SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 17 • 2023**

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Mit Beiträgen von

H. Heske | M. Herrmann | A. Reichenberger | T. Reimers | R. Tobies | M. Wille |

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 17 (2023)

Mit Beiträgen von:
M. Herrmann | H. Heske | A. Reichenberger | T. Reimers
R. Tobies | M. Wille

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 17 (2023)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2023

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Nun liegt der siebzehnte Band der Siegener Beiträge vor. Diese stattliche Anzahl von erschienenen Bänden bezeugt deutlich, dass unsere Reihe von Autor*innen wie Leser*innen gut angenommen wird und also unser Gedanke, ein niederschwelliges und zugleich fokussiertes Publikationsorgan in den Bereichen Geschichte und Philosophie der Mathematik ins Leben zu rufen, richtig war.

Gleichzeitig fällt es zunehmend schwer, das Vorwort der Bände mit immer wieder neuen Kleinodien rund um das Stichwort "Sieb" zu schmücken — ein Kalauern mit der Anfangssilbe der Bandnummer hätte schon vor zehn Bänden etwas hilflos gewirkt und hätte auch dort auf nicht viel mehr als den alten Witz vom feinen Sand zurückgreifen können. Also belassen wir es — für diesmal! — bei einer etwas trockeneren Variante des Vorworts, nämlich einem kurzen Überblick über den Inhalt des Bandes.

Der Band vereint zunächst vier Aufsätze mit klar historischer Ausrichtung, wobei bei zweien auch ein Bezug zur Didaktik besteht, da es um ein historisches Lehrbuch geht oder eben um die Geschichte der Mathematikdidaktik. Den Auftakt macht Toni Reimers mit seiner Arbeit *18th-Century Mathematisation in the First Academic Mine-Surveying Textbook*. Reimers untersucht hierin die Rolle der Mathematik im ersten akademischen Lehrbuch des Markscheidewesens, veröffentlicht vom Wittenberger Mathematiker Johann Friedrich Weidler im Jahre 1726, und zeigt auf, wie insbesondere durch dieses Werk und den dort gewählten Ansatz die Markscheidekunst zu einer Teildisziplin der angewandten Mathematik wurde.

Renate Tobies beleuchtet eine *Allianz zwischen Wissenschaft, Staat und Industrie* im deutschen Kaiserreich, mit den zentralen Figuren Friedrich Althoff, preußischer Ministerialdirektor, und Felix Klein, Mathematiker und in seinem Fach reger Wissenschaftsorganisator. Sie trägt zahlreiche Quellen zusammen, aus denen sich deutlich erkennen lässt, wie diese "Allianz" entstand und insbesondere welche Bedeutung sie dafür hatte, dass Göttingen zur führenden Universität im Fach Mathematik wurde.

Mit seinem Aufsatz *„Gefüge versus Anwendungen“ – Kontroverse mathematikdidaktische Konzeptionen in der NS-Zeit und der Fall Otto Zoll* leistet Henning Heske einen wichtigen Beitrag zur (immer noch sehr fragmentarischen) Erforschung der Geschichte der Mathematikdidaktik in der NS-Zeit. Erstmals stellt er das bislang kaum bekannte Wirken des Mathematikers und Didaktikers Otto Zoll dar. Die konzeptionellen Ansätze des Mathematikunterrichts im Nationalsozialismus, die Heske herausarbeitet, beinhalteten bei allen Unterschieden stets eine starke Anwendungsorientierung auf der Grundlage der NS-Ideologie, die im Wesentlichen Indoktrination über fachliche Qualifikation stellte.

Ebenfalls zumindest teilweise in die Zeit des Nationalsozialismus fällt ein interessantes Beispiel *kollaborativer Forschung zwischen Philosophie, Mathematik und Anwendung*, dessen Geschichte Andrea Reichenberger sich in ihrem Beitrag widmet, nämlich den Arbeiten der Geschwister Elli und Heinrich Heesch zum Parkettierungsproblem. Für beide stellte die Machtergreifung der Nationalsozialisten einen Einschnitt dar, da sie ihre Habilitationen nicht abschließen konnten.

Der Band schließt mit zwei Beiträgen auf dem Gebiet der Philosophie der Mathematik. Matthias Wille stellt die *Kernthese der logischen Empiristen* auf den Prüfstand, dass es sich bei synthetischen Urteilen a priori im Sinne Kants nicht um eine sinnvolle Urteilskategorie handelt. Anhand einer argumentationstheoretischen Untersuchung kommt er zu dem Schluss, dass diese These, obwohl bis heute extrem einflussreich, gleichwohl unbegründet ist.

Mit Michael Herrmanns Beitrag dringen wir dann in tagesaktuelle Bereiche der wissenschaftstheoretischen Debatte vor, beschreibt er doch einen *Wandel von Statistik zu Maschinellem Lernen* und prüft, inwiefern es sich hierbei um einen Kuhn'schen Paradigmenwechsel handelt.

Allen Autoren sei nochmals herzlich für ihre Beiträge gedankt. Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Hannes Wagener für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow und Stefan Pracht für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

18th-Century Mathematisation in the First Academic Mine-Surveying Textbook

Toni Reimers

1 Introduction & Aim

With regard to the mathematical-scientific status of the 18th century, there are two diametrically opposed views in research on the history of science, which the Swedish historian of science Tore Frängsmyr (* 1938, † 2017) summarises as follows:

> "One dismisses the period as an uninteressting interval between the breakthroughs of the 17th century and the expanding industrialism of the 19th century. The opposing view holds that the 18th century was the time when all important work of the previous century bore fruit."[1]

An essential characteristic of the period – especially of the 18th-century mathematical textbook literature –[2] is the development and application of the so-called 'mathematical method' –[3] a method of exact definitions and the proof of propositions – which spilled over into much of the scientific literature of the Enlightenment: *l'esprit géometrique* and 'the quantifying spirit' respectively took hold.[4] The 18th century is thus particularly characterised by its 'systematisation' and 'quantification'. The 'systematisation' also found expression in the emergence of encyclopaedias: These include the first universal lexicons as well as extensive

[1] Frängsmyr, 1990, p. 27.
[2] Kröger, 2014, Reimers, 2023.
[3] Frängsmyr, 1975.
[4] Heilbron, 1990, pp. 1 sq.

dictionaries and specialised reference works such as the *Mathematifche Lexicon*[5] (1716) by the Central German Enlightenment philosopher Christian Wolff (* 1679, † 1754)[6] or the *Encyclopédie ou Dictionnaire Raifonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751) by the French philosopher Denis Diderot (* 1713, † 1784)[7] and Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (* 1717, † 1783)[8] and the *Groffe Univerfallexicon Aller Wiffenfchaften und Künfte* (1739) by the German publisher and bookseller Johann Heinrich Zedler (* 1706, † 1751)[9]. The US-American historian of science John Emmett Lesch (* 1945) describes 'systematisation' as an expression of the 'quantifying spirit' especially in the late Enlightenment and explains this as a genuinely mathematical approach of analytical and synthetic method:

> "In its first meaning analysis is indeed mathematical – or 'geometrical' in the 18th-century usage – refering especially to algebra. Enlightenment thinkers, however, allowed the term a wider formulation, 'analysis' refers to a double movement of analysis and synthesis by which the phenomena of a field are reduced to their elements, and then restructured into a true whole that can be known by reason [...]"[10]

During the so-called 'long Enlightenment' mathematical practice transformed not only through the development of new theories but also through

> "social rise of mathematics from a specialized activity whose practitioners were employed by monarchs of various kinds to a profession with most leaders holding professorships or analogous positions in state-supported organizations."[11]

The 'mathematisation' of the 18th century (as a process)[12] thus had three main dimensions, which concerned philosophy, the development and application of the subject itself, and instrumentation. The development and application of the subject also included, in particular, the progressive diversification of mathematical disciplines. This included the emergence of the concept of 'applied mathematics',[13] which preceded the emancipation of certain disciplines – such as mechanics and other (physical) sub-sciences – in the 19th century.[14] Therefore the emergence

[5] Wolff, 1716.
[6] Schmitt, 1998.
[7] Raupp, 2005.
[8] Bautz, 1990.
[9] Raupp, 2006.
[10] Lesch, 1990, p. 83.
[11] Grattan-Guinness, 2003, p. 31.
[12] In the following, 'mathematisation' is to be understood as the process of describing or recording an area of observation with the means of mathematics.
[13] Reimers, 2020a.
[14] Stichweh, 1984 & v. e. Pulte, 2018.

of the term 'applied mathematics' or *mathefis applicata* was no accident, but the terminological manifestation of 18th-century 'mathematisation'.

The aim of this article is to unfold and analyse the mathematics in the first 18th-century textbook of mining surveying that can be called 'academic': the *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* by the Wittenbergian mathematician,[15] Johann Friedrich Weidler (* 1694, † 1756), that was influential for two different groups of authors – practioners and scholars –[16] and opened up mine surveying mathematics to the academic public, as will be shown subsequently. To understand the 18th-century systematisation and quantification of Weidler, the application of the mathematical method and the meaning of definitions as well as the algebraisation and the linkage to practice will be studied. By analysing and contextualising it may exemplarily supplement the interdisciplinary studies on the history of science of the 18th century by Frängsmyr and John Lewis Heilbron (* 1934) as well as the investigations of the history and culture of mine surveying by Thomas Timothée Morel (* 1986),[17] on the one hand, and add the bibliographical longitudinal analysis of the mathematics-historical roots of mine surveying,[18] on the other hand. The last third of this article will take a synoptical view on the impact traces of Weidler's mathematisation.

The academic publications of Johann Friedrich Weidler as textbook author, have been successful and influential in the 18th century, not only in Germano-phone Europe.[19] He coined the term *mathefis applicata* for the textbook literature of universities.[20]

2 Influential Predecessors & Immediate Predevelopments for the Literature of Mining Surveying Textbooks

Until the 17th century, the literature about mining and mine surveying was rare and mostly a (re-)construction of knowledge by non-practitioners.[21] Scholars have

[15] For an introductory synopsis about Weidler as university professor, see Reimers, 2020b.
[16] See Zilsel, 2000, pp. 7–21 & Cormack, 2017, & cf. Cohen, 1994.
[17] Morel, 2023.
[18] Reimers, 2021.
[19] Reimers, 2023.
[20] Reimers, 2020a.
[21] Morel, 2023, pp. 20–39, Reimers, 2021.

commented on the miners' secrecy as early as the Renaissance.[22] With the spirit of the Enlightenment, however, open criticism emerged in the 18th century.

2.1 Voigtel's *Geometria Subterranea oder Marckſcheide-Kunſt*

Already in 1686, the mine surveyor and Saxonian mining official, Nicolaus Voigtel (* 1658, † 1714),[23] wrote in the preface *An den geneigten und Chriſtlich geſinnten Leſer* of his *Marckſcheide-Kunſt* that

> "[...] ſolche Kunſt von / den{en} meiſten Mar{c}kſcheidern dermaßen ſehr geheim gehalten worden, / da⟨ſs=ß⟩, wenn ſie ſchon ⟨j=i⟩emanden ſelbige zu le[h]r{n}en verſprochen haben, ſolches doch / nicht gänzlich ins Wer{c}k gerichtet; ſondern immernoch einen Sprung / vor ſich und in[s] geheim gehalten haben, da⟨ſs=ß⟩, wenn / der *Diſcipul* aus *Geometri*ſchen Grunde und be⟨i=y⟩wohnenden guten / *Judicio* ſich nicht ſelbſt{en} nachmals vollend[s] helf{f}en können, öf{f}er{s} / gro⟨ß=ſſ⟩e Unrichtigkeit vorlaufen müſſen."[24]

In his preface to the second edition he wrote that he was the first,[25] who established this subject. The mining historian Hans Baumgärtel (* 1927) states, it is possible that the writing[26] of the scholar and later mining official, Erasmus Reinholdus (* 1538, † 1592),[27] son of the Wittenbergian mathematics professor of the same name, was hardly known after more than 100 years.[28] Morel, on the other hand, argues that the mining surveyers obviously enjoyed the authority of their own 'peer group', even as authors, more highly than the (social group of) scholars:[29] At least for the *De Re Metallica Libri Duodecim* of the humanist and mining investor, Georg Agricola (* 1494, † 1555),[30] it can indeed be stated that his explanations concerning the art of mine surveying are not very practical.

[22] Long, 2011; Long, 1991.
[23] Günther, 1896.
[24] Voigtel, 1686.
[25] Voigtel, 1714a, q. v. *An den geneigten Leſer*, s. p.
[26] Reinholdus, 1574.
[27] Kühne, 2003a, v. e. Günther, 1889.
[28] Baumgärtel, 1965, p. 97.
[29] Morel, 2023, pp. 140 sqq.
[30] Hartmann, 1953.

Figure 1: Frontispiz from Voigtel's Marckſcheide-Kunſt.

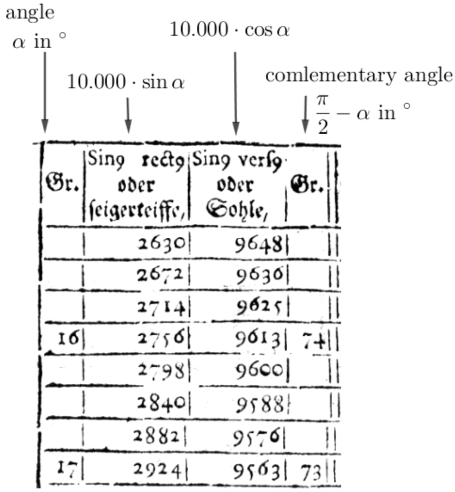
Voigtel presented all the *Markscheide* works in the form of texts – mathematical applications are verbally formulated and no variables or (algebraic) equations are used in his descriptions –, since his potential readership only had a simple education and thus learned the theory through practising. For the same reason, he also placed two *partes* on decimal arithmetic and the basics of geometry at the beginning of his book.[31] His *Pars 2.* is called *Von etlichen Geometriſchen Fundamenten*, but he clarified:

[31]Voigtel, 1686, pp. 1–20.

> "Ob zwar nicht ohne, da⟨ſs=ß⟩ zum Mar{c}kſcheiden man-/ cherle⟨i=y⟩ ⟨*g*=*G*⟩*eometri*ſche *Fundamenta* erfordert werden; ſin-/ tema{h}l ſelbiges auf{f} die *Geometria* gegründet ist: Weil / aber allhier unſere Me⟨i=y⟩nung nicht iſt, vollkö⟨mm=m̃⟩lich von / der *Geometria* zu ſchreiben, ſondern uns nur hieraus de⟨s=ß⟩ / *Fundaments* zu{er}holen, ſo ſ{e}⟨i=y⟩nd daher{o} nur etliche *Principia*, deren / ſich die *Praxis* ſtets gebrauch{e}t und füglich nicht entbehren kan[n], in nach-/ folgenden *Propoſitionibus* hierher geſetz{e}t."[32]

On the following two pages, Euclid's name is mentioned once in relation to his *Elements*, but without providing any substantial justification: This is not to be expected from Voigtel – after all, he himself wrote that he primarily focuses on the practice. Nor should one be misled by his "folgende *Propoſitionibus*" to believe that systematic mathematical statements are to be found in what follows: it is a limited collection "etlicher" – i. e., fewer – mathematical construction tasks, without justifying, let alone proving, their correctness. His practical orientation is also reflected in the frontispiece (Fig. 1) of his book: The essential attributes (i. e. instruments) for the performance of the work of a mine surveyor are eidetic there. This frontispiece was originally made for Voigtel's book. Furthermore, the depiction could be interpreted as a miniature placed on a pedestal, which presumably expresses the publisher's appreciation of the *Kunſt* he presented. Although it rather shines by its complexity and is – from an academic point of view – mathematically inaccurate, it did entail some innovations. Although not all of them have caught on, which militates for its application orientation: Decimal partitioning of the lachter measure,[33] iron discs as an angle-measuring instrument with 360° section.[34] According to Morel, Voigtel's book is the initiation for trigonometry being used in a printed publication to solve problems related to mine surveying,[35] which is eminent in view of the collegial connexion[36] as mathematics professors in Wittenberg between Reinholdus the Elder and Georg Joachim Rheticus (* 1514, † 1574)[37], a 'patriarch' of trigonometry.[38]

[32] Voigtel, 1686, p. 16.
[33] Voigtel, 1686, pp. 1–21.
[34] Voigtel, 1686, p. 24.
[35] Morel, 2013, p. 216.
[36] Schöneburg, 2010, p. 3.
[37] Kühne, 2003b.
[38] Reimers, 2021.



Gr.	Sin9 rect9 oder ſeigerteiffe,	Sin9 verſ9 oder Sohle,	Gr.
	2630	9648	
	2672	9630	
	2714	9625	
16	2756	9613	74
	2798	9600	
	2840	9588	
	2882	9576	
17	2924	9563	73

Figure 2: Extract of a part of Voigtel's sine- and cosine tables.

An example of Voigtel's mathematical 'inaccuracy', which is later modified and corrected by Weidler, are the remarks in *§ 11, Pars 5* on:

> "Welcher ⟨G=g⟩eſtalt zu *probi*[e]ren, ob man die ⟨Be=Auß⟩rechnung / eines get{h}anen und richtig eingeſchriebenen Zuges recht ge-/ ba{h}ret habe oder nicht."[39]

There he gives a rule – with reference to the Pythagorean hypotenuse theorem according to Euclid – although this is not generally valid, but only valid for similar triangles.[40] At the same time, however, this once again demonstrates Voigtel's claim to make the calculations of the *Markscheider* comprehensible. There are several tables in Voigtel's book. His sine and cosine tables are particularly noteworthy (Fig. 2): Even though Reinholdus' writing already contains trigonometric tables, cosine values – in Voigtel *ſinus verſus*, as opposed to *ſinus rectus* for the sine – appear for the first time in a *Markscheider*ian print. Here the fundamental quantity is 10,000, which is equivalent to Reinholdus.[41]

Voigtel's book was a great commercial success and was extensively distributed. The readership presumably included mine surveyors, cameralists and people in-

[39] Voigtel, 1714b, p. 98.
[40] Voigtel, 1714b, pp. 98 sq.
[41] Reinholdus, 1574, q. v. *Volget die Taffel, ſo zu den Circkeltrumen gehöret*, nach *Das 19. Capittel*, s. p.

terested in mining.[42] It was not a mathematical textbook, but it contained basic mathematical principles and was written in German or in miners' language: which makes its success all the more remarkable, but also explains why scholars had such a hard time understanding it. To a certain extent, practitioners regarded the miner and mining surveyer, Balthasar Rößler (* 1605, † 1673),[43] as the actual author. It was speculated that his manuscripts served as the foundation for further research – and Voigtel also 'only' describes himself as the editor.[44] Morel sums up:

> "[...] Voigtel and his best-seller should not lead us to belittle its cultural importance; it simply highlights a biased vision of the history of knowledge."[45]

2.2 Semantic Change from *Art* to *Science*

The mathematics and architecture professor Leonhard Christoph Sturm (* 1669, † 1719), who was active at the Brandenburg University of Frankfurt at the time,[46] – son of the mathematician and astronomer Johann Christoph Sturm (* 1635, † 1703) –[47] wrote in 1710 in volume V of his *Kurtzer Begriff der Geſamten Matheſis*:

> "Ich habe zwar ein / und ander[e]s ma{h}l mit Mar{c}kſcheidern, die / ſonst gar ⟨anſtändige=*honnête*⟩ Leute waren, geſprochen, / weil mir aber dün{c}kete, da⟨ſs=ß⟩ ſie etwas ge-/ heim mit der Kunſt waren, und wegen / Mangel der Sprache nicht recht mit ihnen / reden kon[n]te, mo⟨ch=g⟩te ich nicht weiter in ſie / bringen. So habe ich auch niema⟨nden=his⟩ *operi*[e]ren geſehen."[48]

Thereby he criticises the secrecy and also blatantly admits to have not even seen the mining practice: The phrase "ein und anders mahl [...] geſprochen" in the quote above, is probably rather the former in view of his erudite reconstruction of mining surveying *operating* – it is questionable whether this was really about "Marckſcheiden". Six years later it can (also still) be read in Christian Wolff's (* 1679, † 1754)[49] *Mathematiſches Lexicon* that "Dieſe Kunſt [...] iſt von den Marckſcheidern jederzeit geheim gehalten worden".[50] The *Univerſal-Lexicon*

[42] Morel, 2023, pp. 138 sq.
[43] Meixner et al., 1980.
[44] Baumgärtel, 1965, p. 96.
[45] Morel, 2023, p. 139.
[46] Ellwardt, 2013.
[47] Falckenberg, 1894.
[48] Sturm, 1710, p. 46.
[49] Schmitt, 1998.
[50] Wolff, 1716, col. 672.

(1739) by Johann Heinrich Zedler (* 1706, † 1751)[51], which, although it adopted some mathematical articles from Wolff, distinguishes itself by its 'modernity', as the former mechanic and current professor of the history of mathematics, Sergio Roberto Nobre (* 1957), pointed out in his dissertation (1994),[52] supervised by the renowned historian of mathematics and science, Hans-Ludwig Wußing (* 1927, † 2011),[53] should be also considered. In this *Univerſal-Lexicon*, however, which is devoted to mining surveying references in several articles at once, there is no longer any question of secrecy. It refers to Reinholdus' and Voigtel's and then eminently to Weidler's book:

> "Doch iſt nicht zu leugnen, da⟨ſs=ß⟩ dieſe zwe⟨i=y⟩ Bücher,/ ob ſie ſchon ſo nöt{h}ig und nützlich zu leſen ſind, den{en}-/ jenigen zu verſtehen allerdings beſchwerlich fallen / müſſen, ſo die Berg[manns]-Sprache, wie auch die zu dieſer / Wiſſenſchaft gehörigen Kunſt-Wörter nicht ver-/ ſtehen. Zu dieſem Ende hat Johann Friedrich / Weidler dieſe Wiſſenſchaft nach der Lehrart der Mathemati⟨k=c⟩-Lehrer abgehandelt, unter dem Ti-/ tel: *Inſtitutiones Geometriae Subterraneae* [...] Es [...] verdienet [...] mit Fleiß durchgeleſen zu werden."[54]

On the one hand, Weidler's *Inſtitutiones Geometriae Subterraneae* is highlighted – and also referred to in other articles about mining surveying –, on the other hand, there is no longer talk of "Kunſt" but now of "Wiſſenſchaft"[55] when it comes to the *Marckſcheide-Kunſt*. Although this conceptual change is a fundamental one of the Enlightenment, it also goes hand in hand with an actual academic upgrading, in that case. This can already be seen as part of the genesis of *Verwissenschaftlichung*. Weidler's *Inſtitutiones Geometriae Subterraneae* have played an essential part in this:

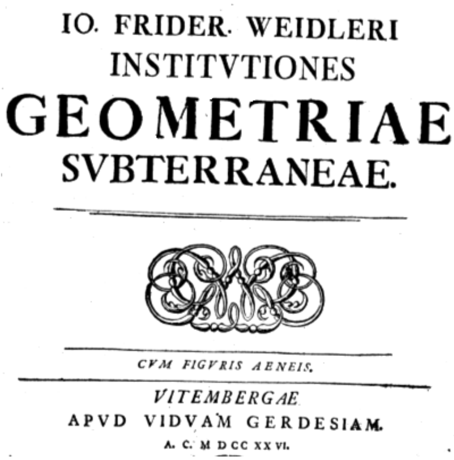
3 Weidler's *Inſtitutiones Geometriae Subterraneae*

Johann Friedrich Weidler had already been *ordinatius* for higher mathematics at the Leucorea for five years when he undertook a journey to Freiberg in the northern slope of the Erzgebirge in 1725, where he visited the Saint Laurentius mine, its mining machines and became accustomed with mine surveying:

[51] Raupp, 2006.
[52] Nobre, 1994.
[53] Vogt, 2010.
[54] Zedler, 1739.
[55] In Wolff's introduction, however, there is already talk of *Wiſſenſchaft*. Wolff, 1716, col. 672.

> "Ceterum illud, quoque lectorem latere nolo, me, huius / tractationis rectius fufcipiendae caufa, [... /...] Freibergam, montanarum ⟨M=m⟩ifniae urbium prin-/ cipem, pet⟨ī=ii⟩ffe, et non folum in profundas, quae a S[ancto] / Laurentio nomen habent, fodinas defcendiffe, eas-/ demque et reliquum metallicae rei apparatum lu-/ straffe, fed etiam fpeciatim de cryptarum dimenfione / illuftranda, cum peritiffimis illius artificii ⟨v=u⟩iris / egiffe, et eorum obfer⟨v=u⟩atis inftituti⟨s=f⟩que profeciffe."[56]

With this introductory sentence, Weidler to a certain extent distances himself from Leonhard Christoph Sturm and his speculative remarks *Von der Marckfcheide-Kunft.*[57]


IO. FRIDER. WEIDLERI
INSTITVTIONES
GEOMETRIAE
SVBTERRANEAE.

CVM FIGVRIS AENEIS.

VITEMBERGAE
APVD VIDVAM GERDESIAM.
A. C. M DCC XX VI.

Figure 3: Title page of Weidler's first edition of his Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1726).

Weidler commented in his *Differtatio de Juribus Mathematicorum* (1727) on certain juridical aspects of the *menfores fodinarum metallicarum*, i. e. of the *Markscheider.*[58] Subsequently, Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* will be examined with regard to content as well as, in part, certain mathematical, didactical and cultural-historical dimensions:

[56]Weidler, 1726a, p. 4.
[57]Sturm, 1710, pp. 44 sqq.
[58]Weidler, 1727, Cap. IV (= *De Juribus Geometrarum*), § 28, pp. 27 sqq.

3.1 Structure & Content

The first edition of the Weidlerian *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* is advertised by means of the title page with the copper engravings it contains (Fig. 3).[59] It appeared in 1726 in the publishing house of the widow of Christian Gerdes (× * 1672, † 1714)[60] in Wittenberg – a publishing house in which Weidler published more frequently (textbooks). By the part of the title – *Inftitutiones* – Weidler also identifies this publication – like his *Inftitutiones Mathefeos* –[61] as a (strict) textbook. Compared to Voigtel, whose book is adorned with a recipient-oriented frontispiece, Weidler's *praefatio*nes are adorned with no less programmatic heraldic vignettes:[62] Both vignettes, chosen by Gerdes, reflect the spirit of the Enlightenment. Whereas in Voigtel's work the focus is put on the mine surveyor and his (physical) work (Fig. 1), in Weidler's work the 'flames' (Fig. 4)[63] or the 'lighthouse' (Fig. 5)[64], which send their illuminating rays of knowlege power into the world, comprise the *Zeitgeist* of the period. The latter is particularly figurative in light of Weidler's recognition of Egyptian geometry in his *praefatio*nes. In this context one thinks of the latest of the classical 'Seven Wonders of the World': the *Turris Pharia*.

The first edition (1726) comprises 80 pages with 108 paragraphs, the second edition (1751) 88 with 105, the essential difference being the referencing to (updated) literature: thus, for example, in the first edition, with regard to mining surveying in general, 'only' the works of Agricola, Reinholdus, Voigel and Strum are received and in the second edition reference is also made to those of Rößler, August Beyer (* 1677, † 1753)[65] Friedrich Wilhelm von Oppel (* 1720, † 1769)[66] and Johann Gottfried Jugel (* 1707, † 1786)[67].[68] Both editions contain (the usual) trigonometric tables and – on folded pages – copperplate engravings of geometric figures, measuring instruments and measuring situations; both lack a table of contents.

Each paragraph is either *definitio*, *confectarium*, *fcholion*, *theorema* with *demonftratio* or *problema* usually with at least one *refolutio*. Among other things, especially

[59] Weidler, 1726b.
[60] „Gerdes, Christian" 2022, v. e. Reske, 2015, p. 1103.
[61] For this Weidlerian textbook, v. e. Reimers, 2023, pp. 230 sqq.
[62] Leonhard, 1978.
[63] Weidler, 1726c.
[64] Weidler, 1751a.
[65] Pieper, 1955, Beyer has in important role as author of the manuscript tradition, see Morel, 2018.
[66] Matzerath, 1999.
[67] von Gümbel, 1881.
[68] Weidler, 1726a, § 4, pp. 5 sq. & Weidler, 1751b, § 4, pp. 7–10.

Figure 4: Vignette above the Praefatio of Weidler's first edition of his Inſtitutiones Geometriae Subterraneae (1726).

Figure 5: Vignette above the Praefatio of Weidler's second edition of his Inſtitutiones Geometriae Subterraneae (1751).

'systematisation', this also reflects, the strict application of the 'mathematical method', which is Weidler's declared aim:

> "[...] Haec ars etiamſi inter noſtros foſſores egregie flore-/ at, tamen cum, ob faſtidia et pericula, quibus ſtipa-/ ta eſt, plerumque tantum tractetur a pragmaticis,/ mathematicarum ſcientiarum minus gnaris, et pro-/ pterea ab ipſis obſcurius nec ſolide ſatis tradatur,/ feci periculum, eiusdem paulo accuratius formandae,/ et ex purae matheſeos principiis demoſtrandae. [...] Conſtitueram idem / inferere inſtitutionibus mathematicis, post hydrau-/ licam [...]."[69]

His textbook should therefore address "those less experienced in the mathematical sciences". Thereby Weidler decided to formulate the art of *Markscheiden* "a little more precisely and to present it from the fundamental perspective of pure mathematics" or "prove it".

[69]Weidler, 1726a, pp. 3 sq. In the second edition – which will be referred to in the following – it is not written "et ex purae matheſeos principiis" but "et ex certis geometriae principiis", Weidler, 1751b, p. 3.

The following paragraph is particularly dedicated to a descriptive level to get a general overview of the content of Weidler's textbook and to compensate for its lack of a table of contents. Subsequently, selected didactic and general academic aspects are analysed and put into relation to those of other authors. This is necessary to avoid a mathematical-historical circular argument and to show what 'mathematisation' is and how it manifests itself.

The first four paragraphs deal with the art of mine surveying as a whole: They define *geometria fubterranea*, explain what survey measurements and the tasks of the surveyor are, and they review the survey literature.[70] Afterwards the terms in the right-angled triangle, mining angle measurement and angle measures as well as the terms *Mittagslinie*, *Schacht*, *Grube*, *Stolln*, *Steigende und Fallende* are defined.[71] After a remark on underground orientation, the miner's language and corresponding dictionaries are discussed and measures of length as well as their conversion and arithmetic are explained. Voigtel's demand for a *Decimallachter* and practical length measuring instruments are deliberated about.[72] It shifts to angle measuring instruments such as the water level, the protractor and the plumb, as well as the hanging compass, its advantages, history and how to use it.[73] Similar detail is then given on drawing tools as well as their use, handling, and calibration.[74] Afterwards, a longer *fcholion* about magnets and magnetism follows,[75] before explaining the angle guide and its usage, in addition to the setting compass and its advantages and uses.[76] After the *Stundenscheiben* are introduced, remarks on their use and handling, as well as on other tools and measuring instruments and the history of the magnetic needle follow, before moving on to the first (and only) *theorema*.[77]. This is a theorem about angle measurement – which will be discussed in more detail in the following subsection 3.2, as it is another unique feature of Weidler – and from which – after appropriate inference – a similarity problem with three solutions is derived (with modification instructions in case Voigtel's *Decimallachter* does prevail).[78] Before the trigonometric tables, the production of a table is expounded on in five steps with three examples.[79] The following paragraphs deal with measuring instructions of ferruginous and non-ferruginous pits as well as the evaluation of associated task solutions and the resolution as well as

[70]Weidler, 1751b, §§ 1–4, pp. 6 sqq.
[71]Weidler, 1751b, §§ 5–12, pp. 10 sqq.
[72]Weidler, 1751b, §§ 13–20, pp. 12 sqq.
[73]Weidler, 1751b, §§ 21–28, pp. 17 sqq.
[74]Weidler, 1751b, §§ 29–32, pp. 20 sq.
[75]Weidler, 1751b, § 33, pp. 21 sqq.
[76]Weidler, 1751b, §§ 34–38, pp. 24 sqq.
[77]Weidler, 1751b, §§ 39–44, pp. 26 sqq.
[78]Weidler, 1751b, §§ 45–47, pp. 30 sqq.
[79]Weidler, 1751b, § 48, pp. 33 sqq., for the tables see Weidler, 1751b, pp. 37 sqq.

calculation of a traverse (i. e. a polygonal chain).[80] In this context, a dimensional survey example is given as a table which application is explained,[81] before revolving about maps and plans: It is clarified what is meant by a floor plan, how to draw *seigere* shafts and how to make pit plans, while also giving practical advice on tearing in general.[82] This is followed by mapping with a setting compass, making a ground plan of iron-bearing pits, open-pit mapping and its implementation, including ichnography and an example, followed by a table on how to resolve an open-pit map.[83] Subsequently, the task of finding the *Seigerteufe* as a *Tage-Zug* as well as an associated control calculation in which the *hypothesis Voigteliana* is specified in detail,[84] are adressed. The mathematical content is dealt with in more detail in the following subsection 3.2. After solving the problem of staking out the horizontal line by means of a distinction of cases, it is a question of finding the *Tages-Örtung*, the evaluation of its solutions and discussion of possible sources of errors as well as the corresponding reversal task.[85] After legal remarks, there is a brief and general discussion on finding the shortest route or finding a breakthrough and the special case of a horizontal breakthrough, before turning to *Gänge* and *Klüfte* and their marking and turns, followed by special cases of standing and floating passages or galleries.[86] The following paragraphs deal with the general bearing: Finding, fallen gears, finding the gear position, finding the general strike of gears.[87] Finally, the *Seigerrifs* and the *Durchfchnitt* as well as the *Standrifs* and their making are explained and treated.[88]

Even though Weidler devotes himself to the "mathematicarum fcientiarum minus gnaris" his textbook is an academic one: Not only the Latin language but also the whole style, including the citation and reception of other authors (Tab. 1), testifies to this.[89] On the basis of sources it would only be possible to speculate about the book editions Weidler used, as the sources do not give a clear indication: His estate lists over two thousand books – in addition to maps, prints, correspondence, coins and instruments.[90]

[80] Weidler, 1751b, §§ 51–58, pp. 57 sqq.
[81] Weidler, 1751b, pp. 65 sq.
[82] Weidler, 1751b, §§ 60–64, pp. 66 sq.
[83] Weidler, 1751b, §§ 65–71, pp. 67 sqq., for the table see Weidler, 1751b, p. 71.
[84] Weidler, 1751b, §§ 73 sq., pp. 72 sqq.
[85] Weidler, 1751b, §§ 75–81, pp. 75 sqq.
[86] Weidler, 1751b, §§ 82–91, pp. 80 sqq.
[87] Weidler, 1751b, §§ 92–99, pp. 85 sq.
[88] Weidler, 1751b, §§ 100–5, pp. 86 sqq.
[89] See also in the bibliography.
[90] Universitätsbibliothek Erlangen–Nürnberg (UBEN), n.d.

Table 1: Received literature in Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae. Editio Altera (1751).

Author	(Short-)Title
Georg Agricola	*Bermannus*
id.	*De Natura Foffilium*
id.	*De Re Metallica*
Petrus Albinus	*Meißnische Land- vnd Berg-Chronica*
Christian Berward	*Interpres PhrafeologiæMetallurgiæ*
August Beyer	*Gründlicher Unterricht von Berg-Bau nach Anleitung der Marckfcheider*
Nicolas Bion	*Traité de la Conftruction et des Principaux Ufages des Inftrumentes des Mathématiques*
Publius Cornelius Tacitus	*De Origine et Situ Germanorum*
Christoph Herttwig	*Neues und vollkommenes Berg-Buch*
Johann Gottfried Jugel	*Gründlicher und deutlicher Begriff von dem ganzen Berg-Bau-Schmeltz-Wefen und Marckfcheiden*
Georg Kaspar Kirchmaier	*Inftitutiones Metallicae*
Athanasius Kircher	*Magnes five de Arte Magnetica*
Georg Engelhard von Löhneyß	*Bericht vom Bergwerck*
Titus Maccius Plautus	*Mercator*
Marin Mersenne	*Tractatus de Magnetis Proprietatibus infertus Cognitatis Phyfico Mathematicis*
Johann Christoph Nehring	*Hiftorifch-politifch-juriftifches Lexicon*
Friedrich Wilhelm von Oppel	*Anleitung zur Markfcheidekunft nach ihren Anfangsgründen und Ausübungen*
Gaius Plinius Secundus Major	*Naturalis Hiftoria*
Photios I.	*Bibliotheca*
Claudius Ptolomaeus	*Almagest*
Erasmus Reinholdus	*Vom Marckfcheiden kurtzer vnd gründlicher vnterricht*
Balthasar Rößler	*Speculum MetallurgiæPolitiffimum*
Abraham von Schönberg	*Ausführliche Berg-Information*
Leonhard Christoph Sturm	*Kurtzer Begriff der Gefamten Mathefis*
Nicolaus Voigtel	*Vermehrte Geometria Subterranea oder Marckfcheide-Kunft*
Johann Friedrich Weidler	*Inftitutiones Mathefeos*
id.	*De Inftitutionibus Aftronomiae Sphaericae*

Unlike the practical tradition which adapted – if at all – a certain humanistic style – as occasional Euclid references suggest, in Weidler's case the consulted literature plays a much greater role: Thus, while the practical tradition of the textbook literature on *Markscheidewesen* is especially characterised by Rößler as well as Voigtel but also by the mining official, Abraham von Schönberg (* 1640, † 1711),[91] and others and has rather little in common with the humanist literature of the scholars, which heavily and extensively draws upon ancient authors, there are – concerning mathematics in particular – only brief references to Euclid as an ancient author, who is not reflected upon in the relevant passages, but merely serves as an authorial fig leaf and certainly sufficed for the intended readership. In the Weidlerian, on the other hand, the literature is repeatedly referred to and its content taken up and reflected upon. Remarkably, in this respect Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* also differ from Sturm's 'scandalous' book, which in a sense also pretends to be an academic textbook, although it obviously is a 'blind' reconstruction by a scholar who, from his point of view, wants to make a contribution, but whose importance, against the background of missing information, must be perceived as highly questionable for scholarship – without discrediting Sturm too harshly.

Of course, the reception of classical, ancient literature plays a role in Weidler's work: It is part of the academic habitus, which has been part of reflective literary practice in scholarly circles since before the Renaissance. Examples of this are the revival of the works of Gaius Plinius Secundus Major (* 23/24, † 79 CE)[92] and Publius Cornelius Tacitus (* c. 58, † c. 120)[93] especially with regard to iron-working and historical explanations of magnetism.[94] It is redundant to note, that literature published after 1726 is not mentioned in the first edition. In any case, the influence of Agricola, Reinholdus and Voigtel are all the more important. To the latter Weilder – presumably conscious of that practical influence and commercial success of the *Vermehrte Marckfcheide-Kunft* – pays special attention: Voigtel is extensively received and consequently also corrected, as will be elaborated upon later.

Although some authors (Tab. 1) are addressed less often – which is of course due to the corresponding content for the Weidlerian explanations – the page-precise references and citations testify to a comprehensive study of the literature. The number of references alone is particularly eminent amidst a comparison with the previous publications on *Markscheidewesen* and allows the evaluation of Weidler's

[91] Jobst and Schellhas, 1994.
[92] Sallmann, 1972.
[93] Hanslik, 1975.
[94] Weidler, 1751b, p. 29. On the former and its reception in the Middle Ages, see Berger, 1974.

Inftitutiones Geometriae Subterraneae as the first academic-*scienti*fic textbook in this field:[95] One the one hand, contrary to Sturm's reconstruction, Weidler's explanations are knowledge-based, on the other hand they are free of mystical or occult argumentations, as for instance the ones in *Gründlicher und deutlicher Begriff* (1744)[96] of the Prussian montanist Johann Gottfried Jugel (* 1707, † 1786)[97] are. It is crucial to consider, if the observed matter follows the principles of science, when speaking of scientificity. Hereinafter, these will be discussed in particular with regard to those of mathematics:

3.2 Systematisation & Quantification – Mathematical Analysis & Unfolding Mathematisation

"Das Wissenschaftsverständnis der Aufklärung ist wohl durch keine andere Disziplin so stark geprägt worden wie durch die Mathematik" – the philosophy professor and historian of science Helmut Pulte (* 1956) stated.[98] On the one hand mathematics fulfil an epistemic and on the other hand an utilitarian leading function (i. e. originally *Leitfunktion*) as two sides of the same coin.[99] The structural scientific character of mathematics is also reflected in these leading functions. Conceptual clarity and definitions are essential organising aspects of any science in general, but of mathematics in particular.

Application of the Mathematical Method & the Meaning of Definitions

First and foremost to the order and structure: As already noted, in the Weidlerian *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* each paragraph is either *definitio*, *confectarium*, *fcholion*, *theorema* with *demonftratio* or *problema* mostly with at least one *refolutio*. The first three paragraphs already give an exemplary impression of the strict (mathematical) way of teaching with which Weidler assembles his textbook – also didactically:

> "Definitio ⟨prima=I.⟩/ [§] 1. *Geometria fubterranea* eft ars fodinas metiendi./ Germanicis ⟨v=u⟩ocatur *die Markfcheide-Kunft.*"[100]

[95] The adjective should be seen from an original Latin aspect – from the root, *sciens*, *-ntis*.
[96] Jugel, 1744.
[97] von Gümbel, 1881.
[98] Pulte, 2018, p. 222.
[99] Pulte, 2018, pp. 222 sq.
[100] Weidler, 1726a, § 1, p. 5.

The titular subject of the textbook is thus the art of measuring pits, in the mining sense, i. e. from which minerals are to be extracted. The verb of the infinitive group or the gerund, respectively, is to be seen quite practically here: Unlike Weidler's *Inftitutiones Mathefeos*, it is not about an abstract *quantitas* and what *metiri* or *menfurare* means in this general mathematical context of the 18th century,[101] but about concrete mining measurements. Weidler also still uses the contemporary *ars* term to place *geometria fubterranea* in a mathematical and thus scientific context, which is why – even though there was a general, late Enlightenment's semantic change with regard to 'art' and 'science' – in the subsequent period there finally is an increasing talk of *Markscheidewesen* as 'science'.

> "Definitio ⟨fecunda=II.⟩/ [§] 2. Totum hoc artificium commode ad *tria* praecipua / poteft re⟨v=u⟩ocari capita. *Primum* agit de *dimenfione/ cryptorum*, fecundum inclinationem ad horizontem,/ et directionem ad mundi plagas. *Alterum* docet *modum/ accedendi ad easdem*, tum terrae fuperficie, tum ex locis/ fubterraneis, adeoque de diftantiis puncti fodinae cuiusli-/bet, a dato fupra, ⟨v=u⟩el infra terram, puncto difquirit. *Ter-/tium* fpectat ad *defcriptiones fodinarum* ichnographicas, or-/thographicas et fcenographicas."[102]

The art of mine surveying can therefore be divided into three main tasks:

1. Pit measurements by inclination against the horizon and location by cardinal direction;

2. above and below ground, projected measurements by distance and point-wise position;

3. making cutaways of pits.

Whereas the *definitio prima* can be understood as a classical nominal definition, the *fecunda* defines the tasks of the art of marking in the sense of a conceptual explication, as it is not untypical for the Enlightenment: The most diverse types of classification of definitions play a rather subordinate role for the time before the 19th century:[103] But they become fundamental. As a nominal definition, the

[101]"*Quantitas*, quam unice mathefis/ tractat, quaeque *obiectum*, ut aiunt, illius exi-/ stit, perfpicue fatis defcribitur ab [...]/ *Weigelio*, quod fit *rerum finitarum deter-/ minatara-tio*, fi⟨v=u⟩e refpectus, quem habet quan-/ tum minus, menfurae instar affumtum, ad a-/ liud maius eiufdem naturae, quod cum pri-/ ori comparatur. ⟨U=V⟩nde etiam liquido ap-/ aret, quid fit *metiri* fi⟨v=u⟩e *menfurare*, nempe/ rationem quantorum minoris et maioris,/ quae natura con⟨v=u⟩eniunt, praecifius exquire-/ re, vel definire, quotiens minus a maiori capitatur.", Weidler, 1718, § III., p. 3

[102]Weidler, 1726a, § 2, p. 5.

[103]For types of definitions, see Gorskij, 1967, pp. 366–405.

definitio prima, for example, has the particular meaning of a term already introduced into scientific or colloquial language, which is explained or specified.[104] The *definitio fecunda* in a sense explicitly answers the question:[105] 'Which are the tasks of *Markscheidekunst*?' From the *definitiones prima fecundusque*, it follows the

> "Confectari⟨u=v⟩m ⟨primum=I.⟩/ [§] 3. Inde fuit, tum ufus huius artis ingens, tum officium men-/ foris. Nempe debet ille 1) Definire *fpatia*, intra quae me-/ talla quaerere alcui eft conceffum. 2) Monftrare acceffum/ *proximum ad fpecus.* 3) Indicare ⟨*v=u*⟩*ias*, per quas *aquae* e fodinis/ *adduci* queant. 4) Determinare *extenfiones*, *capita* et *concurfus*/ ⟨*v=u*⟩*enarum* et *fibrarum metallicarum.* 5) Promo⟨v=u⟩ere *circulum aeris*/ in fondinis, et *exhaltationem* ⟨*v=u*⟩*aporum noxiorum*, et quae funt fimi-/ lia. [...]."[106]

Thus, both the benefits of the mine-surveying art and the (main) tasks of the officials – i. e. the mine-surveyors – are derived:

1. to locate areas where metals are to be sought;
2. to locate mine workings;
3. to identify drainage routes;
4. to indicate strike and dip of veins and fissures;
5. to move air into the pits.

These tasks have a surveying – that is, a mathematical – focus: For more information on (other) tasks of the mining surveyors, Weidler refers to the literature.[107] The mining terms are linked with those of geometry: Thus the following definition which is refered to at the margin of figure 2 (from Fig. 6)[108] – can again be taken nominally and the terms are linked to the figure and the real object. From a didactical point of view, the iconic and symbolic levels are combined.

> "Definitio ⟨tertia=III.⟩/ [§] 5. In triangulo rectangulo A B C, AB cathetus, germ(anica){,}/ *Seigere-Teuffe*, BC{,} bafis, g(ermanica){.} *Sohle*, AC hypotenufa[,]/ germ(anica){.} *die Fläche*[,] ⟨v=u⟩ocatur."[109]

[104] Weidler, 1726a, § 1, p. 5.
[105] Weidler, 1726a, § 2, p. 5.
[106] Weidler, 1726a, § 3, p. 5.
[107] Weidler, 1726a, § 3, p. 5: In particular, reference is made to von Löhneyß, 1690 (?) and von Schönberg, 1693. See also Tab. 1.
[108] Weidler, 1726c, s. p.
[109] Weidler, 1726a, § 5, p. 6, in der Zweitausgabe wird noch ergänzt: „[...] AC hypote-/ nufa,/ germ(anica){.} *die Fläche*, it(a){.} *Donlege*, ⟨v=u⟩ocatur.", Weidler, 1751b, § 5, p. 10.

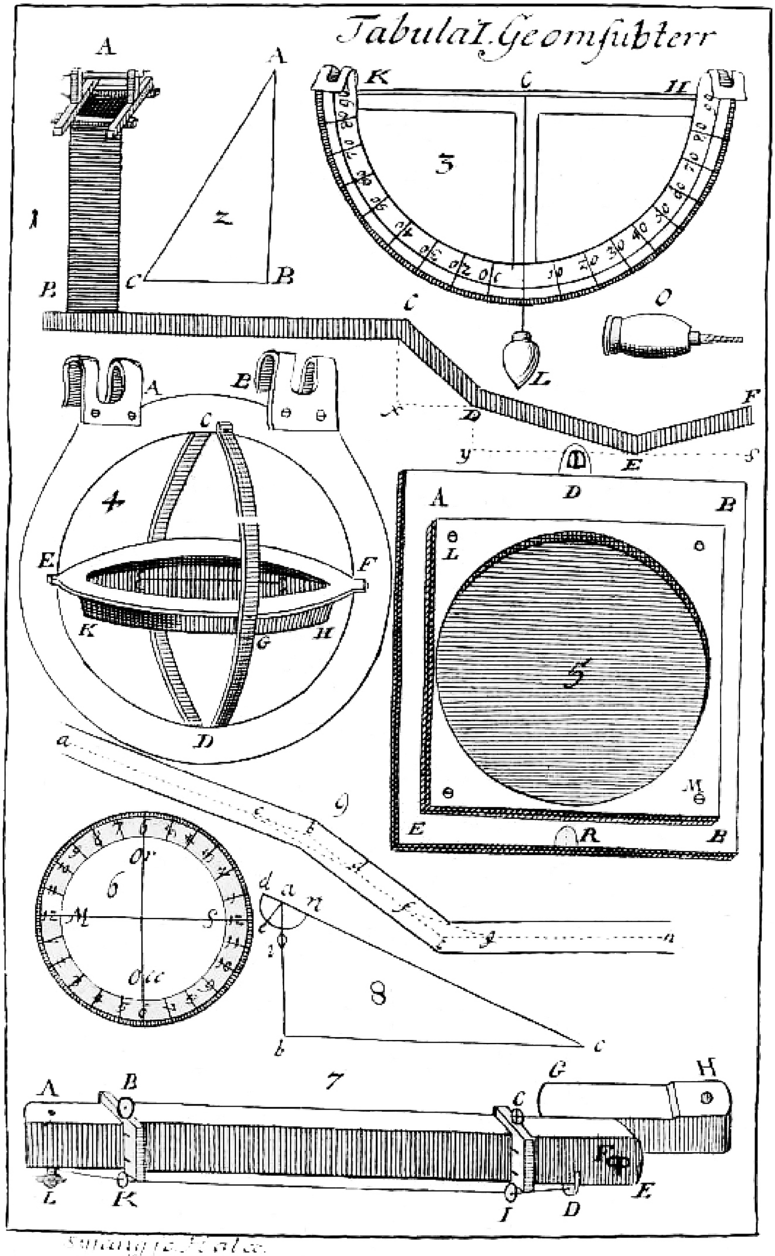


Figure 6: One of four large illustration pages from Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1751).

The importance of definitions and the conception as well as specific characteristics of the *methodus mathematicae* for Weidler can be reconstructed and elaborated on the basis of his *Insftitutiones Mathefeos*, which as a textbook can be classified in the *Anfangsgründe* 18th-century literature:[110] According to Weidler, the *methodus mathematicae* arised from the simplest concepts and data in order to – on their basis – then result in more complex and unknown statements,[111] and further:

> „[...] Hanc ut contingant mathematici/ metam, nulla utuntur ⟨v=u⟩oce, quae non ante/ clare explicata, atque ab omni aequi⟨v=u⟩oca-/ tione liberata eft, hasque explicationes *De-/ finitiones* nominant, quas di⟨v=u⟩idunt in *nomi-/ nales*, quando folum enumerantur characte-// res, pro re quapiam diftinguenda, neceffa-/ rii; et *reales*, in quibus praelerea genefis/ quoque alicuius quanti exponitur."[112]

Thus, in order to lead to more complex and unknown statements, the definitions are essential, which can be divided into 'nominal' and 'real' definitions. In doing so, Weidler apparently ties in with the concept of *Begriffszergliederung* – as the German philosopher Hans Werner Arndt (* 1930, † 2004) calls it. When speaking *Begriffszergliederung* a concept is (completely) based on *notationes irrefolubiles*, whose conceptual content is demonstrable in direct experience and which cannot be further dissected,[113], as they were also described by Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1646, † 1716) and Wolff.[114] In 1726 Wolff summarises his *mathematische Lehrart* as follows:

> "In meinem Vortrage der Sachen/ habe ich hauptfächlich auf dre⟨i=y⟩-/ erle⟨i=y⟩ gefehen, 1. da⟨fs=ß⟩ ich kein/ Wort gebrauchte, welches ich nicht erklä-/ ret hätte, wo durch den Gebrauch des Wor-/ tes fonst eine Zwe⟨i=y⟩deutigkeit entstehen// könnte oder es an einem Grunde des/ Beweifes fehlete; 2. da⟨fs=ß⟩ ich keinen Satz/ einräum{e}te, und im folgenden als einen/ Förder-Satz in Schlüffen zum Beweife/ anderer brauchte, den ich nicht vorher er-/ wiefen hatte; 3. da⟨fs=ß⟩ ich die folgende Er-/ klärungen und Sätze mit einander beftän-/ dig verknüpf{f}te, und in einer fteten Ver-/ knüpf{f}ung aus einander herleitete. Jeder-/ mann weiß, da⟨fs=ß⟩ dieses die Regeln find,/ nach welchen man fich in der Mathemati{c}k/ richtet. Und demnach kan[n]

[110] Reimers, 2023.
[111] Weidler, 1718, § VIII, p. 5.
[112] Weidler, 1718, § VIII, pp. 5 sq.
[113] Arndt, 1971, p. 136.
[114] For Leibniz see Arndt, 1971, pp. 99–103; for Wolff see Arndt, 1971, pp. 125–39.

ich mit einem/ Worte ſagen, ich habe mich befliſſen nach/ der mathematiſchen Lehr-Art meine Sa-/ chen vorzutragen."[115]

Thus Weidler is at the frontline of the presentation and application of the *methodus mathematicae* in his textbook, *Insſtitutiones Matheſeos* (1718). He presents the meaning of the definitions as follows:

> "A definitionibus pendent axioma-/ ta, [...] ſi⟨v=u⟩e enunciationes, quae illam prae-/ ſe ferunt e⟨v=u⟩identiam, ut quemlibet, qui de-/ finitiones no⟨v=u⟩it, absque prae⟨v=u⟩ia demon-/ ſtratione, ad conſenſum impellant. ⟨v=u⟩(erbi){.} g(ratia){.} to-/ tum eſt maius parte, fluit immediate ex idea/ totius et partis."[116]

Weidler is –[117] like Wolff, who also happens to have studied under Hamberger in Jena – influenced by the works of the mathematics professor and pedagogue Erhard Weigel (* 1625, † 1699)[118]. According to Arndt, the importance of definitions before axioms is an essential characteristic in the works of Leibniz and Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (* 1651, † 1708),[119] as Weidler also states in his *Insſtitutiones Matheſeos*. At this point he also explicitly refers to Tschirnhaus' *Medicina Mentis*,[120] in which Tschirnhaus directs attention to the interdependence of *axiomata* and *definitiones*.[121] An example of a real definition in Weidler's *Insſtitutiones Geometriae Subterraneae* is that of the *caverna perpendicularis* associated with figure 1 from Fig. 6:

> "Definitio ⟨sexta=IV.⟩/ [§] 9. *Ca⟨v=u⟩erna perpendicularis* A B a ſummo ad cryptas demiſſa,/ per quam eo deſcenditur, ⟨v=u⟩el aer admittitur, ⟨v=u⟩el/ metalla extrahuntur, inpoſterum *puteus*, germ(anica){.} *ein Schacht*,/ dicetur. Eius amplitudo differt, pro⟨v=u⟩ti ⟨v=u⟩el ſoli deſcenſui/ deſtinatur, ⟨v=u⟩el una extrahendis ex ca⟨v=u⟩ernna metallis et/ lapidibus, machina nempe tractoria, ſuper eum ſtatuta,/ aptatur. ⟨P=p⟩riore caſu, perticae metallicae dimidiae latus/ ſufficit, altero caſu, latitudo dimidiae perticae ſer⟨v=u⟩atur,/ et longitudini pertica una additur."[122]

[115] Quoted from Wolff, 1757, § 22, pp. 52 sq.; The lack of rigour in the application of the method has been sharply criticised by Lambert, among others: Lambert, 1771, § 11, p. 9.
[116] Weidler, 1718, § IX, p. 6.
[117] Weidler, 1718, § III., p. 3.
[118] Pfau, 1896.
[119] Splinter, 2016.
[120] Weidler, 1718, § IX, p. 6.
[121] von Tschirnhaus, 1695, p. 117.
[122] Weidler, 1726a, § 9, p. 7.

Not only is the term *Schacht* introduced and defined, but its two main functions – mineral extraction and ventilation – and the recommended dimensions of the shaft for these purposes are explained. It is a testimony to Weidler's aspiration to have application and practice in mind.

The Soviet historian of philosophy and theorist of science Dmitri Pavlovich Gorsky (* 1920, † 1994)[123] summarises the importance of definitions for science(s) in a generalised way with the following six points:[124]

1. The definitions of the initial terms of a scientific theory determine the content of the whole theory to a significant extent.

2. More or less 'rigid' rules are formulated for identifying and distinguishing the objects studied in a scientific theory in definitions.

3. Through the definitions, 'essential' properties of the defined objects are revealed in the empirical sciences. 'Essential' properties of the defined objects are revealed.

4. The definitions in axiomatic (including deductive) theories are a means of generating new truths.

5. The definitions are means of introducing new terms into science and play an important role in the conceptualisation of a scientific terminology in any branch of knowledge.

6. Definitions play a major role as a means of abbreviating complicated and long descriptions and complicated expressions in science.

Through the formulation of definitions alone, Weidler contributed an epistemic part to the genesis of mine surveying as a scientific discipline. His definitions must be seen in the context of his time: They do not satisfy the 'modern' day demands expected from the 19th century onwards, but make their contribution to the systematic treatment of the mine-surveying matter – also in the sense of 18th-century systematisation. After the terms have been (clearly) defined, appropriate conclusions and inferences can be drawn: Thus it consequently plays a decisive role for orientation and subsequent handling – depending on the task at hand – whether the passages are shafts, adits or their subtypes.[125] Because the art of mine surveying saw itself as a practical, rather artisanal, discipline, real definitions were crucial to this developing empirical science.

[123] Сидоренко, 2010.
[124] Gorskij, 1967, pp. 423–33.
[125] Weidler, 1726a, § 13, pp. 8 sq.

As a conlusion to this definitional aspect of the application of the *methodus mathematicae* it shall be shown by way of example that the real definitions in the context of other clauses do more:

> "Definitio ⟨undevicesima=XIX.⟩/ [§] 67. *Menſio ſubdialis* (*der Tage-Zug*) ⟨v=u⟩ocatur praxis, qua/ linearum ſupra terram, ſi⟨v=u⟩e in ſuperficie terrae ex-/ tenſarum, ſitus, tum qua inclinationem ad horizontem,/ tum qua con⟨v=u⟩erſionem ad plagas mundi, in⟨v=u⟩eſtigatur et/ definitur."[126]

In connexion with the following paragraph, together with an exemplary table (Fig. 7)[127] and a corresponding figure (Fig. 8), the paragraph of the quote implements more than a definition of the term *menſio ſubdialis*:[128] The *Tage-Zug* is thus associated with a set of measurable quantities that cast this real definition in an operational light. The exemplary table (Fig. 7)[129] shows how the *menſio ſubdialis* is broken down into twelve dispositional characteristics. These quantifiable characteristics are essential features of 'oprational definitions'[130] and accommodate 'the quantifying spirit' which can also been found in the late 17th-century manuscript tradition.[131] At the same time, the table provides an example to suggest how to systematically fix his data to the recipient. The table (Fig. 7) explicitly refers to figure 20 (Fig. 8)[132] and also, to the corresponding task(s) or remarks.[133] A systematic representation consists – Arndt states – according to Wolff essentially in the *connexion* or the *nexus* of the statements brought into the system: He already regards someone as a "ſyſtematis conditor", "qui veritates apud alios autores obvias ſuoque fini accomodas eligit et inter ſe connectit".[134] Weidler establishes this *nexus* conceptually – through his definitions –, iconically – through his (corresponding) illustrations – and practically – through (corresponding) tables or suggestions for inclusion: After all, his work of only 88 pages bears the title component *Insſitutiones*, which marks it as a textbook, by which he obviously – apart from the application of the *mathematical method* indicated in the *praefacio* – also pursues a didactic aim. In this respect, the advertising with *cum figuris aeneis* (Fig. 3) is not only of a marketing nature, but also a characteristic of a (beginning) descriptively presented lesson in *geometria ſubterranea*.

