jets. *J. Fluid Mech.* **246** (1993), 197–223
- [131] SHUR, M. L., SPALART, P. R. & STRELETS, M. K.: Noise prediction for increasingly complex jets. Part I: Methods and tests. *Int. J. Aeroac.* **4** (2005), 213–246
- [132] SINAYOKO, S., WRIGHT, M. C. M. & D., Sandberg R.: A generalised Ffowcs-Williams and Hawkings formulation applied to flow simulations with vortical outflow. In: *Proceedings of the 22nd Int. Congress on Sound and Vibration*. Florence, Italy, July 2015
- [133] MOLLO-CHRISTENSEN, E., KOLPIN, M. A. & MARTUCELLI, J. R.: Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns. *J. Fluid Mech.* **18** (1964), 285–301
- [134] LUSH, P. A.: Measurements of subsonic jet noise and comparison with theory. *J. Fluid Mech.* **46** (1971), 477–500
- [135] LILLEY, G. M.: On the noise from jets / AGARD. 1974 (No. CP-131). – Forschungsbericht
- [136] CRIGHTON, D. G.: Basic principles of aerodynamic noise generation. *Prog. Aerosp. Sci.* **16** (1975), 31–96
- [137] LILLEY, G. M.: Jet noise: Classical theory and experiments. In: *Aeroac. of Flight Vehicles: Theory and Practice*. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1991 (NASA Reference Publication 1258, Vol. 1), 211–289
- [138] COLONIUS, T. & FREUND, J. B.: Application of Lighthill's equation to a Mach 1.92 turbulent jet. *AIAA Journal* **38** (2000), 368–370
- [139] SCHÜTZ, D. & FOYSI, H.: Investigation of Lighthill-Source Components in a Planar Jet-Wing-Flap Configuration. In: *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XIII*, Springer International Publishing, 2021
- [140] BOGEY, C.: *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*, Ecole Centrale de Lyon, Ph.D. Dissertation, 2000
- [141] HERR, M. & DOBRZYNSKI, W.: Experimental investigations in low-noise trailing-edge design. *AIAA Journal* **43** (2005), 1167–1175
- [142] HERR, M.: Design criteria for low-noise trailing-edges. In: *Proceedings of the 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2007* (AIAA Paper 2007-3470)
- [143] JAWORSKI, J. W. & PEAKE, N.: Aerodynamic noise from a poroelastic edge with implications for the silent flight of owls. *J. Fluid Mech.* **723** (2013), 456–479
- [144] VASILYEV, O. V., LUND, T. S. & MOIN, P.: A general class of commutative filters for LES in complex geometries. *J. Comput. Phys.* **146** (1998), 82–104