[126] Weidler, 1726a, § 67, p. 63.
[127] Weidler, 1726c, p. 65.
[128] Weidler, 1726c, s. p.
[129] Weidler, 1726c, p. 65.
[130] Rößler, 1998, pp. 67–72.
[131] Morel, 2018.
[132] The ✠ marks exactly the place of the above-ground or below-ground mark respectively
[133] Weidler, 1726a, §§ 68–72, pp. 63–66.
[134] Arndt, 1971, p. 127.

Menſio ſubdialis reſoluta.

1. Loca Mundi.	2. Cad. et ſurgent.	3. Gradus librae.	4. Uln. et 8uae	5. Digiti	6. Horae Compaſſi.	7. Octau. hor.	8 Baſes: Ulnae	8 Baſes: Octauae	8 Baſes: Digiti	9 Catheti ſurgentium.: Ulnae	9 Catheti ſurgentium.: Octauae	9 Catheti ſurgentium.: Digiti	10 Catheti cadentium.: Ulnae	10 Catheti cadentium.: Octauae	10 Catheti cadentium.: Digiti	11. Signa	12. Annotationis
—	ſ.	90	¾	8	—	—	—	—	—	—	6	80	—	—	—	—	a lin. horiz. ad punct. prehenſionis.
ME.	ſ.	9½	1¾	—	12	¼	1	4	1	—	6	88	—	—	—	—	uſq. ad palum primum c.
OC.	ſ.	5¼	[illegible]	2	3	¾	10	4	8	—	7	78	—	—	—	—	ad palum d.
OC.	ſ.	4½	[illegible]	3	3	[illegible]	10	5	—	—	6	67	—	—	—	—	ad palum e.
OC.	ſ.	9	[illegible]	6	3	¾	10	2	5	2	1	56	—	—	—	—	ad palum f.
ME.	ſ.	4¾	10½	8	2	2	10	4	5	—	6	26	—	—	—	—	ad palum g.
ME.	ſ.	6¾	10½	7	2	2	10	4	2	1	1	20	—	—	—	•	ad palum h.
ME.	ſ.	7	9⅛	5	2	4¼	9	—	9	1	—	90	—	—	—	—	ad palum ſept. & ult. i. ſiue ad machinam tractoriam puteo imminentem.
										8	6	05					
S.	c.	77	3¾	5	11	5	—	6	8	—	—	—	3	5	69	—	Hinc in ipſum puteum perrectum eſt.
	c.	90	½	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	50	—	
													4	2	19		

Fig. 20.

Figure 7: Example table for the resolution of a Tage-Zug *(see also Fig. 8) from Weidler's Inſtitutiones Geometriae Subterraneae (1726).*

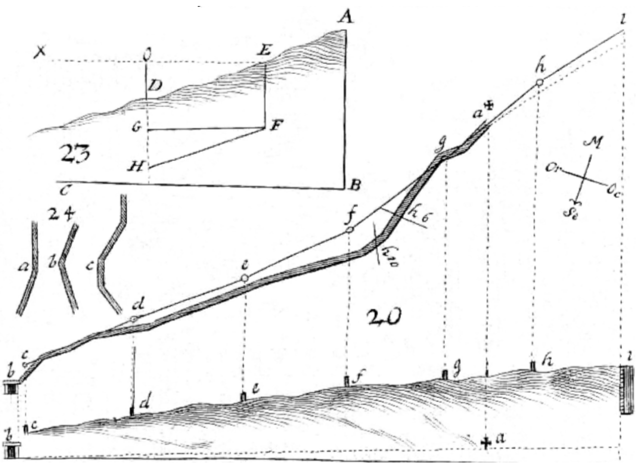


Figure 8: Ichnograph of the example Tage-Zug *(see also Fig. 7) from Weidler's Inſtitutiones Geometriae Subterraneae (1726).*

Algebraisation

Another essential innovation that Weidler brings into the literary context of mining, so to speak, is the algebraisation of geometric facts. Of course, this is not to be understood as the algebraisation *à la* Johann Carl Friedrich Gauss (* 1777, † 1855)[135] in the 19th century, but rather as the recording and calculation of geometric facts by *Buchftabenrechnung* or -*algebra*, as it was already very well established in the more narrowly defined mathematical context at the beginning of the 17th century at the latest.[136] Accordingly, while it is not new *per se* that variables, terms and equations are used in (calculating) geometry, in Agricola, Reinholdus and Voigtel in particular, corresponding formulae – if they are formulated at all – are given verbally in textual sentence form. An example is Weidler's correction of the *regula Voigtelii* or *hypthefis Voigteliana*,[137] in which Voigtel gives a rule for the control calculation of an executed *Zug*. Weidler shows that this rule – given in general by Voigtel – can only be applied to (polygonal) chains of similar right-angled triangles: According to Voigtel, for any two right-angled triangles, the square of the sum of the two hypotenuses is equal to the sum of the squares of the sums of the cathets:

> "Welcher Geftalt zu *probi*[e]ren on man in ⟨Be=Auß⟩rechnung/ eines get{h}anen und richtig eingefchriebenen Zuges recht ge-/ ba{h}r{e}t habe oder nicht./ Man rechnet aller gezogenen und richtig eingefchriebenen Win{c}kel oder Schnüre (*Hypotenufen*{,}) [...] mit Fleiß zusammen, und *noti*[e]r{e}t deren Sum-/ m⟨e=a⟩; Ferner rechnet man auch aller Win{c}kel oder Schnüre ihre Soh-/ len (*Basen*) zusammen, und *noti*[e]r{e}t ingleichen deren Summ⟨e=a⟩. End-/ lich *addi*[e]r{e}t man nicht weniger aller Win{c}kel Seigerteuf{f}en (*C*{*h*}*atheten*)/ [...] deren Summ⟨e=a⟩ *q*⟨*u=v*⟩*adri*-/ [e]r{e}t man, wie auch die Summ⟨e=a⟩ der Sohlen (*Bafen*) und *addi*[e]r{e}t/ beide *q*⟨*u=v*⟩*adrata*, [...] der *Calculus* oder Betrag ift, [...] bi⟨s=ß⟩ auf ein weniges gleich [...] der Summ⟨e=a⟩ der gezogenen Schnü-/ re [...]"[138]

Ergo – with the notations from Fig. 9 – for Voigtel i. e.:

$$(a+b)^2 = x^2 \quad \wedge \quad (c+d)^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad (a+c)^2 + (b+d)^2 = (x+y)^2 \,. \qquad (1)$$

[135] Stuloff, 1964.
[136] Scriba and Schreiber, 2010, pp. 323 sqq.
[137] Weidler, 1726a, § 74, pp. 67 sq.
[138] Voigtel, 1714b, p. 98; note that he does not consistently distinguish between side lengths – which he calls *Schnüre* – and angles; note also that in this particular quotation, the round brackets correspond to the original and are not to be understood text-critically.

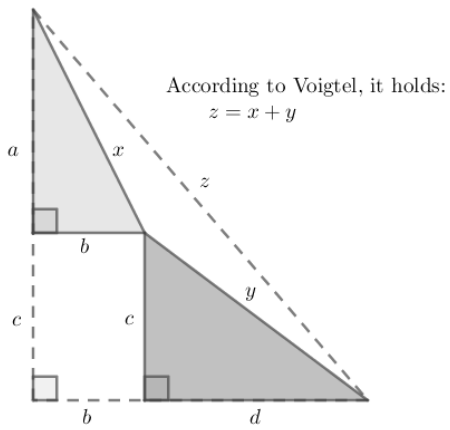


Figure 9: Visualisation of the Voigtelii regula.

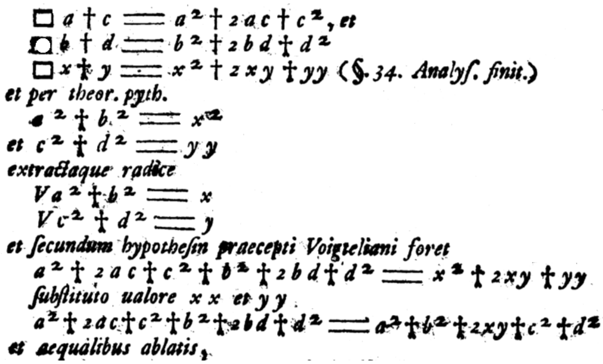
He supports this with examples and attributes the deviations to *falfch*ness or *bey-nahe*ness – basically to rounding due to irrationality.[139] In fact, however, he (only) fails to recognise the presupposed similarity of the two right-angled triangles, which is lacking for his statement to be considered correct. However, it is also possible that this is perfectly clear to him and that he is simply not expressing himself clearly (mathematically) enough: So perhaps he means more than he writes. Here Weidler gives an indirect proof,[140] to show the necessity of the similarity. To do this, he algebraises Voigtel's verbal rule in the form of equations, assumes that the latter's assertion is true, and by means of equivalent transformations leads to an equation from which it is evident that the right-angled triangles must be *fimilia*r. The core of Weidler's transformation shall be briefly traced in modern notation: Obviously it holds – with the designations from Fig. 9 – it is valid that

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+c)^2 + (b+d)^2 \\ &= \underbrace{a^2+b^2}_{=x^2} + \underbrace{c^2+d^2}_{=y^2} + 2\cdot(a\cdot c + b\cdot d) \end{aligned}$$

and Voigtel's assertion (1) whereupon

$$z^2 = (x+y)^2$$

[139]Voigtel, 1714b, p. 99.
[140]Weidler, 1726a, § 74, pp. 67 sq.



$\square\, a \dagger c = a^2 \dagger 2ac \dagger c^2$, et
$\square\, b \dagger d = b^2 \dagger 2bd \dagger d^2$
$\square\, x \dagger y = x^2 \dagger 2xy \dagger yy$ (§. 34. Analyſ. finit.)
et per theor. pyth.
$a^2 \dagger b^2 = x^2$
et $c^2 \dagger d^2 = yy$
extractaque radice
$\sqrt{a^2 \dagger b^2} = x$
$\sqrt{c^2 \dagger d^2} = y$
et ſecundum hypotheſin praecepti Voigteliani foret
$a^2 \dagger 2ac \dagger c^2 \dagger b^2 \dagger 2bd \dagger d^2 = x^2 \dagger 2xy \dagger yy$
ſubſtituto ualore xx et yy
$a^2 \dagger 2ac \dagger c^2 \dagger b^2 \dagger 2bd \dagger d^2 = a^2 \dagger b^2 \dagger 2xy \dagger c^2 \dagger d^2$
et aequalibus ablatis,

Figure 10: Exemplary extract for algebraisation from Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1726).

holds, it follows

$$\begin{aligned} 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot d) &= 2 \cdot x \cdot y \\ 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d &= a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2. \end{aligned} \tag{2}$$

The equation

$$1 = \frac{a \cdot d}{2 \cdot b \cdot c} + \frac{b \cdot c}{2 \cdot a \cdot d}$$

resulting from (2) is only fulfilled in the case of similarity – i. e. a correspondingly equal ratio of the sides to each other. At the appropriate places, Weidler refers to paragraphs from his *Inftitutiones Matheseos* on the Pythagorean hypotenuse theorem, on the binomial formulae (Fig. 10)[141] and the similarity theorems for triangles. In this way he links *Markscheider*ian calculations with mathematical statements more than, for example, Agricola, Reinholdus, Voigtel or Sturm, who – if at all – refer to Pythagoras. After he has refuted or limited the general validity of the *regula Voigtelii*, Weidler also provides – quite in the manner of textbooks of that time and today – an adequate calculation example to make the previous explanations more comprehensible.

[141] Weidler, 1726c, p. 67.

Linkage & Substantiating the Practice of *Markscheider* with Mathematical Theory

Weidler's declared aim is to *inferere inftitutionibus mathematicis*,[142] into *Markscheidewesen*. Consequently, he formulates his statements and a central theorem, which follows the contemporary analytic-synthetic proof structure in its *demonftratio*. It is formulated from the practical perspective of the angle measurement situation and textually linked to figure 8 (Fig. 6):

> "Theorema/ [§] 45. Filum in libella pondere attractum, monftrat/ gradus anguli acuti C, qui eft in triangulo/ rectangulo ad bafin."[143]

Fig. 11[144] shows Weidler's original text of the theorem and its proof from the first edition with German translation and analytical-synthetic proof structure. The first part of the proof follows the analytical principle of dissection with mathematical terms as well as corresponding references from his *Inftitutiones Mathefeos* – for example, to complement angles or the internal angle sum theorem – and the last part follows a synthetic principle that focuses on concrete handling for the practitioner, just in the way the theorem is formulated. From a purely mathematical – geometrical – point of view, the proof is already given after the first part, but Weidler once again gives an operative-ostensive reasoning that is comprehensible to the practitioner from the measurement situation. As practically comprehensible as this reasoning may be intended to be for the mining surveyor, it should of course be noted once again that the common mining surveyor had no in-depth knowledge of Latin and that this mathematical insight usually remained unexplorable to him. Based on the foundation of the theorem, Weidler now constructs a task building of a whole succession of *problema*ta of the *Markscheidekunst* and their *refolutio*nes. Thus directly the

> "Problema ⟨primum=I.⟩/ [§] 47. Data hypotenufa et angulis trianguli rectanguli, in⟨v=u⟩enire/ cathetum et bafin."[145]

He presents three variants for its solution and incidentally briefly introduces the trigonometric relations in the right triangle. In the first case, in which he argues about the trigonometric ratios, he again follows up with a corresponding *exemplum*.[146] In the second case, the task is solved via measurement – with instruments

[142] Weidler, 1726a, pp. 3 sq.
[143] Weidler, 1726a, § 45, p. 24.
[144] Weidler, 1726c, § 45, pp. 24 sq.
[145] Weidler, 1726a, § 47, p. 25.
[146] Weidler, 1726a, § 47, pp. 25 sq.

THEOREMA.

45. *Filum in libella pondere attractum, monſtrat gradus anguli acuti C, qui eſt in triangulo rectangulo ad baſin.*

Demonſtratio. Nam filum *a i* ſemper indicat trianguli perpendiculum, (§. 34. 35. *Geometr.*) et arcus *i n* metitur angulum acutum, qui eſt in trianguli rectanguli uertice, ergo arcus complementi, ſiue reſiduus in quadrante *e i*, angulum complementi ad baſin *C* metitur, (§. 64. *Geom.*) ſiquidem

apparet ex intuitu ſchematis tertii, gradus in libella a ſemicirculi medio numerari, ergo filum pondere in libella tractum indicat numerum graduum anguli, qui in triangulo rectangulo eſt ad baſin, Q. E. D.

The tightened string in the applied scale shows the acute angle *C*, that is at the base of the right triangle.

Proof:

For the cord *a i* always shows the perpendicular of the triangle and the arc *i n* measures the acute angle, which is in the vertex of the right triangle, so the complementary arc or the rest in the quadrant *e i*, measures the complementary angle to the base *C*, — mathematical analysis

For it appears from the third figure that the degrees of the protractor are counted from the centre of the semicircle, so the cord stretched by the weight in the protractor indexes the degree of the angle, that is at the base of the right triangle. — practical sythesis

Figure 11: Analytical-synthetic proof structure from Weidlers Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1726).

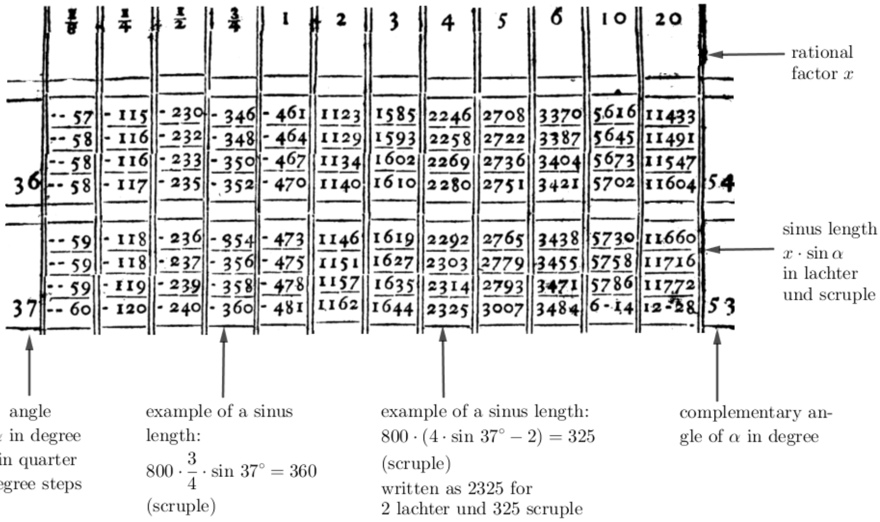
other than those used in the theorem. In the last case, he uses his trigonometric tables, which will be briefly discussed in the following paragraph.

Although Weidler does not explicitly write about the concrete economic benefit of mining at any point – except implicitly from a civilisational perspective in his *praefatio*: after all, his admiration for the Egyptians resonates –, his solutions speak for an efficient handling and solution of distinctive problems: The trigonometric tables, which Weidler – like Reinholdus and Voigtel before him – provides, also help. To their application and independent production he dedicates the

> "Problema ⟨secundum=II.⟩/ [§] 48. Tabulas componere, ex quibus, ab⟨s=f⟩que laboriofo calculo, cathe-/ tus et bafis trianguli rectanguli, quae datae hypotenufae, et/ angulo eidem adiacenti, refpondent, excerpi queant."[147]

This is again followed by examples and he appreciatively discusses Voigtel's tables referring to his *Decimallachter* against the background of their non-enforcement among the mine surveyors: Consequently, Weidler prefers to base his further remarks on the octolosection of the eighth as it was still common among the miners of his time and has 'favourable' divisor properties – for $8 = 2^3$. Weidler's tables differ from those of Reinholdus, which functioned as mere unitless trigonometric tables, and reflect Weidler's literature study once more, even his studies of the practitioners. His tables are based on concrete units (1 lachter = 800 scruples) and give them corresponding sine lengths of the associated angles in quarter-degree

[147] Weidler, 1726a, § 48, p. 26.



	1/8	1/4	1/2	3/4	1	2	3	4	5	6	10	20	
	-- 57	- 115	- 230	- 346	- 461	1123	1585	2246	2708	3370	5616	11433	
	-- 58	- 116	- 232	- 348	- 464	1129	1593	2258	2722	3387	5645	11491	
	-- 58	- 116	- 233	- 350	- 467	1134	1602	2269	2736	3404	5673	11547	
36	-- 58	- 117	- 235	- 352	- 470	1140	1610	2280	2751	3421	5702	11604	54
	-- 59	- 118	- 236	- 354	- 473	1146	1619	2292	2765	3438	5730	11660	
	-- 59	- 118	- 237	- 356	- 475	1151	1627	2303	2779	3455	5758	11716	
	-- 59	- 119	- 239	- 358	- 478	1157	1635	2314	2793	3471	5786	11772	
37	-- 60	- 120	- 240	- 360	- 481	1162	1644	2325	3007	3484	6-14	12-28	53

Figure 12: Extract from the unit-based sine length table from Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1726).

steps[148] as possible multiples, as can be seen in Fig. 12.[149] For 37° with length factor $x = 6$, for example, the sine length is 3,484, i. e. 3 eights and 484 scruples, respectively $3^\bullet 4' 8'' 4'''$, i. e. 3 eights, 4 shoes, 8 inches, 4 scruples.[150] The table specifications thus allow a direct application without further unit adjustment, which makes them more practical than the dimensionless tables of Reinholdus or Voigtel (Fig. 2).[151]

Weidler systematically presents *Markscheidekunde* as a science according to the *mathematische Lehrart*, formulates definitions and statements or tasks that are solved mathematically, and thus lays the foundation for a scientific terminology and solution culture that makes use of term transformation and finally the application of equation theory as part of algebra. Although his explanations are thus clearly more abstract than those of his predecessors, Weidler's claim to be of service to practice is recognisable both in the formulation of the analytic-synthetic proof structure and in the unit-based tables – even though he is nevertheless writing an academic (teaching) book, which of course uses Latin.[152]

[148] The step size is limited by the accuracy of the measuring instruments.

[149] Weidler, 1726c, p. 40.

[150] Thus 1 ulna (lachter) = 8 pedes (shoes) = 80 digiti (inches) = 800 scrupulae (scruples); Weidler, 1751b, § 17, pp. 14 sqq.

[151] For Reinholdus AB-tables, see Reimers, 2021, pp. 114 sqq.

[152] In fact all Weidlerian publications use Latin as the main language: On the one hand he was

3.3 Editions & Translations

During Weidler's lifetime, his *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* were published twice: the first edition in 1726, the second – with minor changes – in 1751. They differ from each other in their reception of the (mining) literature of the second quarter of the 18th century. Some of these were already strongly influenced by Weidler's first edition, as will be shown. Weidler himself sets out his intention in the contemporary modest manner in his *prafatio editionis fecundae*, dated September 1750, as follows:

> "Erunt fortaffis, qui ⟨v=u⟩itio mihi ⟨v=u⟩ertent,/ quod denuo edam libellum, de Geometria/ fubterranea olim confcriptum; poftquam/ anno proxime praeterlapfo, eiusdem ar-/ tis praecepta, a ⟨v=u⟩iris longo in ea ufu exercitis,/ fuo a me loco laudantis, multo melius luculentius-/ que tradita et illustrata funt. Enim vero, cum/ bibliopola mihi affirmaffet, opufculum hoc, cuius/ exemplaria pridem di⟨v=u⟩endita funt, a nonnullis/ adhuc defiderari, voluntati eius obfistere nolui,/ fed felecta faltem quaedam annotamenta, quae/ pofitionibus uberiorem lucem affundere poffe ⟨v=u⟩i-/ debatur, paffim infpersi."[153]

He praisingly refers to the textbooks by Beyer and von Oppel from 1749,[154] which should be discussed in more detail in future research. He suggests that (also) his book (like the manuscripts of the practitioners) circulated as copies and (presumably) enjoyed corresponding popularity. From the perspective of the manuscript tradition of the *Markscheider*, for whose instructional and educational writings letterpress printing, which was already widely established, was used less for the realisation of literary representations, it would certainly be interesting for future research to pursue studying this branch of tradition more intensively.[155] However, the printed, book-length editions and translations are more evidence of academic relevance.

Before dealing with the latter, it should be mentioned that in his second edition Weidler deals with the arithmetic of the mining units of length somewhat more intensively than in his *editio princeps*. Although he again refers to his *Infitutiones Mathefeos* for the general rules, he now gives a numerical example for each of the

professor at a conservative university, on the other hand it increased the chance of being recognised abroad.

[153] Weidler, 1751b, p. 5.

[154] Beyer, 1749; von Oppel, 1749.

[155] For a comparative study of Beyer's manuscripts and its contextualisation, see Morel, 2018.

four basic arithmetical operations in order to present the handling of the measures lachter, shoes, inches and scruples in a more didactic way.[156]

Table 2: Editions and translations of Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae

Editor/ Translator	(Short-)Title	Location, Year
	Inftitutiones Geometriae Subterraneae	Wittenberg, 1726
	Inftitutiones Geometriae Subterraneae. Editio Altera	Wittenberg, 1751
Niklas Fuchsthaler	*Anleitung zur unterirdifchen Meß- oder Markfcheidekunft*	Vienna, 1765
Алексей Мартов	*Настабления к подземной геометрии или маркшеймдерской науке*	Санкт-Петербург, 1777

In 1765, a German translation of Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* was published by Niklas Fuchsthaler (* 1734, † 1788),[157] piarist and teacher of mathematics and philosophy at the colleges of the University of Leuven and Torino, in the imperial-privileged publishing house of Johann Thomas Trattner (* 1717, † 1798)[158]. Fuchsthaler's translation, with illustrations and tables – both at the end of the book – comprises 121 pages and is based on Weidler's second edition of 1751. Niklas Fuchsthaler begins his *Vorrede* with the sentence:

> "Nebft dem Nutzen, welchen eine Wiffen-/ fchaft einem ganzen Staate verfchaf-/ fet, trägt auch fehr vieles die fchöne/ und wohlgegründete Lehrart, in der/ fie verfaffet ift, zu ihrer Aufnahme be⟨i=y⟩."[159]

The Piarists dominated the intermediate level education system of Austria in the 18th century and as college and grammar school teachers there was obviously a corresponding need for a German-language translation for teaching purposes. Consequently, Fuchsthaler particularly emphasises the methodological-didactic aspect under which Weidler's *Institutions Geometriae Subterraneae* can be viewed. In his *Vorrede* the translator especially praises the *mathematische Lehrart* and the usefulness of Weidler's book for early teaching.[160] With the title component *Anleitung*,

[156] Weidler, 1751b, § 17, pp. 14 sqq.
[157] Schaller, 1799, pp. 155 sq.
[158] Capellaro, 2016.
[159] Weidler, 1765a, p. 3.
[160] Weidler, 1765a, pp. 3 sqq.

Fuchsthaler suggests – presumably deliberately, due to the application of the didactic presentation according to the *mathematische Lehrart* – a certain proximity to the special *Anfangsgründe* literature, which from the second half of the 18th century onwards became increasingly popular, established itself as an academic textbook trend and eventually came to be used in grammar school teaching.[161] The iconographic treatment – through sovereign symbols such as the Bohemian lion and the Habsburg double-headed eagle – (Fig. 13[162]) of the *Staatsnutzen* (i. e 'state benefit') of the *Markscheidewesen* in the vignettes of the Fuchsthaler translation is remarkable.

The *Staatsnutzen* of the *Markscheidewesen* is also the main motive of the introductory and patriotic words of the translator,[163] Aleksey Martov (life data unknown), in the Russian-language translation of 1777. Little is known about Martov's person. According to the book title,[164] he was a metallurgical administrator as well as a mathematics teacher and, as *accессор* (i. e. 'assessor') part of a whole collective of translators who organised the literature for what is now Saint Petersburg State Mining University, officially founded in 1773.[165] At that time this educational institution still bore the simple name *Горное училище* – i. e. 'mining school'. The translation is based on Fuchsthaler's German edition and not on either of the Latin ones. Apart from the language, the main difference from the original is that it is a combination of a pure factorised sine table and the unit-based tables already found in Weidler's *editio princeps*. They are printed on double pages (Fig. 14 on the left and right page of the book)[166] and the proportionally unit-based data follow the lachter–scruple and *саж–линей* relationship respectively. This table representation has the advantage that by means of the raw sine values it is also possible to convert it to units other than *саж* and *линей*. In a way, they combine Voigtel's and Weidler's trigonometric tables.

Maltov's translation of Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subetrraneae* is – unlike Weidler's original or Fuchsthaler's translation – published in a handbook format: the type is small and it comprises over 180 pages. Even if, due to the revolutionary history of the former capital of Tsarist Russia, no further editions of Maltov's translation can be found, the handbook format suggests that the book could probably also have served as a kind of enchiridion or *vademecum* and was not only intended for (merely) building up the library of the mining school. Especially in the case of

[161] Kröger, 2014, pp. 11 sq., 114 sqq. & 315 sqq.
[162] Weidler, 1765b, p. 56.
[163] Weidler, 1777, s. p.
[164] Weidler, 1777.
[165] Черняк, 1991.
[166] Weidler, 1777, s. p.

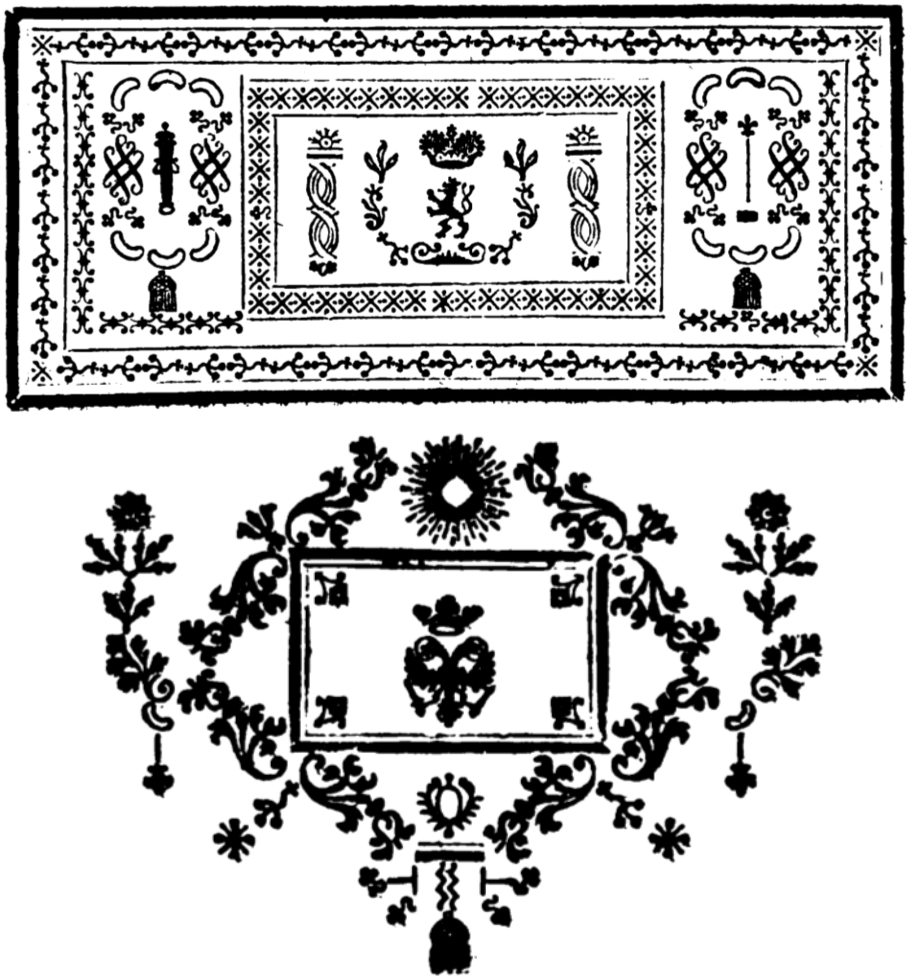
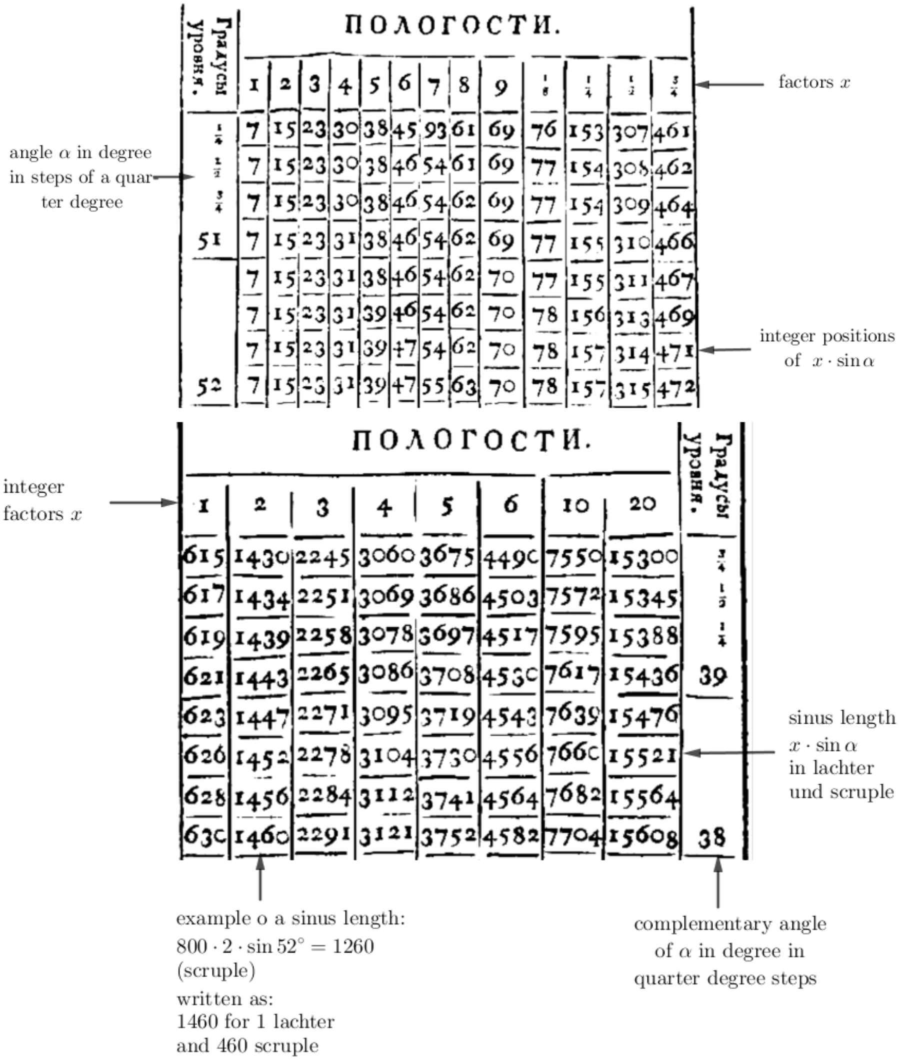


Figure 13: Vignette from Fuchsthaler's translation of Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1765) with Bohemian double-tailed lion (above) and with Habsburg double-headed eagle (below).



ПОЛОГОСТИ.

Градусы уровня.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1/8	1/4	1/2	3/4
1/4	7	15	23	30	38	45	93	61	69	76	153	307	461
1/2	7	15	23	30	38	46	54	61	69	77	154	308	462
3/4	7	15	23	30	38	46	54	62	69	77	154	309	464
51	7	15	23	31	38	46	54	62	69	77	155	310	466
	7	15	23	31	38	46	54	62	70	77	155	311	467
	7	15	23	31	39	46	54	62	70	78	156	313	469
	7	15	23	31	39	47	54	62	70	78	157	314	471
52	7	15	23	31	39	47	55	63	70	78	157	315	472

ПОЛОГОСТИ.

1	2	3	4	5	6	10	20	Градусы уровня.
615	1430	2245	3060	3675	4490	7550	15300	3/4
617	1434	2251	3069	3686	4503	7572	15345	1/2
619	1439	2258	3078	3697	4517	7595	15388	1/4
621	1443	2265	3086	3708	4530	7617	15436	39
623	1447	2271	3095	3719	4543	7639	15476	
626	1452	2278	3104	3730	4556	7660	15521	
628	1456	2284	3112	3741	4564	7682	15564	
630	1460	2291	3121	3752	4582	7704	15608	38

Figure 14: Left (above) and right (below) book page of an extract with modern interpretation of the sine table with factors from Maltov's translation of Weidler's Inftitutiones Geometriae Subterraneae (1765) with unit reference.

Table 3: Selected Markscheide books by mathematicians in the second half of the 18th century

Author	(Short-)Title	Year
Andreas Böhm	*Gründliche Anleitung zur Meßkunft auf dem Felde*	1759
Jacob Friedrich Maler	*Geometrie und Markfcheidekunft*	1767
Abraham Gotthelf Kästner	*Abhandlungen über die Markfcheidekunft*	1775
Johann Friedrich Lempe	*Anleitung zum Markfcheidewefen*	1782
id. & August Beyer	*Gründlicher Unterricht vom Bergbau nach Anleitung der Markfcheidekunft*	1785
Johann Peter Eberhard	*Neue Beyträge zur Mathefi applicata*	1786

books with compendium and repetitory character, handbook formats appear increasingly in the 18th century:[167] It should be noted again, however, that Maltov's translation is complete and thus includes the proofs, justifications and solutions, which goes beyond the character of a compendium as a rule.

4 Reception of Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* by Studies Mathematicians

This section reflects the influence of Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* on the literature of his professional colleagues. It is remarkable that the appearance of (academic) literature on *Markscheidewesen* picks up speed only from the second half of the 18th century onwards: One reason for this was certainly the increasing (educational) political interest in the professionalisation of mining education, which was brought to the attention of the elites.

4.1 A Pupil of Wolff

As the first textbook, the *Gründliche Anleitung zur Meßkunft auf dem Felde* (1759) of the Hessian philosophy and mathematics professor Andreas Böhm (* 1720, † 1790)[168] should be mentioned:[169] In this work he transformed the 'mathematical method', as it increasingly became the professional and didactic 'gold standard' in

[167] Kluge, 1995, q. v. *vademecum*, p. 852.
[168] Bernhardi, 1876.
[169] Böhm, 1759.

this period,[170]: The paragraphs are no longer assigned epistemic categories such as 'definition' or 'remark'. Although at this time the *editio altera* of Weidler's work had already been in circulation for several years, it is even not mentioned with a syllable.[171] However, it is safe to assume that Böhm knew Weidler's textbook: He explicitly refers to the books of August Beyer as well as Friedrich Wilhelm von Oppel and refers to paragraphs of the "seeligen Freyherrn von Wolf[f]". Thereby it could be interpreted, that there is an implicit reference to Weidler, as Böhm emphasises, for example, the 'simplicity' of the arithmetic of unit conversion if it is 'decimalises' – unlike, for example, Weidler did, because it was unusual in his time and he certainly had practical applications in mind.[172] In general, Böhm's textbook is less detailed; he himself wrote that he only

> "[...] ſo viel von der Markſcheidekunſt vor,/ als hinreichend iſt, die Neugierde derer zu ſättigen, welche aus des Herrn von/ Oppels und Herrn Beyers oder anderer Bücher{n} [!] das mehrere zu er-/ lernen verlangen, und [...er] habe aus der Urſache in dieſem Stücke/ nicht weitläufiger ſe⟨i=y⟩n mögen, weil vielleicht dem meiſten T{h}eile/ der Leser damit am wenigſten [!] gedien{e}t ist."[173]

4.2 Mine-Surveying in a Schoolbook

Next, the Upper Rhine church councillor and grammar school rector Jacob Friedrich Maler (* 1714, † 1764), also referred to as 'mathematician',[174] should be briefly mentioned for the sake of completeness. In his *Geometrie und Markſcheidekunſt* (1767) he does not only fail to mention Weidler, but no (other) authors at all.[175] The majority of his book is taken up by elementary geometry. The conversion of units of length and area is also dealt with intensively: Thus, Maler discusses the 'sixteen-' and 'twelve-shoe rod' (as lachter) as well as the 'decimal rod'. Despite the title, the German-language textbook of over 200 pages offers relatively little in the way of genuinely *Markscheider*ian content. Rather, it is an elementary geometry book with scaffolded tasks that have more to do with field surveying than with mark surveying and its subsurface measurements. The author is also leaves

[170] Kröger, 2014, p. 99.

[171] The exact reasons for this are speculative. Böhm was, however, a pupil of Wolff in the latter's Marburg period. It is possible that Wolff – who is thoroughly characterised as vindictive by biographers – nursed a certain aversion to Weidler, as a result of the Wittenberg appeal of 1715.

[172] Böhm, 1759, pp. 243 sqq.

[173] Böhm, 1759, *Vorrede*, s. p.

[174] Redaktion, 1987.

[175] Maler, 1767.

out reasons, not to mention proofs. But this is quite obviously neither Maler's claim nor his intention:

> "[...] Es mangelt/ zwar an dergleichen Bücher nicht, allein ſie ſind meiſtens/ zu koſtbar, und auf koſtbare Inſtrumenten gerichtet, da⟨ſs=ß⟩/ ſie diejenigen nicht anſchaffen können, denen ich gegenwärtige/ Schrift gewidmet. Viele neue Wahrheiten darf man eben/ hierin nicht ſuchen: denn meine Abſicht gi{e}ng nur dahin, die// ſchon erfundene der Jugend zum gemeinen Nutzen bekannt/ zu machen, und durch gezeigte pra⟨k=c⟩tiſche Vort{h}eile Anlei-/ tung zu geben, wie ſie in allerle⟨i=y⟩ in dem gemeinen Leben/ vorkommenden Fällen zu gebrauchen ſe⟨i=y⟩n."[176]

From a didactic point of view, credit has to be given to Maler for tailing on an application related topic that was *en vogue* at the time,[177] and embeds it in the school context. At certain points, however, it is clear that he made use of Weidler's textbook: For example, he clearly follows the formulations and the five-division of tasks of a *Markscheider* as found in Weidler's – or Fuchsthaler's Weidler translation, respectively.[178]

4.3 Two 18th-Century Authorities in Their Fields

According to their academic reputation, Abraham Gotthelf Kästner (* 1719, † 1800)[179] and Johann Friedrich Lempe (* 1757, † 1801)[180] are the eminent mathematical authorities in the immediate history of reception of the Weidlerian *Inſtitutiones Geometriae Subterraneae*. The former based his lectures on *Angewandte Mathematik* on Weidler:

> "Ich habe zu den Vorleſungen Weidlers/ *Inſtitutiones ⟨G=g⟩eometriae ⟨S=ſ⟩ubterraneae*/ gebraucht, die auch durch des H[er]rn{.} P[ater]{.}/ Fuchsthaler deutſche ⟨Ü=Ue⟩berſetzung noch ge-/ meiner geworden ſind. Vollſtändigere An-/ leitungen, wie des H[er]r[n]{.} v[on]{.} Oppel und Beyer{s},/ ſind nicht für akademiſche Vorleſungen. Un-/ ter

[176] Maler, 1767, *Vorbericht*, § 1.
[177] In Europe, the first mining academies emerged from the second half of the 18th century onwards – the best known is probably the present-day Technical University Bergakademie Freiberg, founded only a few years earlier in the Electorate of Saxony, see Morel, 2013, pp. 141 sqq.
[178] Cf. exemplarily Maler, 1767, § 202, pp. 203 sq. and Weidler, 1726a, § 3, p. 5.
[179] Hofmann and Menges, 1974.
[180] Kroker, 1985.

> denen, die zu diefer Abficht verfa⟨ſſ=ß⟩t find,/ ift meines Wiffens Weidlers feine die einzi-/ ge, die man befonders haben kann, die übri-/ gen find gröffern Büchern einverleibt [...]."[181]

Kästner's *Abhandlungen über die Markfcheidekunft* (1775) indeed reflect Weidler's impact very strongly: Overall, Kästner's *Abhandlungen* – although this was explicitly not his intention –[182] seem like an annotated Weidler edition with additions at the places where Weidler refers to his *Initutiones Mathefeos*, extended by analytic contents of barometry as well as individual annotations to Beyer's *Gründlicher Unterricht vom Berg-Bau* and von Oppel's *Anleitung zur Markfcheidekunft.*[183] Kästner harshly criticises other authors – especially with the non-mathematicians: "Denn ohne Mathe-/ matik begreift man nichts vollftändig und richtig [...]"[184] Without disparaging Weidler's achievement, Kästner's (mostly factual) recognition of it also stems from a certain *Berufsdünkel.* Obviously, Kästner addresses academic audiences, especially students of his lectures: His *Abhandlungen* thus see themselves as a university textbook of a field of applied mathematics.

The other outstanding mathematicial authority is Lempe, who first "als einfacher Bergmann im Kamsdorfer Revier"[185] came to mathematics in mining under the Saxon mining scientist Johann Friedrich Wilhelm von Charpentier (* 1738, † 1805)[186] and subsequently studied mathematics and physics in Leipzig for four years in 1779.[187] Lempe can be precisely located in an intersection of the 'practitioners' and 'scholars' – i. e. the 'superior artisans' –[188] and thus represents a special author.[189] He looks at Weidler's textbook from the standpoint of the (rather practical) *Markscheider*, although he certainly views this through the lens of a mathematician.[190] Lempe's theacher, von Charpentier, has the view of a scholar who came in contact with the practice as a teacher: He looks at Weidler's textbook from the standpoint of a teacher. In Lempe's *Vorrede* to his *Gründliche Anleitung zum Markfcheidewefen* (1782), which was written by von Charpentier, there are critical – and quite self-critical, referring to the practitioners – appreciative words on Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae*:

[181] Kästner, 1775, *Vorrede*, s. p.

[182] "Einen Commenta-/ rius über Weidlers Compendium, [...] zu fchreiben, war/ auch nicht meine Abficht [...]", Kästner, 1775, *Vorrede*, s. p.

[183] These two books should be discussed in more detail in the future.

[184] Kästner, 1775, *Vorrede*, s. p.

[185] Kroker, 1985.

[186] Krenkel, 1957.

[187] Kroker, 1985.

[188] Zilsel, 2000, pp. 7–21.

[189] Morel, 2013, pp. 164 sqq.

[190] On Lempe there is an unpublished study with mathematical-historical aspects, see Flaxa, 1985.

> "Was [...] Sturm 1710 von der Mark-/ ſeidekunſt geſchrieben, iſt kurz und unvollſtän-/ dig. Weit genauer aber wurde ſie der Ma-/ thematik bekannt, als Weidler ſeine ob-/ gleich kurzen *Inſtitutiones* ⟨*G=g*⟩*eometriae* ⟨*S=ſ*⟩*ubter-/ raneae* herausgab. Inzwiſchen zweifle ich doch,/ da⟨ſs=ß⟩ dieſes Buch, ſo wie es wohl verdiente, von/ den{en} Markſcheidern au⟨ß=ſſ⟩er dem Gebrauche der/ be⟨i=y⟩gefügten Tafeln der Sohlen und Seigerteu-/ fen, benutz{e}t worden iſt, da es in der lateiniſchen,/ als einer denen me⟨i=hre⟩ſten unkundigen Sprache/ geſchrieben worden war. [...]"[191]

As private teacher, Johann Andreas Scheidhauer (* 1718, † 1784) presumably had a greater influence on Lempe than von Charpentier:[192] According to Morel, Lempe consolidated the art of mine surveying as a mathematical discipline and created a textbook,[193] which method and presentation are both – scientific and practical. With the publication (1785) of a second edition of *Gründlicher Unterricht vom Bergbau nach Anleitung der Markſcheidekunſt* (1749) of the practitioner August Beyer (* 1677, † 1753)[194], Lempe made "a successful hybridi[s]ation between the first edition and Lempe's previous works on the subject."[195] Lempe can be seen as the integrator of the traditions of practitioners and scholars.

4.4 Weidler for *Cameraliſt*s

The German natural scientist and mathematician Johann Peter Eberhard (* 1727, † 1779)[196] devotes a section to minecraft as part of his *Neue*n *Beyträge zur Matheſi applicata* (1786).[197] Although his presentation is very brief, he prefaces it with a list of mining literature: Weidler, of course, is also to be found there. Futhermore – his 16 pages are a Weidlerian condensate: The justifications for measurement situations are, except for the notation, exact German translations – or Fuchsthalerian copies – from Weidler's *Inſtitutiones Geometriae Subterraneae.* The integration of Weidler's *theorema* and its analytic-synthetic *demonſtratio* for the (mathematical) explanation of the protractor for mine surveying purposes is particularly ostensive.[198] Eberhard's book addresses *Cameraliſts*:[199] It is precisely their education

[191] Lempe, 1782, *Vorrede* (von Johann Friedrich Wilhelm von Charpentier), p. 8.
[192] Morel, 2013, p. 518.
[193] Morel, 2013, pp. 164 sqq.
[194] Pieper, 1955.
[195] Morel, 2018, p. 249.
[196] Zaunick, 1959.
[197] Eberhard, 1786, §§ 6–17, pp. 240–56.
[198] Cf. exemplarily Eberhard, 1786, § 9, pp. 242 sq. and Weidler, 1726a, § 45, p. 24.
[199] Eberhard, 1786, *preface*, s. p.

that is one of the forced tasks of the University of Halle at this time, because on the initiative of the Prussian King Frederick William I (* 1688, † 1740)[200] the first chair of *Cameralia und Oeconomia* was established in Halle, which corresponded to the mercantilist spirit of the time and aimed to educate civil servants not only in law but also in domain-specific technical-economic matters, for example in mine or agricultural administration, taxation and finance.[201]

5 Summary & Conclusion

As the first academic textbook devoted exclusively to *Markscheidewesen* (and its mathematics), Johann Friedrich Weidler's *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* (1726) has been analysed in detail and the 'mathematisation' of the discipline has been worked out: The concise but dense book is very systematic and deductive in structure. It follows the so-called 'mathematical method', for which definitions and proofs – or rather justifications – are of eminent importance, and lays a literary foundation for the genesis of the mathematics of *Markscheiden* in the modern sense. Thus it achieves more than what could be expected from a textbook: Mining surveying problems are not only treated exemplarily but with more general validity and their solutions are explained and justified from the viewpoint of mathematics. As an example, an analytical-synthetic structure of proof was examined hermeneutically, which on the one hand underlines the mathematical intention of the author and on the other hand reveals his practical claim. Rules of practice are mathematically scrutinised and corrected if necessary, geometric facts are algebraised by terms and equations. The trigonometric tables are provided on the basis of the units used in the work of the *Markscheider*, thus at least softening the academic sphere towards concrete work, despite the Latin language: The unit-based tables reflect the 'quantifing spirit' on a higher level like the manuscript tradition of the practitioners. But precisely because of his academic style, Weidler opened up this discipline to university audiences and his *Inftitutiones Geometriae Subterraneae* were also received in non-German-speaking countries, as shown by the example of the Russian Empire.

The increased interest in the application of mathematics, especially in mining, correlates strongly with the 18$^{\text{th}}$-century professionalisation trends. What all the mathematical books listed in Table 3 have in common is that none of them ostensively and rigorously continues the strict assignment of epistemic functions – such as 'definition', 'theorem' and so on, as found in this context in Weidler's one. Of

200 Oestreich, 1961.
201 Timm, 1960, pp. 48 sqq.

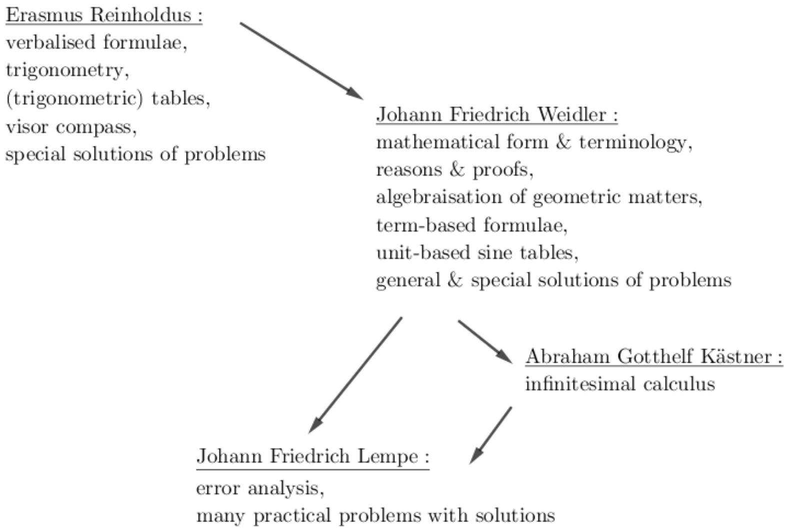


Figure 15: Scholarly authors and content-related (mathematical) innovations for the literature of mine surveying as well as their relation to Weidler as the founder of the mathematical tradition of mine surveying.

course, 'definitions' are found in all of them, but they are not explicitly declared as such. In contrast, the application of the doctrine of equations, as first introduced by Weidler in the *Markscheider*ian context – albeit to very different degrees – is found in almost all the books treated. Kästner's academic textbook in particular was very strongly influenced by Weidler's and also von Charpentier paid tribute to Weidler's achievement (partly unrecognised by practitioners).

As part of the scholarly tradition of mine surveying, whose essential representatives include Agricola and especially Reinholdus, the mathematical tradition developed, at the beginning of which is Weidler. Reinholdus' appendix *Vom Marckfcheiden* of his field measurement report already had clear mathematical references, but only Weidler's *Inftitutiones* were able, with mathematical rigour, to academically enhance this discipline as a component of the applied mathematical sub-fields and to establish it as such in literature, as can be seen in Kästner's work (Fig. 15). Lempe already epitomises the integration of practical and scholarly tradition and was naturally influenced by his predecessors. Johann Friedrich Weidler, with the elaborated and analysed 'mathematisation' of the *Markscheidewesen* of his *Inftitutiones Geometriae Subterraneae*, contextualised in comparative relation to other works, formed the basecourse for the path of the 'mathematical tradition' of *Markschei-*

*der*ic literature as a branch-off of the 'scholarly tradition'. This path became the main road to – respective – theoretical *Markscheidewesen*.

References

Agricola, Georg (1955). *Bermannus oder über den Bergbau. Ein Dialog.* Trans. by Max Helmut Wilsdorf. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

– (2006). *De Natura Fossilium.* Ed. by Fritz Adolf Krafft. Trans. by Georg Fraustadt. Wiesbaden: Marix-Verlag, 2006.

Albinus, Petrus (1590). *Meißnische Land- vnd Berg-Chronica.* Dresden: Gimel Bergen, 1590.

Arndt, Hans Werner (1971). „Methodo Scientifica Pertractatum – Mos Geometricus und Kalkülbegriff in der philosophische Theoriebildung des 17. und 18. Jahrhunderts". In: *Quellen und Studien zur Philosophie.* Ed. by Günther Patzig, Erhard Scheibe, and Wolfgang Wieland. Vol. IV. Berlin, 1971.

Baumgärtel, Hans (1965). „Vom Bergbüchlein zur Bergakademie – Zur Entwicklung der Bergwissenschaften zwischen 1500 und 1765/1770". In: *Freiberger Forschungshefte (FFH)* D 50.

Bautz, Friedrich Wilhelm (1990). „Alembert, Jean Le Rond d'". In: *Biographisch–Bibliographisches Kirchenlexikon (BBKL)* 1, coll.99 sq.

Berger, Knut (1974). „Die Verhüttung von Kupfererzen nach der ‚Naturalis Historia' des Plinius und den Quellen des früheren Mittelalters". PhD thesis. Universität Hamburg, 1974.

Bernhardi, Karl Christian Sigismund (1876). „Böhm, Andreas". In: *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)* 3, pp. 61 sq.

Berward, Christian (1702). *Interpres Phraseologiae Metallurgicae.* Frankfurt/Main: Johann David Zunner, 1702. URL: http://digital.slub-dresden.de/id37320065X.

Beyer, August (1749). *Gründlicher Unterricht vom Berg-Bau, nach Anleitung Der Marckſcheider-Kunſt.* Schneeberg: Carl Wilhelm Fulde, 1749.

Bion, Nicolas (1709). *Traité de la Conſtruction et des Principaux Uſages des Inſtruments de Mathématique.* Paris: La Veuve de Jean Boudot, Jacques Collombat, and Jean Boudot fils, 1709. URL: ark:/12148/bpt6k857654v.

Böhm, Andreas (1759). *Gründliche Anleitung zur Meßkunſt auf dem Felde, ſamt zweyen Anhängen vom Waſſerwägen und von der unterirdischen Meß- oder Markſcheidekunſt.* Leipzig: Heinrich Ludwig Brönner, 1759.

Capellaro, Christof (2016). „Trattner, Johann Thomas Edler von". In: *Neue Deutsche Biographie (NDB)* 26, pp. 360 sq.

Черняк, Арон Яковлевич (1991). „Энциклопедия Технических Знаниї XVII в. и её Автор“. In: *Книга. Исследобания и Материалъ* Сбороник 63, pp. 117–24.

Cohen, Hendrik Floris (1994). *The Scientific Revolution – A Historiographically Inquit*. Chicago, 1994.

Cormack, Lesley Barbara (2017). „Handwork and Brainwork: Beyond the Zilsel Thesis“. In: *Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe*. Ed. by Lesley Barbara Cormack, Steven Ashton Walton, and John Andrew Schuster. (= *Studies in History and Philosophy of Science*. Vol. 45). Cham, 2017. Chap. 2, pp. 11–35.

Eberhard, Peter Johann (1786). *Neue Beyträge zur Mathefi applicata: Worin die Erften Gründe der Mühlenbaukunft, Hydrotechnik und Bergwerkswiffenfchaft erklärt werden*. Halle/Saale: Renger'sche Buchhandlung, 1786.

Ellwardt, Kathrin (2013). „Sturm, Leonhard Christoph“. In: *NDB* 25, pp. 652 sqq.

Falckenberg, Friedrich Otto Richard (1894). „Sturm, Johann Christopherus“. In: *ADB* 37, pp. 39 sq.

Flaxa, Dieter (Jan. 1985). *Studie über Johann Friedrich Lempe*. Jan. 1985.

Frängsmyr, Tore (1975). „Christian Wolff's Mathematical Method and its Impact on the Eighteenth Century“. In: *Journal of the History of Ideas (JHI)* 36.IV, pp. 653–68.

– (1990). „The Mathematical Philosphy“. In: *The Qnatifying Spirit in the 18th Century*. Ed. by Tore Frängsmyr, John Lewis Heilbron, and Robin Eleonore Rider. Oxford, 1990. Chap. 1, pp. 27–44.

„Gerdes, Christian“ (Jan. 2022). In: *Deutsche Biographie (DB)*. URL: https://www.deutsche-biographie.de/pnd133250385.html.

Gorskij, Dmitrij Pawlowitsch (1967). „Über die Arten der Definition und ihrer Bedeutung in der Wissenschaft“. In: *Studien zur Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis*. Ed. by Petr Wasiljewitsch Tawanez and Günter Kröber. Trans. by Gudrun Richter. Berlin, 1967, pp. 361–433.

Grattan-Guinness, Ivor (2003). „Mathematics“. In: *Encyclopedia of the Enlightement* 3, pp. 31–39.

Günther, Adam Wilhelm Siegmund (1889). „Reinhold, Erasmus“. In: *ADB* 28, pp. 77 sqq.

– (1896). „Voigtel, Nikolaus“. In: *ADB* 40, p. 212.

Hanslik, Rudolf (1975). „Tacitus (1)“. In: *Der Kleine Pauly (KlP)* V, coll.482–94.

Hartmann, Hans (1953). „Georg Agricola (1494–1555). Begründer dreier Wissenschaften: Mineralogie–Geologie–Bergbaukunde“. In: *Große Naturforscher*. Ed. by Hans Walther Frickhinger. Vol. 13. Stuttgart, 1953.

Heilbron, John Lewis (1990). „Introductory Essay“. In: *The Qnatifying Spirit in the 18th Century*. Ed. by Tore Frängsmyr, John Lewis Heilbron, and Robin Eleonore Rider. Oxford, 1990, pp. 1–23.

Herttwig, Christoph (1710). *Neues und vollkommenes Berg-Buch bestrehend in sehr vielen und raren Berg-Händeln und Bergwercks-Gebräuchen*. Dresden: Johann Christoph Zimmermann, 1710. URL: http://nl.sub.uni-goettingen.de/id/19010028001100?origin=/collection/nlh-mme.

Hofmann, Joseph Ehrenfried and Franz Menges (1974). „Kästner, Abraham Gotthelf“. In: *NDB* 10, pp. 734 sqq.

Jobst, Wolfgang and Rudolph Walter Schellhas (1994). „Abraham von Schönberg: Leben und Werk – Die Wiederbelebung des erzgebirgischen Bergbaus nach dem Dreißigjährigen Krieg durch Oberberghauptmann Abraham von Schönberg“. In: *FFH* D 198.

Jugel, Johann Gottfried (1744). *Gründlicher und deutlicher Begriff von dem ganzen Berg-Bau-Schmeltz-Wefen und Marckfcheiden in drei Haupt-Theile getheilt*. Berlin: Johann Andreas Rüdiger, 1744.

Kästner, Abraham Gotthelf (1775). *Abhandlungen über die Markfcheidekunft*. Göttingen: Vandenhoecks Witwe, 1775.

Kircher, Athanasius (1654). *Magnes Sive De Arte Magnetica Opvs Tripartitvm*. 3rd ed. Rom: Deuersin & Masotti, 1654.

Kirchmaier, Georg Kaspar (1687). *Inftitutiones Metallicae. Das ist Wahr- und klarer Unterricht vom Edlen Bergwerck*. Wittenberg: Christian Schrödter, 1687. URL: http://digital.slub-dresden.de/id264063325.

Kluge, Friedrich (1995). *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache*. Ed. by Elmar Seebold. 23rd ed. Berlin, 1995.

Krenkel, Erich (1957). „Charpentier, Johann Friedrich Wilhelm von“. In: *NDB* 3, p. 193.

Kröger, Desirée (2014). „Abraham Gotthelf Kästner als Lehrbuchautor – Unter Berücksichtigung weiterer deutschsprachiger mathematischer Lehrbücher für den universitären Unterricht“. PhD thesis. Bergische Universität Wuppertal, 2014.

Kroker, Werner (1985). „Lempe, Johann Friedrich“. In: *NDB* 13, pp. 191 sq.

Kühne, Andreas (2003a). „Reinhold, Erasmus“. In: *NDB* 21, pp. 367 sq.

– (2003b). „Rheticus, Georg Joachim“. In: *NDB* 21, pp. 496 sq.

Lambert (1771). *Anlage zur Achitectonic*. 1771.

Lempe, Johann Friedrich (1782). *Gründliche Anleitung zur Markfcheidekunft*. Leipzig: Siegfried Leberecht Crusius, 1782.

Leonhard, Walter (1978). *Das große Buch der Wappenkunst. Entwicklung, Elemente, Bildmotive, Gestaltung*. München, 1978.

Lesch, John Emmett (1990). „Systematics and the Geometrica Spirit“. In: *The Qnatifying Spirit in the 18th Century*. Ed. by Tore Frängsmyr, John Lewis Heilbron, and Robin Eleonore Rider. Oxford, 1990. Chap. 3, pp. 73–111.

Long, Pamela Olivia (Apr. 1991). „The Openness of Knowledge: An Ideal and Its Context in 16th-Century Writings on Mining and Metallurgy“. In: *Technology and Culture (T&C)* 32.2, pp. 318–55.

– (2011). *Artisan/Practitioners and the Rise of the New Sciences*. Corvallis, 2011.

Maccius Plautus, Titus (1980). *Plautus III: The Merchant. The Braggart Warrior. The Haunted House. The Persian*. Ed. by Wolfgang David Cirilo De Melo. Trans. by Paul Nixon. (= *Plautus in Five Volumes*. Vol. III.) Cambridge: Harvard University Press, 1980.

Maler, Jacob Friedrich (1767). *Geometrie und Markfcheidekunft*. Karlsruhe: Johann Michael Macklot, 1767.

Matzerath, Josef (1999). „Oppel, Friedrich Wilhelm von“. In: *NDB* 19, pp. 557 sq.

Meixner, Heinz, Rudolph Walter Schellhas, and Peter Schmidt (1980). *Balthasar Rösler: Persönlichkeit und Wirken für den Bergbau des 17. Jahrhunderts*. Leipzig, 1980.

Morel, Thomas Timothée (2013). „Mathématiques et Politiques Scientifiques en Saxe (1765–1861) – Institutions, Actuers et Enseignements“. PhD thesis. Université de Bordeaux, 2013.

– (2018). „Five Lives of a Geometria Subterranea (1708-1785). Autorschip and Knoledge Circulation in Practical Mathematics“. In: *Revue d’Histoire des Mathématiques (RHM)* 24, pp. 207–58.

– (2023). *Underground Mathematics – Craft Culture and Knowledge: Production in Early Modern Europe*. Cambridge, 2023.

Nehring, Johann Christoph (1710). *Historisch-politisch-juristisches Lexicon*. Gotha: Jacob Mevius, 1710.

Nobre, Sergio Roberto (1994). „Über die Mathemaik in Zedler „Universal-Lexicon“ (1732–1754): Ein historisch-kritischer Vergleich mit der Mathematik bei Christian Wolff“. PhD thesis. Universität Leipzig, 1994.

Oestreich, Gotthold Herbert Gerhard (1961). „Friedrich Wilhelm I.“ In: *NDB* 5, pp. 540–45.

Pfau, Karl Friedrich (1896). „Weigel, Erhard“. In: *ADB* 41, pp. 465–71.

Pieper, Wilhelm Ludwig (1955). „Beyer, August“. In: *NDB* 2, p. 203.

Ptolemaeus, Claudius (1984). *Almagest*. Ed. by Gerald James Toomer. New York: Springer-Verlag, 1984.

Pulte, Helmut (2018). „Mathesis pura und Mathesis mixta: Die Leitfunktion der Mathematik als Vernunft- und Anwendungswissenschaft im Zeitalter der Aufklärung“. In: *Theatrum naturae et artium – Leibniz und die Schauplätze der*

Aufklärung. Ed. by Daniel Fulda and Pirmin Stekeler-Weithofer. Leipzig, 2018, pp. 222–44.

Raupp, Werner (2005). „Diderot, Denis“. In: *BBKL* 25, coll.221–88.

– (2006). „Zedler, Johann Heinrich“. In: *BBKL* 26, coll.1576–88.

Redaktion (1987). „Maler“. In: *NDB* 15, p. 726. URL: https://www.deutsche-biographie.de/pnd108155374X.html#ndbcontent.

Reimers, Toni (2020a). „Der Beitrag des Wittenberger Mathematikers Johann Friedrich Weidler zur Begriffsgenese der *Angewandten Mathematik*“. In: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik (SieB)* 13, pp. 33–55.

– (2020b). „Mathematische Lehre an der Leucorea in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts“. In: *Vorträge auf der 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09. bis 13. März 2020 in Würzburg*. Ed. by Hans-Stefan Siller, Wolfgang Weigel, and Jan Franz Wörler. Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster, 2020, pp. 753–56.

– (2021). „Wurzeln des Markscheidewesens im Spiegel gelehrter Schriften: Eine mathematikhistorisch-bibliographische Analyse“. In: *SieB* 14, pp. 93–127.

– (2023). „Traces of the Impact of the Works of the Wittenbergian Mathematician Johann Friedrich Weidler on Textbooks and Academic Teaching of the 18$^{\text{th}}$ Century“. In: *"Dig Where You Stand" 7: Proceedings of the Seventh International Conference on the History of Mathematics Education, September 19–23, 2022, Mainz, Germany*. Ed. by Kristín Bjarnadóttir et al. Schriften zur Geschichte der Mathematikund ihrer Didaktik Vol. 11. Münster, 2023, pp. 227–38.

Reinholdus, Erasmus (1574). *Gründlicher vnd Wahrer Bericht. Vom Feldmeſſen [...] Vom Marckſcheiden, kurtzer vnd gründlicher vnterricht*. 1st ed. Erfurt: Georg Baumann, 1574.

Reske, Christoph (2015). „Die Buchdrucker des 16. und 17. Jahrhunderts im deutschen Sprachgebiet: auf der Grundlage des gleichnamigen Werkes von Josef Benzing“. In: *Beiträge zum Buch- und Bibliothekswesen (BBB)*. Vol. 51. Wiesbaden, 2015.

Rößler, Jürgen Ludwig (1998). *Die operationale Definition*. (= *Europäische Hochschulschriften* XX/571). Frankfurt/Main: Peter Lang, 1998.

Sallmann, Klaus Günther (1972). „Plinius (1)“. In: *KlP* IV, coll.928–37.

Schaller, Josef Franz Jaroslaus (1799). *Kurze Lebensbeſchreibungen jener verſtorbenen Gelehrten Männer aus dem Orden der Frommen Schulen*. Prag: František Alois Jeřábek, 1799.

Schmitt, Christoph (1998). „Wolff, Christian“. In: *BBKL* 18, coll.1509–27.

Schöneburg, Silvia (2010). „Mathematische Lehrtätigkeit an der Universität Wittenberg im 16. und frühen 17. Jahrhundert“. In: *Mathematische Forschung und Lehre an der Universität Wittenberg*. Ed. by Karin Richter and Silvia Schöneburg. Vol. I. Hamburg, 2010.

Scriba, Chrisoph Joachim and Peter Schreiber (2010). *5000 Jahre Geometrie: Geschichte – Kulturen – Menschen.* 3rd ed. Berlin, 2010.

Сидоренко, Евгениӣ Антонович (2010). „Горскиӣ Д. П.“ In: *Новая Философская Энциклопедия (НФЭ)* том. IV, с. 2816.

Splinter, Susan (2016). „Tschirnhaus, Walter von“. In: *NDB* 26, p. 480.

Stichweh, Rudolf (1984). *Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen – Physik in Deutschland 1740–1890.* Frankfurt/Main, 1984.

Stuloff, Nikolai Nikolaijewitsch (1964). „Gauß, Carl Friedrich“. In: *NDB* 6, pp. 101–7.

Sturm, Leonhard Christoph (1710). *Kurtzer Begriff der Gefamten Mathefis Bestehend in V. Theilen.* Vol. V (= *Vier kurtze Anhandlungen*). Frankfurt/Oder: Jermias Schrey and Johann Christoph Hartmann, 1710.

Tacitus, Publius Cornelius (1938). *De Origine et Situ Germanorum.* Ed. by John George Clark Anderson. Oxford: Clarendon Press, 1938.

Timm, Albrecht (1960). *Die Universität Halle–Wittenberg.* Frankfurt/Main, 1960.

UBEN (n.d.). 8894. *Verzeichniß derer von Herrn D. Johann Freidrich Weidlern [. . .] hinterlassenen Büchern, Rissen, Münzen und mathematischen Instrumenten, [. . .]*

Vogt, Annette (2010). „Wußing, Hans-Ludwig“. In: *Wer war wer in der DDR?* 2.

Voigtel, Nicolaus (1686). *Geometria Subterranea, oder Marckfcheide-Kunft.* Johann Dietzel, 1686.

– (1714a). *Vermehrte Geometria Subterranea, oder Marckfcheide-Kunft.* (= UBL: Sondersammlungen, Math.74-b). Eisleben, 1714.

– (1714b). *Vermehrte Geometria Subterranea, oder Marckfcheide-Kunft.* 2nd ed. Eisleben: Gottfried Andreas Leg, 1714. URL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN653928750.

von Gümbel, Carl Wilhelm (1881). „Jugel, Johann Gottfried“. In: *ADB* 14, pp. 658 sq.

von Löhneyß, Georg Engelhard (1690 (?)). *Bericht vom Bergwerck: Wie man dieselben Bawen und in guten Wolstande bringen soll, sampt allen darzu gehörigen Arbeiten, Ordnung, und rechtslichen Processen.* s. l., 1690 (?) URL: http://nl.sub.uni-goettingen.de/id/19010018100300?origin=/collection/nlh-mme.

von Oppel, Friedrich Wilhelm (1749). *Anleitung zur Markfcheidekunft nach ihren Anfangsgründen und Ausübungen kürtzlich entworfen.* Dresden: Georg Conrad Walther, 1749.

von Schönberg, Abraham (1693). *Ausführliche Berg-Information: Zur dienlichen Nachricht vor alle, die bey dem Berg- un[d] Schmeltzwefen zu fchaffen, darinnen deutlich gewiesen wird, was einem iden zu verrichten oblieget.* Leipzig: David Fleischer, 1693. URL: http://nl.sub.uni-goettingen.de/id/19010019100500?origin=/collection/nlh-mme.

von Tschirnhaus, Ehrenfried Walther (1695). *Medicina Mentis, five Artis Inveniendi Praecepta Generalia. Medicina Corporis, feu Cogitationes Admodum Probabiles de Confervanda Sanitate.* Leipzig: Johann Thomas Fritsch, 1695. URL: http://digital.slub-dresden.de/id1731770014.

Weidler, Johann Friedrich (1718). *Inftitutiones Mathematicae – Decem et Sex Purae Mixtaeque Mathefeos Difciplinas Complexae.* 1st ed. Wittenberg: Samuel Hannauer, 1718.

– (1726a). *Inftitutiones Geometriae Subterraneae.* 1st ed. Wittenberg: Christian Gerdes' Witwe, 1726.

– (1726b). *Inftitutiones Geometriae Subterraneae.* (= HABW: Nb, Kapsel 5 (10)). Wittenberg, 1726.

– (1726c). *Inftitutiones Geometriae Subterraneae.* (= UBL: Sondersammlungen, Math.514). Wittenberg, 1726.

– (1727). *Differtatio Inauguralis qua Selecta de Juribus Mathematicorum.* Basel: Johannis Brandmüller, 1727.

– (1751a). *Inftitutiones Geometriae Subterraneae. Editio Altera ab Auctore Recognita.* (= SLUB: Sondersammlungen, Metall.132). Wittenberg, 1751.

– (1751b). *Inftitutiones Geometriae Subterraneae. Editio Altera ab Auctore Recognita.* 2nd ed. Wittenberg: Gottlieb Heinrich Schwartz, 1751.

– (1765a). *Anleitung zur unterirdifchen Meß- oder Markfcheidekunft.* Ed. and trans. by Niklas Fuchsthaler. 3rd ed. Wien: Johann Thomas Trattner, 1765.

– (1765b). *Anleitung zur unterirdifchen Meß- oder Markfcheidekunft.* Ed. and trans. by Niklas Fuchsthaler. (= UBL: Magazin, Math.1026). Wien, 1765.

– (1777). *Настабления к подземной геометрии или маркшейдерской науке.* Ed. and trans. by Алексей Мартов. 4th ed. Санкт-Петербург, 1777.

Wolff, Christian (1716). *Mathematifches Lexicon.* Leipzig: Johann Friedrich Gleditsch, 1716.

– (1757). *Ausführliche Nachricht von feinen eigenen Schriften die er in deutfcher Sprache herausgegeben.* 3rd ed. Frankfurt/Main: Johann Benjamin Andreä, 1757.

Zaunick, Rudolph (1959). „Eberhard, Johann Peter". In: *NDB* 4, pp. 239 sq.

„Marckfcheide-Kunft, Geometria fubterranea" (1739). In: *Groffes vollftändiges Univerfallexicon Aller Wiffenfchafften und Künfte (Zedler)* XIX. Ed. by Johann Heinrich Zedler, coll.1269 sq.

Zilsel, Edgar Rudolf (2000). *The Social Origins of Modern Science.* Ed. by Diederick Raven. (= *Boston Studies in the Philosophy and History of Science.* Vol. 200). Dordrecht, 2000.

Allianz zwischen Wissenschaft, Staat und Industrie – Friedrich Althoff und Felix Klein

Renate Tobies

1 Prolog

Dieser Beitrag sei Friedrich Althoff zum 185. Geburtstag (19.2.2024) sowie Felix Klein zum 175. Geburtstag (24.4.2024) gewidmet. Beide waren parteilos und schmiedeten eine Allianz zwischen Wissenschaft, Staat und Industrie, um Mathematik, Physik und deren Anwendungen zu fördern. Althoff (1839-1908) avancierte im preußischen Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten (*kurz*: Kultusministerium) zu einem einflussreichen Ministerialdirektor, bestimmte maßgeblich die Berufungspolitik und weitere wichtige Entscheidungen, überlebte mehrere Minister im Amt und besaß das direkte Vortragsrecht beim Kaiser.[1] Er agierte mit einem Netzwerk von Beratern. Zu einem solchen erkor er nach und nach den Mathematiker Felix Klein.

Das von Althoff geförderte Bemühen Kleins um neue Berufsfelder für mathematisch Gebildete seit den 1890er Jahren (es existierte zunächst nur das Lehramtsexamen), das Gewinnen neuer Kategorien von Studierenden (ausländische, weibliche), die Kooperation mit finanzkräftigen Kreisen der Industrie führte gegen Ende des 19. Jahrhunderts zu neuen Studiengängen, zu neuen Lehrstühlen und neuen Institutionen. Dies war zugleich fruchtbringend für das Anwenden von Mathematik in naturwissenschaftlich-technischen Gebieten. Einhundert Jahre später war dies Vorbild für die Studiengänge Techno- und Wirtschaftsmathematik.

[1] Vgl. Bernhard vom Brocke (Hg.): *Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftspolitik im Industriezeitalter. Das „System Althoff in historischer Perspektive*. Hildesheim 1991.

So können wir eine Allianz zwischen Wissenschaft, Staat und Industrie, wie sie Klein und Althoff um 1900 schmiedeten,[2] auch als aktuelles Merkmal von Wissenschaftspolitik erkennen. Elemente von Althoffs Herangehen spiegeln sich in der heutigen Exzellenz-Cluster-Universitätsstruktur. An Felix Kleins praxisbezogenem Bestreben orientierte sich Helmut Neunzert, als er den Studiengang Technomathematik begründete und zu Beginn des 21. Jahrhunderts ein Fraunhoferinstitut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) in Kaiserlautern initiierte. Mit der Kreation eines Felix-Klein-Zentrums für Mathematik in Kaiserslautern (2008) wurde diesem Ansatz Ausdruck verliehen.[3] Dass die vier Felix-Klein-Professuren für Techno- und Wirtschaftsmathematik an der TU Kaiserslautern von Beginn an paritätisch (zwei Männer, zwei Frauen) besetzt wurden und das Fraunhofer-ITWM seit 2019 von einer Professorin (Anita Schöbel) geleitet wird, ist als moderne Fortsetzung der historischen Anfänge des mathematischen Frauenstudiums unter Felix Klein interpretierbar.[4]

Ausgehend von einer detaillierten Analyse der Quellen und der Sekundärliteratur zum Thema[5] rückt dieser Beitrag ins Zentrum, wie die verschiedenen Elemente kombiniert wurden, die zur genannten Allianz um 1900 führten, wie ausländische Erfahrungen, insbesondere aus den USA, genutzt wurden und in welchem Maße sich Friedrich Althoff persönlich dafür einsetzte. Einige Briefe Althoffs an Klein werden dazu erstmals publiziert.

[2] Vgl. Renate Tobies: Zum Verhältnis von Felix Klein und Friedrich Althoff, in: *Friedrich Althoff 1839–1908* (Akademie der Wissenschaften der DDR, ITW Kolloquien H. 74), Berlin 1990, S. 35–56; dies.: Wissenschaftliche Schwerpunktbildung: der Ausbau Göttingens zum Zentrum der Mathematik und Naturwissenschaften, in: B. v. Brocke (wie Anm. 1), S. 87–108; dies.: The Development of Göttingen into the Prussian Centre of Mathematics and the Exact Sciences, in: *Göttingen and the Development of the Natural Sciences*, hrsg. von Nicolaas Rupke, Göttingen 2002, S. 116–42.

[3] Vgl. Helmut Neunzert und Dieter Prätzel-Wolters (Hg.): *Currents in industrial mathematics: from concepts to research to education.* Berlin 2015, und https://www.felix-klein-zentrum.de/forschung.html.

[4] Renate Tobies, Zum Beginn des mathematischen Frauenstudiums in Preußen, in: *NTM – Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 28 (1991/92) 2, S. 7–28. Dies., Internationality: Women in Felix Klein's Courses at the University of Göttingen (1893-1920), in: *Against All Odds. Women's Ways to Mathematical Research Since 1800*, edited by Eva Kaufholz-Soldat and Nicola M.R. Oswald (Women in the History of Philosophy and Sciences, Vol. 6). Cham, pp. 9–38.

[5] Der vorliegende Beitrag entstand für die Tagung, die zu Ehrung Althoffs in dessen Geburtsort Dinslaken 2014 stattfand. Bisher erschien ein geplanter Tagungsband nicht. Ergebnisse flossen z.T. ein in das Buch (574 S.): Renate Tobies: *Felix Klein, Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*, Berlin 2019.

2 Ziel: „Allseitige" Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen

Als Felix Klein im Dezember 1918 die Veranstaltung seines Goldenen Doktorjubiläums vorbereitete, notierte er, was er selbst vorzutragen beabsichtigte. Dazu gehörte: „Durchführung meines allseitigen Programms in G.[öttingen] von 1893 ab auf dem Wege der Organisation. Es lebe Göttingen!"[6] Dieses „allseitige" Programm umfasste drei große, eng zusammenhängende Aspekte: 1) die Pflege des Zusammenhangs der wissenschaftlichen Disziplinen; 2) die Förderung von Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften, Technik, Industrie, Versicherungswesen, Bildungswesen; 3) einen verbesserten mathematischen Unterricht in allen Schulstufen, vom Kindergarten bis zur Universität, d.h. Mathematik für alle, einschließlich Frauen und ausländische Studierende.[7]

In einem autobiographischen Aufsatz formulierte Klein:

> Zunächst war der Zusammenhang aller wissenschaftlichen Disziplinen mehr als bisher in den Vordergrund zu stellen und das einseitige Spezialistentum ohne höhere leitende Ideen zu bekämpfen. Damit zusammenhängend sollte die angewandte Mathematik in allen in Betracht kommenden Gebieten wie Technik, Astronomie, Geodäsie und Versicherungswesen mit in den Unterricht hereingezogen werden. Schließlich war das gesamte Gebiet mathematischen Lernens von den bescheidenen Anfängen in der Volksschule an bis zur höchsten wissenschaftlichen Spezialforschung als ein organisches Ganzes zu erfassen und auszugestalten.[8]

Er betonte explizit, dass dieses Programm ohne Althoff nicht hätte realisiert werden können:

> Bevor ich aber zu der Schilderung übergehe, auf welche Weise ich diese Pläne in die Wirklichkeit umgesetzt habe, muß ich eines Mannes

[6] Aufzeichnungen Felix Kleins vom 12.12.1918 zur Vorbereitung seines Goldenen Doktorjubiläums. Mathematisches Institut Göttingen, Truhe mit Schriftstücken und Urkunden, die Kleins Sohn Otto (1876-1963) am 15.8.1941 nach Göttingen geschickt hatte. – Das Wort *allseitig* entlehnte Klein den Werken der klassischen bürgerlichen Pädagogen („Allen alles lehren").

[7] Vgl. Renate Tobies: Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht auch für Mädchen – Tendenzen seit 1900, in: *Naturwissenschaftliche Bildung im Gesamtkonzept von schulischer Allgemeinbildung*, hrsg. v. Dieter Kirchhöfer und Christa Uhlig (Gesellschaft und Erziehung, historische und systematische Perspektiven, Bd. 6), Frankfurt a.M. 2009, S. 137–56.

[8] Felix Klein: Göttinger Professoren (Lebensbilder von eigener Hand), in: *Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen* 5 (1923) 1, S. 11–36, Zitat S. 24.

> gedenken, ohne dessen Verständnis und tatkräftige Hilfe mir die Ausführung meiner Gedanken unmöglich gewesen wäre. Es ist dies der viel umstrittene, ja angefeindete Ministerialdirektor Friedrich Althoff, der ohne Zweifel eine der hervorragendsten Persönlichkeiten gewesen ist, die mir auf meinen Lebenswege begegnet sind. Althoff ist 1882, von Straßburg kommend, als vortragender Rat in das Berliner Ministerium eingetreten. Eine ungewöhnliche Klugheit, eine außerordentliche Arbeitskraft und ein starker Wille, verbunden mit stets reger schaffender Phantasie, erwarben ihm bald einen großen Einfluß weit über seinen engeren Bereich hinaus. Mißvergnügte Elemente haben in der Presse die Ansicht zu verbreiten gesucht, Althoff sei der Typus eines reaktionären Beamten gewesen, eine Behauptung, die aber völlig unzutreffend ist. Die Sache war vielmehr die, daß er nach oben und unten autokratisch verfuhr und nach opportunistischen Grundsätzen handelte, wobei er sich für jedes einmal als richtig erkannte Ziel voll und ganz einsetzte und es unter Ersinnung immer wechselnder Methoden, die gerade für die betreffende Lage Erfolg versprachen, schließlich erreichte. Dabei war er stets bereit, jedes ehrliche Streben, sobald er es erfaßt hatte, und insbesondere weiter reichende Pläne zu unterstützen. Alle großen Fortschritte, welche die preußischen Universitäten in den 25 Jahren seiner Tätigkeit im Kultusministerium gemacht haben, gehen auf ihn zurück oder hängen zum mindesten eng mit ihm zusammen. Vor allem aber ist ihm Göttingen zu Dank verpflichtet, da die mit 1892 einsetzende große Entwicklung der mathematischen und physikalischen Einrichtungen in erster Linie von ihm herbeigeführt worden ist.[9]

Felix Klein fügte bei der Edition seiner *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* (1921, 1922, 1923) eigene Anmerkungen hinzu. Dabei verwendete er ebenfalls das Wort *allseitig*. Er betonte, dass er seit 1892 „[. . .] die Verpflichtung empfand, den mathematischen Unterrichtsbetrieb an der Universität Göttingen *allseitig* auszugestalten.“[10] Er strebte danach, „[. . .] in Göttingen durch Gründung und Belebung neuer Institute, die wichtigsten Zweige der Angewandten Mathematik und Physik, die seit dem Tode von Gauß mehr und mehr verkümmert waren, wieder zur Geltung zu bringen.“[11] Er unterstrich erneut Althoffs Rolle:

> Ich muß geradezu sagen, daß die außerordentlich anregende Kraft, wel-

[9] Ebd., S. 24f.

[10] Felix Klein, Entstehung der Beiträge zur mathematischen Physik, in: *Felix Klein: Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2, hrsg. v. R. Fricke und H. Vermeil, von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen, Berlin 1922, S. 508. – *Allseitig* steht auch im Original kursiv.

[11] Ebd.

> che Althoff allen Disziplinen des Wissenschaftsbetriebes und später des Unterrichtes überhaupt hat zuteil werden lassen, auch mich in ihren Bann geschlagen und für lange Jahre meine Tätigkeit bestimmt hat.[12]

Kleins „allseitige“ Orientierung betraf nicht nur wissenschaftsorganisatorische Bestrebungen. Seine mathematischen Ergebnisse zeichneten sich ebenfalls dadurch aus, wie der bedeutende österreichische theoretische Physiker Ludwig Boltzmann (1844-1906) im Jahre 1892 bekundete:

> Heute habe ich in den Fortschritten der Mathematik[13] nachgeblättert und da neuerdings die Allseitigkeit und Produktivität Kleins bewundert. Man könnte kurz etwa sagen:
>
> Kleins Arbeiten umfassen fast alle Gebiete der mathematischen Wissenschaft. Besonders hervorragend sind seine Arbeiten über
>
> 1. Algebra und deren Anwendung auf Theorie der algebraischen Formen, Zahlentheorie, Geometrie, Auflösung höherer Gleichungen.
>
> 2. allgemeine Funktionentheorie, Theorie der elliptischen, Abelschen, θ-Funktionen und der Riemannschen Flächen;
>
> 3. Theorie der Differentialgleichungen;
>
> 4. Fundamente der Geometrie, Krümmung und sonstige gestaltliche Verhältnisse der Kurven und Flächen, auch neuere Geometrie und Projektivität, Anwendung der Geometrie in der Mechanik.[14]

Damals war Boltzmann Professor an der Universität München und wollte Klein dort für eine Mathematik-Professur gewinnen. Klein blieb in Göttingen. Sein Ablehnen des Rufes nach Bayern im Sommer 1892 festigte seine Position. Obgleich er seit 1. April 1886 o. Professor an der Universität Göttingen war, hatte er sein angestrebtes Programm erst wenig vorwärts bringen können. Jetzt gewann er zunehmend freie Hand.

---

[12] Ebd.

[13] Mathematisches Referatejournal *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, gegründet 1869.

[14] Ludwig Boltzmann, Brief v. 17. Juni 1892 an Paul von Groth, Professor für Mineralogie an der Universität München, in: Walter Höflechner, *Boltzmann, Ludwig: Gesamtausgabe*. Bd. 9: *Leben und Briefe*, Graz 1994, S. 173f.

3 Klein und Althoff – von der ersten Begegnung bis zu Kleins festem Stand in Göttingen

Friedrich Althoff und der zehn Jahre jüngere Felix Klein begegneten sich erstmals am 19./20. August 1870 als Angehörige des Bonner Nothelferkorps (Sanitätstrupp) auf dem Schlachtfeld während des Deutsch-Französischen Krieges. Klein hielt später für seine Kinder fest:

> In Boulogne trafen wir 2 ältere Herren, d.h. Assessoren, aus Bonn, die uns am 19ten über die Schlachtfelder [...] nach Couvin geleiteten. Beim Fussmarsch kam ich in ausführliche Unterhaltung mit ihnen durch Habilitationspläne [...] der eine war derselbe Mann, der später für mich die grösste Bedeutung erlangen sollte: Althoff [...].[15]

Es sollten mehr als zwanzig Jahre vergehen, bis Felix Klein zu einem der wichtigen Berater Friedrich Althoffs werden konnte. Im Januar 1871 in Göttingen für Mathematik habilitiert, erhielt Klein seine erste ordentliche Professur an der bayerischen Universität Erlangen im Alter von 23. Drei Jahre später wechselte er an das Polytechnikum (seit 1877: Technische Hochschule) nach München. Zum Oktober 1880 folgte er einem Ruf an die Universität Leipzig (Sachsen). Erst mit Übernahme des Lehrstuhls in Göttingen zum 1. April 1886 gelangte Klein wieder unter die Aufsicht des preußischen Kultusministeriums, wo Althoff seit 1882 tätig war.

Als der Göttinger Mathematik-Professor Moritz Abraham Stern (1807-1894) im Jahre 1884 von seinem Amt zurücktrat, rechnete Althoff nicht damit, den bereits hoch dotierten Felix Klein für diese preußische Universität gewinnen zu können. Er wähnte, dass Klein zu teuer sei. Zudem musste Klein gegen den Willen der damals in Göttingen tätigen zwei Mathematik-Ordinarien berufen werden. Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), ein Schüler des bedeutenden Berliner Mathematikers Karl Weierstraß (1815-1897), sowie Ernst Schering (1833-1897) verfassten je ein Separatvotum gegen die Berufungsliste der philosophischen Fakultät vom Januar 1885, auf welcher Klein an erster Stelle stand. Auf diese Position war Klein durch die *nicht*mathematischen Kollegen der Fakultät und vor allem durch das besondere Engagement des Experimentalphysikers Eduard Riecke (1845-1915) gelangt. Althoff verzögerte den Ruf auf das vakante mathematische Ordinariat mehrere Monate lang. Erst als er im Sommer 1885 wegen der Besetzung einer Professur für Astronomie in Göttingen weilte, konnte Riecke ihn von Kleins Wunsch überzeugen, nach Göttingen zu kommen. Riecke berichtete:

[15] Zitiert in Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), S. 72.

> Althoff, der dem Plane an sich sympathisch gegenüberstand, fürchtete eine Absage. Auf dem Wege von der Sternwarte nach der Stadt, auf dem ich ihn begleitete, erfolgte seine Entschließung. An der Ecke, wo der Schildweg von dem Kasernenhof abzweigt, frug er mich: „Stehen Sie mir dafür, dass Klein annimmt!“ Ich antwortete: „Ja“ und darauf sagte er die Berufung zu.[16]

In den ersten sechs Jahren seiner Göttinger Professur sah sich Klein aufgrund des Verhaltens der Kollegen H.A. Schwarz und E. Schering in vielen seiner Pläne behindert. So suchte er das direkte Verhältnis zum Kultusministerium, um seinen Ideen von einem besonderen Zentrum der Mathematik, Physik und Technik in Göttingen zu unterbreiten. Er korrespondierte mit Althoff direkt, umging die Fakultät und auch den in mancherlei Hinsicht konservativen Universitätskurator, den Rechtswissenschaftler Ernst von Meier (1832-1911)[17]. Typisches Merkmal der Beziehung zwischen Klein und Althoff wurde, Pläne in ausführlichen Berichten und Denkschriften darzulegen. In Kleins Denkschrift vom 6. Oktober 1888 kommt sein engagiertes Bestreben, Mathematik, Naturwissenschaften, Technik zu vernetzen, besonders gut zum Ausdruck. An die Mathematiker gerichtet, formulierte er:

> Man muss sagen, dass wir seit langem geradezu darauf verzichtet haben, mit den Fortschritten der Nachbargebiete Schritt zu halten. Lassen Sie mich nur denjenigen Theil unserer Wissenschaft nennen, dessen allgemeine Bedeutung auch dem Nicht-Fachmanne von vornherein einleuchtet, die theoretische Mechanik. Wo ist der Universitäts-Mathematiker der die Anregungen in sich aufgenommen hätte, welche die neue physikalische Disciplin, die mechanische Wärmetheorie mit sich brachte? – der beachtete, dass die Lehre von der Bewegung der festen Körper (die Kinematik) in den Händen der Maschineningenieure einen neuen Inhalt gewann? oder dass in der Statik sich von den Aufgaben des Brückenbaues aus originelle und weittragende graphische Methoden entwickelten?[18]

[16] Ebd., S. 519.

[17] Ernst von Meier trat 1894 von seinem Amt zurück, weil er sich zunehmend übergangen fühlte.

[18] Universitätsarchiv Göttingen (UAG), Kuratorialakten, 4 I, Nr. 88a, Bl. 4. – Über hier angesprochene Gebiete der Mechanik (Kinematik, Statik) hatte Felix Klein an der TH München mehrfach gelehrt; auch in Göttingen bot er bereits im WS 1886/87 eine Vorlesung „Einleitung in die Analytische Mechanik“ an. Vgl. Felix Klein, *Einleitung in die analytische Mechanik, Vorlesung gehalten in Göttingen 1886/87* (Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 15), Stuttgart/Leipzig 1991. Entsprechende Gebiete flossen schließlich in eine neue Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten ein. – Zur Baustatik vgl. Karl-Eugen Kurrer: *Geschichte der Baustatik. Auf der Suche nach dem Gleichgewicht*, Berlin ^{2}2016 (engl. 2018); zur Statik der Baukonstruktionen bei Klein vgl. Renate Tobies: *Visions for Mathematics, Applications, and Education.* Cham 2021, pp. 468–71. Vgl. auch schon Erhard Scholz: *Symmetrie-Gruppe-Dualität.*

An die Adresse der Techniker und Naturwissenschaftler gewandt, äußerte Klein:

> Unsere tiefeindringenden Theoreme, unsere genialen Auffassungen, werden sie von denjenigen, die es angeht, auch nur beachtet? Ich constatire, dass die deutschen Techniker, was exacte wissenschaftliche Durchbildung angeht, hinter ihren Fachgenossen in Italien und Frankreich zurückstehen. Ich constatire, dass in den Kreisen unserer Physiker, unserer Astronomen gegen früher ein vollständiger Verfall der mathematischen Bildung eingetreten ist. Ich constatire, dass die deutsche Chemie zurückbleibt, weil ihre Vertreter mangels mathematischer Vorbildung den Fortschritten, die anderweitig angebahnt werden, nicht folgen können.[19]

Kleins Ideen, einen engeren Bezug zur Technik zu realisieren, scheiterten jedoch in den 1880er Jahren noch. Althoff verhielt sich zurückhaltend und konsultierte weitere Experten.[20] So konnte Klein seinen außergewöhnlichen Wunsch, die Universität Göttingen mit der Technischen Hochschule Hannover zu vereinen, nicht realisieren. Sein Ziel, Repräsentanten technischer Disziplinen als Mitglieder in die Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Akademie seit 1942 genannt) aufzunehmen, ließ sich damals gleichfalls nicht durchsetzen.[21] Ebenso stieß Kleins internationale Fühlungnahme noch 1889 nicht auf Althoffs Wohlwollen. Stanley Hall (1844-1924), Gründungspräsident der Clark University in Worcester (Massachusetts, USA), bot Klein im Februar 1889 an, im folgenden Wintersemester dort Vorlesungen zu halten. Althoff empfahl jedoch, „die Berufung abzulehnen, da unsererseits ein Interesse an der Ausführung der Mission nicht vorliegt“.[22] Kleins Vorschlag, das Gebiet der Meteorologie in Göttingen zu etablieren, beantwortete Althoff am 19. Mai 1889 mit folgenden Worten: „Ich beschränke mich daher auf die Bemerkung, dass m.E. die Begründung eines meteorologischen Extraordinari-

Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts. Basel 1989.

19 (UAG) wie Anm. 18, Bl. 5.

20 Z.B. sandte Althoff Kleins Denkschrift vom Dezember 1888 auch an den Historiker Theodor Mommsen (1817-1903), vgl. Brief Althoffs v. 25.6.1889, in: *Theodor Mommsen und Friedrich Althoff. Briefwechsel 1882-1903*, hrsg. von Stefan Rebenich und Gisa Franke, München 2012, S. 76 und 321.

21 Klein hatte in einem Brief an Althoff schon konkret vorgeschlagen, Vertreter des Brückenbaus (Wilhelm Launhardt 1832-1918, Hannover), der Präzisionsmechanik (Johann A. Repsold 1838-1919, Hamburg) sowie des Maschinenbaus aufzunehmen, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (UBG), Cod. Ms Klein I B 3, Bl. 91.

22 (UBG) Cod. Ms Klein I B, Bl. 4, Brief Althoffs an Klein, Berlin, d. 25.2.1889. – Im Jahre 1909 nahm der Psychologe Sigmund Freud (1856-1939) eine entsprechende Einladung an. Er erhielt dort die Ehrendoktorwürde, und ihm zu Ehren wurde eine Statue am Haupteingang der Clark University aufgestellt.

ats in Göttingen keine Aussichten hat."[23] Klein bemühte sich zudem – in Briefen an Althoff – mehrere Jahre vergeblich um ein Extraordinariat für angewandte Mathematik für den aus jüdischem Elternhaus stammenden Mathematiker Arthur Schoenflies (1853-1928).[24]

Es bedurfte erst der Wegberufung von H.A. Schwarz nach Berlin (zum 1. April 1892) sowie der drohenden Gefahr, dass Felix Klein Preußen wieder verloren gehen könnte, damit Althoff aufgeschreckt wurde und sich Kleins Plänen mit größerem Wohlwollen zuwandte. Am 9. Juli 1892 informierte Klein Althoff, dass er einen Ruf an die Universität München in Aussicht habe. Althoff betrachtete diese Information als Schreckschuss und antwortete umgehend:

> Blankenburg, 11.7.92
> Heidelberger Weg 3
>
> Hochgeehrter Herr Professor!
>
> Eben erhalte ich Ihr werthes Schreiben vom 9. d. M. Der Schreckschuß ist mir stark in die Glieder gefahren. Sobald der Ruf angekommen ist, werde ich auf telegraphische Nachricht von Ihnen sofort nach Göttingen kommen. Vielleicht kann ich auch schon vorher dorthin kommen, wenn Ihnen das lieber ist. Ich bitte also um Ihre Befehle.
>
> In vorzüglicher Hochachtung
> Ihr
> ganz ergebenster Althoff.[25]

In den nachfolgenden Verhandlungen überzeugte sich Althoff von Kleins Handeln im allgemeinen Interesse. Althoffs Schreiben vom 19. Juli 1892 an Klein lässt erkennen, dass in kürzester Frist Kleins Bleiben in Göttingen geregelt war.

> Blankenburg, 19. Juli 1892
>
> Hochgeehrter Herr Professor!
>
> Für Ihre freundlichen Zeilen vom 15. d.M. bin ich Ihnen außerordentlich verbunden. Ich bitte Sie versichert zu sein, dass mich unsere gesammten

[23] (UBG) Cod. Ms Klein I B. – Mit dem schließlich erfolgreichen Etablieren von Geophysik und eines geophysikalischen Instituts, geleitet von Emil Wiechert (1861-1928), wurden Forschungen zur Meteorologie und Wettervorhersage, bes. dynamische, physikalische Meteorologie, ab 1898 gefördert, vgl. (UBG) Cod. Ms. Math. Archiv, 50.21, Bl. 20–21 , 39–40, 53.

[24] Arthur Schönflies war seit 1884 in Göttingen habilitiert; Klein erstrebte seit mindestens 1889 ein Extraordinariat für ihn, weil er herausragende Ergebnisse mit Anwendung der Gruppentheorie in der Kristallographie erzielte, erfolgreich Darstellende Geometrie lehrte u.a.

[25] (UBG) Cod. Ms Klein I C:2, Bl. 47.

Verhandlungen, sowohl die hiesigen wie die in Göttingen, mit lebhafter Befriedigung erfüllt haben und dass ich hoch erfreut bin, Sie auch fernerhin den unseren nennen zu können. In Bezug auf Sie aber habe ich nur den Wunsch, dass Sie immer derselbe bleiben mögen. – Meine Frau erwidert Ihre Grüße bestens und wir beide bitten, uns Ihrer verehrten Frau Gemahlin angelegentlich zu empfehlen.

In herzlicher Verehrung
Ihr
ganz ergebener Althoff.

Felix Klein hatte für sein Bleiben in Göttingen folgende Zusagen erhalten:

- eine Gehaltserhöhung um 2.000 M ab 1. Oktober 1892;
- einen finanzieller Zuschuss für das Lesezimmer des mathematisch-physikalischen Seminars von 3.000 M;
- eine Bewilligung von 6.000 M (innerhalb von ca. zehn Jahren) für die Universitätsbibliothek, wobei dafür auf Kleins Antrag mathematische, physikalische und astronomische Literatur angeschafft werden konnte;
- eine Erhöhung der Remuneration auf 1.200 M für Kleins Assistenten an der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle;
- die Zusicherung, ein etatmäßiges Extraordinariat für (angewandte) Mathematik sowie ein Extraordinariat für Geophysik künftig einzurichten.[26]

Klein war deutschlandweit der erste (und längere Zeit einzige) *Universitäts*mathematiker, der einen aus dem Staatshaushalt finanzierten Assistenten erkämpft hatte. Die zugesicherten neuen Extraordinariate waren wichtige Basis für den weiteren Aufbau des Göttinger Zentrums. Das Extraordinariat für angewandte Mathematik wurde noch 1892 mit Arthur Schoenflies besetzt. Nach Ernst Scherings Ableben konnte 1898 eine außerordentliche Professur für Geophysik (Emil Wiechert, 1861-1928) erreicht werden, später auch ein Ordinariat.[27]

---

[26] Liste der Zusicherungen vom 15. Juli 1892, unterschrieben von Althoff, Klein und dem Göttinger Universitätskurator Ernst von Meier. Geheimes Staatsarchiv Preußischer Kulturbesitz Berlin (GStAPK), ehemals Bestand: ZStAM, Rep. 76, Sekt. 6 Tit. IV Nr. 1, Bd. 15, Bl. 66–67v. – Vgl. dazu detaillierter Tobies: *Felix Klein. Visionen...* (wie Anm. 5), S. 337–38.

[27] Vgl. Tobies: *Felix Klein. Visionen* (wie Anm. 5), S. 387–90.

4 Allianz von Wissenschaft, Staat und Industrie – das Göttinger Beispiel

Die Korrespondenz zwischen Klein und Althoff dokumentiert, dass der Ausbau der Göttinger Institutionen in entscheidenden Maße neuer Finanzquellen bedurfte, da der Staatshaushalt allein keine hinreichenden Mittel dafür aufbrachte. Klein fand – unterstützt durch Althoff – private Geldgeber. Diese Art privater Förderung gab es zuvor für preußische Universitäten sind. Nur in Jena hatte Ernst Abbe (1840-1905) sein eigenes, mit der Firma Zeiss erworbenes Vermögen in eine Carl Zeiss-Stiftung (1889) gegeben, womit Professuren und Institute der Universität Jena unterstützt wurden.[28] In Schweden konnte der Mathematiker Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) ebenfalls private Mittel aus der Industrie für Forschungsprojekte erhalten.[29] In den USA gehörte dieses Stiftungswesen bereits zu einer verbreiteten Erscheinung. Die Clark University in Worcester, die Klein 1889 zu einer Gastlehrtätigkeit hatte gewinnen wollen, war z.B. 1887 als private Stiftung des Industriellen Jonas G. Clark (1815-1900) gegründet worden.

Klein kannte die Entwicklungen in Jena und wurde durch seine USA-Reisen (1893, 1896)[30] bestärkt, Ähnliches zu versuchen. Die Reise im Sommer 1893 zur Weltausstellung nach Chicago, die mit einer Unterrichtsausstellung und einem Mathematiker-Kongress verbunden war, unternahm Klein im offiziellen Auftrage des preußischen Kultusministeriums: Er erhielt eine (von zwei) vom Finanzministerium mit 3000 Mark dotierte Position als *Kommissar* „zur Besichtigung der Ausstellung und Berichterstattung".[31] Friedrich Althoff – nun im Rahmen preußischer Außenpolitik stärker international und nach Übersee orientiert – schrieb Klein am 31. Juli 1893: „Zu Ihrer amerikanischen Reise sende ich Ihnen die herzlichsten Wünsche".[32]

Nach einigen Zwischenberichten an Althoff reichte Klein am 10. Dezember 1893

[28] Renate Tobies: Untersuchungen zur Rolle der Carl Zeiss-Stiftung für die Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena, in: *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 21 (1984) 1, S. 33–43; dies.: Ernst Abbe. *Jenaer Jahrbuch zur Technik- und Industriegeschichte* 24 (2021), S. 13–42.

[29] Vgl. Arild Stubhaug: *Gösta Mittag-Leffler: A Man of Conviction*, Springer 2010 (Norwegisches Original, Oslo 2007), bes. S. 448, 514. – Mittag-Leffler besaß – wie Klein – sehr gute internationale Kontakte; er weilte u.a. auch auf Einladung David Hilberts zu Felix Kleins 60. Geburtstag in Göttingen (25.4.1909), vgl. Stubhaug 2010, S. 535.

[30] Klein hielt in den USA eine Reihe von Vorträgen, die in Englisch publiziert und ins Französische übersetzt wurden: Felix Klein, *The Evanston Colloquium: Lectures on Mathematics,* Delivered From Aug. 28 to Sept. 9, 1893 Before Members of the Congress of Mathematics, Held in Connection with the World's Fair in Chicago at Northwestern University, reported by Alexander Ziwet, New York/London 1894; ders., *The mathematical theory of the top.* Princeton lectures (vorgetragen 12.-15.10.1896), reported by H. B. Fine, New York 1897.

[31] Vgl. Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), S. 360.

[32] (UBG) Cod. Ms Klein, I C:2, Bl. 78.

seinen offiziellen ausführlichen Bericht über die USA-Reise an das Kultusministerium ein. Aus Althoffs umgehender kurzer Antwort vom 12. Dezember 1893 gehen die eng verwobenen Aspekte hervor, die das Göttinger Zentrum leiten sollten:

> Berlin, den 12. Dezember 1893
>
> Hochgeehrter Herr Professor!
>
> Ihre werthe Zuschrift vom 10.d.M. hat mich außerordentlich interessiert. Ich kann aber heute nur ganz kurz darauf antworten [...]. Was Sie über das Frauenstudium schreiben, ist ganz meine Ansicht. In Betreff der Lehramtskandidaten werde ich mit den Herren von unserer Gymnasial-Abtheilung sprechen. Die Ausführungen über die Beziehungen zur Technik leuchten mir prima facie ein und Göttingen scheint mir auch zu einem Versuch in der von Ihnen befürworteten Richtung ganz geeignet. Aber das alles bedarf, wie Sie auch selbst sagen, noch eingehender Erwägung und läßt sich zudem nur ausführen, wenn die finanziellen Verhältnisse es gestatten. Personenfragen werden damit besser nicht in Verbindung gebracht. Im übrigen behalte ich mir vor, auf die Sache gelegentlich mündlich zurückzukommen.
>
> In vorzüglicher Hochachtung
> Ihr ganz ergebenster
> Althoff.[33]

5 Das Frauenstudium

Dieses Thema lässt sich einerseits in Althoffs Aufgeschlossenheit gegenüber neuen Trends einbetten, denn bereits am 20. Mai 1892 hatte er eine Akte mit dem Titel „Die von Personen des weiblichen Geschlechts nachgesuchte Zulassung zur Immatrikulation und zu Vorlesungen bei den Königlichen Landesuniversitäten“ eröffnet.[34] Felix Klein prüfte 1893 in Chicago – veranlasst durch einen dort tätigen deutschen Kollegen – die Kenntnisse der amerikanischen Studentin Mary F. Winston (1869-1959) und fand sie für würdig. Sie studierte ab WS 1893/94 in Göttingen und erarbeitete dort unter Klein innerhalb von zwei Jahren eine mathematische Dissertation; zur selben Zeit führte Klein die Engländerin Grace

[33] (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 1–2.

[34] Vgl. hierzu und im Folgenden Tobies: Zum Beginn (wie Anm. 4); auch Renate Tobies: Internationalism and Women Mathematicians at the University of Göttingen. In: *The Palgrave Handbook of Women and Science since 1660*, edited by Claire G. Jones, Alison E. Martin and Alexis Wolf. Cham 2022, pp. 223–43.

E. Chisholm (1868-1944) zur Promotion und förderte weitere Studentinnen (und Studenten) aus dem In- und Ausland.

Da der Göttinger Universitätskurator Ernst von Meier schon in vorangegangenen Jahren die Zulassung anderer Bewerberinnen verhindert hatte, sprach Klein dessen Ansichten in Schreiben an Althoff explizit an. So hatte Althoff noch vor der USA-Reise mitteilen lassen, dass Klein seine „[...] zahlreichen Verehrerinnen in Amerika nur, ohne zu fragen, herüberkommen lassen möchte".[35] Damit ebnete Klein, toleriert durch Althoff, den Weg für ausländische Studentinnen in Preußen, die ab Herbst 1893 mit Hörerinnen-Status ihre Studien aufnehmen und auch mit Sondergenehmigung promovieren konnten. Althoff unterstützte das Frauenstudium, wenn es auch in Preußen noch vergleichsweise lange, bis 1908, dauern sollte, bis die reguläre Immatrikulation durchgesetzt werden konnte.[36] Gleichzeitig wurden die höheren Mädchenschulen reformiert, damit (deutsche) Mädchen wissenschaftlichen Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften erhalten und die Hochschulreife erwerben konnten – nicht mehr auf private Kurse angewiesen waren.

6 Neue anwendungsorientierte Studienpläne

Das Haupteinsatzfeld damaliger Absolventen von Mathematik und Physik waren höhere Schulen. Wenn diese Schulen mit Lehrpersonen überfüllt waren, kam es zu einem Rückgang der Zahl der Studierenden dieser Fächer. Um 1890 war gerade ein Tiefpunkt (dieser wellenförmigen historischen Entwicklung) erreicht. Daraus resultierte das Bemühen, neue Praxis orientierte Studiengänge zu schaffen, um neue Einsatzfelder in mittleren technischen Fachschulen bzw. in der Industrie und in Versicherungsgesellschaften zu ermöglichen.

Hierzu gehörte der im Althoff-Brief vom 12. Dezember 1893 angesprochene zweite Punkt, die *Gymnasiallehrer-Ausbildung*. Klein versuchte, abgestimmt mit Althoff, neue konkrete Studienpläne in Göttingen durchzusetzen, die im Ministerium aufgegriffen wurden. Bereits 1894 schrieb Althoff: „Ihr Studienplan für die Kandidaten des höheren Lehramts in Mathematik und Physik findet hier [...] lebhaften Anklang, und es ist in Erwägung genommen, ob derselbe nicht für die Aufstellung der gleichen Studienpläne an andern Universitäten als Muster empfohlen werden soll."[37]

[35] Zuerst zitiert in Tobies: Zum Beginn (wie Anm. 4), S. 154.

[36] Vgl. Renate Tobies, Renate (Hg.): *„Aller Männerkultur zum Trotz": Frauen in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*, Frankfurt a.M./New York 2008, S. 25f.

[37] UBG, Cod. Ms Klein II, A, Bl. 3, Brief Althoffs an Klein vom 15.1.1894.

Wenige Jahre später veranlassten Klein und der Nationalökonom Wilhelm Lexis (1837-1914), dass Friedrich Althoff einen Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten in Kraft treten ließ, in welcher erstmals eine spezielle Fakultas für angewandte Mathematik verankert wurde. In einem Brief an Althoff vom 2. Juni 1897 erläuterte Klein die neuen Ideen und betonte vor allem, dass es die Anforderungen der Ingenieure seien, denen damit entsprochen werden sollte:

> [...] Wir sind der Meinung, es möchte jetzt der richtige Zeitpunkt gegeben sein, um den Klagen der Ingenieure etc. über mangelhafte Vorbildung der math. Lehramtscandidaten nach Seiten der angewandten Wissenschaft, - soweit diese Klagen berechtigt scheinen -, abzuhelfen. Wir haben in dieser Hinsicht 3 Neuerungen in unseren Entwurf gebracht, nämlich 1) die Anerkennung einer bestimmten Anzahl von Hochschulsemestern, 2) die Heranziehung auch von Professoren der Hochschule zur Prüfungskommission, 3) eine geeignete Fixierung der wissenschaftlichen Anforderungen [...] Wir sind [...] auf den Gedanken gekommen, eine eigene Facultas für angewandte Mathematik einzusetzen. Ich habe die 'Anforderungen' auf der Rückseite des folgenden Bogens zusammengeschrieben.[38]

Klein formulierte auf der Rückseite des Briefes an Althoff die Prüfungsgegenstände für das neue Gebiet:

> Anforderungen für die Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik:
>
> 1. Unterstufe. Elemente der analytischen Geometrie, sowie der Differential- und Integralrechnung. Die gewöhnlichen Projectionsmethoden der darstellenden Geometrie und die elementaren Teile der technischen Mechanik, Niedere Geodäsie.
>
> 2. Oberstufe. Beherrschung der Differential- und Integralrechnung nach seiten der geometrischen Anwendungen. Projective Geometrie. Analytische Mechanik. Höhere Geodäsie und Wahrscheinlichkeitsrechnung.[39]

Diese Prüfungsordnung wurde am 12. September 1898 erlassen und trat zum 1. April 1899 in Kraft. Sie war beispielgebend für andere deutsche Länder; allerdings wurde sie nur in Göttingen und Jena in voller Breite realisiert, während sie an den meisten deutschen Universitäten auf das Gebiet der Darstellenden Geometrie

[38] Zitiert in Tobies: Felix Klein (wie Anm. 5), S. 387.
[39] Ebd., S. 387.

beschränkt blieb.[40] Bis zum Jahre 1913 wurden 318 Prüfungen in diesem Fach an 14 Universitäten abgelegt, davon die meisten (74) in Göttingen.[41] Ein Diplom in Mathematik und Physik gab es an deutschen Universitäten erstmals 1942.[42]

Als weiterer neuer Studiengang wurde *Versicherungswissenschaft, einschließlich Versicherungsmathematik* etabliert. Kleins Inspiration dazu kam durch Erfahrungen aus den USA und Österreich. Nach lancierter Vorarbeit im preußischen Abgeordnetenhaus seit 1894 besiegelten Althoff, Klein und Ludwig Kiepert (1846-1934) – Mathematikprofessor an der TH Hannover und nebenamtlich Direktor einer Versicherungsgesellschaft – sowie der neue Göttinger Universitätskurator Ernst Höpfner (1836-1915) in einer Sitzung in Göttingen am 5. September 1895 das deutschlandweit erste Universitäts-Versicherungsseminar. Es wurde bereits am 1. Oktober 1895 unter Leitung des erwähnten Nationalökonomen Wilhelm Lexis an der Universität Göttingen eröffnet. Felix Klein sorgte für die Auswahl geeignete Mathematik-Dozenten, empfahl Studierenden diesen Studiengang, beteiligte sich an mathematischen Prüfungen dieser Kandidaten. Hierin lag der Ursprung für ein Institut für mathematische Statistik.[43]

7 Privates Stiftungskapital

Althoff hatte in der Antwort auf Kleins Chicago-Bericht (12.12.1893) auch geschrieben: „Aber das alles bedarf, wie Sie auch selbst sagen, noch eingehender Erwägung und läßt sich zudem nur ausführen, wenn die finanziellen Verhältnisse es gestatten.“

Die Lösung bestand in der Kreation einer neuartigen Vereinigung zwischen Universitätsprofessoren und Industriellen, der *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik*, die am 28. Februar 1898 zunächst nur für *angewandte Physik* gegründet und in der Generalversammlung am 17. Dezember 1900 auf *angewandte Mathematik* erweitert wurde.[44] Die Gründung basierte auf einem mehr als vierjährigen hartnäckigen Bemühen, wobei eine praxisnahe Lehramtausbildung, wie sie mit der oben genannten Prüfungsordnung angestrebt

[40] Für Thüringen vgl. z.B. Thomas Bischof: *Angewandte Mathematik und Frauenstudium in Thüringen* (Bildung in Europa, T. I, CEJ, Bd. 44). Jena 2014.

[41] Vgl. Paul Zühlke: Angewandte Mathematik und Schule, in: *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 45 (1914), S. 481. – Paul Zühlke (1877-1957) promovierte 1902 in Rostock beim Felix-Klein-Schüler Otto Staude (1857-1928).

[42] Vgl. hierzu Andrea Abele, Helmut Neunzert, Renate Tobies: *Traumjob Mathematik! Berufswege von Frauen und Männern in der Mathematik*, Basel 2004, S. 55-63.

[43] Vgl. Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), Kapitel 7.7.

[44] Vgl. hier und im Folgenden Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), Abschnitt 8.1.1.

wurde, ein wichtiges Motiv für die Industriellen war. Der Brückenbauingenieur Anton von Rieppel (1852-1926)[45] – er wurde Generaldirektor der Maschinenfabrik Augsburg/Nürnberg AG (MAN) –, bezeichnete die anwendungsorientierte Ausbildung von Lehramtskandidaten gar als *das* entscheidende Gründungsmotiv für diese *Göttinger Vereinigung*:

> Die aus der Industrie beteiligten Gründer der Vereinigung waren neben Herrn v. Böttinger[46] Ingenieure, nämlich Director Schmitz[47] von der Firma Krupp, Professor von Linde[48], Kommerzienrat Krauß[49], Kommerzienrat Kuhn[50] und ich selbst. Geheimrat Klein stellte uns seinerzeit in seinen Vorträgen als Ziel unseres Vorgehens auf:
>
> 1. vor allen Dingen auf eine bessere Ausbildung der künftigen Lehrer hinzuwirken;
>
> 2. auch für die gesteigerte Forschung in der Richtung der angewandten Wissenschaften einzutreten und
>
> 3. die Universitätspolitik wieder in Bahnen zu lenken, die mehr mit dem praktischen Leben in Verbindung ständen, als es damals der Fall war.
>
> Wir einigten uns vor allen Dingen auf den ersten Punkt als den wichtigsten, weil uns immer wieder entgegengetreten war, daß die jungen

[45] Anton Rieppel ist u.a. der Erbauer der Müngstener Brücke, höchste Eisenbahnbrücke in Deutschland, erbaut 1894-97, bis 1918 Kaiser-Wilhelm-Brücke genannt. Rieppel wurde 1906 geadelt. – Für die Göttinger Vereinigung brachte er 14.500,00 Goldmark an Beiträgen und Eintrittsgeldern sowie 17.000,00 an Schenkungen und Stiftungen auf. (GStAPK) I.HA. Rep. 92, Nachlass Schmidt-Ott, C 55, Bl. 109f.

[46] Henry Theodore Böttinger (1848-1920), seit 1907 von Böttinger, promovierter Chemiker, der seit 1882 die Bayer AG (Farbenfabrik) in Elberfeld leitete, zur Biographie vgl. Josef-Wilhelm Knoke: *Der Unternehmer und Wirtschaftsbürger Henry Theodor von Böttinger 1848-1920*, Düsseldorf 2016 (Dissertation).

[47] Wilhelm Peter Schmitz (1853-1903), Ingenieur und Werkleiter bei Krupp, seit 1893 in Düsseldorf wohnend. vgl. http://juergen-faehndrich.de/gen-detail/SchmEssn.pdf.

[48] Carl Paul Gottfried Linde (1842-1934), seit 1897 Ritter von Linde, Ingenieur, Erfinder (Kältetechnikverfahren, Luftverflüssigung), seit 1872 o. Prof. für Maschinenbau an der TH München, wo ihn Felix Klein 1875 kennen und schätzen lernte, daneben seit 1879 Unternehmer (Gesellschaft für Linde's Eismaschinen AG).

[49] Georg Krauß (1826-1906), seit 1905 Ritter von Krauß, bayerischer Industrieller und Gründer der Lokomotivfabriken Krauß & Comp. in München und Linz. Er unterstützte die Entwicklung von Lindes Kältemaschinen.

[50] Ernst Kuhn (1853-1903), Maschinenfabrikant in Stuttgart, Vorsitzender des VDI 1895 und 1896; vgl. *Technik, Ingenieure und Gesellschaft, Geschichte des Vereins Deutscher Ingenieure 1856-1981*, hsrg. v. Karl-Heinz Ludwig unter Mitwirkung von Wolfgang König, Düsseldorf 1981, S. 566, 576f.

> Ingenieure durch ihre unzulängliche, dem Praktischen abgewandte Vorbildung, auf der Hochschule ihre Zeit verlieren mußten, um das nachzuholen, was ihnen die Schule nach unserer Meinung sehr gut hätte mitgeben können [...] und diese Zustände verbessern zu helfen, war für uns die Begründungsidee der Göttinger Vereinigung.[51]

Die besondere Betonung der besseren Lehramtausbildung ist im Kontext mit der im Gange befindlichen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsreform verständlich, die den anwendungsfernen Unterricht zu überwinden trachtete und neuere Stoffgebiete in den höheren Schulunterricht zu bringen suchte (analytische Geometrie, Anfänge der Differential- und Integralrechnung, Funktionsbegriff).[52] Es lag im Interesse der Mitglieder der Vereinigung, eine Lehrerbildung mit mehr Rücksicht auf die Forderungen des wirtschaftlichen Lebens und der Technik zu gestalten. Die Sitzungen der *Göttinger Vereinigung* widerspiegeln die regelmäßige Diskussion der nationalen und internationalen Schulreformbewegung; der Finanzplan enthielt auch konkrete Positionen zu Fortbildungskursen für Lehrpersonen höherer Schulen. Führende Mitglieder aus der Industrie, die zugleich Abgeordnete waren, unterstützten im preußischen Landtag entsprechende neue Gesetze.

Spätere Förderinstitutionen mit privatem Stiftungskapitel, wie die Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft (gegr. 1911, heutige Max-Planck-Gesellschaft) und die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft (gegr. 1920, seit 1929 DFG), unterstütz(t)en nur konkrete Forschungsvorhaben, keine Lehrtätigkeit.

Der Chemieindustrielle Henry Theodore Böttinger übernahm den Vorsitz der *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik.* Felix Klein wurde sein Stellvertreter. Böttinger, der eine Tochter des Gründers der Bayer AG in Elberfeld geheiratet hatte und später (1907) Aufsichtsratsvorsitzender dieses Chemie-Unternehmens wurde, besaß nicht nur ein hinreichendes Vermögen, sondern war auch Mitglied in zahlreichen Führungsgremien der Wirtschaft, in wissenschaftlichen Gesellschaften, im preußischen Abgeordnetenhaus (zweite Kammer des Landtages) für die nationalliberale Partei von 1889 bis 1909 und ab 1909 im Herrenhaus (erste Kammer des Landtages), wodurch er nahe an den Vertretern der Ministerien war. Die ersten Zusammenkünfte mit finanzkräftigen Personen hatte Felix Klein 1894 initiiert. Althoff unterstützte dies maßgeblich. Klein urteilte später:

---

51 Zitiert in Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), S. 386.

52 Diese Reform trug bereits zu Lebzeiten Kleins dessen Namen: „Kleinsche Unterrichtsreform“. Vgl. Renate Tobies: Felix Klein und der Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, in: *Der Mathematikunterricht* 46 (2000) H. 3, S. 22-40.

> Durch die Unterstützung von Althoff gelang mir insbesondere 1898 das Zustandebringen einer „Göttinger Vereinigung zur Förderung der Angewandten Mathematik und Physik“ aus maßgebenden Vertretern der deutschen Großindustrie, welche die naturgemäß knappen Beiträge des Staates zum Bau und zur Einrichtung neuer Universitätsinstitute durch freie Spenden wesentlich unterstützten. Es ist in der Folge durch diese Vereinigung für die Göttinger Universitätseinrichtungen viel Wertvolles geschaffen worden.[53]

Felix Klein hatte erstmals 1894 ein Komitee von Industriellen auf der Basis alter schulischer Kontakte und mit Hilfe seines Bruders, Rechtsanwalt Alfred Klein (1854-1929) in Düsseldorf, bilden können, worüber er Althoff informierte. Althoff gab Ratschläge, wann und wo Sitzungen stattfinden könnten und nahm selbst an Sitzungen und vorbereitenden Besprechungen teil. Er schrieb am 26. März 1894 aus Berlin an Klein:

> Hochgeehrter Herr Professor!
>
> Ihre werthen Mittheilungen vom 24. d.M. sind mir von größtem Interesse. Der Einsendung der Denkschrift sehe ich gern entgegen. Schon jetzt aber möchte ich rathen, die konstituirende Sitzung hier u. zwar etwa gegen Ende April abzuhalten. Dann sind ja einige Mitglieder des Comites, die zugleich dem Abgeordnetenhause angehören, ohnehin noch hier anwesend. Ich werde es mir zur besonderen Ehre und Freude gereichen lassen, an den Sitzungen als ungebildeter Zuhörer theilzunehmen. [...]
>
> In vorzüglicher Hochachtung
Ihr
ganz ergebenster
Althoff[54]

Der Briefwechsel zwischen Klein und Althoff spiegelt Entwicklungsgang und auftauchende Probleme. In der Zeit von 1894 bis 1898 mussten Zielstellungen präzisiert und reduziert werden: keine Ingenieur-Ausbildung an der Universität[55], weil es den Interessen der Technischen Hochschulen widersprach. Es mussten Denkschriften umformuliert werden, um die Industriellen zu gewinnen.

Als Klein Althoff informierte, dass der Plan, technische Physik in Göttingen zu etablieren, ins Stocken geraten sei, schrieb ihm Althoff am 24. Juni 1894, dass er

[53] Klein: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2 (wie Anm. 10), S. 509.
[54] (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 5-6 (Althoff an Klein, Brief v. 26.3.1894).
[55] Die Biographien einer Reihe von späteren kreativen Forschern in Ingenieurberufen zeigen jedoch, dass sie ihre mathematisch-physikalische Grundausbildung in Göttingen erwarben.

„die Ansicht von der Mustergültigkeit der Sache vollkommen theile“. Er empfahl eine abwartende Stellung einzunehmen, da die Herren wohl „einstweilen mit ihren chemischen Plänen ausreichend beschäftigt sind.“[56] Böttinger besuchte gerade die Gründungsveranstaltung der Deutschen Elektrochemischen Gesellschaft, die spätere Deutsche Bunsen-Gesellschaft für physikalische Chemie (für die Böttinger später auch die Bunsen-Gedenkmünze stiftete). Auch Walther Nernst (1864-1941) nahm daran teil. Er war seit 1890 Privatdozent unter dem Physiker Eduard Riecke (1845-1915) in Göttingen, wo er 1891 zum Extraordinarius und 1895 zum Ordinarius für physikalische Chemie ernannt wurde.[57]

Die finanzkräftigen Kreise tatsächlich zu interessieren, erforderte viel Kleinarbeit. Nernst verfasste mit Klein Anträge, um die Industriellen zu gewinnen. Althoff war daran beteiligt. So informierte er Klein mit Brief vom 10. Februar 1895 aus Berlin, dass er sich „möglichste Mühe gegeben [habe], Hrn Krupp, der augenblicklich hier ist, zu sprechen.“[58] Das gelang nicht sofort, aber Althoff setzte seine Anstrengungen im Interesse der Göttinger Pläne fort.

Felix Klein verfasste, abgestimmt mit Althoff, eine ausführliche *Denkschrift betreffend technische Physik in Göttingen.* Althoff bezeichnete Kleins Darlegungen in einem Brief vom 17. Mai 1895 als „so lichtvoll, überzeugend und klar, daß es für meinen Theil kaum noch einer Conferenz bedarf und nur die allerdings sehr schwierige Frage übrig bleibt, wie die erforderlichen Mittel zur Durchführung Ihres Planes beschafft werden sollen.“[59] Trotz dieser Aussage holte das Ministerium weitere Urteile zu Kleins Denkschrift ein. Althoff informierte Klein, dass sein Collége Wilhelm Wehrenpfennig (1829-1900)[60] schriftliche Gutachten vom Elektrotechniker Adolf Slaby (1849-1913) und vom Maschinenbauingenieur Alois Riedler (1850-1936), beide Professoren an der TH Berlin, angefordert habe und dass er (Althoff) selber noch Urteile von den Physikern Friedrich Kohlrausch (1840-1910) und Emil Warburg (1846-1931) erbeten habe. Widerspruch folgte, wie angedeutet, denn Klein wollte „Generalstabsoffiziere der Technik“ mit höherem theoretischen Niveau an der Universität ausbilden, während – wie er meinte –die breite Mas-

[56] (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 7–8.

[57] Als Nernsts Wegberufung drohte, fuhr Felix Klein persönlich ins Kultusministerium, um sein Bleiben und eine o. Professur für ihn in Göttingen zu erreichen.

[58] (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 9 – Zu dieser Zeit leitete Friedrich Alfred Krupp (1854-1902) das Unternehmen Krupp in Essen; er war zugleich von 1893 bis 1898 Abgeordneter im Reichstag für den Wahlkreis Essen, hatte sich dort der Fraktion der Freikonservativen angeschlossen. Die Friedr. Kupp A.G. sollte schließlich hohe Summen für die Göttinger Vereinigung aufbringen: 46.000,00 Goldmark an Beiträgen und Eintrittsgeldern sowie 90.000,00 an Schenkungen und Stiftungen. (GStAPK) I.HA. Rep. 92, Nachlass Schmidt-Ott, C 55, Bl. 109f.

[59] (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 11 (Althoff an Klein, Brief v. 17.5.1895).

[60] Wehrenpfennig war seit 1879 Oberregierungsrat im Kultusministerium; zuvor im Handelsministerium für die technischen Lehranstalten zuständig.

se der Ingeniere („Frontoffiziere“) aus den Technischen Hochschulen hervorgehen könne.

Empfohlen durch den befreundeten Carl Linde, besuchte Klein die Jahresversammlung 1895 des Vereins Deutscher Ingenieure in Aachen, trat als Mitglied bei und schloss einen sog. „Aachener Frieden“, mit dem er auf Ingenieurausbildung an der Universität verzichten musste. Seine Ziele, die er mit einem Institut für technische Physik verfolgte, erklärte Klein noch einmal mit einem Vortrag im Ingenieurverein in Hannover.[61]

Althoffs Briefe lassen erkennen, dass er beteiligt war, Carl Linde für die Göttinger Ziele zu gewinnen. Er schrieb Klein über die Absicht, Linde in München zu besuchen und nutzte selbst Sonntage für Besprechungen zu diesem Zweck. Auf einer Postkarte Althoffs vom 8. Januar 1897 lesen wir: „Um so mehr freut es mich, dass Hr. Prof. Linde am Sonntag an unserer Besprechung mit Hrn. Dr. Böttinger theilnehmen wird.“[62] Somit arrangierten Klein und Althoff gemeinsam, dass Böttinger, Linde und der Lokomotivfabrikant Georg Krauß bereits vor Gründung der Göttinger Vereinigung 20.000 Mark stifteten, damit in Göttingen ein Maschinenlaboratorium für das neue Gebiet der technischen Physik eingerichtet werden konnte. Und am 17. April 1897 teilte Althoff Klein mit: „Heute war Herr Direktor Böttinger hier. In den nächsten Tagen wird die Verfügung wegen des Anbaus für angewandte Physik in Göttingen ergehen.“[63]

Nach der erwähnten von Ernst Abbe gegründeten Carl-Zeiss-Stiftung[64] wurde die *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik* deutschlandweit die erste Institution, die finanzkräftige Personen *aus ganz Deutschland* zur Lehr- und Forschungsförderung gewann. Den Vorsitz übernahm Henry Theodor Böttinger; Klein fungierte als Stellvertreter. Die Göttinger Vereinigung verband die Professoren der Universität Göttingen (angewandte Physik, Chemie, Astronomie, Mathematik) mit nach und nach fünfzig privaten Stiftern, an Wissenschaft interessierten Ingenieuren, Industriellen, wozu Vertreter der Firmen Krupp, Siemens, der AEG (Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft), von opti-

[61] Felix Klein: Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen (Vortrag, gehalten am 6.12.1895 im Hannoverschen Bezirksverein des VDI), in: *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 40 (1896), 4 Seiten.

[62] UBG, Cod. Ms Klein II, A, Bl. 15 (Althoff an Klein, Karte v. 8.1.1887). – Carl Linde zahlte schließlich nach Gründung der Göttinger Vereinigung noch 7.500,00 Goldmark an Beiträgen und Eintrittsgeld sowie 10.000,00 an Schenkungen und Stiftungen; seit 1919 wurde er von Beiträgen befreit, (GStAPK) I.HA. Rep. 92, Nachlass Schmidt-Ott, C 55, Bl. 109f.

[63] (UBG) Cod. Ms Klein II A, Bl. 18v. – Neben diesen und weiteren Stiftungen zahlte von Böttinger für die Göttinger Vereinigung 38.000,00 Goldmark an Beiträgen und Eintrittsgeld sowie 90.000,00 an Schenkungen und Stiftungen, die höchste Summe nach der Krupp A.G., (GStAPK) I.HA. Rep. 92, Nachlass Schmidt-Ott, C 55, Bl. 109.

[64] Vgl. Renate Tobies: Untersuchungen (wie Anm. 28).

schen Werken, Chemischen Fabriken, Hüttenwerken u.a. gehörten, die insgesamt 2.318.900,00 Goldmark bis zum 31. Juli 1921 aufbrachten.[65] Die Göttinger Vereinigung wurde nach H. Th. von Böttingers († 9.6.1920) Ableben in die *Helmholtz-Gesellschaft zur Förderung der physikalisch-technischen Forschung* überführt.

Abbildung 1: Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik, Karte zur Feier des 10-jährigen Bestehens am 22.2.1908. Vorsitz: Der Chemieindustrielle Henry Theodore von Böttinger („gekrönter Mond"); Stellvertreter: Felix Klein (als „Sonne" dargestellt); Ehrenmitglied: Der preußische Ministerialdirektor Friedrich Althoff („segnende Hände von Zeus", oberster olympischer Gott).

Als die *Göttinger Vereinigung* am 22. Februar 1908 ihr zehnjähriges Jubiläum mit einer Festversammlung beging, war Friedrich Althoff zum Ehrenmitglied der Vereinigung ernannt worden.[66] Anlässlich dieses Jubiläums wurde eine Einladungskarte versandt, auf welcher dargestellt ist, dass die Industriellen und die Göttinger Professoren Geld (Beutel) gegen Wissenschaft (Buch) tauschen und Althoff diese Allianz segnet.[67]

[65] (GStAPK) Nachlass Schmidt-Ott, C 55, Bl. 109f.

[66] Vgl. Felix Klein: Die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17 (1908), S. 176–87, zu Althoff S. 180.

[67] Ein Original dieser Karte befindet sich in DLR.GOAR.2623 (Gründung und Entwicklung der

8 Personalfragen

Der Erfolg des Göttinger Zentrums war notwendig an herausragende Personen gebunden, die dort lehrten und forschten – auch wenn Althoff im oben zitierten Brief vom 12. Dezember 1893 formulierte: „Personalfragen werden damit besser nicht in Verbindung gebracht.“ In Briefen aus Chicago hatte Klein nicht nur Frl. Winston erwähnt und ihren Studienbeginn durchgesetzt. Er hatte auch auf andere Mathematiker, insbesondere David Hilbert (1862-1943) verwiesen, den damals bedeutendsten Stern unter den deutschen Mathematikern. Klein erreichte schließlich 1895, dass Hilbert neben ihm als Professor nach Göttingen berufen wurde.[68] Hilbert, der 1902 als dritter Mathematik-Ordinarius hinzutretende Hermann Minkowski (1864-1909) sowie nachfolgende sog. *reine* Mathematiker gehörten ebenfalls der Göttinger Vereinigung als Mitglieder an.[69]

Hinsichtlich der Berufungsfragen in Göttingen bezüglich mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Gebiete sowie hinsichtlich aller mathematischer Berufungsfragen ganz Preußens[70] standen Althoff und Klein in regelmäßigem Kontakt. Beispielhaft für Göttingen sei ein Briefauszug angeführt, der technische Physik, Geophysik, Geodäsie und Astronomie in Göttingen gleichermaßen betraf. Althoff informierte Klein am 16. Dezember 1897:

> Wegen der Berufung Meyer's muß noch mit Wehrenpfennig, der ihn ungern verlieren wird, gesprochen werden. Er kann dann das eine der beiden mit dem Ordinariat Schering gebildeten Extraordinariat bekommen. Das andere kann Brendel[71] erhalten. Und Wiechert kann unbesoldeter Extr.[aordinarius] mit Remuneration werden.[72]

Insgesamt wuchs die Zahl der ordentlichen Professuren für Physik und Mathematik

Aerodynamischen Versuchsanstalt und des Instituts für Angewandte Mechanik 1907-1919), 1908, Bl. 22. – Die Karte ist auch als im Nachhinein angefertigte Karikatur interpretiert worden.

[68] Vgl. ausführlicher Renate Tobies: Zur Berufungspolitik Felix Kleins. – Grundsätzliche Ansichten, in: *NTM- Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, 24 (1987) 2, S. 43–52.

[69] Vgl. Liste der universitären Mitglieder in Tobies: Wissenschaftliche Schwerpunktbildung (wie Anm. 2), S. 107–108.

[70] Vgl. hierzu detailliert Renate Tobies: Zur Berufungspolitik (wie Anm. 68).

[71] Eugen Meyer (1868-1930), technischer Physiker, war Dozent an der TH Hannover und wurde an der Universität Göttingen 1898 der zweite Inhaber des 1896 etablierten Extraordinariats für technische Physik (angewandte Mechanik); Martin Brendel (1862-1939) erhielt 1898 die a.o. Professur für theoretische Astronomie und Geodäsie; 1907 wechselte er als o. Prof. nach Frankfurt a.M.

[72] (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 22, 22v. – Althoff unterstützte Kleins Wunsch, das Ordinariat Ernst Scherings nach dessen Ableben in zwei Extraordinariate umzuwandeln.

in Göttingen von 1898 bis 1908 von fünf auf zehn.[73] Die technische (angewandte) Mechanik an der Universität Göttingen dauerhaft gut zu besetzen, war ein langwieriger Prozess, der seit Mitte der 1890er Jahre verfolgt wurde. Um entsprechende Maschinen und Institutionen zu erhalten, spendeten Industrielle bereits vor Gründung der Vereinigung Geld dafür; fand Althoff die Möglichkeit, mit Hilfe der landwirtschaftlichen Fakultät erste Einrichtungen zu schaffen, wurde dieses Gebiet als ein Schwerpunkt in die neue, erwähnte Prüfungsordnung innerhalb der Fakultas für angewandte Mathematik aufgenommen.

Die berufenen Professoren für technische Mechanik blieben meist nur kurze Zeit auf dem errichteten Extraordinariat, weil sie lukrativere Stellen an Technischen Hochschulen oder in der Industrie fanden. Zunächst war 1896 Richard Mollier (1863-1935) berufen worden, der nach kurzer Stippvisite an die TH Dresden wechselte. Der erwähnte Nachfolger Eugen Meyer konnte im Jahre 1900 ein Angebot aus Berlin ebenfalls nicht ablehnen. Der dritte Inhaber dieses Extraordinariats Hans Lorenz (1865-1940) passte aus anderen Gründen nicht auf dieser Position. Erst mit Ludwig Prandtl (1875-1953), der als Ingenieur zugleich herausragende mathematische Fähigkeiten und Interessen mitbrachte, konnte ab 1904 eine gute dauerhafte Lösung erzielt werden.[74] Es gelang Klein, unterstützt durch Althoff, die Extraordinariate für angewandte Gebiete schließlich in Ordinariate zu verwandeln, wozu zunächst die Position des sog. *persönlichen* Ordinarius diente und oft zusätzliche Mittel der Göttinger Vereinigung aufgebracht wurden.[75] Entsprechend konnten Geophysik mit Emil Wiechert (1861-1928) und angewandte Elektrizitätslehre mit Hermann Theodor Simon (1870-1918) etabliert werden, nebst dem deutschlandweit ersten Universitäts-Lehrstuhl für angewandte Mathematik: Carl Runge (1856-1927).

Hauptsächlich in Althoffs Amtsperiode entstandene neue Einrichtungen in Göttingen waren: Institute für technische/angewandte Mechanik (1897), angewandte Elektrizitätslehre (1897), Geophysik (1898, Neubau 1901), ein Erweiterungsbau für das Institut für physikalische Chemie (1898-1900), landwirtschaftliche Bakteriologie (1901), anorganische Chemie (1903), angewandte Mathematik (1905), ein Neubau für die physikalischen Institute und des Gebäudes für die Abteilung angewandte Elektrizität (1905), eine Versuchsanstalt für drahtlose Telegraphie (1909 fertig gestellt). Hinzu kam die Luftfahrtforschung.

[73] Vgl. Felix Klein, Die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik, in: *Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik* 2 (1908) 8, Sp. 519–32.

[74] Vgl. auch Michael Eckert: *Ludwig Prandtl. Strömungsforscher und Wissenschaftsmanager. Ein unverstellter Blick auf sein Leben.* Weinheim 2017.

[75] Vgl. Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), S. 388–90.

9 Luftfahrtforschung

Internationale Fortschritte in diesem Gebiet hatten dazu geführt, dass Kaiser Wilhelm II. im Herbst 1905 eine Motorluftschiff-Studiengesellschaft mbh mit einem Kapital von einer Million Mark in Berlin proklamierte.[76] Althoff sowie industrielle Mitglieder der Göttinger Vereinigung (v. Böttinger, Siemens u.a.) waren als Gesellschafter an dieser Studiengesellschaft beteiligt und nahmen an den jeweiligen allgemeinen Sitzungen teil.[77]

Althoff veranlasste Klein, die konstituierende Sitzung in Berlin am 28. Oktober 1906 zu besuchen. Hiervon ausgehend übernahm Klein nicht nur die Leitung einer von vier Forschungsgruppen (Dynamische Gruppe). Er band auch seine jungen Kollegen (Prandtl, Wiechert, Runge u.a.) in die Arbeiten ein und initiierte den Bau einer entsprechenden Göttinger Institution (Luftschiff-Modellversuchsanstalt, 1907/08) sowie die notwendige Finanzierung dafür.

10 Althoffs letzte Initiativen und Ehrungen

Althoff war im Jahre 1901 mit der Ehrenmitgliedschaft der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen geehrt worden. Damit wurde sein Engegement für Göttingen gewürdigt, auch hinsichtlich einer gewissen Reorganisation dieser Gelehrtengesellschaft.[78]

Klein plante für die Einweihungsfeier des neuen physikalischen Instituts in Göttingen 1905 ebenfalls eine Ehrung für Althoff, entwarf dafür am 25. August 1905 eine Dankadresse. Obgleich es zu dieser Zeit Proteste von Studierenden (auch in Göttingen) gegen Althoffs Hochschulpolitik gab und der Vorstand des Vereins Deutscher Ingenieure, welcher der Göttinger Vereinigung angehörte, eine Althoff-Ehrung unter diesen Bedingungen nicht begrüßte, wurde die Dankadresse bei der Feier am 9. Dezember 1905 an Althoff gerichtet.[79]

[76] Vgl. hier und im Folgenden Tobies: *Felix Klein* (wie Anm. 5), 391–93.

[77] (UBG) Cod. Ms Klein VII, C, Bl. 1–57. – Die Akte beginnt mit dem Bericht über die Sitzung des Aufsichtsrates und des technischen Ausschusses vom 28.10.1906, Bl. 1.

[78] (UBG) Cod. Ms Klein XI, 1326–31. Die Akademie erhielt im Jahre 1910 eine vom österreichischen Bildhauer Ferdinand Seeböck (1864-1952) angefertigte Büste Althoffs als Schenkung. (UAG) Kur.Alt.4.V.e1.51; Bd.2, 1910.

[79] (UBG) Cod. Ms Klein IV, D, Bl. 65, 68–71; und Cod. Ms Math.-Archiv. 50.17 (Bericht über die Winterversammlung der Göttinger Vereinigung, 9.-10.12.1905); Dankadresse, Anl. 1 A. – Die Proteste gegen Althoff ordneten sich in den Akademischen Kulturkampf der Jahre 1903 bis 1908 ein. Dieser Kulturkampf hatte damit begonnen, dass Althoff an der 1901 gegründeten Universität Straßburg eine Professur für Neuere Geschichte mit dem Katholiken Martin Spahn (1875-1945) gegen den Willen der dortigen Philosophischen Fakultät besetzte. Dies hatte sich

Um den deutsch-amerikanischen Professoren-Austausch zu fördern, wünschte Althoff 1905, dass Klein noch einmal für ein Semester als Gastprofessor an die Harvard University geht. Zu diesem Zeitpunkt war Klein jedoch nicht mehr dazu bereit.[80] Eine zwischenzeitlich dadurch bedingte Verstimmung mit Althoff kompensierte Klein durch Mitarbeit an weiteren internationalen Projekten. Dazu gehörte der von der Royal Society gestartete *International Catalogue of Scientific Literature*, die Bildung einer *International Association of Academies*, die durch Althoff initiierte *Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik* (Bd. 1 (1907)), die Vorbereitung Internationaler Mathematiker-Kongresse. Diese Projekte verfolgten das erklärte Ziel, frei von jeder nationalen Voreingenommenheit zwischen den Nationen zu vermitteln.

Als Althoff aus Altersgründen und Gesundheitsgründen seinen Abschied nahm (am 3. September 1907; offiziell zum 1.10. 1907), sandte ihm Klein noch einmal einen Dankesbrief. Hierauf antwortete Althoff umgehend am 4. September 1907 aus Schierke (seinem beliebten Erholungsort im Harz).[81] Althoff beabsichtigte, bei der Leipziger Tagung der *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik*, zu welcher das zahlende Vereinsmitglied Verlagsbuchhändler Alfred Ackermann-Teubner (1857-1941) für Oktober 1908 einlud, noch einmal einen Vortrag zu halten, zum Thema „Über die Bedeutung Göttingens unter den preußischen Universitäten“.

Es sollte Friedrich Althoffs letztes Lebensjahr sein, dennoch kam noch ein von ihm initiiertes großes Werk zustande: ein *Studienhaus für Ausländer*, das ebenfalls von

zu einem Streit zwischen Studentenkorporationen sowie zu einem breiten Gelehrtenstreit um die akademische Freiheit in Deutschland und Österreich ausgeweitet. Vgl. weiterführende Hinweise unter http://de.wikipedia.org/wiki/Akademischer_Kulturkampf – Spahn gehörte folgenden Parteien nacheinander an: Zentrum, DNVP, NSDAP.

[80] Zu Kleins Ablehnung 1905 in (UBG) Cod. Ms Klein II, A, Bl. 26. – Zum Professorenaustausch Harvard –Deutschland vgl. Bernhard vom Brocke: Internationale Wissenschaftsbeziehungen und die Anfänge einer deutschen Kulturpolitik: Der Professorenaustausch mit Nordamerika, in: *Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftspolitik im Industriezeitalter* (wie Anm. 1), S. 185–242, bes. S. 204. – Auch David Hilbert verzichtete 1905 auf Althoffs Angebot, Gastvorlesungen an der Harvard University zu halten. (GStAPK) I HA, Rep.92, Althoff B 72 (Korrespondenz Hilberts mit Althoff), Bl. 12–14. – Von den Göttinger Mathematikern weilte nur Carl Runge im Rahmen des Austauschprogramms als Gastprofessor an der Columbia University, New York, im WS 1909/10, vgl. dazu Klaus Hentschel und Renate Tobies: *Brieftagebuch zwischen Max Planck, Carl Runge, Bernhard Karsten und Adolf Leopold.* Berlin 2003, S. 176–79.

[81] (UBG) Cod. Ms Klein I A, Bl. 56 (Handschriftliche Notizen Kleins über seine wichtigsten Begegnungen mit Althoff unter dem Titel „Mögliche Mitteilungen an Geh. Rat Eilsberger, auf Schreiben vom 29. Mai 1910“). – Geh. Regierungsrat a.D. Ernst Eilsberger (1868–1947), früherer Vortragender Rat im Preußischen Kultusministerium, sammelte im Auftrage einer Kommission Unterlagen für eine zu schreibende Althoff-Biographie. – Die erste Biografie verfasste Dr. Arnold Sachse (1857-1933), Geh. Reg.-Rat und Schulrat, 1887-1890 im Preußischen Kultusministerium, *Friedrich Althoff und sein Werk.* Berlin: E.S. Mittler & Sohn, 1928.

der Allianz zwischen Staat, Wissenschaft und Industrie zeugt. Felix Klein besuchte Althoff in Steglitz und Schierke, wo sie die Idee besprachen. Klein arbeitete einen Entwurf dafür aus: akademische Auskunftsstelle, Kurse für Ausländer zur Einführung in die deutsche Sprache und Kultur, Kontaktstelle für die in Göttingen ansässige „englisch-amerikanische Kolonie“.[82] Henry Th. von Böttinger stellte finanzielle Mittel für das Studienhaus zu Verfügung. Klein gewann weitere Göttinger Professoren für das Projekt, wobei sie Althoffs brieflichen Empfehlungen folgten: keine Begrenzung auf Engländer und Amerikaner, das Haus nach H. Th. von Böttinger zu benennen, Ehrenmitglieder aus dem In- und Ausland zu berufen.[83] Die von Klein entworfene „Ordnung des Göttinger Instituts für Ausländer“ unterstrich bewusst den Völker verständigenden Charakter des Unternehmens:

> Gerade in unserem Zeitalter, wo der nationale Chauvinismus seine grössten Orgien feiert, muss es allen wahrhaft Gebildeten am Herzen liegen, einer Bewegung entgegenzuarbeiten, die auch die Besten der Nationen immermehr einander zu entfremden bemüht ist. Es ist als schwände mit dem einst mit Recht so sehr gefeierten Humanismus auch aller humane Geist aus der modernen Gesellschaft. [...] Der geistige Austausch der modernen Kulturvölker bezweckt also nicht, die nationalen Unterschiede aufzuheben, sondern sie in ihrem wahren Charakter und Werte schärfer zu erfassen und durch diese höhere Erkenntnis ein freundschaftliches Verhältnis der Nationen zu einander anzubahnen.[84]

Klein übernahm den stellvertretenden Vorsitz und von Böttinger fungierte als Vorsitzender des *Studienhauses*, wie bei der *Göttinger Vereinigung*.[85] Althoff nahm die an ihn gerichtete Bitte zur Ehrenmitgliedschaft an. Aus Kleins Aufzeichnungen geht hervor, dass Althoff letztmals am 11. und 12. September 1908 in Göttingen weilte.[86] Dies war überhaupt seine letzte Reise, die er anlässlich der vom ihm am 11. September geleiteten konstituierenden Sitzung des *Studienhauses für Ausländer* unternahm.[87]

Wie die Korrespondenz zwischen Althoffs Frau Marie (geborene Ingenohl,

[82] (UBG) Cod. Ms. Math.-Archiv. 50.21, S. 10–11; Entwurf der Ordnung für das „Göttinger Institut für Ausländer“ ebd., Bl. 54–55 und Erläuterungen zum Ziel, Bl. 56–57v. Vgl. auch A. Matthias: Das Böttinger-Studienhaus in Göttingen – die letzte Schöpfung Friedrich Althoffs, in: *Monatsschrift für höhere Schulen*, 13 (1909) S. 7–13.

[83] (UBG) Cod. Ms Klein, II A, Bl. 47–50 (Althoff an Klein, Briefe v. 4.und 5.8.1908).

[84] Göttinger Institut für Ausländer. Ordnung (Entwurf). (UBG) Cod. Ms. Math.-Archiv 50.21, Bl. 54–57v, Zitat Bl. 56 und 56v.

[85] (UBG) Cod. Ms Klein VII, F, Bl. 6–9, 37.

[86] (UBG) Cod. Ms Klein I A, Bl. 57 (Notizen Kleins über die "Unterhaltung mit Althoff 12.9.1908").

[87] Vgl. A. Matthias: Das Böttinger-Studienhaus (wie Anm. 82), S. 9, 10.

† 16.11.1925) und der Frau des theoretischen Physikers Woldemar Voigt (1850-1919) dokumentiert, wohnten Marie und Friedrich Althoff bei diesem Göttinger Aufenthalt im Wohnhaus der Familie Voigt.[88] Woldemar Voigt, Mitglied der *Göttinger Vereinigung*, war ebenfalls in das *Studienhaus*-Projekt involviert. Am 12. September 1908 führte Althoff noch ausführliche Gespräche mit Felix Klein,[89] spazierte mit ihm durch den botanischen Garten, der nahe zu Kleins Wohnhaus, Wilhelm-Weber-Straße 3, gelegen war. Althoff folgte einer Einladung in Kleins Haus; Klein notierte: „A. in meinem Hause mit meinen Enkeln".[90]

Am 20. Oktober 1908 schloss Friedrich Althoff in Berlin-Steglitz für immer die Augen. Seine letzte kreative Idee wurde realisiert. Am 28. November 1908, bei der Eröffnungsfeier des *Studienhauses für Ausländer* in Göttingen (Bahnhofstraße 24), hielt Felix Klein die Festrede, in welcher er Althoff noch einmal besonders gedachte.[91]

Kurz zuvor, bei der Leipziger Versammlung der *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik* (16./17. Oktober 1908) hatte Althoff seinen geplanten Vortrag nicht mehr halten können. Der im Nachhinein verfasste Bericht über diese Versammlung enthält Gedenkworte auf Althoff, die der Vorsitzende der *Göttinger Vereinigung* Henry Th. von Böttinger formuliert hatte:[92]

> In memoria Friedrich Althoff
>
> Wenige Tage nach unserer schönen Leipziger Tagung und noch ehe das vorliegende Protokoll fertiggestellt worden, ist der grosse, um das gesammte preussische – ja, deutsche Unterrichtswesen so hochverdiente Mann seinem schweren, jahrelangen Leiden erlegen. Noch bis zuletzt war er unermüdlich thätig, voller Pläne und Gedanken für die Förderung der idealen Aufgaben unserer Nation; noch bis zuletzt war er im Geiste bei unserer Vereinigung. Wenige Wochen vor seinem Tode hat er mich wiederholt versichert, wie schmerzlich es ihn berühre, dass er seinem Wunsch, an unserer Leipziger Tagung theilzunehmen und

[88] (GStAPK) I.HA. Rep.92, Althoff, B.190, Bd. 2, Bl. 20–21.
[89] (UBG) Cod. Ms Klein I A, Bl. 57 (Notizen Kleins über die „Unterhaltung mit Althoff 12.9.1908"). – Die acht inhaltlichen Gesprächspunkte, die Klein notierte, zeugen vom nicht nachlassenden Eifer, Lehre, Forschung, Verwaltung an den Universitäten weiter voran zu bringen.
[90] Ebd.
[91] (UBG) Cod. Ms Klein VII, F, Bl. 26, 35; auch A. Matthias: Das Böttinger-Studienhaus (wie Anm. 82), S. 10.
[92] UBG, Cod. Ms. Math.-Archiv. 50.21, Gedenkworte, Bl. A, zwischen Bl. 2 und 3.

dortselbst uns einen Vortrag über die „Entwicklung der Naturwissenschaften in Göttingen“ zu halten, nicht ausführen könne. Seine telegraphischen Grüsse, die er uns nach Leipzig, sowie an Herrn und Frau Hofrath Ackermann-Teubner ist sogar noch von ihm eigenhändig aufgesetzt worden und gehört mit zu den letzten eigenständigen Schriften des Verewigten. Ich habe Ihre Excellenz, Frau Althoff, gebeten, mir zu erlauben, dasselbe für unsere Mitglieder copiren zu dürfen und diesem Protokoll beizufügen, sodass diese Copie der Urschrift eine dauernde schöne Erinnerung für Alle bilden wird.[93]

Dienstag den 20. October Abends, wenige Minuten nach meinem letzten Besuche bei ihm, ist er verschieden. Am Freitag den 23. Octbr. haben wir ihn zu seiner letzten Ruhestätte – auf seinen besonderem Wunsch im botanischen Garten in Dahlem – geleitet. Die Trauerrede von Herrn Professor Harnack[94] füge ich im Abdruck bei, ebenso den Wortlaut des Telegramms, das ich namens unserer Vereinigung an Frau Althoff gesandt und deren Antwort darauf an uns[95].

Unsere Vereinigung hat durch das Ableben Althoff's einen warmen Freund und Förderer verloren. Excellenz Althoff hat von Beginn unserer Bestrebungen an dieselben mit regstem Interesse begleitet und ihnen seine volle Unterstützung zutheil werden lassen. Er hatte die Bedeutung unserer Arbeiten richtig erkannt und ergriff deshalb mit Ueberzeugung jede Gelegenheit, wenn er zur Durchführung derselben mit beitragen und mithelfen konnte. Ohne seine thatkräftige Förderung hätte die Vereinigung das nicht erreichen können, was sie erreicht hat und wäre nicht das geworden, was sie heute ist. Die Erinnerung an den Mann, der unserer Vereinigung Freund geworden war, wird deshalb bei uns eine dauernde sein und die Dankbarkeit wird es uns daher

[93] Das Telegramm von Marie Althoff, im Namen ihres Mannes an die Tagung in Leipzig vier Tage vor dessen Tode abgeschickt, enthielt noch eine neue Empfehlung: „Mein wieder erkrankter lieber Mann entbietet der wackersten Vereinigung aller Vereinigungen Heil und Gruss in stolzer Freude, derselben anzugehören. Er redet nur immer: Es giebt nur ein Göttingen! Auch beantragt er die Einrichtung von technischen Fortbildungskursen, besonders für Juristen und Verwaltungsbeamte in Göttingen. Marie Althoff“. (UBG) Cod. Ms. Math.-Archiv. 50.21, Bl. 6. – Dieser letzte Wunsch Althoffs wurde im Finanzplan der Göttinger Vereinigung im Planjahr 1.10.1909 bis 30.9.1910 realisiert. Es waren u.a. 3.000,00 M für technische Fortbildungskurse für bereits im Amte stehende Juristen bzw. Verwaltungsbeamte vorgesehen, neben 1.700,00 M zur Durchführung von Seminaren für Lehramtskandidaten an der Göttinger Universität und 2.400,00 M zur Unterstützung von Kursen für Arbeiter mechanischer Berufe. (GStAPK) I.HA. Rep.92, Althoff A I, Nr. 139, Bl. 265.

[94] Adolf Harnack: Friedrich Althoff, Rede, gehalten bei seinem Begräbnis in der Kirche zu Steglitz, in: *Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik*, 44 (1908), S. 1377–84.

[95] (UBG) Cod. Ms. Math.-Archiv. 50.21, S. 23.

> zur Pflicht machen, dass unsere Aufgabe die gleiche bleibe, wie es die seinige war: „die geistige Entwicklung unserer Nation zu fördern und das Höchste zu erstreben."
>
> He was a man, take him for all,
> We shall not look upon his like again.
> Dr. v. Böttinger
> 6. Dec. 1908

In Bericht über die Leipziger Generalversammlung der *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik* wurde außerdem erstmals mitgeteilt, dass Verhandlungen mit Althoff dazu geführt hatten, „dass ein von Herrn v. Böttinger gestiftetes Kapital zur Begründung einer 'Wilhelm-Stiftung für Gelehrte', [d.h. für] Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, Universitäten und Technischen Hochschulen, zur dauernden Erinnerung an Excellenz Althoffs hervorragendes Wirken für das höhere Lehrwesen als Grundstock verwendet wird."[96] Das wurde schließlich mit Kaiserlichem Erlass vom 21. Dezember 1908 offiziell verfügt. Felix Klein und H.Th. von Böttinger gehörten neben weiteren 14 Personen dem Vorstand dieser Friedrich-Althoff-Stiftung an.[97]

Wir können heute urteilen, dass diese Ehrungen und das überschwängliche Lob einem Verwaltungsbeamten galten, der – wie auch der Mathematiker Felix Klein – keiner Partei angehörte, „weil er bei seiner Arbeit auf die Mithilfe aller rechnen musste"[98], der am Vorabend des Ersten Weltkrieges eine „staatliche Weltfriedenspolitik" verfolgte,[99] mit Bedacht kreative Ideen förderte und es verstand, staatliche Ressourcen mit Stiftungsmitteln privater Mäzene zu kombinieren, um neue Forschungsrichtungen, Lehr- und Forschungsinstitutionen in Preußen zu verankern.

[96] Ebd., S. 9. – Vgl. auch Satzungen der Stiftung in (UBG) Cod. Ms Klein II E.
[97] Vgl. hierzu Tobies: Zum Verhältnis (wie Anm. 2), S. 45 und 56.
[98] Vgl. Harnack: Friedrich Althoff (wie Anm. 94), S. 1381.
[99] Vgl. B. v. Brocke: *Wissenschaftsgeschichte* (wie Anm. 1): S. 185.

„Gefüge versus Anwendungen“ – Kontroverse mathematikdidaktische Konzeptionen in der NS-Zeit und der Fall Otto Zoll

Henning Heske

Zusammenfassung Die Geschichte der Mathematikdidaktik in der NS-Zeit ist bislang nur in Teilen erforscht worden. Anhand des Wirkens maßgeblicher Personen werden unterschiedliche Positionen in der Konzeption des Mathematikunterrichts in jener Zeit aufgezeigt, aber auch Kontinuitäten bezüglich der Zeiträume vor 1933 und nach 1945. Insbesondere wird auf den Richtungsstreit „Gefüge versus Anwendungen“ eingegangen. Erstmals wird hier das bislang kaum bekannte Wirken des Mathematikers und Didaktikers Otto Zoll dargestellt. Die konzeptionellen Ansätze des Mathematikunterrichts im Nationalsozialismus verliefen uneinheitlich, teilweise widersprüchlich, beinhalteten jedoch stets eine starke Anwendungsorientierung auf der Grundlage der NS-Ideologie, die im Wesentlichen Indoktrination über fachliche Qualifikation stellte.

1 Einleitung – Leitfragen und Quellen

Folgt man den erkenntnistheoretischen Ausführungen von Ludwik Fleck, so gilt auch für die Mathematikdidaktik als Wissenschaft: „Historische und stilgemäße Zusammenhänge innerhalb des Wissens beweisen eine Wechselwirkung zwischen Erkanntem und dem Erkennen: bereits Erkanntes beeinflußt die Art und Weise neuen Erkennens, das Erkennen erweitert, erneuert, gibt frischen Sinn dem Erkannten.“ (Fleck, 1980, S. 54)

Insofern ist es auch für unsere Disziplin unerlässlich, sich mit der Geschichte der Mathematikdidaktik dezidiert auseinanderzusetzen. Eine kritische wissenschaftshistorische Untersuchung der Mathematik in der Zeit des Nationalsozialismus (1933–1945) setzte erst in den 1980er Jahren ein (z. B. Mehrtens, 1986), in deren Folge die persönlichen Verstrickungen einzelner Mathematiker – erwähnt seien hier insbesondere Ludwig Bieberbach und Oswald Teichmüller – sowie die Vergangenheit der meisten Mathematischen Institute hinreichend aufgearbeitet wurden (vgl. zusammenfassend Segal, 2003). Die Aktivitäten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im „Dritten Reich" sind von Remmert (2004 a, b) dezidiert untersucht worden. Demgegenüber blieb dieser Zeitraum in der Historie des deutschen Mathematikunterrichts sehr lange nur in Ansätzen erforscht. Erst zuletzt ist dieser wieder in den Fokus gerückt (Heske, 2021). An diese Arbeit anknüpfend wird im vorliegenden Beitrag den folgenden Leifragen weiter nachgegangen:

- Inwieweit stellt die Geschichte der Mathematikdidaktik im Nationalsozialismus eine eigene Epoche oder nur eine Episode dar?
- Welche Personen gestalteten aktiv die Konzeption des Mathematikunterrichts während der NS-Zeit?
- Welche fachdidaktischen Kontinuitäten aus der Zeit vor 1933 lassen sich ausmachen?
- Welche Entwicklungslinien lassen sich für den Zeitraum 1933–1945 feststellen?
- Wie spiegelt sich die Konzeption des Mathematikunterrichts in den Schulbüchern wider?

Zur Beantwortung dieser Fragen wurden neben den publizierten Quellen, wie ausgewählten Schulbüchern aus dem Zeitraum 1938–1941, den Lehrplänen (1936–1941) sowie den drei mathematikdidaktischen Zeitschriften (*Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* 1925–1943, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 1925–1943, *Mathematik und Naturwissenschaften im Unterricht* 1943–1944), auch Archivalien herangezogen: Akten aus der NS-Zeit im Bundesarchiv Berlin (BArchB), insbesondere Personalakten der maßgeblichen Akteure (Lietzmann, Kerst, Fladt, Zoll), Schriftwechselakten (Süss – Fladt) im Universitätsarchiv Freiburg sowie Tagungsunterlagen im Archiv Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

2 Zur Vorgeschichte – Die Mathematikdidaktiker Walther Lietzmann, Kuno Fladt und Bruno Kerst in der Weimarer Republik

Der bekannteste deutsche Mathematikdidaktiker in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts war zweifellos Walther (oft auch Walter) Lietzmann (1880–1959). Nach einem Studium der Mathematik und Physik promovierte er 1903 bei David Hilbert in Berlin. Bereits als Student entwickelte er als Herausgeber und Autor einer Zeitschrift ein großes fachbezogenes Interesse an publizistischen Tätigkeiten. Nach seiner Promotion ging Lietzmann in den Schuldienst, wo er schnell Karriere machte. Nach acht Jahren an einer Oberrealschule in Barmen (heute Stadtteil von Wuppertal) wurde er bereits 1914 mit nur 33 Jahren Direktor an einer Oberrealschule in Jena. 1919 wechselte er als Schulleiter nach Göttingen, wo er bis 1946 das heutige Felix-Klein-Gymnasium leitete. Als Mitglied der *Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission* (IMUK) arbeitete er ab 1908 viele Jahre intensiv mit Felix Klein zusammen (vgl. z.B. Krüger, 2000). 1914 wurde er Mitherausgeber der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*; diese einflussreiche Tätigkeit führte er durch die verschiedenen politischen Systeme fort, ab 1940 als alleiniger Herausgeber, bis zur Einstellung der Zeitschrift Anfang des Jahres 1943 infolge des Zweiten Weltkriegs. Zudem war Lietzmann von 1924 bis 1930 Vorsitzender des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU).

Auch Kuno Fladt (1889–1977) hatte Mathematik und Physik studiert, in Stuttgart und Tübingen, wo er 1920 mit einer Arbeit zur Geometrie der Mannigfaltigkeiten promovierte. Zu diesem Zeitpunkt war er bereits als Lehrer an einer Realschule in Vaihingen tätig. Politisch aktiv war Fladt nach eigenen Angaben von 1918–1925 in der linksliberalen Deutschen Demokratischen Partei (DDP). Von 1927 bis 1933 unterrichtete er als Studienrat an einer Oberrealschule in Stuttgart. Er publizierte mehrere Fachbücher und einige fachdidaktische Aufsätze, unter anderem in der von Lietzmann herausgegebenen Zeitschrift. 1932 wurde Fladt in den Vorstand des MNU gewählt.

Bruno Kerst (1883–1943) war nach seinem Studium der Mathematik in Leipzig an verschiedenen Realschulen tätig, bevor er schließlich Studienrat an einem Realgymnasium in Zwickau wurde. Seit Mitte der 1920er-Jahre hatte sich Kerst als Schulbuchautor, vornehmlich im Bereich der Geometrie, und Verfasser von fachdidaktischen Beiträgen einen Namen gemacht. Schon sehr früh suchte er die Nähe zum Nationalsozialismus und trat bereits am 1.10.1931 dem Nationalsozialistischen Lehrerbund (NSLB) sowie am 1.11.1931 der NSDAP bei. Im Juli 1932 veröffentlichte er in der *Nationalsozialistischen Lehrerzeitung*, dem „Kampfblatt des nationalsozialistischen Lehrer-Bundes“ wie es im Untertitel heißt, einen auf einem Vortrag basierenden Artikel mit dem Titel „Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaft im Rahmen des nationalsozial. Erziehungsprogramms“ (Kerst, 1932), der zunächst zwar auf wenig Resonanz stieß, den Kerst jedoch nach 1933 zu seiner bedeutsamen Schrift (Kerst, 1935) erweiterte. In diesem Aufsatz begründet Kerst die „Daseinsberechtigung“ der „Mathematik als Unterrichtsfach“ mit den lebensnahen Anwendungen (u.a. „Soldatenmathematik“). Den Hauptpunkt des nationalsozialistischen Erziehungsprogramms sieht Kerst aber in der „Stählung des Willens“: „Der Zwang zäh durchzuhalten bei den Schwierigkeiten der unbestechlichen Mathematik ist für die Entwicklung des Charakters von ganz ungeheurem Wert“ (Kerst, 1932, S. 11).

3 Mathematikdidaktische Konzeptionen in der NS-Zeit

Die Machtübernahme der NSDAP unter Adolf Hitler zu Beginn des Jahres 1933 hatte auch für die Mathematikdidaktik und den schulischen Mathematikunterricht gravierende Auswirkungen, da in ihrer Folge Fachorganisationen gleichgeschaltet (DMV) oder aufgelöst (MNU) wurden, die Lehrpläne und Schulbücher neu ausgerichtet wurden, zahlreiche Lehrkräfte und Hochschullehrende aus ihren Positionen gedrängt oder entfernt wurden und viele Einzelpersonen aus Gründen, über die nur gemutmaßt werden kann, NS-Organisationen beitraten.

So trat auch Walther Lietzmann am 1.8.1933 in den NSLB ein und wurde zum 1.10.1933 sogar für kurze Zeit förderndes Mitglied der SA. Erst nach der verfügten Aufnahmesperre trat Lietzmann dann zum 1.5.1937 der NSDAP bei. Neben seiner Schulleitertätigkeit hatte Lietzmann vor allem als Herausgeber der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, die er faktisch allein herausgab (Begründer Heinrich Schotten wurde bis zu seinem Tod auf der Titelseite lediglich pro forma als Mitherausgeber aufgeführt), großen Einfluss auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts. Überraschenderweise ernannte das Reichsministerium für Erziehung, Wissenschaft und Volksbildung 1936 mit Oberstudiendirektor Dr. Walther Lietzmann einen Didaktiker statt eines Professors für Mathematik zum Leiter (im Nazi-Duktus „Führer“) der deutschen Delegation, die vom 13.–18.8.1936 am Internationalen Mathematikerkongress ICM in Oslo teilnahm (vgl. Lietzmann, 1936 b; Hollings & Siegmund-Schultze, 2020). Das belegt das

Vertrauen, das Lietzmann offenbar im Ministerium genoss. Nach dem Kongress hatte sich Lietzmann unter den Mathematikern so große Anerkennung erworben, dass diese ihn, obgleich er Schulleiter und kein Universitätsprofessor war, mutmaßlich aus Opportunitätsgründen für den Zeitraum vom 1.10.1936 bis zum 30.9.1937 sogar zum DMV-Vorsitzenden wählten.

In seinen Veröffentlichungen blieb Lietzmann zunächst eher moderat, obgleich auch er die nationalsozialistische Forderung nach dem Primat der Erziehung in Schule und Unterricht sowie die selbstlose Eingliederung in die Volksgemeinschaft propagierte: „Die Schule soll nicht dem Einzelnen, sondern dem Volksganzen dienen, jeder Unterricht muß deshalb auf Erziehung ausgehen. In der Ausrichtung nach diesem Ziele kommt der Mathematik entscheidende Bedeutung zu.“ (Lietzmann, 1937, S. 22)

Lietzmann näherte sich zunehmend dem Nationalsozialismus an, dabei spielte der Anpassungsdruck sicherlich eine zentrale Rolle, aber er reicht als Erklärung nicht aus. So kommt eine vom Sicherheitsdienst angeforderte politische Beurteilung durch die Ortsgruppe Göttingen der NSDAP am 18.11.1938 zu der Einschätzung: „Die politische Zuverlässigkeit wird unter Berücksichtigung der oben genannten Angaben bejaht, obgleich L. seinen Liberalismus nie überwinden und sich aktiv für die Bewegung einsetzen wird. – Er ist politisch uninteressiert und lebt in seiner Mathematik.“ (BArchB, Bestand R9361-II-638936) Fünf Jahre später, am 13.12.1943, wird ihm von gleicher Stelle die politische Zuverlässigkeit dann jedoch „ohne Einschränkung“ bescheinigt.

Zu dieser Zeit hatte Lietzmann, der auch als Schulbuchautor hervortrat, bereits seinen fragwürdigen Band *Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden* (Lietzmann, 1940) sowie sein zweibändiges fachdidaktisches Hauptwerk *Mathematik in Erziehung und Unterricht* (Lietzmann & Graf, 1941 a, b) publiziert, die allesamt unverhohlen NS-Ideologie transportierten und damit das NS-Regime nachdrücklich stützten. In dem zuerst genannten Band vertrat Lietzmann die These, dass sich aus den geometrischen Beschaffenheiten von Ornamenten auf ur- und frühgeschichtlicher Keramik Hinweise auf Ort und Zeit ihrer Entstehung ableiten lassen. Er wandte sich zudem gegen die traditionelle Auffassung, dass der Ursprung der Mathematik in den lebenspraktischen Bedürfnissen der Menschen, wie Feld- und Hausbau, liege. Vielmehr hob er „die Bedeutung der Kunstformen, insbesondere des Ornaments,“ (Lietzmann, 1940, S. 7) hervor. Dadurch konnte er die Entstehung der Mathematik zeitlich und räumlich verlegen, nämlich von den Kulturen des Orients und Griechenlands zu den Germanen in Mitteleuropa. Zur Abgrenzung des untersuchten Raumes und ihrer Bevölkerung verwendete Lietzmann entsprechend der nationalsozialistischen Ideologie die Kategorie der „Rasse“.

Er verstieg sich dabei dazu, entsprechend der Bezeichnung „nordische Rasse“ den Begriff einer „nordischen Geometrie“ einzuführen, deren wesentliches Kennzeichen „der auf der Bewegung, der Schiebung, der Drehung, der Spiegelung beruhende Gruppenbegriff“ (ebd., S. 91) sei. Demgegenüber hätte die „abstrakte Geometrie der Griechen [...] es mit starren Figuren zu tun“ (ebd.). Damit begründete Lietzmann eine besonders hohe Kulturleistung der Germanen.

Nachdem 1938 die Lehrpläne für die Höhere Schule erschienen waren, veröffentlichte Lietzmann zusammen mit Ulrich Graf (1908–1954), ordentlicher Professor für Geometrie und Geodäsie an der Technischen Hochschule Danzig, die – bereits erwähnte – zweibändige Neubearbeitung seines grundlegenden Werkes *Methodik des mathematischen Unterrichts*, das erstmals 1916 erschienen war, mehrere Auflagen in der Weimarer Republik erlebte und auch nach dem Ende des Zweiten Weltkriegs in der Bundesrepublik mehrfach in überarbeiteten Fassungen publiziert wurde (1951, 1958 sowie posthum 1961, 1968, 1975 und zuletzt 1985). Die ideologische Durchtränkung der Neubearbeitung von 1941 unter neuem Titel wird bereits im Vorwort sehr deutlich:

> Grundlegend geändert hat sich der *Geist*, die ganze *Art der Auffassung*, mit der man an den mathematischen Unterricht wie an jeden Unterricht überhaupt herangeht. Es ist eben die neue Stellung der Mathematik in Erziehung und Unterricht nur vom nationalsozialistischen Standpunkt aus zu verstehen: (Lietzmann & Graf, 1941 a, S. III f.; Hervorhebung i. Orig.)

Lietzmann und Graf opferten damit die vermeintlich wertfreie Mathematik als Bildungsgut einer menschenverachtenden Ideologie, die Schule und Unterricht für ihre Zwecke politisch instrumentalisierte. So finden sich im Kapitel über die Ziele des mathematischen Unterrichts Unterkapitel mit den Überschriften „Die charakterliche Erziehung des deutschen Menschen“ (S. 22) und „Mathematischer Unterricht und Wehrwissenschaft“ (S. 33), in denen akribisch auf die vorliegende Fachliteratur verwiesen wird, insbesondere auf den Artikel „Forderungen des Heeres an den mathematischen Schulunterricht“ (Becker, 1937). Indoktrination hatte im Mathematikunterricht des Nationalsozialismus Vorrang vor einer fachlichen Qualifikation.

Bruno Kerst, der sich – wie oben erwähnt – bereits zwei Jahre zuvor sowohl der NSDAP als auch dem NSLB angeschlossen hatte, nutzte die Machtübernahme der Nationalsozialisten 1933 für einen raschen persönlichen Aufstieg. Noch im selben Jahr avancierte er zum Gausachbearbeiter für Mathematik im NSLB und ein Jahr später erhielt er den Posten des Oberstudiendirektors am Franziskaneum in Meißen, einem Realgymnasium mit Höherer Mädchenschule. 1935 wurde er zudem zum Schriftleiter der *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, dem Verbandsorgan des MNU, ernannt. Diese einflussreiche Position hatte er bis zu seinem Tod im Juli 1943 inne. Nachdem er 1937 bereits ehrenamtlicher Stadtrat in Meißen geworden war, wechselte er 1941 als Oberregierungsrat ins sächsische Volksbildungsministerium.

Unmittelbar nach der Machtübernahme arbeitete Kerst seinen oben dargestellten Artikel in der *Nationalsozialistischen Lehrerzeitung* (Kerst, 1932) weiter aus, insbesondere indem er seine Gedanken, die seinerzeit faktisch keine Beachtung gefunden hatten, nun weniger polemisch formulierte. Noch im Jahr der Machtübernahme erschienen in den beiden fachdidaktischen Zeitschriften drei Artikel von Kerst, die seine Vorstellungen vom Mathematikunterricht im Nationalsozialismus einem breiten Fachpublikum bekannt machten (Kerst, 1933 a, b, c).

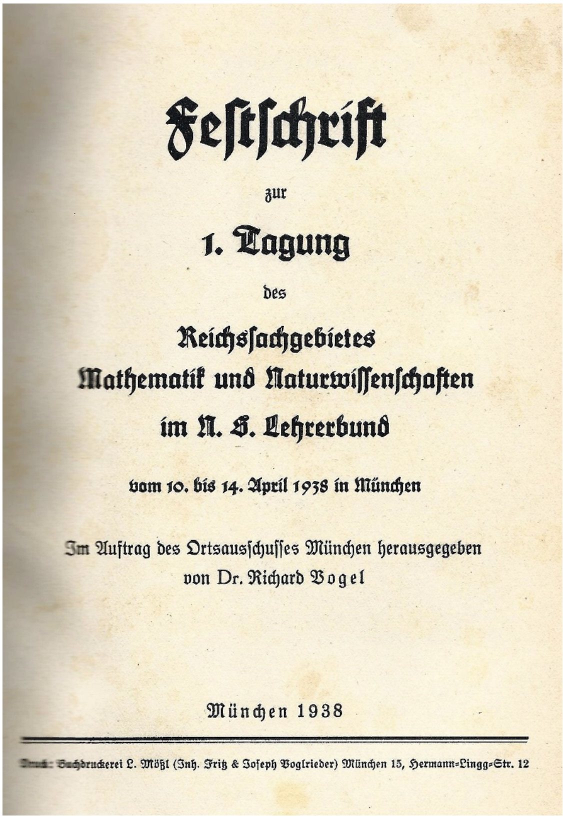
Zwei Jahre später publizierte Kerst dann dezidiert seine Konzeption für den Mathematikunterricht im Nationalsozialismus in einer lediglich 47 Seiten starke Broschüre mit dem programmatischen Titel *Umbruch im mathematischen Unterricht* (Kerst, 1935), die zu langanhaltenden Diskussionen in den Fachkreisen führte. Für den Aufbau eines künftigen Lehrplans nannte Kerst mehrere „Aufgabenkreise“: Bevölkerungskunde, Rassen- und Vererbungskunde (Wahrscheinlichkeitsrechnung), Lebenskunde (Biologie), Wirtschaft, Wehrwesen (u.a. Geschoßbahn als Parabel), Sport, Geländearbeit und Kultur (insbesondere Kunst und Musik). Kersts „wirklicher Umbruch“ sollte also darin bestehen, dass der Mathematikunterricht auf der Grundlage der nationalsozialistischen Weltanschauung grundsätzlich anwendungsorientiert gestaltet werden sollte und die mathematischen Inhalte nur als benötigte mathematische Werkzeuge legitimiert und behandelt werden sollten. Die Anwendungen seien dabei aus der „völkischen Wirklichkeit“ abzuleiten.

Kersts Forderung stand ein Jahr später im Fokus der 38. Hauptversammlung des *Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* vom 5. bis 8. April 1936 in Karlsruhe. Der Schwerpunkt der 30 Vorträge widmete sich dem Thema Angewandte Mathematik. Kerst selbst war anwesend, hielt aber keinen Vortrag. Mehrfach nahmen Redner Bezug zu seiner Konzeption eines nationalsozialistischen Mathematikunterrichts. So plädierte Adolf Dorner in seinem Vortrag „Stellung und Ausrichtung der angewandten Mathematik in den höheren Schulen“ zwar ebenfalls für ein Primat der Anwendungen im Mathematikunterricht, aber im Unterschied zu Kerst sprach er sich für ein strukturorientiertes Vorgehen aus und formulierte: „Erst das Gerüst des Systems, dann die Anwendungen.“ (zit. n. Lietzmann, 1936 a, S. 201)

Eine Aussprache im Kreis der Beiräte des Mathematischen Reichsverbandes während der Tagung kam zu dem Schluss, dass eine gegensätzliche Unterscheidung von reiner und angewandter Mathematik nicht förderlich sei und vermieden werden solle: „auf die *Mathematik als Ganzes* komme es an; ihre ‚Anwendbarkeit' zu zeigen, sei also auch ein, wenn nicht *das* Unterrichtsziel" (Dorner, 1936, S. 298–299; Hervorhebung i. Orig.). Es blieb aber die offene Frage: „Soll das *Gefüge* den *Anwendungen* untergeordnet werden, oder umgekehrt, oder soll beides mehr gleichgeordnet sein?" (ebd., S. 299; Hervorhebung i. Orig.)

Kuno Fladt trat kurz nach der Machtübernahme zum 01.05.1933 sowohl in den NSLB als auch in die NSDAP ein. Sogleich wurde er zum Oberstudiendirektor an der Kepler-Oberschule für Jungen in Tübingen befördert. Zudem erhielt er 1936 einen Lehrauftrag für Mathematikdidaktik an der Universität Tübingen. Beide Positionen behielt er bis zum Ende des Zweiten Weltkriegs. Im Vorstand des MNU stieg er 1935 zum zweiten Vorsitzenden und 1936 schließlich zum Vorsitzenden auf. In dieser Eigenschaft betrieb die Überführung des MNU in das *Reichssachgebiet Mathematik und Naturwissenschaften des NSLB*. Diese Auflösung des MNU wurde auf 39. Hauptversammlung im Frühjahr 1937 beschlossen und umgesetzt, formal trat sie jedoch erst im April 1938 in Kraft. Fladt wurde 1937 kommissarischer und 1938 dann erster und einziger Reichssachbearbeiter für Mathematik und Naturwissenschaften im NSLB. In dieser Funktion war er Verbindungsglied und Ansprechpartner für die entsprechenden Gausachbearbeiter, die insbesondere für fachliche Fortbildungen verantwortlich waren, als auch für übergeordnete Stellen des NSLB und des Reichserziehungsministeriums. Bereits 1934 waren im NSLB, der 1929 gegründet worden war, 12 Reichssachgebiete, darunter zum Beispiel Erdkunde, eingerichtet worden, um die Gleichschaltung der Lehrerverbände voranzutreiben. Mathematik und Naturwissenschaften kamen jedoch erst 1937 dazu (siehe Abb. 1). Offenbar waren der nationalsozialistischen Führung andere Fachgebiete zunächst deutlich wichtiger erschienen, sodass der MNU – nach 47 Jahren seines Bestehens – relativ spät aufgelöst wurde (Lorey, 1938).

In seiner Eigenschaft als Reichssachbearbeiter fungierte Fladt ab 1939 als Herausgeber der *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, die als vormalige Vereinszeitschrift des MNU nun als Fachorgan des Reichssachgebiets firmierten. Zudem organisierte er über die ihm unterstellten Gausachbearbeiter Fortbildungen für die Mathematiklehrkräfte. Des Weiteren begutachtete er das fachdidaktische Schrifttum für die Hauptstelle Schrifttum des NSLB und veröffentlichte in den allgemeinen pädagogischen Zeitschriften *Die Deutsche Höhere Schule* und *Nationalsozialistisches Bildungswesen* Beiträge zum Mathematikunterricht im Nationalsozialismus. In seinem Aufsatz „Gedanken über den zukünftigen mathematischen Unterricht" heißt es beispielsweise wörtlich:



Festschrift

zur

1. Tagung

des

Reichssachgebietes

Mathematik und Naturwissenschaften

im N. S. Lehrerbund

vom 10. bis 14. April 1938 in München

Im Auftrag des Ortsausschusses München herausgegeben

von Dr. Richard Vogel

München 1938

Buchdruckerei L. Mößl (Inh. Fritz & Joseph Voglrieder) München 15, Hermann-Lingg-Str. 12

Abbildung 1: Titelblatt der Festschrift zur 1. Tagung des neu geschaffenen Reichssachgebiet Mathematik und Naturwissenschaften im NSLB 1938 (Vogel 1938; Quelle: Foto des Verfassers.)

> Sieht man aber auf die Wege, auf denen man zu den mathematischen Ergebnissen kommt, so spricht ihre Vielzahl genau der Vielzahl der Rassen und Völker, und wenn man es hinsichtlich der Mathematik in Deutschland lange nicht mehr so recht bemerkte, so deshalb, weil wir auch in der Mathematik einer *Überfremdung* ausgesetzt waren. Der schlagende Beweis dafür ist die Zurückdrängung der Geometrie an den deutschen Hochschulen.“ (Fladt, 1936, S. 328, Hervorhebung v. Verf.)

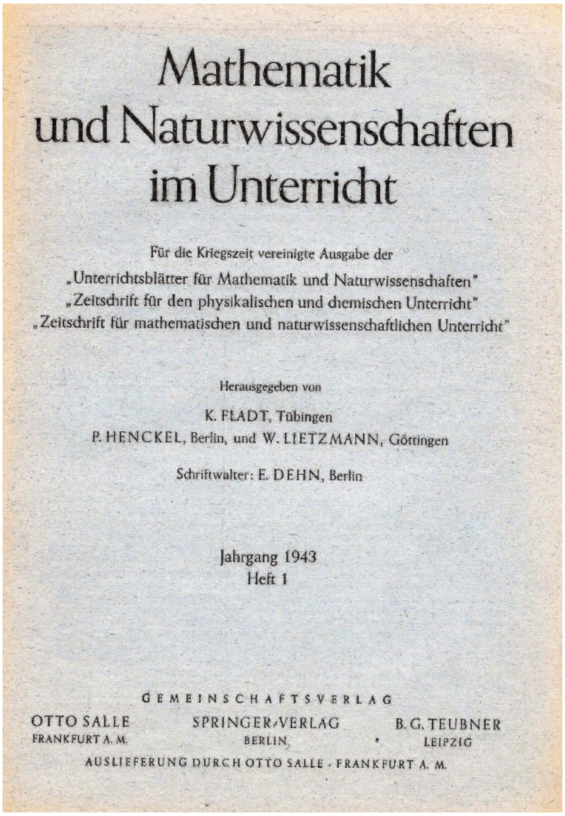
Fladt kolportierte hier unverhohlen NS-Ideologie und spielte auf eine vermeintlich abstrakte „jüdische Mathematik“ an. Gleichzeitig positionierte er sich jedoch früh klar gegen die Forderung von Kerst nach einem Umbruch im Mathematikunterricht: „Es wird also schon dabei bleiben müssen, daß die theoretischen Kapitel die Grundlage bilden und die Anwendungen erst hinterher kommen." (ebd., S. 331) Seine Propagierung eines völkischen Mathematikunterrichts erfolgte in frappierender Weise im nationalsozialistischen Sprachduktus: „Die Doppelnatur der Mathematik als eines gewaltigen Werkzeugs zur Befriedigung der völkischen Bedürfnisse und als einer reinen Blüte nordischen Geistes, die zur Verinnerlichung erzieht, muß unseren Schülern in gleicher Weise klar werden." (ebd., S. 332)

Der im Jahr 1938 erschienene Lehrplan für die Höhere Schule, den Fladt offenbar maßgeblich mitgestaltet hatte (vgl. Fladt 1936, 1937 a, b, c, 1938), setzte der Diskussion um den von Kerst geforderten Umbruch im Mathematikunterricht mit einem Primat der Anwendungen schließlich ein verbindliches Ende. Zwar sollten im Unterricht grundsätzlich Aufgaben behandelt werden, „die an den Schüler aus dem Raume der Heimat und der völkischen und politischen Gegenwart herantreten" (Erziehung und Unterricht, 1938, S. 189), wobei insbesondere auf die „Wehrwissenschaften" als „wichtiges Anwendungsgebiet" (ebd.) verwiesen wurde, aber es galt unmissverständlich: „Im wesentlichen ist aber der Stoffaufbau im ganzen und im einzelnen durch die Eigengesetzlichkeit des mathematischen Lehrgebäudes bestimmt." (ebd., S. 194) Dieser Vorgabe folgten im Wesentlichen auch die nachfolgenden Lehrpläne für die Volksschule (1939), die Mittelschule (1939) und die Hauptschule (1942).

Das relativ späte Erscheinen der neuen Lehrpläne, erst fünf Jahre nach der Machtübernahme, hatte dazu geführt, dass zunächst noch mit den alten Schulbüchern aus der Weimarer Republik weiterunterrichtet worden war. Um den Unterricht trotzdem auf die nationalsozialistische Linie zu bringen, erschienen eine Reihe von Handreichungen und Ergänzungen zum Fachunterricht. Die für den Mathematikunterricht bedeutsamste war der von Adolf Dorner im Auftrag des Reichsverbandes Deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine herausgegebene Sammelband *Mathematik im Dienst der nationalpolitischen Erziehung mit Anwendungsbeispielen aus Volkswissenschaft, Geländekunde und Naturwissenschaft* (Dorner, 1935), von dem in kurzer Zeit drei Auflagen erschienen. Das Buch, das sich vornehmlich an Lehrkräfte richtete, unterbreitete auf 118 Seiten in acht Kapiteln zahlreiche Anwendungskontexte für eine Behandlung im Mathematikunterricht, wie zum Beispiel „Aufgaben aus den Gebieten der Bildmessung und der Flugzeugortung" sowie „Nationalsozialistische Aufbauarbeit im Lichte der Mathematik".

Die ab 1938 auf der Grundlage des neuen Lehrplans erschienenen Schulbücher enthalten ebenfalls zahlreiche Anwendungen im Dienst der nationalsozialistischen Ideologie, wie zum Beispiel in dem von Walther Lietzmann zusammen mit Karl Heye herausgegebenem *Mathematischen Unterrichtswerk für höhere Schulen* (vgl.

Heske, 2021), mit zunehmender Klassenstufe jedoch immer weniger. Es gab sieben verschiedene mathematische Lehrwerke für die höheren Schulen, die vom Reichserziehungsministerium genehmigt worden waren. Diese unterlagen jedoch alle einer Kontingentierung, d. h. sie wurden vollständig Bezirken zugeordnet, in denen dieses Schulbuch ab dem Schuljahr 1939/40 eingeführt werden musste.



Mathematik
und Naturwissenschaften
im Unterricht

Für die Kriegszeit vereinigte Ausgabe der
„Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften"
„Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht"
„Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht"

Herausgegeben von
K. FLADT, Tübingen
P. HENCKEL, Berlin, und W. LIETZMANN, Göttingen

Schriftwalter: E. DEHN, Berlin

Jahrgang 1943
Heft 1

GEMEINSCHAFTSVERLAG
OTTO SALLE FRANKFURT A. M. · SPRINGER-VERLAG BERLIN · B. G. TEUBNER LEIPZIG
AUSLIEFERUNG DURCH OTTO SALLE · FRANKFURT A. M.

Abbildung 2: Titelblatt der ersten Ausgabe neu geschaffenen Zeitschrift „Mathematik und Naturwissenschaften im Unterricht“ (Quelle: Foto des Verfassers.)

Als der Zweite Weltkrieg in seine entscheidende Phase ging, hatte die gesellschaftliche und ökonomische Konzentration auf die Kriegsführung auch auf den Schulbereich gravierende Auswirkungen. So wurde der NSLB im Februar 1943 offiziell „stillgelegt“. Der umfangreiche pädagogische Zeitschriftenapparat wurde in der Folge drastisch zusammengestrichen. Auch für die beiden mathematikdidaktischen Zeitschriften *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* unter der Leitung von Bruno Kerst und Kuno Fladt sowie die *Zeitschrift für ma-*

thematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht unter der Leitung von Walther Lietzmann bedeutete dies im Frühjahr 1943 das Aus – beide wurden auch nach 1945 nicht mehr weitergeführt. Stattdessen wurden sie mit der *Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht* zu einer neuen Zeitschrift mit dem Titel *Mathematik und Naturwissenschaften im Unterricht* zusammengelegt. Leitender Herausgeber wurde Kuno Fladt, im Fach Mathematik redaktionell unterstützt von Walther Lietzmann. Von diesem Periodikum erschienen 1943 und 1944 jeweils drei schmale Hefte, bevor es ebenfalls eingestellt wurde.

Bruno Kerst verstarb am 21. Juli 1943 nach langer, schwerer Krankheit. Kuno Fladt würdigte ihn in einer Todesanzeige im zweiten Heft der neuen Zeitschrift als „wahren Nationalsozialisten“. Obwohl in den Beiträgen insgesamt inhaltlich eher eine Versachlichung eintrat, verbrämte Fladt in seinem Nachruf auf Bruno Kerst den grauenhaften Krieg im Sprachduktus des Nationalsozialismus: „Der Beginn des gegenwärtigen Völkerringens, das die völkische Bedeutung der Mathematik in Evidenz setzte, die als Wehrmathematik die ganze Mathematik zu durchdringen begann“ (Fladt, 1943, S. 78).

4 Der Fall Otto Zoll

Kaum bekannt ist der Fall des Hilbert-Schülers Otto Zoll, der sich zu einem nationalsozialistischen Schulbuchautor entwickelte. Carl Otto Zoll wurde am 2. April 1878 in Hückeswagen, einer kleinen Stadt etwa 40 km nordöstlich von Köln gelegen, als Sohn von Fritz Zoll, dem Geschäftsführer einer Textilfabrik, geboren. Später besuchte Otto Zoll Schulen in Hückeswagen, Wipperfürth und Düren, wo er im Frühjahr 1897 seinen Abschluss machte. Danach studierte er Mathematik, zunächst im Wintersemester 1897/98 in München, im Sommersemester 1898 in Berlin und ab dem Wintersemester 1899/1900 in Göttingen (vgl. Goebel & Schlensag, 2008). Dort promovierte er 1901 bei David Hilbert mit einer Dissertation, die gleichzeitig als Preisaufsatz diente. Ihr Titel lautete: *Über Flächen mit Familien geschlossener geodätischer Linien.* Die Doktorarbeit wurde am 5. Juni 1901 akzeptiert und die Verteidigung fand am 29. Juli 1901 statt. Die Fakultät vergab den vollständigen Preis, da die Arbeit das Preisproblem auf befriedigendste Weise löste und zudem in klarem und leicht verständlichem Schreibstil verfasst war. Zolls Dissertation diente als Grundlage für seine einzige Veröffentlichung in einer wissenschaftlichen Zeitschrift, in den von Hilbert mitherausgegebenen *Mathematischen Annalen* (Zoll, 1903). Die dort beschriebenen Flächen sind heute als „Zoll surface“ (Eintrag in der englischsprachigen Wikipedia) oder „Zoll manifolds“ bekannt und weiterhin Gegenstand aktueller Forschung (vgl. z. B. Lebrun & Mason, 2002). In der Differentialgeometrie bezeichnet man als Zoll-Fläche eine Fläche, die homöomorph zur 2-Sphäre ist und mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet ist, deren Geodäten alle geschlossen und von gleicher Länge sind. Zoll entdeckte die ersten nicht-trivialen Beispiele (vgl. Abb. 3).

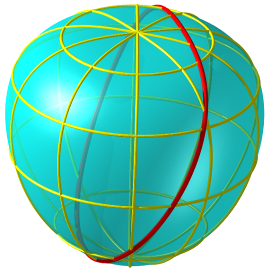


Abbildung 3: Eine von Zoll im Jahr 1903 entdeckte Zoll-Fläche. Eine geschlossene Geodäte ist rot dargestellt. (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Surfacedezoll.png; Autor: Robert Ferreol)

Nach seiner Promotion war Otto Zoll von 1905 bis zu seinem Ruhestand 1947 als Lehrer an einem Gymnasium in Düsseldorf tätig, zuletzt als Oberstudienrat. Als Hilbert-Schüler beteiligte er sich noch 1922 an dem Fotoalbum zu Hilberts 60tem Geburtstag (Abb. 4). Während der NS-Zeit trat er zunehmend als Mathematikdidaktiker in Erscheinung, nachdem er zum 1.5.1933 sowohl in die NSDAP als auch in den NSLB eingetreten war. Er publizierte mehrere unterrichtsmethodische Aufsätze in den beiden fachdidaktischen Zeitschriften (Zoll, 1935, 1936 a, b, 1937 a). Zudem war Zoll von 1931 bis 1943 Mitautor und Herausgeber eines mehrbändigen Schulbuchs für Höhere Schulen, dem *Mathematischen Arbeits- und Lehrbuch*, das bei Vieweg in Braunschweig veröffentlicht wurde (Zoll, 1940, 1944; vgl. Abb. 5).

Mit den Überarbeitungen von 1937 und 1939 wurden zahlreiche Übungen direkt mit der nationalsozialistischen Ideologie oder einem militärischen Kontext (einige sogar von der deutschen Marine bereitgestellt) in das Buch aufgenommen (Goebel & Schlensag, 2008), zunächst in Form von Ergänzungsheften (z. B. Zoll, 1937 b), dann in den Neuausgaben des Lehrwerks. Als Beleg für die unverhohlene Indoktrination durch diese Schulbücher mag das folgende Zitat aus dem Vorwort für Zolls Band *Nationalpolitische Anwendungen der Mathematik* dienen:

> Die nationalsozialistische Bewegung hat allen deutschen Schulen ein einheitliches Ziel gegeben, nämlich die Schüler zu politischen deutschen Menschen zu erziehen. Zur Erreichung dieses Zieles ist es erforderlich, die Schüler mit dem nationalsozialistischen Gedankengutvertraut zu

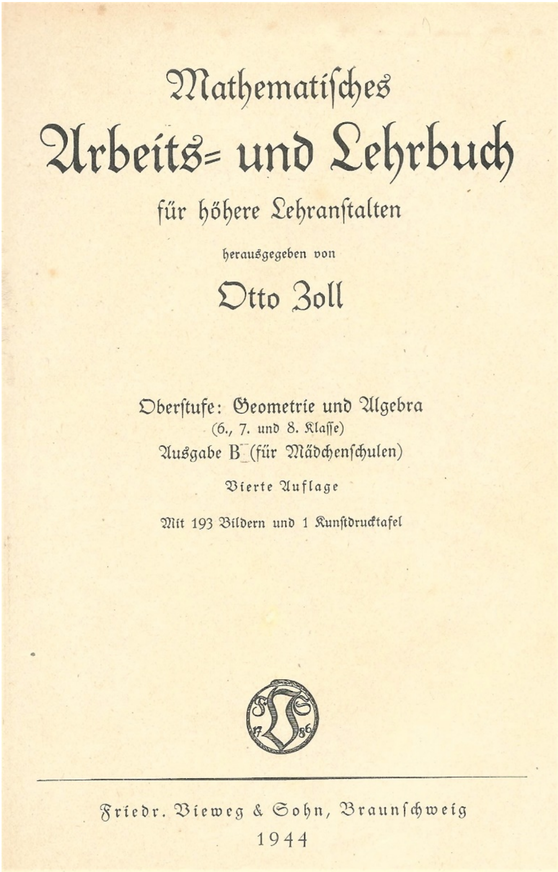
Abbildung 4: Foto von Otto Zoll aus den Jahren 1920 bis 1922. Es stammt aus dem Fotoalbum, das am 23. Januar 1922 David Hilbert zum 60sten Geburtstag überreicht wurde. (Quelle: Signatur Cod. Ms. D. Hilbert 754, Bl. 8 Nr. 34; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen)

> machen und sie mit dem deutschen Geist zu erfüllen. Die vorliegenden Abhandlungen wollen zu dieser Aufgabe einen Beitrag liefern: Sie besprechen eine Reihe lebensnaher, für das deutsche Volk bedeutsamer Fragen, bei denen die Mathematik eine Rolle spielt. (Zoll 1937 c, S. 1)

Diese Anwendungen behandelten Aspekte der Wehrwissenschaft, der Biologie (Bevölkerungspolitik, Vererbungslehre) und der Urgeschichte. Sogar in seinem Ergänzungsband zur Geometrie hießen die Kapitel martialisch „Übungen zur Kartenkunde", „Der Marschkompaß", „Der Richtkreis der Artillerie", „Die Streuung beim Schießen" sowie „Geometrische Aufgaben zur Luftfahrt" (Zoll, 1937 b, S. 3).

Zoll überlebte den Zweiten Weltkrieg und versuchte nach 1945 wieder als Schulbuchautor tätig zu werden. Doch seine Verstrickungen mit dem Nationalsozialismus verursachten Probleme mit der alliierten Militärverwaltung in Deutschland. Der Vieweg Verlag versuchte, sein Lehrbuch zusammen mit Autoren und Herausgebern umzuarbeiten, um alle anstößigen Inhalte zu entfernen. In einem Schreiben an Vieweg vom 2. Oktober 1945 brachte Zoll aber selbst die Frage auf, ob es überhaupt möglich sei, als Herausgeber zu bleiben, da er ein Parteimitglied der

NSDAP gewesen war. Nach Einwänden der Bildungsabteilung der britischen Militärregierung in Deutschland ersetzte der Verlag Zoll schließlich im Herbst 1947 als Herausgeber durch seinen früheren Mitautor Hans Brandes (vgl. Goebel & Schlensag, 2008). Ohne weitere Veröffentlichungen starb Zoll am 20. Januar 1952 in Düsseldorf.


Mathematisches
Arbeits- und Lehrbuch
für höhere Lehranstalten
herausgegeben von
Otto Zoll

Oberstufe: Geometrie und Algebra
(6., 7. und 8. Klasse)
Ausgabe B (für Mädchenschulen)
Vierte Auflage
Mit 193 Bildern und 1 Kunstdrucktafel

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig
1944

Abbildung 5: Titelblatt Zoll 1944

5 Resümee

Es ist deutlich geworden, dass die vier Mathematikdidaktiker Kerst, Fladt, Lietzmann und Zoll aus unterschiedlichen Motiven die didaktische Konzeption des Mathematikunterrichts im Nationalsozialismus maßgeblich mitgestalteten. Während Bruno Kerst zweifellos ein überzeugter Nationalsozialist war, der die NS-Ideologie in der Schule durch Indoktrination umzusetzen suchte, war es bei Kuno Fladt wie bei vielen Hochschullehrern eine Mischung aus „Opportunismus, Anpassung, Karrierismus“ (Herbert, 2021, S. 130) und ebenso – wenngleich in abgeschwächter Weise – bei Walther Lietzmann. Nach einer heftigen Phase der Politisierung des Mathematikunterrichts unmittelbar nach der Machtergreifung 1933 mit zahlreichen programmatischen Aufsätzen und Diskussionsbeiträgen in den fachdidaktischen und pädagogischen Zeitschriften, die in Kersts Forderung nach einem „Umbruch im Mathematikunterricht“ gipfelten, trat mit der Einführung der neuen Lehrpläne ab 1938 eine Phase der Konsolidierung und der Versachlichung ein, wenngleich die neuen Schulbücher vor allem in den Jahrgängen bis zur Mittelstufe auf vielfältige Weise über entsprechende Anwendungsaufgaben in den Themenbereichen Völkische Gemeinschaft, Rechtfertigung der NS-Politik, Rassenideologie und Militärwesen NS-Ideologie transportierten und immer wieder Indoktrination vor Qualifikation setzten.

Trotz seiner nachweislich tiefen Verstrickungen mit dem Nationalsozialismus, den er in wichtigen Positionen als Schulleiter, Reichssachbearbeiter und Herausgeber mitgestaltete und mittrug, konnte Kuno Fladt nach 1945 weiter er als Lehrer arbeiten. Er wurde lediglich degradiert und wirkte von 1945–1952 als Studienrat an der Isolde-Kurz-Oberschule für Mädchen in Reutlingen und der Wildermuth-Oberschule für Mädchen in Tübingen, bevor er 1952 doch wieder zum Oberstudiendirektor am Gymnasium in Calw befördert wurde, ehe er zwei Jahre später pensioniert wurde. Mit seinem Buch *Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts* (Fladt, 1950) versuchte Fladt an die Konzeptionen aus der Zeit der Weimarer Republik anzuknüpfen und die Zeit des Nationalsozialismus kommentarlos zu überspringen. Mit Erfolg, denn von 1953 bis 1974 durfte er – auch dank seiner guten Kontakte zu Wilhelm Süss (1895–1958), dem Gründer des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach und ehemaligen Rektor – Vorlesungen über Mathematikdidaktik an der Universität Freiburg halten, ab 1956 sogar als Honorarprofessor. 1957 wurde er zum Ehrenmitglied des wiedergegründeten MNU ernannt, obwohl er dessen Auflösung 1938 maßgeblich vorangetrieben hatte. Fachlich hervorzuheben sind nach 1945 vor allem seine Beiträge zur unterrichtlichen Behandlung der Geometrie (siehe z. B. Weiss, 2023). Kuno Fladt starb schließlich am 27.8.1977 in Tübingen. Seine Fachbibliothek vermachte er der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, wo sie noch heute im Didaktischen Seminar zugänglich ist.

Walther Lietzmann wurde bald nach dem Ende des Zweiten Weltkriegs pensioniert und in seinem Entnazifizierungsverfahren als entlastet eingestuft. Auch er bemühte sich in seinen Publikationen an die Zeit vor 1933 anzuknüpfen. So erschien die

Überarbeitung seiner *Methodik des mathematischen Unterrichts* wieder unter ihrem ursprünglichen Titel (Lietzmann, 1951). Er starb am 12.7.1959 in Göttingen im Alter von 78 Jahren kurz vor der Veröffentlichung seiner Lebenserinnerungen, mit deren Herausgabe er vor seinem Tod Kuno Fladt betraut hatte. Dieser strich das Kapitel über die Zeit des Nationalsozialismus mit der Begründung: „Der Alpdruck der Jahre 1933–1945 ist jetzt weggefallen, aber sie stehen uns doch zu nahe, als daß ein von allen Seiten unwidersprochener Bericht über diese Zeit möglich wäre, und sei es auch ein noch so objektiv versuchter.“ (Fladt, 1960, S. 3) Mit dieser Strategie des Beschweigens der NS-Zeit wollte er offenbar vor allem sich selbst schützen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Zeit des Nationalsozialismus in der Geschichte der Mathematikdidaktik keine zu vernachlässigende Episode darstellt, sondern eine kurze, aber gravierende Epoche mit Entwicklungslinien, die bereits vor 1933 begannen, und einigen, die nach 1945 weitergeführt wurden. Mit Walther Lietzmann, Bruno Kerst, Kuno Fladt und Otto Zoll konnten vier Personen ausgemacht werden, die maßgeblich die Konzeption des Mathematikunterrichts im Nationalsozialismus bestimmten. Die Konzeption eines völkischen Mathematikunterrichts beinhaltete eine starke Anwendungsorientierung auf der Grundlage der NS-Ideologie, die vielfach Indoktrination statt Qualifikation vorsah. Der Forderung nach einem Primat der Anwendungen im Mathematikunterricht wurde nicht nachgekommen. Die Struktur blieb die ordnende Grundlage des Faches.

Für die weitere Forschung zu dieser Thematik lassen sich folgende offene Fragen formulieren:

- Welche Rolle spielten Zensur, Selbstzensur und Anpassungsdruck bei der Herausgabe der mathematikdidaktischen Zeitschriften und der Schulbücher? (Archivstudium)
- Wer war in welcher Weise an der Abfassung der Lehrpläne für das Schulfach Mathematik beteiligt? (Archivstudium)
- Welche Kontinuitäten lassen sich in den mathematikdidaktischen Zeitschriften und den Schulbüchern ausmachen? (quantitative und qualitative Inhaltsanalyse)
- Wie sah der Mathematikunterricht in der Praxis aus? (Praxeologie: Auswertung von Schulheften, Klassenbüchern, Abiturklausuren)
- Welche Konsequenzen lassen sich aus der Geschichte des Mathematikunterrichts im Nationalsozialismus für den Aspekt der Werteerziehung im Mathematikunterricht heute ziehen?

Literatur

Becker, K. (1937). Forderungen des Heeres an den mathematischen Schulunterricht. *Die Deutsche Höhere Schule, 4*, 258–261.

Dorner, A. (Hrsg.) (1935). *Mathematik im Dienst der nationalpolitischen Erziehung mit Anwendungsbeispielen aus Volkswissenschaft, Geländekunde und Naturwissenschaft.* Diesterweg.

Dorner, A. (1936). Fragen der „Angewandten Mathematik". *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 67*, 298–299.

Erziehung und Unterricht in der Höheren Schule (1938). Amtliche Ausgabe des Reichs- und Preußischen Ministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung. Weidmannsche Verlagsbuchhandlung.

Fladt, K. (1936). Gedanken über den zukünftigen mathematischen Unterricht. *Die Deutsche Höhere Schule, 3*, 327–333.

Fladt, K. (1937 a). Die Stoffauswahl im mathematischen Unterricht der Prima im Schuljahr 1937/38. *Die Deutsche Höhere Schule, 4*, 113–117.

Fladt, K. (1937 b). Die Aufgaben des Mathematikunterrichts. *Die Deutsche Höhere Schule, 4*, 790–791.

Fladt, K. (1937 c). Die Mathematik in der künftigen höheren Schule. II. Ein mathematischer Lehrplan. *Nationalsozialistisches Bildungswesen, 2*, 116–122.

Fladt, K. (1938). Methodische und didaktische Erläuterungen zu den neuen Lehrplänen in Mathematik, Physik, Chemie und Biologie. Mathematik. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, 44*, 130–132.

Fladt, K. (1943). Zum Gedächtnis von Bruno Kerst. *Mathematik und Naturwissenschaften im Unterricht, 1*, 77–78.

Fladt, K. (1950). *Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts.* Hirschgraben.

Fladt, K. (1960). Zum Geleit. In W. Lietzmann, *Aus meinen Lebenserinnerungen* (S. 3–4). Vandenhoeck & Ruprecht.

Fleck, L. (1980). *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache.* Suhrkamp.

Goebel, M., & Schlensag, C. (2008). *Hans Brandes (1883 – 1965). Promotion in Halle – Lehrer in Braunschweig.* Reports on History of Mathematics, 58. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Herbert, U. (2021). *Wer waren die Nationalsozialisten?* C.H. Beck.

Heske, H. (2021). Mathematikunterricht im Nationalsozialismus. Die Positionen und Konzeptionen von Walther Lietzmann, Bruno Kerst und Kuno Fladt. *Mathematische Semesterberichte, 68*, 119–142.

Hollings, C.D., & Siegmund-Schultze, R. (2020*). Meeting under the Integral Sign? The Oslo Congress of Mathematicians on the Eve of the Second World War.* American Mathematical Society (History of Mathematics, Vol. 44).

Kerst, B. (1932). Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaft im Rahmen des nationalsozial. Erziehungsprogramms. *Nationalsozialistische Lehrerzeitung, 4*(7), 9–11.

Kerst, B. (1933 a). Die Bedeutung der Mathematik und Physik für die deutsche Schule. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 64*, 149–150.

Kerst, B. (1933 b). Mathematik und Naturwissenschaften im deutschen Erziehungswesen. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, 39*, 145–147.

Kerst, B. (1933 c). Mathematischer Unterricht und Wehrwissenschaften. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, 39*, 226–230.

Kerst, B. (1935). *Umbruch im mathematischen Unterricht.* Grote.

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte, 47*, 221–241.

Lebrun, C., & Mason, L. J. (2002). Zoll manifolds and complex surfaces. *Journal of Differential Geometry, 61*, 453–535.

Lietzmann, W. (1936 a). Fragen der „Angewandten Mathematik“. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 67*, 199–203.

Lietzmann, W. (1936 b). Der Internationale Mathematikerkongreß in Oslo vom 13. bis 18. August 1936. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 67*, 300–304.

Lietzmann, W. (1937). Die gegenwärtigen Bestrebungen im mathematischen Unterricht der höheren Schulen Deutschlands. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 68*, 19–22.

Lietzmann, W. (1940). *Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden.* Ferdinand Hirt.

Lietzmann, W., & Graf, U. (1941 a). *Mathematik in Erziehung und Unterricht. 1. Band: Ziel und Weg.* Quelle & Meyer, Leipzig.

Lietzmann, W., & Graf, U. (1941 b). *Mathematik in Erziehung und Unterricht. 2. Band: Lehrstoff.* Quelle & Meyer.

Lietzmann, W. (1951). *Methodik des mathematischen Unterrichts.* Quelle & Meyer.

Lorey, W. (1938). *Der deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. 1891–1938.* Otto Salle.

Mehrtens, H. (1986). Angewandte Mathematik und Anwendungen der Mathematik im nationalsozialistischen Deutschland. *Geschichte und Gesellschaft, 12*, 317–347.

Remmert, V. R. (2004 a). Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im „Dritten Reich“: Krisenjahre und Konsolidierung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12 (3)*, 159–177.

Remmert, V. R. (2004 b). Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung im „Dritten Reich“: Fach- und Parteipolitik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12 (4)*, 223–245.

Segal, S. L. (2003). *Mathematicians under the Nazis.* Princeton University Press.

Vogel, R. (Hrsg.) (1938). *Festschrift zur 1. Tagung des Reichssachgebietes Mathematik und Naturwissenschaften im N.S. Lehrerbund.* L. Mößl.

Weiss, Y. (2023). West German Neue Mathematik and Some of Its Protagonists. In: D. De Bock (Hrsg.) *Modern Mathematics – An International Movement?* (S. 103–125). Springer.

Zoll, O. (1903). Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien. *Mathematische Annalen*, 57, 108–133.

Zoll, O. (1935). Der Marschkompaß als behelfsmäßiger Winkelmesser. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, 41, 82–84.

Zoll, O. (1936 a). Zur Darstellung der fließenden Veränderlichkeit. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 67, 161–164.

Zoll, O. (1936 b). Zur Veränderlichkeit von Figuren und Zahlen. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, 42, 161–164.

Zoll, O. (1937 a). Zur Veränderlichkeit in der darstellenden Geometrie. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 68, 169–173.

Zoll, O. (1937 b). *Nationalpolitische Anwendungen zur Geometrie, Mittelstufe.* Vieweg.

Zoll, O. (1937 c). *Nationalpolitische Anwendungen der Mathematik. Für die Oberstufe höherer Lehranstalten.* Vieweg.

Zoll, O. (1940). *Mathematisches Arbeits- und Lehrbuch. Unterstufe: Rechnen und Geometrie.* Vieweg.

Zoll, O. (1944). *Mathematisches Arbeits- und Lehrbuch. Oberstufe: Geometrie und Algebra.* Ausgabe B (für Mädchenschulen). Vieweg.

Elli Heesch, Heinrich Heesch und das Parkettierungsproblem: Kollaborative Forschung zwischen Philosophie, Mathematik und Anwendung[1]

Andrea Reichenberger

“Hätten wir doch Geld,
daß wir beide zu Haus bloß
arbeiten könnten, Mathematik!”
Heinrich Heesch an Elli Heesch.
Kiel, 13. März 1938.
(Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.
Nachlaß Heinrich Heesch. Cod. Ms. H. Heesch 241:4.)

Zusammenfassung 1944 erschien im Verlag Josef Pichlmayr in Moosburg, Bayern, eine Broschüre mit dem Titel *System einer Flächenteilung* von Dr. E. Heesch, Dr. H. Heesch und Dip. Ing. J. Loef. In dem Heft, das heute als Sachakte im Bundesarchiv eingesehen werden kann, geht es um die Methode und Anwendung des Flächenschlusses, heute besser bekannt als „Parkettierung“. Der Aufsatz zeichnet die bemerkenswerte Geschichte dieses Dokuments nach. Diese Geschichte steht in engem Zusammenhang mit der wissenschaftlichen Zusammenarbeit der Geschwister Elli Heesch (1904–1993) und Heinrich Heesch (1906–1995). Sie gibt exemplarisch Einblick in die mathematische Forschungspraxis und zeigt die Abhängigkeit von personengebundenen Beziehungen mit zum

[1] Eine stark revidierte und in Teilen ergänzte, englische Version des Aufsatzes wird unter dem Titel „Elli Heesch, Heinrich Heesch and Hilbert’s Eighteenth Problem: Collaborative Research between Philosophy, Mathematics and Application“ im *British Journal for the History of Mathematics* erscheinen. DOI: 10.1080/26375451.2023.2297522.

Teil engen kollegialen und familiären Bindungen und politischen und gesellschaftlichen Rahmenbedingungen.

1 Ein Leben für die Mathematik und Philosophie

Als am 8. Mai 1945 die bedingungslose Kapitulation der Wehrmacht erfolgte und damit das Ende des Zweiten Weltkriegs in Europa offiziell besiegelt wurde, hielten sich die Geschwister Elli und Heinrich Heesch am idyllischen Königssee in Berchtesgaden auf. In den Wirren der letzten Kriegstage hatte sich der damals 39-jährige Mathematiker Heinrich Heesch mit dem Fahrrad vom bayerischen Moosburg nach Berchtesgaden aufgemacht und fand zu seiner Erleichterung seine Schwester Eilli Heesch wohlbehalten vor. Elli Heesch, Philosophin, Logikerin und Mathematikerin, war seit 1943 Leiterin des Städtischen Oberlyzeums (Mädchengymnasium) in Gelsenkirchen. Wegen der Bombenangriffe waren die Schülerinnen und das Lehrpersonal in das Voralpenland gebracht worden. Die Geschwister Heesch organisierten unmittelbar nach Kriegsende die provisorische Unterbringung von 240 Schüler*innenn und zehn Lehrer*innen in den Dörfern der Umgebung von Berchtesgaden und Bad Reichenhall. Im September 1945 konnten die Kinder mit Viehwagen zu ihren Eltern zurückgebracht werden (Füller, 2010, S. 242).

Ziel der sogenannten Kinderlandverschickungen („Umsiedlung von Kindern auf das Land“) war es, die Sorgen der Bevölkerung vor Luftangriffen zu zerstreuen und Kinder und Jugendliche vor Bomben im Zuge der Luftangriffe auf Städte zu schützen. Als Nebeneffekt konnten zurückbleibende Mütter für kriegswichtige Arbeiten freigestellt werden und die Schulkinder in Lagern gemäß nationalsozialistischer Ideologie erzogen werden. Der Alltag der Kinder, der von der Reichsdienststelle und der Hitlerjugend streng reglementiert wurde, führte nicht selten zu traumatischen Erfahrungen. Nicht alle Lehrer*innen unterstützten die nationalsozialistische Propaganda. Einige wurden zu Ersatzeltern, die die Kinder gegenüber der oftmals überforderten Lagerleitung so gut es ging in Schutz zu nehmen versuchten. Als am Ende des Krieges die Lagerleiter*innen ihres Amtes enthoben wurden, kam den Lehrerinnen (es gab nur sehr wenige Lehrer) die verantwortungsvolle Aufgabe zu, die Kinder zurück zu ihren Familien zu bringen. Unter ihnen befand sich Elli Heesch.[2]

[2] Diese Anekdote kann in der Biographie über den Mathematiker und Kristallographen Heinrich Heesch nachgelesen weden, die Hans-Günther Bigalke verfasst hat und welche 1988 bei Birkhäuser erschienen ist. Der mathematische Hintergrund des Biographen, der mit allen Einzelheiten der Forschungen von Heinrich Heesch vertraut war und Jahrzehnte lang mit ihm zusammengearbeitet hat, macht das Buch äußerst lesenswert (Bigalke, 1988). Über Elli Heesch und ihre Arbeit hingegen ist fast nichts bekannt. Es gibt aber einen sehr instruktiven

Elli Johanna Anna Heesch wurde am 4. April 1904 in Schleswig als zweite Tochter von Peter Heinrich und Bertha Heesch, geb. Herzer, geboren. Heinrich kam zwei Jahre später, am 25. Juni 1906, zur Welt. Er war das dritte Kind der Familie. Die älteste Tochter war Käthe Heesch. Sie starb nach langer Krankheit im Jahr 1925. Die Geschwister wuchsen in einem durch und durch musikalischen Elternhaus auf. Der Vater war Militärmusiker, die Mutter eine ausgebildete Sängerin. Einen wichtigen Einfluss auf den akademischen Werdegang der beiden Geschwister übte ihr Lehrer Siegfried Heller aus. Heller hatte 1904 an der Universität Kiel bei Paul Stäckel in Mathematik promoviert. Später war er Lehrer an der Oberrealschule II in Kiel. In den 1920er Jahren besuchte er regelmäßig das von Julius Stenzel, Heinrich Scholz und Otto Toeplitz geleitete Seminar für Geschichte der Mathematik an der Universität Kiel.

1922 begann Elli Heesch ihr Studium der Mathematik an der Universität Kiel. Sie hörte Vorlesungen von Ernst Steinitz und Otto Toeplitz. Sie besuchte auch philosophische Seminare bei Heinrich Scholz. In den Vorlesungen von Steinitz und Toeplitz lernte Elli Heesch Heinrich Scholz näher kennen, der dort die notwendigen mathematischen Kenntnisse für seinen neuen Weg in der Logik erwarb. Bei dieser Gelegenheit erzählte Elli Scholz von ihrem Bruder und dessen musikalischer Begabung. Scholz gab dies begeistert an Steinitz und Toeplitz weiter, mit denen er die Leidenschaft für die Musik und das Musizieren teilte. So kam es zu zahlreichen gemeinsamen musikalischen Abenden im Hause Heesch am Wilhelmsplatz 4 in Kiel. Die privaten Beziehungen verfestigten sich durch gemeinsam erlittene Trauerfälle, der Tod von Scholz' Ehefrau Elisabeth am 6. August 1924 und der Tod von Käthe Heesch am 21. Februar 1925 (Bigalke, 1988, S. 23).

Im April 1925 begann Heinrich Heesch ein Studium der Physik und Mathematik an der Universität München bei Arnold Sommerfeld und Constantin Caratheodory. 1928 erhielt er zudem ein Meisterklassenzeugnis für Violine an der Staatlichen Akademie für Tonkunst zu München. Zusammen mit seiner Schwester, die 1926/27 ein Semester in München verbrachte, fertigte er eine Mitschrift an, die Arnold Sommerfeld für seine *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. 1: *Mechanik* verwendete. Im Vorwort der Ausgabe von 1943 dankt Sommerfeld Heinrich und Elli Heesch namentlich (Sommerfeld, 1943, S. vii).

Elli Heesch bestand ihre wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen am 21. August 1928 an der Universität Kiel in den Fächern Mathematik (mit Auszeichnung), Philosophie (mit Auszeichnung) und Physik (gut). Im Wintersemester 1928/29 immatrikulierte sie sich an der Universität Münster, um

Aufsatz über Elli Heesch von Adelheid Hamacher-Hermes (Hamacher-Hermes, 2008) sowie einige Randnotizen bei Bigalke.

bei Heinrich Scholz zu promovieren. Aus gesundheitlichen und wirtschaftlichen Gründen schob sie ihr Promotionsvorhaben zunächst auf und begann Ostern 1929 den praktischen Vorbereitungsdienst für die Lehramtsprüfung an höheren Schulen. Ihren Schuldienst als Assessorin nahm Elli Heesch am 1. April 1930 am staatlichen Hildegardis-Oberlyzeum in Bochum auf, wo sie bis zum Herbst 1931 unterrichtete.

Heinrich Heesch hatte zu dieser Zeit bereits erfolgreich sein Doktoratsstudium an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich absolviert. Er promovierte 1929 auf dem Gebiet der mathematischen Kristallographie (H. Heesch, 1929a; H. Heesch, 1929b) bei Gregor Wentzel. 1930 ging er als Assistent von Hermann Weyl mit diesem von Zürich an die Universität Göttingen. Elli wechselte in diesem Jahr im Schuldienst von Bochum an das Oberlyzeum der Nonnenwerther Franziskanerinnen (Aloisianum) und unterrichtete dort bis Ostern 1932 (Abb. 1).

Abbildung 1: Elli und Heinrich Heesch. Pfingsten, Göttingen 1931, Gaußsstrasse 18. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Nachlaß Heinrich Heesch. Cod. Ms. H. Heesch 257:5.

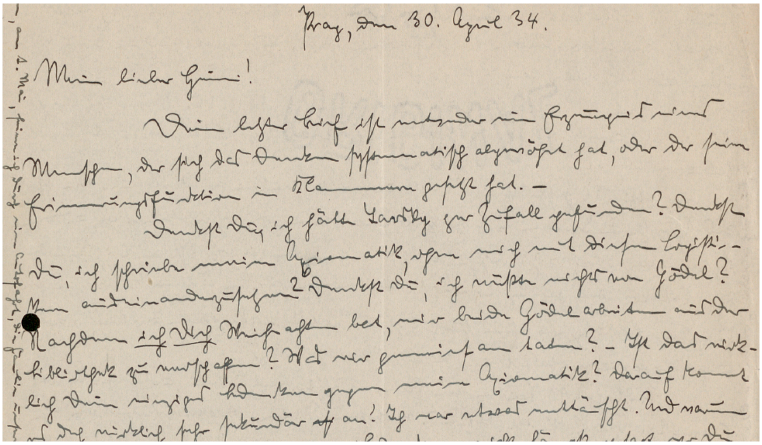
Am 13.12.1931 reichte Elli ihr Gesuch um Zulassung zur philosophischen Doktorprüfung an der philosophische Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster ein. Die Promotionsprüfung fand am 18. und 19. Februar 1932 statt. Heinrich Scholz prüfte in Philosophie, Heinrich Behnke in Mathematik und Adolf Kratzer in Physik. Elli Heesch wurde am 30. Mai 1933 der Doktortitel verliehen. Ihre Dissertation „Grundzüge der Bolzanoschen Wissenschaftslehre" wurde 1935 im 48. Band des *Philosophischen Jahrbuchs der Görres-Gesellschaft* veröffentlicht (E. Heesch, 1935a).[3]

Nach der Machtergreifung der Nationalsozialisten 1933 wurden viele Wissenschaftler aus rassischen oder politischen Gründen entlassen. Besonders betroffen war die Mathematik an der Universität Göttingen. Heinrich Heesch hätte nur durch den Beitritt zum „NS-Dozentenbund" an der Universität bleiben und sich habilitieren können. Da dies für Heesch nicht in Frage kam, arbeitete er bis 1948 privat ohne festes Einkommen und wohnte in seinem Elternhaus in Kiel (Mertens, 2004, S. 287). Auch für Elli erfüllten sich die Hoffnungen auf den Abschluss ihrer Habilitation nicht. Ab Mai 1933 arbeitete Elli im Auftrag der Brentano-Gesellschaft bei Professor Alfred Kastil und Privatdozent Ernst Foradori an der Universität Innsbruck und ging auf Kastils Empfehlung im Februar 1934 nach Prag, um sich bei Oskar Kraus, dem Leiter der Prager Brentano-Gesellschaft, zu habilitieren. Im Jahresbericht der Prager Brentano-Gesellschaft ist Elli Heesch als Gastwissenschaftlerin aufgeführt (Binder, 2019, S. 272). In dieser Zeit setzte sie sich intensiv mit Ernst Mach auseinander und arbeitete an einer Abhandlung über den Begriff der Unendlichkeit. In Prag kam Elli näher mit Mitgliedern des Wiener Kreises in Kontakt, so mit Rudolf Carnap und Otto Neurath. Ihr eigenes wichtigstes Arbeitsgebiet in diesen Monaten war die Theorie der Axiomatik. In einem Brief an Heinrich Heesch vom 30. April 1934 berichtet sie, sich intensiv mit Alfred Tarski und Kurt Gödel zu befassen (Abb. 2).

Im Frühjahr 1935 arbeitete Elli Heesch in Warschau für einige Wochen mit Jan Łukasiewicz zusammen, einem guten Freund und Kollegen von Heinrich Scholz. Doch war sie aus finanziellen Gründen gezwungen nach Deutschland zurückzukehren. Von Ostern 1935 bis 1937 lebte Elli Heesch mit ihrem Bruder in Meldorf (niederdeutsch: Möldörp oder Meldörp), einer Kleinstadt im Kreis Dithmarschen in Schleswig-Holstein. Beide waren zu dieser Zeit ohne akademische Anstellung und verdienten ihren Lebensunterhalt durch Privatunterricht. Im Nachhinein erwies sich diese Zeit als sehr produktiv. Denn beide arbeiteten in dieser Zeit über das mathematische Problem der regulären Parkettierung.

Im Februar 1936 hielt Łukasiewicz vier Vorträge in Münster auf Einladung der

[3] Vgl. Universitätsarchiv Münster. Philosophische Fakultät, Promotionsakte Elli Heesch Nr.2737.


Prag, den 30. April 34.

Mein lieber Heini!

Abbildung 2: Brief von Elli Heesch an Heinrich Heesch, 30. April 1934. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Nachlaß Heinrich Heesch. Cod. Ms. H. Heesch 241:2.

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät, darunter „Die alte und die neue Logik“. Elli Heesch saß als eine der Zuhörerin im Auditorium. In einem Brief an ihren Bruder vom 6. Februar 1936 schrieb sie mit einer Mischung aus Hoffnung und Skepsis, vielleicht für das Sommersemester als Gastwissenschaftlerin nach Warschau zurückkehren zu können. Der Forschungsaufenthalt kam nicht zustande.

Auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Salzbrunn vom 14. bis 19. September 1936 hielt Elli Heesch einen Vortrag über „Gruppen mit vertauschbaren konjugierten Elementen“ (E. Heesch, 1937, S. 272). Ein kurzer Bericht über den Vortrag erschien im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, mit Verweis auf einen ausführlicheren Bericht an anderer Stelle.

Im Jahr 1937 erhielt Elli Heesch eine Stelle als Lehrerin am Städtischen Oberlyzeum in Hagen in Westfalen. Am 30. September 1939 wurde diese Stelle in eine unbefristete Stelle als Studienrätin umgewandelt. Am 1. Juli 1946 trat sie in das Noviziat der Herz-Jesu-Gesellschaft im Kloster St. Adelheid in Bonn-Pützchen ein. Die Gesellschaft vom heiligsten Herzen Jesu (Sacré Cœur) ist eine Ordensgemeinschaft von Frauen, welche 1800 von Sophie Barat in Frankreich gegründet wurde. Seit 1949 unterrichtete Elli Heesch dort an der ordenseigenen Schule und legte am 2. April 1949 in St. Adelheid ihr Gelübde ab. Mit der Neugründung des Ordens ging sie 1951 nach Hamburg, wo sie von 1957 bis 1969 Direktorin der staatlich anerkannten katholischen Sophie-Barat-Schule war. Danach wechselte sie für drei

Jahre nach München, wo sie bis Anfang 1972 ihre Aufgaben als Oberin des Studentenwohnheims wahrnahm. Im März 1972 unternahm Elli Heesch Vortagsgreisen in die USA, die sie u.a. nach Princeton und Washington führten (Abb. 3). Auf Anregung von Prof. Dr. Ursula Maria Lehr, Psychologin, CDU-Politikerin und spätere Bundesministerin für Jugend, Familie, Frauen und Gesundheit, begann Elli Heesch 68-jährig ein Studium der Gerontologie.

Abbildung 3: Ellie Heesch in Nonnentracht in Princeton, März 1972. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Nachlaß Heinrich Heesch. Cod. Ms. H. Heesch 258:3.

Elli Heesch starb am 18. September 1993 in Bonn im Alter von 89 Jahren. Zwei Jahre später, am 26. Juli 1995, starb Ellis Bruder Heinrich in Hannover. Am Haus Wilhelmsplatz 4 in der Stadt Kiel, dem ehemaligen Elternhaus der Heesch, erinnert heute eine Gedenktafel an den Mathematiker und Kristallograph. Auf der Gedenktafel steht:

> Der Mathematiker und Kristallograph Prof. Dr. Heinrich Heesch, geb. 25.6.1906 in Kiel, gest. 26.7.1995 in Hannover, beigesetzt in Kiel, wuchs in diesem Haus auf und behielt die elterliche Wohnung bis 1984 bei. Heesch wirkte in Zürich, Göttingen und Hannover. Er führte die Schwarz-Weiß-Raumgruppen ein und leistete fundamentale Beiträge zur Parkettierungstheorie und zum Vierfarbenproblem (Liebau, 2006, S. 16).

Mit dieser Tafel, die am 17. Oktober 2005 durch den Vorsitzenden der Deutschen Gesellschaft für Kristallographie, Professor Wulf Depmeier, enthüllt wurde, würdigte die Gesellschaft einen Wissenschaftler. Auch Elli Heesch wurde eine späte Würdigung zuteil. Sie wurde noch zu Lebzeiten im Juli 1993 mit dem Bundesverdienstkreuz 1. Klasse geehrt.

2 Heinrich Heesch und Elli Heesch: Ihre Arbeiten zur Mathematik und Philosophie

Auf den ersten Blick haben Elli und Heinrich Heesch an unterschiedlichen Themen in verschiedenen Bereichen gearbeitet. Elli Heesch war Philosophin und Logikerin, Heinrich Heesch Mathematiker. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass beide in engem Austausch nicht zuletzt über mathematische Forschungsfragen der damaligen Zeit standen.

Werfen wir zunächst einen Blick auf Elli Heeschs Arbeiten. Ihre Publikationen zeigen eher eine Verbindung zu ihrem Mentor und Doktorvater Heinrich Scholz als zu ihrem Bruder. Das gilt für ihre Dissertation über Bernard Bolzanos Wissenschaftslehre (E. Heesch 1935a), für ihren Aufsatz „Psychische Wellen“ (E. Heesch 1934) sowie für ihren Aufsatz „Vom intellektuellen Gewissen“ (E. Heesch 1935b). Aus dem Briefwechsel mit ihrem Bruder geht hervor, dass Elli Heesch hoffte, der Aufsatz würde von einer renommierten Zeitschrift wie *Erkenntnis* oder den *Kant-Studien* angenommen. Letztlich wurde der Artikel aber von der theologischen Zeitschrift *Akademische Bonifatius–Korrespondenz* angenommen. Das war kein Zufall. Denn Elli Heesch führt hier die Geltungsbegründung des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch auf das „intellektuelle Gewissen“ zurück. Zudem dürften gute Beziehungen zu den katholischen Herausgebern eine Rolle gespielt haben. Nach einem Überblick über die Entwicklung der Logik ausgehend von Leibniz über Bolzano bis hin zu Freges *Begriffsschrift* von 1879 diskutiert Elli die von Jan Łukasiewicz entwickelte mehrwertige Logik im Kontext der damaligen internationale Forschungslandschaft. Als Fallbeispiel wählt sie die Debatte über die Geltungsbegründung des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch. Seit Jahrhunderten, so stellt Elli Heesch fest, wurde vergeblich versucht, den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch hinreichend zu begründen, was zur Frage führte, ob der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch überhaupt eines Beweises bedürfe.

Im Kontext der modernen Aussagenlogik, so Heesch, besagt das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch, dass eine Aussage nicht zugleich mit ihrem Gegenteil (d.i. die Verneinung der Aussage) zutreffen kann. Sofern die Schlussregeln der klassischen zweiwertigen Logik und die Regel der doppelten Negation vorausgesetzt werden, so folgt der Satz des Widerspruchs aus dem Satz vom ausgeschlossenen

Dritten und umgekehrt. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten (lat. *tertium non datur*) lässt für eine beliebige Aussage nur die Aussage selbst oder ihr (komplementäres) Gegenteil gelten; eine dritte Möglichkeit gibt es per definitionem nicht. In dieser zweiwertigen Logik hat die Negation einer Aussage „p“, geschrieben in der von Łukasiewicz eingeführten klammerfreien Notation ‘“Np“, immer den entgegengesetzten Wahrheitswert wie „p“. [4] Führt man für die Verbindung zweier beliebiger Aussagen „p“ und „q“ das Symbol „K“ ein, d.h. „Kpq“, so gilt: „KpNp“, was bedeutet: „Wenn p wahr ist, dann ist Np falsch, wenn p falsch ist, dann ist Np wahr.“ Die Gültigkeit des Widerspruchsprinzips wird nun dadurch ausgedrückt, daß der Formel „KpNp“ der Wahrheitswert „falsch“ zugewiesen wird.

Damit erhält, so Elli Heesch, der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch innerhalb der formalen Aussagenlogik seinen präzisen Sinn und seine Rechtfertigung. Denn es ist dann beweisbar, dass jede Aussage aus „KpNp“ ableitbar ist. Kritiker könnten demgegen über einwenden, dass mit dieser Argumentation lediglich die Geltung des Widerspruchsprinzips in der klassischen Logik (einschließlich Prädikatenlogik) gezeigt ist, nicht die universelle Gültigkeit schlechthin. Der „Trick“ ist das Prinzip der Zweiwertigkeit (also die Definition von „Aussage“ als entweder wahr oder falsch). Denn aus diesem Prinzip folgen der Satz vom (ausgeschlossenen) Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. In Logiken, in denen das Bivalenzprinzip nicht statuiert wird, gilt weder das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten noch das Gesetz der doppelten Negation. Und daher ist die *reductio ad absurdo* kein logisch gültiger Schluss. Allerdings bleibt in solchen (zum Beispiel mehrwertigen) Logiken der Beweis durch Widerspruch durchaus gültig. Warum? An diesem Punkt kommt Elli Heesch auf das intellektuelle Gewissen zu sprechen.

Analog zum moralischen Gewissen in der Handlungstheorie verpflichtet uns ein intellektuelles Gewissen, das Kriterium der Widerspruchsfreiheit als ein notwendiges, wenn auch nicht hinreichendes Kriterium, das ein Axiomensystem erfüllen muss, anzunehmen, gerade weil es sich beweisbar nicht ausschließen lässt, dass Widersprüche auftreten können.

> Ohne die Geltung des Widerspruchsprinzips hätten alle Aussagen das gleiche Recht, anerkannt zu werden, d.h. es würde jeder Grund fehlen, eine Menge von Sätzen auszuwählen, die als wahr gegen die falschen abgegrenzt würden (E. Heesch, 1935b, S. 26).

[4] In der polnische Notation werden logische Konstanten (Junktoren der Aussagenlogik) vor ihre Argumente geschrieben: „N“ für Negation, „K“ für Konjunktion, „A“ für Disjunktion, „C“ für das Konditional und „E“ für das Bikonditional. Als Satzbuchstaben, die für beliebige Aussagen stehen, verwendete Łukasiewicz Kleinbuchstaben. Daraus lassen sich Aussagen wie „Np“ („es ist nicht der Fall, dass p“) oder „Cpq“ („Wenn p, dann q“) zusammensetzen.

Hinter dieser Argumentation steht einmal mehr Heinrich Scholz. Scholz war einer der ersten, der neben Paul Bernays und Rósza Péter den Beweis von Kurt Gödel als eine Selbstkritik der reinen Vernunft in Analogie zu Immanuel Kants *Kritik der reinen Vernunft* bezeichnete. Mit den Gödel-Theoremen hatte sich David Hilberts Ziel, einen finitären Widerspruchsfeiheitsbeweis für die gesamte Mathematik zu finden, als beweisbar undurchführbar erwiesen. Scholz las diese Ergebnisse als einen Gewinn für die mathematische Grundlagenforschung im doppelten Sinne: als einen Erkenntnisgewinn hinsichtlich der Grenzen der axiomatisch-formalen Grundlegung der Mathematik, aber auch als einen Gewinn an Freiheit in der fortwährenden konstruktiven Suche nach neuen Widerspruchsfreiheitsbeweisen. Die Forderung nach Widerspruchsfreiheit in einem Axiomensystem setzt das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch als *conditio sine qua non* somit voraus. Dass die Anerkennung des Prinzips des ausgeschlossenen Widerspruchs handlungspragmatisch notwendig ist, um wahre von falschen Aussagen unterscheiden zu können, ohne in das Relativismus-Fatalismus-Dilemma zu geraten, war für Elli Heesch keine Frage des Konventionalismus, sondern des ethischen Gewissens. Die Frage, inwiefern diese Überzeugung mit Elli Heeschs christlichem Ethik- und Moralverständnis in Verbindung steht und von Heinrich Scholz beeinflusst war, kann hier nicht weiter verfolgt werden. Viel entscheidender ist, dass Elli Heeschs Überlegungen zur Logik und Axiomatik anwendungsbezogen mit der Gruppentheorie und deren mengentheoretischer Fundierung und axiomatischer Begründung in Verbindung zu bringen sind.

1936 erschien im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* eine kurze Bemerkung über „Gruppen mit vertauschbaren konjugierten Elementen“ (E. Heesch, 1937, S. 26). Der Bericht geht auf einen Vortrag zurück, den Elli 1936 auf der *Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* hielt, die vom 14. bis 19. September 1936 in Salzbrunn stattfand. Elli Heeschs Beitrag befasste sich mit der Gruppentheorie und den Sätzen von Sylow. Ihr Interesse an der Gruppentheorie begann bereits während ihres Studiums an der Universität Kiel. So beschäftigte sie sich 1928 in einer Arbeit mit der Polyedertheorie, einem der Forschungsschwerpunkte von Elli Heeschs Lehrer Ernst Steinitz. Steinitz’ *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie*, die Elli Heesch in den Wintersemestern 1921/22 und 1923/24 besuchte, wurden 1934 posthum als Band XLI der *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* von Hans Rademacher veröffentlicht (Steinitz, 1934).

Steinitz’ Arbeiten zur Gruppentheorie haben auch die Arbeiten von Heinrich Heesch nachhaltig beeinflusst. Das gilt nicht zuletzt für die beiden Aufsätze von 1929 in der *Zeitschrift für Kristallographie* (H. Heesch, 1929a; H. Heesch, 1929b), die als Promotionsleistung anerkannt wurden. Ein dritter Aufsatz folgte 1930 in der gleichen Zeitschrift (H. Heesch, 1930). In diesen Arbeiten führte Heesch die so genannten schwarz-weiß Gruppen ein, eine Unterklasse der magnetischen Raumgruppen. In der Festkörperphysik klassifizieren die magnetischen Raumgruppen die Symmetrien eines Kristalls sowohl im Raum als auch in einer zweiwertigen Eigenschaft wie dem Elektronenspin.

Zusätzlich zu den üblichen dreidimensionalen Symmetrieoperationen wandte Heesch es eine sogenannte Antisymmetrie-Operation an, bei der alle schwarzen Gitterpunkte weiß und alle weißen Gitterpunkte schwarz werden. Antisymmetrieoperationen sind Abbildungen, die mit einer Operation verknüpft sind, welche die Vertauschung von zwei Eigenschaften (z.B. Schwarz und Weiß) darstellt. Die Antisymmetrie besteht aus gleichen Gruppenoperationen wie die Symmetrie, jedoch mit entgegengesetzten Variablen. Die schwarz-weiß Gruppen werden heute in Anerkennung der Leistungen von Heinrich Heesch und Lew Wassiljewitschals Shubnikov „Heesch-Shubnikov-Gruppen“ bezeichnet und haben weitreichende Anwendung bei der Beschreibung von (anti-)ferromagnetischen Strukturen und Phasenumwandlungen gefunden.

Während seiner Zeit als Hermann Weyls Assistent in Göttingen wandte Heinrich Heesch seine Aufmerksamkeit zunehmend Problemen der „Flächen- und Raumteilung“ zu, besser bekannt als Parkettierungsprobleme. Ein Parkett kennt eigentlich jeder: ein Fußbodenbelag mit Muster aus gleichartigen Platten. In der Mathematik versteht man unter Parkettierung das lückenlose Auslegen einer Fläche mit Figuren (ohne Überlappung), auch Kachelung, Pflasterung oder Flächenschluss genannt. Treten die Muster regelmäßig auf, so spricht man von einer regulären Parkettierung. Das Konzept kann auch auf höhere Dimensionen erweitert werden. Bei praktischen Anwendungen im Alltag, wie bei Wandkacheln, Straßenpflaster, Mosaiken, werden oft nur einfache gleichförmige und sich wiederholende Teilflächen verwendet, z.B. einfache Polygone. Im Englischen wird dieses Vorgehen auch *Tessellation* (englisch für „Mosaik“) genannt.

Die Untersuchung von Problemen der Parkettierung in der heutigen Mathematik setzt Kenntnisse der Topologie und Gruppentheorie voraus, die ihrerseits auf der Mengenlehre aufbauen. Unter einer Parkettierung (in der Ebene) wird eine (abzählbare) Menge von Kacheln (Parkettsteine, Pflastersteine) verstanden, welche sowohl eine Packung als auch eine Überdeckung ist. Packung meint, kein Punkt der Ebene liegt im Inneren von zwei oder mehr Kacheln bzw. verschiedene Kacheln haben höchstens Randpunkte gemeinsam. Überdeckung heißt, jeder Punkt der Ebene gehört zu mindestens einer Kachel. Häufig schränkt man den Begriff noch weiter ein, indem man z.B. fordert, dass alle Kacheln homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe sind (damit insbesondere kompakt und einfach zusammenhängend).

Eine Kongruenzabbildung (euklidische Bewegung) der Ebene, welche jede Kachel (Parkettstein, Pflasterstein) einer Parkettierung wieder auf eine Kachel abbildet, ist eine Symmetrie der Parkettierung. Die Menge aller Symmetrien heißt Symmetriegruppe (der Parkettierung). Enthält die Symmetriegruppe (Untergruppe der Gruppe der euklidischen Bewegungen der Ebene) einer Parkettierung zwei linear unabhängige Verschiebungen, so heißt die Parkettierung periodisch. Sind nur regelmäßige Figuren als Kacheln zugelassen, z.B. platonische Körper, spricht man von regulärer Parkettierung.

Als im Jahr 1900 David Hilbert eine Liste von zehn ungelösten Problemen in der Mathematik vorstellte, nannte er in der schriftlichen (ausführlicheren) Fassung als das 18. Problem den „Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern" (Hilbert, 1900). Hilbert formulierte das Problem anhand zweier Teilfragen. Hilbert fragte, erstens, „ob es auch im n-dimensionalen euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich gibt" (Hilbert, 1900, S. 286). Zweitens schloss Hilbert die Frage an, ob auch „solche Polyeder existieren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten und mittels derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung kongruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist" (Hilbert, 1900, S. 286).

Hilbert fragte also erstens nach der Verallgemeinerbarkeit einer endlichen Anzahl von Typen diskreter Bewegungsgruppen im n-dimensionalen euklidischen Raum mit kompaktem Fundamentalbereich und zweitens nach der Existenz eines n-dimensionalen Polyeders, das zwar als Kachel von monoedrischen Raumteilungen des n-dimensionalen euklidischen Raumes auftreten kann, aber nicht von isoedrischen. Ein solches Polyeder wird anisoedrisch genannt.

Die erste Frage des 18. Hilbert-Problems wurde 1910 von Ludwig Bieberbach (Bieberbach, 1910) gelöst, die zweite Frage von Karl Reinhardt 1928 für $n = 3$ durch Konstruktion eines 3-dimensionalen anisoedrischen Polyeders positiv beantwortet (Reinhardt, 1928). Heinrich Heesch fand 1935 eine einfachere Lösung für $n = 2$, d.h. ein nichtkonvexes anisoedrisches Polygon in der Ebene. Durch Prismenbildung erhält man daraus dann auch anisoedrische Polyeder für alle $n > 2$. Die von Heesch als Beispiel in seiner Arbeit von 1935 angegebene Kachel (Parkettstein) ist ein Polygon mit zehn Ecken (Abb. 4):

> Die euklidische Ebene ist z.B. durch folgendes Zehneck lückenlos zu bedecken, ohne daß es als Fundamentalbereich einer (zweidimensionalen diskontinuierlichen) Gruppe von Decktransformationen vorkommen könnte. [...] Die Heuristik eines solchen Beispieles wird im Zusammenhang der Darstellung des ganzen Fragenkreises (an anderer Stelle) klar

> hervortreten. Hier möge die Behauptung durch eine elementare konstruktive Betrachtung erhärtet werden: Wenn mit dem Polygon *E* eine lückenlose Zusammensetzung der Ebene möglich sein soll, so müssen insbesondere die Beträge, die an seiner konvexen Hülle fehlen, durch Heranbringen von lauter kongruenten Exemplaren ausgefüllt werden können. (H. Heesch, 1935, S. 116)

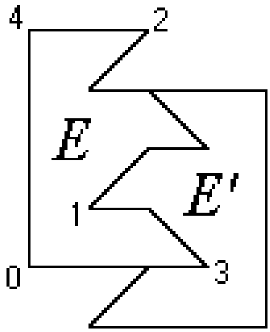


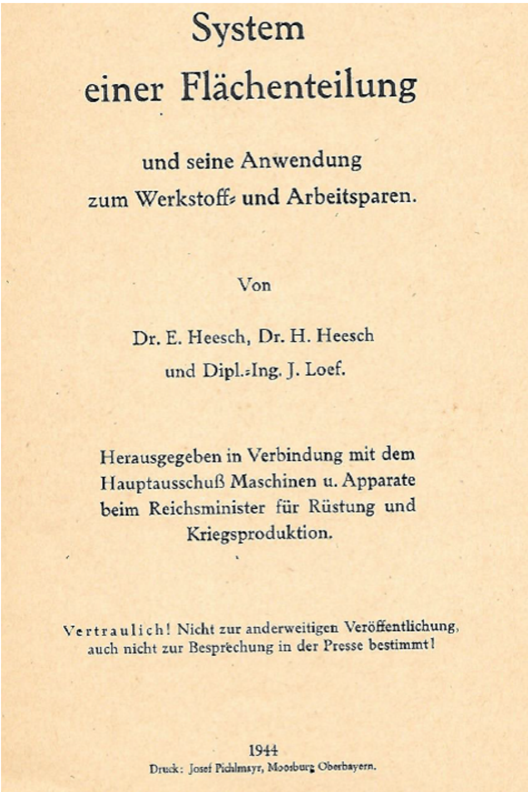
Abbildung 4: Polygon mit zehn Ecken. Abbildung aus Heesch, H. 1935. „Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen", S. 116.

Heesch kommt zu dem Schluss, dass mit diesem Zehneck die euklidische Ebene einfach und lückenlos überdeckt werden kann, ohne daß es Fundamentalbereich einer Gruppe von Decktransformationen ist:

> daß das Polygon Fundamentalbereich einer Gruppe sein kann, besagt: es ist möglich, die Übergangstransformationen von einem Bereich zu den angrenzenden so zu wählen, dass eine jede derselben in einer zweidimensionalen diskontinuierlichen Gruppe von Decktransformationen auftreten kann. Insbesondere muss es also Transformationen geben, deren Wiederholung das Exemplar E wiederum in ein Exemplar der Zerlegung überführt. Die beiden angegebenen Gleitspiegelungen erfüllen diese Bedingung aber nicht (H. Heesch, 1935, S. 116).

Heinrich Heeschs „Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen" in den *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* erschien 1935. Zu dieser Zeit war Heesch nicht mehr in Göttingen. Die Arbeit wurde auf Empfehlung von Helmut Hasse publiziert. In seiner Monographie über Heinrich Heesch bemerkt dazu

Hans-Günther Bigalke: „Für mehr als zwanzig Jahre sollte dies die letzte mathematische Veröffentlichung Heeschs sein. Seine Assistentenzeit endete am 31.3.1935. Eine Verlängerung war nicht möglich“ (Bigalke, 1988, S. 114). Ganz korrekt ist diese Festellung allerdings nicht. Denn Heinrich Heesch schrieb 1944 zusammen mit Elli Heesch und Jakob Loef ein kleines Büchlein mit dem Titel *System einer Flächenteilung* (E. Heesch, 1944). Die Publikation wurde „in Verbindung mit dem Hauptausschuß Maschinen und Apparate beim Reichsministerium für Rüstung und Kriegsproduktion“ herausgegeben. Auf dem Deckblatt der Vermerk: „Vertraulich! Nicht zur Veröffentlichung an anderer Stelle und nicht zur Diskussion in der Presse bestimmt!“ (Abb. 5)


System
einer Flächenteilung

und seine Anwendung
zum Werkstoff- und Arbeitsparen.

Von

Dr. E. Heesch, Dr. H. Heesch
und Dipl.-Ing. J. Loef.

Herausgegeben in Verbindung mit dem
Hauptausschuß Maschinen u. Apparate
beim Reichsminister für Rüstung und
Kriegsproduktion.

Vertraulich! Nicht zur anderweitigen Veröffentlichung,
auch nicht zur Besprechung in der Presse bestimmt!

1944
Druck: Josef Pichlmayr, Moosburg Oberbayern.

Abbildung 5: System einer Flächenteilung von Dr. E. Heesch, Dr. H. Heesch and Dip. Ing. J. Loef. Moosburg: Josef Pichlmayr 1944.

Das Heft von insgesamt 62 Seiten, von dem einige dutzend Exemplare gedruckt wurden, befindet sich heute als Sachakte (Archivnummer R 3/653) im *Bundesar-*

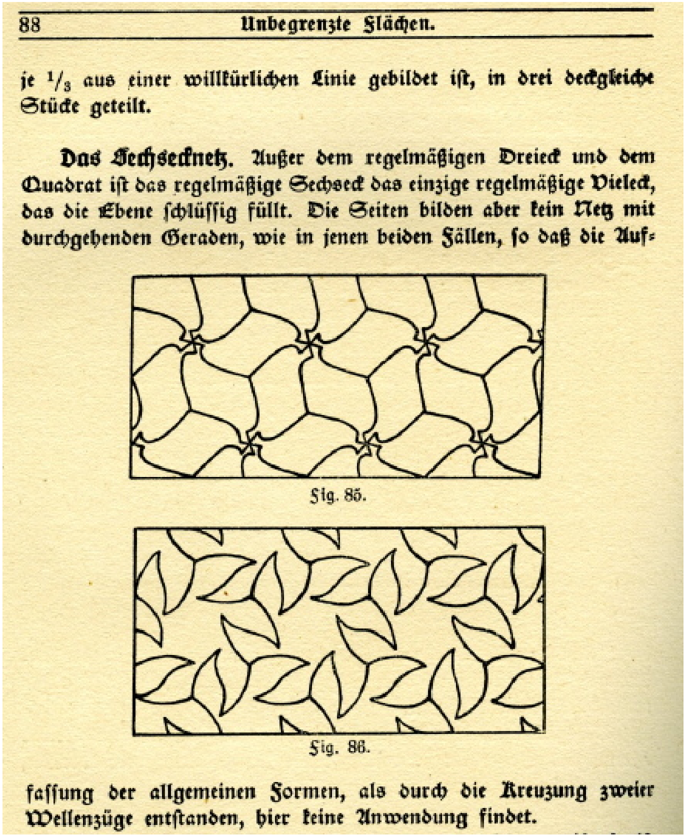
chiv in Berlin-Lichterfelde. Der Titel, unter dem die Akte katalogisiert ist, nämlich „System einer Flächenteilung und seine Anwendung zum Werkstoff- und Arbeitsparen nach Heesch und Loef“, ist irreführend. Denn das Titelblatt lautet: „System einer Flächenteilung und seine Anwendung zum Werkstoff- und Arbeitsparen. Von Dr. E. Heesch, Dr. H. Heesch und Dipl. Ing. J. Loef“. Elli Heesch wird explizit als Mitautorin genannt. Tatsächlich hatte Elli Heesch einen größeren Anteil an den Forschungen ihres Bruders zum Parkettierungsproblem als bislang bekannt.

3 Kollaborative Forschung zur Parkettierung zwischen Theorie und Anwendung

Nach der Promotion gingen Elli und Hermann Heesch getrennte Wege, blieben aber trotz unterschiedlicher Lebenswege sowohl persönlich als auch wissenschaftlich verbunden. Dies wird nicht zuletzt in der umfangreichen brieflichen Korrespondenz der beiden Geschwister deutlich. Bei vielen seiner mathematischen Überlegungen bezog Heinrich Heesch seine Schwester mit ein und bat sie um ihre Meinung und Hilfe, so auch beim Parkettierungsproblem. In der 1944 erschienenen Publikation zur Flächenteilung ist von der „Erfindung der Geschwister Heesch“ (E. Heesch, 1944, S. 20) die Rede. Gemeint ist damit der Nachweis, dass sich mit genau 28 verschiedenen Grundtypen asymmetrischer Parkettsteine die Ebene isoedrisch belegen lässt. Diese Methode des „Flächenschlusses“ wird von Elli und Heinrich Heesch im ersten Teil der Koproduktion mit Jakob Loef vorgestellt. In diesem Zusammenhang verweisen Elli und Heinrich Heesch auf Wilhelm Ostwalds Buch *Harmonie der Formen* (Ostwald, 1922), in dem viele Beispiele für regelmäßige (reguläre) Parkettierungen zu finden sind (Abb. 6).

Allerdings stellte Ostwald nicht die Frage nach der Vollständigkeit. Es war Hilbert, der in der Formulierung seines 18. Problems fragte, so Elli und Heinrich Heesch, ob es auch Polyeder gibt, die nicht fundamentale Gebiete von Bewegungsgruppen sind, durch die aber dennoch durch ein geeignetes Nebeneinanderstellen von kongruenten Kopien eine vollständige Ausfüllung des ganzen Raumes möglich ist („vollständig“ meint hier „lückenlos“).

Elli und Heinrich Heesch führen nun weiter aus, dass sie beide (sic!) für Hilberts Frage eine Lösung gefunden haben. Aus dem Briefwechsel zwischen Elli und Heinrich Heesch wird ersichtlich, dass sich Elli mit ihrem Bruder zu Beginn der 1930er



88 Unbegrenzte Flächen.

je $1/3$ aus einer willkürlichen Linie gebildet ist, in drei deckgleiche Stücke geteilt.

Das Sechsecknetz. Außer dem regelmäßigen Dreieck und dem Quadrat ist das regelmäßige Sechseck das einzige regelmäßige Vieleck, das die Ebene schlüssig füllt. Die Seiten bilden aber kein Netz mit durchgehenden Geraden, wie in jenen beiden Fällen, so daß die Auf-

Fig. 85.

Fig. 86.

fassung der allgemeinen Formen, als durch die Kreuzung zweier Wellenzüge entstanden, hier keine Anwendung findet.

Abbildung 6: Aus Wilhelm Ostwalds Buch Die Harmonie der Formen, erschienen 1918 (2. Aufl. 1922) im Leipziger Verlag Unesma.

Jahre ausführlich über Parkettierungsfragen austauschte.[5] Es gelang ihnen zu zeigen, dass für das Parkettieren eines Steins notwendig und hinreichend ist, dass er mindestens einem von 28 verschiedenen Formtypen angehört. Für jeden Typus lassen sich Konstruktionsregeln angeben.

Elli und Heinrich Heesch reichten ihre Lösung 1934 in der *Mathematischen Zeitschrift* ein. Der Artikel wurde zum Druck angenommen. Aber sie verzichteten „aus verschiedenen Gründen“ (E. Heesch, 1944, S. 15) auf eine Veröffentlichung. Nach Bigalke war dies „vielleicht einer der größten Fehler, die er [Heinrich Heesch]

[5] Der Briefwechsel zwischen Heinrich und Elli Heesch befindet sich heute in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Hans-Günther Bigalke überreichte den Nachlass 1995 dem Universitätsarchiv als Geschenk (Signatur Cod. Ms. H. Heesch).

im Interesse seiner Karriere machte“ (Bigalke, 1988, S. 125). Einer der Gründe, warum sich die Geschwister Heesch entschlossen, die Arbeit vorerst nicht in der *Mathematischen Zeitschrift* zu publizieren, war der Rat von Victor Moritz Goldschmidt, die mathematische Erfindung patentieren zu lassen. Doch dies gestaltete sich schwieriger als gedacht. Erfolglos bemühten sich die Geschwister um ein Patent. Im März 1943 wurden die Anträge vom Reichspatentamt endgültig abgelehnt. Auch in anderen europäischen Staaten versuchten die Geschwister ihr Glück. Zur Patentanmeldungen im Ausland und der dort angestrebten Vermarktung der Parkettierungs-Ideen unternahmen sie gemeinsam einige Auslandsreisen. So fuhren sie 1937 nach England und besuchten bei dieser Gelegenheit Max Born und dessen Frau in Cambridge (Bigalke, 1988, S. 127).

Ungeachtet dieser Fehlschläge setzten sich die Geschwister mit allen ihren Kräften und Möglichkeiten für die Vermarktung ihrer Erfindung ein. Sie warben für den wirtschaftlichen und ästhetische Nutzen der Parketteriungstechnik. (Aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten geht es beim Flächenschluss um abfallarmes Schneiden jeder Art, also möglichst um ein Abschneiden (Stanzen) ohne Abfall, etwa bei der Blechverarbeitung. Darüber hinaus lassen sich nach den Regeln der Parkettierung Kunstwerke, beispielsweise Ornamente, herstellen.)

Am 30./31. Januar 1934 hielt Heinrich Heesch auf Einladung von Ludwig Bieberbach zwei Vorträge am Mathematischen Institut in Berlin: einen wissenschaftlichen Vortrag für Mathematiker über das Parkettierungsproblem und einen Vortrag für die Öffentlichkeit über die „Flächenteilung als ästhetisches Gestaltungsprinzip“ (Bigalke, 1988, S. 126). Im Auditorium des öffentlichen Vortrags saß der Leiter der Dresdner Niederlassung der Firma Villeroy & Boch. Er lud Heesch ein, für das Unternehmen geeignete Fliesenentwürfe zu entwickeln. Tatsächlich wurde 1934 der Eingang des neu erbauten Göttinger Stadthauses mit Heesch-Fliesen gestaltet (In den 80er Jahren wurde das inzwischen zur Stadtbibliothek umgewidmete Haus renoviert und ein Großteil der Kacheln abgerissen.)

Im Frühjahr 1938 stellte Heinrich Heesch auf der Leipziger Messe Mustermodelle vor. Auf der Messe lernte er Jakob Loef kennen, Direktor der Maschinenfabrik Steinbock AG in Moosburg, Oberbayern. Loef zeigte Interesse an Heeschs Arbeit. In einem Brief vom 3. Februar 1938 teilte Heinrich seiner Schwester mit, dass Jakob Loef ihm einige seiner eigenen Entwürfe als Skizzen geschickt habe sowie einen kurzen Text über Hilberts 18. Problem. An seine Schwester schrieb er, dass er Loefs Verständnis des Hilbert-Problems für „grausam oberflächlich“ halte. Außerdem würde Loef die durch Parkettierungen erzielten Einsparungen hoffnungslos überschätzen.

Das hielt Heesch nicht davon ab, die Plattenverluste der Loef-Entwürfe genauer zu berechnen. Er schickte die Ergebnisse mit Entwürfen an Elli und bat sie um ihre Meinung. Elli ermutigte ihren Bruder zur Zusammenarbeit mit Loef. Loef bot Heesch einen Arbeitsvertrag an, den dieser annahm. Loef war es auch, der später für Heinrich Heesch eine Beurlaubung vom Wehrdienst ab dem 15. August 1944 erwirkte und eine damit einhergehende befristete Anstellung beim Planungsdienst des Reichsforschungsrats in die Wege leitet. De facto arbeitete Heesch weiter in Moosburg bei der Firma Steinbock AG.

Zu gleichen Zeit gelang es Loef Kontakte zur Firma Siemens & Halske herzustellen. Ein erstes Treffen mit 300 Fachleuten des Unternehmens unter der Leitung von Dr. R. von Siemens fand am 24.11.1944 statt.[6] Im Januar 1945 wurde vereinbart, dass das Heesch-Verfahren in großem Umfang u.a. in der Telefonproduktion eingesetzt werden sollte. Am 15.1.1945 wurde ein Vertrag zwischen Siemens und den Geschwistern Heesch unterzeichnet. Beide zusammen sollten für ihre „Beratungstätigkeit“ 300 Reichsmark pro Monat erhalten (Bigalke, 1988, S. 146). Neben Siemens & Halske hatten auch die Messerschmitt-Flugzeugwerke Interesse an der Erfindung der Geschwister bekundet. Noch im Februar 1945 führten Elli und Heinrich Heesch gemeinsam einen mehrtägigen Lehrgang im Forschungsinstitut Oberammergau der Messerschmitt-Flugzeugwerk durch. Durch den Zusammenbruch und die Kapitulation des Deutschen Reiches kamen besagte Kooperationen jedoch nicht mehr zustande.

Nach dem Krieg kehrte Elli als Lehrerin und Ordensschwester in den Schuldienst zurück. Ihre Einkleidung in den Orden vom heiligsten Herzen Jesu (Sacré Cœur; lat. Religiosa Sanctissimi Cordis Jesu) erfolgte am 16. März 1947 im Kloster St. Adelheid in Bonn-Pützchen (die Profession fand 1955 in Rom statt). Seit 1949 unterrichtete Elli Heesch an der ordenseigenen Schule und legte ihr erstes Gelübde in St. Adelheid am 2. April 1949 ab. 1951 ging sie mit der Neubegründung des Ordens nach Hamburg, wo sie von 1957 bis 1969 als Rektorin das staatlich anerkannte katholische Mädchengymnasium, die Sophie Barat Schule, leitete, benannt nach Sophie Barat, der Gründerin des Ordens. 1962 richtete Elli Heesch neben dem neusprachlichen einen mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig an der Schule ein.

Heinrich Heesch nahm nach dem Krieg seine Kontakte zur Industrie und Wirtschaft wieder auf und versuchte erneut akademisch Fuß zu fassen. Er veröffentlichte eine Reihe von anwendungsbezogenen Arbeiten, zum Beispiel im *Industrie-*

[6] Um welchen „R. von Siemens“ es sich dabei handelte, konnte nicht ermittelt werden. Die Angaben sind entnommen aus (Bigalke, 1988, S. 146).

Anzeiger Essen (H. Heesch, 1950) und in den *Mitteilungen der Forschungsgesellschaft Blechverarbeitung* (H. Heesch, 1956; H. Heesch, 1957).

1955 wurde Heinrich Heesch Lehrbeauftragter, nach seiner Habilitation 1958 Privatdozent und schließlich außerordentlicher Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Seine beiden Bücher über das Parkettierungsproblem aus den Jahren 1963 und 1968 wurden sehr populär und dienen auch heute noch als Grundlage vieler Publikationen zur Parkettierung. Das Buch *Reguläres Parkettierungsproblem* (H. Heesch, 1968) erschien 1968 in den Veröffentlichungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (AFLNW, Band 172). Das Buch *Lehre vom Flächenschluß* (O. Heesch H. u. K., 1963) von 1963 geht auf die lange Zusammenarbeit mit Otto Kienzle zurück.

Der Ingenieur Kienzle war 1934 auf den Lehrstuhl für „Betriebswissenschaften und Werkzeugmaschinen" an die Technischen Hochschule Berlin berufen worden. Kienzle hatte bereits 1938 Heesch eine Assistentenstelle an der TU Berlin mit Aussicht auf Habilitation angeboten. Damals hatte Heesch das Angebot abgelehnt. 1947 wurde Otto Kienzle mit der Vertretung des Lehrstuhls für Werkzeugmaschinen der Technischen Hochschule Hannover beauftragt und 1949 auf diesen berufen. So ergab sich erneut die Gelegenheit einer Zusammenarbeit, die diesmal Heesch nicht ausschlug. In der gemeinsamen Publikation von 1963 beziehen sich die Autoren ausdrücklich auf die Vorarbeiten mit Jakob Loef und Elli Heesch. In der späteren Rezeption des Buches ist hingegen oft davon die Rede, dass die 28 Parkett-Grundtypen auf die Klassifizierung von Heesch und Kienzle zuückgehen. In dem Buch *Flächenschluß* aus dem Jahr 1963 wird eine detaillierte Beschreibung und Erläuterung dieser Grundtypen einschließlich zahlreicher Abbildungen und Tabellen (s. Abb. 7) gegeben.

Die Herleitung der 28 Typen beruht auf der Kombination von elf homogenen Zerlegungen der Ebene, sogenannten Laves-Netzen, mit 17 diskontinuierlichen Gruppen von ebenen kongruenten Abbildungen mit mehr als einer Translationsrichtung.[7] Ausgehend von einem Vieleck wird bei einer Translation eine Seite verändert und zur gegenüberliegenden verschoben. Bei einer Gleitspiegelung wird die veränderte Seite verschoben und anschließend am Seitenmittelpunkt gespiegelt. Bei einer Drehung wird eine halbe Seite verändert und durch Drehung um den Seitenmittelpunkt auf die zweite Hälfte übertragen. Durch eine Drehung um einen Eckpunkt des Vielecks wird die geänderte Seite auf die benachbarte übertragen. Auf Grund der Forderung nach Periodizität des gesamten Musters kommen als mögliche Drehungen nur solche um 60°C, um 90°C, um 120°C und um 180°C, also Punkt-

[7]Die Herleitung der 28 Grundtypen wird in zahlreichen Einführungs- und Lehrbüchern zur Parkettierung beschrieben, so zum Beispiel bei (Behrends, 2019) oder (Dobrowolski, 2010).

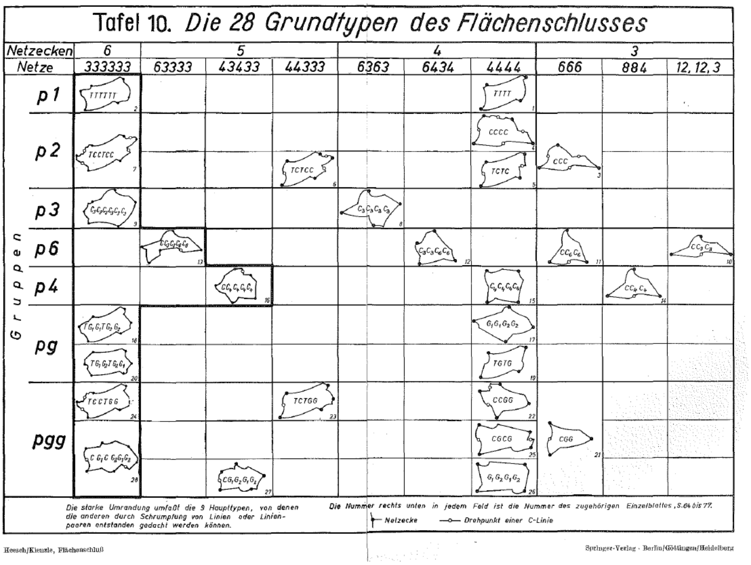


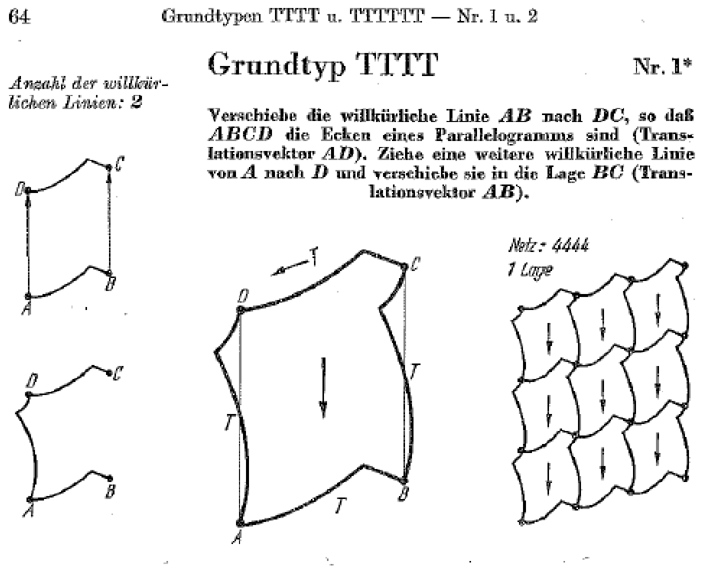
Abbildung 7: Tafel 10. Die 28 Grundtypen des Flächenschlßes. Aus Heinrich Heesch und Otto Kienzles Buch Flächenschluß 1963.

spiegelungen, in Frage. Die spezielle Gleitspiegelung überträgt eine Seite auf die Nachbarseite mit zusätzlicher Spiegelung am Mittelpunkt. Mit diesen Grundoperationen können genau neun Typen konstruiert werden. Durch Kombination mit den 17 Symmetriegruppen ergeben sich genau 28 verschiedene Konstruktionen.

Fritz Laves, Assistent von Victor Moritz Goldschmidt, hatte in einer Arbeit aus dem Jahr 1931 elf homogene Netze, die zu den homogenen Zerlegungen der Euklidischen Ebene gehören, hergeleitet (Laves, 1931). Dabei handelt es sich um die Parkettierung der Ebene durch endlich viele gleiche oder spiegelbildlich gleiche Polygone, wobei jedes Polygon von der Gesamtheit der anderen in gleicher oder spiegelbildlich gleicher Weise umgeben ist.

Die Geschwister Heesch erkannten, dass sich aus den 11 Laves-Netzen 28 verschiedene Konstruktionen von regulärer Parkettierung ergeben, wenn die Bedingung hinzugefügt wird, dass keine Kante eines Parkettsteins aus einem einzelnen Geradenstück besteht, d.h. das Laves-Netz einer periodischen Kachel darf keine gerade Linie als Kante enthalten. Damit solche Kacheln ein Parkett bilden, ist die Hälfte der Kante einer Kachel frei wählbar, die andere Hälfte muss sich durch Symmetrieoperationen aus der ersten Hälfte ergeben.

Erläutern lässt sich dieses Verfahren beispielsweise anhand des Grundtyps $TTTT$ (T ist diejenige Linie, die durch Translation aus einer anderen Linie hervorgeht), hier nach Heesch & Kienzle 1963 wie folgt dargestellt (Abb. 8):


64 Grundtypen TTTT u. TTTTTT — Nr. 1 u. 2

Grundtyp TTTT Nr. 1*

Anzahl der willkürlichen Linien: 2

Verschiebe die willkürliche Linie *AB* nach *DC*, so daß *ABCD* die Ecken eines Parallelogramms sind (Translationsvektor *AD*). Ziehe eine weitere willkürliche Linie von *A* nach *D* und verschiebe sie in die Lage *BC* (Translationsvektor *AB*).

Abbildung 8: Grundtyp TTTT. Aus Heesch & Kienzle: Flächenschluß. Berlin 1963, S. 64.

Die dazugehörige Anweisung lautet:

> Verschiebe die willkürliche Linie AB nach DC, so daß $ABCD$ die Ecken eines Parallelogramms sind (Translationsvektor AD). Ziehe eine weitere willkürliche Linie von A nach D und verschiebe sie in die Lage BC (Translationsvektor AB). (O. Heesch H. u. K., 1963, S. 64)

Die 28 Grundtypen bei Heesch & Kienzle 1963 mit ihren Konstruktionsregeln werden bereits im Moosburger „Informationsheft“ von 1944 beschrieben (Abb. 9).

Die dazugehörige Anweisung lautet:

> Wähle 4 Punkte A, B, C, D als Ecken eines Parallelogramms. Verbinde A mit D durch eine willkürliche Linie. Verschiebe AD parallel nach

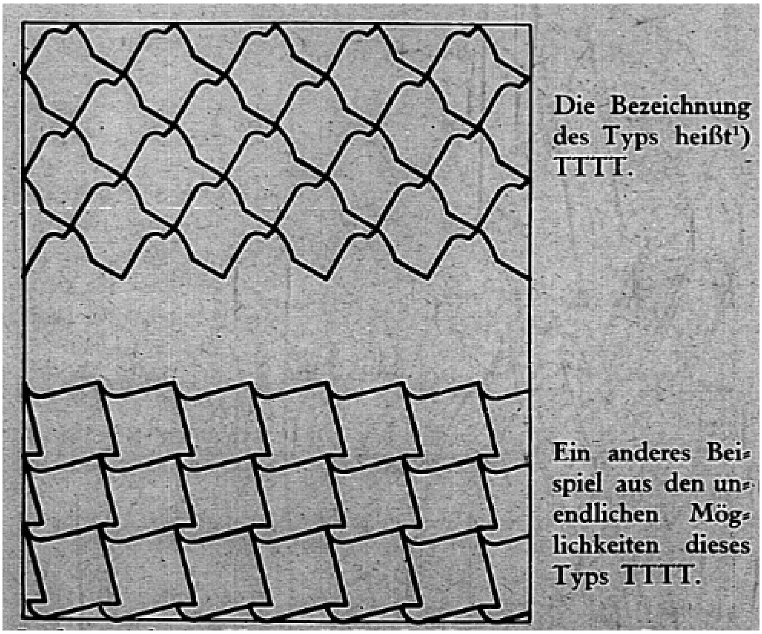


Abbildung 9: Beispiele für den Grundtyp TTTT. Aus System einer Flächenteilung und seine Anwendung zum Werkstoff-und Arbeitssparen, von Elli und Heinrich Heesch in Koproduktion mit Jakob Loef. Moosburg: Pichelmayer 1944, S. 12.

> BC. Verbinde C mit D durch eine ebenfalls willkürliche Linie. Verschiebe CD parallel nach BA. Die Bezeichnung des Typs heißt $TTTT$. (E. Heesch, 1944, 11f.)

Einen wesentlichen Teil seiner Berühmtheit verdanken die Heesch-Parkette dem niederländischen Künstler Maurits Cornelius Escher. Dieser befasste sich unabhängig und ohne Wissen um die Heesch-Arbeiten mit der Parkettierung einer Ebene. Escher gelang es durch künsterlisches „Hand-Anlegen“ eine Vielzahl möglicher Parkettierungen der Ebene in seinen Grafiken umzusetzen (Schattschneider, 2000). In seinen Notizbüchern finden sich 27 der 28 möglichen Heesch-Typen (nur $TCTGG$ fehlt).

Ein Beispiel aus den Escher-Notizbüchern: Die Grundform der auch als „Pegasus“ bezeichneten Symmetriezeichnung ist ein Quadrat. Die Kontur CB wird durch eine einfache Translation auf die Kontur DA abgebildet, bei den Konturen auf den Seiten ist es genauso. Damit gibt es nur die beiden Translationen als Symmetrien, es liegt also Typ $TTTT$ vor, mit der Gruppe $p1$ und dem Laves-Netz $4, 4, 4, 4$

(Abb. 10).

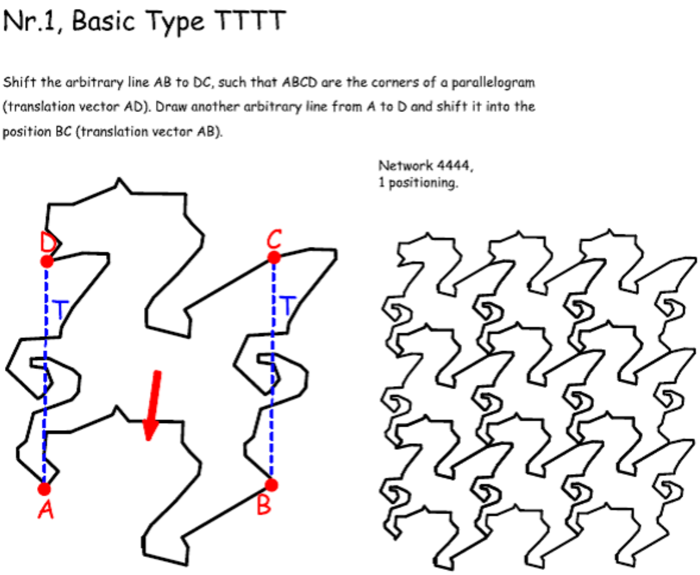


Abbildung 10: Eschers Pegasus-Figur nach Loe M.G. Feijs (Feijs, 2013), S. 241.

Die Escher-Parkette sind heute Gegenstand praktisch aller Lehrbücher und Einführungen in die Parkettierung (Feijs, 2013). Oftmals wird auch von Escher-Heesch-Parketten gesprochen.

4 Schlussbemerkung

Die mathematische Zusammenarbeit der Geschwister Elli und Heinrich Heesch zur Parkettierung und industriellen Anwendung macht als Beispiel deutlich, dass intellektuelle Leistungen und innovative Erkenntnisse auf sehr subtile Art und Weise im Schnittfeld von familiären Bindungen und personengebundenen Beziehungen sowie politischen und gesellschaftlichen Rahmenbedingungen zu situieren sind. Eine mathematikhistorische Forschung ermöglicht es, die Einbettung einer mathematischen Forschungspraxis in einen gesellschaftlichen und politischen Gesamtzusammenhang besonders prägnant nachzuzeichnen und ist insofern für eine kritische Auseinandersetzung mit der Mathematik als kulturelle Praxis bedeutsam.

Literatur

Behrends, E. 2019. *Parkettierungen der Ebene. Von Escher über Möbius zu Penrose.* Berlin. Springer Spektrum.

Bieberbach, L. 1910. „Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich.“ *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 75—84.

Bigalke, H.-G. 1988. *Heinrich Heesch: Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbenforschung.* Basel: Birkhäuser.

Binder, T. 2019. *Franz Brentano und sein philosophischer Nachlass.* Berlin: de Gruyter.

Bolzano, B. 1837. *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter.* Sulzbach: Seidel.

Dobrowolski, M. 2010. *Mathematische Exkursionen: Gödel, Escher und andere Spiele.* München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

Feijs, Loe M.G. and Jun Hu. 2013. „Turtles for tessellations.“ In: *Proceedings of Bridges: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, July 27-31, Enschede, The Netherlands, 241–248.

Füller, E. 2010. *Kriegsheimat. Die Kinderlandverschickung aus dem nördlichen Westfalen im Zweiten Weltkrieg.* Münster. Aschendorff Verlag.

Hamacher-Hermes. A. 2008. „Frauen in der Logik – Elli Heesch.“ In: Bernhard, P. and Peckhaus, V. (Hrsg.). *Methodisches Denken im Kontext. Festschrift für Christian Thiel.* Mit einem unveröffentlichten Brief Gottlob Freges. Paderborn: Mentis, 269–282.

Heesch, E. 1934. „Psychische Wellen. Ein Versuch, seelische Vorgänge mit Hilfe wellentheoretischer Analogien zu deuten.“ *Die Tatwelt. Zeitschrift für Erneuerung des Geisteslebens* 10, 65–83.

Heesch, E. 1935a. „Grundzüge der Bolzanoschen Wissenschaftslehre.“ *Philosophisches Jahrbuch* 48, 313–341.

Heesch, E. 1935b. „Vom intellektuellen Gewissen.“ *Akademische Bonifatius-Korrespondenz, Organ zur Pflege des religiösen Lebens in der katholischen Studentenschaft* 5 (Mai), 23–26.

Heesch, E. 1937. „Gruppen mit vertauschbaren konjugierten Elementen.“ *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 47, 10.

Heesch, H. 1929a. „Zur Strukturtheorie der ebenen Symmetriegruppen.“ *Zeitschrift für Kristallographie* 71, 95–102.

Heesch, H. 1929b. „Zur systematischen Strukturtheorie. II.“ *Zeitschrift für Kristallographie* 72, 177–201.

Heesch, H. 1930. „Zur systematischen Strukturtheorie. III. Über die vierdimensionalen Gruppen des dreidimensionalen Raumes.“ *Zeitschrift für Kristallographie* 73, 325–345.

Heesch, H. 1935. „Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen.“ *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, Neue Folge 1, 115–117.

Heesch, H. 1950. „Flächenteilung als Mittel der Rationalisierung von Dr. Heinrich Heesch, Kiel (mit Lesefilm).“ *Industrie-Anzeiger Essen* Nr. 35 v. 02.05.1950.

Heesch, H. 1956. „System der abfalllosen Formen von Dr. H. Heesch (mit Lesefilm).“ *Mitteilungen der Forschungsgesellschaft Blechverarbeitung e. V.* Nr. 19-20.

Heesch, H. 1957. „Form im Flächenschluss – System aller Formen der regelmäßigen abfalllosen Zerlegung.“ *Mitteilungen der Forschungsgesellschaft Blechverarbeitung e. V.* Nr. 23 v. 01.12.1957.

Heesch, H. 1968. *Reguläres Parkettierungsproblem.* Köln: Opladen.

Heesch, H. und Kienzle, O. 1963. *Flächenschluß. System der Formen lückenlos aneinanderschließender Flachteile.* Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer.

Heesch, E., Heesch, H., Loef J. 1944. *System einer Flächenteilung und seine Anwendung zum Werkstoff- und Arbeitssparen.* Moosburg: Pichelmayer.

Hilbert, D. 1900. „Mathematische Probleme.“ *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 253–297.

Laves, F. 1931. „Ebenenteilung in Wirkungsbereiche.“ *Zeitschrift für Kristallographie* 76, 277–283.

Liebau, F. 2006. „Heinrich Heesch Gedenktafel.“ *DGK-Mitteilungen* 31, 16–18.

Mertens, L. 2004. *„Nur politisch Würdige“. Die Forschungsförderung der DFG im Dritten Reich 1933–1937.* Berlin: Akademie Verlag.

Ostwald, W. 1922. *Die Harmonie der Formen*. Leipzig: Unesma.

Reinhardt, K. 1928. „Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in kongruente Polytope.“ *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse*, 150–155.

Schattschneider, D. 2000. *M.C. Escher: Visions of Symmetry. Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M.C. Escher.* New York: Harry N. Abrams, Inc.

Sommerfeld, A. 1943. *Vorlesungen über Theoretische Physik*, Band 1: Mechanik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler.

Steinitz, E. 1934. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 41, hrsg. v. H. Rademacher. Berlin: Springer.

Die Kernthese der logischen Empiristen – eminent einflussreich und dennoch unbegründet[1]

Matthias Wille

Einst war die Mathematik prominenter Kronzeuge der Philosophie. Als Immanuel Kant zur transzendentalen Wende ansetzte, sah er in den mathematischen Urteilen bereits die Möglichkeit synthetischer Wahrheiten a priori verwirklicht. Die philosophischen Vernunfterkenntnisse sollten diesem Beispiel folgen. 100 Jahre später geriet das synthetische Apriori in der Mathematik massiv ins Wanken. Nicht-euklidische Geometrien und das Aufkommen logizistischer Projekte beließen erste Fragezeichen an Kants These. Widerlegt schien sie schließlich um 1930 durch die fulminante Metaphysikkritik des Logischen Empirismus. Dessen Kritik an der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori ist kein schlichtes Hinterfragen einer begrifflichen Unterscheidung, sondern das Infrage stellen von etwas Grundsätzlichem. Gelingt diese Kritik, dann gerät nicht nur Mathematik zur bloßen Begriffsanalyse, sondern es fällt die Möglichkeit von Philosophie als Wissenschaft. Stellvertretend am Werk Moritz Schlicks wird argumentationstheoretisch untersucht, ob diese eminent einflussreiche Kritik zulässig ist.

1 Zur Vorgeschichte

Mitte des 18. Jahrhunderts stand die Philosophie kurz vor ihrem intellektuellen Bankrott. Sie war in antiken Vorzeiten aus der Verwunderung über irdische und himmlische Phänomene entstanden, um mit den Mitteln der menschlichen Vernunft zu erklären, warum das selbstverständliche Bedürfnis nach Wissen gestillt

[1] Vortrag gehalten am 23. Mai 2016 im Department für Mathematik und dem Philosophischen Seminar der Universität Siegen.

werden kann.[2] Philosophie sollte auf der theoretischen Ebene begründen, was auf der praktischen Ebene des Alltags unstrittig war. Gut zweieinhalbtausend Jahre später kam David Hume zu dem Ergebnis, dass das Begründungsprinzip für Tatsachenwahrheiten weder eine Vernunft- noch eine Tatsachenwahrheit ist. Humes Analyse, die ihn auf die Unbegründbarkeit des Kausalgesetzes führte, ist verbindlich: Vorausgesetzt, die investierte leibnizsche Unterscheidung zwischen Vernunft- und Tatsachenwahrheiten ist vollständig sowie disjunkt, dann führt uns Humes Ergebnis zu der Einsicht, dass sich die im Alltag vertraute Möglichkeit von Wissen nicht theoretisch fundieren lässt, d.h. die Verfügbarkeit von Wissen ist ein bloßer Glaube der Lebenswelt.

Die Möglichkeit von Wissen, die uns als sinnstiftende Bedingung ehemals zum Philosophieren führte, wäre durch Hume fast als unerfüllbar ausgewiesen worden. Es war Immanuel Kant, der uns vor diesem intellektuellen Bankrott bewahrte. Er erkannte als Erster, dass aus der Unbegründbarkeit des (bei ihm) Kausalprinzips als logischer oder empirischer Wahrheit nicht folgt, dass es überhaupt unbegründbar ist. Da es für ihn unstrittig war, dass wir Erfahrungen machen und das Kausalprinzip mithin einer Begründung fähig sein muss, richtete er sein Augenmerk auf die Voraussetzungen der Humeschen Analyse. Es ist die leibnizsche Unterscheidung, die nicht fein genug differenziert, weil sie einzig die möglichen Geltungsgründe, aber nicht die möglichen Aussagengehalte berücksichtigt. Indem Kant nunmehr auch zwischen Erläuterungs- und Erweiterungsurteilen (analytischen und synthetischen Urteilen) unterschied, vermochte er einen neuen Geltungstyp einzuführen: die synthetischen Urteile a priori, unter denen sich im Besonderen auch jene Aussagen wiederfinden, die – wie das Kausalprinzip bzw. das Kausalgesetz – erfahrungsermöglichende Bedingungen zum Ausdruck bringen. Eine der Kernaufgaben der Philosophie, die Möglichkeit von Wissen zu erklären, konnte gewahrt werden, weil uns Kant einen Vorschlag unterbreitete, wie wir philosophische Urteile über die Möglichkeit von Wissen klassifizieren sollen.[3]

Gut 150 Jahre nachdem dies geschah, wurde diese Klassifikationsoption ohne Darbietung einer Alternative durch die identitätsstiftende Aussage des modernen Empirismus des Wiener Kreises[4] vehement in Abrede gestellt. Bestritten wurde nicht einfach die Zweckmäßigkeit einer begrifflichen Unterscheidung, die man vollziehen oder unterlassen kann. Bestritten wurde, dass es sich bei synthetischen Urteilen a priori überhaupt um eine sinnvolle Urteilskategorie handelt. Die zugrundeliegende Metaphysikkritik war klar gegen Projekte mit einem anspruchsvollen Philosophiebegriff gerichtet, doch sie traf die gesamte Philosophiegeschichte, die Heroen der

[2] Siehe u.a. Wille, *Das Paradoxe*, passim.
[3] Hierzu umfassend Wille, *Transzendentaler Antirealismus*, S. 352–461.
[4] Exemplarisch Carnap et al., *Wissenschaftliche Weltauffassung*, S. 210.

eigenen empiristischen Tradition eingeschlossen: Wenn synthetische Urteile a priori unmöglich sind und Aussagen wie das Kausalgesetz unter keinen neuen Geltungstyp fallen, dann erklärt die Philosophie eine ihrer sinnstiftenden Bedingungen für unerfüllbar und hebt sich damit in einem präsuppositional inkonsistenten Akt selbst auf.

Diese philosophische Fundamentalkritik will keine Philosophie sein und gehört ihr dennoch an, weil auch die Gegner „philosophieren bei ihrem Versuch, den Wert dieser Wissenschaft in Abrede zu stellen".[5] Sie richtete sich gegen große Teile ihrer eigenen Vergangenheit und wirkte aufgrund der ihr eigenen Unmissverständlichkeit nachhaltig auf die Zukunft der Philosophie. Der Einfluss dieses Erbes ist heute noch allgegenwärtig. Nicht nur wurde die Kritik am synthetischen Apriori weiter ausgebaut zu einer (fragwürdigen, dafür aber selten hinterfragten) Grundsatzkritik an der analytisch-synthetisch-Unterscheidung, die auch respektable Philosophen der Gegenwart davor zurückschrecken lässt, die Unterscheidung überhaupt im Munde zu führen. Einflussreich ist dieses Erbe vor allem deshalb, weil nicht zuletzt logikversierte Kantianer auffällig selten die Wortkombination „synthetisch" und „a priori" gebrauchen. Selbst Peter Strawson, der ab den späten 1950er Jahren und entgegen aller Trends ein kantaffines Transzendentalprojekt, einschließlich einer modernen Interpretation der *Kritik der reinen Vernunft*, für die sprachkritische Philosophie auflegte, zeigte sich an dieser Stelle schwer beeindruckt. Obgleich in vielen Punkten ein souveräner Kritiker logisch-empiristischer Doktrinen, so stand auch er unter dem prägenden Einfluss der Unmöglichkeitsbehauptung, denn weder gebrauchte er zur Klassifikation der Resultate seiner deskriptiven Metaphysik das synthetische Apriori[6] noch konnte er in seiner sprachkritischen Rekonstruktion Kants dessen Rede von „synthetischen Urteilen a priori" besonders viel abgewinnen.[7]

Die Tragweite und der Einfluss der logisch-empiristischen Kernthese sind offensichtlich. Doch ebenso auffällig ist, dass diese Behauptung trotz ihrer antikantischen Ausrichtung selten in der Auseinandersetzung mit Kant motiviert wurde. Genauer muss sogar festgestellt werden, dass es im klassisch gewordenen Schrifttum der logischen Empiristen kaum Texte gibt, in denen die fragliche These überhaupt eingehender begründet werden würde, obgleich der Leser des Öfteren auf die selbstsichere Beurteilung stößt, dass der Empirismus seinen Standpunkt „gegenüber der Kantischen Philosophie mit Leichtigkeit zu verteidigen vermochte".[8] Das lohnt eine nähere Betrachtung. Es sind die Schriften von Moritz Schlick, in

[5] Aristoteles, *Protreptikos*, Satz 34.
[6] Strawson, *Individuals*, passim.
[7] Strawson, *Bounds*, passim, entlarvend S. 44.
[8] Schlick, *Materiales Apriori*, S. 25.

denen der Suchende vergleichsweise gut fündig wird. Auf der Grundlage der von ihm im Zeitraum zwischen 1926 und 1936 publizierten Aufsätze[9] werden nachfolgend jene Argumente benannt sowie in Standardform rekonstruiert, welche für die schrittweise Stützung der Unmöglichkeitsthese in einem logisch-empiristischen Geiste erforderlich sind. Nachfolgend werden wir argumentationstheoretisch analysieren, ob die damit beanspruchte Grundsatzkritik an Kant legitim ist.

2 Rekonstruktion der Argumentation Schlicks

Weder im publizierten Werk von Moritz Schlick noch in irgendeinem anderen veröffentlichten Text logisch-empiristischer Provenienz findet sich eine umfassende argumentative Aufbereitung zur Stützung der fraglichen These. Auf die Unmöglichkeitsbehauptung trifft man in fast allen klassisch gewordenen Texten, auf ihre Begründung so gut wie überhaupt nicht. Nach Auffassung des Autors zählen die in diesem Abschnitt zitierten Abschnitte zu den besten argumentativen Passagen, die zusammengenommen ein repräsentatives logisch-empiristisches Argument für die Stützung der These darstellen.

Mit der Aufhebung des synthetischen Aprioris kehren die logischen Empiristen in moderner Diktion zur leibnizschen Unterscheidung zwischen Vernunft- und Tatsachenwahrheiten zurück, d.h. die Geltungsfrage einer jeden wahrheitswertfähigen Aussage lässt sich entweder rein begrifflich oder empirisch entscheiden. Diese gilt auch für die Behauptung „es gibt keine synthetischen Urteile a priori", die selbst entweder analytisch a priori oder synthetisch a posteriori gelten muss, weil sie andernfalls eine sinnlose Zeichenkette wäre. Als empirische Wahrheit kann die Aussage nicht angemessen interpretiert werden, da sie als Geltungsaussage über möglichen Propositionen keinen Tatbestand über die Erfahrungswirklichkeit zum Ausdruck bringt. Die Unmöglichkeitsaussage muss selbst eine begriffliche Wahrheit sein, die ihre Geltung aus der Bedeutungsanalyse der zentralen Ausdrücke zieht. Schlick argumentiert entsprechend:

> Ein analytischer Satz ist ein solcher, der vermöge seiner bloßen Form wahr ist; wer den Sinn einer Tautologie verstanden hat, hat damit zugleich ihre Wahrheit eingesehen; deshalb ist sie a priori. Bei einem synthetischen Satz aber muß man zuerst den Sinn verstehen, und hinterdrein feststellen, ob er wahr oder falsch ist; deswegen ist er a posteriori.[10]

[9] Wobei sich von den Texten aus dieser Dekade vor allem zwei Aufsätze aus den Jahren 1930/31 als geeignet erweisen werden.

[10] Schlick, *Materiales Apriori*, S. 22.

> Der Empirismus, den ich vertrete, glaubt sich klar darüber zu sein, daß alle Aussagen, prinzipiell gesprochen, entweder synthetisch a posteriori oder tautologisch sind; synthetische Sätze a priori scheinen ihm eine logische Unmöglichkeit zu sein.[11]

In Standardform gebracht, umfasst diese Argumentation im Besonderen die folgenden Einsichten:

T.1 Eine beliebige wahrheitswertfähige Aussage hat entweder einen analytischen oder einen synthetischen Aussagengehalt.

T.2 Analytisch wahre Aussagen gelten unabhängig von Erfahrung (a priori), denn:

  T.2.1 Indem wir eine Aussage als „analytisch“ erkennen und als „analytisch wahr“ beurteilen, erfassen wir aufgrund des analytischen Charakters der Aussage zugleich den durch sie dargestellten Sachverhalt, und wir wissen aufgrund der Wahrheit der Aussage, dass dieser dargestellte Sachverhalt auch besteht.

  T.2.2 Wenn die Feststellung des Sinns einer Aussage mit der Feststellung von deren Wahrheit zusammenfällt, dann ist eine Widerlegung durch Erfahrung nicht möglich, d.h. sie gilt a priori.

T.3 Synthetisch wahre Aussagen gelten aufgrund von Erfahrung (a posteriori), denn:

  T.3.1 Bei einer synthetisch wahren Aussage fällt die Feststellung des Sinns nicht mit der Feststellung ihrer Wahrheit zusammen.

  T.3.2 Bei einer synthetischen Aussage erfasst man zuerst den durch die Aussage dargestellten Sachverhalt und prüft nachfolgend, ob sie wahr ist.

  T.3.3 Neben empirischen Mitteln gibt es keine weiteren zulässigen Mittel zur Prüfung synthetischer Aussagen.

T.4 Somit haben alle wahrheitswertfähigen Aussagen entweder einen analytisch-apriorischen oder einen synthetisch-aposteriorischen Charakter.

T Es gibt also keine wahrheitswertfähige Aussage mit einem synthetisch-apriorischen Charakter.

[11] Schlick, *Materiales Apriori*, S. 25.

Die stützenden Aussagen T.1 sowie T.2 sind nicht kontrovers, denn sie werden auch von Kant geteilt. T.1 ist lediglich eine alternative Fassung des Anspruchs, dass die Unterscheidung zwischen Erläuterungs- und Erweiterungsurteilen, zwischen inhaltsleeren und gehaltvollen Aussagen, die Sphäre der Behauptungssätze vollständig und disjunkt zu unterscheiden gestattet: Die Geltung einer wahrheitswertfähigen Aussage kann entweder allein aufgrund der Semantik der verwendeten Ausdrücke geprüft werden oder es bedarf weiterer Mittel. Währenddessen ist T.2 eine Folge der Einsicht, dass im Falle analytischer Urteile deren Geltungsfrage einzig unter Verwendung logisch-semantischer Mittel – und damit unabhängig von Erfahrung – überprüft werden darf. Analytische Wahrheiten gelten erfahrungsunabhängig, „weil ich aus meinem Begriff gar nicht hinausgehen darf, um das Urteil abzufassen, und also kein Zeugnis der Erfahrung dazu nötig habe".[12] Um T.4 und damit auch T argumentativ stützen zu können, bedarf es neben T.1 und T.2 hier noch der Aussage T.3 sowie der dafür erforderlichen Subargumentation. Es ist die stützende Aussage T.3.3, an der sich die Auffassungen von Kant und den logischen Empiristen scheiden. Betrachten wir zuerst die kanonische Argumentation der letzteren, in deren Rahmen T.3.3 gestützt wird:

> Wo immer ein sinnvolles Problem vorliegt, kann man theoretisch stets auch den Weg angeben, der zu seiner Auflösung führt, denn es zeigt sich, daß die Angabe dieses Weges im Grund mit der Aufzeigung des Sinnes zusammenfällt; die praktische Beschreitung des Weges kann natürlich dabei durch tatsächliche Umstände, z. B. mangelhafte menschliche Fähigkeiten, verhindert sein. Der Akt der Verifikation, bei dem der Weg der Lösung schließlich endet, ist immer von derselben Art: es ist das Auftreten eines bestimmten Sachverhaltes, das durch Beobachtung, durch unmittelbares Erlebnis konstatiert wird. Auf diese Weise wird in der Tat im Alltag wie in jeder Wissenschaft die Wahrheit (oder Falschheit) jeder Aussage festgestellt. Es gibt also keine andere Prüfung und Bestätigung von Wahrheiten als die durch Beobachtung und Erfahrungswissenschaft.[13]

Die Argumentationsstrategie sieht vor, dass ausgehend von der Formulierung des Verifikationsprinzips/empiristischen Sinnkriteriums nochmals explizit normiert wird, was unter „Verifizierbarkeit" zu verstehen ist, womit die beiden erforderlichen stützenden Aussagen für T.3.3 benannt sind. In Standardform:

T.3.3.1 Der Sinn eines (synthetischen) Satzes besteht in der Methode seiner Verifikation.

[12] Kant, *KrV*, B 11.
[13] Schlick, *Wende*, S. 7.

T.3.3.2 „Verifizierbarkeit“ *bedeutet* prinzipielle empirische Verifizierbarkeit.

T.3.3 „Es gibt also keine andere Prüfung und Bestätigung von (synthetischen) Wahrheiten als die durch Beobachtung und Erfahrungswissenschaft.“

Sollte es sich im Zusammenspiel dieser beiden Argumente um eine zulässige Kritik an der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori handeln, dann würden die Argumentationspräsuppositionen der Humeschen Analyse und damit auch dessen These von der Unbegründbarkeit eines jeden Erfahrungsanspruchs wieder vollständig in Geltung gesetzt werden. Um dies zur prüfen, wenden wir uns einer Argumentanalyse zu.

3 Analyse der Argumentation Schlicks

Damit diese Argumentation als Kritik an der Philosophie Kants zulässig ist, müssen im Besonderen zwei Bedingungen gewährleistet werden. Zum einen muss es sich bei der Binnenstruktur der Aussagensequenz um eine zulässige Argumentform handeln. Zum anderen darf die Kritik keine substantiellen Anleihen bei Thesen machen, die vom zu Kritisierenden überhaupt nicht geteilt oder von diesem sogar explizit zurückgewiesen werden.

3.1 Die Argumentation ist zirkulär

Vergegenwärtigen wir uns nochmals das Argumentationsziel: Es soll gezeigt werden, dass es keine Erweiterungsurteile gibt, deren Geltungsfrage unabhängig von Erfahrung zu klären wäre (These T). Dazu wird im Besonderen die stützende Aussage I.3.3 benutzt. In dem hierfür erforderlichen Subargument wird jedoch definitorisch festgelegt, dass das Prüfen von Geltungsfragen im Fall von synthetischen Aussagen nichts anderes ist als prinzipielle empirische Verifizierbarkeit: Jeder sinnvolle Satz muss prinzipiell prüfbar sein und die einzig zulässige Form von Prüfbarkeit ist die empirische Verifizierbarkeit. Falls also die Geltungsfrage eines wahrheitswertfähigen Satzes nicht allein aufgrund der Semantik der verwendeten Ausdrücke geprüft werden kann, dann tragen die zudem erforderlichen Mittel einen empirischen Charakter. Die Essenz dieser Argumentation besteht also in folgendem Begründungsschritt:

Neben empirischen Mitteln gibt es keine weiteren zulässigen Mittel zur Prüfung synthetischer Urteile, weil zulässige Mittel zur Prüfung synthetischer Urteile empirische sein müssen.

Die dem Argument zugrundeliegende Schlussform lautet letztlich: Σ, T $\vDash$ T. Bei der Schlussform handelt es sich zwar um einen logisch gültigen Schluss, weil bei der Selbstimplikation sichergestellt ist, dass in allen Interpretationen, in denen Σ und T zusammen wahr sind, auch T wahr ist. Allerdings eignet sich dieser Schluss nicht als Stützungsrelation für die Formulierung eines guten Arguments. Die logisch-empiristische Argumentation gegen die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori ist zirkulär, weil die Inanspruchnahme der Aussagenmenge {T.3.3.1, T.3.3.2} bereits voraussetzt, dass es im Fall synthetischer Urteile keine nicht-empirischen Prüfmethoden geben kann. Mit dieser Argumentation wird die zu klärende Geltungsfrage der Unmöglichkeitsthese allerdings nur *reproduziert*. Mittels dieses Arguments wird durch den Gebrauch der Aussagenteilmenge {T.3.3.1, T.3.3.2} kein Schritt in Richtung der positiven Klärung der Geltungsfrage der zu stützenden Aussage vollzogen. Damit verfehlt diese Argumentation einen Minimalzweck des Argumentierens. Wenn indes die Geltung des zu Zeigenden noch nicht vorausgesetzt wird, so würde das fragliche Subargument folgende Gestalt annehmen:

T'.3.3.1 Der Sinn eines (synthetischen) Satzes besteht in der Methode seiner Prüfbarkeit.

T'.3.3.2 „Prüfbarkeit" *bedeutet* im Besonderen prinzipielle empirische Verifizierbarkeit.

T'.3.3 Es gibt also synthetische Wahrheiten, die durch Beobachtung und Erfahrungswissenschaft geprüft bzw. bestätigt werden.

Offensichtlich eignet sich diese Aussagensequenz nicht mehr als Subargument zur Stützung von T, weil T'.3.3 nicht mehr die erforderliche Alternativlosigkeit zum Ausdruck bringt. Der Gebrauch des empiristischen Verifikationsprinzips stiftet jedoch nicht nur den zirkulären Charakter in der Argumentation, sondern er führt auch dazu, dass – unabhängig der Zirkularität – die Kritik an Kant ins Leere läuft.

3.2 Die Argumentation verfährt gegenüber Kant unangemessen

Mittels des empiristischen Verifikationsprinzips soll gegen die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori argumentiert werden. Doch damit argumentieren Schlick und die anderen Vertreter des Wiener Kreises gegen die Geltung jenes bedeutungstheoretischen Sinnkriteriums, welches der gesamten kritischen Transzendentalphilosophie zugrundeliegt und zu dessen Einhaltung der Leser an ungezählt vielen Stellen der *Kritik der reinen Vernunft* aufgefordert wird:[14]

> wie wollten wir auch unseren Begriffen Sinn und Bedeutung verschaffen, wenn ihnen nicht irgendeine Anschauung (welche zuletzt immer ein Beispiel aus irgend einer möglichen Erfahrung sein muss,) untergelegt würde.[15]

Das kantische Sinnkriterium besagt, dass ausnahmslos alle Begriffe nur in Bezug auf ihre empirische Verwendung eine klar bestimmte Bedeutung besitzen. Nur jene Urteile, deren Geltungsfrage sich innerhalb der Grenzen möglicher Erfahrung bewegt (Immanenz), sind sinnvoll, während jeglicher transzendenter – und damit unkontrollierbarer – Gebrauch von Ausdrücken sowie Aussagen sinnlos ist.

Kants Sinnkriterium scheidet die immanenten Erkenntnisansprüche von den transzendenten, es unterscheidet legitime Erkenntnis von leeren Vernünfteleien und dem dialektischen Schein.[16] Transzendente Erkenntnisansprüche, wie etwa Urteile über Gott oder wie die Welt an sich selbst ist, bestehen nur vermeintlich und sind illegitim, während die immanenten Erkenntnisansprüche zu differenzieren sind. Zweifelsohne gehören empirische Erkenntnisse zur Klasse immanenter Erkenntnisansprüche, denn für alle aposteriorischen Urteile kann mit Bezug auf die Erfahrungswirklichkeit danach gefragt werden, was diese Aussagen gegebenenfalls wahr macht, und prinzipiell entschieden werden, ob sie wahr sind. Doch wenn wir dazu befähigt sind, den Sinn empirischer Urteile zu bestimmen und gegebenenfalls einschlägige Wahrmacher erfolgreich zur Anwendung zu bringen, so darf man auch danach fragen, warum wir dies überhaupt können? Aus der Feststellung, dass wir erfahrungsbezogen urteilen können, erwächst der Klärungsbedarf, warum wir erfahrungsbezogen urteilen können. Nach Kant zählen jene Urteile, die uns begründet Auskunft über die Möglichkeit empirischer Erkenntnis geben, ebenfalls zu den immanenten Erkenntnisansprüchen, denn sie generieren keinen neuen (und damit erst recht keinen transzendenten) Gegenstandsbereich, sondern urteilen nachwievor über das Erfahrungswirkliche, wenngleich unter einer neuen Perspektive. Diese Perspektive ist die transzendentalphilosophische und die damit einhergehenden immanenten Erkenntnisansprüche sind die transzendentalen: „Ich nenne alle Erkenntniß transscendental, die sich nicht sowohl mit Gegenständen, sondern mit unserer Erkenntnißart von Gegenständen, sofern diese a priori

[14] Kant, *KrV*, exemplarisch: B XXVf., B 87f., B178, B 297f., B 303, B 521, B 724.
[15] Kant, *Denken*, S. 123.
[16] In Wille, *Transzendentaler Antirealismus*, S. 106–180, findet sich, eingebettet in eine moderne Bedeutungstheorie, eine sprachkritisch gewendete Fassung von Kants Sinnkriterium. Die historiographische Aufbereitung desselben findet sich ebd., S. 390–412.

möglich sein soll, überhaupt beschäftigt".[17] Während sich die empirische Kritik also im Fragemodus „Warum ist die Aussage $\mathfrak{A}$ wahr?" manifestiert, zeigt sich die transzendentale Kritik in Fragen des Typs „Warum sind Fragen wie ‚Warum ist die Aussage $\mathfrak{A}$ wahr?' überhaupt verständlich und prinzipiell beantwortbar?". Wenn Kant zu synthetisch apriorischen Einsichten der Form gelangt, dass X eine Bedingung der Möglichkeit des Machens von Erfahrung ist, dann entscheidet sich die Geltung derartiger Urteile am Prüfergebnis des Kriterienkatalogs: i) X ist im Falle unserer Erfahrungswirklichkeit realisiert und ii) die Möglichkeit des Machens von Erfahrung wäre nicht gegeben, wenn die Bedingung X notwendig unerfüllt bliebe. Wir analysieren in transzendentalen Untersuchungen also Strukturauszüge des Erfahrungswirklichen und prüfen, was gegebenenfalls der Fall wäre, wenn diese Bedingungen unerfüllt blieben. Das ist fraglos ein anspruchsvolles, aber im Idealfall sogar ein entscheidungsdefinites Prüfverfahren. Es ist kein Mysterium, den Gehalt von als wahr beanspruchten Ermöglichungsbedingungen zu verstehen, weil wir uns im Rahmen (streng reglementierter) kontrafaktischer Argumentationen klar machen können, was der Fall wäre, wenn sie denn wahr wären. Transzendentale Aussagen so verstanden sind sinnvoll, weil wir über eine Prüfmethode verfügen, die bereits deshalb eine nicht-empirische sein muss, weil wir durch sie allererst die Möglichkeit des Empirischen erklären wollen. Immanente Erkenntnisansprüche umfassen innerhalb der Transzendentalphilosophie also nicht nur die empirischen, sondern auch jene, die uns zu einem verbesserten Verständnis der Verfasstheit des Empirischen führen.

> Der Unterschied des Transscendentalen und Empirischen gehört also nur zur Kritik der Erkenntnisse, und betrifft nicht die Beziehung derselben auf ihren Gegenstand.[18]

Diese kursorischen Hinweise zu einigen Fundamentalunterscheidungen in Kants kritischer Erkenntnistheorie sind geboten, wenn man den Ort bestimmen möchte, an dem die Aussage des empiristischen Verifikationskriteriums mit der Architektonik der *Kritik der reinen Vernunft* in Konflikt gerät. Die logisch-empiristische Kritik an der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori ist weder das Resultat einer immanenten Kant-Kritik noch Folge einer voraussetzungsärmeren Argumentation, sondern die ungerechtfertigte Unterstellung der Inanspruchnahme einer Behauptung, die Kants Transzendentalphilosophie aus guten Gründen nicht Anspruch nehmen kann. Während die Kritik am synthetischen Apriori das Prinzip benutzen muss, dass jeder immanente Erkenntnisanspruch notwendigerweise ein empirischer sein muss, zeichnet sich eine Transzendentalphilosophie im Geiste Kants

[17] Kant, *KrV*, B 25.
[18] Kant, *KrV*, B 81.

gerade dadurch aus, dass sie die Formulierung der transzendentalen Fragestellung sprachlich ermöglicht und zulässt: Was sind die Bedingungen der Möglichkeit von empirischen Erkenntnisansprüchen? Der logische Empirismus leugnet die Möglichkeit eines nicht-empirischen immanenten Erkenntnisanspruchs und begründet dies zirkulär, während Kant diese Möglichkeit einräumt und sie sogleich mannigfach instanziiert.

Für Schlicks Kritik an Kant gilt daher: Sie benutzt wesentlich einen Grundsatz, der nicht mit irgendwelchen randständigen Ornamenten der *Kritik der reinen Vernunft* in Widerstreit gerät, sondern der nicht konsistent zusammen mit dem sinnkritischen Fundament der kantischen Transzendentalphilosophie vertreten werden kann. Mehr noch. Kants kritische Erkenntnistheorie ist ein einziges großes Argument dafür, weshalb er sich nicht mit einem empiristischen Verifikationsprinzip, also der Einschränkung legitimer Erkenntnisansprüche auf empirische, begnügen kann: weil wir dann in der Klärung der Grundprobleme der Erkenntnistheorie keinen einzigen Schritt über Hume hinausgekommen wären. Schlicks Argumentationsstrategie eignet sich daher überhaupt nicht für eine Kritik an Kant, weil sie als Kritikversuch am Argumentationsgegner auf einer Argumentationsgrundlage ruht, die vom Argumentationsgegner gar nicht geteilt wird. Damit besitzt sie für die Gegenposition überhaupt keinen Verpflichtungscharakter. Im Gegenteil. Problemgeschichtlich vollziehen die logischen Empiristen eine Rolle rückwärts und kritisieren Kant unter Verwendung vorkantischer Standards, die lediglich in einem modernen Kleid auftreten.

Was Schlick sowie die anderen Vertreter des Wiener Kreises durch die obige Argumentationsstrategie letztlich geliefert haben, ist nichts anderes als eine Begründung für das Konditional: Wenn einzig empirische Urteile immanente Erkenntnisansprüche repräsentieren, dann gibt es keine synthetischen Urteile a priori, d.h. im Klartext:

Wenn die einzig legitimen Erkenntnisansprüche empirische sind, dann sind alle nicht-empirischen Erkenntnisansprüche illegitim.

Das ist nun tatsächlich eine begriffliche, sogar eine logische Wahrheit, weil sie bereits aufgrund ihrer logischen Form wahr ist. Um diese Aussage zu begründen, braucht man aber weder das empiristische Verifikationsprinzip im Besonderen noch den logischen Empirismus im Allgemeinen zu vertreten. Dieses Urteil richtet sich in seinem Gehalt gegen überhaupt keine Position, nicht einmal gegen jene Kants, weil es uns nicht auf die Anerkennung des Antezedens zu verpflichten vermag. Auf die Unmöglichkeit synthetischer Urteile a priori verpflichtet zu werden, würde voraussetzen, dass gezeigt wäre, dass man auch als Transzendentalphilosoph einzig empirische Erkenntnisansprüche erheben kann. Ob dies argumentationsstrategisch überhaupt möglich ist, darf bezweifelt werden, denn Transzendentalphilosophie in einem kantischen Geiste zu betreiben, bedeutet per definitionem, die transzendentale Fragestellung formulieren zu können, und mit der Artikulation von Ermöglichungsbedingungen wird demonstriert, dass es auch nicht-empirische immanente Erkenntnisansprüche gibt.

***

Mit dieser Analyse der logisch-empiristischen Kritik an der Möglichkeit synthetischer Urteile a priori ist noch keine Rehabilitierung des synthetischen Aprioris geleistet. Die Argumentation Schlicks als zirkulär und petitiös zu erweisen, zeigt lediglich, dass die meisten der zeitgenössischen Vorbehalte gegen synthetische Urteile a priori ungerechtfertigt sind, weil sie rezeptions- und wirkungsgeschichtlich exakt dieser Kritik entstammen. Darüber hinaus für eine sprachkritisch gewendete Fassung des synthetischen Aprioris zu argumentieren, ist eine intellektuell reizvolle Aufgabe, die – um einen kantischen Anspruch aufzugreifen – erfüllbar sein muss.[19] Es gibt noch Hoffnung für das synthetische Apriori, auch in der Mathematik.[20]

Literatur

Aristoteles, *Protreptikos. Hinführung zur Philosophie* (rekonstruiert, übers. und komm. v. Gerhart Schneeweiss), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 2005.

Rudolf Carnap/Hans Hahn/Otto Neurath, „Wissenschaftliche Weltauffassung – Der Wiener Kreis“ (1929), zitiert nach: Hubert Schleichert (Hrsg.), *Logischer Empirismus. Der Wiener Kreis*, Wilhelm Fink Verlag, München 1975, S. 201-222.

Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (B = 1787^2), [*Kant's gesammelte Schriften. Band III*], Georg Reimer, Berlin 1911.

Immanuel Kant, „Was heißt: Sich im Denken orientiren?“, wiederabgedruckt in *Kant's gesammelte Schriften. Band VIII*, Walter de Gruyter & Co., Berlin/Leipzig 1923, S. 131-147.

Moritz Schlick, „Gibt es ein materiales Apriori?“, zitiert nach: ders., *Gesammelte Aufsätze 1926-1936*, Georg Olms Verlag, Hildesheim 1969, S. 19-30.

[19]Siehe Wille, *Transzendentaler Antirealismus*, passim.
[20]Siehe Wille, *Mathematik*, passim.

Moritz Schlick, „Die Wende der Philosophie“, zitiert nach: *MSGA* I/6, S. 213-222.

P. F. Strawson, *Individuals. An Essay in Descriptive Metaphysics*, Methuen, London 1959.

P. F. Strawson, *The Bounds of Sense. An Essay on Kant's Critique of Pure Reason*, Methuen, London 1966.

Matthias Wille, *Die Mathematik und das synthetische Apriori. Erkenntnistheoretische Untersuchungen über den Geltungsstatus mathematischer Axiome*, mentis, Paderborn 2007.

Matthias Wille, *Transzendentaler Antirealismus. Grundlagen einer Erkenntnistheorie ohne Wissenstranszendenz*, Walter de Gruyter, Berlin/Boston 2011.

Matthias Wille, „Das Paradoxe in der Wissenschaft – unvermeidbar, unverzichtbar, unbezahlbar“, in: Karsten Engel (Hrsg.): *Von Schildkröten und Lügnern – Paradoxien und Antinomien in der Wissenschaft*, mentis, Münster 2017, 35–48.

Der Wandel von Statistik zu Maschinellem Lernen - Ein Kuhnscher Paradigmen-Konflikt?

Michael Herrmann

1 Einleitung

Es ist schwer, eine klare Grenze zwischen den Anwendungen von traditioneller Statistik und maschinellem Lernen (ML) zu ziehen. Die Statistiker Bradley Efron und Trevor Hastie sind unter den ersten, die sich mit dieser Fragestellung in ihrem Buch "Computer-Age Statistical Inference" (2016) beschäftigen und eine vorsichtige Schlussfolgerung ziehen, dass Methoden aus dem Feld der sogenannten Datenwissenschaften (wie zum Beispiel (tiefe) neuronale Netze) sich nicht ohne weiteres in die Theorie der Statistik des 20. Jahrhunderts einordnen lassen. Sie führen weiter an, „pessimistically or optimistically, one can consider this as a bipolar disorder of the field or as a healthy duality that is bound to improve both branches“ (Efron und Hastie, 2016, 447).

Beide, Statistik wie maschinelles Lernen, befassen sich mit der Schätzung von unbekannten Größen aus unvollständigen Daten oder Informationen. Ein erster Definitionsvorschlag für statistische Inferenz sagt, „the goal of statistical inference is to say what we have learned about the population X from the observed data x“ (Efron und Tibshirani, 1994, 18). Ganz ähnlich in einem Ausschussbericht des National Research Council der USA zur Herausforderung von Big Data heißt es, „Inference is the problem of turning data into knowledge, where knowledge often is expressed in terms of variables [...] that are not present in the data per se, but are present in models that one uses to interpret the data.“ (Committee on the Analysis of Massive Data, 2013, 13). Mit diesen Ansätzen kann sowohl die

Anwendung des statistischen Instrumentariums (Parameterschätzer, Hypothesentests, Konfidenzintervalle), wie auch die Methode gegenwärtiger ML-Algorithmen erfasst werden. Dessen ungeachtet gibt es eine Auseinandersetzung über und eine Spannung in Bezug auf die Unterschiede zwischen Statistik und maschinellem Lernen. In Nature Methods erschien beispielsweise vor wenigen Jahren ein Aufsatz mit dem Titel „Statistics versus machine learning“ (Bzdok et al., 2018). An anderer Stelle wird 2023 vor einer „false dichotomy between statistics and machine learning“ (Finlayson et al., 2023) gewarnt.

Die Konfliktlinien dieser Spannungsbeziehung gehen darauf zurück, was der Statistiker Leo Breiman bereits 2001 als die „two cultures in the use of statistical modeling“ (Breiman, 2001) beschrieben hat. Dabei assoziiert er die sogenannte Kultur der Datenmodellierung (The Data Modeling Culture) mit traditioneller Statistik, die sogenannte Kultur der algorithmischen Modellierung (The Algorithmic Modeling Culture) mit dem maschinellen Lernen.[1] Nach Breiman steht bei klassischen statistischen Modellen der Versuch im Vordergrund, unter einer mathematisch präzisen Verteilungsannahme und den dazu gehörenden Parametern mögliche Zusammenhänge zwischen den gegebenen Daten zu beschreiben oder Prognosen für neue Beobachtungen zu geben. Breiman stellt sich (vereinfachend) die Natur als einen datengenerierenden Prozess vor. Für Breiman kann dabei vereinfacht die Natur als ein Mechanismus betrachtet werden, der aus unabhängigen Variablen und gegebenen Parametern die Zielgröße generiert. Ein einfaches Beispiel ist der Mietspiegel: Die Zielgröße bzw. abhängige Variable ist der Mietpreis, unabhängige Variablen können Größe und Alter einer Wohnung, Art der Heizung etc. sein. Die Kenntnisse über diesen Mechanismus der Natur können, laut Breiman, von vollständig unbekannt bis hin zu etablierten einzelwissenschaftlicher Theorien reichen. In der Kultur der Datenmodellierung werde nun die Prämisse getroffen, dass dieser Mechanismus bzw. der datengenerierende Prozess am besten durch die explizite Wahl einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung (der zugrundeliegenden Daten) repräsentiert werden könne. Mit der Bildung eines statistischen Modells soll diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. die Verteilung charakterisierenden Parameter) gefunden werden, die eine hinreichend gute Approximation an die durch den oben beschriebenen Mechanismus generierten Daten darstellt. Die meisten statistischen Modelle sind daher so formuliert, dass die Zielgröße eine Funktion der folgenden Inputs ist: unabhängige Variablen, der die Verteilung charakterisierenden Parameter (z.B. Erwartungswert und Varianz) und eines zufälligen Fehlerterms (Modellierung des statistischen Rauschens). Mit der Wahl eines stochastischen Modells gehen (typische) Annahmen und Restrik-

[1] Breiman selbst verbindet seinen Vergleich mit der These, dass in der Statistik die algorithmische Modellierung mehr Verwendung finden sollte.

tionen einher.[2] Die statistische Datenmodellierung verfolgt dann das erste Ziel, die unbekannten Parameter möglichst gut zu schätzen. Weitergehende Ziele oder Fragestellungen innerhalb der traditionellen Statistik können dann den Grundproblemen Hypothesentests und Konfidenzmengen zugeordnet werden.

Im Gegensatz dazu steht für Breiman die Kultur der algorithmischen Modellierung. Hier werde also nicht das Ziel verfolgt, den datengenerierenden Prozess zu finden. Er bleibe bewusst unspezifiziert, um eine größtmögliche Flexibilität, beispielsweise im Hinblick auf Nicht-Linearität bzw. Interaktionen zwischen Einflussgrößen zu erreichen. Eine wichtige Differenz zur traditionellen Statistik ist also, dass die - so wie wir sie heute nennen - datengetriebenen Ansätze im ML auf der Suche nach Struktur/Muster in den Daten vergleichsweise wenig Annahmen benötigen. Interessant an dieser Stelle ist, dass für die Struktur-/Mustererkennung hochgradig nichtlineare Funktionen zur Verfügung stehen (die aber eine stetige Verbindung der Ausgangsdaten erwarten). Die algorithmische Datenmodellierung im maschinellen Lernen reduziert sich zu einem mathematischen Optimierungsproblem: Auf der Basis von unabhängigen Variablen, der Zielgröße, einer Verlustfunktion wird eine stetige Funktion gesucht, die den Verlust bei der Vorhersage der Zielgröße minimiert. Das zentrale Gütekriterium eines ML-Modells stellt also die Vorhersage-Genauigkeit dar.

Während für Breiman die (Nicht-)Orientierung am datengenerierenden Prozess als Unterscheidungskriterium ausschlaggebend ist, wird von anderen Autoren über die Unterscheidung Erklärung vs. Vorhersage versucht, Statistik und ML voneinander abzugrenzen. So stellt die Statistikerin Galit Shmueli fest, „although not explicitly stated in the statistics methodology literature, applied statisticians instinctively sense that predicting and explaining are different." (Shmueli, 2010, 289) Auch wenn beide Ansätze beispielsweise dieselbe Regressionsaufgabe lösen können, sind doch die jeweiligen Modellierungsziele verschieden. Erklärung ist in diesem Kontext mit der Identifikation von Kausalfaktoren wie mit dem Anspruch asoziiert, ein (mechanisches) Verständnis der Beziehung zwischen abhängiger Zielvariable und den erklärenden Inputvariablen zu erlangen. Unter dem Eindruck von Breimans Gegenüberstellung der beiden Kulturen der Datenmodellierung und ihrer eigenen Differenzierung zwischen „explanatory" und „predictive modeling" kommt sie zum Schluss, „from the explanatory/predictive view, algorithmic modeling is indeed very suitable for predictive modeling, but not for explanatory modeling." (ebd., 298) Ähnlich argumentiert der mittlerweile 85-jährige Statistiker Bradley Efron, der vor drei Jahren, auch in Reaktion auf Breimans Two Culture-Aufsatz, den Begriff der „pure prediction algorithms" (Efron, 2020) als Gegenbegriff zu Methoden der

[2] Es wird eine bestimmte Verteilung der Residuuen oder Linearitäten (z.B. Linearer Prädiktor) vorausgesetzt. Ebenso müssen Interaktionen manuell spezifiziert werden.

Parameterschätzung und Hypothesentests in der Statistik einführte. Damals im Gewand des Skeptikers gegen Breiman (vgl. den abgedruckten Kommentar Efrons in Breiman, 2001, 218 ff.) schreibt Efron, nun anerkennender:

> An energetic and passionate argument for the "algorithmic culture" - what I have been calling the pure prediction algorithms - in this work Leo excoriated the "data modeling culture" (i.e., traditional methods) as of limited utility in the dawning world of Big Data. [...]
>
> Breiman turned out to be more prescient than me: pure prediction algorithms have seized the statistical limelight in the twenty-first century, developing much along the lines Leo suggested. (Efron, 2020, 46)

2 Fragestellung und These

Leo Breiman hat mit seiner Unterscheidung zwischen den zwei Kulturen der Modellierung einen Wandel für die statistische Modellierung festgestellt. Wenn es richtig ist, dass sich sowohl Statistik wie maschinelles Lernen mit statistischer Inferenz beschäftigt und die Auseinandersetzung über die Unterschiede nicht endet (vgl. z.B. (Hey, 2009)), ist es attraktiv, darüber nachzudenken, ob der Wandel in der statistischen Modellierung, den Leo Breiman behauptet und festgestellt hat, Anlass und Berechtigung für die These eines Kuhnsche Paradigmen-Konflikts gibt. Es soll also darum gehen den Verbund aus begrifflichen Verschiebungen, den Methodenwandel sowie - in Anlehnung an Ludwik Fleck (vgl. Fleck, 1980) - die Veränderungen des inferentiellen Denkstils zwischen traditioneller Statistik und maschinellem Lernen wissenschaftstheoretisch einzufangen.

Es fällt zunächst auf, dass in diesem Zusammenhang immer wieder die Behauptung vertreten wird, dass dieser Wandel einen Paradigmenwechsel konstituiere. Der leichtfertige Rückgriff auf den Kuhnschen Begriff des Paradigmas (vgl. Kuhn, 1996) wird dabei zum einen dafür verwendet, einzelne Phasen *innerhalb* des Entwicklungsgeschichte von ML voneinander abzugrenzen (Cristianini, 2014, Cristianini, 2023, Kap. 2, Dotan und Milli, 2019[3]) oder um die epistemischen Verschiebungen einer datengetriebenen Forschungsmethodik herauszustellen (vgl. Kitchin, 2014). Allerdings wird dabei, meines Erachtens, nicht präzise genug geprüft, ob

[3]Der erstgenannte Autor möchte dabei die Phase der symbolischen künstlichen Intelligenz von der Phase des maschinellen Lernens ab den 1990er Jahren unterscheiden. Gegenwärtig wird dieser Unterschied auch unter dem Banner modell- vs. datengetriebene Ansätze (vgl. Hey, 2009, Jost, 2017) diskutiert. Die andere Publikation versucht Modelltypen des tiefen Lernens (hier könnte man an Klassifikation, Natural language processing oder automatisches Übersetzen denken.) mit einem Kuhnschen Paradima zu vergleichen.

das anspruchsvolle Kuhnsche Rahmenwerk als Werkzeug für eine historische Rekonstruktion wissenschaftlicher Entwicklung überhaupt geeignet ist - denn als eine solche, d.h. als eine (wissenschafts-)historische Rahmen-Theorie für die Geschichte der Naturwissenschaften, wurde sie von Kuhn selbst konzipiert. Darüber hinaus wurde bisher nicht die engere, weil spezifischere, Fragestellung verfolgt, ob der Wandel zwischen der Theorie traditioneller Statistik und der Theorie maschinellen Lernens als ein Kuhnscher Paradigmen-Konflikt betrachtet werden kann. Genau dieser Aufgabe stellt sich dieser Beitrag. Ich möchte dabei die Reichweite und Nützlichkeit von Kuhns Grundeinsichten, jedoch gleichzeitig auch die Grenzen und Probleme von Kuhns Ansatz für meine Fragestellung ausloten. Mit meinen Überlegungen in dieser Arbeit halte ich fest, dass die Anwendung des Kuhnschen Paradigmenbegriffs auf ML und Statistik problematisch ist. Damit komme ich zu einer eher negativen Antwort auf meine Titelfrage.

Ich werde daher zunächst im ersten Teil dieses Beitrages zeigen, inwiefern die Kuhnschen Begriffe (Paradigma, disziplinäre Matrix, Normalwissenschaft, Anomalie sowie Krise und wissenschaftliche Revolution) auf den hier vorliegenden Untersuchungsgegenstand anwendbar sind. Im Kern muss gezeigt werden, dass mit dem Übertritt in ein neues Paradigma eine Unterscheidung auf der Ebene der Problem- und Aufgabenstellung, der Begriffe sowie Methoden getroffen werden kann. Meine These ist, dass aus Sicht der Theorie von Statistik und der statistischen Lerntheorie (als Teilgebiet der Theorie des ML) beide Ansätze ein mathematisches Minimierungsproblem lösen und damit eine Invarianz der Problemdarstellung vorliegt. Allerdings liegt der Unterschied dann darin, dass die Minimierung unter unter unterschiedlichen Randbedingungen durchgeführt wird. Darüber hinaus werde ich dafür argumentieren, dass es eine Diskontinuität auf Begriffs- und Methoden-Ebene gibt. Der entscheidende ist, dass sich das Gütekriterium eines Modells und damit auch die Methoden der Modellwahl und -Bewertung verändern: In der Statistik verläuft die Modellspezifikation 'in-sample' (engl. in-sample model selection). Das bedeutet, dass die Anpassungsgüte (engl. goodness of fit) eines statistischen Modells auf der Basis derselben Datenstichprobe erfolgt mit der es gebildet worden ist (engl. in-sample model selection): Anpassungstests sind statistische Hypothesentests, die auf die beobachteten Daten zurückgreifen. Oder das Modellwahlkriterium beruht auf der Minimierung der quadrierten Residuen beziehungsweise des Vorhersagefehlers und einer Penalisierung (AIC). Die Residuen quantifizieren die Güte des Schätzers an denselben Daten, mit denen die Parameter im linearen Modell konstruiert wurden. Im Gegensatz dazu wird die Güte eines ML-Modells auf der Basis seiner 'out-of-sample' Vorhersageleistungsfähigkeit bewertet: 'Out-of-sample' bedeutet, dass die Modellgüte nicht auf der Basis derselben Datenmenge evaluiert wird, mit der das Modell gebildet/trainiert worden ist. Die Differenz des empirischen Fehlers auf den Trainings- und auf den Testdaten ist das Gütekriterium für die Modellwahl und wird in der Literatur (problematischerweise) als Generalisierungsfähigkeit bezeichnet.

Im zweiten Teil dieses Beitrags möchte ich dann die Grenzen und Probleme des Kuhnschen Phasenmodells für meine Fragestellung diskutieren. An dieser Stelle sind dieselben Kritikpunkte einschlägig, die schon analog zum Versuch aufgeworfen worden sind, den Wandel in der Mathematik mit Kuhn'schen Begriffen zu analysieren (Gillies, 1995, Krömer, 2000).

Schließlich möchte ich abschließend kurz die Attraktivität eines alternativen Ansatzes wissenschaftshistorischer und -theoretischer Analyse andeuten, mit denen ein Wandel in der (Computer-)Modellierung mit Daten beschrieben werden kann. Gemeint ist hier Ian Hackings „Styles of Reasoning" Projekt (Hacking, 1992, Hacking, 1994, Hacking, 2012), mit dem ein das maschinelle Lernen charakterisierender Style of Reasoning eingeführt wird, anhand dem die Zuverlässigkeit und die erkenntnistheoretischen Limitationen von ML diskutiert werden.

3 Traditionelle Statistik und ML

Bevor ich auf das Spannungsfeld zwischen traditioneller Statistik und maschinellem Lernen eingehe, möchte ich zunächst kurz erläutern, worauf ich mich mit diesen beiden Begriffe beziehe. Bei der traditionellen Statistik geht es abstrakt um Parameterschätzung. Konkret fokussiere ich auf das lineare Modell und die auf diesem Modell basierende (polynomiale) Regressionsanalyse. Dies ist zwar nur ein Verfahren unter vielen. Allerdings ist es historisch betrachtet eines der ersten (Gauß' Methode der kleinsten Quadrate) und es steht zu Beginn vieler Lehrbücher der klassischen Statistik. Es ist daher davon auszugehen, dass stereotypische Anwender meist Erfahrung mit dem linearen Modell haben, wozu die (polynomiale) Regression und die Varianzanalyse[4] (ANOVA, analysis of variance) eine wichtige Beispielmethode ist, um den Zusammenhang zwischen zweier oder mehrerer Variablen zu untersuchen.

Beim maschinellen Lernen betrachte ich das überwachte Lernen, bei dem es typischerweise darum geht, Daten zu klassifizieren, z. B. bei der Klassifizierung von Spam in einen separaten Ordner im Mail-Posteingang. Ich fokussiere mich auf die statistische Lerntheorie, die ein Teilgebiet der Theorie des maschinellen Lernens ist und als theoretisches Rahmenwerk des überwachten Lernens betrachtet werden

[4] Anova's stellen dabei eine besondere Form der Regressionsanalyse dar.

kann. Eine Diskontinuität und damit ein Spannungsfeld zwischen der statistischen Lerntheorie und der klassischen Statistik liegt schon zu Beginn ihrer Entwicklung in den 1960er Jahren in der UDSSR vor. Vladimir Vapnik, Hauptentwicklers der statistischen Lerntheorie, zitiert die verweigernde Stellungnahme eines der führenden Statistiker damals die Ergebnisse in einer Fachzeitschrift der Statistik zu veröffentlichen:

> It is true that this theory came from the same roots and uses the same formal tools as statistics. However, to belong to the statistical branch of science this is not enough. Much more important is to share the same belief in the models and to share the same philosophy. Whatever you are suggesting is not in the spirit of what I am doing or what A. Kolmogorov is doing. (Vapnik, 2006, 422)

Zentral für die Statistik ist der Begriff des statistischen Modells. Dabei werden die Daten als Realisierungen eines stochastischen datengenerierenden Prozesses aufgefasst, der durch den Begriff des statistischen Modells formalisiert wird. Die (einfache) Modellbildung erfolgt also auf dem Wertebereich einer Zufallsvariablen X. Weil die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung für X unbekannt ist, wird eine Familie von parametrisierten Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ betrachtet und es wird versucht, dasjenige θ zu finden, für die das Maß $\mathbb{P}_\theta$ die (unbekannte) Verteilung von X hinreichend gut beschreibt. Abstrakt formuliert ist das statistische Modell also das Tripel $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ bestehend aus dem Stichprobenraum $\mathcal{X}$ (die Menge aller möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen X), einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ über $\mathcal{X}$ und einer Familie $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta^X : \theta \in \Theta\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{F}$. Eine weitere Grundannahme ist, dass die Daten $x_1, \dots, x_n$ für jedes $\theta \in \Theta$ unabhängig und identisch verteilt (kurz: i.i.d. für independent and identically distributed) sind mit der Randverteilung $X_1 \sim \mathbb{P}_\theta$.

Kürzer und vereinfachend kann das statistische Modell auch einfach nur über die Familie der zu den Wahrscheinlichkeitsmaßen zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x, \theta)$ ausgedrückt werden. Das statistische Modell $\mathcal{M}_\theta(x)$ ist dann einfach

$$\mathcal{M}_\theta(x) = \{f(x, \theta), \quad \theta \in \Theta\}, \ x \in \mathbb{R}^n_X, \Theta \in \mathbb{R}^m, m < n$$

wobei $f(x, \theta)$ die gemeinsame Dichte für das Sample $(x_1, \dots, x_n)$ ist. In Ronald Aylmer Fishers Worten wird $\mathcal{M}_\theta(x)$ so gewählt, dass bestmöglich auf die Frage geantwortet werden kann „of what population is this a random sample?“ (Fisher, 1922, 313).

Ich stelle nun das lineare Modell vor, auf dem das Regressionsverfahren basiert. Regression bezeichnet die Analyse eines (nicht notwendigerweise linearen) funktionalen Zusammenhangs zwischen einer Zielgröße Y (auch Regressand oder abhängige Variable genannt) und einem Vektor von Kovariablen $X = X_1, \ldots, X_n$ (auch Regressoren oder erklärende bzw. unabhängige Variable genannt). Im Fall der einfachen linearen Regression werden die Datenpunkte

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i$$

für gegebene Kovariablen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ beobachtet. Die Terme $\epsilon_i = y_i - ax_i - b$ nennt man auch Residuen. Sie sind der Beobachtungsfehler und werden dabei oft als zentrierte, unkorrelierte Zufallsvariablen ($\mathbb{E}(\epsilon_i) = 0$) mit endlicher Varianz $Var(\epsilon_i) = \sigma^2$ modelliert. Beobachtet wird also eine zufällige Punktwolke um die Regressionsgerade $y = ax + b$. Das Ziel ist die Schätzung der Parameter a, b etwa mit der Maximum-Likelihood-Methode bzw. mit dem Kleinste-Quadrate-Schätzer. Unter der Normalverteilungsannahme der Fehler, d.h. dass $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ unabhängig und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt sind, gilt im Falle der einfachen linearen Regression, dass

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i \sim \mathcal{N}(ax_i + b, \sigma^2)$$

Das statistische Modell ist somit gegeben durch

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{N}(ax_i + b, \sigma^2)\right)_{a,b \in \mathbb{R}}\right)$$

Bei der einfachen linearen Regression wird der Regressand durch eine einzige Kovariable erklärt. In der allgemeinen Form des linearen Modells kann der Einfluss mehrerer Kovariablen untersucht werden.

Einfachstes Beispiel ist die polynomiale Regression, bei der gilt, dass

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_k x_i^k + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Die Regressionsfunktion ist in diesem Fall ein Polynom vom Grad k. Auf ein Beispiel mit Regressionspolynomen komme ich im Abschnitt 5 zurück, wenn es darum geht, die Modellwahl in der Statistik von derjenigen im ML abzugrenzen.

Maschinelles Lernen

Für den Fall des maschinellen Lernens schränke ich mich auf das sogenannte überwachte Lernen (supervised learning) ein. Ein ML-Modell kann als eine stetige mathematische Funktion interpretiert werden, die für eine Eingabe ausgewertet wird.

Das Lernproblem, mathematisch ein Approximationsproblem, besteht darin diejenige Funktion zu finden, die Eingabewerte am genauesten den entsprechenden Ausgabewerten zuordnet. Im Falle neuronale Netze besteht diese Funktion zum Beispiel aus der Komposition linearer Abbildungen, verknüpft mit einer Aktivierungsfunktion (vgl. (Berner et al., 2022)). Ist die Anzahl der Schichten des neuronale Netzes und die Aktivierungsfunktion einmal festgelegt, legen die Parameter der Gewichte eindeutig das neuronale Netz bzw. die mathematische Funktion fest. Das Lernproblem wird dann durch ein mathematischen Optimierungsverfahren approximativ gelöst bei dem eine möglichst optimale Wahl der Gewichte zu bestimmt wird. Mit Blick auf die Statistik wäre die lineare Funktionsapproximation (lineare Regression) ein ähnliches Problem.

Ich betrachte die Theorie des maschinellen (überwachten) Lernens im Folgenden aus dem Blickwinkel der statistischen Lerntheorie (Statistical learning theory, SLT[5]), das grundlegende Lernparadigma für die (binäre) Klassifikation oder die Regression. Im Lernproblem der binären Klassifikation soll Objekten (z.B. Abbildungen von Tieren) das binäre Label (z.B. Katze ja/nein) zugeordnet werden. Gesucht ist also ein Klassifikator $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, der allen Objekten aus $\mathcal{X}$ (*input space* oder *space of objects*) ein Label aus dem Raum der Labels $\mathcal{Y}$ (*output space* oder *space of labels*) zuordnet. Ist $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$, so spricht man von einem binären Klassifikationsproblem. Ein Regressionsproblem liegt vor, falls $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. Es handelt sich um ein Lernproblem, weil ein (guter) Klassifikator aufgrund von endlich vielen, sogenannten Trainingsdaten $S = (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ bestimmt werden soll, die iid. aus der wahren aber unbekannten Verteilung[6] aus $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gezogen werden. Für die Bewertung der Güte eines Klassifikators wird eine Verlustfunktion benötigt. Im Fall der binären Klassifikation ist die einfachste Wahl die 0/1-Verlustfunktion, die den Fehler 1 (Fehler 0) für eine inkorrekte (korrekte) Klassifikation ausgibt. Der empirische Fehler eines Klassifikators auf den Trainingsdaten S ist dann entsprechend gegeben durch den mittleren Fehler:

$$L_S(h) := \frac{\#\{(x, y) \in S : h(x) \neq h(y)\}}{n}$$

Für die Regression wird häufig die quadratische Abweichung als Verlustfunktion gewählt, d.h. $L_S(h) = (y - h(x))^2$. Entsprechend lautet der mittlere Fehler auf den Trainingsdaten

$$L_S(h) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\ y_i - h(x_i)\ )^2$$

[5]Ich beziehe mich in meiner Darstellung auf die Einführung der SLT in (von Luxburg und Schölkopf, 2011) und auf (Shalev-Shwartz und Ben-David, 2014).

[6](von Luxburg und Schölkopf, 2011) stellen die Agnostizität bezüglich der generierenden Verteilung in der SLT gegenüber der traditionellen Statistik heraus.

Tatsächlich ist man aber am Verhalten des Klassifikators auf dem ganzen Datensatz interessiert. Dieses Verhalten wird über den mittleren Fehler bzw. das erwartete Risiko des Klassifikators bezüglich der wahren Verteilung $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ausgedrückt:

$$L_{\mathcal{D}}(h) := \mathbb{E}_{(X,Y)\sim\mathcal{D}}\left[L_{(X,Y)}(h)\right]$$

$L_S(h)$ ist also ein Schätzer für $L_{\mathcal{D}}(h)$. Auf der Grundlage der Trainingsdaten S lautet das Ziel, einen Klassifikator zu finden, der das erwartete Risiko $L_{\mathcal{D}}(h)$ (bzgl. der unbekannten Verteilung $\mathcal{D}$) minimiert. Der Ansatz in der statistischen Lerntheorie ist es, diese Minimierungsaufgabe in Abhängigkeit einer Hypothesen-Klasse $\mathcal{H}$ zu formulieren, die eine Menge von möglichen Klassifikatoren enthält. Auf der Basis von Trainingsdaten ist das Ziel also die Wahl einer Hypothese h aus $\mathcal{H}$ so, dass der Fehler möglichst nah an $\min\limits_{h'\in\mathcal{H}} L_{\mathcal{D}}(h')$ ist.

Für dieses Ziel der Konstruktion eines Schätzers, ist die empirische Risikominimierung (Empirical Risk Minimization, ERM) ein allgemeines und weit verbreitetes Prinzip im maschinellen Lernen, da es unabhängig von Verteilungsannahmen in $\mathcal{D}$ an die Beobachtungen eingesetzt werden kann.[7] Dabei wird eine Lernmethode bzw. ein Lernalgorithmus des maschinellen Lernens als eine mathematische Funktion $f_{\mathcal{H},S} : \mathcal{H} \times S \to \mathcal{H}$ betrachtet, die auf der Basis der Hypothesen-Klasse $\mathcal{H}$ und einer Trainingsmenge S eine Hypothese $h \in \mathcal{H}$ auswählt, sodass der Fehler auf den Trainingsdaten minimal wird, kurz: $f_{\mathcal{H},S} = \arg\min\limits_{h\in\mathcal{H}} L_S(h)$.

Die Gestalt der Hypothesenklasse $\mathcal{H}$ wird durch induktive Annahmen festgelegt, die explizit (z.B. durch die Wahl der Architektur eines neuronalen Netzes) und implizit (durch die Dynamik des Lernprozesses und Regularisierung) sein können (vgl. Shalev-Shwartz und Ben-David, 2014). Im Unterschied zur traditionellen Statistik geht für ERM im maschinellen Lernen bei der Modellwahl nicht mehr die induktive Annahme ein: „Es gibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ so, dass die vorliegenden Daten ein iid. Sample dieser Verteilung sind und damit die bestmögliche Inferenz bzw. Vorhersage möglich ist.“ Im Rahmen der SLT kann die induktive Annahme in Bezug auf die Hypothesen-Klasse $\mathcal{H}$ verstanden werden als die Überzeugung (oder Hoffnung): „Es gibt ein $f \in \mathcal{H}$ so, dass der Klassifikationsfehler auf einer unbekannten Verteilung klein genug ist und das ERM-Prinzip diesen Fehler gut genug approximiert.“

Vor diesem Hintergrund wird die folgende Einschätzung des Hauptvertreters der statistischen Lerntheorie, Vladimir Vapnik, verständlich, der selbst schon den Begriff eines Paradigmenwechsels für die Beziehung zwischen traditioneller Statistik

[7] Und diese Annahme ist auch gleichzeitig das Problem und ein Hindernis, wenn man etwas über die Generalisierungsfähigkeit von z.B. neuronalen Netzen wissen möchte.

und maschinellem Lernen verwendet (aber ohne genauer und präzise auf Kuhn einzugehen):

> Between 1960 and 1980 a revolution in statistics occurred: Fisher's paradigm, introduced in the 1920s and 1930s was replaced by a new one. This paradigm reflects a new answer to the fundamental question:
>
> *What must one know a priori about an unknown functional dependency in order to estimate it on the basis of observations?*
>
> In Fisher's paradigm, the answer was very restrictive - one must know almost everything. Namely, one must know the desired dependency up to the values of a finite number of parameters. Estimating the values of these parameters was considered to be the problem of dependency estimation. The new paradigm overcame the restriction of the old one. It was shown that in order to estimate dependency from the data, it is sufficient to know some general properties of the set of functions to which the unknown dependency belongs. (V. N. Vapnik, 2000, ix)

Die Methoden der Modellwahl und das damit verbundene Güte-Kriterium für ein Modell wird in Kapitel 5 thematisiert, denn hier, so meine These, manifestiert sich der entscheidende Unterschied, den ich argumentativ für die These eines Paradigmenwechsels anbringe. Zunächst möchte ich aber kurz in die Kuhnschen Begrifflichkeiten einführen.

4 Kuhnscher Paradigmenbegriff

Zur Beantwortung meiner Fragestellung, ob der Wandel zwischen traditioneller Statistik und maschinellem Lernen als ein Kuhnscher Paradigmenwechsel betrachtet werden kann, ist es zunächst nötig, das Kuhnsche Rahmenwerk vorzustellen. Kuhn formuliert seine Theorie wissenschaftlicher Entwicklung für die Naturwissenschaften. Aber ganz ähnlich wie schon geprüft worden ist, ob es auch in der Mathematik Revolutionen im Sinne Kuhns gibt (vgl. Gillies, 1995, Nickel, 2023, Kvasz, 1999), soll hier der Versuch unternommen werden, das Kuhnsche Vokabular auf das hybride Feld[8] maschinelles Lernen anzuwenden. In meiner kurzen Darstellung hier wird nicht der Anspruch verfolgt, der Rezeptionsgeschichte von *The Structure of Scientific Revolutions* gerecht zu werden. Ich beziehe mich daher

[8] Hybrides Feld, weil ML auf mathematischen Grundlagen aufbaut, dann aber stark aus der Perspektive der Informatik beforscht wird.

hauptsächlich auf sein eben genanntes Hauptwerk (vgl. Kuhn, 1996) und das Postscript in der dritten Auflage (vgl. ebd., 174-210), welches eine Modifikation und Präzisierung seines Paradigma-Begriffes enthält. Im Folgenden werde ich also die Begriffe Paradigma & disziplinäre Matrix, Normalwissenschaft & Anomalie sowie Krise & wissenschaftliche Revolution kurz einführen, um dann im folgenden Kapitel zu prüfen, inwiefern sie auf den hier vorliegenden Untersuchungsgegenstand anwendbar sind.

Für Kuhn ist die moderne Naturwissenschaft ein kollektives Unternehmen, das von einer bzw. mehreren wissenschaftlichen communities betrieben wird. Die Bindekraft und der Fortbestand einer wissenschaftliche community wird über die Anerkennung einer Reihe von commitments zusammengehalten, für die Kuhn den Begriff des Paradigma einführt:

> Aristotle's *Physica*, Ptolemy's *Almagest*, Newton's *Principia* and *Opticks*, Franklin's *Electricity*, Lavoisier's *Chemistry*, and Lyell's *Geology* - these and many other works served for a time implicitly to define the legitimate problems and methods of a research field for succeeding generations of practitioners. They were able to do so because they shared two essential characteristics. Their achievement was sufficiently unprecedented to attract an enduring group of adherents away from competing modes of scientific activity. Simultaneously, it was sufficiently open-ended to leave all sorts of problems for the redefined group of practitioners to resolve.
>
> Achievements that share these two characteristics I shall henceforthrefer to as 'paradigms,' [...]
>
> A paradigm is what the members of a scientific community share, and, conversely, a scientific community consists of men who share a paradigm. (Kuhn, 1996, 10 und 176)

Aufgrund von mehreren Kritiken (u.a. Masterman, 2014) an der Mehrdeutigkeit des Paradigmenbegriffes reagiert Kuhn, indem er diesen Begriff durch den der *disziplinären Matrix* ersetzt:

> I suggest 'disciplinary matrix': 'disciplinary' because it refers to the common possession of the practitioners of a particular discipline; 'matrix' because it is composed of ordered elements of various sorts. (Ebd., 182)

Die wesentliche Elemente der disziplinären Matrix sind für Kuhn die folgenden vier: (1) symbolische Verallgemeinerungen, wie z.B. allgemeine Grundsätze und gesetzesartige Ausdrücke wie die Newtonsche Beziehung zwischen Kraft und Beschleunigung $f = ma$. (2) Orientierung an heuristischen und ontologischen Modellen (z. B. Atommodell), (3) gemeinsame Werte, die dann z.B. auch bei der Theorienwahl eine entscheidende Rolle spielen und (4) gemeinsame Musterbeispiele (vgl. ebd., 182 - 191). Das vierte Element bildet den Kern des Kuhnschen Paradigmenbegriffs, weil (1) bis (3) darin im Grunde schon enthalten sind. Denn unter den Musterbeispielen, den „shared exemplars“ (ebd., 187), fasst Kuhn die spezifischen Problem- und Aufgabenstellungen und die hierfür entsprechenden Lösungsansätze, wie sie exemplarisch in Lehrbüchern behandelt werden. Hierfür muss natürlich auf ein bestimmtes begriffliches Instrumentarium, auf symbolische Verallgemeinerungen sowie auf bestimmte Annahmen und Modelle (vgl. (1)-(3)) zurückgegriffen werden. Ich fasse daher Paradigmen als „Begriffs-, Methoden,- und Problemkataloge“ (Krömer, 2000, 149) zusammen, die eine scientific community zusammenhalten. Die in seinem solchen Rahmen ausgeführte wissenschaftliche Arbeit bezeichnet Kuhn als *Normalwissenschaft* („normal science“). Grundlage von Forschung besteht dann zunächst darin, die exemplarischen Problemlösungen zu erlernen, um sie dann auf analoge Problem- und Aufgabenstellungen anwenden zu können. Kuhn beschreibt diesen Prozess als „puzzle solving“ (ebd., Kap. 4). Diese Analogie soll verdeutlichen, dass der normalwissenschaftliche Prozess darin besteht, das Spektrum ungelöster Probleme als ähnlich bzw. analog zu betrachten, um sie nach dem Vorbild des Paradigmas zu lösen. Hierfür spielen dann die exemplarischen Problemlösungen eine wichtige Rolle.

Die Situation, dass sich im Rahmen eines Paradigmas ein Problem unentwegt einer Lösung entzieht, beschreibt Kuhn als *Anomalie*. Die integrative Wirkung des Paradigmas wirke hier zunächst immunisierend, indem Zusatzhypothesen und zusätzliche ad-hoc Annahmen eingeführt werden (vgl. Kuhn, Kap. VI). Akkumulieren sich die in einem Paradigma selbst erzeugten Probleme (Anomalien) so, dass die scientific community als ganzes die Überzeugung in die organisierende Kraft des existierenden Paradigmas verliert, komme es zu einer *Krise*, an dessen Ende eine *wissenschaftliche Revolution* stehe, die zur Etablierung eines neuen Paradigmas führe (Paradigmenwechsel). Für Kuhn müssen hierfür aber zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss das neue Paradigma einige wichtige Problemstellungen lösen können, die auf keine andere Weise zu bewältigen sind. Und zweitens muss ein neues Paradigma die Konservierung eines relativ großen Teils der Problemlösungsfähigkeit des alten Paradigmas versprechen:

> First, the new candidate must seem to resolve some outstanding and generally recognized problem that can be met in no other way. Second, the new paradigm must promise to preserve a relatively large part of the concrete problem-solving ability that has accrued to science through

> its predecessors. Novelty for its own sake is not a desideratum in the sciences as it is in so many other creative fields. (Ebd., 169)

Ein überzeugendes Beispiel für eine wissenschaftliche Revolution im Sinne Kuhns ist die kopernikanische Wende bzw. der Wandel der aristotelischen Physik zur Newton'schen Mechanik. Die verschiedenen Theorien handeln von ganz unterschiedlichen Gegenständen und Strukturen und markieren eine Nicht-Kompatibilität hinsichtlich der idealisierten Beschreibung von Bewegung.[9]

Für die Festlegung dieser zwei notwendigen Bedingungen spielt die scientific community eine Schlüsselrolle. Nach Kuhn ist es die Angelegenheit dieses Kollektivs über die Legitimität[10] von Begriffen, Methoden und Fragestellungen und damit letztlich auch über die Akzeptanz wissenschaftlicher Problemlösungen zu entscheiden, insbesondere welche als weiterhin legitim im neuen Paradigma gelten. Außerdem erweitert sich die Erklärungsleistung nicht notwendigerweise beim Übergang zu einem neuen Paradigma (vgl. Kuhn, 1996, 99–100):

> Not all the achievements of the preceding period of normal science are preserved in a revolution, and indeed a later period of science may find itself without an explanation for a phenomenon that in an earlier period was held to be successfully explained. This feature of scientific revolutions has become known as 'Kuhn-loss'. (Bird, 2022)

Und schließlich kann (muss aber nicht) ein Paradigmenwechsel Kommunikationsprobleme zwischen Angehörigen zweier Paradigmen akzentuieren, weil hierdurch zueinander (partiell) unüberbrückbare Standpunkte eingenommen würden:

> Communication across the revolutionary divide is inevitably partial. [...] In a sense that I am unable to explicate further, the proponents of competing paradigms practice their trades in different worlds. [...] Practicing in different worlds, the two groups of scientists see different things when they look from the same point in the same direction. (Kuhn, 1996, 149 f.)

Die These, dass diese Kommunikationsstörungen ihre Ursache in den unterschiedlichen, inkommensurablen Bestandteilen zweier Paradigmen haben[11], führt direkt

[9] Ladislav Kvasz interessiert sich insbesondere für den formalen und mathematischen Wandel, der sich innerhalb von Kuhnschen Revolutionen ereignet. Eine aufschlussreiche Besprechnung des Falls aristotelische und Newton'schen Physik findet sich hier: Kvasz, 1999, 213-215, 228.

[10] Vgl. das Zitat von Kuhn weiter oben: „[...] to define the legitimate problems and methods of a research field for succeeding generations of practitioners.“ (Kuhn, 1996, 10).

[11] Diese Kommunikationsprobleme werden bereits bei Kuhn gleich zu Beginn der *Structure of Scientific Revolutions*, bei der ersten Erwähnung des Inkommensurabilitätsbegriffs auf die

auf die in der Kuhn-Rezeption umstrittene Inkommensurabilitätsthese, die ich an dieser Stelle aber nicht weiter diskutieren möchte. Ich erwähne hier jedoch dieses Phänomen, weil sich etwas vergleichbares zwischen Angehörigen der traditionellen Statistik und dem maschinellen Lernen beobachten lässt. Die Prüfung, ob die Kuhnschen Begriffe tatsächlich auf diese beiden Disziplinen angewendet werden können, ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

5 ML als neues Paradigma, mit Daten umzugehen?

Wenn die im letzten Kapitel eingeführte Terminologie von Kuhn anwendbar sein soll auf die Fragestellung in dieser Arbeit, müssen die folgenden Aspekte geprüft werden: Gibt es im Rahmen eines Paradigmas erzeugte Probleme oder Anzeichen für Dissens, sodass die These eines Paradigmen-Konflikts gestützt wird? Finden sich Anzeichen, dass die „proponents of competing paradigms“ in „different worlds“ (vgl. oben auf Seite 12 das Kuhn Zitat.) leben? Ich habe oben Paradigmen als „Begriffs-, Methoden- und Problemkataloge“ (Krömer, 149) bezeichnet, die eine scientific community zusammenhalten. Was sind dann die Unterschiede in den Begriffen, wie unterscheiden sich die Problem- und Aufgabenstellungen und die dazugehörigen Methoden in der Statistik und im maschinellen Lernen?

5.1 Anomalien in der Statistik?

Das Problem der mangelnden Replizierbarkeit von statistisch signifikanten Ergebnissen bzw. der Befund einer Replikationskrise kann ein im Rahmen des Paradigmas der traditionellen Statistik selbst erzeugtes Problem sein. Von einer Replikationskrise ist seit 2011 die Rede, als bekannt wurde, dass insbesondere in der biomedizinischen Forschung und in der Psychologie „replicability […] might be lower than expected or desired“ (Nosek et al., 2022, 724). Zum Beispiel sind weniger als 50 % der Ergebnisse der Sozialpsychologie und der Kognitionspsychologie replizierbar (vgl. Open Science Collaboration, 2015). Ähnliche Resultate gibt es in der medizinischen Forschung (vgl. z.B. Begley und Ellis, 2012 und Prinz et al., 2011). Ein Aspekt in dieser Replikationskrise betrifft die Quantifizierung statistischer Evidenz durch Anwenderinnen und Anwender. Ich lasse hier also Formen des publication bias oder Probleme auf institutioneller Ebene (Anreizstrukturen in der Wissenschaft) außer Acht. Im Vordergrund steht das dominante Mittel statistischer Evidenzbewertung, statistische Hypothesentests. Schwach wäre es für die

verschiedenen „ways of seeing the world“ und eine unterschiedliche Wissenschaftspraxis zurückgeführt, vgl. Kuhn, 1996, 4.

Argumentation, die Reproduzierbarkeitsprobleme in den oben genannten Fächer als eine Krise der Statistik aufzufassen. Allerdings betont (Kelter, 2021), dass

> diverse im Rahmen der Reproduzierbarkeitskrise beobachtete Probleme ursächlich auf die den Verfahren zu Grunde liegende statistische Theorie zurückgeführt werden können. [...] und es wird gezeigt, dass eine Vielzahl der Probleme der Reproduzierbarkeitskrise ursächlich auf die axiomatischen Grundlagen und Konflikte mit dem Likelihood-Prinzip zurückgeführt werden können. (Ebd., 6)

Das was als methodisch akzeptable Evidenz gilt, ist somit mit der Replikationskrise unter Legitimitätsdruck geraten. Allerdings steht innerhalb der Statistik mit den Bayes'schen Ansätzen eine Alternative bereit, die als Lösung für einige Probleme der Reproduzierbarkeit diskutiert wird (vgl. ebd., Abschnitt V). Auch im maschinellen Lernen zeichnet sich Probleme der Reproduzierbarkeit ab, welche die Vertrauenswürdigkeit von ML beeinträchtigen kann (vgl. Ball, 2023).

5.2 Invarianz der mathematischen Aufgabenstellung

Für die drei genannten Aspekte, mit denen ich das Kuhnsche Paradigma beschrieben habe, sollte nun ein Unterschied markiert werden, wenn traditionelle Statistik und maschinelles Lernen verglichen werden. Vielleicht überraschend möchte ich aber mit der Behauptung beginnen, dass - auf der Ebene der statistischen Lerntheorie (als Teilgebiet der Theorie von ML) und der Theorie der Statistik - beide Ansätze ein Minimierungsproblem lösen: Die spezifische Wahl der Verteilung des Fehlers in einem statistischen Modell zur Maximum-Likelihood-Schätzung korrespondiert mit der Wahl einer bestimmten Verlustfunktion in der empirischen Risikominierung. Unter diesen einschränkenden Voraussetzungen ist, auf der formalen Ebene, die mathematische Aufgabenstellung invariant.

Allerdings wird das Minimierungsproblem unter unterschiedlichen Randbedingungen minimiert. Die SLT bleibt agnostisch bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den gegebenen Trainingsdaten, während die Theorie der Statistik darüber (starke) Annahmen macht. Damit ist wieder ein klarer Unterschied in Bezug auf den methodischen Umgang mit den beiden Grundprinzipien zur Konstruktion von Schätzern benannt.

Ich möchte diese Behauptungen anhand eines Beispiels aufzeigen. Hierfür betrachte ich das statistische Setup des linearen Modells bzw. des Spezialfalls der linearen Regression unter Normalverteilungsannahmen der Fehler (vgl. Abschnitt 3). Ganz im Sinne der Breiman'schen Kultur der Datenmodellierung, die seiner Behauptung nach in der traditionellen Statistik realisiert sei, wird Kenntnis über den datengenerierenden Prozess vorausgesetzt. Für die gegebenen Daten $\mathcal{D} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ (als Realisierungen von n vielen iid. verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$) wird also angenommen, dass Wissen über die Verteilung $y|x \sim p(y|x, \theta)$ besteht. Unter der Verteilungsannahme von z.B. Gauß'schem Rauschen wird also vorausgesetzt, dass $p(y|x, \theta) = \mathcal{N}(ax+b, \sigma^2)$. Gemäß des Maximum-Likelihood-Prinzips wird derjenige Parameter θ gewählt, unter dem die beobachteten Daten die größte Wahrscheinlichkeit besitzen. In diesem Fall ist Likelihood-Funktion durch die Dichtefunktion der Normalverteilung gegeben.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} p\ \ (y_i|\ x_i, \theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{(y_i - ax_i - b)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2\right)
\end{aligned}
$$

Die Maximierung der negativen log-likelihood ist damit äquivalent zur Minimierung der Summe der quadrierten Residuuen. Daraus folgt, dass die Maximum-Likelihood Regression mit Gauß'schem Rauschen mit der Wahl der L_2-Verlustfunktion in der ERM korrespondiert. Analog kann gezeigt werden, dass Laplace-verteiltes Rauschen die Verwendung der L_1-Verlustfunktion in der ERM impliziert.[12]

5.3 Veränderung von Begriffen & Kommunikationsprobleme

Auch wenn die mathematische Aufgabenstellung gleich geblieben ist, hat sich doch die Terminologie der beiden Felder Statistik und maschinelles Lernen verändert. Der Statistiker Robert Tibshirani hat in den 1990er Jahren den folgenden Glossar[13] aufgestellt, um auf die Veränderung der Begriffe in den beiden Feldern hinzuweisen:

[12] Allgemein kann sogar gezeigt (vgl. Murphy, 2012, Kapitel 7) werden, dass zur Verteilung statistischen Rauschens je die Wahl einer Verlustfunktion im Rahmen der ERM korrespondiert. Die Rückrichtung ist allerdings im Allgemeinen nicht richtig.

[13] Vgl. https://windowsontheory.org/2022/06/20/the-uneasy-relationship-between-deep-learning-and-classical-statistics/

Machine Learning	Statistics
network, graphs	model
weights	parameters
learning	fitting
supervised learning	regression/classification
unsupervised learning	density estimation/ clustering
large grant = $ 1,000,000	large grant = $ 50,000

Allerdings muss die Änderung der Namen streng genommen noch nicht die Änderung der Bedeutung von Begriffen implizieren. Zumindest, so meine These, hat sich ein Wandel der Bedeutung zwischen Statistik und ML vollzogen. Hier beziehe ich mich auf den Gegenstandsbezug, d.h. auf die Art und Weise, wie sich Modelle auf die empirische Welt beziehen, vollzogen. ML-Modelle sind nicht mehr in der Weise repräsentativ, wie es Modelle in der Statistik sind. Dies ist Thema des nächsten Abschnitts in diesem Kapitel.

Kuhns Vorstellung, dass Kommunikationsprobleme zwischen Angehörigen verschiedener Normalwissenschaften bestehen und auf verschiedenen „ways of seeing the world“ (vgl. Kuhn, 1996, 4) und damit eine unterschiedliche Wissenschaftspraxen und -Kulturen gründen, kann durchaus auch für die Statistik und das maschinelle Lernen ins Feld geführt werden. Denn Unterschiede in einem wissenschaftskulturellen Sinne sind vorhanden. Wissenschaftsgeschichtlich relevant ist hier, dass es sich bei der traditionellen Statistik als Disziplin beinahe um eine angloamerikanische Besonderheit[14] handelt. Sie geht vor allem auf Ronald Aylmer Fisher und Karl Pearson in Cambridge zurück, wobei die Arbeit von Fisher aus seiner Arbeit in der landwirtschaftlichen Forschungsstation in Rothamstead motiviert war. Statistik ist, im wissenschaftskulturellen Sinne, eine Disziplin, die ihre Wurzeln in Agrarwirtschaft, Ökonomie und der Hygiene hat, und versucht aus tabellierten Daten Vorhersagen und funktionale Abhängigkeiten zu konstruieren. Die Angehörigen der Statistik nehmen sich wahrscheinlich entweder als angewandte Mathematiker oder als Vertreter eines eigenen Fachs wahr.

Das maschinelle Lernen ist eher die Fortsetzung des Studium von Inferenz durch die Brille der Informatik. Nicht umsonst entsteht die KI als assoziierter Parallelbegriff aus den Arbeiten von Turing, Wiener, Gödel, Minsky.[15] Auch Personen wie Shannon oder Rosenblatt, die wichtige technische Beiträge geliefert haben,

[14] Dieser angloamerikanische Charakter zeigt sich zum Beispiel auch darin, dass es in Deutschland bis heute nur zwei Fachbereiche für Statistik gibt (an der LMU und in Düsseldorf), während jede Volluniversität einen Fachbereich Informatik hat.

[15] Den Term 'künstliche Intelligenz' hat allerdings nur Minsky verwendet.

waren am Informationsbegriff interessiert und hätten sich wohl nicht als Statistiker bezeichnet. Das ist wohl ein zweiter wichtiger Unterschied: Die technische Sicht der Informatik[16] und das große Interesse an den technischen Details der elektronischen Datenverarbeitung. Eine Ausnahme stellt hier allerdings die modernen Markov-Chain-Monte-Carlo-Algorithmen dar, die bayesianische Statistik mit Simulationsmethoden in Verbindung brachte, nachdem endlich die nötigen leistungsstarken Rechenressourcen für die Bayes-Inferenz vorlagen (vgl. Lenhard, 2022). Die folgende Zitat zeigt, dass heutzutage aus Anwenderperspektive das Verhältnis zwischen traditioneller Statistik und ML nicht spannungsfrei verläuft:

> „Used to get annoyed by stats consultent clients who insisted they needed machine learning for their very large dataset. Now I tell them logistic regression *is* machine learning and everything is great again.“, sowie „I don't know who needs to hear this but 'leveraging machine learning' is just a fancy phrase for 'utilize machine learning' is just a fancy phrase for 'use statistics'.“ Maarten von Smeden, University Medical Center Utrecht, veröffentlicht auf Twitter, 11.7.2020 und 18.11.2020.

5.4 Modellwahl in der Statistik und im ML

Jenseits von sozialen, psychologischen und der eben angesprochenen wissenschaftskulturellen Aspekte, die bei der Konstituierung und Aufrechterhaltung von Denkkollektiven (Fleck) in einer normalwissenschaftlichen Periode eine Rolle spielen, nehmen wir Kuhns Ideen ernst, wenn wir uns auf die begrifflichen Veränderungen in den methodischen Grundannahmen zwischen traditioneller Statistik und maschinellem Lernen konzentrieren. Paradigmen habe ich deswegen als „Begriffs-, Methoden- und Problemkataloge“ (Krömer, 2000, 149) bestimmt. Daher liegt für mich der argumentative Kern meiner Fragestellung in dieser Arbeit darin, Diskontinuitäten in den Begriffs- und Methodenkatalogen hervorzukehren, nachdem ich bereits argumentiert habe, dass die Problemstellung zwischen traditioneller Statistik und maschinellen Lernen invariant geblieben ist (vgl. Abschnitt 5.2). Und in der Tat ist in diesem Abschnitt meine These, dass sich erstens das Gütekriterium und damit folglich auch die Methoden der Modellwahl verändern. Und zweitens ist die These, dass sich der Modellbegriff selbst in Bezug auf seine Repräsentationalität verändert hat.

[16]Zwar waren auch in der Statistik numerische Methoden praktisch wichtig. Aber sie waren als Arbeitswerkzeug immer Mittel zum Zweck. Programme wie S, SPPS und R waren nie richtige Programmiersprachen im engeren Sinne, sondern Anwendungstools.

Für die Statistik konzentriere ich mich auf das lineare Modell bzw. auf das einfache Beispiel der polynomialen Regression (vgl. Abschnitt 3):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_k x_i^k + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Weil die wahren Modellparameter $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ unbekannt sind, müssen sie durch ein $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_k)$ geschätzt werden. Die Frage der Modellwahl in der traditionellen Statistik lautet also, welche Ausgangs-Variablen bzw. Regressoren x^k in welcher Form in der Modell-Gleichung der Regression erscheinen sollen. Wichtig dabei sind die Kriterien der Anpassungsgüte (goodness of fit) an die vorliegenden Daten und die Modellkomplexität (gemessen in der Anzahl der Parameter). Ich gehe im Folgenden auf ein Anwendungsbeispiel ein, in denen ich den Umgang mit zwei Modellwahlkriterien diskutiere.

Ich möchte dabei auf den folgenden entscheidenden Punkt aufmerksam machen: Der zentrale Unterschied zur Modellwahl im ML liegt darin, dass die Anpassungsgüte (engl. goodness of fit) eines statistischen Modells auch auf der Basis derselben Datenstichprobe erfolgt mit der es gebildet worden ist: Anpassungstests sind statistische Hypothesentests, die auf die beobachteten Daten zurückgreifen. Oder das Modellwahlkriterium beruht auf der Minimierung der quadrierten Residuen beziehungsweise des Vorhersagefehlers und einer Penalisierung (AIC). Die Residuen quantifizieren die Güte des Schätzers an denselben Daten, mit denen die Parameter im linearen Modell konstruiert wurden (engl. in-sample model selection). Damit wird ein Prognose-Modell verwendet, das auf der gesamten Stichprobe beruht und Beobachtungen in der Stichprobe prognostiziert. Im Gegensatz dazu wird die Güte eines ML-Modells ausschließlich auf Basis der 'out-of-sample' Vorhersageleistungsfähigkeit bewertet: Das bedeutet, dass die Modellgüte nicht auf der Basis derselben Datenmenge evaluiert wird, mit der das Modell gebildet/trainiert worden ist. In ML ist die Differenz des empirischen Fehlers auf den Trainings- und auf den Testdaten das Gütekriterium für die Modellwahl und wird in der Literatur (problematischerweise) als Generalisierungsfähigkeit bezeichnet.

Als Beispiel (vgl. Trabs et al., 2021, 75 f.) betrachten wir eine polynomiale Regression über die mittleren Junitemperaturen in Berlin-Dahlem von 1719 bis 2020. Für die Polynomgrade $d = 1, \ldots, 4$ erhält man die vier Regressionsfunktionen in Abhängigkeit der Zeit t (in Jahrhunderten beginnend bei 1719):

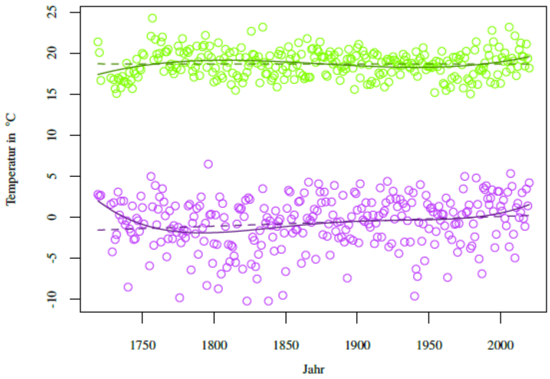


Abbildung 1: Die obere Punktwolke stellen die mittleren Julitemperaturen, die untere stellen die Januartemperaturen dar. Die durchgezogenen Linie zeigt das Regressionspolynom dritten Grades für den Juli. Die gestrichelte Linie zeigt die Regressionsgerade p_1. Quelle: Trabs et al., 2021, 76.

$$
\begin{aligned}
p_1(t) &= 18,72 - 0,002t \\
p_2(t) &= 18,63 - 0,16t - 0,05t^2 \\
p_3(t) &= 17,43 - 4,49t - 3,52t^2 + 0,75t^3 \\
p_4(t) &= 17,39 + 4,71t - 3,84t^2 + 0,92t^3 - 0,003t^4
\end{aligned}
$$

In diesem zitierten Beispiel entscheiden sich die Autoren für das Polynom p_3 als Regressionsfunktion. Für die Wahl des am besten geeigneten Polynoms kann die Theorie statistischer Hypothesentests verwendet werden. Für die Wichtigkeit eines einzelnen Terms $\beta_j x^j$ in (*) bzw. in einem der vier Polynome p_1 bis p_4 können z.B. verschiedene Hypothesentests (t-Test, Fisher-Test) durchgeführt werden, beispielsweise die Frage, ob ein Polynom dritten Grades benötigt wird (mit der Nullhypothese $H_0 = \beta_3 = 0$ für die Funktion p_3). Relevant für meine These ist, dass für diese Teststatistiken als Grundlage der Modellwahl diesselben Daten benötigt werden, mit denen die Regressionspolynome selbst aufgestellt worden sind.

Für den Vergleich zwischen Modellen mit verschieden vielen Koeffizienten wird u.a. das Akaike-Informationskriterium (AIC) herangezogen, bei dem sowohl die Anpassungsgüte an die gegebenen Daten sowie die Komplexität des Modells in die

Beurteilung eingehen. Das Maß für die Anpassungsgüte des geschätzten Modells ist der Maximum-Likelihood-Schätzer $\mathcal{L}$, hinzu kommt eine Penalisierung durch die Parameteranzahl:

$$AIC(k) = -2\log\mathcal{L}(\theta) + 2k$$

wobei k die Anzahl der Parameter im statistischen Modell darstellt. Dasjenige Modell ist am besten, das den niedrigsten AIC-Wert hat, die Anzahl der Parameter muss strafend addiert werden. Für das lineare Modell und für den Fall normalverteilter Fehler (vgl. Abschnitt 3) kann AIC mit der Anzahl n der Datenpunkte und der Quadratsumme der Residuen (residual sum of squares, RSS) ausgedrückt werden:

$$AIC(k) = n\ln\left(\frac{RSS}{n}\right) + 2k$$

In der Modellwahl wird dasjenige Model mit dem niedrigsten AIC-Wert bevorzugt. Für das obige Beispiel der Klimadatenzeitreihe wurden Regressionspolynome des Grades $d = 1, \ldots, 4$ verwendet. $AIC(d)$ ist für $d = 1, \ldots 30$ in der folgenden Abbildung dargestellt:

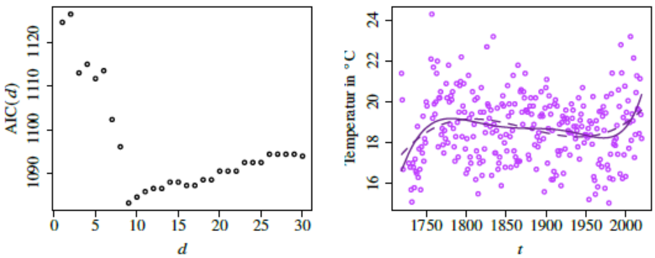


Abbildung 2: Links: In Abhängigkeit vom Polynomgrad d der AIC-Wert. Rechts: Das Regressionspolynom neunten Grades (durchgezogene Linie) und des Polynom dritten Grades (gestrichelte Linie). Quelle: Trabs et al., 2021, 139.

Das Informationskriterium fällt bis $d = 9$ (vgl. Abbildung 2, links), hier verbessert sich also die Anpassungsgüte an die Daten mit der Erhöhung der Parameteranzahl. Ab $d = 10$ fällt der AIC-Wert, d.h. hier dominiert der Einfluss des Strafterms. Auf der rechten Seite der Abbildung 2 sieht man noch das durch AIC gewählte Regressionspolynom zusammen mit dem Polynom dritten Grades für das sich (Trabs et al., 2021) entschieden hatte auf Basis der Hypothesentests. Zentral ist wieder die in-sample Modellwahl. Das AIC basiert auf der Minimierung der quadrierten Residuen plus Penalisierung. Hierbei messen die Residuen die Güte des Regressionspolynoms an denselben Daten mit denen p_1 bis p_4 konstruiert wurden.

Im Gegensatz zur Statistik, so meine These, wird im maschinellen Lernen die Güte eines Modells im Sinne seiner Vorhersage-Leistungsfähigkeit über eine out-of-sample Metrik beurteilt. Out-of-sample bedeutet, dass die Modellgüte nicht auf der Basis derselben Datenmenge evaluiert wird, mit der das Modell gebildet/trainiert worden ist. Im maschinellen Lernen wird diese Güte (leider, siehe Fußnote 13) die Generalisierungsfähigkeit eines Modells genannt. Hierfür wird die gegebene Datenmenge $\mathcal{D}$ in zwei Teilmengen $\mathcal{D} = S \cup T$ unterteilt. Mit (ausschließlich) den Trainingsdaten S wird die eine Hypothese h approximiert (im Falle eines neuronalen Netzes werden die Gewichte approximiert), vergleichbar der Parameter-Approximation in der polynomialen Regression in der Statistik von vorhin. Auf der zweiten Teilmenge, den so genannten Testdaten T, wird die Vorhersageleistungsfähigkeit (z.B. Klassifikationsleistung) analysiert. Die Differenz des empirischen Fehlers $L_S(h)$ (vgl. Abschnitt 3) auf den Trainings- und auf den Testdaten wird in der Literatur (problematischerweise [17]) als *generalization error* oder *generalization gap* bezeichnet:

> The central challenge in machine learning is that we must perform well on *new, previously unseen* inputs - not just those on which our model was trained. The ability to perform well on previously unobserved inputs is called generalization. [...]
>
> We typically estimate the generalization error of a machine learning model by measuring its performance on a test set of examples that were collected separately from the training set. [...]
>
> The factors determining how well a machine learning algorithm will perform are its ability to:
>
> 1. Make the training error small.
>
> 2. Make the gap between training and test error small.
>
> (Goodfellow et al., 2016, 111)

[17] Ich halte es (wie oben geschrieben) für problematisch, die Vorhersage-Leistungsfähigkeit eines ML-Modells mit seiner Generalisierungsfähigkeit zu identifizieren. Denn das Verhältnis des empirischen Fehlers $L_S(h)$ auf den Trainingsdaten und auf den Testdaten gibt (nur) in einem eingeschränkten Sinne Aufschluss über die Generalisierungsfähigkeit eines ML-Modells. Nur eingeschränkt, denn streng genommen kann auf der Basis der Trainings- und Testdaten nur etwas über die Güte des empirischen Risikominimierers $\arg\min_{h \in \mathcal{H}} L_S(h)$ (vgl. Abschnitt 3) ausgesagt werden. Über die tatsächliche Generalisierungsfähigkeit, d.h. das Verhältnis des empirischen Risikos $L_S(h)$ zum erwarteten Risiko $L_{\mathcal{D}}(h)$ wird (ohne weitere induktive Annahmen an z.B. die Hypothesenklasse $\mathcal{H}$) so aber nichts ausgesagt.

Bei der Wahl eines Modells müssen - in der Statistik wie im maschinellen Lernen - zwei entgegengesetzt wirkende Probleme ausbalanciert werden, Unter- und Überanpassung (Under- und Overfitting): Eine zu starke Vereinfachung des Modells führt dazu, dass Haupteffekte nicht mehr ausreichend erklärt werden können. Dieses sogenannte *Underfitting* führt zu einer systematischen Verzerrung, also einem hohen Bias (das ist die mittlere Abweichung des Schätzers vom wahren Wert, vgl. Bias-Varianz-Zerlegung). Ist die Modellkomplexität hoch, dann können die gegebenen Daten sehr genau dargestellt werden. Viele Modellparameter führen aber zu starken Schwankungen, sodass die Vorhersage-Leistungsfähigkeit für neue Beobachtungen/Daten nicht mehr gewährleistet ist. Man spricht hier von *Overfitting*.

In der Terminologie des maschinellen Lernens wird dieses Ausbalancieren so beschrieben:

> Underfitting occurs when the model is not able to obtain a sufficiently low error value on the training set. Overfitting occurs when the gap between the training error and test error is too large. (Ebd.)

Das Problem von Overfitting, d.h. die Überanpassung an das Modell bis zur Interpolation der Daten ist insbesondere bei einer sehr großen Zahl an Trainingdaten, wie sie typischerweise im maschinellen Lernen vorliegen, charakteristisch. Für das AIC in der Statistik führt eine Minimierung der Residuen allein zu einer systematischen Unterschätzung des stochastischen Fehlers und damit zu auch Overfitting. Durch den Strafterm wird dieses Ungleichgewicht korrigiert. Allerdings findet die Güte-Beurteilung eines Modells und damit der Trade-off zwischen Datenapassung und (zu hoher) Modellkomplexität immer noch auf Basis eines in-sample-Kriteriums statt. Eine Trennung in Trainings- und Testdaten wird für gewöhnlich in der statistischen Praxis zur Beurteilung der Anpassungsgüte eines statistischen Modells nicht vorgenommen. Das Problem der Überanpassung scheint damit erst im maschinellen Lernen so richtig relevant zu werden und damit die Aufspaltung in Trainings- und Testdaten erst zu rechtfertigen. Der wichtige Unterschied zwischen Statistik und maschinellem Lernen ist derjenige zwischen einem in-sample bzw. einem out-of-sample Gütekriterium für die Modellwahl.

5.5 Unterschiedlicher Modellbegriff

Im vorigen Abschnitt habe ich für eine Unterscheidung zwischen traditioneller Statistik und maschinellem Lernen hinsichtlich des Gütekriteriums bei der Modellwahl argumentiert. Auf Ebene der Begriffe lässt sich auch ein Unterschied hervorkehren. Ich möchte in diesem Abschnitt deshalb dafür argumentieren, dass sich zwischen (zumindest der parametrischen) Statistik und maschinellem Lernen ein Aspekt des Modellbegriffs verändert hat: ML-Modelle sind nicht mehr in der Weise repräsentativ wie es Modelle in der Statistik sind.[18] Wenn man davon ausgeht, dass sich sowohl Modelle der traditionellen Statistik wie des maschinellen Lernens auf empirische Phänomene beziehen, ist zu erläutern, wie sich das 'auf die Welt beziehen' in beiden Fällen voneinander unterscheidet.

Für parametrische Verfahren[19] in der Statistik werden Strukturannahmen an das statistische Modell vorgegeben, die sich - folgt man Leo Breiman - (vereinfachend und idealisierend) auf die Natur als einen Mechanismus in einer Box beziehen, der aus Variablen eine Zielgröße generiert. Das direkte Modellieren dieses Mechanismus wird von Breiman als die Kultur der Datenmodellierung bezeichnet und mit der traditionellen Statistik assoziiert. In dieser Modellierungskultur wird für den datengenerierenden Prozess ein stochastisches Modell angenommen, dessen Parameter mit Methoden der Statistik geschätzt werden können. Ein Modell repräsentiert ein Phänomen mit Bezug auf die zum jeweiligen Zeitpunkt vorliegenden Daten und Informationen, die sich auf den datengenerierenden Prozess beziehen. Der datengenerierende Prozess wird am besten durch die explizite Wahl einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung (der zugrundeliegenden Daten) repräsentiert. Folglich geht bei der Bildung eines statistischen Modells die induktive Annahme ein, dass es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die eine hinreichend gute Approximation an die durch den oben beschriebenen Mechanismus generierten Daten darstellt.

Im Fall von ML bzw. in der algorithmischen Datenmodellierungskultur verschwindet diese Form der Repräsentation fast vollständig, weil man hier den tatsächlichen Mechanismus, Breiman zufolge, als unbekannt ansieht. Man versucht folglich nicht den datengenerierenden Mechanismus zu finden. Und das hat Auswirkungen auf die Modellannahme in der SLT. Für das ML-Modell geht dann nämlich eine Annahme in Bezug auf die Hypothesen-Klasse $\mathcal{H}$ ein: „Es gibt ein $f \in \mathcal{H}$ so, dass der Klassifikationsfehler auf einer unbekannten Verteilung klein genug ist und das ERM-Prinzip diesen Fehler gut genug approximiert.“ (vgl. Seite 10).

Zusätzlich zu oder unabhängig von Breimans Unterscheidung kann also ein Unterschied im Modellbegriff auf der Ebene der Theorie der klassischen Statistik und der statistischen Lerntheorie (als Teilgebiet der Theorie des maschinellen Lernens)

[18] Eine ähnliche These haben auch D. M. Bailer-Jones und C. A. L. Bailer-Jones, 2002) und (Boge, 2022).

[19] Im Gegensatz zu parametrischen Verfahren, bei denen die Struktur der statistischen Modelle im Vorfeld festgelegt ist, wird in der Statistik auch regelmäßig nicht-parametrische Methoden (z.B. Bootstrap-Estimators, Gaussian process regression, etc.) verwendet, in denen es keine parametrische Beschreibung des Phänomens gibt.

gezogen werden: In der Statistik macht man eine starke Modellannahme über die Wahrscheinlichkeitsverteilung, im maschinellen Lernen über die Hypothesen-Klasse - folglich unterschiedliche Modellbegriffe.

6 Probleme mit dem Kuhn'schen Ansatz

In diesem Abschnitt möchte ich zwei Bedenken äußern, ob der Wandel zwischen der Theorie traditioneller Statistik und der Theorie maschinellen Lernens als ein Kuhnscher Paradigmen-Konflikt betrachtet werden kann.Der erste ist methodischer, der zweite inhaltlicher Natur.

Darüber hinaus wurde bisher nicht die engere, weil spezifischere, Fragestellung verfolgt, Ich beginne mit dem methodischen Vorbehalt. Kuhn liefert eine wissenschaftshistorische Rahmen-Theorie für die Geschichte der Naturwissenschaften, die Kondensate längerer Zeitspannen sind. Die Anwendung auf die beiden Disziplinen Statistik und maschinelles Lernen fällt schwer, weil es doch hier gar keinen Wechsel oder Übergang gibt. Heutzutage werden beide Felder nebeneinander beforscht. Daher scheint meine Fragestellung weniger einen wissenschaftshistorischen als vielmehr einen systematischen Charakter zu haben. Und selbst wenn es um die Analyse historischer Entwicklungslinien gehen würde, stellt sich die (allgemeinere) Frage, was angemessene Zeitrahmen sind, um Paradigmenwechsel in der Wissenschaftgeschichte detektieren zu wollen. Dies ist insbesondere deshalb wichtig, weil er eng mit dem Kuhun'schen Revolutionsbegriff in Verbindung steht: Wissenschaftliche Revolutionen verlaufen wesentlich gradueller und eher schrittweise ab, als es Kuhns missverständliche Metapher des Gestaltwechsels nahelegt. Kuhn selbst hatte diese Einsicht auch und hat sich seit den 1980er Jahren von dieser Metapher distanziert.[20] Ganz in diesem Sinne bemerkt auch David Corfield bei seinem Versuch, die Kuhnschen Konzepte auf die moderne Mathematik anwendbar zu machen:

> Finding that one needs to select a lengthy time-frame to capture in mathematics the kind of radical revision demanded in pursuing a Kuhnian approach, I will then consider some varieties of more localised casestudy one might look to write. It seems that in mathematics there is more space to research, fewer constraints operating to bring different researchers into direct rivalry. One effect of this is to make our choice of case study more difficult. (Corfield, 2023, 4)

[20]Vgl. (Kuhn, 2007b, 103) sowie (Kuhn, 2007a, 241 f.).

In Reaktion auf Corfields Bedenken am Ende des obigen Zitates, muss die Frage beantwortet werden, was legitime Zeiträume sind, um sie als wissenschaftsgeschichtlich relevante Prozesse für Kuhn zu begreifen. Diesen Aspekt gilt es auch zu bedenken, wenn Gregor Nickel vorschlägt, das Kriterium für Kandidaten von Revolutionen in der Mathematik an einem „längeren Streit rivalisierender Schulen“ (Nickel, 2023, 57) festzumachen. Statt zu fragen, ob es wissenschaftliche Revolutionen in der Mathematik gebe, hält es Nickel für wesentlich fruchtbarer zu fragen, „inwiefern sich die Dynamik der Mathematik(geschichte) mit dem Konzept revolutionärer Phasen besser verstehen lässt.“ (ebd.) Für den Wandel auf der Ebene der Theorie von Statistik und der Theorie von ML könnte eine vorläufige (enttäuschende) Antwort zunächst lauten, dass es zum gegenwärtigen Zeitpunkt jedenfalls noch zu früh ist, legitime Zeiträume oder Streit unterschiedlicher Schulen für revolutionäre Phasen im Sinne Kuhns festzustellen.

Mein inhaltlicher Vorbehalt betrifft die Frage, ob die wissenschaftsgeschichtliche Rahmen-Theorie, die Kuhn für die Geschichte der Naturwissenschaften entworfen hatte, überhaupt auf die beiden Felder Statistik und maschinelles Lernen anwendbar ist. Weil es sich hier um mathematik-nahe Disziplinen handelt, sehe ich mich berechtigt, diese Frage analog zum Problem zu diskutieren, wie Kuhn für die Mathematikgeschichte fruchtbar gemacht werden kann.[21] Gegenargumente, dass es in der Mathematik keine wissenschaftliche Revolutionen im Sinne Kuhns gebe, anerkenne ich ipso facto auch als einschlägige Gegenargumente gegen die These an, dass der Wandel zwischen traditioneller Statistik und maschinellem Lernen nicht als eine Kuhnsche Revolution und damit nicht als ein Paradigmenwechsel betrachtet werden kann. In dieser Hinsicht schließe ich mich insbesondere der Argumentation Ralf Krömers an, dass die Konkurrenz, Ablösung und die Akzeptanz von Begriffen in der Naturwissenschaft und Mathematik unterschiedlich funktioniert. Er gewinnt diese Einsicht durch das Studium der Geschichte von Akzeptanzprozessen (neuer) mathematischer Werkzeuge, exemplarisch dargestellt am Beispiel des Vektorraumbegiffs.[22] Krömer betont gleich zu Beginn seiner Arbeit, dass „der hier vorgestellte Erklärungsversuch vermutlich auch in anderen Kontexten eingesetzt werden“ (Krömer, 2000, 149) könne. Ich nehme ihn beim Wort und betrachte seinen Einwand gegen Kuhn als ebenso gültig für meine Fragestellung.

Krömer gesteht Kuhns Grundeinsichten durchaus seine Berechtigung zu - und zwar überall da, wo Paradigmen als Begriffs-, Methoden,- Problemkataloge eine

[21] Der Sammelband, herausgegeben von Donald Gillies, Revolutions in Mathematics präsentiert ein heterogenes Spektrum, ob und wie das Kuhns Schlussfolgerungen für die Mathematik(geschichte) angewendet werden können, vgl. (Gillies, 1995).

[22] Krömer sucht nach einer Erklärung, warum der Vektorraumbegriff, trotz seiner Fruchtbarkeit, lange nicht akzeptiert worden ist, vgl. (Krömer, 2000).

scientific community zur Perfektionierung eines Denkstils (Fleck, 1980) verhelfen, miteinander in Konkurrenz treten, sich gegen Widerstand immunisieren und zeigen, „welche wichtige Rolle die Phase des Erlernens dieser Kataloge führ ihre Akzeptanz spielt." (ebd.) Jedoch - und dies ist der gewichtige Einwand von Krömer gegen die Anwendbarkeit von Kuhn auf die Mathematik - wird mit dem Mechanismus der wissenschaftlichen Revolution und dem Paradigmenwechsel nicht über die Legitimität von Methoden und Begriffen entschieden, sondern über deren Relevanz und Fruchtbarkeit. Der Begriff der Legitimität stammt direkt von Kuhn, wenn er schreibt, dass

> [...] these and many other works served for a time implicitly to define the *legitimate problems and methods* [meine Hervorhebung] of a research field for succeeding generations of practitioners. (Kuhn, 1996, 10)

Zur Erläuterung von Krömers These möchte ich eine längere Passage zitieren, in denen der Kern seiner Argumentation enthalten ist:

> Der wichtigste Unterschied mathematischer Theorien zu naturwissenschaftlichen und zugleich der ernsthafteste Einwand gegen den Einsatz von Kuhns Begriffen in der Wissenschaftstheorie der Mathematik besteht jedoch darin, daß obsolete mathematische Konzepte keinesfalls irgendwie falsch oder ungültig, ja noch nicht einmal inkommensurabel zu neuen Konzepten sind. Der Wertverlust, obsolet geworden zu sein, tritt an die Stelle des Verlustes der Gültigkeit oder der Kommensurabilität bei naturwissenschaftlichen Theorien [...]. Eine systematische „Vergleichbarkeit" älterer mathematischer Konzepte mit neueren bleibt immer bestehen und ist sogar beabsichtigt; es geht mir hier vielmehr darum, daß es als nicht mehr erforderlich angesehen wird, die alten Konzepte zu *kennen*.
>
> In der Mathematik werden also keine Beschreibungsmodelle gewechselt, die womöglich einander widersprechen, also nicht gleichzeitig nebeneinander bestehen können, inkommensurabel sind; gewechselt werden Ausgangspunkte. Alte Ergebnisse werden nachmals nicht als falsch angesehen, sondern als uninteressant, da zwischenzeitlich die Fragen anders gestellt wurden. (Krömer, 2000, 161)

Ein Beispiel wie sich Krömers Einwand auf meine eigene Argumentation übertragen lässt, ist die Frage, wie in der Statistik oder im maschinellen Lernen über die Gütekriterien bei der Modellwahl entschieden wird. Die Tatsache, dass für die

Modellwahl im ML nicht mehr ein in-sample, sondern ausschließlich ein out-of-sample Kriterium verlangt wird, bedeutet keinen Legitimitätsverlust des ersteren. Stattdessen wird die Bewertung des Trade-off zwischen Anpassungsgüte und Modellkomplexität durch in-sample Kriterien so bewertet, als sei sie obsolet geworden. Für statistische Modelle ist das Problem der Überanpassung (Overfitting) weniger ein Problem als für ML-Modelle, bei denen erst - ermöglicht durch extrem leistungsfähige Computer - sehr große Datensätze verwendet werden. Folglich wird im maschinellen Lernen die Aufteilung in Trainings- und Testdatensatz viel relevanter und macht folglich in der Konsequenz das out-of-sample Gütekriterium für die Modellwahl zu einem fruchtbaren - und damit zu einem interessanten Kandidaten für eine methodische Veränderung.

7 Schluss

Die Theorie traditioneller Statistik und die Theorie maschinellen Lernens befasst sich mit statistischer Inferenz, d.h. der Schätzung von unbekannten Größen aus unvollständigen Daten/Informationen. Die Fragestellung in diesem Aufsatz lautete, ob der Wandel von der Statistik hin zum maschinellen Lernen - der von Breiman als ein Unterschied zwischen unterschiedlichen Modellierungskulturen (Kultur der Datenmodellierung vs. Kultur der algorithmischen Modellierung, vgl. Einleitung) beschrieben wurde - als ein Kuhnscher Paradigmen-Konflikt aufgefasst werden kann. Sie wurde eher negativ beantwortet. In diesem Sinne möchte ich abschließend Ian Hackings „Styles of Reasoning"-Projekt (vgl. (Hacking, 1992), (Hacking, 1994), (Hacking, 2012)) als eine Alternative andeuten, den Wandel zwischen Statistik und maschinellem Lernen in der Praxis wie auch auf der begrifflichen Ebene zu beschreiben (Dies ist Gegenstand eines noch unveröffentlichten Artikels).

Der Vorteil von Hackings Styles of Reasoning gegenüber Kuhns Paradigmen liegt darin, dass sich erstere nicht ablösen müssen und damit überlappen können und dass sie, im Unterschied zu einem Paradigma, nicht durch eine Theorie charakterisiert sind - etwas das insbesondere für tiefe neuronale Netze (als ein wichtiger Ansatz im ML), trotz ihres empirischen Erfolgs, (noch) nicht vorliegt.

Hacking selbst spricht von sieben styles: dem mathematischen, dem experimentellen, dem hypothetisch modellierenden, dem taxonomischen, dem probabilistischen bzw. statistischen, dem historisch-genetischen und demjenigen der Laborarbeit. Styles of Reasoning werden laut Hacking dadurch voneinander abgegrenzt, dass sie eine neue Art von Entität (Hacking, 1992, 189) einführen (z.B. die Population, charakterisiert durch einen Erwartungswert und eine Standardabweichung), neue

Form von Erklärungen (z.B. erklärt in der Regressionsanalyse die Normalverteilungsannahme die tatsächliche Verteilung der Residuen um den Erwartungswert einer Population), neue gesetzesartige Sätze (z.B. probabilistische Gesetze in der Epidemiologie o.Ä.) und neue Kriterien, um Wahrheit von Sätzen zu bestimmen („new ways of being a candidate for truth or falsehood“(Hacking, 1994, 40), z.B. über die Anpassungsgüte/’goodness of fit’ in der Statistik).

Obwohl der statistische Style of Reasoning[23] demjenigen von ML sehr ähnlich ist, lautet meine These, dass ML einen post-statistischen ML-Style of Reasoning im Sinne Hackings charakterisiert, indem ich auf zwei der genannten Abgrenzungskriterien - erstens Einführung eines neuen Typ von Entität und zweitens im Sinne eines „new way of being a candidate for truth or falsehood“) - Bezug nehme, um einen Style of Reasoning zu individuieren.

Für Hacking ist Statistik eine „Technology of objectivity“ (Hacking, 1992, 153). Der belgische Statistiker Adolphe Quetelet „objectified the mean of a population“ (ebd., 142) im 19. Jahrhundert, indem der Erwartungswert zu einer objektiven Eigenschaft einer Population wird, vergleichbar dem Ort eines Planeten zu einer bestimmten Zeit im Raum. Ich argumentiere erstens, dass mit Benchmark-Datensätzen (z.B. ImageNet, MNIST) eine neue Art von Entität vorliegt, die zu einer neuen Objektivierung von ML-Ergebnissen führt - oder zumindest so behandelt wird. Daten werden dabei oft als „the raw material produced by abstracting the world into categories, measures and other representational forms [...]” (Kitchin, 2014, 2) bezeichnet, obwohl diese vermeintliche Unveränderlichkeit und Objektivität Anlass zu Kritik gibt. Benchmark-Datensätze sind außerdem zu den wichtigsten Objekten für den Vergleich zwischen ML-Methoden geworden (die Vergleiche basieren dann auf Evaluationsmetriken wie Genauigkeit, Erklärbar- bzw. Interpretierbarkeit oder Performanz). Ich behaupte zweitens, dass die Bewertung der Vorhersage-Genauigkeit und damit die (vermeintliche) Generalisierungsfähigkeit (vgl. Fußnote 17) auf Benchmark-Datensätzen[24] als ein „new way of being a candidate for truth or falsehood“(Hacking, 1994, 40) in Hackings Style of Reasoning-Projekt betrachtet werden kann.

Damit gibt der Style of Reasoning von ML die Gelegenheit, die Zuverlässigkeit und erkenntnistheoretischen Limitationen der Schlussmethode im Denkstil von

[23] Der statistische Style of Reasoning wurde folgendermaßen eingeführt: „The recognition of a subject-matter of statistical regularities and of probabilities defined the method of statistical analysis and the calculation of probabilities as another distinctive type of scientific exploration of a distinctive complexity discoverable in nature: the unorganised complexity of populations of entities“

[24] Genauigkeit auf Benchmark-Datensätzen wird als ein Fortschrittsindikator von ML-Algorithmen behandelt, vgl. https://paperswithcode.com/datasets.

ML zu diskutieren, darunter erstens Daten als Ausgangspunkt im ML[25] und als (unbestreitbare) Tatsache[26]. Und zweitens die (größtenteils stillschweigend vorausgesetzte aber fragwürdige) Zufälligkeit der Daten über iid.-verteilte Zufallsvariablen[27] zusammen mit der Annahme statistischer Stabilität einer Population (vgl. die „hypothesis of (perfect) statistical stability“ in (Gorban, 2017)). Und drittens, damit zusammenhängend, die Illusion von Generalisierung[28] in ML (vgl. (Corfield, 2008), (Zhang et al., 2016), (Spelda, 2020), (Belkin, 2021).).

Literatur

Bailer-Jones, Daniela M. und Coryn A. L. Bailer-Jones (2002). „Modeling Data: Analogies in Neural Networks, Simulated Annealing and Genetic Algorithms“. In: *Model-Based Reasoning*. Hrsg. von Lorenzo Magnani und Nancy J. Nersessian. New York, NY: Springer US, 2002, S. 147–165. ISBN: 978-1-4613-5154-2. DOI: 10.1007/978-1-4615-0605-8{\textunderscore}9.

Ball, Philip (2023). „Is AI leading to a reproducibility crisis in science?“ In: *Nature* 624.7990, S. 22–25. DOI: 10.1038/d41586-023-03817-6.

Begley, C. Glenn und Lee M. Ellis (2012). „Drug development: Raise standards for preclinical cancer research“. In: *Nature* 483.7391, S. 531–533. DOI: 10.1038/483531a.

Belkin, Mikhail (2021). *Fit without fear: remarkable mathematical phenomena of deep learning through the prism of interpolation*. 2021. URL: http://arxiv.org/pdf/2105.14368v1.

Berner, Julius et al. (2022). „The Modern Mathematics of Deep Learning“. In: S. 1–111. DOI: 10.1017/9781009025096.002. URL: http://arxiv.org/pdf/2105.04026v2.

Bird, Alexander (2022). *Thomas Kuhn*. Hrsg. von Edward N. Zalta. 2022. URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/thomas-kuhn/.

Boge, Florian J. (2022). „Two Dimensions of Opacity and the Deep Learning Predicament“. In: *Minds and Machines* 32.1, S. 43–75. ISSN: 0924-6495. DOI: 10.1007/s11023-021-09569-4.

[25] Im Gegensatz dazu ist für Fleck in *Die Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache* die „wissenschaftliche Tatsache“ gerade nicht der Ausgangspunkt, sondern das Ergebnis eines gerichteten Wahrnehmens, die sich in einem Denkkollektiv ausbildet.

[26] Z.B. diskutiert (Leonelli, 2015) die „Mutability of Scientific Data“ und (Crawford und Paglen, 2021) beleuchtet den Einfluss epistemischer und nicht-epistemischer Werte in Benchmark-Datensätzen.

[27] „The i.i.d. case has also been central to statistics ever since Jacob Bernoulli proved the law of large numbers at the end of the 17th century, but its inadequacy was always obvious.“ (Glenn Shafer, 2007, 168).

[28] Dieser Begriff stammt von Nico Formánek, vgl. https://workshopping.hlrs.de/2024/01/05/the-illusion-of-generalization/.

Breiman, Leo (2001). „Statistical Modeling: The Two Cultures (with comments and a rejoinder by the author)“. In: *Statistical Science* 16.3. ISSN: 0883-4237. DOI: 10.1214/ss/1009213726.

Bzdok, Danilo, Naomi Altman und Martin Krzywinski (2018). „Statistics versus machine learning“. In: *Nature methods* 15.4, S. 233–234. DOI: 10.1038/nmeth.4642.

Committee on the Analysis of Massive Data (2013). *Frontiers in Massive Data Analysis*. Washington, DC: The National Academies Press, 2013.

Corfield, David (2008). „Projection and Projectability“. In: *Dataset Shift in Machine Learning*. Hrsg. von Joaquin Quiñonero-Candela et al. The MIT Press, 2008, S. 29–38. ISBN: 9780262170055. DOI: 10.7551/mitpress/9780262170055.003.0002.

– (2023). *Thomas Kuhn, Modern Mathematics and the Dynamics of Reason*. 2023. URL: https://ncatlab.org/davidcorfield/show/HomePage.

Crawford, Kate und Trevor Paglen (2021). „Excavating AI: the politics of images in machine learning training sets“. In: *AI & SOCIETY*. ISSN: 0951-5666. DOI: 10.1007/s00146-021-01162-8.

Cristianini, Nello (2014). „On the current paradigm in artificial intelligence“. In: *AI Communications* 27.1, S. 37–43. ISSN: 09217126. DOI: 10.3233/AIC-130582.

– (2023). *The Shortcut*. Boca Raton: CRC Press, 2023. ISBN: 9781003335818. DOI: 10.1201/9781003335818.

Dotan, Ravit und Smitha Milli (2019). *Value-laden Disciplinary Shifts in Machine Learning*. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1912.01172.

Efron, Bradley (2020). „Prediction, Estimation, and Attribution“. In: *International Statistical Review* 88.S1. ISSN: 0306-7734. DOI: 10.1111/insr.12409.

Efron, Bradley und Trevor Hastie (2016). *Computer age statistical inference: Algorithms, evidence, and data science*. Bd. 5. Institute of Mathematical Statistics monographs. Cambridge, United Kingdom u. a.: Cambridge University Press, 2016. ISBN: 1107149894.

Efron, Bradley und R. J. Tibshirani (1994). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall/CRC, 1994. ISBN: 9780429246593. DOI: 10.1201/9780429246593.

Finlayson, Samuel G., Andrew L. Beam und Maarten van Smeden (2023). „Machine Learning and Statistics in Clinical Research Articles-Moving Past the False Dichotomy“. In: *JAMA pediatrics* 177.5, S. 448–450. DOI: 10.1001/jamapediatrics.2023.0034.

Fisher, R. A. (1922). „On the mathematical foundations of theoretical statistics“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 222.594-604, S. 309–368. ISSN: 0264-3952. DOI: 10.1098/rsta.1922.0009.

Fleck, Ludwik, Hrsg. (1980). *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*. 1. Aufl.

Bd. 312. Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft Wissenschaftsforschung. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1980. ISBN: 978-3-518-27912-0.

Gillies, Donald A., Hrsg. (1995). *Revolutions in mathematics*. 1. issued in paperback. Oxford science publications. Oxford: Clarendon Press, 1995. ISBN: 9780198514862.

Glenn Shafer (2007). „Discussion on Hedging Predictions in Machine Learning by A. Gammerman and V. Vovk". In: *The Computer Journal* 50.2, S. 164–172. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/bxl066.

Goodfellow, Ian et al. (2016). *Deep learning*. Adaptive computation and machine learning. Cambridge, Massachusetts und London, England: The MIT Press, 2016. ISBN: 0262035618.

Gorban, Igor I. (2017). *The Statistical Stability Phenomenon*. Cham: Springer International Publishing, 2017. ISBN: 978-3-319-43584-8. DOI: 10.1007/978-3-319-43585-5.

Hacking, Ian (1992). „Statistical Language, Statistical Truth and Statistical Reason: The Self-Authentication of a Style of Scientific Reasoning". In: *The social dimensions of science*. Hrsg. von Ernan McMullin. Studies in science and the humanities from the Reilly Center for Science, Technology, and Values. Notre Dame, Ind.: Univ. of Notre Dame Press, 1992, S. 130–157. ISBN: 0268017417.

– (1994). „Styles of Scientific Thinking or Reasoning: A New Analytical Tool for Historians and Philosophers of the Sciences". In: *Trends in the Historiography of Science*. Hrsg. von Robert S. Cohen et al. Bd. 151. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht: Springer Netherlands, 1994, S. 31–48. ISBN: 978-90-481-4264-4. DOI: 10.1007/978-94-017-3596-4{\textunderscore}3.

– (2012). „'Language, Truth and Reason' 30years later". In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 43.4, S. 599–609. ISSN: 00393681. DOI: 10.1016/j.shpsa.2012.07.002.

Hey, Anthony J. G., Hrsg. (2009). *The fourth paradigm: Data intensive scientific discovery*. 2. printing, version 1.1. Redmond, Wash.: Microsoft Research, 2009. ISBN: 0982544200. URL: http://research.microsoft.com/en-us/collaboration/fourthparadigm/.

Jost, Jürgen (2017). „Object Oriented Models vs. Data Analysis – Is This the Right Alternative?" In: *Mathematics as a Tool*. Hrsg. von Johannes Lenhard und Martin Carrier. Bd. 327. Boston Studies in the Philosophy and History of Science. Cham: Springer International Publishing, 2017, S. 253–286. ISBN: 978-3-319-54468-7. DOI: 10.1007/978-3-319-54469-4{\textunderscore}14.

Kelter, Riko (2021). *The evolution of statistical hypothesis testing*. 2021. DOI: 10.25819/ubsi/10038.

Kitchin, Rob (2014). „Big Data, new epistemologies and paradigm shifts“. In: *Big Data & Society* 1.1, S. 205395171452848. ISSN: 2053-9517. DOI: 10.1177/2053951714528481.

Krömer, Ralf (2000). „Akzeptanz neuer mathematischer Konzepte am Beispiel des Vektorraumbegriffs“. In: *Philosophia Scientiae* 4.2, S. 147–172.

Kuhn, Thomas (1996). *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press, 1996. ISBN: 9780226458083. DOI: 10.7208/chicago/9780226458106.001.0001.

– (2007a). „Afterwords“. In: *The road since structure*. Hrsg. von Thomas S. Kuhn. Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press, 2007, S. 224–252. ISBN: 0226457990.

– (2007b). „The Road since „Structure““. In: *The road since structure*. Hrsg. von Thomas S. Kuhn. Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press, 2007, S. 90–104. ISBN: 0226457990.

Kvasz, Ladislav (1999). „On Classification of Scientific Revolutions“. In: *Journal for General Philosophy of Science* 30.2, S. 201–232. ISSN: 09254560. DOI: 10.1023/A:1008317930920.

Lenhard, Johannes (2022). „A transformation of Bayesian statistics:Computation, prediction, and rationality“. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 92, S. 144–151. ISSN: 00393681. DOI: 10.1016/j.shpsa.2022.01.017.

Leonelli, Sabina (2015). „What Counts as Scientific Data? A Relational Framework“. In: *Philosophy of science* 82.5, S. 810–821. ISSN: 0031-8248. DOI: 10.1086/684083.

Masterman, Margaret (2014). „The Nature of a Paradigm“. In: *Criticism and the Growth of Knowledge*. Hrsg. von Imre Lakatos und Alan Musgrave. Cambridge University Press, 2014, S. 59–90. ISBN: 9780521078269. DOI: 10.1017/CBO9781139171434.008.

Murphy, Kevin P. (2012). *Machine learning: A probabilistic perspective*. Adaptive computation and machine learning series. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2012. ISBN: 978-0-262-01802-9. URL: https://ebookcentral.proquest.com/lib/subhh/detail.action?docID=3339490.

Nickel, Gregor (2023). „Revolutionen in der Mathematikgeschichte?“ In: *Fortschritt*. Hrsg. von Karl Heinz Hoffmann und Nikolaus Korber. Verlag Karl Alber, 2023, S. 41–104. ISBN: 9783495998847. DOI: 10.5771/9783495998847-41.

Nosek, Brian A. et al. (2022). „Replicability, Robustness, and Reproducibility in Psychological Science“. In: *Annual review of psychology* 73, S. 719–748. DOI: 10.1146/annurev-psych-020821-114157.

Open Science Collaboration (2015). „Estimating the reproducibility of psychological science“. In: *Science (New York, N.Y.)* 349.6251, aac4716. DOI: 10.1126/science.aac4716.

Prinz, Florian, Thomas Schlange und Khusru Asadullah (2011). „Believe it or not: how much can we rely on published data on potential drug targets?“ In: *Nature reviews. Drug discovery* 10.9, S. 712. DOI: 10.1038/nrd3439-c1.

Shalev-Shwartz, Shai und Shai Ben-David (2014). *Understanding machine learning: From theory to algorithms.* Cambridge u. a.: Cambrige University Press, 2014. ISBN: 1107057132.

Shmueli, Galit (2010). „To Explain or to Predict?“ In: *Statistical Science* 25.3. ISSN: 0883-4237. DOI: 10.1214/10-STS330.

Spelda, Petr (2020). „Machine learning, inductive reasoning, and reliability of generalisations“. In: *AI & SOCIETY* 35.1, S. 29–37. ISSN: 0951-5666. DOI: 10.1007/s00146-018-0860-6.

Trabs, Mathias et al. (2021). *Statistik und maschinelles Lernen.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2021. ISBN: 978-3-662-62937-6. DOI: 10.1007/978-3-662-62938-3.

Vapnik (2006). *Estimation of dependences based on empirical data.* 2. ed., repr. of 1982 ed. Information Science and Statistics. New York, NY: Springer, 2006. ISBN: 0-387-30865-2. URL: http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0663/2005938355-d.html.

Vapnik, Vladimir N. (2000). *The Nature of Statistical Learning Theory.* Second Edition. Information Science and Statistics. New York, NY: Springer, 2000. ISBN: 978-1-4419-3160-3. DOI: 10.1007/978-1-4757-3264-1.

Von Luxburg, Ulrike und Bernhard Schölkopf (2011). „Statistical Learning Theory: Models, Concepts, and Results“. In: *Inductive Logic.* Bd. 10. Handbook of the History of Logic. Elsevier, 2011, S. 651–706. ISBN: 9780444529367. DOI: 10.1016/B978-0-444-52936-7.50016-1.

Zhang et al. (2016). *Understanding deep learning requires rethinking generalization.* 2016. URL: http://arxiv.org/pdf/1611.03530v2.

Adressen der Autoren

Michael Herrmann
Tübinger Forum für Wissenschaftskulturen (TFW)
Doblerstr. 33
D-72074 Tübingen
michael.herrmann@tfw.uni-tuebingen.de

Henning Heske
Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Krefeld
Johansenaue 3
D-47809 Krefeld
henning.heske@zfsl-krefeld.nrw.schule

Andrea Reichenberger
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
andrea.reichenberger@uni-siegen.de

Toni Reimers
Universität Leipzig
Studienkolleg Sachsen
Lumumbastr. 4
D-04105 Leipzig
toni.reimers@uni-leipzig.de

Renate Tobies
Geschichte und Philosophie der Naturwissenschaften
Ernst-Haeckel-Haus
Berggasse 7
D-07745 Jena
renate.tobies@uni-jena.de
Homepage: http://renate.tobies.org/

Matthias Wille
Gemeinschaftsschule Großbreitenbach
Schulstraße 6
D-98701 Großbreitenbach
matthias.wille@schule.thueringen.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro
Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro
Susanne Spies: Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro
Henrike Allmendinger: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro
Martin Rathgeb: George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro
Tanja Hamann: Die „Mengenlehre" im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro
Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.
Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro
Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

Band 13 (2020), 322 S., kart., 18,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Stephan Berendonk, Rosmarie Junker & Susanne Spies, Edward Kanterian, Martin Mattheis, Gregor Nickel, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Moritz Vogel, Matthias Wille

Band 14 (2021), 216 S., kart., 18,– Euro
Mit Beiträgen von Henning Heske, Hannes Junker, Andreas Kirchartz, Oliver Passon und Tassilo von der Twer, Toni Reimers, Susanne Spies und Claus-Peter Wirth

Band 15 (2022), 252 S., kart., 22,– Euro
Alessa Waldvogel: Dualität in der Funktionalanalysis. Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

Band 16 (2022), 270 S., kart., 19,– Euro
Mit Beiträgen von Stephan Berendonk, Harald Boehme, Christian Hugo Hoffmann, Daniel Koenig, Jens Lemanski, Jasmin Özel, Felicitas Pielsticker & Ingo Witzke, Štefan Porubský, Dolf Rami, Renate Tobies

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 19,– Euro (monographische Bände ggf. abweichend)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 17 (2023)

Mit Beiträgen von

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN