

# Eine Implementierung bis „Next to Leading Order“ von $b$ -Quarks in PHOJET

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Stefan Lammers

eingereicht beim Fachbereich Physik  
der Universität Siegen  
März 2008

Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

Gutachter: Prof. Dr. Fritz W. Bopp  
Prof. Dr. Johannes Ranft

Tag der mündlichen Prüfung: 23. April 2008

Prüfer: Prof. Dr. Fritz W. Bopp  
Prof. Dr. Johannes Ranft  
Prof. Dr. Ivor Fleck

## Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Implementierung der Produktion von  $b$ -Quarks in das Simulationsprogramm PHOJET [1, 2] (bzw. in das Simulationsprogramm DPMJET III [3], mit dem PHOJET aus technischen Gründen aufgerufen wird) bis „Next to Leading Order“ nach einer Methode von S. Frixione und B.R. Webber [4, 5].

Um eine für diese Art der Implementierung typische Schwierigkeit von Eventgeneratoren, das „Double Counting“, das während der Partonen-Schauer-Phase eintritt, weitgehend lösen zu können, wurde ein gegebenes Schema adaptiert und entsprechend verändert. Der wesentliche Bestandteil daraus, der Subtraktionsterm, wurde dann für das Programm DPMJET III (PHOJET/PYTHIA) neu berechnet (Kapitel 4 und Abschnitte 5.4, 5.5 sowie ab Abschnitt 6.3).

Die Berechnungen wurden in Kapitel 7 an Hand von Vektorbosonenproduktion überprüft. Im Gegensatz zu dem Simulationsprogramm HERWIG [6] wurde gefunden, dass DPMJET III für die relevante Konfiguration mit den gewählten Schauervariablen den „Soft“- und „Kollinearen“ Bereich unter der Emission eines Partons in diesem Fall ohne weiteres „Tuning“ korrekt beschreiben kann.

Nach einer Beschreibung der Eventgenerierung werden in Kapitel 9 schließlich Transversalimpulsverteilungen von „Bottom“-Mesonen zu einer Fermilab-Konfiguration präsentiert. Da die Modelle weitgehend den Daten entsprechen, sind die Subtraktionsterme im Wesentlichen Modell-unabhängig, und der mit dem Programm MC@NLO verfügbare Subtraktionsterm für das Simulationsprogramm HERWIG kann als Kontrolle herangezogen werden. Diese Vorhersagen wurden mit den experimentellen Daten, die durch die CDF-Kollaboration bereitgestellt wurden (Run I und II), verglichen. Nach einer moderaten Anpassung der Faktorisierungs- und Renormierungsskala wird eine Übereinstimmung mit den Fermilab-Daten gefunden. Für den Abschnitt 10.1 wurden ebenfalls unter einer LHCb-Konfiguration Transversalimpulsspektren von „Bottom“-Mesonen erzeugt. Dafür wurden die frei wählbaren Renormierungs- und Faktorisierungsskalen  $\mu_R$  und  $\mu_F$  wie in Abschnitt 9.1 angesetzt. Auch diese Grafiken wurden mit beiden Subtraktionstermen erzeugt.

DPMJET III/PHOJET sind vollständige und in vielen Aspekten getestete Eventgeneratoren. Da diese Programme den Hintergrund gut beschreiben, ist es möglich, mehr technische Fragen zu untersuchen. Der Abschnitt 10.2 präsentiert daher die Fähigkeit des Programms DPMJET III, auch als „Teilchen-Rekonstruktions-Maschinerie“ arbeiten zu können. Um diese Rekonstruktionen durchführen zu können, wurde ein weiteres Programm geschrieben, das die Zerfallsprodukte bestimmter „Bottom“-Mesonen-Zerfälle analysiert und darauf testet, ob die Sekundär-Teilchen aus einem der nachgelagerten Zerfälle zu *einem*  $B$ -Meson gehören können oder nicht. Solche Analysen sind hilfreich, wenn „Mutterprodukte“ nur schwer (oder gar nicht) direkt zugänglich für experimentelle Messungen sind.

## Abstract

This work's aim is primarily the implementation of  $b$ -quarks into the event generator PHOJET [1, 2] (respectively into DPMJET III [3] containing PHOJET). Following a method of S. Frixione and B. R. Webber [4, 5] the implementation includes „next to leading order“ in a perturbative expansion on partonic level.

A typical problem of such a calculation in event generators that include initial and final state radiation is „double counting“. To overcome this error Frixione and Webber developed a scheme involving subtraction terms. In this thesis this elaborate method is adapted and implemented in DPMJET III by means of recalculation of this subtraction term to match DPMJET III needs (chapter 4 and sections 5.4, 5.5 as well as the section 6.3).

The correct outcome of this matching is shown in chapter 7 by means of production of vector bosons. In contrast to the event generator HERWIG [6] it is found, that DPMJET III (PHOJET/PYTHIA) is able to reproduce the correct partonic behavior in the „soft“ and „collinear“ limits, when one additional parton is emitted.

After a short description of the method of event generation this work presents, beginning with chapter 9, the results of the calculation which are then compared to available experimental data provided by the CDF collaboration (RUN I and II). A moderate adjustment of the two relevant scales  $\mu_F$  and  $\mu_R$  (factorization and renormalization scales) leads to good agreement between model prediction and the CDF data. Subsequently the predictions for the transverse spectra of bottom mesons at LHCb (section 10.1) are presented. As the adjusted factorization and renormalization scales were kept, the results can be expected to be quite reliable.

DPMJET III and PHOJET are highly checked out and complete event generators that can reliably reproduce the background part of the events. It is therefore possible to address more technical questions like the identification of B-mesons in realistic events to DPMJET III. To investigate this task in a generic way a small program was built to identify daughter particles of specific bottom decays with suitable cuts on an event.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Zusammenstellung von Hintergrundinformationen</b>	<b>11</b>
2.1	Strukturfunktionen . . . . .	11
2.2	Faktorisierungstheorem (Teil 1) . . . . .	15
2.3	Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen und die DGLAP Gleichung .	19
2.4	Faktorisierungstheorem (Teil 2), Beispiel . . . . .	27
2.5	„Running Coupling“, „Asymptotic Freedom“, „Active Flavours“ . .	32
2.6	Etwas Reggetheorie und die Unitarisierung über die Eikonalnäherung . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Einführende Bemerkungen zu der Methode von Frixione und Webber</b>	<b>52</b>
3.1	Numerische Auswertung und Eventgenerierung mit BASES und SPRING . . . . .	53
3.2	Negative Event-Gewichte . . . . .	53
3.3	$\zeta$ -Subtraktion . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Methodische Grundlagen zur Auswertung der vorliegenden Integrale</b>	<b>55</b>
4.1	„Slicing“ vs. „Subtraktion“ . . . . .	55
4.2	Modifizierte Subtraktion . . . . .	57
4.3	Konstruktion des Interfaces für das Einführungsmodell . . . . .	60
4.4	Das Interface bis zur „Ein-Photon“-Näherung für das Einführungsmodell . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Kinematische Grundlagen</b>	<b>64</b>
5.1	Eine Partonenemission aus dem Anfangszustand – „Initial State“-Emission (ISR) . . . . .	66
5.2	Eine Partonenemission aus dem Endzustand – „Final State“-Emission (FSR) . . . . .	70
5.2.1	Der kinematische Gamma-Faktor und die Reduktion der Partonenimpulse . . . . .	72
5.3	Der Partonen-Schauer (Teil 1) . . . . .	77
5.4	Die Schauer-Variablen für eine Partonenemission aus dem Anfangszustand in Abhängigkeit zweier geeigneter Invarianten . . .	79
5.4.1	Die Schauer-Variablen in Abhängigkeit der Variablen $(x, y)$ des emittierten $H$ -Partons . . . . .	81
5.5	Die Schauer-Variablen für eine Partonenemission aus dem Endzustand in Abhängigkeit zweier geeigneter Invarianten . . . . .	82
5.5.1	Die Schauer-Variablen in Abhängigkeit der Variablen $(x, y)$ des emittierten $H$ -Partons . . . . .	84
5.5.2	Die Splittingvariable und der Transversalimpuls unter PYTHIA . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Die Erweiterung der „Ein-Photon“-Näherung aus Abschnitt 4.4 auf den QCD-Schaueralgorithmus</b>	<b>89</b>
6.1	„Event Projection“ . . . . .	93

6.2	Zugrunde liegende Statistik unter Beachtung der negativen Eventgewichte . . . . .	96
6.3	Zur Konstruktion des Subtraktionsterms . . . . .	97
6.4	Fortsetzung zum Partonen-Schauer (Teil 2) . . . . .	98
6.5	Verbindung „Initial- und „Final“-Subtraktionsterme . . . . .	104
6.6	Endgültige Form des Subtraktionsterms . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Überprüfung des Subtraktionsterms konstruiert über die gewählten Partonen-Schauer-Variablen</b>	<b>116</b>
7.1	Eikonalfaktoren in der Vektorbosonproduktion . . . . .	120
<b>8</b>	<b>Eventgenerierung mit DPMJET III</b>	<b>124</b>
<b>9</b>	<b>Ergebnisse erzielt durch DPMJET III</b>	<b>132</b>
9.1	Transversalimpulsverteilung von „Bottom“-Mesonen im Vergleich mit den Fermilab-Daten . . . . .	132
<b>10</b>	<b>Voraussagen für das LHC</b>	<b>146</b>
10.1	Vorhersagen für LHCb - Transversalimpulsverteilung von „Bottom“-Mesonen . . . . .	146
10.2	Anwendung – Rekonstruktionen bei LHCb Energien . . . . .	153
<b>11</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Dirac-Algebra in N Dimensionen</b>	<b>169</b>
<b>B</b>	<b>Dimensionale Regularisierung, Wick-Rotation und die Renormierung</b>	<b>173</b>
<b>C</b>	<b>Kinematik und Phasenraumvolumen für 2- und 3-Körperprozesse</b>	<b>184</b>
<b>D</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>195</b>

# 1 Einführung

Üblicherweise können Berechnungen im Bereich der perturbativen QCD (pQCD) zur Bestimmung physikalisch relevanter Größen heutzutage bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  durchgeführt werden.

In Kombination mit einem „Monte Carlo“-Programm (MC) sowie einem Modell für eine Beschreibung, partonische Zwischenzustände in hadronische, beobachtbare Endzustände zu konvertieren (Hadronisierung), ist eine Verbesserung der Ordnung wünschenswert und auch möglich.

Methoden, exklusive hadronische Endzustände bis einschließlich „Next to Leading Order“ (NLO) vollständig beschreiben zu können, waren bis zur Entwicklung der Methode von [4, 5] kaum vorhanden und basierten überwiegend auf der „Phase Space Slicing“-Methode. Diese Methode besitzt den Nachteil, freie Parameter in die störungstheoretischen Berechnungen zur Regularisierung der Divergenzen einzuführen [7, 8, 9].

Der technische Vorgang in dieser Methode ist dabei immer gleich: Das Integrationsintervall einer Variablen, mit der ein divergentes Verhalten assoziiert ist, wird in zwei (oder mehrere) Gebiete aufgespalten, z. B. in der Form

$$0 < x < \delta_c \quad \text{und} \quad \delta_c < x < 1$$

wobei  $x$  die Integrationsvariable darstellt und etwa einen Impuls darstellen kann.  $\delta_c$  ( $\delta_c \ll 1$ ) ist der eben erwähnte Parameter.

Ein typisches Aussehen für zu regularisierende Integral-Ausdrücke sind Terme der Form (Abschnitt 4.1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} F(x)$$

in der die kritische Stelle  $x = 0$  sichtbar ist. Für  $x \rightarrow 0$  wird dieses Integral infrarot divergent. Mit der bekannten Funktion  $F(x)$  sollen keine weiteren Divergenzen verbunden sein. Die „Slicing“-Methode lässt dann unter Einführung eines hinreichend kleinen Parameters  $\delta_c$  die folgende Umformung zu

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} F(x) &\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\delta_c}^1 \frac{dx}{x} x^\epsilon F(x) + F(0) \int_0^{\delta_c} \frac{dx}{x} x^\epsilon \right) = \\ &\int_{\delta_c}^1 \frac{dx}{x} F(x) + F(0) \log(\delta_c) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} F(0) \end{aligned}$$

$x^\epsilon$  stammt aus der Prozedur der „Dimensionalen Regularisierung“ (Appendix B). Die logarithmische Abhängigkeit vom erwähnten Parameter  $\delta_c$  ist dann ein Relikt dieser „Slicing“-Methode. Betrachtet man den Ausdruck für  $\delta_c \rightarrow 0$ , so deckt man die ursprüngliche Divergenz (im Limes  $x \rightarrow 0$ ) auf.

Prinzipiell sollten sich die Beiträge aus dem Integral mit den Termen, die diesen Parameter enthalten, kürzen. Das ist allerdings für sehr kleine Werte für  $\delta_c$  u. U. numerisch schlecht auszuwerten bzw. es können sich Konvergenzprobleme ergeben. Denn aus kleinen Parametern ergeben sich große negative Absolutwerte, die sich mit entsprechend großen positiven Werten kürzen müssen. Könnte man das Integral analytisch auswerten, so würde der angesprochene Umstand keine Rolle spielen. Da es hier aber um numerische Auswertungen geht, also um eine *endliche* Intervallunterteilung der Integrationsvariable, kann das spätestens bei

der Eventgenerierung problematisch werden.

Alternativ lassen sich möglicherweise Terme  $\mathcal{O}(\delta_c)$  vernachlässigen. Aber das muss erst über ein geeignetes Intervall des Parameters überprüft werden.

Neben der „Phase Space Slicing“-Methode sind „Subtraktions“-Methoden vorteilhaft für die Behandlung infraroter Divergenzen, da sie auf die oben erwähnten Parameter verzichten können.

In einer „Subtraktions“-Methode kann beispielsweise der fragwürdige Integrand, dessen Residuum am Ort der Divergenz betrachtet wird, addiert und wieder subtrahiert werden. Der selbe Term wie in der „Slicing“-Methode hat nun folgendes Aussehen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( F(0) \int_0^1 x^\epsilon \frac{1}{x} dx + \int_0^1 x^\epsilon \frac{F(x) - F(0)}{x} dx \right)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite der Gleichung ist frei von Divergenzen, und es ist gestattet,  $\epsilon = 0$  zu setzen. Diese obige Manipulation stellt keine Approximation dar. Das wird sich in Kapitel 4 ändern, denn dort wird diese Subtraktion noch durch einen *künstlich* hinzugefügten Subtraktionsterm modifiziert werden, der auftretende Singularitäten regularisieren wird. Diese Singularitäten erscheinen bei einer noch zu spezifizierenden Separation des obigen Integrals in verschiedene kinematische Regionen (auf Subprozessebene in 2  $\rightarrow$  2- und 2  $\rightarrow$  3-Regionen). Dieser Part wird normalerweise durch Counterterme übernommen, oder/bzw. durch Graphen, die unter gleichen Bedingungen gleiche Divergenzen aufzeigen (mit verschiedenem Vorzeichen). Z. B. kann ein „Emissionsgraph“ Divergenzen im infraroten Bereich aufzeigen oder wenn das emittierte Parton kollinear emittiert wird. Eine Addition von Graphen, die zur „Born“-Ordnung berechnet wurden plus „virtuelle Graphen“ plus der „Emissionsgraphen“ machen das Gesamtergebnis endlich. Betrachtet man also unphysikalische Graphen, so entstehen Divergenzen. Und solcher Art Divergenzen treten bei der oben erwähnten (kinematischen) Separation auf. Nichtsdestotrotz wird das Gesamtergebnis durch den Subtraktionsterm wieder endlich sein.

Der erste Summand aus der obigen „Subtraktions“-Methode ist leicht zu integrieren und ergibt  $\frac{F(0)}{\epsilon}$ . Es ist der gleiche Ausdruck, wie er auch in der „Phase Space Slicing“-Methode vorkommt. In beiden Methoden werden sie sich mit hier nicht aufgeführten Beiträgen heraus kürzen, so dass dadurch keine Schwierigkeiten entstehen. Wie sich in Kapitel 4 herausstellen wird, ist die zweite Methode wegen der oben erwähnten Trennungs- und Regularisierungseigenschaft besser geeignet.

Diese Arbeit befasst sich also nun mit der Implementierung der Produktion von  $b$ -Quarks in das Programm PHOJET (bzw. in das Programm DPMJET III) bis NLO nach der Methode von S. Frixione und B.R. Webber [4, 5]<sup>1</sup>. Dazu wurde u. a. der Subtraktionsterm an den Partonen-Schauer-Algorithmus über ein gegebenes Schema (Kapitel 4) angepasst (Abschnitte 5.4, 5.5 und ab Abschnitt 6.3), um das Problem des „Double Countings“ lösen zu können. Das „Double

---

<sup>1</sup>Es ist in seiner ursprünglichen Form für das Simulationsprogramm HERWIG angepasst und in dem Programm MC@NLO realisiert, welches von der folgenden Seite bezogen werden kann: <http://www.hep.phy.cam.ac.uk/theory/webber/MCatNLO/>. Das Programm HERWIG kann von dieser Internetseite bezogen werden: <http://hepwww.rl.ac.uk/theory/seymour/herwig/>.



Counting“ führt zu Beiträgen zum Wirkungsquerschnitt, die sowohl in den analytischen Rechnungen als *auch* in der Partonen-Schauer-Phase erfasst werden. Diese Phase *dekoriert* während der Eventgenerierung die partonischen Subprozesse, indem es den äußeren Linien erlaubt wird, iterativ zu splitten. Damit ist es möglich, Multi-Partonen-Endzustände zu erzeugen. Die möglichen Verzweigungen sind

$$q \rightarrow qq, \quad g \rightarrow gg, \quad g \rightarrow q\bar{q}$$

plus Vertauschungen und Ladungskonjugationen. Beschrieben wird dieser Vorgang durch die Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen (AP)  $P_{i \rightarrow jk}(z)$  (siehe auch Abschnitt 2.3) [10, 11, 12]. Diese Funktionen können (bis „Leading Order“, LO) als Wahrscheinlichkeiten für einen Übergang  $i \rightarrow jk$  interpretiert werden.

Diese Art stellt gegenüber dem Gebrauch von Matrixelement-Rechnungen eine Näherung dar. Mit größeren Virtualitäten wird auch die Wahrscheinlichkeit größer, viele Partonen zu emittieren, wodurch die Komplexität der Matrixelemente zunimmt, die umso größer wird, je größer die Anzahl der Partonen im Endzustand ist. Nachteil dieser Methode ist, dass störungstheoretisch keine *echte* neue Ordnung eingeführt wird. Z. B. werden durch den Partonen-Schauer Emissionen weniger genau beschrieben, die unter einem großen räumlichen Winkel abgestrahlt wurden.

Ursache für das oben erwähnte „Double Counting“ ist die Art und Weise, wie per Störungstheorie Berechnungen durchgeführt werden. Ein Partonen-Schauer, wie er in DPMJET III realisiert ist, führt nachträglich eine „Leading Log“-Verbesserung (LL) der Störungsrechnung in das System ein. Diese Terme sind für die  $B$ -Mesonen-Produktion proportional zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  und sind dann von der Form  $\alpha_s^2(\alpha_s \log \frac{p_t}{\mu})^k$  (Abschnitt 2.3). Der darauf folgende Term ist  $\alpha_s^3(\alpha_s \log \frac{p_t}{\mu})^l$  und wird mit „Next to Leading Log“ bezeichnet (NLL), wobei  $k, l$  beliebig hoch sein können. In beiden „Leading Log“, LL wie auch NLL, können die Logarithmen wegen  $p_t \gg \mu$  sehr groß werden, obwohl die Kopplung klein ist. Daran kann man die Wichtigkeit der richtigen Wahl von  $\mu$  erkennen. Die Verbindung von LO-Rechnungen und den LL-Termen, produziert durch den Schauer, ist aber problemlos durchführbar.

Z. B. könnte das störungstheoretische Resultat für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  in Abhängigkeit des Transversalimpulses wie folgt aussehen

$$\frac{d\sigma}{dp_t} = A(m)\alpha_s^2 + B(m)\alpha_s^3$$

wobei in den Termen  $A, B$  alle *fehlenden* Größen wie  $p_t, \mu$  hineingezogen wurden.  $m$  stellt die Masse der  $B$ -Hadronen dar.

Durchlaufen Events, die über dieses einfache Modell bestimmt wurden einen Partonen-Schauer, dann würde bis NLL der Ausdruck von dieser Form sein (die Skala  $\mu$  könnte z. B. mit einem Transversalimpuls  $p_t$  identifiziert werden)

$$\frac{d\sigma}{dp_t} = \alpha_s^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\alpha_s \log \frac{\mu}{m})^i + \alpha_s^3 \sum_{i=0}^{\infty} b_i(\alpha_s \log \frac{\mu}{m})^i$$

$a_1$  enthält hierbei schon Terme, die proportional zu  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  sind, die sich in gewissen Regionen mit den  $b_0$  Termen überlappen können.

In bestehenden „Monte Carlo“-Modellen ist dieser Umstand verdeckt vorhanden, sobald die existierende Ordnung („Leading Order“ ist die „Born“-Ordnung) der Matrixelemente bis zu NLO erweitert wird. Es ist dann nicht einfach möglich, eine Summe *ab einem anderen Index* beginnen zu lassen. Der doppelte Beitrag zu einem Wirkungsquerschnitt wird im Mittel durch Emissionen eines „Tree Graphen“ + Partonen-Schauer erzeugt. Es ist dann möglich, kinematisch ähnliche (oder gleiche) Konfigurationen zu erzeugen, wie durch den analytischen NLO Ausdruck, und eine individuelle Aussage, wann im Schauer *dieses* Parton erzeugt wird, ist nur als Wahrscheinlichkeit ermittelbar.

Wie in [4, 5] wird dazu zunächst ein modifiziertes Subtraktionsverfahren mit Hilfe eines vereinfachten Modellsystems (welches nur „Soft-Divergenzen“ zulässt) eingeführt (Kapitel 4). Es ist ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit. Das Verfahren ist so konstruiert, den überschätzten messbaren Beitrag *im Voraus* heraus zu rechnen. Da dieses nicht ganz einfach ist, werden die Events, die dazu entsprechend generiert werden, bei Bedarf in DPMJET III herein geladen und können so gefahrlos den Partonen-Schauer passieren. Es wird unter anderem mit der Methode möglich sein, ungewichtete Events bzw. Eventst mit den Gewichten  $\pm 1$  zu erzeugen (durch das Package BASES/SPRING) [13, 14], womit eine Kollision mit der Methodik der Eventerzeugung unter DPMJET III vermieden wird (Kapitel 8).

Diese „Subtraktions“-Methode beinhaltet ein *von Hand* eingeführtes Interface  $I_{MC}$ . Dieses Interface stellt die schon erwähnte Näherung dar, mit der das Subtraktionsverfahren manipuliert wird. Wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, wird es damit möglich sein, den Einfluss des „Schauer-Algorithmus“ quantitativ auf die Berechnung einer (formalen) Observablen zu bestimmen.

Die Konstruktion beinhaltet den für den Schauer zugehörigen Sudakov-Formfaktor. Grob beschrieben ist dieser Faktor eine Art Dämpfungsfaktor (abhängig von den Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen (Abschnitt 2.3) und der Virtualität der potentiell zu splittenden „Linie“), der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass von dieser „Linie“ *keine* Partonen emittiert werden. Wird dieser Faktor bis zur Ordnung  $\alpha_s$  entwickelt, kann aus ihm die notwendige Wahrscheinlichkeit einer *einzigsten* Partonenemission bestimmt werden, was zur Lösung des „Double Counting“ Problems hilfreich sein wird (Kapitel 4, 6).

Dieses Modell wird dann für die QCD-Anwendung erweitert werden, wobei dann auch „Kollineare“- (Emission eines Partons parallel zur Strahlrichtung, z. B. bei einem „Splitting“  $g \rightarrow gg$ ) und „Soft-Kollineare“- (Energie eines emittierten Partons geht gegen Null, z. B. das des Gluons in einer  $q \rightarrow qg$ -Verzweigung) Divergenzen auftreten. Die Methode stellt sicher, dass diese Divergenzen durch den konstruierten Term (Interface) regularisiert werden.

Das Einfügen des zusätzlichen Terms, das den eigentlichen Beitrag des Partonen-Schauer zum Wirkungsquerschnitt simuliert, geschieht in einer Weise, dass das erwähnte „Double Counting“ bis NLO vermieden wird. In Abschnitt 4.4 wird dazu ein Beispiel angeführt werden (es macht hierbei nichts, dass zwei verschiedene Programme herangezogen werden, um den Partonen-Schauer zu simulieren, denn der PHOJET-Algorithmus zur Erzeugung des Partonen-Schauer aus einem Anfangszustand ist nach dem PYTHIA-Modell implementiert; PYTHIA übernimmt in dem Programm DPMJET III neben der Hadronisierung den Partonen-Schauer für einen gegebenen Endzustand).

## 2 Zusammenstellung von Hintergrundinformationen

Die folgenden Abschnitte sollen in erster Linie dazu dienen, beim Lesen dieser Arbeit möglichst wenig die angegebene Literatur zu Rate ziehen zu müssen. Sie sollen deswegen hauptsächlich entweder als Erinnerungs- oder Einstiegshilfe dienen (für zukünftige Diplomanden oder Doktoranden), da das Thema doch sehr weitläufig ist und viele Bereiche aus dem Feld der QCD berührt. Natürlich kann hier in keinem Fall vollständig auf die erwähnten Konzepte eingegangen werden. Im Zweifelsfall sollten natürlich die entsprechenden Literaturstellen herangezogen werden.

### 2.1 Strukturfunktionen

Als Grundlage für diesen Abschnitt dient die Abbildung 1. In ihr ist eine Leptonen-Protonen-Streuung dargestellt. Die kinematischen Größen sind  $k, k'$  als die Viererimpulse des ein- bzw. auslaufenden Leptons (z. B. Elektron mit der Masse  $m$ ),  $q = k - k'$  ist der Impulsübertrag, vermittelt durch ein „virtuelles Photon“ bzw.  $q^0 = E - E' = \nu$ , und  $p$  stellt den Vierervektor des Protons dar.  $X$  soll schließlich *einen* Endzustand mit der Masse  $M'$  darstellen [15].

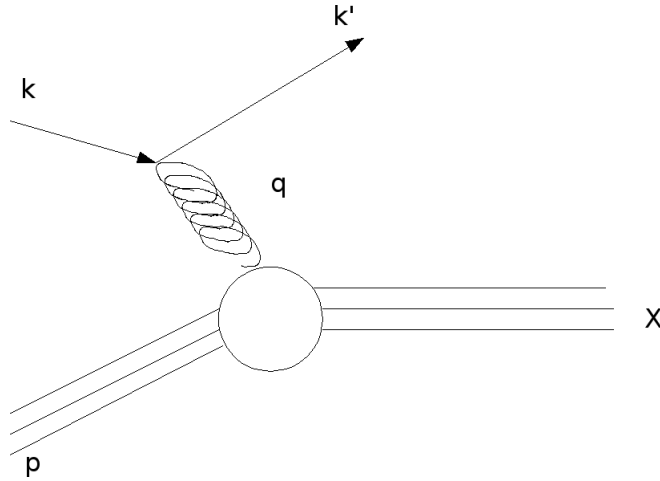


Abbildung 1: Deep Inelastic Charged Lepton-Proton Scattering

Deep Inelastic Scattering-Reaktionen (*DIS*) sind besonders geeignet, um die Strukturen *innerhalb* von Hadronen aufzulösen, da die beteiligten Leptonen nur über die elektromagnetische Wechselwirkung in Reaktion mit ihrer Umgebung treten können. Alle Strukturfunktionen bzw. die weiter unten benutzten Impuls-Dichtefunktionen  $f_j(x)$ , beschreiben also den Quark-Gluoneninhalt von Nukleonen (*Hinweis*: Der Begriff „Dichtefunktion“ soll im weiteren Verlauf stets eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellen).

Mit den obigen Abkürzungen wird

$$q^2 = (k - k')^2 = 2m^2 - 2kk' \simeq -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Alternativ gilt auch ( $P'$  ist der Vierervektor des System X)

$$q^2 = (P - P')^2 = M^2 + M'^2 - 2(P + q)P = M'^2 - M^2 - 2M\nu$$

Für elastische Streuung gilt mit der Definition  $Q^2 = -q^2$

$$Q^2 = 2M\nu$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt hängt außer vom Streuwinkel auch von der Variable  $\nu$  ab. Es gilt dann [15]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{Mott}} \left( 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

mit

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E'^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \left( 1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

Der Mott-Wirkungsquerschnitt beschreibt die Elektron-Streuung an einem Atomkern mit Spin 0. Der Wirkungsquerschnitt darüber beschreibt nun die Elektron-Streuung an einem Proton. Zieht man den im Mott-Wirkungsquerschnitt auftretenden Faktor  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  noch in seine Klammer mit hinein, so ergibt sich unter Beachtung von  $d\Omega = \frac{\pi}{E'^2} dQ^2$  der von  $Q^2$  und  $\nu$  abhängige Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $eN \rightarrow eX$

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2 E'}{Q^4 M E} \left( W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Die beiden Funktionen  $W_1, W_2$  sind eng mit zwei Formfaktoren ( $F_1, F_2$ ) verwandt, die die Ladungsverteilung und das anomale magnetische Moment bei *nicht punktförmigen* Objekten beschreiben.

Mit der dimensionslosen Größe

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

zeigt sich das Skaleninvarianzverhalten

$$W_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x), \quad \text{für } Q^2, \nu \rightarrow \infty$$

und

$$\frac{\nu}{M} W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x), \quad \text{aber mit festem } x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

Durch die Einführung der dimensionslosen Größe  $x$  ist eine Massenskala verschwunden.

Bei sehr hohen Energieüberträgen  $\nu = E - E'$  bleibt dem „virtuellen Photon“ (bis LO) sehr wenig Zeit  $\tau \sim 1/\nu$ , mit *vielen* Partonen des Protons zu reagieren, so dass, wenn überhaupt, eine Streuung lediglich an *einem* oder *wenigen* Partonen stattfinden kann. Ein Parton des Hadrons mit Impuls  $p$  hat den Impuls  $zp$ , und nach dem Absorbieren des „virtuellen Photons“ hat es den Impuls  $zp + q$ . Da das Parton nach wie vor masselos sein soll, gilt

$$(zp + q)^2 = 0 = q^2 + (zp)^2 + 2zpq \simeq 2zpq \rightarrow z = x$$

Über die *äußere* Variable  $x$  wird also die *innere* Variable  $z$  getestet. Das „virtuelle Photon“ *sieht* durch den hohen Impulsübertrag  $Q$  seine Umgebung in einer höheren Auflösung ( $\delta x \simeq \frac{1}{Q}$ ) und kann dadurch kleinere Strukturen auflösen.

Man kann obigen Wirkungsquerschnitt auch noch anders schreiben und direkt als eine Streuung mit Quarks interpretieren. Nimmt man an, dass Partonen mit Quarks identifiziert werden können, so kann für eine elastische Streuung von Elektronen an einem Spin-1/2-Fermion der Ladung  $Q_e e$  und der Masse  $m_q$  die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left( 1 - \frac{Q^2}{s_q} \left( 1 + \frac{m_q^2}{s_q} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{s_q} \right)^2 \right) Q_q^2$$

sofort hingeschrieben werden.  $\sqrt{s_q}$  ist die Gesamtenergie des Leptonen-Partonen-Systems. Die Partonenmasse  $m_q$  wird im Weiteren vernachlässigt.

Sei  $f_j(x) dx$  die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Parton vom Typ  $j$  mit relativem Impulsanteil zwischen  $(x, x + dx)$  zu finden. Dann folgt aus der Annahme, dass man die Streuung an den verschiedenen Partonen im Proton einfach addieren darf

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left( 1 - \frac{Q^2}{s_q} + \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{s_q} \right)^2 \right) \sum_j Q_j^2 f_j(x) \quad (1)$$

Die Integration über  $x$  liefert sofort wegen  $\sum_j \int dx f_j(x) = 1$  die Ausgangsgleichung zurück. Häufig definiert man noch eine Variable  $y = \frac{P_q}{P_k} \simeq \frac{Q^2}{s_q}$ . Aus Gln. (1) wird dann

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} s_q \left( 1 - y + \frac{1}{2} y^2 \right) \sum_j Q_j^2 f_j(x) \quad (2)$$

mit  $s_q \simeq xs$ . Für einen Vergleich eignet sich die bekannte Gleichung

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 M} \frac{E'}{E} \left( W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3)$$

Diese lässt sich ebenfalls in eine zur Gln. (2) ähnliche Form bringen. Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= \frac{Q^2}{2M\nu}, \\ y &= \frac{Q^2}{xs} = \frac{2M\nu}{s}, \\ dx dy &= \frac{dQ^2 d\nu}{vs}, \\ \frac{E'}{E} \frac{\nu}{M} \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2 &\simeq (1-y) F_2(x), \\ \frac{\nu}{M} \frac{E'}{E} \sin^2 \frac{\theta}{2} 2W_1 &= \frac{1}{2} y^2 x 2F_1(x) \end{aligned}$$

wird die Gln. (3) zu

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} s ((1-y)F_2(x) + xy^2F_1(x)) \quad (4)$$

Damit ergibt dieser Vergleich beider Formeln

$$F_2(x) = x \sum_j Q_j^2 f_j(x), \quad F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (5)$$

Die letzte Gleichung ist die „Callan-Gross-Relation“. Die Beziehung ist dann gültig, wenn die Partonen den Spin 1/2 besitzen. Wäre er null, so  $F_1(x) = 0$ , da die Streuung am magnetischen Moment fehlt. *Hinweis:* Neben  $W_1$  und  $W_2$  existiert noch eine dritte Funktion,  $W_3$ , die die Neutrino-Hadronen-Reaktion beschreibt. Diese Funktion spielt hier aber keine Rolle.

Es folgen nun einige einfache Summenregeln, die aus dem „Quark-Parton Modell“ abgeleitet werden können.

Die Impuls-Dichtefunktionen  $f_j(x)$  werden direkt in ihre Quark-Analogs umbenannt. Damit sind  $u(x)$ ,  $d(x)$ ,  $s(x)$  die entsprechenden Anzahl-Dichtefunktionen,  $u$ ,  $d$ ,  $s$  Quarks im Bereich  $x$ ,  $x + dx$  zu finden. Die Bezeichnung für die Antiquarks lautet  $\bar{u}(x)$ ,  $\bar{d}(x)$ ,  $\bar{s}(x)$ . Damit lautet die Strukturfunktion eines Protons, welches durch ein Elektron *erprobt* wurde

$$F_2^{ep}(x) = x \left( \frac{4}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right)$$

Die Isospinvarianz ergibt beim Übergang zum Neutron die Strukturfunktion  $F_2^{en}$  mit den Beziehungen

$$u^n(x) = d^p(x) = d(x), \quad d^n(x) = u^p(x) = u(x), \quad s^n(x) = s^p(x) = s(x)$$

$$F_2^{en}(x) = x \left( \frac{4}{9}(d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9}(u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right)$$

Da alle Wahrscheinlichkeiten positiv sind, folgt

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \leq 4$$

Durch eine  $x$ -Integration erhält man einige einfache Summenregeln

$$\int_0^1 \left( \frac{2}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) \right) dx = 1 \quad \text{für das Proton}$$

und

$$\int_0^1 \left( \frac{2}{3}(d(x) - \bar{d}(x)) - \frac{1}{3}(u(x) - \bar{u}(x)) \right) dx = 0 \quad \text{für das Neutron}$$

In diesen Gleichungen wird vom Quarkanteil der Antiquarkanteil abgezogen. Dieses ist die effektive Quarkdichte, welche die elektrische Ladung der Nukleonen

ausmacht.

Durch Addition und Subtraktion der beiden Formeln bekommt man noch

$$\int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x))dx = 2 \quad \text{und} \quad \int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x)) = 1$$

Da das Proton keine Strange-Quarks enthält, muss weiterhin gelten

$$\int_0^1 (s(x) - \bar{s}(x))dx = 0$$

Die Impulssummenregel ergibt indes

$$\int_0^1 dx x (u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) = 1 - \epsilon$$

mit  $\epsilon \neq 0$ . Das liegt daran, dass in einem Nukleon nicht nur Quarks und Antiquarks existieren. Die Gluonen selbst übernehmen als Partonen einen Anteil von etwa 50 % des Gesamtimpulses.

Die Angaben hier für die Dichtefunktionen gelten im Limes  $Q^2, \nu \rightarrow \infty$  aber  $x$  fest („Bjorken-Limes“). Im Allgemeinen gibt es natürlich eine Abhängigkeit vom übertragenen (endlichen) Impuls. Dabei gilt recht gut, dass bei größer werdenden Impulsüberträgen  $Q^2$  durch das „virtuelle Photon“ die Umgebung im Nukleon stärker aufgelöst wird und die Verteilungen *nach oben* wandern.

Da es keinen (naiven) Grund gibt für ein  $u$ -Quark eines Protons (mit Quarkinhalt  $uud$ ) mehr Impuls als das andere  $u$ -Quark bzw. als das  $d$ -Quark zu tragen, wächst mit der obigen Impulsregel der Anteil der gefundenen Quarks, die ein „virtuelle Photon“ sieht bei kleinen  $x$ . Das machen Abbildung 2 und 3 plausibel [16, 17]

Aus der Isospininvarianz folgt also z. B. für die totale  $u$ - und  $d$ -Quarkdichte im Proton

$$U_p = \int_0^1 dx u(x), \quad D_n = \int_0^1 dx d(x)$$

Die Invarianz fordert  $U = U_p = D_n$  und  $D = D_p = U_n$  sowie für die Antiquarkdichte  $\bar{U} = \bar{U}_p = \bar{D}_n$  und  $\bar{D} = \bar{D}_p = \bar{U}_n$ .

## 2.2 Faktorisierungstheorem (Teil 1)

Die überwiegende Mehrzahl an QCD-Wirkungsquerschnitten können nur Aufgrund des Faktorisierungstheorems [18] berechnet werden. Dieses Theorem soll in diesem Abschnitt und im Abschnitt 2.4 näher gebracht werden. Dazu wird dem Prozess, den Abbildung 1 aus dem Abschnitt 2.1 darstellt, eine Amplitude  $\mathcal{A}$  zugeordnet. Alle Folgerungen beziehen sich im Prinzip ausschließlich auf das *DIS*-System, sind aber, da der „Hadroneninhalt“ nicht von der Art der Wechselwirkung abhängen kann, universell.

Die Amplitude  $\mathcal{A}$  hat die Form [19]

$$\mathcal{A} = e\bar{u}(k')\gamma^\alpha u(k)\frac{1}{q^2}\langle X|j_\alpha(0)|P\rangle$$

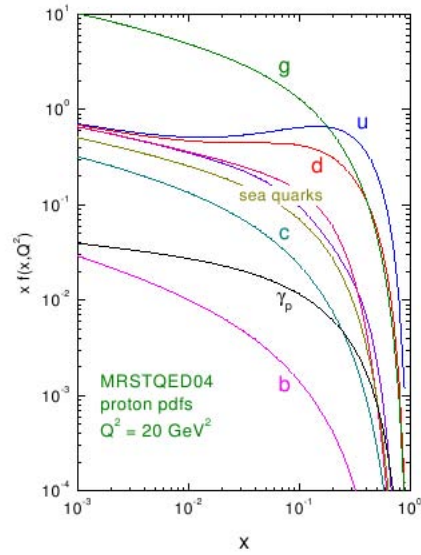


Abbildung 2: Quark-Gluonen-Photonen-Distribution, betrachtet bei einem (quadratischen) Impulsübertrag von  $Q^2 = 20 \text{ (GeV/c)}^2$ . Die Figur ist aus [16] entnommen.

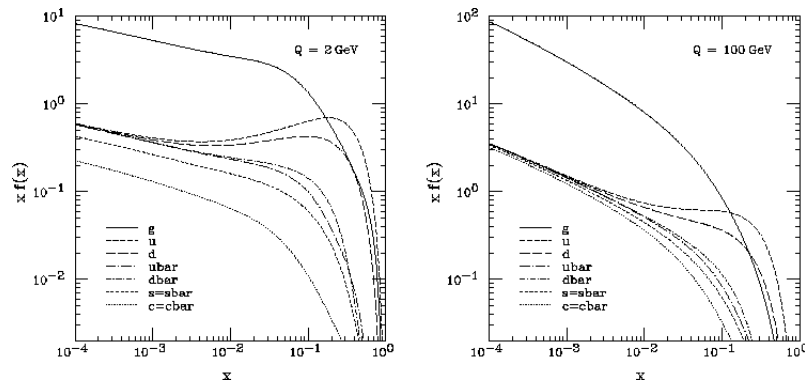


Abbildung 3: Veränderung der Impuls-Dichteverteilung eines Hadronen-Inhalts von  $Q = 2 \text{ GeV/c}$  auf  $Q = 100 \text{ GeV/c}$ . Die Figuren sind aus [17] entnommen.



wobei  $X$  einen diffraktiven Zustand darstellen kann.  $j_\alpha$  stellt den Übergangstrom zwischen dem Proton  $P$  und den möglichen Zuständen aus  $X$  dar.  $q$  ist der vom „virtuellen Photon“ übermittelte Impuls. Quadriert man diese Amplitude, um daraus einen physikalisch messbares Ergebnis zu gewinnen, so kann man den Ausdruck

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} \propto L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}$$

schreiben.  $L_{\alpha\beta}$  stellt den Leptonen-Tensor dar, und enthält nur Größen (Spinoren, Vertizes), die im Zusammenhang mit den Leptonen stehen.  $W^{\alpha\beta}$  stellt den Hadronen-Tensor dar, und enthält alle restlichen Größen. Für ihn gilt noch

$$W^{\alpha\beta} \propto \sum_X \langle P | j^{+\beta}(0) | X \rangle \langle X | j^\alpha(0) | P \rangle = \int d^4z e^{iqz} \langle P | j^{+\beta}(z) j^\alpha(0) | P \rangle$$

Über alle Zwischenzustände wird nun summiert.

Der hadronische Tensor enthält neben Effekten, die perturbativ berechnet werden können, auch Beiträge, die nicht über die Störungstheorie bestimmt werden können, da der entsprechende Kopplungsparameter  $\alpha_s(Q^2)$  für diese Bereiche von der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$  ist. Dadurch ist die Störungsrechnung hier nicht mehr anwendbar (bis LO gilt für  $\alpha_s(Q^2) \propto 1/\ln(Q^2/\Lambda^2)$ ; wenn der Impulsübertrag in der Größenordnung der Konstanten  $\Lambda \sim 200$  MeV ist, dann divergiert die Kopplungskonstante  $\alpha_s$ ).

Das Faktorisierungstheorem stellt dann einen multiplikativen Zusammenhang zwischen den expliziten Bereichen her, indem eine Faktorisierungsskala  $\mu_F$  definiert wird, und beide (Energie-)Bereiche hängen von dieser Skala ab. Der Hadronen-Tensor kann dann als

$$W^{\alpha\beta} = \sum_a \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} f_{a/H}(\xi, \mu_F) P_a^{\alpha\beta}(\mu_F, \alpha_s(Q^2))$$

geschrieben werden.  $f_{a/H}$  stellt die aus dem letzten Abschnitt bekannten (universellen) Dichtefunktionen für das Auffinden eines Partons  $a$  dar („Parton Distributions“, PDF), und  $P_a^{\alpha\beta}$  ist komplett über die Störungsrechnung berechenbar und unabhängig vom Hadron (da  $\xi^2 p^2 \geq \mu_F^2$ ; Effekte mit  $\xi^2 p^2 \leq \mu_F^2$  werden durch die Funktionen  $f_{a,b}(x, Q^2)$  beschrieben,  $p$  ist der Protonimpuls). Abbildung 4 zeigt diesen Zusammenhang, angewandt auf einen Prozess  $H_a H_b \rightarrow cX$

Hier wechselwirken anstatt Leptonen mit Hadronen jeweils zwei Hadronen, angedeutet durch zwei schwarze Ovale, aus denen die Partonen  $i, j$  den Subprozess  $P^{ij} = d\hat{\sigma}$  bilden, repräsentiert durch den schwarzen Kreis. Schematisch kann dieser Vorgang auch so dargestellt werden

$$d\sigma(H_a H_b \rightarrow cX) = \sum_{ij} f_i^{H_a}(x_a, Q^2, \mu_F^2) f_j^{H_b}(x_b, Q^2, \mu_F^2) d\hat{\sigma}(ij \rightarrow cX') \quad (6)$$

$x_a, x_b$  sind die Impulse. Für sie gilt  $\sum_{\text{Partonen}} x = 1$ . Häufig wird die Skala  $\mu_F = Q$  gesetzt. Die Wahl dieser Skala (und auch der Renormalisierungsskala  $\mu_R$ , die im Abschnitt 2.4 näher erklärt wird, siehe auch Appendix B), ist offen. Sie kann durch jede mögliche zu bildende Invariante ersetzt werden. So wären auch  $\mu_F^2 = p_t^2 + m^2$  oder  $\mu_F^2 = tu/s$  möglich.

Die Strukturfunktionen  $f_{i,j}(x, \mu^2)$  sind im Gegensatz zu dem über die perturbative QCD (pQCD) berechenbaren Anteil  $d\hat{\sigma}(ij \rightarrow kl)$  nur durch Experimente zu

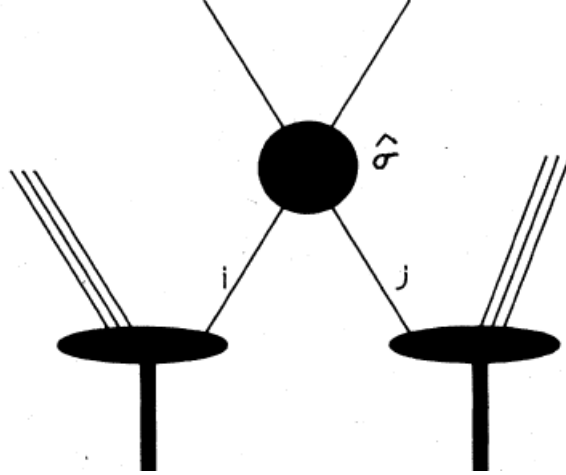


Abbildung 4: Faktorisation von „Langzeit“- und „Kurzzeitphysik“ [20]. Die zwei Ovale bezeichnen die Gebiete, die der „Langzeitphysik“ zugeordnet werden und die nicht über eine „Störungstheorie“ berechnet werden können; durch den Kreis werden alle störungstheoretischen Beiträge in die Rechnungen einbezogen.

parametrisieren. Das übernehmen Gruppen wie MRST [16] oder Alekhin [21], die zu einer festgelegten Skala  $Q_0$  die Daten im  $x$ -Raum fitten und über weite  $Q$ -Bereiche durch die DGLAP [11] (Abschnitt 2.4) numerisch berechnen. Typische Anfangsbedingungen sind von der Form

$$f(x, Q_0) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} P(x) \quad (7)$$

wobei die Parameter  $A_0, A_1, A_2$  und das Polynom  $P(x)$  durch die Daten zu bestimmen sind. Diese Form wird durch die Reggetheorie nahe gelegt (Abschnitt 2.6).

Noch zu beachten ist, dass der Faktorisation immer ein Schema zugrunde liegt, unter dem sowohl die Strukturfunktionen als auch der pQCD-Anteil zu berechnen sind, denn der pQCD-Anteil beschreibt, wie die Dichtefunktion, den Partoneninhalt eines Teilchens, nur mit dem Unterschied, dass dieser störungstheoretisch berechnet werden kann.

Die häufig verwendeten Schemata sind das  $\overline{MS}$  und das bisher benutzte, aber nicht explizit erwähnte  $DIS$ -Schema. Beiden Schemata liegt zugrunde (und das muss für *irgendein* Schema gelten), dass in niedrigster Ordnung

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_j Q_j^2 f_j(x, Q^2)$$

gilt. Darüber hinaus differieren beide Schemata per Konstruktion.

In  $DIS$  wird gefordert, dass der harte Anteil des Wirkungsquerschnitts (pQCD) sich bei  $\mu = \mu_F = Q$  auf die Vorhersagen des Partonen-Modell reduziert, also im Wesentlichen eine Abhängigkeit nur von der Bjorken Variable  $x$ . Diese ist dann derart, dass  $d\hat{\sigma} \sim Q_{a,q}^2 \delta(1-x) dx$  gilt, und zwar für *jede* Ordnung in der Störungsentwicklung. Eine LO-Entwicklung für  $F_2(x, Q^2)$  sieht typischerweise

so aus [19, 22]

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} Q_e^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_{q, \bar{q}}(\xi, \mu^2) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right]$$

Speziell für die Wahl  $Q^2 = \mu^2 = Q_0^2$  reduziert sich  $F_2(x, Q_0^2) = F_2(x)$ . Das mit dem  $MS$ -System verwandte  $\overline{MS}$ -Schema unterscheidet sich nur durch zusätzlich auftretende Faktoren  $\ln(4\pi) - \gamma_E$ , wobei  $\gamma_E$  die Eulersche Konstante ist (siehe auch Appendix B). Der Unterschied zum  $DIS$ -System besteht darin, dass im  $\overline{MS}$ -System die Dichtefunktionen in Form von Erzeugern und Vernichtern von Partonen eines bestimmten Typs definiert sind. Diese Operatoren erzeugen/vernichten Partonen mit einem longitudinalen Impuls  $xp$  und einem Transversalimpuls  $\vec{k}_T$ . Die Dichtefunktionen sind dort definiert in der Form

$$f_{i/H_{a,b}}(x, \mu^2) = \int \frac{d^2 \vec{k}_T}{(2\pi)^2} \langle h(p) | b_i^+(xp, \vec{k}_T) b_i(xp, \vec{k}_T) | h(p) \rangle$$

$h(p)$  stellt den Hadronenzustand dar und ist entweder Hadron  $a$  oder  $b$  mit Impuls  $p$ .  $i$  stellt ein Parton im Hadron  $a, b$  dar. Dieses System ist in der Literatur häufiger anzutreffen. Eine LO-Entwicklung der Strukturfunktion  $F_2(x, Q^2)$  könnte in diesem System wie folgt aussehen

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} Q_e^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_{q, \bar{q}}(\xi, Q^2) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_{\overline{MS}}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right]$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $C_{\overline{MS}}$  [22]. In beiden Fälle ist zur Illustration nur die Quark/Antiquarkdichte  $f_{q, \bar{q}}$  genommen worden. Es fehlt die Gluonendichtefunktion.

Wie schon erwähnt, können die Dichtefunktionen nicht analytisch hergeleitet werden. Es gibt aber eine Möglichkeit, ihr Verhalten unter einer kontinuierlichen Skalenänderung zu betrachten. Dazu wird die  $DIS$ -Gleichung nach  $\ln t$  mit  $t = \mu^2$  abgeleitet. Betrachtet man die Ableitung bei  $Q^2 = t$  und beachtet man noch, dass  $\frac{\partial}{\partial \ln t} = t \frac{\partial}{\partial t}$ , dann entsteht die DGLAP [11]

$$t \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P\left(\frac{x}{\xi}\right) f(\xi, t)$$

### 2.3 Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen und die DGLAP Gleichung

In dem Abschnitt 6.3 wird die folgende Gleichung benutzt

$$\frac{\partial f_b(x, t)}{\partial t} = \sum_{ac} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} f_a(x', t) \frac{\alpha_{abc}}{2\pi} P_{a \rightarrow bc}\left(\frac{x}{x'}\right) \quad (8)$$

mit  $t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$ .  $t$  wird häufig als „Zeit“ bezeichnet, da durch  $Q \sim \frac{1}{\tau}$  eine Zeitskala eingeführt wird. Im Folgenden werden anstatt der Verteilungsfunktionen  $f(x, t)$

die anschaulicheren Bezeichnungen  $q(x, t)$  und  $G(x, t)$  für die Quark- und Gluonendichten im Hadron benutzt. Schließlich wird die Kopplungskonstante noch explizit abhängig von der Skala geschrieben  $\alpha_{abc} \equiv \alpha_s(t)$ .

Nach [11] gilt

$$\frac{\partial q^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \sum_{j=1}^{2f} q^j(y, t) P_{q^i q^j}(x/y) + G(y, t) P_{q^i G}(x/y) \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \sum_{j=1}^{2f} q^j(y, t) P_{G q^j}(x/y) + G(y, t) P_{GG}(x/y) \right] \quad (10)$$

Die Summe läuft über Quarks und Antiquarks aller Flavours. Die Aussage dieser Integro-Differentialgleichungen ist (bis LO), dass bei einer Variation der Skala  $t$  sich die Auflösung des Hadroneninhalt ändert, entweder durch Emissionen von Gluonen durch Quarks oder Antiquarks, wobei die Gluonendichte variiert, oder durch Gluonensplitting in Quark-Antiquark-Paare, wobei der Quark-Antiquark-Inhalt des Hadrons verändert wird.

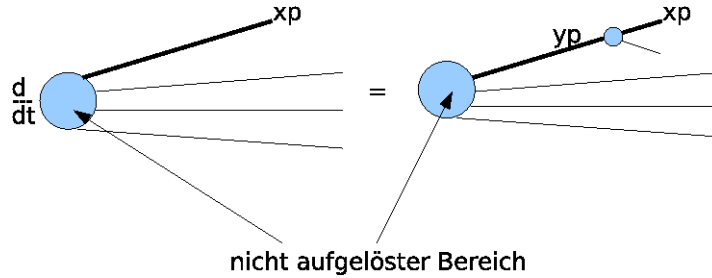


Abbildung 5: Eine Variation der Renormierungs-Skala (im  $\overline{MS}$ -System) führt dazu, dass ein weiteres Parton *sichtbar* werden kann.

Abbildung 5 soll das verdeutlichen. In dieser Abbildung stellt der *blaue* Bereich nicht das Hadron dar, sondern soll zu einem festgehaltenem Skalenwert  $t = t_0$  einen *nicht auflösbaren* Bereich anzeigen. Die Partonen, die aus diesem Bereich kommen, können, bei dieser Skala *gesehen*, z. B. an einer *harten* Streuung teilnehmen. Die Variation des „Blobs“ nach der Skala  $t$  können nun weitere Partonen in dem Bereich auflösen (linke Seite der Abbildung 5).

Die Funktionen  $P_{ij}(z)$  sind die Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen und können (bis LO) als Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert werden, ein Parton vom Typ  $i$  in einem Parton vom Typ  $j$  zu finden mit dem (longitudinalen) Impuls  $x$  (also  $xp$ , wobei  $p$  den Hadronenimpuls darstellt). Man kann für diese Funktionen sofort einige Eigenschaften ableiten, denn einen Flavour-ändernden Zustand gibt es in den Gleichungen bis zu dieser Ordnung nicht. Daraus folgen dann

$$\begin{aligned} P_{q^i q^j} &= P_{\bar{q}^i \bar{q}^j} \equiv P_{q^i q^j} \delta_{ij} \\ P_{q^i \bar{q}^j} &= P_{\bar{q}^i q^j} \\ P_{q^i G} &= P_{\bar{q}^i G} \equiv P_{qg} \\ P_{gq} &= P_{g\bar{q}^i} \equiv P_{gq} \end{aligned}$$

Dadurch ist es möglich, obige Gleichungen (Gln. (9), (10)) einfacher zu schreiben. Es folgt

$$\frac{\partial q^i(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q^i(y, t)P_{qq}(x/y) + G(y, t)P_{qG}(x/y)] \quad (11)$$

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q^i(y, t)P_{Gq}(x/y) + G(y, t)P_{GG}(x/y)] \quad (12)$$

Subtrahiert man noch den Quarkanteil mit Flavour  $j$  von der Quarkdichte  $i$  („Flavour Non Singlet Distribution“), so wird die Gln. (11) sogar noch einfacher. Dann gilt

$$\frac{\partial(q^i(x, t) - q^j(x, t))}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} (q^i(y, t) - q^j(y, t)) P_{qq}(x/y)$$

oder mit  $q^{NS}(x, t) = q^i(x, t) - q^j(x, t)$  ergibt sich

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q^{NS}(y, t) P_{qq}(x/y)$$

Für eine Interpretation dieser Gleichung eignet sich besser der Ausdruck

$$\begin{aligned} q^{NS}(x, t) + dq^{NS}(x, t) &= \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(z y - x) q^{NS}(y, t) \left( \delta(z - 1) + \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} P_{qq}(z) dt \right) \end{aligned}$$

Mit einer Integration über  $z$  hebt sich auf beiden Seiten  $q^{NS}(x, t)$  fort (unter Beachtung von  $\delta(y - x)$ ), so dass sich sofort die Ausgangsgleichung ergibt.

Der Anteil  $\delta(z - 1) + \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} P_{qq}(z) dt$  gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte an, dass das Quark mit Impuls  $y$  entweder nicht emittiert ( $\delta(1 - z)$ ) und in sich selber übergeht oder aber dass es emittiert, und man kann ein anderes Quark mit Impuls ( $z$ ) in ihm finden mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\frac{\alpha_s(t)}{2\pi} P_{qq}(z) dt$ . Die gleiche Interpretation gilt auch für die Funktion  $P_{GG}(z)$ . Damit können auch die restlichen Terme, die die Funktionen  $\frac{\alpha_s(t)}{2\pi} P_{Gq}(z)$  und  $\frac{\alpha_s(t)}{2\pi} P_{qG}(z)$  enthalten, sofort als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, ein Gluon *innerhalb* eines Quarks oder ein Quark *innerhalb* eines Gluons zu finden. Eine Deltafunktion fehlt hier, da Flavour-ändernde Möglichkeiten fehlen.

Die „Splitting-Funktionen“ können störungstheoretisch entwickelt werden. Ihre Interpretation als Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die niedrigste Ordnung in der Entwicklung (LO). Da mit „Splitting-Funktionen“ zumeist die LO-Funktionen gemeint sind, soll hier nur eine Angabe der masselosen LO-Funktionen reichen.

Es sind

$$\begin{aligned} P_{qq}(x) &= C_F \left[ \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] \\ P_{qg}(x) &= T_R [x^2 + (1-x)^2] \\ P_{gq}(x) &= C_F \left[ \frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \\ P_{gg}(x) &= 2C_A \left[ \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right] + \delta(1-x) \frac{11C_A - 4n_f T_R}{6} \end{aligned}$$

mit  $C_F = \frac{4}{3}$ ,  $T_R = \frac{n_f}{2}$ ,  $C_A = 3$ ,  $n_f =$  Anzahl der Flavours.

In der Literatur sind verschiedene „Lesarten“ der „Splitting-Funktionen“ üblich. Die ausführliche Version listet explizit den Splittingvorgang auf, die Kurzversion beschränkt sich auf den Übergang eines Partons. Das emittierte Parton wird nicht aufgeführt. Z. B. ist  $P_{q \rightarrow qg}(x) = P_{qq}(x)$  oder  $P_{g \rightarrow q\bar{q}}(x) = P_{qg}(x)$ .

Die „+“-Funktionen sind über

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}$$

definiert. Sie regularisieren die Funktion  $f(z)$ , die hier eine Pol bei  $z = 1$  besitzt. Es gilt noch

$$\frac{1}{(1-z)_+} = \frac{1}{1-z} \quad \text{für} \quad 0 \leq z < 1$$

Diese Eigenschaft kann unter Einbeziehung des Punktes  $z = 1$  auch als

$$\frac{1}{(1-z)_+} = \frac{1}{1-z} - \delta(1-z) \int dx \frac{1}{1-x}$$

geschrieben werden. Eine Integration über  $z$  (unter Einbeziehung des Punktes  $z = 1$ ) zeigt, dass das Integral über eine reine „+“-Distribution verschwindet, also

$$\int dz \frac{1}{(1-z)_+} = 0$$

Neben den „+“-Distributionen existieren eine Vielzahl an verschiedenen Vorschriften, um Subtraktionen von nicht definierten Stellen durchzuführen. Diese Arbeit betreffend findet man in [23] auch Distributionen der Art (mit entsprechend definierten Testfunktionen  $h(x), h(y)$ )

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\rho}}^1 dx h(x) \left( \frac{1}{1-x} \right)_{\tilde{\rho}} &= \int_{\tilde{\rho}}^1 dx \frac{h(x) - h(1)}{1-x} \\ \int_{1-\omega}^1 dy h(y) \left( \frac{1}{1-y} \right)_{\omega} &= \int_{1-\omega}^1 dx \frac{h(y) - h(1)}{1-y} \\ \int_{-1}^{-1+\omega} dy h(y) \left( \frac{1}{1+y} \right)_{\omega} &= \int_{-1}^{-1+\omega} dy \frac{h(y) - h(-1)}{1+y} \end{aligned}$$

wobei für die Parameter  $\rho \leq \tilde{\rho} < 1$  und  $0 < \omega \leq 2$  gelten mit  $\rho = \frac{4m^2}{s}$ . Die beiden Parameter gelten bzgl. der Produktion von zwei schweren Quarks sowie der Emissionsrichtung des  $H$ -Partons. Die in Abschnitt 3.3 behandelte **Zeta-Subtraktion** wandelt die obige Vorschriften ab, indem vor den „Countertermen“  $h(\pm 1)$  im Wesentlichen eine Thetafunktion gesetzt wird der Form

$$\Theta(\zeta - P(x, y))$$

Durch Vorgabe eines Wertes für  $\zeta$  wird dadurch eine reduzierte Anzahl an „Counter-Events“ produziert.  $P(x, y)$  ist hierbei ein skaliertes Transversalimpuls bzgl. des emittierten  $H$ -Partons, siehe Abschnitt 3.3.

Integrale der Form

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q^{NS}(y, t) P_{qq}(x/y)$$

treten innerhalb der QCD häufig auf und werden Konvolutionen genannt. Für sie wird deswegen die Kurznotation  $\otimes$  verwendet. Dann wird aus dem Integral

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} [q^{NS}(y, t) \otimes P_{qq}] (x, t) \quad (13)$$

Die Standardlösung dieser Gleichung besteht darin, ihre Mellin-Transformation zu betrachten. Diese Transformation lautet

$$q(n, t) = q_n(t) = \int_0^1 dx \frac{x^n}{x} q(x, t) = \int_0^1 dx x^{n-1} q(x, t)$$

Hier wird die stetige Variable  $x$  auf die diskrete und reelle Variable  $n$  abgebildet. Die für eine Analyse der Verteilungsfunktionen  $q(x, t)$  wichtigen Domianzbereiche im  $x$ -Raum,  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow 1$ , werden durch diese Transformation auf *kleine* und *große*  $n$  abgebildet. Z. B. ist für eine Verteilung  $q(x, t) \sim x^{-1}$ , die im Bereich  $x \rightarrow 0$  dominiert, die Mellin-Transformierte durch

$$q_n(t) = \int_0^1 dx x^{n-2} = \frac{1}{n-1} \quad (14)$$

gegeben. Der Pol im  $n$ -Raum liegt damit für  $x \rightarrow 0$  dem Ursprung am nächsten. Für größer werdende Exponenten der Verteilungen  $q(x, t)$  wandern auch die Pole nach rechts entlang der reellen  $n$ -Achse.

Allerdings ist die Größe der Exponenten solcher Verteilung nicht beliebig. Sie kann aber durch die Regge-Theorie plausibel gemacht werden, siehe dazu auch Abschnitt 2.6.

Zur Rücktransformation (siehe Gln. (15), Seite 24) wird die Variable  $n$  ins Komplexe verlegt. Der Integrationsweg muss so verlaufen, dass er alle auftretende Pole umschließt. Der Weg verläuft generell rechts aller Pole und parallel zur imaginären  $n$ -Achse. Sie ist nur in den einfachsten Fällen geschlossen angebar. Für das obige Beispiel (Gln. (14)) ist diese jedoch einfach durchzuführen!

Multipliziert man die Konvolution (Gln. (13)) auf beiden Seiten mit  $x^{n-1}$  und integriert über  $x \in (0 \dots 1)$  (einschließlich einer Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf dieser Seite), so entsteht aus der rechten Seite

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, t) \int_0^1 dx x^{n-1} P_{qq}(x/y) &= \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, t) y^n P_{qq}(n) \\ &= q(n, t) P_{qq}(n) \end{aligned}$$

Die Mellin-Transformation der „Splitting-Funktionen“  $P_{ij}^{(0)}(z)$  wird häufig auch als „Anomalous Dimension“ bezeichnet und mit  $\gamma_{ij}^{(0)}(n)$  abgekürzt (Index 0 bezeichnet die LO-Terme, die hier ausschließlich verwendet werden). Unter dieser

Transformation zerfällt die Konvolution, und eine Lösung ist über Trennung der Variablen möglich (siehe auch [12]). Es ist

$$\frac{dq_n(t)}{dt} = q_n(t)\gamma_{qq}(n) \rightarrow q_n(t) = q_n(0)e^{\int \frac{\alpha_s(t)}{2\pi}\gamma_{qq}(n)dt}$$

mit einer Anfangsbedingung  $q_n(0)$ . Die Kopplungskonstante  $\alpha_s$  lautet bis LO  $\alpha_s(t) = \frac{1}{b \ln \frac{t}{t_0}}$  (LO) mit  $t_0 = \Lambda^2$  und  $b = \frac{33-2n_f}{12\pi}$ . Eingesetzt in das Integral mit den Grenzen  $t_0, t$  ergibt unter Beachtung von

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} dQ^2 = t \left( \ln \frac{\Lambda^2}{t} + 1 \right) - t_0 \left( \ln \frac{\Lambda^2}{t_0} + 1 \right)$$

die Lösung

$$q_n(t) = q_n(t_0) \left( \frac{\alpha_s(t_0)}{\alpha_s(t)} \right)^{d_{qq}(n)}$$

mit  $d_{qq}(n) = \frac{\gamma_{qq}^{(0)}(n)}{2\pi b}$ . Der Ausdruck für die Rücktransformation ist

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c dn x^{-n} q_n(t) \quad (15)$$

Nur in einfachen Fällen ist eine geschlossene Form bekannt.

Betrachtet wurde bisher der „Flavour Non Singlet“-Fall, in dem die Differenz zweier Quarkdichten (oder Antiquarkdichten) eines Hadrons genommen wurde, so dass der Gluonenanteil sich heraushebt. Die restlichen Terme sind einfacher numerisch zu lösen unter Angaben einer Anfangsverteilung für die entsprechenden Dichten, wie sie meistens in den Veröffentlichungen der Gruppen wie MRST [16] oder Alekhin [21] zu finden sind. Es folgen noch die Angaben der Gleichung für den „Flavour Singlet“-Fall [19]

$$\frac{\partial \Sigma(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \left[ P_{qq}^{(0)} \otimes \Sigma + 2n_f P_{qg}^{(0)} \otimes G \right]$$

und

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \left[ P_{gq}^{(0)} \otimes \Sigma + P_{gg}^{(0)} \otimes G \right]$$

Alle Gleichungen gelten bis LO. Die Argumente sind weggelassen, da selbsterklärend und der Term  $\Sigma(x, t) = \sum_i [q_i(x, t) + \bar{q}_i(x, t)]$ .

Es folgen noch die LO-Mellin-Transformierten der „Splitting-Funktionen“ [19]

$$\begin{aligned} \gamma_{qq}^{(0)}(n) &= C_F \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right] \\ \gamma_{qg}^{(0)}(n) &= T_R \left[ \frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n+2)} \right] \\ \gamma_{gq}^{(0)}(n) &= C_F \left[ \frac{2+n+n^2}{n(n^2-1)} \right] \\ \gamma_{gg}^{(0)}(n) &= 2C_A \left[ -\frac{1}{12} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right] - \frac{2}{3} n_f T_R \end{aligned} \quad (16)$$



Zu Beginn des Kapitel 4 wird der Hinweis gegeben, dass die Partonenemissionen in einem Partonen-Schauer faktorisieren. Unter dieser Faktorisierung wird hier die Möglichkeit einer *unabhängigen* Emission von  $n$  (masselosen) Partonen von einer äußeren Linie verstanden.

Zur Ableitung kann man von dem differentiellen Wirkungsquerschnitt eines zerfallenden „virtuellen Photons“ ausgehen, welches dann von einer „Quark- oder Antiquarklinie“ ein Gluon emittiert  $\gamma^* \rightarrow \bar{q}qg$ . Dieser ist bekannt [10, 24] und lautet

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dx_1 dx_2} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad (17)$$

Die Impulse  $x_i$  können Werte im gesamten Bereich von  $0, \dots, 1$  annehmen. Die Variablen  $x_1, x_2$  dem Quark bzw. dem Antiquark zugehörig. Dieser Wirkungsquerschnitt beinhaltet keine „virtuellen Graphen“. Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma_0$  ist der „Born“-Wirkungsquerschnitt und ist durch  $\sigma_0 = 3\alpha_s e_q^2 Q$  gegeben mit der Center-of-Mass-Energy  $Q = E_{cm}$  [10].

Da das Ziel ist, Partonen-Schauer-Kinematik einzuführen, ist es hilfreich, Variablen zu benutzen, wie den Transversalanteil des emittierten Partons,  $\vec{k}_T^2$  und die Virtualität  $t$ . Mit dem „Light Cone“-Variablensatz (1=Antiquark, 2=Quark, 3=Gluon)

$$\begin{aligned} (E + p_z)_i &= z_i Q \\ (E - p_z)_i &= y_i Q \\ z_2 + z_3 &= 1 \\ y_2 + y_3 &= \hat{t} = (1 - x_1) \\ z_2 y_2 &= z_3 y_3 = z_2(1 - z_2)\hat{t} = k_T^2/Q^2 \end{aligned}$$

kann dieses erreicht werden, wobei noch  $\hat{t} = t/Q^2$  gesetzt ist.  $\vec{k}_T$  ist der Transversalimpuls relativ zu  $\vec{p}_2 + \vec{p}_3$ . Ein wesentlicher Punkt ist nun, dass nach dem Einsetzen dieser Variablen, unter der Voraussetzung, dass der Transversalimpuls  $\vec{k}_T$  klein ist, der Wirkungsquerschnitt geschrieben werden kann als

$$\frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{d\sigma}{dz d\hat{t}} \right)_{LPA} \simeq \frac{2\alpha_s(t)}{3\pi} \frac{1+z^2}{(1-z)\hat{t}}$$

wobei das Label LPA die „Leading Pole Approximation“ bedeuten soll.

Die Funktion

$$\frac{1+z^2}{1-z}$$

ist aus diesem Abschnitt bekannt und stellt im Wesentlichen die „Splitting-Funktion“  $P_{q \rightarrow qg}(z)$  dar. Damit ist

$$\frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{d\sigma}{dz d\hat{t}} \right)_{LPA} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi\hat{t}} P_{q \rightarrow qg}(z)$$

Der rechte Anteil dieser Gleichung stellt die Wahrscheinlichkeit für eine Gluonemission dar. Eine Integration über  $\hat{t}$  ergibt (unter Vernachlässigung, dass

die Kopplungskonstante  $\alpha_s(t)$  abhängig ist von dieser Variablen)

$$\frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{d\sigma}{dzd\hat{t}} \right)_{LPA} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{q \rightarrow qg}(z) \log \frac{Q^2}{m^2}$$

Die Masse wird üblicherweise in die Strukturfunktion mit hineingezogen, denn die Vorstellung ist, dass diese Funktion nicht singulär wird, wenn die Masse  $m$  gegen Null geht. Unter einer Redefinition des Anteils der Strukturfunktion, der keinerlei Splitting beschreibt, und der komplett nicht perturbativ ist, kann die Ersetzung

$$\log \frac{Q^2}{m^2} \leftrightarrow \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

vorgenommen werden.  $n$  unabhängige Splittings ergeben dann die gesuchte Form. Die genauere Betrachtung, in der auch die Kopplungskonstante von  $\hat{t}$  abhängig ist, folgt etwas weiter unten. Das Ergebnis ist das Aufsummieren dieser „Leading Logs“. (*Hinweis:* Wird in dieser Gleichung für die „Splitting-Funktion“ die bekannte +-Distribution genommen, werden die „virtuellen“ Beiträge zusätzlich automatisch mit betrachtet. Diese „virtuellen“ Beiträge verhindern in der Feynman-Eichung, dass ein sukzessives Auftreten von  $n$  Emissionen einfach als eine Wahrscheinlichkeit interpretiert werden kann, da diese Beiträge nach Quadrieren des Matrixelements u. a. als Kreuzung bzgl. der zeitlichen Ordnung auftreten, was die Leiterstruktur des Graphen verändert; deswegen müssen die eichabhängigen Matrixelemente mit Hilfe einer günstigeren Eichung umgeschrieben werden; eine axiale Eichung leistet dieses [10]). Ist die Umeichung geschehen, so kann der Term (bis zu dieser Ordnung)

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dz_1 dz_2 \dots dz_n d\hat{t}_1 d\hat{t}_2 \dots d\hat{t}_n} = \left[ \frac{\alpha_s(t_1)}{2\pi\hat{t}_1} P_{q \rightarrow qg}(z_1) \right] \left[ \frac{\alpha_s(t_2)}{2\pi\hat{t}_2} P_{q \rightarrow qg}(z_2) \right] \dots \left[ \frac{\alpha_s(\hat{t}_n)}{2\pi\hat{t}_n} P_{q \rightarrow qg}(z_n) \right] \quad (18)$$

als Wahrscheinlichkeit für  $n$  unabhängige Gluonenemissionen interpretiert werden. Die Interferenzterme sind also nicht in führender Ordnung vorhanden. Für die Virtualität gilt

$$Q^2 \geq t_1 \geq \dots \geq t_n$$

mit einem „Cut Off“  $t_n \geq t_c$ . Die obige Struktur kann auf beliebige Partonenemissionen ausgeweitet werden. Sie hat die gleiche Struktur wie obige Gleichung. Man muss sich nur jeden Faktor als „Gesamtfaktor“ für das entsprechende Splitting vorstellen, also z. B.

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dz_1 dz_2 \dots dz_n d\hat{t}_1 d\hat{t}_2 \dots d\hat{t}_n} = \left[ \frac{\alpha_s(t_1)}{2\pi\hat{t}_1} P_1(z_1) \right] \left[ \frac{\alpha_s(t_2)}{2\pi\hat{t}_2} P_2(z_2) \right] \dots \left[ \frac{\alpha_s(t_n)}{2\pi\hat{t}_n} P_n(z_n) \right]$$

mit  $P_j(z) = P_{j \rightarrow j_1 j_2}(z)$  als zugehörige „Splitting-Funktion“.

Es ist nun relativ einfach, die totale Rate für die „Ein-Gluonemission“ hinzuschreiben. Mit

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dz} = P_{q \rightarrow qg}(z) \int_{\hat{t}_c}^1 \frac{\alpha_s(t)}{2\pi\hat{t}} d\hat{t}$$

und mit der LO-Kopplungskonstanten  $\alpha_s(t) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(t/\Lambda^2)}$  sowie  $\beta_0 = 4\pi b_0$  aus Abschnitt 2.5. Das Integral kann durch Einführung von  $\kappa = \frac{2}{\beta_0} \ln \frac{\alpha_s(t_c)}{\alpha_s(t)}$  gelöst werden, so dass  $\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi t}$  ist. Damit wird das Integral einfach zu

$$\int_0^\kappa d\kappa = \kappa$$

Die Zwei-Gluonenemission schreibt sich analog

$$\int_0^\kappa d\kappa_1 \int_0^{\kappa_1} d\kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa^2$$

Dieses Integral rührt durch

$$\int_{\hat{t}_c}^1 \frac{\alpha_s(t_1)}{2\pi t_1} d\hat{t}_1 \int_{\hat{t}_c}^{\hat{t}_1} \frac{\alpha_s(t_2)}{2\pi t_2} d\hat{t}_2$$

her. Durch die Integration des ersten Terms wandert die obere Grenze des zweiten Integrals auf das Maximum 1. Dadurch wird die Zweifachintegration zur Flächenintegration über ein Rechteck mit der Fläche  $\kappa^2$ . Die Hälfte der Fläche wird benötigt, deswegen der Faktor  $\frac{1}{2}$ . Betrachtet man  $n$  Emissionen, so ergibt sich der Faktor

$$\int_0^\kappa d\kappa_1 \int_0^{\kappa_1} d\kappa_2 \dots \int_0^{\kappa_{n-1}} d\kappa_n = \frac{\kappa^n}{n!}$$

Dadurch erklären sich bei einer „ $n$ -Parton Emission“ in „Leading Log“-Näherung Terme der gesuchten Form

$$\alpha_s^n(Q^2) \ln^n \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

$\Lambda$  bildet wieder einen beliebigen Referenzpunkt.

## 2.4 Faktorisierungstheorem (Teil 2), Beispiel

In Arbeiten wie [23] wurde zum Teil ausführlich die Produktion schwerer Quarks bis NLO betrachtet. Die Ergebnisse sind als Fortran Code verfügbar und wurden für diese Arbeit benutzt. Sie sind eine direkte Umsetzung der Rechnungen aus [23] (sowie den dort referenzierten Arbeiten).

In dem 1. Teil der Vorstellung des Faktorisierungstheorems (Abschnitt 2.2) wurde nicht erwähnt, dass üblicherweise Divergenzen in den Berechnungen der Wirkungsquerschnitte auftreten werden, die entsprechend regularisiert werden müssen.

Da in [23] die Größen im  $\overline{MS}$ -System berechnet werden, soll hier nur ein Beispiel dafür angebracht werden, wie die „Kollinearen“-Divergenzen (aus dem Bereich der Kurzzeitphysik), die bei einer expliziten störungstheoretischen Berechnung auftreten, sich doch wegheben können, indem die Dichtefunktion (Langzeitphysik) entsprechend definiert werden. Die restlichen Divergenzen heben sich nach der Regularisierung auf, und es bleiben nur endliche Terme übrig. Für das *DIS*-System siehe [22].

Die „Kollinearen“-Divergenzen entstehen, indem Gluonen von Quark oder Antiquarklinien mit verschwindenden Transversalimpulsen emittiert werden und

dabei einen Beitrag zur Langzeitphysik liefern. Die (divergente) Strukturfunktion erhält dadurch Beiträge

$$F_2|_{div} = Q_f^2 \frac{\alpha_s}{(2\pi)^{2-2\epsilon}} x P(x) \int d^{2-2\epsilon} k_T \frac{1}{k_T^2} \sim \text{const.} \frac{1}{\epsilon}$$

Diese Divergenz wird mit in die Dichtefunktion hineingezogen [18], und diese definieren dann bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  die *neuen* Dichtefunktionen. Sie sind ( $\epsilon > 0$  soll ein kleiner Parameter sein)

$$f_{i,j}(x, \epsilon) = \delta_{ij} \delta(1-x) - \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha_s}{\pi} P_{ij}^{(0)}(x)$$

Der Terme niedrigster Ordnung soll (bis auf die Ladung  $Q_f$ ) die Ladungs- und Impulserhaltung gewährleisten. Die Leseweise der Dichtefunktion ist hier etwas anders als bisher. Anstatt nun  $f_{i/H}$  als eine Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auffinden eines Partons  $i$  im Hadron  $H$ , wird  $f_{i,j}$  als Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auffinden eines Partons vom Typ  $i$  in einem Parton vom Typ  $j$  interpretiert. Das spielt aber keine Rolle, da die Dichtefunktionen universell sind und unabhängig von der Art der Hadronen sein sollen.

Sei nun

$$d\sigma \sim G_{ab}(x_a, x_b, Q, \epsilon)$$

ein differentieller, messbarer Wirkungsquerschnitt. Die Funktion hält sowohl Beiträge aus der Langzeit-, wie auch aus der Kurzzeit-Physik parat. Das Faktorisierungstheorem erlaubt es nun, dass diese Funktion  $G_{ab}$  in folgende Form umgeschrieben werden kann

$$G_{ab}(x_a, x_b, Q, \epsilon) = \sum_{cd} \int_{x_a}^1 d\xi_a \int_{x_b}^1 d\xi_b f_{c,a}(\xi_a, \epsilon) H_{cd}(x_a/\xi_a, x_b/\xi_b, Q, \epsilon) f_{d,b}(\xi_b, \epsilon)$$

Man kann ohne weiteres die Funktion  $H_{cd}$  mit dem differentiellen, harten Wirkungsquerschnitt identifizieren, also

$$H_{cd} = d\sigma_{cd}$$

und dieser ist perturbativ berechenbar.

Das weitere Vorgehen ist nun, da die Dichtefunktionen bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  vorliegen, die Funktionen ebenfalls bis zu dieser Ordnung zu entwickeln und in das Faktorisierungstheorem einzusetzen. Danach liefert ein einfacher Koeffizientenvergleich mit

$$\begin{aligned} H_{ab} &= H^{(0)} + \frac{\alpha_s}{\pi} H^{(1)} \\ G_{ab} &= G_{ab}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{\pi} G_{ab}^{(1)} \end{aligned}$$

die Relationen zur „Born“-Ordnung

$$H_{ab}^{(0)} = G_{ab}^{(0)}$$

und

$$\begin{aligned} H_{ab}^{(1)} &= G_{ab}^{(1)} + \frac{1}{2\epsilon} \sum_c \int_{x_a}^1 d\xi_a P_{ca}(\xi_a) G_{cb}^{(0)}(x_a/\xi_a) \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon} \sum_d \int_{x_b}^1 d\xi_b P_{db}(\xi_b) G_{ad}^{(0)}(x_b/\xi_b) \end{aligned}$$

für die nächsthöhere Ordnung. Die „Splitting-Funktionen“ liegen in der niedrigsten Ordnung vor.

Man benötigt also zur Berechnung nur noch den partonischen und divergenten Wirkungsquerschnitt  $G_{ab}^{(0)}$  und subtrahiert davon die mit der bekannten „Born“-Ordnung multiplizierten „Splitting-Funktionen“, vorausgesetzt die  $G_{ab}^{(1)}$  sind bis auf die „Kollinearen“-Divergenzen regularisiert. Mit diesen Voraussetzungen sind die folgenden Berechnungen, die aus [23] stammen, verständlich.

Nach dem oben Gesagten und nach dem Faktorisierungstheorem [18] kann zunächst jeder partonische Wirkungsquerschnitt in die Form

$$d\sigma_{ij}(P_1, P_2) = \sum_{kl} \int dx_1 dx_2 \Gamma_{ki}^{(H_1)}(x_1) \Gamma_{lj}^{(H_2)}(x_2) d\hat{\sigma}_{kl}(x_1 P_1, x_2 P_2) \quad (19)$$

gebracht werden. Es ist

$$\Gamma_{ij}(x) = \delta_{ij} \delta(1-x) - \frac{1}{\bar{\epsilon}} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} K_{ij}(x) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

mit  $\frac{1}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi)$  als Entwicklungsparameter im  $\overline{MS}$ -Subtraktionsschema.  $d\hat{\sigma}_{kl}$  ist frei von Divergenzen (für  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$ ) und  $P_{ij}(x)$  sind die Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen in niedrigster Ordnung (Abschnitt 2.3). Mit  $K_{ij}(x)$  wird noch eine Funktion bereitgestellt, die bei einem Schematawechsel, z. B. nach *DIS*, ungleich Null wird. Prinzipiell ist sie beliebig. Die Wahl  $K_{ij}(x) = 0$  entspricht dem  $\overline{MS}$ -Schema.

Die linke Seite des Integrals,  $d\sigma_{ij}$ , ist vorhanden (z. B. über dimensionale Regularisierung bestimmt, Appendix B) und ist dann abhängig vom Parameter  $\bar{\epsilon}$ , und in dem Limes  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$  divergieren diese Terme. Diese divergenten Anteile werden durch die  $\bar{\epsilon}$  Anteile nach dem Ausführen des Integrals aufgehoben (durch die Definition der  $\Gamma_{ij}(x)$ ), in dem ein Potenzvergleich auf beiden Seiten zum Entwicklungsparameter  $\alpha_s$  gemacht wird.

Die „Kollinearen“-Faktoren  $\Gamma_{ij}$  werden üblicherweise in die Strukturfunktionen der Hadronen absorbiert. Der erste Term dieser Faktoren entspricht einem Flavour-erhaltenden Anteil. Die Deltafunktion legt fest, dass in unterster Ordnung kein Splitting vorliegt.

Ein messbarer Wirkungsquerschnitt lässt sich dann schreiben als

$$d\sigma_{H_1, H_2}(P_1, P_2) = \sum_{kl} \int d\hat{\sigma}_{kl}(x_1 P_1, x_2 P_2) f_{k/H_1}(x_1, Q^2, \mu) f_{l/H_2}(x_2, Q^2, \mu) dx_1 dx_2 \quad (20)$$

Hier ist die explizite Abhängigkeit der Dichtefunktionen von der Renormalisierungsskala  $\mu$  nochmal aufgeführt.

Es folgen nun die für das Beispiel nötigen Ausdrücke für den reinen Gluonen-Kanal (gg-Kanal) unter Aussendung eines zusätzlichen *kollinearen* Gluons, angedeutet durch das Superskript ( $c\pm$ ). Es ist [23]

$$d\sigma_{gg}^{(c\pm)} = -\frac{s^{-\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{2}{\omega}\right)^\epsilon \frac{C_A \alpha_s^{(b)}}{\pi} \left[ \left(\frac{1}{1-x}\right)_{\bar{\rho}} - 2\epsilon \left(\frac{\log(1-x)}{1-x}\right)_{\bar{\rho}} \right] \cdot \left[ x + \frac{(1-x)^2}{x} + x(1-x)^2 \right] M_{gg}^{(b)}(xs, q_{2,1}) d\Phi_2^{(x)} \quad (21)$$

der differentielle Wirkungsquerschnitt, dass zwei Gluonen ein schweres Quark-Paar plus ein weiteres Gluon erzeugen. Einige Terme werden nun zunächst erklärt.

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)_{\tilde{\rho}}$$

stellt eine Abwandlung der „+“-Distribution dar, die über

$$\frac{1}{(1-z)_+} = \frac{1}{1-z} - \delta(1-z) \int dx \frac{1}{1-x}$$

definiert sind im Intervall

$$z \in (0 \dots 1)$$

einschließlich  $z = 1$  (siehe auch Abschnitt 2.3). Angewandt auf eine Testfunktion  $h(x)$  regularisiert sie den Pol dieser Funktion. Die  $\tilde{\rho}$  Distribution hat als untere Intervallgrenze nicht 0 sondern  $\tilde{\rho}$  mit  $1 \leq \tilde{\rho} \leq \rho$  und  $\rho = \frac{4m^2}{s}$  stellt die „Mindestenergie“ dar zur Erzeugung schwerer Quark-Paare. Damit folgt

$$\int_{\tilde{\rho}}^1 h(x) \left(\frac{1}{1-x}\right)_{\tilde{\rho}} dx = \int_{\tilde{\rho}}^1 \frac{h(x) - h(1)}{1-x} dx$$

Die obige Funktion (aus Gln. (21))

$$M_{gg}^{(b)}(xs, q_{2,1})$$

stellt das „Born“-Matrixelement zur Erzeugung des schweren Paares (+ weiteres, kollineare Gluon) dar, erzeugt durch den „Gluon-Gluon-Fusion“-Prozess zur totalen Subenergie  $xs$  und  $q_i = (p_i - k_i)^2 - m^2$ , ( $i = 1, 2$ ) sowie

$$d\Phi_2^{(x)}$$

ist der Anteil des Phasenraums, indem das *zusätzliche* und kollineare Parton (Gluon) emittiert werden kann. Die letzten beiden Faktoren werden aber im Folgenden nicht benötigt.

Die „Splitting-Funktion“  $P_{gg}$  lautet [23]

$$P_{gg}(x) = 2C_A \left[ \frac{x}{(1-x)\tilde{\rho}} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) + (2b_0 + 2 \log \tilde{\beta})\delta(1-x) \right] \quad (22)$$

mit

$$b_0 = \frac{11C_A - 4T_F n_{lf}}{12\pi}$$

und

$$\tilde{\beta} = \sqrt{1 - \tilde{\rho}}, \quad T_F = \frac{1}{2}, \quad C_A = N_C = 3$$

Der letzte Term proportional zur Deltafunktion  $\delta(1-x)$  wird dem „Soft-Term“, der hier nicht betrachtet wird, dazu gerechnet. Er wird also für den „Kollinearen“-Fall nicht gebraucht werden.  $n_{lf}$  ist die Anzahl an „Light Flavours“ (auch manchmal „Active Flavours“ genannt). Diese Anzahl an Flavours ist meist kleiner als die tatsächliche Anzahl an Flavours. Dazu im nächsten Abschnitt mehr (Abschnitt 2.5).

Das Produkt zweier Faktoren der Form

$$\Gamma_{ij}(x) = \delta_{ij}\delta(1-x) - \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} K_{ij}(x) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

liefert bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  drei Terme. Es brauchen nur  $i = g, j = g$  und  $k = g, l = g$  betrachtet zu werden. Das Produkt ergibt

$$\begin{aligned} \Gamma_{gg}(x_1)\Gamma_{gg}(x_2) &\simeq \delta_{gg}\delta_{gg}\delta(1-x_1)\delta(1-x_2) + \delta_{gg}\delta(1-x_1)\left(-\frac{1}{\bar{\epsilon}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{gg}(x_2)\right) + \\ &\delta(1-x_2)\left(-\frac{1}{\bar{\epsilon}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{gg}(x_1)\right)\delta_{gg} \end{aligned}$$

Die Kronecker-Symbole sind gleich eins und eine Integration über die Deltafunktionen sowie eine Vertauschung der Terme

$$d\hat{\sigma}_{gg}^{(c\pm)}(P_1, P_2)$$

mit

$$d\sigma_{gg}^{(c\pm)}(P_1, P_2)$$

ergibt dann (man möchte den divergenzfreien Term  $d\hat{\sigma}_{gg}^{(c\pm)}(P_1, P_2)$ )

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}^{(c\pm)}(P_1, P_2) &= \tag{23} \\ d\sigma_{gg}^{(c\pm)}(P_1, P_2) &+ \frac{1}{\bar{\epsilon}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{gg}(x_1)d\sigma_{gg}^{(b)}(x_1P_1, P_2)dx_1 + \\ &\frac{1}{\bar{\epsilon}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{gg}(x_2)d\sigma_{gg}^{(b)}(P_1, x_2P_2)dx_2 = \\ d\sigma_{gg}^{(c\pm)}(P_1, P_2) &+ \frac{1}{\bar{\epsilon}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{gg}(x_1)M_{gg}^{(b)}(xs, q_2)d\Phi_2^{(x)} + \tag{24} \\ &\frac{1}{\bar{\epsilon}}\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{gg}(x_2)M_{gg}^{(b)}(xs, q_1)d\Phi_2^{(x)} \end{aligned}$$

Da hier nur angedeutet werden soll, dass diese Subtraktion  $d\hat{\sigma}_{gg}^{(c\pm)}(P_1, P_2)$  divergenzfrei macht, wird hier nur der erste Term aus  $P_{gg}$  (Gln. (22)) genommen und mit dem noch anzugebenden Ergebnis verglichen. Der Rest folgt dann auf dem gleichen Weg.

Zunächst müssen die  $\epsilon$ -Terme in  $d\sigma_{gg}^{(c\pm)}$  (Gln. (21)) umgeschrieben werden <sup>2</sup>. Mit Hilfe der Entwicklung

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\epsilon}} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\bar{\epsilon}}\frac{\partial}{\partial\epsilon} \simeq \frac{\partial}{\partial\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

gilt in dieser Näherung  $\bar{\epsilon} = \epsilon$ . Es folgt also

$$-\frac{s^{-\epsilon}}{\bar{\epsilon}}\left(\frac{2}{\omega}\right)^{\bar{\epsilon}}\frac{C_A\alpha_s\mu^{2\bar{\epsilon}}}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)_{\bar{p}}\right] = -\frac{1}{\bar{\epsilon}}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{\bar{\epsilon}}\left(\frac{2}{\omega}\right)^{\bar{\epsilon}}\frac{2C_A\alpha_s}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)_{\bar{p}}\right]$$

und eine Taylorentwicklung in  $\bar{\epsilon}$  um  $\bar{\epsilon} = 0$  liefert für

$$\left(\frac{\mu^2 2}{s\omega}\right)^{\bar{\epsilon}} = f(\bar{\epsilon}) \simeq f(0) + \bar{\epsilon}f'(0)$$

mit

$$f'(\bar{\epsilon}) \simeq \left(\frac{2\mu^2}{s\omega}\right)^{\bar{\epsilon}} \log \frac{2\mu^2}{s\omega} \quad \text{und} \quad \log \frac{2\mu^2}{s\omega} = -\left(\log \frac{s}{\mu^2} + \log \frac{\omega}{2}\right)$$

<sup>2</sup>In diesem Abschnitt wird in Konsistenz mit [23] der „Logarithmus Naturalis“ mit  $\log$  bezeichnet

Dann folgt weiterhin

$$-\frac{1}{\bar{\epsilon}}(1 + \bar{\epsilon} \log \frac{2\mu^2}{s\omega})2C_A \frac{\alpha_s}{2\pi} = (-\frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log \frac{2\mu^2}{s\omega})2C_A \frac{\alpha_s}{2\pi} =$$

$$(-\frac{1}{\bar{\epsilon}} + \log \frac{s}{\mu^2} + \log \frac{\omega}{2})2C_A \frac{\alpha_s}{2\pi} = -\frac{2C_A \alpha_s}{\bar{\epsilon} 2\pi} + 2C_A \frac{\alpha_s}{2\pi} (\log \frac{s}{\mu^2} + \log \frac{\omega}{2})$$

Dieser Term muss noch mit dem  $x$ -Term aus

$$\left[ x + \frac{(1-x)^2}{x} + x(1-x)^2 \right]$$

(Gln. (21)) multipliziert werden.

Addiert man dazu die Terme, in denen die „Splitting-Funktionen“ involviert sind

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{gg}(x)$$

(wie eingangs vom Faktorisierungstheorem gefordert, siehe auch Gln. (23) und (24);  $P_{gg}(x)$  ist aus Gln. (22) bekannt, auch hier entnimmt man den ersten Term), so sieht man, dass bis zu dieser Ordnung der divergente Anteil sich heraushebt! Dieses ließe sich nun Term für Term wiederholen mit dem Endergebnis [23]

$$d\hat{\sigma}_{gg}^{(c\pm)} = \frac{C_A \alpha_s}{\pi} \left[ \left( \log \frac{s}{\mu^2} + \log \frac{\omega}{2} \right) \left( \frac{1}{1-x} \right)_{\bar{\rho}} + 2 \left( \frac{\log(1-x)}{1-x} \right)_{\bar{\rho}} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ x + \frac{(1-x)^2}{x} + x(1-x)^2 \right] M_{gg}^{(b)}(xs, q_{2,1}) d\Phi_2^{(x)}$$

## 2.5 „Running Coupling“, „Asymptotic Freedom“, „Active Flavours“

In diesem Abschnitt werden die obigen Begriffe erläutert. In der QCD sind sie essenzieller Bestandteil.

Bekanntermaßen ändert die starke Kopplungskonstante ihre Stärke in Abhängigkeit des übertragenen Impulses, wie es Abbildung 6 andeutet. Bei hohen Impulsen wird sie schwach, und eine Störungsrechnung ist möglich.

Neben der Größe  $Q^2$  hängt  $\alpha_s$  im Allgemeinen noch von einer weiteren Skala ab, der Renormierungsskala  $\mu^2$ , die eingeführt werden musste im Zuge der Renormierung. An diesem Punkt  $\mu^2$  werden die ultravioletten Divergenzen subtrahiert (Appendix B).

Jede Größe der QCD muss *unabhängig* sein von dieser Skala  $\mu$ , solange man anstatt einer Störungsentwicklung die volle Theorie betrachtet.  $\mu$  selbst ist völlig willkürlich, und die Größe muss dem Problem entsprechend angepasst werden. Es ist üblich, eine physikalisch messbare Größe  $R(Q^2/\mu^2, \alpha_s)$ , die hier nun von der dimensionslosen Größe  $Q^2/\mu^2$  abhängt, nach  $t = \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$  abzuleiten mit

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}$$



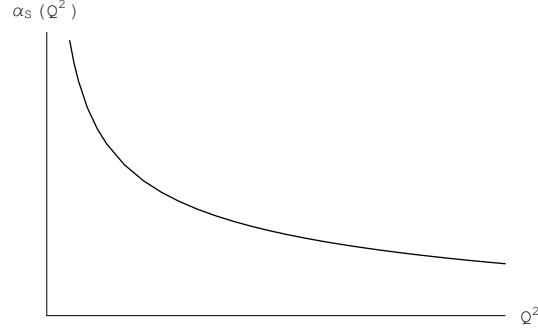


Abbildung 6: Der Verlauf der starken Kopplungskonstanten in Abhängigkeit von einem Parameter  $Q^2$ .

Die Forderung ist, dass diese beobachtbare Größe nicht von der Skala  $\mu$  abhängen darf. Das ergibt [19]

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} R(Q^2/\mu^2, \alpha_s) = \left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R(Q^2/\mu^2, \alpha_s) = 0$$

oder mit

$$\beta(\alpha_s(\mu^2)) = \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2}$$

$$\left[ -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right] R(e^t, \alpha_s) = 0 \quad (25)$$

Es ist möglich, dass  $R$  auch von anderen dimensionslosen Größen abhängen kann; unter Einführung von Quarkmassen könnte  $R(Q^2/\mu^2, \alpha_s, m/Q)$  geschrieben werden. Eine Ableitung nach der Skala ergibt dann einen zusätzlichen Faktor  $-\gamma_m(\alpha_s)m \frac{\partial}{\partial m}$  und mit für  $\gamma_m(\alpha_s)$  kann, wie für die Funktion  $\beta(x)$  (s. u.), eine Störungsreihe angesetzt werden.

Die obige Gleichung (Gln. (25)) wird gelöst durch die Substitution der Form

$$t = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad \alpha_s(\mu^2) = \alpha_s$$

Hierüber wird die Kopplungskonstante  $\alpha_s$  als „Running Coupling Constant“ eingeführt, da eine Abhängigkeit vom Impulsübertrag  $Q^2$  besteht.

Differentiation der Substitution liefert

$$\frac{\partial(\alpha_s(Q^2))}{\partial t} = \beta(\alpha(Q^2)), \quad \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial \alpha_s} = \frac{\beta(\alpha_s(Q^2))}{\beta(\alpha_s)}$$

Für den Punkt  $\mu^2 = Q^2$  ist die Gleichung sofort erfüllt, denn

$$\left[ \beta(\alpha_s(\mu^2)) \frac{\partial}{\partial \alpha_s(\mu^2)} \right] = \frac{\partial}{\partial t}$$

so dass  $R(1, \alpha_s(\mu^2))$  eine Lösung der Gleichung darstellt. Aber auch für alle anderen Werte von  $Q^2 \neq \mu^2$  liefert diese Substitution sofort die Lösung. Die

zweite Bedingung lässt sich umformen zu

$$\frac{\beta(\alpha_s(Q^2))}{\beta(\alpha_s(\mu^2))} \frac{\partial}{\partial \alpha_s(Q^2)} = \frac{\partial}{\partial \alpha_s(\mu^2)}$$

Multiplikation mit  $\beta(\alpha_s(\mu^2))$  liefert

$$\beta(\alpha_s(Q^2)) \frac{\partial}{\partial \alpha_s(Q^2)}$$

Nun ist

$$\beta(\alpha_s(Q^2)) = Q^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\partial}{\partial t}$$

was die Substitution sofort für alle Impulsüberträge löst.

Die Gleichung

$$t = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{dx}{\beta(x)}$$

ist nur dann störungstheoretisch zu lösen, wenn  $\alpha_s(Q^2)$  hinreichend klein ist, d.h., der Impulsübertrag muss bezogen auf allen anderen Skalen, die in diesen Gleichungen auftauchen (hier nur  $\mu$ ), hinreichend groß sein.

Die Funktion  $\beta(\alpha_s)$  kann dann ebenfalls in eine Reihe mit  $\alpha_s$  als Entwicklungsparameter angenähert werden. Man setzt

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial Q^2} = \beta(\alpha_s)$$

und setzt für  $\beta(\alpha_s)$

$$\beta(\alpha_s) = -\alpha_s \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{n+1}$$

mit  $\beta_0 = 4\pi b = 11 - \frac{2}{3}n_f$ ,  $\beta_1 = 16\pi^2 b b' = 102 - \frac{38}{3}n_f$ , ...  
Gleichungen der Form

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial Q^2} = -b\alpha_s^2(Q^2) [1 + b'\alpha_s(Q^2) + \mathcal{O}(\alpha_s^2(Q^2))]$$

sind einfach zu lösen. In niedrigster Ordnung ergibt sich

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) b t}$$

mit  $t = \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$  und zeigt, dass für  $\mu^2 \leq Q^2 \rightarrow \infty$   $\alpha_s \rightarrow 0$ , was allgemein als „Asymptotic Freedom“ bezeichnet wird. Dieses gilt, solange das Vorzeichen von  $b$  sich nicht ändert ( $n_f < 17$ , s. u.). Diese Gleichung beschreibt die Veränderung der Kopplungskonstante entlang der Skala  $Q^2$  im Vergleich zur Renormierungsskala  $\mu^2$ . Es sind noch explizit

$$b = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}, \quad b' = \frac{153 - 19n_f}{2\pi(33 - 2n_f)}$$

Die obige LO-Darstellung ist häufig noch in folgender Form anzutreffen

$$\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = - \int_{\alpha_s(Q^2)}^{\infty} \frac{dx}{\beta(x)} = \int_{\alpha_s(Q^2)}^{\infty} \frac{dx}{bx^2(1+b'x+\dots)}$$

Die obere Grenze erstreckt sich bis in das Unendliche, also in den nicht perturbativen Bereich. Das ist vernünftig, denn eine Reihenentwicklung, wie sie die rechte Seite andeutet, ist dort nicht möglich. Lösen bis LO liefert

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}$$

Die Größe  $\Lambda$  ist ebenfalls ein Parameter und muss angepasst werden. Sie dient als Vergleichsgröße, ähnlich der Renormierungsskala  $\mu^2$  und tritt auf der linken Seite als Integrationskonstante auf. Sie erlaubt, für  $\alpha_s(Q^2)$  eine asymptotische Form anzugeben. Meist liegt  $\Lambda$  im Bereich von 200 MeV. Diese Gleichung kann auch als Definitionsgleichung angesehen werden [25], und zwar über eine Umstellung

$$\Lambda^2 = \mu^2 e^{-\int^{\alpha_s} \frac{dx}{\beta(x)}}$$

mit  $\frac{\partial \Lambda^2}{\partial \mu^2} = 0$  (bei der Ableitung muss nur beachtet werden, dass die obere Grenze ebenfalls von  $\mu^2$  abhängig ist; mit  $\mu^2 \frac{\partial \alpha_s(\mu^2)}{\partial \mu^2} = \beta(\alpha_s(\mu^2))$  folgt die Forderung). Die untere Grenze ist dabei offen gelassen worden, um die Willkür des Parameters zu kennzeichnen. Üblich ist aber die erstere Darstellung. Bis NLO können beide Ergebnisse durch Trennung der Variablen und einer einfachen Partialbruchzerlegung abgeleitet werden. Die erste Gleichung lautet

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial Q^2} \simeq -b\alpha_s^2 - bb'\alpha_s^3 \leftrightarrow \frac{d\alpha_s}{-b\alpha_s^2 - bb'\alpha_s^3} = \frac{dQ^2}{Q^2}$$

mit der Lösung

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + b' \ln \frac{\alpha_s(Q^2)}{1+b'\alpha_s(Q^2)} - b' \ln \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+b'\alpha_s(\mu^2)} = bt$$

mit  $t = \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$ . Die Lambda-NLO-Darstellung folgt analog der LO-Darstellung. Sie ergibt

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} + b' \ln \frac{b'\alpha_s(Q^2)}{1+b'\alpha_s(Q^2)} = b \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

Mit einer inversen Entwicklung nach Potenzen von  $\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$  [25, 26], und die Gleichung lässt sich wie folgt approximieren

$$\alpha(Q^2) = \frac{1}{b \ln(Q^2/\Lambda^2)} \left[ 1 - \frac{b'}{b} \frac{\ln \ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \dots \right]$$

Das  $\Lambda$  hängt (implizit) von der Anzahl der Flavours ab. Man kann diese Abhängigkeit auch an den Konstanten  $b, b'$  erkennen, worin die Anzahl an „Active Flavours“ gesetzt wird. Unter Hinzunahme schwerer Quarks wird

$$n_f = n_l + n_h$$

wobei  $n_l$ =Anzahl an „Light Flavours“ und  $n_h$ =Anzahl an „Heavy Flavours“ ist. Meist ist  $n_h = 1$  und stellt das „Bottom“-Quark dar und Vernachlässigung des „Top“-Quark. Die „Active Flavours“ sind ist die Anzahl der Flavours, die zur Auswertung z. B. der Koeffizienten  $b, b'$  genommen werden.

Es ergibt sich dann die Bedingung, einen kontinuierlichen Verlauf der Kopplungskonstante erlangen zu müssen (für jede Störungsordnung), wenn die Anzahl der Flavours um eins erhöht wird. Die Forderung ist eine Stetigkeitsforderung für die Kopplung, z. B. wenn in ein Schema das  $b$ -Quark hinzugefügt wird

$$\alpha_s(m_b^2, 4) = \alpha_s(m_b^2, 5)$$

Wenn  $Q^2 > m_b^2$ , so sollte  $\alpha(Q^2, 5)$  benutzt werden; sollte  $m_c^2 \leq Q^2 \leq m_b^2$  gelten, dann muss  $\alpha_s(Q^2, 4)$  für die jeweilige Ordnung benutzt werden. Damit hat sich auch die Anzahl der „Active Flavours“ erhöht.

## 2.6 Etwas Reggetheorie und die Unitarisierung über die Eikonalnäherung

In Abschnitt 2.2 wurde eine allgemein gültige Form für die Beschreibung des Hadroneninhalts (Partonendichte) in parametrisierter Form vorgestellt,

$$f(x, Q_0) = A_0 x^{A_1} (1-x)^{A_2} P(x)$$

mit verschiedene Exponenten bzgl. der Partonenarten. Gültigkeit besitzen solche Ausdrücke als Anfangsbedingung in der obigen Form nur für ein fest gewählten Impulsübertrag  $Q_0$ . Mit Hilfe der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Altarelli-Parisi-Integro-Differentialgleichungen lassen sich diese Anfangsbedingungen zu anderen Skalen  $Q$  hin entwickeln, wodurch in *weiten* Bereichen der  $(x, Q)$ -Ebene der Partoneninhalt hinreichend genau bekannt ist.

Im Folgenden soll nun durch die Vorstellung der Reggetheorie u. a. die Ausgangsform dieser Anfangsbedingung nahe gebracht werden, was sowohl Basis als auch Exponenten betrifft. Für diese Erklärungen muss etwas ausgeholt werden.

Störungstheoretische Rechnungen können nur dann von Erfolg sein, wenn die der Theorie zugrunde liegende Kopplungskonstante einen entsprechenden kleinen Wert besitzt. Dieser Bereich wird meist als perturbative *harte* QCD (pQCD) bezeichnet. Kann keine Störungsentwicklung vorgenommen werden, so können physikalische Aussagen nur noch heuristischer Natur sein.

Was die QCD betrifft, so gibt es neben der pQCD auch die Möglichkeit, modellhafte Entwicklungen im *semi-harten* Bereich der Theorie vorzunehmen. Hier können qualitative Berechnungen durch Parameteranpassung durchgeführt werden.

Die Reggetheorie, die Anfang der 60'er Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelt wurde, ist eines dieser Modelle, und obwohl früher auf dem Markt, kann sie heute nur als ein Teilaspekt der QCD *überleben*, indem sie den störungstheoretisch nicht zugänglichen Bereich beschreibt. Einen vollständigen Überblick über die Entwicklung der Reggetheorie kann man in [27] oder [28, 29] finden. Eine Zusammenstellung vieler Eigenschaften findet sich in [30, 31]. Weiter Beispiele, auch in

Bezug auf die oft erwähnten „Cutting Rules“ (AGK Cutting Rules) [32], sind in [33, 34, 35, 36] zu finden. Eine Einführung in das „Dual Parton Model“, auf dem auch das Programm DPMJET III basiert, kann in [37] gefunden werden. Weiterführendes zu DPMJET III ist in [38, 39, 40] zu finden (sowie deren Anhänge).

Es folgt nun eine kurze Ableitung, wie es möglich ist, durch eine Erweiterung der nicht-relativistischen Streuamplitude auf eine Streuamplitude mit komplexwertigen Drehimpulswerten sowie eine Erweiterung auf den relativistischen Fall, Aussagen über die  $s$ -Kanal-Streuamplitude auf den *gekreuzten*  $t$ -Kanal auszuweiten, und diese Ergebnisse als einen Austausch an hypothetischen Teilchen (den Reggeons bzw. Pomerons) zu deuten.

Im Folgenden soll mit der Nennung „Reggeon“ oder „Pomeron“ stets ein Austausch an Quantenzahlen gemeint sein, da *ein* „Reggeon“ bzw. „Pomeron“ als ein *isoliertes* Teilchen nicht existiert (wie etwa ein  $\pi$ -Meson). Die Reggeons, die in Form von Trajektorien in einem Spin-Masse-Diagramm („Chew-Frautschi Plot“) dargestellt werden können, und sich in der komplexen Drehimpulsebene als „Pole“ bzw. sog. „Cuts“ manifestieren können („Pole“ sind mit dem Austausch *eines* Teilchens assoziiert, „Cuts“ entstehen bei einem Austausch von *mehreren* Teilchen), beinhalten bei einem Austausch im  $t$ -Kanal ganze Teilchenfamilien (sobald kinematisch möglich).

Bekanntermaßen kann die Streuamplitude  $f$  einer Streuung, wie sie in Abbildung 7 zu sehen ist, zerlegt werden nach Drehimpulseeigenwerten [30].

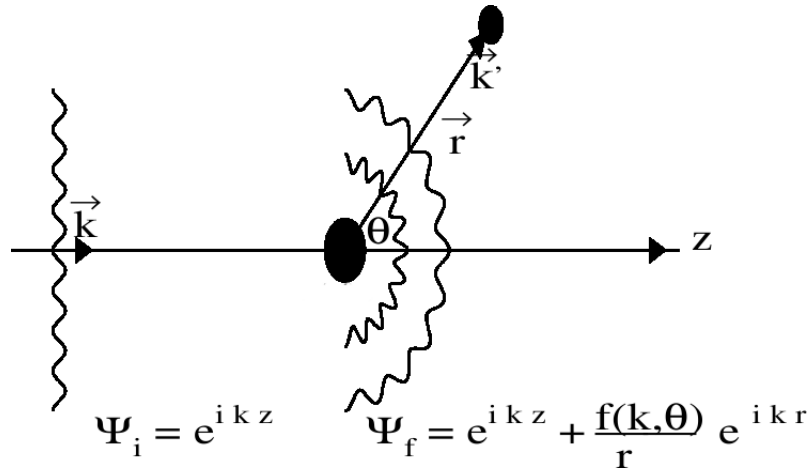


Abbildung 7: Elastische Streuung einer „Ebenen Welle“ mit Impulsvektor  $\vec{k}$  an einem Streuzentrum mit der Ausdehnung  $a$  unter Aussendung einer „Kugelwelle“ mit Impulsvektor  $\vec{k}'$  [30].

Ein Ansatz ist, mit  $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$  (elastische Streuung), in der Abbildung gegeben, wenn das Potential sphärisch symmetrisch ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Streuung kann dann über die Streuamplitude  $f(k, \theta)$  angegeben werden zu

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = 2\pi |f(k, \theta)|^2$$

mit der üblichen Entwicklung [27]

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta)$$

und  $r \rightarrow \infty$  sowie  $ka \gg 1$ , wobei  $a$  einer typischen Reichweite (oder Ausdehnung) entspricht, die der Streuer besitzt.  $P_l$  sind die bekannten Legendre-Polynome.

Wird die quantenmechanische Streuamplitude auf relativistisch invariante Weise erweitert, entsteht ein ähnlicher Ausdruck für  $s \rightarrow \infty$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{1}{64\pi^2 s} |A(s, t)|^2$$

$A(s, t)$  ist die Streuamplitude in Abhängigkeit der beiden Mandelstam-Invarianten  $s, t$ , die durch  $s = (p_1 + p_2)^2$  und  $t = (p_1 - p_3)^2$  definiert sind ( $p_1, p_2, p_3, p_4$  entsprechen den Viererimpulse einer  $2 \rightarrow 2$ -Reaktion). Auch für diese Amplitude existiert eine Entwicklung nach Drehimpulswerten  $l$  in der Form

$$A(s, \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(\cos \theta)$$

Durch eine Orthogonalitätsrelation ist es möglich, die Faktoren  $A_l(s)$  zu isolieren. Es gilt

$$A_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta P_l(\cos \theta) A(s, \cos \theta)$$

Mit einer Vertauschung  $s \leftrightarrow t$  kann die Analyse zum  $t$ -Channel hin erweitert werden plus der Ersetzung  $\cos \theta \rightarrow \cos \theta_t = 1 + \frac{2s}{t-4m^2}$  ( $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ , Appendix C) [27].

Regge [41, 42] erweiterte die Zerlegung der Amplitude  $A_l(t)$  nach Drehimpulswerten für komplexe Drehimpulswerte  $l$ . Die Idee zu einer analytischen Fortsetzung ist einfach, denn über den Residuensatz kann eine derartige Summe sofort konstruiert werden

$$\int_C dl \underbrace{\frac{f(s, z)}{(l-l_1)(l-l_2)(l-l_3)\dots(l-l_n)}}_{\tilde{f}(s, z)} = 2\pi i \sum_{Res}^n \tilde{f}(s, z)$$

und  $C$  stellt eine komplexe Kontur dar, z. B.  $C \in (\infty + i\epsilon, \infty - i\epsilon)$ , die die positiven reellen Werte  $l_1, l_2, \dots, l_n$  umschließt, und  $z = \cos \theta$ . Da aber über alle Drehimpulse  $l$  summiert werden muss, ist es einfacher, eine Funktion zu finden, die bei allen nötigen Drehimpulswerte einen Pol 1. Ordnung besitzt. Das leistet die Funktion

$$\sin(\pi l)$$

Entwickelt man die Sinus-Funktion in ein Taylorreihe um eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  bis zur 1. Ordnung, dann entsteht

$$\sin(\pi l) \simeq \sin(\pi n) + (-1)^n \pi (l - n) = (-1)^n \pi (l - n)$$

Dadurch wird ein Pol 1. Ordnung sichtbar. „Schrumpft man“ die Kontur  $C$  an die Pole heran, und ist ansonsten  $f(s, z)$  holomorph, so gilt der einfache

Residuensatz.

Wendet man diese Kenntnis auf die Streuamplitude  $A(s, z)$  an, so muss für  $A_l(s)$  eine interpolierende Funktion  $A(l, s)$  (analytische Fortsetzung) gefunden bzw. garantiert werden. Unter dieser Annahme und mit  $\text{Re } l \geq N$  ist es dann gestattet, die Amplitude  $A(s, z)$  wie folgt zu schreiben

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1)A_l(s)P_l(z) - \frac{1}{2i} \int_C (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin(\pi l)} dl$$

Das Residuum des Integranden soll nun ab dem Index  $N$  holomorph sein. Öffnet man dann die Kontour  $C$  und deformiert sie zu  $C'$ , mit  $C' \in (a - i\infty, a + i\infty)$ , wobei  $a$  ( $a \geq N$ ) eine reelle Zahl ist, dann ändert sich aufgrund der Holomorphie des Integranden der letzte Ausdruck nicht. Es existiert nun ein Weg, der parallel zur imaginären Achse verläuft, durch die reelle Achse bei  $a$ .

Als nächstes steht eine Verschiebung der Kontour  $C'$  nach links an. Das ist bis

$$-\frac{1}{2} \leq \text{Re } l < 0$$

möglich. Überstreicht dabei dieser Weg Singularitäten der Funktion  $A(l, s)$ , so müssen die Residuen dieser Funktion mit aufsummiert werden. Diese Singularitäten heißen, sollten sie Pole der Amplitude  $A(l, s)$  sein, „Regge Pole“ und man bezeichnet sie mit  $l = \alpha_i(s)$ . Es entsteht

$$A(s, z) = - \sum_i (2\alpha_i(s) + 1)\beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i(s)}(-z)}{\sin(\pi\alpha_i)} - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin(\pi l)} dl$$

$\beta_i(s)$  ist das Residuum der Amplitude  $A(l, s)$ . Zu beachten ist, dass durch eine Verschiebung der Kontour nach links zu kleineren Drehimpulsen einige Terme der Summe durch das Auftreten der Residuen bei den Polen der Funktion  $\sin(\pi l)$  ersetzt werden. Für  $c$  gilt

$$-\frac{1}{2} \leq \text{Re } c < 0$$

Die Legendre-Polynome haben die Eigenschaft, dass für  $|z| \rightarrow \infty$

$$P_l(z) \sim z^l$$

gilt, wobei  $z = \cos \theta \simeq 1 + 2t/s$  gesetzt wird. Ist  $s$  fixiert und  $t \rightarrow \infty$ , dann gilt obige Behauptung, und das Integral fällt unter der Bedingung  $|z| \rightarrow \infty$  und  $\text{Re } l = -\frac{1}{2}$  wie  $|z|^{-1/2}$  ab. Solange man sich in diesem  $l$ -Bereich aufhält, ist die Konvergenz gewährleistet. Die zweite Bedingung ist etwas gewagt, aber es wird sich zeigen, dass bei der Betrachtung anderer Werte von  $l > -\frac{1}{2}$  die Aussagekraft dieser Theorie trotzdem im Wesentlichen erhalten bleiben wird, denn die Amplitude  $A(l, s)$  soll gegen 0 tendieren für  $|l| \rightarrow \infty$ . Damit überlebt nur die Summe

$$A(s, z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\simeq} - \sum_i \beta_i(s) \frac{(-z)^{\alpha_i(s)}}{\sin \pi \alpha_i(s)}$$

In  $\beta_i(s)$  sind alle restlichen Konstanten enthalten.

Meist wird aus dieser Summe derjenige Summand heraus betrachtet, für den

$Re \alpha_i(s)$  am größten ist, und man bezeichnet ihn mit  $\alpha(s)$  („Regge Trajektorie“). Damit kann für das asymptotische Verhalten für den  $t$ -Kanal die Amplitude wie

$$A(s, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} -\beta(s) \frac{t^{\alpha(s)}}{\sin \pi \alpha(s)}$$

geschrieben werden. Bemerkte sei noch, dass es ein asymptotisches Verhalten für den Kanal der Form  $t \rightarrow \infty$  im  $s$ -Kanal nicht geben kann, da  $t \leq 0$  gelten muss. Diese Ableitung gilt für eine Zerlegung im  $s$ -Kanal für eine Reaktion  $ab \rightarrow a'b'$ . Existiert dahin gegen ein gekreuzter Kanal (indem alle Quantenzahlen der vertauschten Teilchen durch ihr Negatives ersetzt wurden inkl. Impuls) für diese Reaktion der Form  $a\bar{a}' \rightarrow \bar{b}b'$ , dann ist  $t \geq 0$ , und diese Ableitung ist gültig für  $s \rightarrow \infty$ , und es entsteht bei der Vertauschung  $t \leftrightarrow s$

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} -\beta(t) \frac{s^{\alpha(t)}}{\sin \pi \alpha(t)}$$

Über die Residuumsfunktion  $\beta$  kann zunächst nichts weiter ausgesagt werden.

Die bisherige Darstellung bezieht sich auf die nicht-relativistische Streutheorie. Der Übergang zur relativistischen Theorie führt bei ähnlicher Ableitung eine weitere Quantenzahl, die Signatur  $\xi = \pm 1$ , ein [27, 43, 28]. Die Amplitude  $A(s, z)$  ist eine Überlagerung von geraden und ungeraden Drehimpulsen  $l$ . Die Koeffizienten der Entwicklung,  $A_l(t)$  bzw.  $A(l, t)$  unterscheiden über diese Signatur, welcher Drehimpulseigenwerten gerade zur Streuamplitude beiträgt. Die Überlagerung liefert für Streuamplitude

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} -\beta(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi \alpha(t)} s^{\alpha(t)} = \beta(t) \eta(t) s^{\alpha(t)}$$

mit dem Signaturfaktor  $\eta(t) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)}}{\sin \frac{\pi\alpha(t)}{2}}$  für  $\xi = +1$  und  $\eta(t) = -i\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)}}{\cos \frac{\pi\alpha(t)}{2}}$  für  $\xi = -1$ .

Für  $l \rightarrow \alpha(t)$  kann für die Koeffizientenfunktionen

$$A(l, t) \underset{l \rightarrow \alpha(t)}{\rightsquigarrow} \frac{\beta(t)}{l - \alpha(t)}$$

angenommen werden, da der Sinus nach Voraussetzung Pole 1. Ordnung in der Umgebung von  $Re l$  hat. Wird dazu noch eine Entwicklung in  $\alpha(t)$  der Form  $\alpha(t) \simeq \alpha(t_0) = l + i\epsilon$  mit reellem  $\epsilon$  gemacht, so gilt

$$\alpha(t) \simeq l + i\epsilon + \alpha'(t_0)(t - t_0)$$

Damit verhält sich der Nenner wie

$$\frac{1}{l - \alpha(t)} \propto \frac{1}{t - t_0 + i\Gamma}$$

mit  $\Gamma = \frac{Im \alpha(t_0)}{\alpha'(t_0)} = \frac{\epsilon}{\alpha'(t_0)}$  (für eine Abhängigkeit der Größen  $\alpha(t_0)$  und  $\alpha'(t_0)$  von den ausgetauschten Massen siehe z. B. [44, 45]). Das ist die typische Breit-Wigner Form einer Teilchenresonanz mit der Masse  $\sqrt{t_0} = M$ . Die Ableitung



zeigt also, dass immer dann, wenn die Trajektorie  $\alpha(t)$  für *nicht physikalische* Werte von  $t$  im  $s$ -Kanal, also für  $t > 0$ , ganzzahlige Werte annimmt, damit gleichzeitig ein Austausch eine Masse  $\sqrt{t_0}$  verbunden ist. Die Beobachtung ist, dass es tatsächlich detektierbare Teilchen gibt mit diesen Massen mit dem Gesamtdrehimpuls  $l$ , und diese Teilchen liegen allesamt auf *einer* Trajektorie  $\alpha(t)$ , die der Beziehung

$$\alpha(t) \simeq \alpha(0) + \alpha'(0)t$$

gehört. Diese Teilchen, die diese Eigenschaften besitzen, gehören zu einer Familie. Abbildung 8 ([44, 45, 34]) zeigt dazu ein Beispiele bosonischer Teilchenfamilien. Die Signatur  $\xi = \pm 1$  interpoliert, wie man in den Abbildungen sieht, zwischen geradem und ungeradem Drehimpuls.  $\xi = 1$  beschreibt Familien mit geradem und dementsprechend interpoliert  $\xi = -1$  für ungerade Drehimpulse.

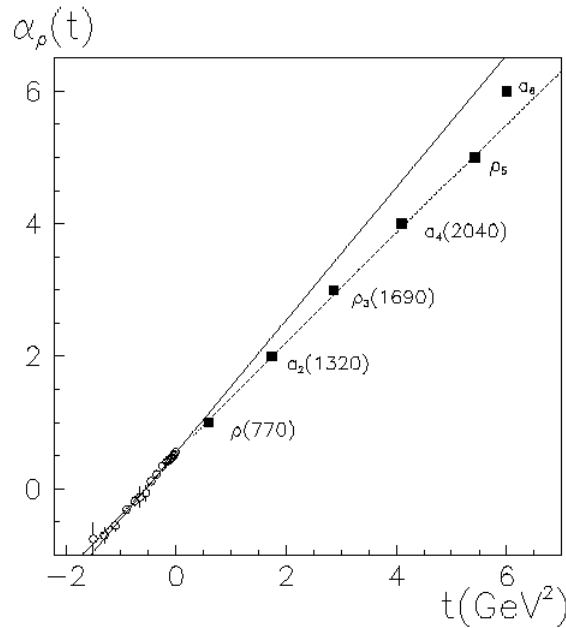


Abbildung 8:  $\rho, f, a$  Trajektorien. Alle Quantenzahlen der ausgetauschten Teilchen, ausser seinem Drehimpuls  $J = \alpha(t)$  und seiner Masse  $m_p = \sqrt{t}$ , sind festgehalten [31].

Alle Regge-Trajektorien (Mesonen) haben einen Achsenabschnitt bei  $t = 0$ , für den

$$\alpha(0) \leq 0.5$$

gilt, sowie eine Steigung von etwa

$$\alpha'(0) \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$$

baryonische Trajektorien haben einen deutlich kleineren Wert von  $\alpha(0)$  wegen ihrer größeren Masse [44, 45].

Zusammenfassend kann die Situation gemäß Abbildung 9 [31] verstanden werden. Eine Streuamplitude  $A(s, t)$  zeigt für den physikalischen Bereich  $t < 0$  Resonanzen auf, im Bereich  $t > 0$  hingegen kann diese Amplitude fortgesetzt werden, und dort zeigt sie einen Austausch eines Teilchens (bzw. einer Teilchenfamilie, „Reggeons“) der Masse  $\sqrt{t}$ . Die (prinzipiell unendliche) Summe ihrer „Objekte“ führt in beiden Situationen zu gleichen Ergebnissen (im  $s \rightarrow \infty$  Limes) (siehe auch [46]).

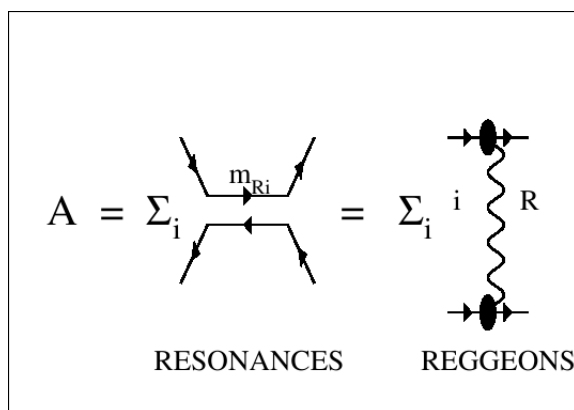


Abbildung 9: Dualität zwischen der *physikalischen*  $t < 0$  und der *unphysikalischen*  $t > 0$  Region [31].

Das „Optische Theorem“ gibt Auskunft über den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{tot}$  [27]. Dieser kann im Limes  $s \rightarrow \infty$  angegeben werden als

$$\sigma_{tot} \sim \frac{1}{s} \text{Im} A_{el}(s, t = 0)$$

Nur über die elastische Amplitude einer Reaktion ist dieser Wirkungsquerschnitt festgelegt! Setzt man den Regge-Ansatz in diese Formel ein, so ergibt sich

$$\sigma_{tot} \sim s^{\alpha(0)-1}$$

mit  $\alpha(0) \leq 0.5$ . Man sieht dadurch keine Verletzung der Unitarität entstehen, im Gegensatz zu dem früher angenommenen Mesonenaustausch, der zu den starken Kernkräften führen soll (und der in der Physik der Kernbindung eine wichtige Rolle spielt). In diesem Modell wurde die Amplitude

$$A_{mes}(s, t) \sim A_l(t) P_l(\cos \theta_t)$$

mit  $\cos \theta_t = 1 + \frac{2s}{t-4m^2}$  angenommen. Dieses Modell führt aber zu

$$A_{mes}(s, t) \sim \frac{P_l(\cos \theta_t)}{t - M^2}$$

und mit dem asymptotischen Verhalten für die Legendre-Polynome  $P_l(z) \rightarrow z^l$  gilt

$$A_{mes}(s, t) \sim s^l$$

für  $s \rightarrow \infty$ . Mit dem „Optischen Theorem“ wird der totale Wirkungsquerschnitt zu

$$\sigma_{tot} \sim s^{2l-2}$$

Natürlich führen dann Mesonen mit Spin größer als  $l = 1$  zu einer Verletzung der Unitarität. Dies war ein Grund zur Einführung der „Reggeons“ und zeigt den Erfolg dieses Modells.

Neben den Reggeons gibt es allerdings Objekte, die einen Achsenabschnitt  $\alpha(0) = 1 + \epsilon$  mit  $\epsilon > 0$  besitzen, wodurch der totale Wirkungsquerschnitt in Potenzen von  $s$  anwächst und schließlich die Unitarität verletzt („Froissart-Martin Bound“, nach dem der totale Wirkungsquerschnitt für  $s \rightarrow \infty$  nicht stärker als  $\sigma_{tot} \leq C \ln^2 s$  ( $C = \text{konst.}$ ) wachsen darf [27, 31]), die durch die  $S$  Matrix gefordert wird. Diese Objekte, „Pomerons“ genannt, sind ursprünglich eingeführt worden, um den erwarteten *konstanten* Wirkungsquerschnitt für  $s \rightarrow \infty$  zu gewährleisten. Es entspricht keinem bekannten Teilchen, da sein Austausch im  $t$ -Kanal mit einem Austausch von Vakuumquantenzahlen verbunden ist.

Zur Wiederherstellung der Unitarität wird das aus der Optik bekannte Eikonallbild herangezogen, welches für kleine Streuwinkel im Limes  $s \rightarrow \infty$  in der Hochenergiephysik angewendet werden kann. Mit ihr lässt sich eine einfache Gleichung ableiten, in der die Unitarität im Impact-Parameter-Raum (Stoßparameter) dargestellt werden kann. Wegen des „Optischen Theorems“  $\sigma_{tot} \sim \frac{1}{s} \text{Im } A(s, 0)$  wird die Streuamplitude betrachtet über

$$\begin{aligned} A(s, t) &= \frac{s}{4\pi} \int d^2\vec{b} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} A(s, b) = 2is \int d^2\vec{b} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} \Gamma(s, b) = \\ &= 4\pi is \int db b J_0(qb) \Gamma(s, b) \end{aligned}$$

mit  $t \simeq -\vec{q}^2$  und der Definition  $\Gamma(s, b) = -\frac{i}{8\pi} A(s, b) = 1 - e^{2i\delta(s, b)}$  die als „Profilfunktion“ bekannt ist. Im letzten Schritt wurde von der Definition der Bessel-Funktion Gebrauch gemacht

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} d\phi$$

Bis auf evtl. Normierungsfaktoren sollte dann daraus sofort ersichtlich sein, dass das Betragsquadrat der Amplitude proportional zum entsprechenden Wirkungsquerschnitt ist. Also

$$\sigma_{el} = \int d^2\vec{b} |\Gamma(s, b)|^2$$

und

$$\sigma_{tot} = 2 \int d^2\vec{b} \text{Re } \Gamma(s, b)$$

Hier wird wg. der Definition der „Profilfunktion“  $\Gamma$  der Realteil der Amplitude zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes benötigt. Schließlich gilt noch wegen

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \sigma_{el} + \sigma_{inel} \\ \sigma_{inel} &= \int d^2\vec{b} G_{in}(s, b) \end{aligned}$$

mit  $G_{in}(s, b)$  als Wahrscheinlichkeit für eine inelastische Wechselwirkung. Dann gilt

$$\sigma_{inel} = \int d^2\vec{b} [2Re \Gamma(s, b) - |\Gamma(s, b)|^2]$$

Die angesprochene Grundgleichung im Stoßparameter-Raum lautet damit

$$2Re \Gamma(s, b) - |\Gamma(s, b)|^2 = G_{in}(s, b)$$

Man definiert

$$\Omega(s, b) = -2i\delta(s, b)$$

als Opazität ( $\delta(s, b)$  vermittelt eine Phasenverschiebung), so dass für die „Profilfunktion“ die Gleichung

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{-\Omega(s, b)}$$

entsteht. Hieraus wird die Interpretation als Wahrscheinlichkeit für eine inelastische Wechselwirkung deutlich. Damit kann der Term  $e^{-\Omega(s, b)}$  als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass *keine* inelastische Wechselwirkung stattgefunden hat. Schließlich seien die Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit der Opazität angegeben

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \int d^2\vec{b} |1 - e^{-\Omega(s, b)}|^2 \\ \sigma_{tot} &= 2 \int d^2\vec{b} Re [1 - e^{-\Omega(s, b)}] \\ \sigma_{inel} &= \int d^2\vec{b} [1 - |e^{-\Omega(s, b)}|^2] \end{aligned}$$

Die Phase  $\delta(s, b)$  enthält im Prinzip sowohl Real- als auch einen Imaginärteil. In der Definition der Opazität überlebt im „High Energy Limit“ praktisch nur der effektive Realanteil. Im „Black Disc Limit“,  $Re \Omega \rightarrow \infty$ , sind  $\sigma_{el} = \sigma_{inel} = \frac{1}{2}\sigma_{tot} = \pi R^2$ . Spielen inelastische Anteile keine Rolle, so ist die Opazität rein imaginär. Im Weiteren wird aber davon ausgegangen, dass die Opazität reell ist.

Die Amplitude im relativistischen Fall für einen Austausch eines Reggeons oder Pomerons war oben mit

$$A(s, t) = \beta(t)\eta(t)s^{\alpha(t)}$$

angegeben worden. Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt dann mit Hilfe des „Optischen Theorems“ und unter Beachtung, dass die Signatur  $\eta(t)$  nahe dem Entwicklungspunkt  $t \simeq 0$  rein imaginär ist, also  $\eta(0) = i$ ,

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)-1} i g_1(t) g_2(t)$$

Für die Faktoren wird  $g_1(t)g_2(t) = \beta(t)$  angenommen. Das Residuum  $\beta(t)$  wird als faktorisiert angesehen, da der Rest im „Feynmanschen Sinne“ den Austausch an Quantenzahlen beschreibt. Für die *Stärke* einer Wechselwirkung werden dann noch Vertizes benötigt, und  $s_0$  stellt eine willkürliche Skala dar, wie

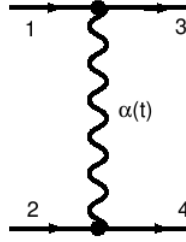


Abbildung 10: Austausch eines Reggeons/Pomerons im  $t > 0$ -Kanal mit der Trajektorie  $J = \alpha(t)$  in Form eines Feynman-Diagramms [34].

sie in der QCD stets vorkommt. Sie ist in der Größenordnung von  $s_0 \sim 1 \text{ GeV}^2$ , kann aber, wie jede Skala, frei gewählt werden. Diese Annahme soll Abbildung 10 verdeutlichen.

Im Stoßparameter-Raum werden diese „Kopplungskonstanten“ in Gauß-Form gebracht. Sie lauten

$$g_i(t \simeq -\vec{k}^2) = g_i(0)e^{-R_i^2 \vec{k}^2}, \quad i = 1, 2$$

Die Abbildung 10 beschreibt also einen Austausch eines Pomerons, dessen Propagator

$$\eta(t)s^{\alpha(t)}$$

ist, mit Vertizes  $g_1(t) = g_{13}(t)$  und  $g_2(t) = g_{24}(t)$ , die in der Abbildung 10 als Dots zu sehen sind.

Stillschweigend wurde bisher  $t \simeq -\vec{k}^2$  gesetzt. Der übertragene Impuls besitzt keine (bzw. eine vernachlässigbare) Nullkomponente, was in Abbildung 11 durch eine „quasi-elastische“ Darstellung verdeutlicht werden soll. Das spiegelt einfach das Verhalten wider, dass der Austausch von Reggeons im einfachsten Fall eine elastische Streuung reproduzieren muss (es sind die *ungeschnittenen* Fälle, siehe AGK, folgende Seite).

Durch eine Fouriertransformierte in den Stoßparameter-Raum kann eine Verwandtschaft dieser Amplitude mit der Opazität hergestellt werden. Es ist

$$A(s, b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d^2 \vec{k} e^{i\vec{b} \cdot \vec{k}} A(s, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 i \left(\frac{s}{s_0}\right)^\Delta g_1(0)g_2(0) \int d^2 \vec{k} e^{i\vec{b} \cdot \vec{k}} e^{-(R_1^2 + R_2^2 + \alpha'(0) \ln \frac{s}{s_0}) \vec{k}^2}$$

Das Integral kann z. B. im kartesischen Koordinatensystem einfach ausgewertet werden mit  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  und  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ . Man kann dann durch Erweiterung des Exponenten diesen in eine quadratische Form bringen und das zweifache Integral von  $(-\infty, \infty)$  ausführen. Das Ergebnis ist

$$f_P(s, b) = ig_1g_2 \frac{e^{-\frac{b^2}{4\lambda}}}{4\pi\lambda} \left(\frac{s}{s_0}\right)^\Delta = i\frac{\chi_P}{2} \equiv i\Omega(s, b)$$

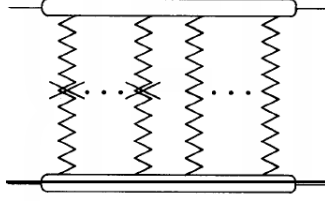


Abbildung 11: Ein  $n$ -Pomeron-austausch mit  $k$  (ganzen) Schnitten, dargestellt durch Kreuzungen. Für diese Konfiguration existieren  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten [43].

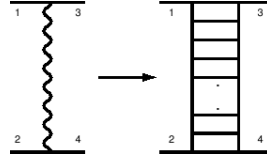


Abbildung 12: Ein Pomeron als Leiterobjekt.

mit  $\Delta = \alpha(0) - 1 > 0$  und  $\lambda = R_1^2 + R_2^2 + \alpha'(0) \ln \frac{s}{s_0}$  (siehe z. B. [33, 35]). Diese Festlegung des Eikonals durch die Opazität wird sich weiter unten (AGK-Rules) als günstig herausstellen. Alle Konstanten werden durch das Experiment, wie sollte es auch anders sein, festgelegt.

Sichtbar ist, dass bei nur einem Austausch eines Pomerons die Energie wie  $s^\Delta$  ansteigt, und die Unitarität weiterhin für  $s \rightarrow \infty$  verletzt. Betrachtet man allerdings in Verbindung mit der Methode der Eikonalisierung den „Multi-Pomeron“-Austausch, so wird diese Inkonsistenz vermieden werden, denn das Eikonall-Modell erhält auf Grund der Grundgleichung automatisch die geforderte Unitarität.

Die Terme einer Taylorentwicklung (um  $\chi_p(s, b) = 0$ ) der „Profilfunktion“

$$1 - e^{-\chi_p(s, b)/2}$$

können nun mit Hilfe der erwähnten AGK Cutting Rules einen physikalischen Sinn zugeschrieben bekommen. Z. B. beschreibt der zweite Term der Taylorentwicklung einen Zwei-Pomeron-Austausch, mit der Möglichkeit, dass diese zwei ausgetauschten Objekte jeweils eine Teilchendichte, z. B.  $\frac{dN}{dy}$  (mit  $y$  als Rapidität), im Endzustand *beitragen können*.

Denn stellt man sich ein Pomeron als ein Leiterobjekt vor, dessen einzelne Sprossen durch Propagatoren von der Form  $\frac{1}{q_i^2 - m^2}$  sind, Abbildung 12, so kann ein Schnitt *durch* dieses Objekt die einzelnen Sprossen „On Shell“ bringen (es werden nur ganze Schnitte betrachtet, gekennzeichnet durch das Kreuz durch ein Pomeron, Abbildung 11). Ihr Propagator ist dann von der Form

$$2\pi i \delta(q_i^2 - m^2)$$

Das Verhalten ist aus der Darstellung eines Feynman-Propagators  $\Delta_F(x)$  bekannt, die sich als Summe von zwei „On Shell“-Propagatoren beschreiben lässt  $\Delta^\pm(x)$  mit  $\Delta_F(x) = \Theta(x^0)\Delta^+(x) + \Theta(-x^0)\Delta^-(x)$  und

$$\Delta^\pm(x) = 2\pi \int d^4q e^{iqx} \delta(q_i^2 - m^2) \Theta(\pm q^0)$$

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation fordert nun (es ist nicht möglich zu wissen, ob eine „Leiter“ geschnitten wurde oder nicht), in Bezug auf den oben genannten Zwei-Pomeron Austausch, dass entweder *keines*, *eines* oder *zwei* Pomerons geschnitten (gekreuzt) werden. Für jedes gekreuzte Pomeron nimmt man einen Faktor  $\chi_p$  und für jedes ungekreuzte Pomeron einen Faktor  $-\chi_p$ . Sollte kein Pomeron geschnitten werden, so müssen formal von den zwei ungeschnittenen Pomerons mit dem Faktor  $(-\chi_p)^2$  die zwei ungeschnittenen Pomerons abgezogen werden  $2(\chi_p/2)^2$ , damit die Reihenentwicklung der „Profilfunktion“ stimmt [33]. Die Summe dieser drei Möglichkeiten ergibt den zweiten Term der Taylorentwicklung der „Profilfunktion“

$$1 - e^{-\chi_p(s,b)/2}$$

mit dem bekannten Verhältnis der Schnitte untereinander von 1 : -4 : 2.

Die auf eins normierte Wahrscheinlichkeit für  $k$  inelastische Prozesse in diesem Modell, beschrieben durch  $k$  gekreuzte Pomerons, ist

$$\sigma_k(s, b) = \frac{(\chi_p(s, b))^k}{k!} e^{-\chi_p(s, b)}$$

Im oben erwähnten „Black Disc Limit“ würden unendlich viele Objekte im  $t$ -Kanal ausgetauscht werden. Der letzte Faktor entspricht der Wahrscheinlichkeit, wie oben erwähnt, für keinerlei Interaktion. Normiert man das Integral über das Eikonale  $\chi_p(s, b)$  auf einen bekannten Wirkungsquerschnitt, z. B. den Wirkungsquerschnitt für einen über pQCD berechneten Prozess  $\sigma_h$ , so kann darüber *dieser* Wirkungsquerschnitt *eikonalisiert* werden. Es gilt dann

$$N \int d^2b \Omega(s, b) = \sigma_h$$

mit einem zu bestimmenden Normierungsfaktor  $N$ . Über diese Methode kann jeder Input-Wirkungsquerschnitt so behandelt werden, dass die Unitarität in diesem Modell automatisch gewährleistet ist [40].

Die soeben dargestellte Form der Amplitude  $A(s, t)$  bei einem Regge- und/oder Pomernaustausch lässt auf relativ einfache Weise eine Interpretation für die Impulsverteilung der Valenzquarks im Hadron während einer Kollision zu (für  $x \rightarrow 0$ ). Da die Reggetheorie ein Modell komplementär zur pQCD ist, handelt es sich um so genannte „Soft-Partonen“. Abbildung 13 soll noch mal die Wirkung zeigen, die ein Austausch eines Pomerons hat. Die gewellten Linien in der rechten Seite dieser Abbildung stellen Gluonen dar. In der topologischen Approximation wird ein Pomernaustausch als Summe solcher Gluonen-Netz-Austausch-Prozesse beschrieben.

Die Impulsverteilung der Valenzquarks ist entweder von der Form  $x_1$  für ein Quark oder  $1 - x_1$  für das verbleibende Diquark bzw.  $x_2$  für das andere Hadron. Als „Cut Graph“, in dem oben erwähnten Sinn, kann dieses so dargestellt werden wie in Abbildung 14.

In ihm sind die „Bruchstellen“ oder „Cuts“ hervorgehoben, mit der totalen Subenergie

$$s_1 = (p_{q1} + p_{qq2})^2$$

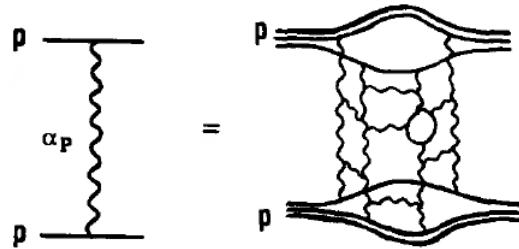


Abbildung 13: Zylinderstruktur eines Pomerons *während* eines Austauschs [37]. Die Wellenlinien rechts sollen den Gluonaustausch darstellen. Beim Anblick der rechten Seite sei noch einmal daran erinnert, dass ein Austausch eines Pomerons mit einem Austausch von Vakuum-Quantenzahlen verknüpft ist.

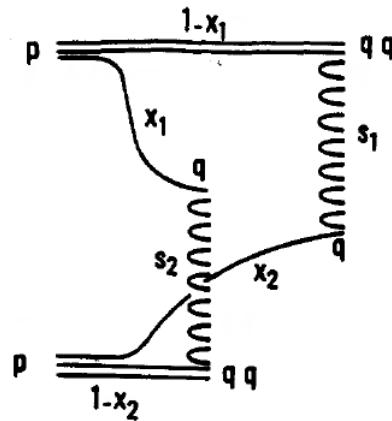


Abbildung 14: Zylinderstruktur eines „Cut Graphen“ [37] in einer Protonen-Protonen-Kollision.



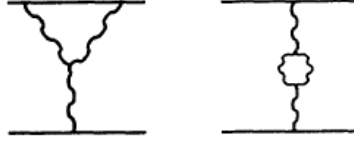


Abbildung 15: „Triple“- und „Loop Pomeron“-Graph [40].

und

$$s_2 = (p_{q_1} + p_{q_2})^2$$

mit 1,2 als Label für das Hadron 1,2. In Abbildung 14 kann eine einfache Parametrisierung von Energie und Impuls im Schwerpunktsystem von Quark-Diquark für die beiden Ketten angebracht werden

$$\begin{aligned} E_1 &\simeq \frac{\sqrt{s}}{2} (1 - x_1 + x_2) \\ E_2 &\simeq \frac{\sqrt{s}}{2} (1 - x_2 + x_1) \\ \vec{p}_1 &\simeq \frac{\sqrt{s}}{2} (1 - x_1 - x_2) = -\vec{p}_2 \\ s_1 &\simeq s x_2 (1 - x_1) \\ s_2 &\simeq s x_1 (1 - x_2) \end{aligned}$$

Die Objekte zwischen den Valenzquarks und Valenzdiquarks werden „Ketten“ oder auch „Strings“ genannt (Abbildung 14), die aus Seequark-Antiseequark-Paaren bestehen. Diese Ketten bilden Farb-Singulets („Color Singulets“) und werden in einem nachgelagerten Schritt der „Hadronisierungs-Maschinerie“ zugeführt. Dadurch *liefern* diese Strings einen Beitrag zur detektierbaren Masse [43, 47, 48].

Es gibt natürlich neben diesen Diagrammen im Prinzip beliebig komplizierte Formen, die für  $s \rightarrow \infty$  in Betracht gezogen werden müssen. Mit größerer Komplexität werden die Diagramme i. d. R. allerdings immer *bedeutungsloser*, so dass üblicherweise eine Entwicklung eine endliche Anzahl an Graphen beinhaltet. Meist werden nur Graphen bis zum „Loop Pomeron“ berücksichtigt. In Abbildung 15 sind ein „Triple Pomeron“- und ein „Loop Pomeron“-Graph dargestellt.

Die Graphen in Abbildung 15 können an drei verschiedenen Stellen geschnitten werden. Ordnet man die Graphen ihrer Komplexität nach, also zunächst der Austausch eines Reggeons, dann zwei usw. (bzw. Pomerons), dann ein „Triple-Graph“, zwei usw., dann alle „Loop-Graphen“, so liefern diese Graphen auf diese Weise, wie oben erwähnt, die Beiträge zu einem Multipartikel-Endzustand. Kombiniert mit einem Hadronisierungsverfahren werden daraus detektierbare Endzustände.

Die in DPMJET III verwendete Impulsdichteverteilung für die „Soft-Partonen“ ist für Valenzquarks von der Form ( $q\bar{q}$ -Trajektorien)

$$\rho(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha(0)}} \quad \text{mit einem „Intercept“ von } \alpha(0) = \frac{1}{2}$$

und für Valenzdiquarks ( $qq\bar{q}$ -Trajektorien)

$$f(x) \sim \frac{1}{x_{qq}^{\alpha(0)}} \quad \text{mit einem „Intercept“ von } \alpha(0) = -1.5$$

An Abbildung 16 kann die Verteilung qualitativ veranschaulicht werden. Zu den dargestellten Teilchen gehört natürlich das Partnerteilchen.

Die „Strings“ (oder Ketten), die sich zwischen den Konstituenten aufspannen haben (siehe Abbildung 16 a) die Form

$$\rho_1(x) \sim x^{-0.5}(1-x)^{-0.5}$$

und in b) und c)

$$\rho_2(x) \sim x^{-0.5}(1-x)^{1.5}$$

Diese Ketten bewegen sich unabhängig voneinander. Schließlich bekommen noch Seequarks eine Verteilung der Form

$$\rho_3(s) \sim x^{-1}$$

Diese Verteilungen sind also im Wesentlichen durch den „Intercept“ (Achsenabschnitt  $\alpha(0)$ ) der zugeordneten Trajektorie (Reggeon/Pomeron) geprägt. Sie sind für kleine Impulse  $x \rightarrow 0$  gültig. Da sich hier aber die größte Anzahl an Partonen aufhalten, ist der Fehler gering.

Eine typische Dichteverteilung ohne Beteiligung der durch die pQCD berechneten Objekten („Hard Pomerons“) sieht so aus [37]

$$\rho(x) \sim x_1^{-0.5} \prod_{i=2}^{2n_s-1} \left( \frac{1}{x_i} \right) x_{2n_s}^{1.5} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{2n_s} x_i\right)$$

Werden  $n_s$  „Soft Pomerons“ ausgetauscht, so entstehen  $2n_s$  Ketten, die sich zwischen den vorhandenen Valenzquarks aufspannen werden. In einer reinen Hadronen-Reaktion kann auf diese Weise nur ein ( $n_s = 1$ ) solches Pomeron ausgetauscht werden, siehe Abbildung 14, da ein Baryon nur in eine Quark-Diquark oder Diquark-Quark Kombination zulässt. In Abbildung 17 sieht man für eine solche Streuung einen Austausch von zwei „Soft Pomerons“.

Ein Pomeron *benutzt* die Valenzquarks und  $2 \cdot (n_s = 2) - 1 - 1 = 2$  See- und Antiseequarks spannen das zweite Pomeron auf. In Abbildung 18 sind in einer Proton-Anti-Proton Streuung ein „Hard Pomeron“ und ein „Soft Pomeron“ involviert [49]. Die harte Wechselwirkung ist hier eine  $gg \rightarrow gg$ -Reaktion, angedeutet durch die Wellenlinien, wobei die Gluonen sich im Endzustand in ein Seequark-Antiseequark-Paar aufsplitten können.

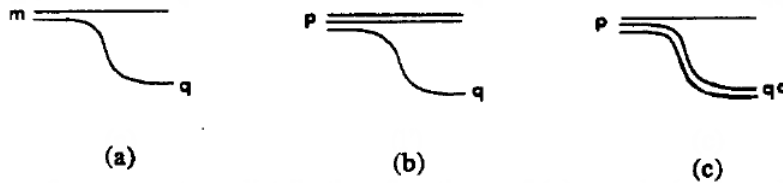


Abbildung 16: Quarklinien in einem Meson und Proton [37].

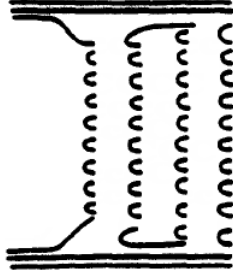


Abbildung 17: Austausch zweier „Soft Pomeronen“.

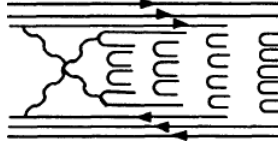


Abbildung 18: Darstellung eines zwei-Pomeron-Austauschs, ein „Hard Pomeron“ und ein „Soft Pomeron“, in einer Protonen-Antiprotonen Kollision.

Die obige Impuls-Dichteverteilung muss, wenn (min.) ein „Hard Pomeron“ zusätzlich betrachtet wird, abgewandelt werden. Ihre Form ist

$$\rho(x) \sim x_1^{-0.5} \prod_{i=3}^{2n_s+2} \left( \frac{1}{x_i} \right) x_{2n_s}^{1.5} \left[ \prod_{i=2n_s+3}^{2n_s+2+n_h} g(x_i, Q_i) \right] \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{2n_s+2+n_h} x_i\right)$$

und kann für  $n_s = n_h = 1$  einfach überprüft werden. Die Funktion  $g(x_i, Q_i)$  beschreibt die Anzahlverteilung der Partonen, die in der harten Streuung beteiligt sind. „Hard Pomeron“-Objekte sind wichtig, um hohe Transversalimpulse beschreiben zu können. In dieser Arbeit interessieren vor allem die Prozesse unter Beteiligung der „Hard Pomeronen“, in denen schwere Quarks produziert werden können.

Die Impulsverteilungen werden z. B. in [37] oder [27] über eine Mueller-Regge-Analyse genauer betrachtet [50]. Dort wird die „single particle inclusive“-Verteilung betrachtet und auf die Regge-Amplitude  $A(s, t) \sim \beta(t)\eta(t)s^{\alpha(t)}$  zurückgeführt, wie sie in diesem Abschnitt schon genannt wurde. Der Wirkungsquerschnitt für einen solchen Prozess kann über den Austausch zweier Regge-Trajektorien beschrieben werden. Eine Verallgemeinerung ist dann auf diffraktive Teilchenverteilung mit der Masse  $M^2$  ( $M^2 = (p_1 + p_2 - p_3)^2$ ) relativ einfach möglich (siehe z. B [35] oder Appendix C in [37]).

### 3 Einführende Bemerkungen zu der Methode von Frixione und Webber

Nützlich ist eine Einteilung für die neuen Prozesse, die über die Feynman-Diagramm-Technik berechnet wurden [4, 23], auf die im Weiteren immer wieder zurückgegriffen wird.

In den zwei Klassen, die als  $S$ -Klasse

$$gg \rightarrow Q\bar{Q}$$

$$q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q}$$

und als  $H$ -Klasse

$$gg \rightarrow Q\bar{Q}g$$

$$q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q}g$$

$$qg \rightarrow Q\bar{Q}q$$

inklusive deren ladungskonjugierten Analogons bezeichnet werden und der Literatur [4, 5] folgen, werden die neu implementierten Subprozesse referenziert, die für die folgenden Betrachtungen notwendig sind.

Das eigentliche Problem, nämlich das in der Einführung schon erwähnte „Double Counting“, wird nun sichtbar durch die gewählte Einteilung der Subprozesse in eine  $H$ - und  $S$ -Klasse: Durch den genannten Partonen-Schauer, wie er in jedem Standard „Monte Carlo“-Programm enthalten ist, können einige Prozesse der  $S$ -Klasse durch Emission eines extra Partons während der Schauerphase Subprozesse der  $H$ -Klasse generieren.

Die angeführten Prozesse der  $S$ -Klasse sind reine „Flavour Creation“-Prozesse (FCr). Neben solchen Prozessen existieren „Flavour Excitation“-Prozesse (FEx)

$$qQ \rightarrow qQ, \quad \bar{q}Q \rightarrow \bar{q}Q, \quad gQ \rightarrow gQ$$

Beide Prozessarten, FCr wie FEx, sind in einem „Monte Carlo“-Programm meist enthalten (als LO-Matrixelemente). In PHOJET werden diese Subprozesse bis einschließlich  $c$ -Quark einbezogen.

Die Prozesse der  $H$ -Klasse berücksichtigen keine FEx-Beiträge, denn der vorliegende Algorithmus setzt für den initiierenden Subprozess masselose Partonen voraus (*masselos* im Vergleich zu einer (prinzipiell) willkürlichen Skala; diese Skala ist hier die Masse der schweren Quarks  $m_b$ ).

Die gleichzeitige Verwendung von NLO-Matrixelementen der  $H$ -Klasse und den oben genannten LO-FEx-Prozessen würde zudem dazu führen, dass nun hier Beiträge doppelt aufsummiert werden: Z. B. kann der NLO-Prozess  $gg \rightarrow Q\bar{Q}g$  als eine Folge von einem Gluonen-Splitting-Prozess ( $g \rightarrow Q\bar{Q}$ ) und einem LO-FEx-Prozess ( $gQ \rightarrow gQ$ ) aufgefasst werden. Das Gluonen-Splitting, welches auch Bestandteil der „Parton Density Functions“ (PDFs) ist, wird aber auch durch den Partonen-Schauer simuliert. Auf die Implementierung der FEx-Prozesse wird daher verzichtet. Da die  $b$ -Quark Komponente in den Strukturfunktionen im Vergleich zu den Up-, Down-, Strange- und Charm-Quarkdichten klein ist, stellt das kein Problem dar.

### 3.1 Numerische Auswertung und Eventgenerierung mit BASES und SPRING

Mit den als Fortran-Code vorliegenden Prozessen führen die Packages BASES und SPRING [13, 14] die nötigen allgemeinen numerische Berechnungen durch (BASES) und erzeugen Events (SPRING) entsprechend den zugrunde liegenden Ausdrücken. Diese Berechnungen und die erzeugten Events werden in zwei Files abgelegt (diese müssen die Namen „mrs107.bases“ und „mrs107.integrals“ besitzen), die, wenn benötigt, durch DPMJET III herein geladen werden.

Der Inhalt des Eventfiles besteht aus fünf Viererimpulsen, wobei einer der Impulse das zusätzliche  $H$ -Parton darstellt. Wird ein Event der  $S$ -Klasse generiert, ist dieser Vierervektor der Nullvektor. Gleichzeitig mit den Viererimpulsen werden Flavorinhalt, Farbverlauf und Eventgewicht ( $\pm 1$ ) abgelegt (Kapitel 8).

Alle Events, die über SPRING generiert werden, sind exklusiv, es treten also keine *nicht beobachtbaren* Zwischenzustände auf, über die integriert wird (natürlich sind partonische Subprozesse immer nicht beobachtbar, aber die verfügbare Subenergie wird für die Erzeugung der Endzustände verwendet).

Die Events sind bis NLO-Genauigkeit erzeugt; *weiche* und *harte* Partonemissionen werden wie durch den Partonen-Schauer und den NLO-Code respektive behandelt (*weich* und *hart* bezeichnen die Partonenergie des emittierten Partons; die Schaueralgorithmen der „Monte Carlo“-Programme sind so konstruiert, dass die erste Emission auch die energiereichste ist. Allerdings ist zu bedenken, dass Emissionen aus dem Anfangszustand unter DPMJET III/PHOJET *rückwärts* („Backward-Algorithmus“, Abschnitt 6.4) geschehen, vom Ort der betragsmäßig größten Virtualität weg bis zu einer „Cut Off“-Virtualität von etwa 1 GeV; alle nachfolgenden Emissionen sind in der Regel energieärmer (weicher)).

### 3.2 Negative Event-Gewichte

Mit der Einführung des modifizierten Subtraktionsschemas (Kapitel 4) werden mit dem Programm SPRING auch Events generiert, die negative Gewichte haben. Sie sind also methodisch bedingt und sind unproblematisch. Üblicherweise treten im Rahmen der Vorausgenerierung von Events durch SPRING etwa 25 %–30 % an negativen Gewichten auf, die nicht weiter zu reduzieren sind. Dieser Wert stellt größenordnungsmäßig die Anzahl der „überschüssigen“ „Double Counting“-Partonen dar, wenn *kein* Subtraktionsterm für eine Korrektur sorgen würde.

Über das Schema können, wie in der Einführung erwähnt, ungewichtete Events erzeugt werden (voreingestellt), wobei zusätzlich eine Trennung nach  $2 \rightarrow 2$ - und  $2 \rightarrow 3$ -Kinematik möglich ist ( $S$ - und  $H$ -Events). Die negativen Events treten dann auf, wenn der zur Regularisierung notwendige Subtraktionsterm für den betrachteten Phasenraumpunkt größer wird als der Term, der die Emission eines Partons behandelt („Real Emission“-Term im  $H$ -Event) oder der Counterterm des „Real Emission“-Terms größer ist als die restlichen Terme mit  $S$ -Event-Kinematik (Kapitel 6, Gln. (42), (43)).

Behandelt werden diese Counterevents wie reale Events. Alle hadronisierten Teilchen, die aus diesen Events produziert werden, bekommen beim Eintrag in die Histogramme dieses Gewicht und führen damit zu größeren statistischen

Unsicherheiten in Bezug auf die betrachteten Observablen.

### 3.3 $\zeta$ -Subtraktion

Die Zeta-Subtraktion ist eng verknüpft mit den oben eingeführten negativen Event-Gewichten. Die analytischen Ausdrücke, die für diese Generierung notwendig sind, und die in [23] zu finden sind, wurden mit Hilfe einer Standardsubtraktion ausgeführt und beziehen sich ausschließlich auf die  $H$ -Prozesse.

Die Standardsubtraktion führt mit Hilfe von Distributionen (Abschnitt 2.3) kinematische „Cuts“ ein, z. B. kann erst ein schweres Quark-Paar erzeugt werden, wenn die quadratische Schwerpunktsenergie (des Subprozesses) größer ist als das Quadrat der Ruhemasse des Paares, also

$$s \geq 4m_b^2$$

Ähnliches gilt für die Emissionsrichtung des  $H$ -Partons.

Das Zeta-Subtraktionsschema führt dazu einen neuen Parameter

$$\zeta > P(x, y) = (1-x)^2(1-y^2) = \frac{4k_T^2}{s}, \quad 0 < \zeta \leq 1$$

ein. Die Vorgabe eines Wertes für  $\zeta$  führt zu neuen Mindestwerten  $x, y$  (in Einheiten der partonischen Schwerpunktsenergie  $s$ ), die das  $H$ -Parton annehmen muss, um emittiert werden zu können.  $x, y$  sind verbunden mit der „Energie“ und dem „Winkel“ des emittierten  $H$ -Partons, und  $k_T$  ist der Transversalimpuls des  $H$ -Partons. Diese Gleichung kann als eine Art „Blende“ vor dem Emissionstrichter (für die Counterterme), in dem das Parton emittiert wird, gesehen werden. Der Wert  $\zeta$  setzt damit einen Mindestwert für den Transversalimpuls an. In dem erlaubten Bereich (gegeben durch Vorgabe des Wertes für  $\zeta$ ) können die Counterterme, allerdings in nur sehr geringer Weise, reduziert werden.

In dem Zeta-Subtraktionsschema werden neben einer Abänderung der Distribution, in dem den Countertermen eine Thetafunktion vorangestellt wird, die Parameter des Standard-Subtraktionsverfahren als untere Grenze für die *neu* definierten Parameter genommen, und alle analytischen Ausdrücke unterliegen einer Veränderung, die aber einfach zu bestimmen ist (siehe Anhang A, D in [4, 5]). Das resultiert letztendlich in einer Veränderung des Wirkungsquerschnittes  $\Delta d\sigma_{ab}^{(s,c\pm,f)}$  für die einzelnen Bereiche des Phasenraums („Soft“, „Kollinear“ und „Real“), in dem das  $H$ -Parton emittiert wird.

## 4 Methodische Grundlagen zur Auswertung der vorliegenden Integrale

„Monte Carlo“-Generatoren erlauben es, auf *einfache* Weise Observable zu berechnen. Während der „Monte Carlo“-Phase werden die gewünschten beobachtbaren Größen bis zu einer bestimmten (perturbativen) Ordnung (üblicherweise bis LO, wie in dem Programm DPMJET III) berechnet.

Gekoppelt an diese numerische Berechnung ist der anschließende Partonen-Schauer. In dieser Phase wird den erzeugten Ur-Events die Möglichkeit geboten, weitere Partonen zu emittieren, was zu einer typischen Korrektur führt („Leading Log“). Dieses ist in einer konstruktiven Weise möglich, da in der so genannten „Leading Logarithmic“-Näherung (oder auch „Leading Pole Approximation“ genannt) die Partonen-Emissionen faktorisieren (siehe Ende Abschnitt 2.3, Gln. (17) und (18)). In dieser Näherung wird eine Observable damit bis zur Ordnung

$$(\alpha_s)^n \ln^n \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)$$

berücksichtigt, wobei  $n$  beliebig groß werden kann;  $\Lambda$  kann hier eine „Cut Off“-Masse darstellen.

Die Erweiterung der Genauigkeit bis NLO über perturbative Rechnungen ist seit langem möglich [23]. Schwierigkeiten entstehen in der anschließenden Partonen-Schauer-Phase, da in diesem Abschnitt der Eventgenerierung Konfigurationen erzeugt werden können, die in den vorangegangenen numerischen Berechnungen des „Monte Carlo“-Generators schon Berücksichtigung gefunden haben.

In diesem Kapitel wird zunächst das modifizierte Subtraktionsverfahren zur Behebung dieses Defizits anhand eines vereinfachten Modellsystems dargelegt.

In der folgenden Diskussion wird mit  $x_s$  die Energie des betrachteten Systems beschrieben, wobei  $x_M$  die maximal verfügbare Energie darstellt. Werden keine Teilchen emittiert, verbleibt dem System diese Energie. Die „Born“-Ordnung in der Störungsrechnung ist dafür ein Beispiel. Werden hingegen Teilchen emittiert, so wird dem System die Energie  $x$  entzogen, und es verbleibt  $x'_s = x_s - x$  mit  $0 \leq x \leq x_s \leq 1$ . Ein Beispiel dafür ist der Realgraph zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ . In dieser Ordnung wird die Emission eines Partons betrachtet.

### 4.1 „Slicing“ vs. „Subtraktion“

Der Ausgangspunkt dieser Methode ist die Berechnung einer *infrared safe*-Observable zur Ordnung NLO.  $\epsilon$  ist der Regularisierungsparameter (Dimensionale Regularisierung, Appendix B) aus  $N = 4 - 2\epsilon$ ,  $\epsilon < 0$ . In der Einführung war es der Parameter  $\epsilon > 0$ . Ob dieser Parameter in der einen oder anderen Form vorliegt, ist situationsabhängig (B)

$$\langle O \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 dx x^{-2\epsilon} O(x) \left[ \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)_B + \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)_V + \left( \frac{d\sigma}{dx} \right)_R \right]$$

Die einzelnen Terme sind

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_B = B\delta(x) \quad (26)$$

Das ist der „Born“-Term. Er entspricht dem Beitrag zu einer Observablen ohne Emission.

Der nächste Term ist der „virtuelle“ Beitrag und ist von der Form

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{B}{2\epsilon} + V\right)\delta(x) \quad (27)$$

Er enthält den Beitrag, der bei der Limes-Bildung eine potentielle Divergenz des nächsten Terms („Realbeitrag“) weg hebt (es ist der Counterterm zum nächsten Beitrag). Der „Realbeitrag“ entspricht der Emission eines Partons. Er lautet

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\frac{R(x)}{x} \quad (28)$$

$a$  ist die Kopplungskonstante in diesem Modellsystem. An  $R(x)$  wird die Forderung  $\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = B$  gestellt. Entzieht man dem System die Möglichkeit, Partonen zu emittieren ( $a \rightarrow 0$ ), gelangt man (prinzipiell) bzgl. der Störungsrechnung eine Ordnung tiefer (von NLO zu LO).

In der „Slicing“-Methode gilt unabhängig von dem Parameter  $\delta_c = \delta$

$$\langle O \rangle_B = BO(0), \quad \langle O \rangle_V = a\left(\frac{B}{2\epsilon} + V\right)O(0)$$

Sie behandelt den „Realausdruck“, wie in der Einführung gezeigt. Ein Parameter  $\delta$  unterteilt das Integrationsgebiet in zwei Teile, und zwar so, dass die auftretenden Divergenzen für  $x \rightarrow 0$  vom (vermuteten) Hauptbeitrag getrennt werden

$$\langle O \rangle_R = \int_0^\delta dx x^{-2\epsilon} O(x) \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R + \int_\delta^1 dx x^{-2\epsilon} O(x) \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R$$

Im ersten Term werden  $R(x)$  und  $O(x)$  dann bis zur 1. Ordnung um  $x = 0$  in eine Taylorserie entwickelt. Im zweiten Term kann  $\epsilon = 0$  gesetzt werden, da hier sicher keine divergenten Ausdrücke auftreten. Man erreicht folgende Gestalt

$$\langle O \rangle_R = aB(0)O(0) \int_0^\delta dx \frac{x^{-2\epsilon}}{x} + \int_\delta^1 dx O(x) \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R + \mathcal{O}(\delta)$$

bzw.

$$\langle O \rangle_R = aB(0)O(0) \left(-\frac{1}{2\epsilon} + \log \delta\right) + a \int_\delta^1 dx \frac{O(x)R(x)}{x} + \mathcal{O}(\delta, \epsilon)$$

Der  $\epsilon$ -Term hebt sich mit dem „virtuellen“  $\epsilon$ -Beitrag heraus. Übrig bleibt ein Term  $\log \delta$  sowie Ordnungen  $\mathcal{O}(\delta)$ , die nicht berechnet werden können und wegen der Kleinheit von  $\delta$  vernachlässigt werden. Dass das erlaubt ist, muss dann erst noch geprüft werden.



Die „Subtraktions“-Methode erlaubt es, den Realbeitrag (Gln. (28)) auf folgende Form zu bringen

$$\langle O \rangle_R = aBO(0) \int_0^1 dx \frac{x^{-2\epsilon}}{x} + a \int_0^1 dx \frac{O(x)R(x) - BO(0)}{x^{1+2\epsilon}}$$

Das erste Integral wird addiert und wieder abgezogen. Das zweite Integral enthält keine Divergenzen mehr, und es ist möglich,  $\epsilon = 0$  zu setzen.

Der erste Term ist leicht zu integrieren und liefert  $-a\frac{B}{2\epsilon}O(0)$ . Diesen Term identifiziert man auch in dem „virtuellen“ Beitrag. Beide kürzen sich heraus. Ohne  $\epsilon$ -Abhängigkeit lassen sich die Terme in folgender Weise zusammenfassen

$$\langle O \rangle_{sub} = BO(0) + a \left[ VO(0) + \int_0^1 dx \frac{O(x)R(x) - BO(0)}{x} \right]$$

Nach einer weiteren, einfachen Manipulation wird das Integral zu

$$\langle O \rangle_{sub} = \int_0^1 dx \left[ O(x) \frac{aR(x)}{x} + O(0) \left( B + aV - \frac{aB}{x} \right) \right]$$

Dieser Ausdruck garantiert eine korrekte Behandlung der Observablen  $O$  (bzw. des Operators  $O$ ) bis NLO, und im Vergleich führt diese „Subtraktions“-Methode keine Parameter bzw. Näherungen ein. Für  $O \equiv 1$  ergibt sich aus diesem Integral der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{tot}$ .

## 4.2 Modifizierte Subtraktion

Trotz der Vorteile einer „Subtraktions“-Methode gegenüber der „Slicing“-Methode würde eine „Monte Carlo“-typische (also numerische) Auswertung noch ineffizient sein. Das Integral

$$\langle O \rangle_{sub} = \int_0^1 dx \left[ O(x) \frac{aR(x)}{x} + O(0) \left( B + aV - \frac{aB}{x} \right) \right] \quad (29)$$

beinhaltet Ausdrücke, die für kleine  $x$  mit der erwähnten numerischen Auswertung divergent werden können, und die Berechnung des Integranden würde mit einem *vernünftigen* Abschneideparameter  $\delta$  zu großen Absolutwerten führen. Für eine Konvergenz müssten zu viele Werte des Integrals berechnet werden, was zu der oben erwähnten Ineffizienz führt.

Zudem lautet eine weitere Frage, wie über die neue Methode der Partonen-Schauer adäquat einbezogen werden kann (bzw.: Wie kann der *störende* Anteil des Partonen-Schauer effektiv simuliert werden?), ohne die NLO-Eigenschaft dieser Methode zu zerstören, aber mit der zusätzlichen und notwendigen Eigenschaft, den störenden „Double Counting“-Anteil heraus rechnen zu können.

Als Ansatzpunkt dafür, den Einfluss des Partonen-Schauer auf eine Größe  $O$  näher zu bestimmen, kann man die Observable  $O$  selbst wählen. Der Punkt ist nun, eine Funktion zu wählen (im Weiteren Interface  $I_{MC}$  genannt), die selbst einen Wirkungsquerschnitt bzw. einen differentiellen Wirkungsquerschnitt darstellt. Mit dieser Forderung ist dann automatisch die Messung der emittierten

Anzahl an Partonen verbunden, die während  $N$  Events generiert wurden. Enthalten in diesem Interface sind alle während des Partonen-Schauers generierten Partonen, sowie *dasjenige* Parton, welches als „Next to Leading Order“-Parton emittiert wurde.

Dieser Interpretation liegt die Tatsache zugrunde, dass ein beliebiger Streuprozess durch ein „Erzeugendes Funktional“ vollständig beschrieben werden kann (siehe z. B. [51]). Es kann in der Form

$$G[\Omega] = \sum_n \frac{1}{n!} \int \prod_i^n dp_i \sigma_n(p_1, \dots, p_n) \Omega(p_1) \dots \Omega(p_n)$$

angegeben werden. Die Hilfs- oder Parameterfunktionen  $\Omega$  stellen in diesem Zusammenhang Messoperatoren dar, die mit dem aktuellen Streuprozess assoziiert sind (dabei sollen der Einfachheit halber infrarotsichere Funktionen  $\Omega$  betrachtet werden; über einfache Auswertungen durch Funktionalableitungen nach den Parameterfunktionen können an gewissen Stellen, z. B.  $\Omega = 0$ , die Koeffizienten des Funktionals gewonnen werden; beispielsweise liefert das Funktional mit  $\Omega = 1$  den totalen Wirkungsquerschnitt zurück).

Die Partonenproduktion während eines Prozesses kann, wie erwähnt, sowohl über die Beschreibung durch Matrixelemente als auch über den Einsatz des Partonen-Schauers physikalisch sinnvoll beschrieben werden. Beide Methoden sind jedoch auch unabhängig voneinander, so dass eine „Compound Prozess-Relation“ mit Hilfe der Erzeugenden Funktionen geschrieben werden kann

$$G_{\text{Gesamt}}[\Omega] = G_{\text{ME}}[G_{\text{PS}}[\Omega]]$$

In der Literatur [4, 5] werden Beiträge, die durch einen der Messoperatoren  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  beschrieben werden, und die ohne Partonen-Schauer bisher durch  $O(x)$  referenziert wurden, mit  $I_{MC}$  bezeichnet. Die Berücksichtigung des Partonen-Schauers in einem Prozess führt zu einer Ersetzung der Form

$$O(x) \Leftrightarrow I_{MC}(O(x), x_M(x))$$

Das Kürzel „MC“ wird im weiteren Text der Arbeit fast synonym für die Einbeziehung des Partonen-Schauer benutzt werden. Auch wird weiterhin die Rede von dem Interface  $I_{MC}$  sein, mit dem die Beiträge durch den Partonen-Schauer implementiert werden.

Für eine Ableitung des Interfaces sei nun  $\mathcal{N}$  die Anzahl an emittierten Partonen in dem Bereich  $(\bar{O} - \delta O/2, \bar{O} + \delta O/2)$ , definiert über

$$\mathcal{N}((x, x_k)_{k=1}^n; \bar{O}, \delta O) = \sum_{j=1}^p \Theta(\bar{O} + \delta O/2 - O_j) \Theta(O_j - \bar{O} + \delta O/2)$$

mit  $1 \leq p \leq n + 1$ , wobei die Observable  $O$  im Allgemeinen von der (den) Integrationsvariablen abhängig ist (was hier der Einfachheit halber unterdrückt ist), und  $n$  ist die totale Anzahl an emittierten Partonen. Der Definitionsbereich der Variablen  $p$  reicht wegen des zusätzlichen NLO-Partons bis  $n + 1$  (schaltet man also den Partonen-Schauer ab, so wird in dieser Zählung nur das  $H$ -Parton betrachtet).

Der rechte Anteil des Ausdrucks stellt eine Folge von Histogramm-Bins der Breite  $\delta O$  dar, wobei  $\bar{O}$  ein physikalischer Wert ist, den die Observable  $O$  annehmen kann. Schließlich sind  $O_j$  mögliche Werte der Observablen  $O$ , ausgewertet an den „Stützstellen“  $x_j$ , gewählt innerhalb der Breite  $\delta O$ .

Der Übergang zum differentiellen Wirkungsquerschnitt wird über die Limes

$$I_{MC}(\bar{O}, x_M(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta O \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \mathcal{N}((x, x_k^{(i)})_{k=1}^{n_i}; \bar{O}, \delta O)$$

vollzogen.  $n_i$  bezeichnet die Anzahl der  $N$  emittierten Partonen, die für die Observable  $O$  eingetragen wurden.

Wird der Partonen-Schauer abgeschaltet, so ergibt die obige Definition

$$I_{MC}(O(x), x_M(x)) = \delta(O - O(x))$$

denn nur das zusätzlich generierte NLO-Parton wird in den Bins zu finden sein. Es ergibt sich sofort noch für diesen Spezialfall die Eigenschaft

$$\int dO I_{MC}(O(x), x_M(x)) = 1$$

Mit dieser Definition und der letzten Eigenschaft ist in LO-Näherung ( $a=0$ ) sofort erkennbar, dass in  $\langle O \rangle_{sub}$  (Gln. (29)) mit der formalen Ersetzung

$$O(x) \rightarrow I_{MC}(O(x), x_M(x))$$

der Ausdruck zu

$$\frac{d\sigma_B}{dO} = B I_{MC}(O, 1)$$

umgeformt werden kann. Man beachte, das die maximal verfügbare Energie des Systems  $x_M(x) = 1$  ist und damit  $x_M(0) = 1$ . Eine Integration über  $O$  liefert die totale Rate  $B$  zurück.

Hinreichend ist die Ersetzung der Observablen durch das Interface allerdings noch nicht. Beide Ausdrücke, jeweils nach  $I(O, 1)$  und  $I(O, x_M(x))$  sind für kleine Werte  $x$  immer noch unbrauchbar für eine „Monte Carlo“-typische (numerische) Auswertung.

Um dieses Problem zu umgehen, wird in das Schema (Gln. (29)) zusätzlich ein Term eingefügt (Subtraktionsterm), der einen regularisierenden Einfluss auf die sonst divergent werdenden Größen ausübt. Erwartet werden muss, dass dieser hinzugefügte Term selbst keinen Beitrag (bis NLO) zu der formalen Observablen  $O$  liefert. Dazu ist ein Beispiel im kommenden Abschnitt angeführt, was zeigen wird, dass diese Ersetzung bis NLO die zusätzliche Eigenschaft besitzt, auch den störenden Partonen-Schauer-Beitrag eliminieren zu können, der nach der Ersetzung  $O \rightarrow I(O, x_M(x))$  von der Form  $I(O, 1)B$  ist. Bezogen auf die QCD legt das nahe, dass der künstlich hinzugefügte Subtraktionsterm generell von der Form

$$I(O, x_M(x)) d\sigma_B$$

zu sein hat, wobei  $d\sigma_B$  der differentielle Beitrag zum Wirkungsquerschnitt zur „Born“-Ordnung ist.

Die Abänderung des Schemas lautet also formal

$$O(x) \rightarrow I_{MC}(O(x), x_M(x))$$

mit deren Hilfe es möglich sein wird, Einfluss auf die Kontrollgrößen zu bekommen, plus Einfügen eines Subtraktionsterms.

Angegeben sei hier zunächst nur das modifizierte Integral für diesen Spezialfall, das alle Forderungen erfüllt (siehe dazu das Beispiel im Abschnitt 4.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dO} = \int_0^1 dx \left[ I_{MC}(O, x_M) \left( \frac{a(R(x) - BQ(x))}{x} \right) \right. \\ \left. + I_{MC}(O, 1) \left( B + aV + \frac{aB(Q(x) - 1)}{x} \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

mit  $x_M = x_M(x)$  im ersten und  $x_M = 1$  im zweiten Term, mit allen Eigenschaften aus Abschnitt 4.1.

### 4.3 Konstruktion des Interfaces für das Einführungsmodell

Es folgt eine konstruktive Darstellung des Interfaces  $I_{MC}$ . Nach wie vor wird hier das Modellsystem aus dem Abschnitt darüber betrachtet.

Dazu wird lediglich der „Sudakov“-Faktor  $\Delta$  benötigt. Dieser Faktor ist essenzieller Bestandteil der meisten Partonen-Schauer und stellt, wie in der Einführung angedeutet, eine Art Dämpfungsfaktor dar, der eine Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Partonen-Schauer innerhalb des betrachteten Intervalls *keine* Partonen emittiert.

Wie vorher schon erwähnt, kann nach der erfolgreichen Ableitung des Interfaces die notwendige Wahrscheinlichkeit für *keine* oder *eine* Partonenemission analytisch angegeben und in das modifizierte Subtraktionsverfahren eingebaut werden.

Mit

$$P_n(x_1, \dots, x_n)$$

soll die Wahrscheinlichkeit benannt sein, dass  $n$  Partonen während der Schau-ephase emittiert werden. Die Identifikation ist dann, dass

$$P_0 = \Delta(x_0, x_M(x))$$

und  $\Delta(x_0, x_M(x))$  der „Sudakov“-Term ist. In diesem Modellfall kann er mit

$$\Delta(b, c) = e^{-a \int_b^c dz \frac{Q(z)}{z}}$$

angeben werden, wobei der Partonenemissions-Term  $Q$  den Bedingungen

$$0 \leq Q(z) \leq 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} Q(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 1} Q(z) = 0$$

genügt. Diese Bedingungen spiegeln das richtige Verhalten wider, denn kleine  $z$  bedeuten für das System einen kleinen Energieverlust. Umgekehrt kann  $z$  maximal 1 werden, und dem „Reservoir“  $Q(z)$  verbleibt für eine erneute Emission keine Möglichkeit. Das genaue Aussehen der Funktion  $Q(z)$  spielt hier keine Rolle. In Kapitel 6 muss (insbesondere Abschnitt 6.4), damit die Methode auf die QCD angewendet werden kann, diese Funktion genau aufgeführt werden.

Das stellt aber kein Problem dar, denn die Algorithmen, um einen Partonen-Schauer zu generieren, sind bekannt.

$x_0$  ist ein (kleiner) „Cut Off“-Parameter. Da mit  $x$  die Energie eines Partons bezeichnet wird, muss  $x_0$  kleiner als die minimale notwendige Energie für das *Auflösen* eines Partons während einer Messung sein. Ist dieser Parameter nicht vorhanden, tauchen in dem Modell Divergenzen auf (hier ist es speziell eine infrarote Divergenz). In Kapitel 6, in dem diese Methode auf die QCD ausgeweitet wird, ist dieser Umstand von Vorteil. Dort werden „Soft“- und „Kollineare“-Divergenzen auftauchen. Diese sind derart, dass sie (fast) das divergente Verhalten des „Real Emission“-Beitrages abfangen können, wodurch erst eine Trennung der  $S$ - von der  $H$ -Klasse möglich wird.

Mit der Faktorisierungsannahme lässt sich dann  $P_n$  ableiten

$$P_n(x_1, \dots, x_n) = a^n \Delta(x_0, x_M(x)) \Theta(x_M(x) - x_1) \prod_{i=1}^n \frac{Q(x_i)}{x_i} \Theta(x_i - x_{i+1})$$

Die Forderung, dass  $P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (\prod_{i=1}^n dx_i) P_n = 1$  mit  $P_0 = \mathbf{P}_0$  ist, wird erfüllt mit

$$\mathbf{P}_n \equiv \int_0^1 \left( \prod_{i=1}^n dx_i \right) P_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{a^n}{n!} \left[ \int_{x_0}^{x_M(x)} dz \frac{Q(z)}{z} \right]^n \Delta(x_0, x_M(x)) \quad (31)$$

Das  $n!$  entsteht durch die Vertauschbarkeit der  $n$  emittierten Teilchen.

Es ist nun möglich, das Funktional  $I_{MC}(O, x_M(x))$  explizit anzugeben über

$$I_{MC}(O, x_M(x)) = \mathbf{P}_0 \delta(O - O(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left( \prod_{i=1}^n dx_i \right) P_n(x_1, \dots, x_n) \delta(O - O(x))$$

Es hat die Eigenschaft,

$$\int dO I_{MC}(O, x_M(x)) = 1$$

die für generierende Funktionen erforderlich sind. Eingesetzt in das Funktional des Ur-Prozesses liefert wie gesagt

$$\frac{d\sigma}{dO} = \int_0^1 dx \left[ I_{MC}(O(x), x_M) \left( \frac{aR(x)}{x} \right) + I_{MC}(O(0), 1) \left( B + aV - \frac{aB}{x} \right) \right]$$

Die Integration über die Observable  $O$  deckt natürlich den totalen Wirkungsquerschnitt auf

$$\sigma_{tot} = \int_0^1 dx \left[ B + aV + a \frac{R(x) - B}{x} \right]$$

Das Integral plus regularisierende Modifikation durch den Subtraktionsterm wird dann definiert über

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dO} = \int_0^1 dx \left[ I_{MC}(O, x_M) \left( \frac{a(R(x) - BQ(x))}{x} \right) \right. \\ \left. + I_{MC}(O, 1) \left( B + aV + \frac{aB(Q(x) - 1)}{x} \right) \right] \end{aligned}$$

mit  $x_M = x_M(x)$  im ersten und  $x_M = 1$  im zweiten Term. Beide zusätzlich hinzugefügten Subtraktionsterme werden kompensiert durch den Term

$$I_{MC}(O, 1)B$$

(Partonen-Schauer-Beitrag), wie das folgende Beispiel zeigen wird.

#### 4.4 Das Interface bis zur „Ein-Photon“-Näherung für das Einführungsmodell

Ausgangspunkt ist das modifizierte Integral aus Abschnitt 4.2, (Gln. (30)),

$$\frac{d\sigma}{dO} = \int_0^1 dx \left[ I_{MC}(O, x_M) \left( \frac{a(R(x) - BQ(x))}{x} \right) \right. \quad (32)$$

$$\left. + I_{MC}(O, 1) \left( B + aV + \frac{aB(Q(x) - 1)}{x} \right) \right] \quad (33)$$

Die Emission *eines* Partons entspricht der Entwicklung des Interfaces zur Ordnung  $\mathcal{O}(a)$ . Der erste Summand unter dem Integral (Gln. (32)) ist dann schon in dieser Ordnung vorhanden, womit das entsprechende Interface nur bis zur 0. Ordnung entwickelt werden muss

$$I_{MC}(O, x_M(x)) = P_0 \delta(O - O(x)) + \mathcal{O}(a) = \delta(O - O(x)) + \mathcal{O}(a)$$

wobei  $P_0 = \Delta(x_0, x_M(x)) \approx 1 - a \int_{x_0}^{x_M(x)} dz \frac{Q(z)}{z} = 1 + \mathcal{O}(a)$ .

Der zweite Interfaceterm (Gln. (33)) ist etwas komplizierter, denn in dem modifizierten Integral stehen im zweiten Integranden Terme zur Ordnung  $a^0$  und  $a^1$ . Das Interface muss nun also bis zur Ordnung  $a^1$  entwickelt werden

$$I_{MC}(O, 1) = \underbrace{\Delta(x_0, 1)\delta(O - O(0))}_{\text{keine zusätzliche Emission}} + a \underbrace{\int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \Delta(x_0, 1)\delta(O - O(t))}_{\text{zusätzliche Emission eines Partons}} + \mathcal{O}(a^2)$$

Die geklammerten Ausdrücke entsprechen dem Fall  $n = 0$  und  $n = 1$  der Definition des Interfaces (Gln. (31)), wobei im Fall, dass dem „Reservoir“ für eine Partonenauflösung keine Energie mehr verbleibt, noch  $I_{MC}(O, x_M(x)) = I_{MC}(O, 1)$  für  $x = 0 \rightarrow x_M(0) = 1$  zu beachten ist, sowie die Benutzung von

$$P_1 = a \left[ \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \right] \Delta(x_0, 1)$$

Mit der Entwicklung des „Sudakov“-Terms  $\Delta(x_0, 1)$  bis zur Ordnung  $a^1$

$$\Delta(x_0, 1) \approx 1 - a \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t}$$

lässt sich der Term weiter zusammenfassen, und es entsteht

$$I_{MC}(O, 1) = \left( 1 - a \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \right) \delta(O - O(0)) \quad (34)$$

$$+ a \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \delta(O - O(t)) + \mathcal{O}(a^2)$$

Setzt man dieses Integral zusammen mit  $I_{MC}(O, x_M(x)) = \delta(O - O(x))$  in die Definition (Gln. (32), (33)) ein, so ergibt sich für den ersten Summanden der Ausdruck

$$\int_0^1 dx \left[ \delta(O - O(x)) \frac{a(R(x) - BQ(x))}{x} \right]$$

Als nächstes wird das Interface aus Gln. (34), entwickelt bis  $\mathcal{O}(a)$ , multipliziert mit Gln. (33). Das Zwischenergebnis lautet hierfür dann

$$\int_0^1 dx \left[ \left( B - aB \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \right) \delta(O - O(0)) + aB \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \delta(O - O(t)) + \left( aV + \frac{aB(Q(x) - 1)}{x} \right) \delta(O - O(0)) + \delta(O - O(x)) \left( \frac{a(R(x) - BQ(x))}{x} \right) \right]$$

Das Ordnen nach den verschiedenen Deltafunktionen,

$$\delta(O - O(0)), \quad \text{und} \quad \delta(O - O(x))$$

liefert (ohne das Integral  $\int_0^1 dx$ )

$$\delta(O - O(0)) \left[ B + aV - \frac{aB}{x} \right]$$

und

$$\delta(O - O(x)) \left[ \frac{a(R(x) - BQ(x))}{x} \right]$$

sowie den Rest

$$\frac{aBQ(x)}{x} \delta(O - O(0)) - aB \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \delta(O - O(0)) + aB \int_{x_0}^1 dt \frac{Q(t)}{t} \delta(O - O(t))$$

Durch Aufspalten des Integrals in  $\int_0^1 dx = \int_{x_0}^1 dx + \int_0^{x_0} dx$  kann man alle Terme, die die Funktion  $Q(x)$  enthalten, weiter zusammenfassen. Das liefert

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dO} &= \int_0^1 dx \left[ \delta(O - O(x)) \frac{aR(x)}{x} + \delta(O - O(0)) \left( B + aV - \frac{aB}{x} \right) \right] \\ &+ aB \int_0^{x_0} dx \frac{Q(x)}{x} \left[ \delta(O - O(0)) - \delta(O - O(x)) \right] + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

Eine weitere Integration über die (formale) Observable deckt auch hier wieder den totalen Wirkungsquerschnitt bis zur Ordnung NLO auf ( $\mathcal{O}(a^2)$ )

$$\int dO \frac{d\sigma}{dO} = \sigma_{tot}$$

Das zweite Integral enthält eine „Cut Off“-ähnliche Abhängigkeit (entsprechend dem „Soft“- und „Kollinearen“-Regime der QCD), die nicht zu Null gesetzt werden darf. Man erhält dadurch eine kleine Korrektur zur Ordnung  $a$  bzw.  $\alpha_s$ .

## 5 Kinematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden für die Konstruktion des Subtraktionsterms alle notwendigen kinematischen Größen und Zusammenhänge hergeleitet. Diese beinhalten die einen Subprozess beschreibenden Mandelstam-Invarianten  $(s, t, u)$  und die Impulse  $(x_1, x_2)$ . Dabei muss grundsätzlich zwischen einer Emission eines Partons aus dem Anfangs- und Endzustand unterschieden werden. Diese Größen dienen als spätere Grundlage für die Auswertung der vorhandenen Matrixelemente und Strukturfunktionen.

Die Vorgehensweise ist für die Partonenemission aus dem Anfangs- und Endzustand gleich. Betrachtet wird zunächst die Emission eines Partons, welches eine  $2 \rightarrow 3$ -Kinematik darstellt. Dieser Graph wird im Subtraktionsterm auf eine reine  $2 \rightarrow 2$ -Kinematik unter Ableitung der o.g. Größen zurückgeführt. Es ist natürlich nicht möglich, einen „Dreiteilchenendzustand“ auf eine reine  $2 \rightarrow 2$ -Kinematik zu reduzieren, bzw. eine echte störungstheoretische Ordnung auf eine darunter liegende Ordnung abzubilden. Vielmehr wird über diese Methode die „Partonen-Schauer-Kinematik“ reduziert. Dass das möglich ist, sieht man am einfachsten an der Reihenentwicklung aus der Einführung, Seite 5, und der darüber stehenden „Leading Log“-Eigenschaft. Die Reduktion solcher Graphen (bzw. ihre Beiträge zu einer messbaren Größe) um die LL-Terme kann durch eine reine Redefinition der Reihen-Koeffizienten erreicht werden (im Speziellen wird, wie in dieser Arbeit geschehen, jeweils eine einzige Partonenemission betrachtet).

Partonen, die während eines Schauers von den äußeren Linie emittiert werden, verbessern das beobachtbare Endzustandsspektrum, denn in der Hadronisierungsphase werden diese zusätzlichen Partikel auch in detektierbare Hadronen konvertiert (natürlich nur, sofern der Algorithmus richtig ist, der Emissionen aus dem Anfangs- und Endzustand beschreibt, was auch für die Phase der Hadronisierung gilt; wie diese beiden Bereiche korrekt arbeiten müssen, ist aber bekannt).

Observable können in einem Eventgenerator wie DPMJET III nur bis zu der Ordnung korrekt berechnet werden, wie die in dem Programm zugrunde liegende und umgesetzte Störungsordnung. Alle harten Subprozesse liegen in DPMJET III bis LO vor (also bis zur Ordnung  $\alpha_s^2$ ). Die oben erwähnte und anschließende Partonen-Schauer-Phase *verbessert* diese Ordnung um Terme proportional zu

$$(\alpha_s)^n \ln^n \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)$$

wobei in dieser Phase  $n$  Partonenemissionen vorkommen.  $\Lambda$  stellt eine Massenskala (die im Bereich von 200 MeV liegt) dar.  $Q$  ist prinzipiell willkürlich und stellt ebenfalls eine (invariante) Masse dar. Es gibt verschiedene Möglichkeiten,  $Q$  einen Wert zuzuweisen, z.B. ist  $Q^2 = p_t^2$  oder  $Q^2 = p_t^2 + m^2$  möglich. Im Rahmen der Voausgenerierung der  $b$ -Events sind in dem Programm BASES beide Skalen eingebaut worden, da PHOJET *masselose* Anfangszustände (*leichte* Partonen) betrachtet, PYTHIA hingegen betrachtet *massebehaftete* Endzustände (*schwere* Quarks). Alle berechneten und im Folgenden aufgeführten Ausdrücke werden unter der Annahme einer „Partonen-Schauer-Kinematik“ abgeleitet (so wie sie in den meisten „Monte Carlo“-Programmen vorhanden sind) [10], unter der die emittierten Teilchen (Partonen) *nicht sehr viel* Energie/Impuls von dem Mutterparton abzweigen. Im Phasenraum ist es der „Soft/Kollineare“-



Bereich, den diese emittierten Partonen einnehmen (z. B. verändern Partonen ihre (natürlich nicht beobachtbare) Rapiditätsverteilung nach einer Emission eines Partonen-Schauer-Partons kaum). Die Konsequenz daraus ist, wie in der Einführung erwähnt, dass im Gegensatz zum Gebrauch von Matrixelementen zur Beschreibung von Endzuständen, der Partonen-Schauer-Ansatz nicht die volle Information über den Phasenraum zur Berechnung der Observablen liefert. Der „Schauer-Ansatz“ ist dagegen wesentlich einfacher in einem Computerprogramm umzusetzen und liefert hinreichend gute Ergebnisse.

Der Grund für das oben erwähnte Vorgehen, die Kinematik zu reduzieren, liegt in dem Subtraktionsverfahren, denn sowohl die LO-Terme als auch die NLO-Terme werden unter dem Integral erwartet, so dass das Maß des Integrals im Falle der QCD eine Integration über fünf Parameter sein wird  $(z_1, z_2, \phi_3)$ , wobei  $z_i$  die Impulse und  $\phi_3$  der Phasenraum eines „Dreiteilchenendzustands“ darstellen. Das Modellsystem aus dem vorherigen Kapitel bezog sich dagegen auf den (unrealistischen) Fall einer eindimensionalen Emission von (masselosen) Photonen/Partonen. Die Erweiterung auf die QCD (Kapitel 6) soll natürlich eine isotrope Emission von Partonen im Raum zulassen. Das führt zu der schon erwähnten „Erweiterung“ des Phasenraums auf einen „Dreiteilchenendzustands“  $\phi_3$ , also der Möglichkeit der Emission eines emittierten Partons in eine prinzipiell beliebige Raumrichtung.

Alle Prozesskonfigurationen aus der  $S$ - oder  $H$ -Klasse, wie sie in Kapitel 3 definiert wurden, werden darüber berechenbar sein. Das legt nahe,  $S$ -Konfigurationen als „Grenzfall“ einer  $H$ -Konfiguration zu betrachten. Jeder Punkt aus dem Konfigurationsraum  $z_1, z_2, \phi_3$  entspricht dann einem Prozess aus der  $H$ -Klasse, die Prozesse der  $S$ -Klasse werden dann durch eine Abbildung (Map)  $P_{H \rightarrow S}$  generiert. Technisch ist dies ein einfacher Grenzprozess (der korrespondierende  $H$ -Prozess wird „Soft/Kollinear“ betrachtet), woraus dann alle notwendigen Variablen berechnet werden. Sie erlaubt es, den betreffenden Anteil des messbaren Wirkungsquerschnittes, nämlich den harten Subprozess, der im Wesentlichen durch die Matrixelement zum Ausdruck kommt, auf eine eindeutige Weise für einen Prozess aus der  $S$ - oder  $H$ -Klasse mit *einem* Satz an Mandelstam-Invarianten und Viererimpulsen zu charakterisieren. Das ist für die Definition des Ausgangsintegrals zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes notwendig.

Die Vorarbeiten geschehen in diesem Kapitel, wobei das Resultat zunächst noch in zwei verschiedenen Maps (für  $S$  und  $H$ ) besteht. Einen Abschluss findet die Diskussion in Kapitel 6, Abschnitt 6.6.

Emissionen aus dem Anfangszustand werden durch den PHOJET-Partonen-Schauer-Algorithmus bewerkstelligt, Endzustandsemissionen werden durch das Programm PYTHIA generiert. Beide Algorithmen besitzen denselben Aufbau (mit gleichem „Sudakov“-Faktor), benutzen also den gleichen Algorithmus sowie die gleichen Schauer-Variablen.

Von den hier erzielten Ergebnissen, insbesondere das Ableiten der Schauer-Variablen nach den Variablen aus Phasenraum  $\phi_3$ , wird erst ab Kapitel 6 Gebrauch gemacht.

## 5.1 Eine Partonenemission aus dem Anfangszustand – „Initial State“-Emission (ISR)

Die Variablen mit 2 → 2-Kinematik werden generell überdacht, und die eingehenden Partonen werden dabei mit

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \bar{x}_1 P_1 \\ \bar{p}_2 &= \bar{x}_2 P_2\end{aligned}\quad (35)$$

bezeichnet (hierbei sind  $P_1, P_2$  die Hadronenimpulse; die Massen der einlaufenden Partonen werden als Null angenommen, die der Hadronen werden vernachlässigt). Die Größen  $\bar{x}_i$  (und auch die Größen  $x_i$ ) werden in allen Zusammenhängen als „Impulse“ bezeichnet, obwohl sie dimensionslose Größen darstellen und mit Gln. (35) einen Wertebereich von  $0, \dots, 1$  annehmen können. Sie stellen mit der Gln. (35) einen *skalierten* Impuls dar. Diese Aussagen gelten für alle Abschnitte.

Die Impulse der aus dem Prozess laufenden schweren (Masse  $m_Q$ ) Quarks seien  $\bar{k}_1$  und  $\bar{k}_2$ .

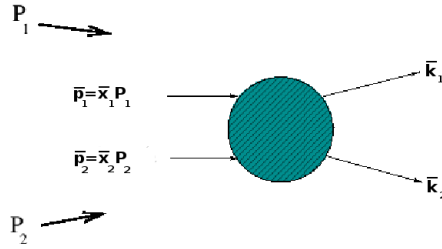


Abbildung 19: Eine generische Darstellung eines 2 → 2 Prozesses.

Die Mandelstam-Invarianten, die diesem Prozess zugehören, lauten

$$\begin{aligned}\bar{s} &= 2\bar{p}_1\bar{p}_2, \\ \bar{t} &= -2\bar{p}_1\bar{k}_1 + m_Q^2, \\ \bar{u} &= 2m_Q^2 - \bar{s} - \bar{t} = -2\bar{p}_1\bar{k}_2 + m_Q^2\end{aligned}$$

so dass  $\bar{s} + \bar{t} + \bar{u} = 2m_Q^2$  und  $\bar{s} = \bar{x}_1\bar{x}_2 S_H$ , wobei  $S_H = (P_1 + P_2)^2$  die totale Energie ist. Die Massen der schweren Quarks können noch in die Invarianten hinein gezogen werden, also  $\bar{t} = \bar{t} - m_Q^2$  und  $\bar{u} = \bar{u} - m_Q^2$ . Parametrisiert man die Partonen-Impulse im Massemittelpunkt-System („Center of Mass“-System) der Partonen,  $\bar{p}_{1,2} = \bar{E}(1, 0, 0, \pm 1)$  und  $\bar{k}_{1,2} = (\bar{E}, \pm\bar{k}_T, 0, \pm\bar{k}_L)$ , dann ist es möglich, die Invarianten durch

$$\bar{s} = 4\bar{E}^2, \quad \bar{t} = -2\bar{E}(\bar{E} - \bar{k}_L), \quad \bar{u} = -2\bar{E}(\bar{E} + \bar{k}_L)$$

zu beschreiben, wobei  $\bar{k}_L$  die longitudinale Komponente von  $\bar{k}_1$  oder  $-\bar{k}_2$  ist. Die Impulse einer 2 → 3-Konfiguration, die diesen Prozess kennzeichnen (Abbildung 20), werden für die eingehenden Partonen mit  $p_1 = x_1 P_1$  und  $p_2 = x_2 P_2$

angegeben, und mit  $k_1, k_2$  werden die Viererimpulse der schweren Quarks benannt (betrachtet werden dabei nur solche Prozesse zur selben totalen Energie  $S_H$ , wie sie für die Events der  $2 \rightarrow 2$ -Klasse von Belang sind).

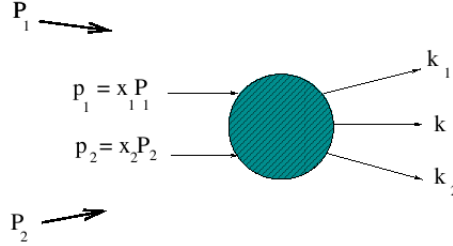


Abbildung 20: Eine generische Darstellung eines  $2 \rightarrow 2$  Prozesses. In diesem Abschnitt ist der Vierervektor  $k$  aus dem Anfangszustand emittiert gedacht. Für den nächsten Abschnitt 5.2 wird dieser Vierervektor aus dem Endzustand emittiert werden. In beiden Abschnitten wird (in gewissen Grenzen) dieser den *äußeren* vier Impulsen zugeordnet werden.

Wegen des zusätzlich emittierten (masselosen) Partons, welches durch den Vierervektor  $k$  bezeichnet wird, existieren weitere Invarianten (neben den drei Analogons zu den  $2 \rightarrow 2$ -Events, die hier als indizierte Kleinbuchstaben ohne Dach

$$\begin{aligned} s &= 2p_1 p_2, \\ t_1 &= -2p_1 k_1, \\ u_1 &= -2p_1 k_2 \end{aligned}$$

bezeichnet werden). Die zusätzlichen Invarianten sind

$$\begin{aligned} t_2 &= -2p_2 k_2, \\ u_2 &= -2p_2 k_1, \\ v_1 = t_k &= -2p_1 k, \\ v_2 = u_k &= -2p_2 k, \\ s_2 = (k_1 + k_2)^2 &= 2k_1 k_2 + 2m_Q^2 \end{aligned}$$

Um zwischen diesen beiden Sätzen eine Abhängigkeit herzustellen, ist es günstig, in das Ruhesystem der schweren Quarks zu gehen, und den Viererimpuls

$$(2E_0, 0, 0, 0)$$

zu betrachten, wobei  $E_0$  die Energie eines Quarks ist.

Die Prozesse der  $H$ -Klasse sind in bestimmten Bereichen eng mit den Prozessen der  $S$ -Klasse verknüpft. Ziel soll es nun sein, die Invarianten eines untergeordneten  $2 \rightarrow 2$ -Prozesses aus den Invarianten eines  $2 \rightarrow 3$ -Prozesses zu bestimmen. Die Mandelstam-Invarianten  $\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}$  des untergeordneten Prozesses werden später zur Auswertung des Subtraktionsterm  $d\sigma|_{PS}$  benötigt.

Dazu betrachten wir hier nun die Produktion eines Paares schwerer Quarks in

ihrem Schwerpunktsystem, das durch den obigen Vektor gegeben war. Wird von einem der einlaufenden Partonen ein Parton mit den Impuls  $k$  emittiert, so liegt in dem Schweren-Quark-System die totale Energie  $s_2 = s + v_1 + v_2$  vor. Da  $k^2 = 0$ , so gilt in einem beliebigen Bezugssystem

$$(k_1 + k_2)^2 = (k_1 + k_2 + k)^2 - 2(k_1 + k_2 + k)k = s + v_1 + v_2 = s_2$$

Weil die Emission die Masse der schweren Quarks nicht ändert, muss  $s_2$  nur einen Schwellwert zur Erzeugung der schweren Quarks überschreiten.

Ist das Parton emittiert, so setzt man  $s_2 = \bar{s}$ , und es ist möglich, einfach mit reduzierter Energie  $s_2$  den  $2 \rightarrow 2$ -Prozess in Abhängigkeit der  $2 \rightarrow 3$ -Größen im neuen Lorentzsystem auszurechnen.

Bezogen auf die totale (Sub)Energie gibt es dann keine Möglichkeit zur Unterscheidung eines  $2 \rightarrow 2$ - vom  $2 \rightarrow 3$ -Subprozesses anhand der ausgehenden schweren Quarks.

Um die beiden anderen Mandelstam-Invarianten des Untersystems zu berechnen ( $\bar{t}, \bar{u}$ ), geht man folgendermaßen vor: Man betrachtet zunächst im Schwerpunktsystem der schweren Quarks eines  $2 \rightarrow 2$ -Event die Differenz der Viererimpuls der schweren Quarks in einem geeignet gedrehten System

$$\bar{k}_1 - \bar{k}_2 = 2\vec{k} = 2(0, \bar{k}_T, 0, \bar{k}_L)$$

Eine longitudinale Lorentz-Transformation in z-Richtung (mit  $c = 1$ ) lautet

$$E' = \gamma(E - \beta p_z)$$

und

$$p'_z = \gamma(p_z - \beta E)$$

Da die  $E$ -Komponente verschwindet (der Differenz), bleibt  $E' = -\gamma(\beta 2k_L)$  und  $p'_z = \gamma 2k_L$  (transversale Komponenten sind invariant unter einer longitudinalen Transformation). Mit einer longitudinalen Lorentz-Transformation wird mit der obigen Gleichung der Unterschied zur Differenz  $(k_1 - k_2)_L$  nur ein Lorentzfaktor  $\gamma_L$  sein, da der gesamte Transversalimpuls verschwinden muss ( $\bar{k}_T = 0$ ).

Die Bewegung erfolgt entlang einer Achse. Somit gilt für die Differenz

$$(k_1 - k_2)_L = \gamma_L(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)_L = 2\gamma_L\bar{k}_L$$

wobei

$$\gamma_L = \sqrt{1 + \frac{(k_1 + k_2)_L^2}{(k_1 + k_2)^2}}$$

Man kann aus der Differenz  $(k_1 - k_2)$  die longitudinale Komponente extrahieren, in dem man einen Vektor  $(0, 0, 0, 1)$  konstruiert. Diese Kombination ist durch

$$\frac{x_2 p_1 - x_1 p_2}{\sqrt{x_1 x_2 \bar{s}}} = \frac{x_1 x_2 (P_1 - P_2)}{\sqrt{x_1^2 x_2^2 2 P_1 P_2}} = \frac{x_1 x_2 (0, 0, 0, \sqrt{S_H})}{x_1 x_2 \sqrt{S_H}} = (0, 0, 0, 1)$$

gegeben ( $s = x_1 x_2 S_H$  ist eine Mandelstam-Invariante ausgedrückt durch die Impulse  $x_1, x_2$ , und es gilt  $P_{1/2} = (E_H, 0, 0, \pm E_H)$  mit  $S_H = 4E_H^2$ ).

Dann folgt unter Benutzung von

$$t_1 = -2p_1 k_1, t_2 = -2p_2 k_2, u_1 = -2p_1 k_2, u_2 = -2p_2 k_1$$

und

$$\bar{k}_L = -\frac{(x_2 p_1 - x_1 p_2) \cdot (k_1 - k_2)}{2\gamma_L \sqrt{x_1 x_2 s}}$$

$$\bar{k}_T = \sqrt{\bar{E}^2 - \bar{k}_L^2 - m^2}$$

sowie

$$\gamma_L = \sqrt{1 + \frac{[(x_2 p_1 - x_1 p_2)(k_1 + k_2)]^2}{x_1 x_2 s (k_1 + k_2)^2}}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \sqrt{s + v_1 + v_2}$$

$$\bar{k}_L = \frac{\bar{E} x_2 (t_1 - u_1) + x_1 (t_2 - u_2)}{2s \sqrt{x_+^2 - x_1 x_2 v_1 v_2 / s^2}}$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{s + v_2}{s} x_1 \pm \frac{s + v_1}{s} x_2 \right)$$

Im „Soft Limes“ ( $v_1 = v_2 = 0$ ) reduzieren sich die Ausdrücke auf

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \sqrt{s}$$

und damit wird

$$\bar{k}_L = \frac{1}{2\sqrt{s}} (t - u)$$

für das schwere Quark ( $(\bar{k}_L \leftrightarrow -\bar{k}_L)$  für das Antiquark) unter Beachtung von

$$t_1 - u_1 = t_2 - u_2 = t - u$$

Die drei Mandelstam-Invarianten lauten für eine Emission aus dem Anfangszustand, unabhängig davon, welche Seite emittiert

$$\bar{s} = s + v_1 + v_2$$

$$\bar{t} = -\frac{1}{2} (s + v_1 + v_2) \left( 1 - \frac{x_2 (t_1 - u_1) + x_1 (t_2 - u_2)}{2s \sqrt{x_+^2 - x_1 x_2 v_1 v_2 / s^2}} \right)$$

$$\bar{u} = -\bar{s} - \bar{t}$$

Damit existiert der gesuchte Zusammenhang der Form  $2 \rightarrow 2 = 2 \rightarrow 3$ .

Auf der rechten Seite stehen Größen in Abhängigkeit der Impulse  $x_1, x_2$ , die später als Integrationsvariable identifiziert werden.

Es ist nun nötig, die Impulse  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  in Abhängigkeit ihrer  $2 \rightarrow 3$  Analogons,  $x_1, x_2$ , zu bestimmen. Mit  $\bar{s} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 S_H$  und  $s_2 = x_1 x_2 S_H$  folgt über die Bedingung  $s_2 = \bar{s}$

$$x x_1 x_2 S_H = \bar{x}_1 \bar{x}_2 S_H$$

woraus mit  $x = s_2 / s$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 = \frac{s + v_1 + v_2}{s} x_1 x_2$$

folgt. Im Folgenden muss man sich für eine weitere Erhaltungsgröße entscheiden, üblicherweise die Rapidity des schweren Quark-Paares oder ihr longitudinales

Moment. Andere Erhaltungsgrößen sind aber auch denkbar. Neben der totalen Energie ist es diese Erhaltungsgröße, die dem  $2 \rightarrow 2$ -Event zur Verfügung stehen wird, wenn dieser aus einem  $2 \rightarrow 3$ -Event berechnet wird.

Durch  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 = \frac{s_2}{s} x_1 x_2$  ist, wie oben erwähnt, die Masse der schweren Quarks erhalten.

Für den Erhalt des longitudinalen Moments (Abschnitt 5.2.1) muss

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \frac{s + v_2}{s} x_1 - \frac{s + v_1}{s} x_2$$

gelten. Im Labor-System ist die Summe der Impulse der longitudinalen Komponente eines  $2 \rightarrow 2$ -Prozesses durch  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  gegeben.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_- + \sqrt{x_+^2 - x_1 x_2 v_1 v_2 / s^2} \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 - 2x_- \end{aligned}$$

Die Erhaltung der Rapidität (Abschnitt 5.2.1) erfordert

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{x_1(s + v_2)}{x_2(s + v_1)}$$

In einem  $2 \rightarrow 2$ -Prozess gilt für das eingehende Paar im Laborsystem  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$ . Daraus extrahiert man

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 \sqrt{\frac{(s + v_1 + v_2)(s + v_2)}{s(s + v_1)}} \\ \bar{x}_2 &= x_2 \sqrt{\frac{(s + v_1 + v_2)(s + v_1)}{s(s + v_2)}} \end{aligned} \quad (36)$$

Diese Impulse werden später u. a. zur Auswertung der PDFs  $f_j(\bar{x}_j, Q^2)$  benötigt.  $x_1$  und  $x_2$  sind zwei der insgesamt fünf Integrationsparameter  $(x_1, x_2, \phi_3)$ . Darauf wird ab Kapitel 6 weiter eingegangen, siehe Gln. (42), (43).

## 5.2 Eine Partonenemission aus dem Endzustand – „Final State“-Emission (FSR)

Wie in Abschnitt 5.1 ist es auch hier das Ziel, die Mandelstam-Invarianten des Unterprozesses für die Auswertung der Matrixelemente des Subtraktionsterms  $d\sigma|_{PS}$  für den Fall einer Emission eines Partons aus dem Endzustand auszuwerten.

Dazu wird ein  $2 \rightarrow 2$ - (mit den Impulsen für einen Subprozess der Form  $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \rightarrow \bar{k}_1 \bar{k}_2$ ) und ein  $2 \rightarrow 3$ -Prozess (mit den Impulsen für einen Subprozess  $p_1 p_2 \rightarrow k_1 k_2 k$ ) zur gleichen totalen Schwerpunktsenergie  $\sqrt{S_H}$  betrachtet, in dem jeweils ein schweres Quark-Paar produziert wird. Mit diesen Impulsen werden die Mandelstam-Invarianten  $\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}$  in Abhängigkeit der  $2 \rightarrow 3$ -Invarianten  $s, t, u$  berechnet. Das gleiche gilt für die Impulse  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ .

Mit bekanntem  $\bar{k}_L$  ist es dann möglich,  $\bar{t} = -2\bar{E}(\bar{E} - \bar{k}_L)$  zu berechnen und

damit  $\bar{u} = -\bar{s} - \bar{t}$ .

Zur Ableitung der Mandelstam-Invarianten kann man wie folgt vorgehen [5](das schwere Quark soll im Folgenden das Parton emittieren): Man führt einen Skalierungsfaktor  $\alpha$  ein, der über die Energieerhaltung festgelegt werden kann; mit diesem Faktor wird die Raumkomponente der schweren Quarks multipliziert, und man erhält hierdurch einen  $2 \rightarrow 2$ -Prozess.  $k_1$  und  $k_2$  sind die Vierervektoren des schweren Quarks bzw. Antiquarks und  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  sind die skalierten Vektoren im neuen System

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &= (\sqrt{m^2 + (\alpha\bar{k})^2}, -\alpha\bar{k}_T, 0, -\alpha\bar{k}_L) \\ \tilde{k}_1 &= (\sqrt{(k+k_1)^2 + (\alpha\bar{k})^2}, \alpha\bar{k}_T, 0, \alpha\bar{k}_L) \\ \bar{k}^2 &= \bar{k}_T^2 + \bar{k}_L^2 = \bar{E}^2 - m^2 \\ \omega_1 &= (k+k_1)^2 - m^2 \\ \tilde{k}_1^2 &= \tilde{k}_2^2 = k_1^2 = k_2^2 = m^2\end{aligned}$$

Die Energieerhaltung ergibt den Faktor  $\alpha$ . Die Bedingung ist

$$2\bar{E} = \sqrt{m^2 + (\alpha\bar{k})^2} + \sqrt{(k+k_1)^2 + (\alpha\bar{k})^2}$$

Dann lässt sich  $\alpha$  angeben

$$\alpha^2 = \frac{(\frac{4\bar{E}^2 - \omega_1}{4\bar{E}})^2 - m^2}{\bar{E}^2 - m^2}$$

Im „Soft Limes“,  $\omega_1 \rightarrow 0$ , wird dieser Faktor 1.

Angenommen wird, dass der Faktor  $\alpha$  nahe bei diesem Wert liegen wird, da obige Transformation lediglich eine Approximation für die neuen Viererimpulse darstellt.

Man findet für die einzelnen Komponenten

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\sqrt{s}$$

$$\bar{k}_L = \bar{E} \left( \frac{t_2 - u_1}{s - \omega_1} \right) \frac{\bar{\beta}}{\beta_2}$$

mit  $\beta_2 = \sqrt{1 - 4sm^2/(s - \omega_1)^2}$  und  $\bar{\beta} = \sqrt{1 - 4m^2/\bar{s}}$

$\bar{k}_L$  ist berechenbar, in dem der Ausdruck

$$t_2 - u_1 = -2p_2\tilde{k}_2 + 2p_1\tilde{k}_2 = -2(p_2 - p_1)\tilde{k}_2$$

gebildet wird mit

$$p_2 - p_1 = (0, 0, 0, 2p_L)$$

Dieses projiziert die gesuchte  $\bar{k}_L$  Komponente heraus.  $\bar{k}_T$  ist über  $\bar{k}_T^2 = \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{s}} - m^2$  zu bestimmen (oder  $\bar{E}^2 - m^2 - \bar{k}_L^2 = \bar{k}_T^2$ ).

Die Invarianten sind nun (Label  $1 \leftrightarrow 2$ , falls das Antiquark emittiert)

$$\begin{aligned}\bar{s} &= s \\ \bar{t} &= -\frac{1}{2}s\left(1 - \left(\frac{t_2 - u_1}{s - \omega_1}\right)\frac{\bar{\beta}}{\beta_2}\right) \\ \bar{u} &= -\bar{s} - \bar{t}\end{aligned}$$

Die eingehenden Partonenimpulse können durch eine „Final State“-Emission nicht beeinflusst werden, so dass die zu der  $S$ -Klasse gehörenden Impulse  $\bar{p}_1 = p_1$  und  $\bar{p}_2 = p_2$  gesetzt werden können. Die Impulse des untergeordneten  $S$ -Klasse Systems,  $\bar{x}_{1f}, \bar{x}_{2f}$ , die zur Auswertung der PDFs  $f_j(\bar{x}_{jf}, Q^2)$  benötigt werden, unterliegen durch diese Emission keiner Änderung, so dass

$$x_1 = \bar{x}_{1f} \quad \text{und} \quad x_2 = \bar{x}_{2f} \quad (37)$$

gesetzt werden kann.

$x_1$  und  $x_2$  sind zwei der fünf Integrationsparameter. Darauf wird ab Kapitel 6 weiter eingegangen, siehe Gln. (42), (43).

### 5.2.1 Der kinematische Gamma-Faktor und die Reduktion der Partonenimpulse

**Zum Gamma-Faktor:**

Die Energiekomponente im Labor-System eines  $2 \rightarrow 2$ -Event kann dargestellt werden durch den Viererimpuls  $(E, \vec{0})$ . Wird ein  $2 \rightarrow 3$ -Event betrachtet, welcher die totale Energie  $E' = \sqrt{s_2}$  besitzt, so gilt die Transformation  $E' = \sqrt{s_2} = \gamma(E - \beta\vec{0}) \rightarrow$

$$\gamma = \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{\bar{s}}} = \frac{E' = (k_1 + k_2)_0 = \sqrt{(k_1 + k_2)_T^2 + (k_1 + k_2)_L^2 + (k_1 + k_2)^2}}{\sqrt{\bar{s}}}$$

mit  $\sqrt{\bar{s}} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2} = \sqrt{s_2}$  nach Voraussetzung ( $s_2 = \bar{s} = (k_1 + k_2)^2$ ) woraus

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)_L^2 + (k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{(k_1 + k_2)_L^2}{(k_1 + k_2)^2}}$$

folgt (für eine Map  $P_{H \rightarrow S}$  können nur die  $2 \rightarrow 3$  nach  $2 \rightarrow 2$  Übergänge interessieren, in denen der gesamte (vektorielle) Transversalimpuls nahezu verschwindet, also  $\vec{k}_T \simeq 0$  gilt).

**Die Impulse:**

Mit  $\bar{s} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 S_H$  und  $s_2 = x_1 x_2 S_H$  gilt bei Gleichheit (zur selben totalen Energie  $S_H$ )

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 S_H = x_1 x_2 S_H$$

und damit

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 = \frac{s_2}{s} x_1 x_2$$



Diese Gleichung gilt also immer, solange  $s_2 = \bar{s}$ .

Ein  $2 \rightarrow 2$ -Event dient immer als Anfangsbedingung für den Schauer, um den „Backward-Algorithmus“ zu starten. Jeder Event soll durch einen Integrationspunkt  $(x_1, x_2, \phi_3)$  beschrieben werden können. Die Bedingung  $s_2 = \bar{s}$  legt aber noch nicht alle Größen eines Events fest. Es kann die Erhaltung des **longitudinalen Moments**

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \frac{s + u_k}{s} x_1 - \frac{s + t_k}{s} x_2$$

gefordert werden oder z. B. auch der Erhalt der **Rapidity**

$$\ln \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \ln \frac{x_1(s + u_k)}{x_2(s + t_k)}$$

Das lässt sich jeweils auflösen nach  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$

a) Für die Erhaltung des **longitudinalen Moments** ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_- + \sqrt{x_+^2 - x_1 x_2 v_1 v_2 / s^2} \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 - 2x_- \end{aligned} \quad (38)$$

mit

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{s + v_2}{s} x_1 \pm \frac{s + v_1}{s} x_2 \right)$$

b) Die Erhaltung der **Rapidity** erfordert

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{x_1(s + v_2)}{x_2(s + v_1)}$$

In einem  $2 \rightarrow 2$ -Prozess gilt für das eingehende Paar im Labor-System

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$$

Daraus extrahiert man

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 \sqrt{\frac{(s + v_1 + v_2)(s + v_2)}{s(s + v_1)}} \\ \bar{x}_2 &= x_2 \sqrt{\frac{(s + v_1 + v_2)(s + v_1)}{s(s + v_2)}} \end{aligned} \quad (39)$$

Diese Impulse werden u. a. später zur Auswertung der PDFs  $f_j(\bar{x}_j, Q^2)$  benötigt.  $x_1$  und  $x_2$  sind zwei der insgesamt fünf Integrationsparameter  $(x_1, x_2, \phi_3)$ .

*Bedingung a)* kann man wie folgt sehen. Transformiert man Partonen in das Massemittelpunktsystem der Hadronen, wobei die Hadronen die Impulse

$$P_{1,2} = (E_H, 0, 0, \pm E_H)$$

besitzen sollen, so lauten die Partonenimpulse

$$p_1 = x_1(E_H, 0, 0, E_H)$$

und

$$p_2 = x_2(E_H, 0, 0, -E_H)$$

Mit diesen Impulsen ist eine Transformation in das Hadronen-Laborsystem gegeben durch die Größen

$$\beta = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

und

$$\gamma\beta = \frac{1}{2} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 x_2}}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1 x_2}}$$

Aus dem Anfangszustand soll nun ein Parton mit dem Viererimpuls (bezogen auf ein willkürliches System)

$$k = \left( (1-x) \frac{\sqrt{s}}{2}, k_T, 0, k_L \right)$$

emittiert werden. Dieser Impuls muss erst in das Hadronen-Laborsystem transformiert werden. Das geschieht über

$$k'_0 = \gamma(k_0 - \beta k_z)$$

und

$$k'_z = \gamma(k_z - \beta k_0)$$

mit den oben genannten Werten für  $\gamma$  und  $\beta$ .

Ausgeschrieben lauten beide Gleichungen

$$k'_0 = \frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} \left( (1-x) \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} k_z \right)$$

und

$$k'_z = \frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} \left( k_z - \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} (1-x) \frac{\sqrt{s}}{2} \right)$$

In jedem Bezugssystem muss  $k^2 = k'^2 = k_0^2 - k_T^2 - k_L^2 = 0$  gelten und somit

$$k_L^2 = k_0^2 - k_T^2 = (1-x)^2 \frac{s}{4} - k_T^2$$

Die Transversalkomponente  $k_T^2$  ist durch

$$k_T^2 = \frac{t_k u_k}{s} = \frac{1}{4} s (1-x)^2 (1-y^2)$$

gegeben mit

$$t_k = -\frac{1}{2} s (1-x)(1-y)$$

und

$$u_k = -\frac{1}{2}s(1-x)(1+y)$$

Damit ist

$$k_L^2 = \frac{s}{4}(1-x)^2y^2 \rightarrow k_L = \frac{\sqrt{s}}{2}(1-x)y = k_z$$

Einsetzen in die Transformationsgleichungen und beachten, dass nur die Addition der longitudinalen Komponente wichtig ist (das Parton kann z. B. von  $p_1$  emittiert angenommen werden), liefert

$$\tilde{p}_1|_z = (p_1 - k')|_z$$

und

$$p_2|_z = -x_2E_H = -x_2\sqrt{S_H}/2$$

Benutzt man in der Gleichung noch  $\sqrt{s} = \sqrt{x_1x_2S_H}$ , dann ergibt die Addition

$$k_{Q\bar{Q}} = (p_1 - k')|_z - x_2E_H$$

den Longitudinalimpuls des ausgehenden Quark-Paares

$$k_{Q\bar{Q}} = -\frac{\sqrt{S_H}}{4}((1-x)y(x_1+x_2) + (1+x)(x_2-x_1))$$

Man muss nun zwei Gleichungen mit den Variablen des „Dreiteilchenraumes“ beschreiben. Weiter müssen die beiden Gleichungen auch mit den Variablen des „Zweiteilchenraumes“ beschrieben werden (im  $\bar{s}$  System).

Die erste Gleichung ist für a) und b) gleich

$$M_{Q\bar{Q}}^2 = xx_1x_2S_H$$

mit den „Dreiteilchenvariablen“ bzw.

$$M_{Q\bar{Q}}^2 = \bar{x}_1\bar{x}_2S_H$$

mit den „Zweiteilchenvariablen“. a) liefert als nötige zweite Gleichung (mit den „Dreiteilchenvariablen“) den longitudinalen Impuls der schweren Quarks, was gerade abgeleitet wurde

$$k_{Q\bar{Q}} = -\frac{\sqrt{S_H}}{4}((1-x)y(x_1+x_2) + (1+x)(x_2-x_1))$$

bzw. mit den „Zweiteilchenvariablen“

$$\bar{k}_{Q\bar{Q}} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\frac{\sqrt{S_H}}{2}$$

und der Forderung

$$k_{Q\bar{Q}} = \bar{k}_{Q\bar{Q}}$$

Es lässt sich dann Auflösen nach  $\bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$  mit dem Ergebnis aus a).

*Bedingung b)* lässt sich erfüllen, wenn man neben der oben erwähnten Erhaltung

der Masse der schweren Quarks noch die Erhaltung der Rapidity fordert. Im „Zweiteilchensystem“ ( $S$ -System) ist sie durch

$$\bar{y}_{Q\bar{Q}} = \frac{1}{2} \log \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$$

gegeben, im „Dreiteilchensystem“ ( $H$ -System) dagegen durch

$$y_{Q\bar{Q}} = \log \xi + \frac{1}{2} \log \frac{x_1}{x_2}$$

mit

$$\xi = \sqrt{\frac{2 - (1-x)(1+y)}{2 - (1-x)(1-y)}}$$

(beides aus dem Laborsystem gesehen). Die Verschiebung der Rapidity mit Hilfe  $\xi$ , wenn sie aus einem anderen System betrachtet wird, ist auch durch

$$\frac{1}{2} \log \xi = \frac{1}{2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

gegeben ( $\beta = v/c$ ). Die zugehörige Lorentz-Transformation soll zwischen den durch  $s_2 = v_1 + v_2 + s$  und  $\bar{s}$  ausgezeichneten Systemen Gleichheit herstellen. Das Verschwinden des zusätzlichen Partons ist gleichbedeutend damit, dass

$$v_1 = -v_2$$

gelten muss. Der Fall  $v_1 = v_2 = 0$  ist mit einem  $2 \rightarrow 2$ -Event zu identifizieren. Eine einfache Überlegung verbindet die Verschiebung der Rapidity mit der  $\beta$ -Form mit der Rapidity in der  $\xi$ -Form: Ein  $S$ -Event aus seinem System bedeutet  $v_1 = v_2 = 0$  und  $\xi = 0$  bzw.  $\beta \rightarrow 0$ ; das andere Extrem, dass das Parton die maximal mögliche Energie „mitnimmt“ bedeutet  $v_i = -s$  ( $i=1$  oder  $2$ ), und das bedeutet  $\beta \rightarrow 1$ . Man kann dann mit  $v_1 = -v_2$  Beta festlegen zu  $\beta = \frac{v_2}{s}$  und  $\beta = -\frac{v_1}{s}$ . Fügt man diese Beta in  $\xi$  ein, so folgt mit

$$t_k = v_1 = -\frac{s}{2}(1-x)(1-y)$$

und

$$u_k = -\frac{s}{2}(1-x)(1+y)$$

das oben angegebene Resultat.

Die Gleichheit von  $\bar{y}_{Q\bar{Q}}$  und  $y_{Q\bar{Q}}$  sowie die Bedingung

$$x x_1 x_2 M_{Q\bar{Q}}^2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 M_{Q\bar{Q}}^2$$

liefert für die Impulse  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  unter b).

Voreingestellt für die Generierung der Subprozesse ist die Erhaltung der Rapidity. Eine Eventgenerierung mit der Option, den longitudinalen Impuls zu erhalten, zeigt bzgl. der hadronisierten Teilchenschar keine beobachtbaren Abhängigkeiten.

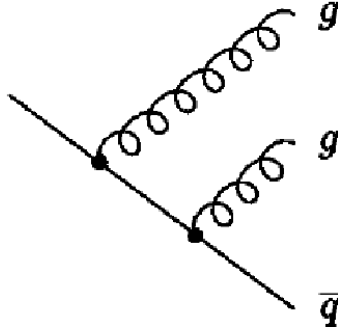


Abbildung 21: Darstellung einer Mehrfach-Verzweigung; ein Antiquark emittiert zwei Gluonen.

### 5.3 Der Partonen-Schauer (Teil 1)

Die Partonen-Schauer-Algorithmen, die in dem Programm DPMJET III (resp. PHOJET und PYTHIA) benutzt werden, generieren, wie schon erwähnt, iterativ weitere Partonen, indem mögliche Übergänge der Form  $i \rightarrow jk$  betrachtet werden. Für  $i, j, k$  setzt man beliebig  $q, \bar{q}, g$ .

Es existieren verschiedene Ansätze, solche Verzweigungen, wie sie in der Abbildung 21 zu sehen ist, zu beschreiben, wobei ein notwendiger Bestandteil einer solchen Beschreibung natürlich die Energie- und Impulserhaltung sein muss.

Solche Verzweigungen können über zwei Variablen behandelt werden. Die Vorstellung ist, dass Partonen, die *auf* den „Ort“ im Phasenraum zulaufen, an dem sie wechselwirken (z. B. ein Subprozess der Art  $ab \rightarrow cd$ ), „Off Shell“ werden.

Für diese Partonen gilt, je näher sie diesem Punkt kommen,

$$p_a^2 = -Q_a^2 \ll m_a^2, p_b^2 = -Q_b^2 \ll m_b^2$$

Für Partonen, die sich *von* diesem Ort entfernen, gilt

$$p_c^2 = Q_c^2 \gg m_c^2, p_d^2 = Q_d^2 \gg m_d^2$$

Nur Partonen, die „Off Shell“ sind, können weitere Partonen emittieren. Erstere Verzweigungen werden in der Literatur „Space Like“-Verzweigungen genannt, der zweite Fall beschreibt „Time Like“-Verzweigungen.

In HERWIG sind dies bezogen auf einen Übergang  $i \rightarrow jk$  eine Energievariable  $z$ , die den Anteil der Energie angibt, der auf die Töchter übertragen wird. Dementsprechend gilt dort  $z_j = \frac{E_j}{E_i}$ . Die zweite Variable ist in dem Programm

$$\xi_{jk} = \frac{p_j \cdot p_k}{E_j \cdot E_k} \simeq 1 - \cos \theta_{jk}$$

für (nahezu) masselose Partonen  $jk$ . Die „Winkelvariable“ ist nicht Lorentz invariant, denn der Winkel, unter dem man diese Verzweigung *sieht*, ist abhängig vom Bezugssystem.

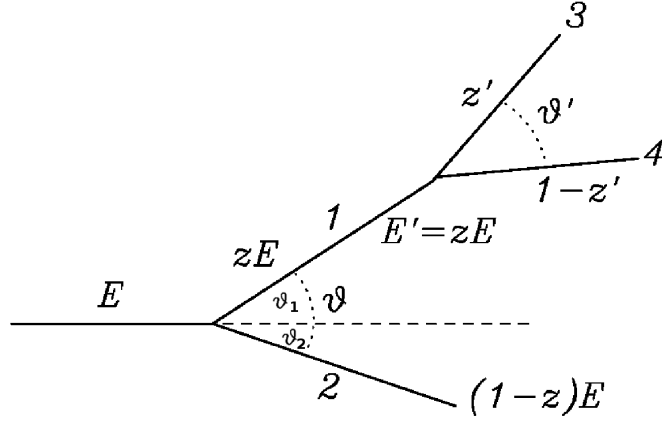


Abbildung 22: Ein Splitting-Prozess mit einer nachgeschalteten Verzweigung im HERWIG-Partonen-Schauer. Im Mittel gilt für die entsprechenden Winkel ( $\theta' < \theta$ ) [52].

Der Vorteil dieser Wahl ist aber, dass eine Ordnung der Partonenverzweigungen, beginnend beim ersten Splitting bis zur letzten Verzweigung *automatisch* derart stattfindet, dass die Winkel (bzw. die mit ihr definierten Variablen, siehe dazu weiter unten) ihrer Größe nach geordnet werden, also die erste Partonenverzweigung hat (im Mittel) den größten Winkel gegenüber der nächsten Verzweigung („Angular Ordering“ [52], gesehen vom Phasenraumpunkt aus, mit der betragsmäßig größten Virtualität. Unter PHOJET/PYTHIA ist diese Ordnung nicht automatisch erfüllt. Stattdessen werden *ungünstige* Verzweigungen, die nicht in dieses „Ordering Schema“ hineinpassen, verworfen. Die Prozedur wiederholt sich solange, bis eine Abbruchbedingung erfüllt ist, und diese ist stets der Form, in PHOJET/PYTHIA wie auch in HERWIG, dass die Virtualität (oder damit eine assoziierte Größe) betragsmäßig einen Mindestwert unterschreitet („Cut Off“-Wert, der in der Größenordnung von  $\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \lesssim 1$  liegen muss). In Abbildung 22 gilt für kleine Winkel

$$p_t = \theta_1 z E = \theta_2 (1 - z) E$$

mit  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\theta_1}{1-z} = \frac{\theta_2}{z}$ . Definiert man noch die Virtualität im HERWIG-Modell  $t = E^2 \theta^2$ , so gilt für den Transversalimpuls

$$p_t = \sqrt{t} z (1 - z)$$

Anhand der Virtualität  $t$  sieht man, dass bei sukzessiven Verzweigungen (und konstanter Ausgangsgröße  $E$ ) der Winkel  $\theta$  abnimmt, wenn die Virtualität sich verringert.

In dem Simulationsprogramm HERWIG wird nicht direkt die Variable  $t$  als Entwicklungsvariable genommen, sondern das verwandte  $Q_l = E_l \sqrt{\xi_l}$  für die  $l$ .

Verzweigung; dieses verändert aber nicht qualitativ die Beschreibung, und die assoziierte Winkelordnung lautet für zwei sukzessive Verzweigungen

$$Q_{l+1} < Q_l$$

wenn man sich diese von dem „Ort“ mit der (betragsmäßig) größten Virtualität entwickelt vorstellt.

Die Abbildung 22 lässt neben der beschriebenen Ordnung in  $t$  resp.  $Q$  und der damit verbundenen Winkelordnung auch „Fehlrekonstruktionen“ zu. Wenn  $z \simeq 1$  (Linie 2 ist „Soft“) und  $z' \simeq \frac{1}{2}$ , dann ist für eine („Time Like“-)Verzweigung  $\theta' < \theta$ , aber  $p'_t > p_t$ . Ist die Linie 2 ein „Soft“-Gluon, so entsteht, wenn die klassische Vorstellung in Abbildung 22 stimmt, auf Grund der zugeordneten Altarelli-Parisi-Splitting-Funktion eine  $\frac{1}{1-z}$  Singularität (siehe Abschnitt 2.3). Verhindert wird dieses singuläre Verhalten auf Grund von Kohärenz-Effekten, die außerhalb des „klassischen“ Konus (definiert durch die eben beschriebene Ordnung in der Virtualität, mit der in Abbildung 22 gestrichelten Linie als Mittellinie des Konus), auftreten. Generell gilt im HERWIG-Modell, sowohl für „Space Like“- als auch „Time Like“-Verzweigungen, dass außerhalb des durch die „Winkelvariable“  $t$  (oder auch  $Q$ ) vorgegebenen Gebietes, destruktive Interferenz weitere Verzweigungen unterdrücken. Effektiv wird der Phasenraum für emittierte Partonen aus einem Schauer durch diese Ordnung reduziert [53].

Die Schauer-Variablen für PHOJET/PYTHIA werden in den kommenden Abschnitten beschrieben. Der Algorithmus wird in Abschnitt 6.4 genauer aufgeführt.

## 5.4 Die Schauer-Variablen für eine Partonenemission aus dem Anfangszustand in Abhängigkeit zweier geeigneter Invarianten

In diesem Abschnitt werden die Variablen  $z, Q^2$  über zwei geeignete Invariante, die während der Eventphase bekannt und berechenbar sein müssen, abgeleitet. Dieser und der folgende Abschnitt sind entscheidend für die Anpassung des neuen Subtraktionsterms. Der aktuelle Abschnitt behandelt die Beschreibung von Partonenemissionen aus dem Anfangszustand, welches durch das Programm PHOJET durchgeführt wird. Entsprechendes gilt für die Abschnitte 5.5 und 5.5.1. für das Programm PYTHIA, das die Beschreibung von Partonenemissionen aus dem Endzustand übernimmt. Beide Programme sind Bestandteile von DPMJET III.

Die Variable  $z$  stellt, wie in HERWIG, eine Splittingvariable dar. Anders als dort, ist sie in PHOJET/PYTHIA allerdings keine reine Energiesplittingvariable. Sie gibt an, welcher Anteil der totalen Subenergie  $\hat{s}$  bei einer Emission  $i \rightarrow jk$  des Mutterpartons  $i$  an die Tochter  $j$  übergeben wird (und damit auch an  $k$ ). Mit dieser Definition ist sie Lorentz invariant. Ihre genaue Definition bezogen auf den Splittingvorgang ist weiter unten aufgeführt.

$Q^2$  ist im Prinzip aus den vorherigen Abschnitten bekannt, nur dass während eines Schauers die äußeren Linien hochgradig „Off Shell“ sind, es gilt also nicht mehr für ein Teilchen der Masse  $m$ ,  $p^2 = m^2$ , sondern  $p^2 = -Q^2 \ll m^2$ .  $Q^2$  ist also die Virtualität eines Partons. Diese Variablen sind Bestandteile

der Partonen-Schauer-Algorithmen und beiden Variablen werden während der Eventgenerierung innerhalb gewisser Grenzen Werte zugewiesen  $Q_0^2 \leq Q^2 \leq Q_{max}^2 = p_t^2 + m^2$  und  $0 \leq z \leq 1$ .  $Q_0$  ist in der Größenordnung von 1 GeV. Dieser Wert entspricht in etwa der zugeordneten Ausdehnung eines Hadrons (Proton/Neutron).

Da mit dem modifizierten Subtraktionsverfahren „im Voraus“ der störende Partonen-Schauer-Beitrag heraus gerechnet werden muss, müssen diese Variablen berechenbar sein. Das geschieht über zwei Invariante, die während der Eventgenerierung bekannt sind. Mehr zu den Algorithmen und den Schauer-Variablen ab Abschnitt 6.4.

Unter PHOJET wird die Emission von Partonen aus dem Anfangszustand heraus, wie erwähnt, nach dem PYTHIA-Modell berechnet. Die Emission eines Partons kann wie in Abbildung 23 verdeutlicht werden. Dann ist es möglich

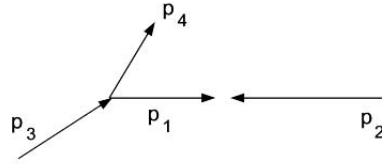


Abbildung 23: Eine Partonenemission mit seiner Darstellung der Viererimpulse. Das Parton mit dem Viererimpuls  $p_4$  wird aus einem Anfangszustand emittiert.

$p_3^2 = 0$  zu setzen (das emittierte Parton erzeugt keinen „Time Like“-Schauer, da es (nahezu) keine Masse bekommt; damit gilt  $p_4^2 \simeq 0$ ).  $p_2$  soll ebenfalls nicht emittieren, seine Virtualität ist im Vergleich zu der totalen Subprozessenergie  $s$  gering, so dass  $p_2^2 \simeq 0$  gilt.

Seien  $3 \rightarrow 4 + 1$  und  $2$  stellvertretend für die Viererimpulse.  $1$  und  $2$  sind die Partonenimpulse der in den „harten Stoß“ laufenden Teilchen, und damit gilt in ihrem „Center of Mass“-System (z. B. für die Produktion eines  $B$ -Mesons)

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1p_2 = 2m_b^2$$

Die Emission eines Parton, z. B. von der Linie  $1$ , legt dann die Linie  $4$  als dieses fest. Linie  $3$  ist dann das Parton, welches aus dem Hadron gelöst wurde.

Die Splittingvariable  $z$  ist definiert über

$$\hat{s} = \hat{s}_{32} = \frac{s_{12}}{z} = (p_3 + p_2)^2 = \frac{2m_b^2}{z}$$

Damit kann  $z$  auch als Variable interpretiert werden, in der der Term  $(1 - z)\frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}$  die Partonenergie beschreibt ( $x \equiv z$  entsprechend der Definition für  $x$  in [4]).

Weiterhin kann der  $\hat{t}$ -Kanal definiert werden über

$$\hat{t} = (p_3 - p_4)^2 = p_1^2 = -Q_1^2 \equiv -Q^2$$



Damit ist  $\hat{u}$  festgelegt

$$\hat{u} = 2m_b^2 - \hat{t} - \hat{s} = 2m_b^2\left(1 - \frac{1}{z}\right) + Q^2$$

Die Grenzen für den  $\hat{s}$  und  $\hat{t}$ -Kanal sind ( $s$  ist die totale Hadronenenergie)

$$2m_b < \hat{s} < s$$

und

$$2m_b - \hat{s} < \hat{t} < 0$$

Die Grenzen in diesen Bedingungen geben den „Soft-Bereich“ (unteres  $\hat{s}$ ) und die „Kollinearen-Bereiche“ ( $\hat{t}$ , wovon  $2m_b^2 - \hat{s}$  „Soft-Kollinear“ wird) an.

In Abhängigkeit davon, ob Parton 4 eine Ruhemasse  $m_4$  besitzen soll oder nicht, kann die Splittingvariable  $z$  angegeben werden. Im PYTHIA-Manual wird diese Masse bestimmt (mit der Einschränkung  $Q_2^2 = 0$ )

$$m_{max,4}^2 = \left(\frac{Q_1^2}{z} - Q_3^2\right)\left(\frac{\hat{s}}{\hat{s} + Q_1^2} - \frac{\hat{s}}{\hat{s}/z + Q_3^2}\right)$$

Zusätzlich kann hier die Masse beschränkt werden auf  $m_{max,4}^2 = 0$ , denn das Parton soll keine Ruhemasse bekommen (oder nur eine sehr kleine, die keinen „Time Like“-Schauer auslösen kann; Bedingung:  $m_4 < m_{min,g} = \frac{1}{2}m_{eff,g} = Q_0$ ;  $Q_0 = 1$  GeV in PYTHIA/PHOJET).  $Q_3^2 = 0$  ist noch zu beachten, wenn das Parton 3 aus dem Hadron heraus gelöst wurde.

Die zweite Klammer lässt sich auflösen nach  $z$  und ergibt

$$z = \frac{\hat{s}}{\hat{s} + Q^2} = \frac{\hat{s}}{\hat{s} - \hat{t}}$$

Im „Kollinearen“-Fall, z. B.  $Q^2 \rightarrow 0$ , gilt  $\hat{t} = 0$  und  $\hat{u} = 2m_b^2\left(\frac{z-1}{z}\right)$ . Das macht  $z = p_1/p_3$  plausibel.

Sollte Linie 2 das Parton emittieren, ist  $\hat{t}$  durch  $\hat{u}$  zu ersetzen (die Variablen  $\hat{t}$  und  $\hat{u}$  sind in den Artikeln [4, 5] mit  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnet worden).

#### 5.4.1 Die Schauer-Variablen in Abhängigkeit der Variablen $(x, y)$ des emittierten $H$ -Partons

Im weiteren Verlauf ist es notwendig, die Schauer-Variablen  $z, Q^2$  in Abhängigkeit der Variablen des emittierten Partons zu beschreiben  $(x, y)$ , denn in dem „Dreiteilchenphasenraum“  $\phi_3$ , der in dem Integrationsmaß des Subtraktionsschemas auftaucht (Abschnitt 6.4, 6.5), werden u. a. gerade diese Variablen benutzt, um damit den differentiellen Beitrag des Subtraktionsterms zum Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Dieser wird zwar proportional zum „Born“-Matrixelement konstruiert ( $d\sigma_{ab}^{(b)} = \hat{M}_{ab}d\phi_2$ ), aber die Absicht, jeden Event durch das Integrationsmaß der Form  $dz_1dz_2d\phi_3$  beschreiben zu können, macht es notwendig, den „Zweiteilchenphasenraum“  $d\phi_2$  auf einen „Dreiteilchenphasenraum“  $d\phi_3$  zu „erweitern“. Doch diese Erweiterung geschieht fast automatisch, wie man in Abschnitt 6.5 sehen wird. Dort wird  $d\phi_2$  mit den Partonvariablen  $(x, y)$  multipliziert werden, die aus einer Variablentransformation (Jacobi-Determinante)

kommen, die in diesem Abschnitt festgelegt wird (sowie im nächsten Abschnitt für die Emission aus dem Endzustand).

Eine Parametrisierung des „Dreiteilchenphasenraums“ lautet [4, 5]

$$d\phi_3(s) = \frac{\hat{s}\beta_x(\hat{s})}{1024\pi^4}(1-x) dx dy d\varphi d\cos\theta$$

mit

$$\beta_x(\hat{s}) = \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{x\hat{s}}}$$

und dem Azimuth- bzw. Polarwinkel zwischen den einlaufenden leichten Quarks und den schweren Quarks (in ihrem „Center of Mass“-System)

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$x, y$  sind die Variablen, die das Parton beschreiben, wobei  $(1-x)\sqrt{\hat{s}}$  die Partonenenergie und  $-1 \leq y \leq 1$  der (cos)Raumwinkels, unter dem das Parton emittiert wird.

Es ist die Splittingvariable  $z$  mit  $x$  zu identifizieren (siehe oben), egal welches Quark emittiert hat, so dass

$$z(x, y) = x$$

was durch  $x = \frac{s_2}{\hat{s}} = \frac{2m_b^2}{\hat{s}} = \frac{s_{12}}{\hat{s}} = z$  nahe gelegt wird [5].

Die andere Variable,  $\hat{t} = -Q^2$ , bzw.  $\hat{u} = -Q^2$ , wenn das Antiquark emittiert, wird mit

$$\hat{t} = t_k(x, y) = -\frac{1}{2}\hat{s}(1-x)(1-y)$$

oder im zweiten Fall mit

$$\hat{u} = u_k(x, y) = -\frac{1}{2}\hat{s}(1-x)(1+y)$$

identifiziert.  $t_k, u_k$  sind die in [4] genannten Jet-Virtualitäten.

Eine Änderung im Integrationsmaß  $dz dQ^2$  (im Subtraktionsterm) schlägt sich dann wie folgt nieder (unabhängig davon, ob das *von links* oder *von rechts* kommende Parton emittiert hat)

$$dz dQ^2 = \left| \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = \frac{1}{2}\hat{s}(1-x) dx dy \quad (40)$$

## 5.5 Die Schauer-Variablen für eine Partonenemission aus dem Endzustand in Abhängigkeit zweier geeigneter Invarianten

Auch hier werden die beiden Schauer-Variablen  $z$  und  $Q^2$  über zwei Invariante bestimmt. Alle Erklärungen aus den Abschnitten 5.1, 5.4 zu diesen beiden

Variablen sind auch hier gültig. Wie dort erklärt, betrifft diese Ableitung das Programm PYTHIA.

Zunächst kann, wie in [4], der Ausdruck

$$\omega_1 = (k + k_1)^2 - m^2$$

benutzt werden, wobei  $k, k_1$  die Impulse des  $H$ -Partons bzw. des schweren Quarks sind. Das  $H$ -Parton wurde vom schweren Quark emittiert. PYTHIA be-

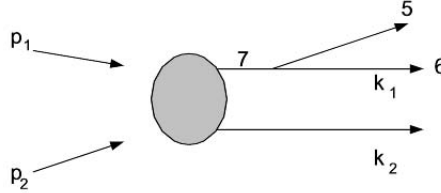


Abbildung 24: Eine Partonenmission aus dem Endzustand von einem schwere Quark.

rechnet den Transversalimpuls eines gesplitteten Partons über  $k_{\perp}^2 = z(1-z)m^2$  (Abschnitt 5.5.2), was gleichzeitig der Transversalimpuls des schweren Quarks ist (welches das Parton emittiert hat).  $z$  ist die Energiesplittingvariable und  $t = \ln(\frac{m^2=Q^2}{\Lambda^2})$ . PYTHIA benutzt die Masse als Virtualität.

Zu betrachten ist nun der Übergang  $7 \rightarrow 6 + 5$  (siehe Abbildung 24), wobei 7 das aus dem „harten Stoß“ kommende schwere („Off Shell“-)Quark ist ( $m^2 = m_b^2 \ll Q^2$ ), 5 das Parton und 6 erneut das ausgehende schwere Quark. Die Ursprungs-Partonenmasse  $\omega_1$  wird in PYTHIA mit seiner Virtualität gleichgesetzt, d.h., während des Schauervorgangs ist

$$\omega_1 = Q^2$$

Die zweite Invariante ist der Transversalimpuls  $k_{\perp} = k_{1\perp}$  eines der schweren Quarks. Dieser ist durch die Kombination

$$k_{1\perp}^2 = \frac{q_1 \hat{q}_2}{\hat{s}} - m^2$$

mit  $q_i = (p_i - k_i)^2 - m^2$  ( $i = 1, 2$ ) und  $\hat{q}_2 = (p_2 - k_1)^2 - m^2$  gegeben und ist gleichzeitig der Transversalimpuls des Partons  $k_{\perp}$  (wenn das Antiquark emittiert, dann ist Label 1 mit Label 2 zu vertauschen). Parametrisiert man den eingehenden Partonenimpuls mit

$$p_{1,2} = (E, 0, 0, \pm E)$$

und die schweren Quark Impulse mit

$$k_{1,2} = \left( \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}, \pm k_{(1,2)\perp}, 0, \pm k_{(1,2)l} \right)$$

so lässt sich schnell sehen, dass durch die Kombination ein Transversalimpuls gegeben ist. Es ist nun möglich, diesen Transversalimpuls durch die Schauer-Variablen zu beschreiben. Dann gilt

$$k_{1\perp}^2 = \frac{q_1 \hat{q}_2}{\hat{s}} - m^2 = z(1-z)Q^2$$

Der Schauer wird abgebrochen, sobald ein bestimmter Wert für die Virtualität unterschritten wird. Für Gluonen ist dieser Wert

$$m_{min,g} = \frac{1}{2}m_{eff,g} = Q_0$$

Ein üblicher Wert für  $Q_0$  ist  $Q_0 = 1$  GeV. Für Quarks gilt

$$m_{min,q} = m_{eff,q} + m_{eff,g} \geq Q_0$$

mit

$$m_{eff,q} = \sqrt{m_q^2 + \frac{1}{4}Q_0^2}$$

Hier muss aber beachtet werden, dass das  $b$ -Quark eine effektive Masse der Größe  $m_b \sim 4.5 \dots 5$  GeV besitzt, und  $m_{eff,q}$  ist mit  $m_{eff,Q}$  zu ersetzen. Die Splittingvariable  $z$  kann nun explizit angegeben werden. Es ist dann

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_{1\perp}^2}{\omega_1}}$$

mit den Grenzen

$$m_{eff,(Q,g)} \leq \omega_1 < \infty$$

Wegen der Wahl des Transversalimpulses  $k_{1\perp}^2 = z(1-z)Q^2$  reicht es, für  $z$  die Werte zwischen

$$0 < z \leq \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \leq z \leq 1$$

zu betrachten. Das sind die beiden möglichen Splittingintervalle, wie sie auch im PYTHIA Manual zu finden sind (bzw. Abschnitt 5.5.2 mit  $\beta_a = 1$ ).

Emittiert das Antiquark, so ist  $\omega_1$  mit  $\omega_2 = (k + k_2)^2 - m^2$  und  $k_{1\perp}$  mit  $k_{2\perp}^2 = \frac{q_2 \hat{q}_1}{\hat{s}} - m^2$  zu ersetzen.

### 5.5.1 Die Schauer-Variablen in Abhängigkeit der Variablen $(x, y)$ des emittierten $H$ -Partons

Ebenso wie in dem Fall, dass aus dem Anfangszustand ein Parton emittiert wird (Abschnitt 5.4.1), sollen nun für die Emission aus dem Endzustand die Schauer-Variablen mit den Partonenvariablen  $(x, y)$  ausgedrückt werden.

Hilfreich sind dabei folgende Ausdrücke für die Impulse im „Center of Mass“-System der schweren Quarks. Sie können als eine Parametrisierung eines LO-Graphen + Parton aufgefasst werden, in dem der Energie- und Impulssatz erfüllt ist ( $(p_1 + p_2) - (k + k_1 + k_2) = 0$ ). Das zusätzliche Parton ist also nicht speziell aus dem Anfangs- oder Endzustand emittiert gedacht.

Die Parametrisierung lautet [23] (siehe auch Appendix C)

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1^0(1, 0, 0, 1) \\
p_2 &= p_2^0(1, 0, \sin \psi, \cos \psi) \\
k &= k^0(1, 0, \sin \psi', \cos \psi') \\
k_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{s_2}(1, \beta_x \sin \phi \sin \theta_1, \beta_x \cos \phi \sin \theta_1, \beta_x \cos \theta_1) \\
k_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{s_2}(1, -\beta_x \sin \phi \sin \theta_1, -\beta_x \cos \phi \sin \theta_1, -\beta_x \cos \theta_1)
\end{aligned}$$

Die Größen sind

$$\begin{aligned}
\beta_x &= \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x\hat{s} = s_2}} \\
\cos \psi' &= 1 + \frac{t_k = v_1}{2p_1^0 k^0} \\
\cos \psi &= 1 - \frac{\hat{s}}{2p_1^0 p_2^0} \\
p_1^0 &= \frac{\hat{s} + t_k}{2\sqrt{s_2}} \\
p_2^0 &= \frac{\hat{s} + u_k}{2\sqrt{s_2}} \\
k^0 &= -\frac{t_k + u_k}{2\sqrt{s_2}}
\end{aligned}$$

$\theta_1$  ist der Streuwinkel (zwischen  $\vec{p}_1$ , und  $\vec{k}_1$ ) und  $\phi$  ist der Azimuthwinkel

$$0 \leq \theta_1 \leq \pi \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Die Invariante

$$\omega_1 = (k + k_1)^2 - m_b^2$$

lässt sich dann ausdrücken als ( $s = \hat{s}$ )

$$\omega_1(x, y) = \frac{1}{2}\hat{s}(1-x)(1 - \beta_x \cos \phi \sin \theta_1 \sin \psi' - \beta_x \cos \theta_1 \cos \psi')$$

Zu beachten in dem Ausdruck ist noch die Abhängigkeit des Winkels  $\psi'$  von

$$t_k(x, y) = v_1 = -\frac{1}{2}\hat{s}(1-x)(1-y)$$

und

$$u_k(x, y) = v_2 = -\frac{1}{2}\hat{s}(1-x)(1+y)$$

sowie die gleiche Abhängigkeit der Nullkomponente ( $p_1^0, p_2^0$ ) und  $s_2$  von diesen Variablen.

Die entsprechende Invariante für das Antiquark lautet

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{2}\hat{s}(1-x)(1 + \beta_x \cos \phi \sin \theta_1 \sin \psi' + \beta_x \cos \theta_1 \cos \psi')$$

Die restlichen Invarianten,  $q_1, q_2, \hat{q}_1, \hat{q}_2$ , lauten ausgedrückt, indirekt in den  $(x, y)$  Koordinaten,

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\hat{s} + t_k}{2}(1 - \beta_x \cos \theta_1) \\ q_2 &= -\frac{\hat{s} + u_k}{2}(1 + \beta_x(\cos \phi \sin \theta_1 \sin \psi + \cos \theta_1 \cos \psi)) \\ \hat{q}_1 &= -\hat{s} - t_k - q_1 \\ \hat{q}_2 &= -\hat{s} - u_k - q_2 \end{aligned}$$

Eine Änderung des Integrationsmaßes beinhaltet wieder eine Jacobi-Determinante. Sie lautet (der Index 1, 2 soll eine Emission vom Quark/Antiquark festlegen)

$$dz_{1,2} dQ_{1,2}^2 = \left| \frac{\partial(z_{1,2}, Q_{1,2}^2)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \quad (41)$$

Die Jacobi-Determinante tritt immer als Absolutwert auf. Aus dem vorherigen Abschnitt 5.5 ist ersichtlich, dass das Splitting-Intervall symmetrisch bzgl. des Punktes  $z = \frac{1}{2}$  ist, und dass jede Ableitung dieser Variable wegen des Betragszeichens positiv ist. Die Auswahl, wie sie im Fortran-Code für die Auswahl eines Wertes für die Splittingvariable getroffen wird, kann also z. B. im zweiten Intervall mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{2}$  geschehen (und damit auch mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{2}$  für das erste Intervall).

Durch die verschachtelte Verknüpfung der Invarianten von  $x, y$  wäre eine komplette Angabe der Ableitung hier unübersichtlich.

Die Splittingvariable  $z$  enthält neben der Invarianten  $\omega_i$  den Transversalimpuls  $k_{1t}$  bzw.  $k_{2t}$ , wenn das Antiquark emittiert.

Die Ableitungen von  $z_{1,2}(x, y)$  nach den Argumenten sind

$$\frac{\partial z_{i=(1,2)}(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{k_{i\perp}^2}{\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} (-1) \left( \frac{\partial k_{i\perp}^2}{\partial x} \omega_i - k_{i\perp}^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) \frac{1}{\omega_i^2}$$

und

$$\frac{\partial z_{i=(1,2)}(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{k_{i\perp}^2}{\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} (-1) \left( \frac{\partial k_{i\perp}^2}{\partial y} \omega_i - k_{i\perp}^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right) \frac{1}{\omega_i^2}$$

Die Ableitungen der Transversalimpulse sind

$$\frac{\partial k_{1\perp}^2}{\partial(x, y)} = \frac{\hat{q}_2}{\hat{s}} \frac{\partial q_1}{\partial(x, y)} + \frac{q_1}{\hat{s}} \frac{\partial \hat{q}_2}{\partial(x, y)} \quad \frac{\partial \hat{q}_2}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u_k + q_2)}{\partial(x, y)}$$

und

$$\frac{\partial k_{2\perp}^2}{\partial(x, y)} = \frac{\hat{q}_1}{\hat{s}} \frac{\partial q_2}{\partial(x, y)} + \frac{q_2}{\hat{s}} \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial(x, y)} \quad \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(t_k + q_1)}{\partial(x, y)}$$

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \omega_i}{\partial(x, y)}$  sind hier nicht weiter aufgeführt.

Es ließen sich nun alle notwendigen Ausdrücke zur Auswertung der Jacobi-Determinanten aufführen. Das wird hier aus Lesbarkeitsgründen unterlassen. Die Formeln kann man direkt im Quellcode finden (File „pho\_mcatnlo\_qqmain.f“; die erste Routine ist „function zpho“).

### 5.5.2 Die Splittingvariable und der Transversalimpuls unter PYTHIA

Für einen Übergang  $a \rightarrow bc$  ist das  $z$  definiert über den Energiesplittingvorgang (im „Center of Mass“-System von Parton  $a$ ), so dass für die Energie-Komponente der Teilchen  $b, c$   $E_b = zE_a$  und  $E_c = (1 - z)E_a$  gilt. Die erlaubten Werte für  $z$  werden aus der Bedingung

$$z_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \beta_a \Theta(m_a^2 - m_{a,min}^2))$$

gewählt mit  $\beta_a = |\vec{p}_a|/E_a$  und  $z_- \leq z \leq z_+$ .  $\Theta$  ist die Stufenfunktion mit

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Zu diesem „Zeitpunkt“ wird auch die Masse  $m_a$  bestimmt. Die Teilchen  $b$  und  $c$  werden zunächst als masselos angenommen, auch in dem Fall, dass eines der Partonen bekanntermaßen eine Ruhemasse besitzen sollte. Die Auswertungen geschehen im „Center of Mass“-System von Parton  $a$ , so dass  $\vec{p}_b = -\vec{p}_c$  gilt. Für masselose Partonen hätten  $p_a^{(0)}$  und  $p_b^{(0)}$  nur eine nicht verschwindende  $p_0 + |\vec{p}|$  und  $p_0 - |\vec{p}|$  Komponente. In einem willkürlichen System hingegen können die (massiven) Viererimpulse der Teilchen  $b$  und  $c$  über

$$p_b = (1 - k_b)p_b^{(0)} + k_b p_c^{(0)}$$

und

$$p_c = (1 - k_c)p_c^{(0)} + k_c p_b^{(0)}$$

berechnet werden. Die Konstanten  $k_b$  und  $k_c$  werden über die Viererimpulse  $p_b^2 = m_b^2$  und  $p_c^2 = m_c^2$  festgelegt (das vorher bestimmte  $z$  kann nun in einem unerlaubten Bereich liegen, so dass diese Wahl von  $z$  ggf. *korrigiert* werden muss mit einem neuen  $z'$ ).

Die Konstanten sind

$$k_{b,c} = \frac{m_a^2 - \lambda_{abc} \pm (m_c^2 - m_b^2)}{2m_a^2}$$

mit  $\lambda_{abc} = \sqrt{(m_a^2 - m_b^2 - m_c^2)^2 - 4m_b^2 m_c^2}$ . Aus der vorherigen Definition der Splittingvariable  $z = \frac{E_b^{(0)}}{E_a}$  wird nun das *korrigierte*  $z'$  zu

$$z' = \frac{E_b}{E_a} = (1 - k_b)z + k_c(1 - z) = \frac{m_a^2 - \lambda_{abc} + m_b^2 - m_c^2}{2m_a^2} - \frac{z\lambda_{abc}}{m_a^2}$$

Der transversale Impuls  $\vec{p}_{\perp}$  von  $b$  und  $c$  ist nun (bezogen auf Richtung des Partons  $a$ )

$$p_{\perp}^2 = \frac{\lambda_{abc}^2}{m_a^2} \left( \frac{z(1-z)}{\beta_a^2} - \frac{1 - \beta_a^2}{4\beta_a^2} \right)$$

was für  $\beta_a \rightarrow 1$  gegen

$$p_{\perp}^2 \simeq z(1-z)m_a^2$$

strebt. Das ist die von PYTHIA bevorzugte Wahl zur Berechnung des Transversalimpulses in einer Verzweigung (was auch als Argument von  $\alpha_s$  benutzt wird,

insbesondere deswegen, weil die Kopplungskonstante benötigt wird, *bevor* alle kinematischen Größen bekannt sind).

Alternative lässt sich das Resultat auch über die Einführung von „Light Cone“-Variablen sehen. Der oben genannte Übergang  $a \rightarrow bc$  soll so bestehen bleiben. Mit der Einführung der Größe

$$p_{\pm} = E \pm p_z$$

werden zwei neue Variablen eingeführt. Die Invariante  $p^2 = m^2$  wird dadurch zu

$$p_+ p_- = m^2 + \vec{p}_{\perp}^2$$

Offensichtlich gilt  $\vec{p}_{\perp,c} = -\vec{p}_{\perp,b}$ . Damit wird der geltende Ausdruck

$$p_{-,a} = p_{-,b} + p_{-,c}$$

und der Definition der Splitting-Variablen  $z$  über

$$p_{+,b} = z p_{+,a}$$

und

$$p_{+,c} = (1 - z) p_{+,a}$$

zu

$$\frac{m_a^2}{p_+} = \frac{m_b^2 + \vec{p}_{\perp}^2}{z p_{+,a}} + \frac{m_c^2 + \vec{p}_{\perp}^2}{(1 - z) p_{+,a}} \Rightarrow m_a^2 = \frac{m_b^2}{z} + \frac{m_c^2}{(1 - z)} + \frac{\vec{p}_{\perp}^2}{(1 - z)z}$$

Das führt zu dem bekannten Resultat, wenn die Massen (oder den zuzuordnenden Virtualitäten)  $m_b, m_c$  vernachlässigbar sind.

Insbesondere sieht man hier auch, wenn man für einen Moment die Masse  $a$  vernachlässigt und Teilchen  $c$  nicht weiter verzweigen soll (so dass  $m_c$  die Ruhemasse des Teilchens  $c$  ist, z. B. null), dass gilt

$$m_b^2 = -\frac{\vec{p}_{\perp}^2}{(1 - z)} < 0$$

für eine „Initial State“-Verzweigung. In einer „Final State“-Verzweigung gilt hingegen mit der Annahme, dass Teilchen  $b, c$  auf ihrer Massenschale liegen

$$m_a^2 = \frac{\vec{p}_{\perp}^2}{z(1 - z)} > 0$$

So, wie es sein soll.



## 6 Die Erweiterung der „Ein-Photon“-Näherung aus Abschnitt 4.4 auf den QCD-Schaueralgorithmus

Dieses Kapitel beginnt zunächst mit der Formulierung eines Wirkungsquerschnittes bis NLO und beinhaltet aber noch keine Änderung im Sinne eines modifizierten Subtraktionsschemas. Die Subprozesse sind dagegen endlich (regularisiert), was mit dem Dachsymbol kenntlich gemacht wird.

Ein messbarer Wirkungsquerschnitt lässt sich über das Faktorisierungstheorem (Abschnitt 2.2 und 2.4, Gl. (6), (19), (20)) angeben über

$$d\sigma(P_1, P_2) = \sum_{ab} \int dx_1 dx_2 f_a^{(H_1)}(x_1, \mu_F) f_b^{(H_2)}(x_2, \mu_F) d\hat{\sigma}_{ab}(x_1 P_1, x_2 P_2, \mu_F)$$

für eine Kollision zweier Hadronen  $H_1$  und  $H_2$  mit den Impulsen  $P_1$  und  $P_2$ . Die Summe wird über die in den Subprozess eingehenden Flavours ( $ab$ ) ausgeführt, die einen Beitrag zur Produktion der  $b$ -Quarks liefern.

$f_{a,b}^{(H_1, H_2)}$  sind Verteilungsfunktionen. Sie können als Wahrscheinlichkeitsdichten für das Auffinden einer bestimmten Anzahl an möglichen Partonen  $a, b \in q, \bar{q}, g$ ,  $N_f$  Flavours im Hadron  $H_1, H_2$  interpretiert werden und erfüllen eine Reihe von Summenregeln. Betrachtet werden diese Funktionen in einem vom Labor-System aus gesehenen „Infinite Momentum Frame“<sup>3</sup>. Mehr zu den Verteilungsfunktionen findet sich in den Abschnitten 2.1 und 6.4.

Der partonische Wirkungsquerschnitt  $\hat{\sigma}_{ab}$  enthält indirekt die Counterterme (Dachsymbol), und  $\mu_F$  ist die Faktorisierungsskala (Abschnitt 2.2 und 2.4), z. B. wird sie in der Produktion schwerer Quarks meist auf  $\mu_F^2 = m_b^2 + p_t^2$  gesetzt ( $m_b$  = Masse der schweren Quarks,  $p_t$  = Transversalimpuls des  $b$ -Quarks). Eine andere Wahl kann, obwohl sie formal zulässig ist, zu einer schlechteren Konvergenz führen, d.h. zu einem ungenaueren Ergebnis. In Kapitel 9 wird neben der Faktorisierungsskala  $\mu_F$  auch die Renormierungsskala  $\mu_R$  variiert werden, um eine Anpassung an die Daten zu erreichen.

Die Subprozesse sind aus der Einführung (Abschnitt 3) bekannt und wurden in eine  $S$ -Klasse und  $H$ -Klasse unterteilt.

Diese waren ( $S$ )

$$gg \rightarrow Q\bar{Q}$$

$$q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q}$$

und ( $H$ )

$$gg \rightarrow Q\bar{Q}g$$

$$q\bar{q} \rightarrow Q\bar{Q}q$$

$$qq \rightarrow Q\bar{Q}q$$

---

<sup>3</sup>Das IMF zeichnet sich durch folgende Vereinfachung aus: Vierervektor<sup>2</sup>  $\simeq 0 \rightarrow$  Darstellung  $p^\mu \simeq (P, 0, 0, P)$  mit  $P \gg M_P$ ; die Konstituenten (Partonen) besitzen hierbei einen longitudinalen Impuls  $\xi p^\mu$  mit  $\xi \in 0 \dots 1$  und einen vernachlässigbaren Transversalimpuls.

sowie die Ladungskonjugierten Prozesse.  $d\hat{\sigma}$  lässt sich in verschiedene Bestandteile unterteilen:

$$d\hat{\sigma}_{ab} = d\sigma_{ab}^{(b)} + d\sigma_{ab}^{(sv)} + d\hat{\sigma}_{ab}^{(c+)} + d\hat{\sigma}_{ab}^{(c-)} + d\hat{\sigma}_{ab}^{(f)}$$

Es sind nacheinander

- a)  $d\sigma_{ab}^{(b)}$  ist der „Born“-Term; er ist ein  $2 \rightarrow 2$ -Prozess
- b)  $d\sigma_{ab}^{(sv)}$  sind die Beiträge der „virtuellen“ Diagramme und der Fälle, in dem das Parton „Soft“ wird ( $d\hat{\sigma}^{(s)}$  kürzt die verbliebenen Singularitäten aus  $d\sigma^{(v)}$ , so dass der Term  $d\sigma^{(sv)}$  endlich ist [23]); sie sind von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$
- c)  $d\hat{\sigma}_{ab}^{(c\pm)}$  sind die (endlichen) Beiträge, die aus den „Kollinearen“-Konfigurationen aus einem Anfangszustand stammen. + und – bezeichnen die Emission von Parton 1 bzw. Parton 2. Es sind Subprozesse vom Typ  $2 \rightarrow 3$  (die Counterterme sind vom Typ  $2 \rightarrow 2$ ). Sie werden aber im Weiteren als „Quasi“- $2 \rightarrow 2$  (Klasse  $\tilde{S}$ ) bezeichnet [4] und werden später durch eine Koordinatentransformation mit Hilfe der in den Abschnitten 5.1 und 5.2 (Gln. (36), (37)) bestimmten Variablen in einer gewissen Näherung in die  $S$ -Klasse untergebracht, da sie von diesen nicht zu unterscheiden sind
- d)  $d\hat{\sigma}_{ab}^{(f)}$  sind die Beiträge, die durch die Emission eines Partons verursacht werden. Sie haben  $2 \rightarrow 3$ -Kinematik, und ihre Counterterme haben  $2 \rightarrow 2$ -Kinematik.

In Anlehnung an das obige Integral kann der differentielle Wirkungsquerschnitt in Bezug auf die Subenergie zur Ordnung NLO geschrieben werden als (mit einer entsprechenden Definition der  $f_i^{(H)}(x_j)$  und der Voraussetzung, dass die Matrixelemente in dieser Ordnung vorliegen;  $\mu$  wird im weiteren Verlauf nicht mehr aufgeführt)

$$d\hat{\Sigma}_{ab}(x_1, x_2) = f_a^{(H_1)}(x_1) f_b^{(H_2)}(x_2) d\hat{\sigma}_{ab}(x_1 P_1, x_2 P_2)$$

Der partonische Wirkungsquerschnitt ist weiterhin definiert durch

$$d\hat{\sigma}_{ab}^{(x)}(p_1, p_2) = M_{ab}^{(x)}(p_1, p_2) d\phi_{2,3}$$

mit Index  $x = (b, sv, c\pm, f)$ . Hierbei ist  $d\phi_{2,3}$  der differentielle Phasenraum für 2 oder 3 Teilchen im Endzustand,  $M_{ab}^{(x)}$  ist das quadrierte Matrixelement, gemittelt über eingehende und summiert über nicht gemessene, ausgehende Informationen.

Der vollständige Prozess wird bzgl. seines Endzustandsspektrums durch sein erzeugendes Funktional beschrieben. Mit der Testfunktion  $O$ , die eine beliebige Messung des Endzustandes beschreibt, ist der Wert des Funktionals gerade der Erwartungswert der entsprechenden Messung. Für den betrachteten harten Prozess ist das Funktional

$$\langle O \rangle = \sum_{ab} \int dx_1 dx_2 d\phi_3 \left\{ O(3) \frac{d\Sigma_{ab}^{(f)}}{d\phi_3} \Big|_{ev} + O(2) \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\Sigma_{ab}^{(b)}}{d\phi_2} + \frac{d\Sigma_{ab}^{(sv)}}{d\phi_2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +O(\tilde{2})\frac{1}{\mathcal{I}_{\tilde{2}}}\left(\frac{d\Sigma_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\Sigma_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx}\right)|_{ev} \\
& -O(2)\frac{1}{\mathcal{I}_{\tilde{2}}}\left(\frac{d\Sigma_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\Sigma_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx}\right)|_{ct} \\
& -\left(O(2), O(\tilde{2})\right)\frac{d\Sigma_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ct}\}
\end{aligned}$$

Die Klammer im letzten Schritt soll angeben, dass der Realbeitrag (Superskript  $(f)$ ) sowohl  $2 \rightarrow 2$  als auch quasi- $2 \rightarrow 2$  Kinematik haben kann [4]. Die Faktoren  $\mathcal{I}(2)$  und  $\mathcal{I}(\tilde{2})$  sind Normierungen für Prozesse der Klasse 2 und  $\tilde{2}$ , die sich aus den Bedingungen

$$\int d\phi_3(s) = \mathcal{I}_2 \int d\phi_2(s)$$

und

$$\int d\phi_3(s) = \mathcal{I}_{\tilde{2}} \int d\phi_2(xs) dx$$

ergeben. Die  $x$ -Integration wird über die Partonenenergie ausgeführt.

Bevor der Subtraktionsterm konstruiert wird, ist es günstig, die Prozesse der Klasse  $\tilde{2}$  zu eliminieren, ansonsten müsste man für diese Klasse eigens einen eigenen Subtraktionsterm bestimmen.

Vereinfachend ist die folgende Beobachtung [4], dass die Prozesse der Klassen 2 und  $\tilde{2}$  sich nur in einem longitudinalen Boost unterscheiden, wenn im Anfangszustand ein Parton kollinear emittiert wird (eine Emission aus dem Endzustand ändert diese Impulse nicht, Kapitel 5). Dazu ist eine Koordinatentransformation nötig der Form

$$(x_1, x_2) \rightarrow (z_1, z_2)$$

mit

$$x_1 = x_1^{(\alpha)}(z_1, z_1, \phi_3), \quad x_2 = x_2^{(\alpha)}(z_1, z_2, \phi_3)$$

und mit  $\alpha = s, c+, c-$ .

Die Integration über die Impulse  $x_1$  und  $x_2$  enthalten indirekt einen solchen Boost, denn die Lorentz-Transformationen sind linear und stellen, wie benötigt, nur eine Koordinatentransformation dar (Abschnitt 6.1).

Für festgehaltene  $x_1$  und  $x_2$  gelten für die Klassen  $2 \neq \tilde{2}$ , aber für ein gegebenes Paar  $x_1$  und  $x_2$  existiert ein  $\tilde{x}_1$  und ein  $\tilde{x}_2$  in der Form, dass  $2(x_i) = \tilde{2}(\tilde{x}_i)$  gilt. Bei einer solchen Transformation ändern sich die einzelnen Beiträge zum differentiellen Wirkungsquerschnitt durch eine Jacobi-Determinante

$$d\overline{\Sigma}_{ab}^{(\alpha)}(z_1, z_2, \phi_3) = \frac{\partial(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)})}{\partial(z_1, z_2)} d\Sigma_{ab}^{(\alpha)}(x_1^{(\alpha)}(z_1, z_2, \phi_3), x_2^{(\alpha)}(z_1, z_2, \phi_3), \phi_3)$$

Damit ist es möglich [4], die Observable  $O$  in die Form

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle = & \sum_{ab} \int dz_1 dz_2 d\phi_3 \left\{ O(3) \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3} |_{ev} + O(2) \left[ \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(b)}}{d\phi_2} + \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(sv)}}{d\phi_2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\mathcal{I}_{\tilde{2}}} \left( \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx} \right) |_{ev} - \frac{1}{\mathcal{I}_{\tilde{2}}} \left( \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx} \right) |_{ct} - \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3} |_{ct} \right] \right\}
\end{aligned}$$

zu bringen. Alle Terme, die Konfigurationen aus der  $\tilde{2}$ -Klasse aufweisen können, sind von dieser Transformation direkt betroffen, z. B. der Term, der die Partonenemission beschreibt,  $\frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ev}$ . Bei den Termen ohne  $\tilde{2}$  Konfigurationen reduziert sich die Transformation auf die 1. Wegen der Einheitlichkeit wurden bei allen Termen diese Schreibweise benutzt.

Wie in Kapitel 4 wird als nächstes die gleiche Ersetzung der Observablen  $O$ , die die Rolle eines generierenden Funktionals spielt, mit dem Interface  $I(O, n)$  ( $n = 2, 3$ ) vorgenommen.

Die Konstruktion des modifizierten Integrals erfordert wie in dem Modellsystem aus Kapitel 4, Abschnitt 4.4, einen Term der Form

$$\frac{d\bar{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS}$$

Dieser muss die notwendigen Eigenschaften besitzen, auftretende Singularitäten aus dem Term

$$\frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ev}$$

eliminieren zu können („Soft“ und „Kollinear“) und sich bis NLO mit dem Partonen-Schauer-Beitrag

$$I_{MC}(O, 2) \frac{1}{\mathcal{I}_2} \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(b)}}{d\phi_2}$$

heraus zu kürzen. Das Einführungsmodell legt also nahe, einen Term

$$I_{MC}(O, n) \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS}$$

zu addieren und wieder zu subtrahieren. Die Konstruktion des Subtraktionsterms beginnt ab Abschnitt 6.3.

Es lässt sich dann der differentielle Wirkungsquerschnitt unter Vorwegnahme des nächsten Abschnitts angeben

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dO} = & \sum_{ab} \int dz_1 dz_2 d\phi_3 \left\{ I_{MC}(O, 3) \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ev} - \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS} \right) \right. \\ & + I_{MC}(O, 2) \left[ -\frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ct} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS} + \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(b)}}{d\phi_2} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(sv)}}{d\phi_2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx} \right) |_{ev} - \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx} \right) |_{ct} \right] \right\} \end{aligned}$$

Eine Integration über die Observable  $O$  ergibt den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \int dO \frac{d\sigma}{dO}$$

Dann ist es möglich, wegen der Eigenschaft des Subtraktionsterms, das Integral in die Form

$$I_H = \sum_{ab} \int dz_1 dz_2 d\phi_3 \left\{ \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ev} - \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS} \right\} \quad (42)$$

und

$$I_S = \sum_{ab} \int dz_1 dz_2 d\phi_3 \left\{ -\frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3} \Big|_{ct} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3} \Big|_{PS} + \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(b)}}{d\phi_2} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(sv)}}{d\phi_2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx} \right) \Big|_{ev} - \frac{1}{\mathcal{I}_2} \left( \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c+)}}{d\phi_2 dx} + \frac{d\bar{\Sigma}_{ab}^{(c-)}}{d\phi_2 dx} \right) \Big|_{ct} \right\} \quad (43)$$

zu bringen.  $a, b$  sind wieder die Flavours, über die summiert wird. Damit ist

$$\sigma_{tot} = I_H + I_S$$

Diese beiden Anteile, Gln. (42), (43), sind in dieser Form mit dem angepasstem Subtraktionsterm (ab Abschnitt 6.3) als Fortran Code implementiert.

## 6.1 „Event Projection“

„Event Projection“ bietet einen einfachen Weg, die im vorherigen Abschnitt angesprochene Variablentransformation zur Eliminierung der  $\tilde{2}$ -Klasse zu finden. Mit der Auswahl zweier im Prinzip beliebigen Observablen kann diese abgeleitet werden.

Nach [4] wird mit  $3(x_1, x_2, \phi_3)$  eine „Drei-Körper“-Konfiguration bezeichnet (im „Hadronen-Center of Mass-System“). Mit

$$2_s(x_1, x_2, \phi_3^{(s)}) \equiv 3(x_1, x_2, \phi_3^{(s)})$$

wird eine „Zwei-Körper“-Konfiguration bezeichnet, die aus der „Drei-Körper“-Konfiguration gewonnen wird (unter den gleichen Einschränkungen, wie im Abschnitt 4 beschrieben), indem die Energie des emittierten Partons gegen Null geht ( $\phi_3^{(s)}$  gleich „Soft Limes“ von  $\phi_3$ ).

Analog wird mit

$$\tilde{2}_{c+}(x_1, x_2, \phi_3^{(c+)}) \equiv 3(x_1, x_2, \phi_3^{(c+)})$$

und

$$\tilde{2}_{c-}(x_1, x_2, \phi_3^{(c-)}) \equiv 3(x_1, x_2, \phi_3^{(c-)})$$

der Fall bezeichnet, wenn das ausgehende Parton kollinear zu den eingehenden Partonen emittiert wird.

Gesucht wird also eine Variablentransformation der Form

$$x_1 = x_1^{(\alpha)}(z_1, z_1, \phi_3), \quad x_2 = x_2^{(\alpha)}(z_1, z_2, \phi_3), \quad \alpha = s, c+, c-$$

Die Beobachtung ist, dass in beiden Klassen (2 und  $\tilde{2}$ ) der gemeinsame transversale Impuls des schweren Quark-Paares verschwindet. Der Gesamtimpuls besitzt also nur zwei Freiheitsgrade, eine Nullkomponente und eine longitudinale Komponente. Diese sind durch zwei Observable festzulegen.

In der obigen Notation gilt

$$O_1(3(z_1, z_2, \phi_3)) = O_1(2_s(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \phi_3^{(s)}))$$

und

$$O_2(3(z_1, z_2, \phi_3)) = O_2(2_s(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \phi_3^{(s)}))$$

sowie analoge Gleichungen für  $c\pm$  (mit der Ersetzung  $s \leftrightarrow c\pm$ ). Diese beiden Gleichungen müssen im Schwerpunktsystem der Hadronen berechnet werden. Eine mögliche Wahl für die Observablen ist

$$O_1 = M_{Q,\bar{Q}}^2 = M^2$$

und

$$O_2 = y_{Q,\bar{Q}} = y$$

Diese Forderung entspricht der Erhaltung der Rapidity des Paares. Die erste Observable ist

$$M^2(3, z_1, z_2, \phi_3) \equiv M^2(z_1, z_2, x) = xz_1z_2S_H$$

die aus  $x = \frac{M^2}{s} \rightarrow xs = s_2 = M^2 \rightarrow xz_1z_2S_H = M^2$  bestimmt wurde.

Bezogen auf den Fall, dass *kein* Parton emittiert wird (tot. quadr. Energie  $\bar{s}$ ), kann die Rapidity des  $2 \rightarrow 2$  System mit  $\bar{y} = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$  angegeben werden. Die Masse der Quarks ist hier  $M_{Q\bar{Q}}^2 = \bar{x}_1\bar{x}_2S_H$ . Aus diesem System gesehen ändert sich für ein *gleichwertiges* Event (ein Event, dass das schwere Quark-Paar zur gleichen totalen Subenergie  $s_2 = \bar{s}$  produziert) im  $H$ -System bekanntermaßen die Rapidity additiv. Nun gilt

$$y(3(z_1, z_2, \phi_3)) \equiv y(z_1, z_2, x, y) = \log \xi + \frac{1}{2} \log \frac{z_1}{z_2}$$

mit

$$\xi(x, y) = \sqrt{\frac{2 - (1-x)(1+y)}{2 - (1-x)(1-y)}}$$

Wird kein Parton ( $x \rightarrow 1$ ) emittiert ( $y$  ist der Kosinus-Raumwinkel, unter dem das Parton emittiert wird), reduziert sich  $\xi = 1$ . Mit

$$t_k = -\frac{1}{2}s(1-x)(1-y)$$

und

$$u_k = -\frac{1}{2}s(1-x)(1+y)$$

wird  $\xi$  zu

$$\xi = \sqrt{\frac{s+u_k}{s+t_k}} = \sqrt{\frac{s+v_2}{s+v_1}} = \sqrt{\frac{1+\frac{v_2}{s}}{1-\frac{v_1}{s}}}$$

$\xi$  ist aber auch gegeben durch  $\log \xi = \frac{1}{2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta}$  mit  $\beta = \frac{v}{c}$ , welches bei einer Lorentz-Transformation angewandt wird. Ein kurzer Vergleich ergibt dann, dass

$$\beta = \frac{v_2}{s}$$

aber auch

$$\beta = -\frac{v_1}{s}$$

sein muss. Daraus folgt

$$v_2 = -v_1 \rightarrow s_2 = s = \bar{s}$$

Stellt man beide Gleichungen unter dieser Bedingung auf (zwei Gleichungen in dem Ausgangssystem mit  $\bar{x}_i$  und zwei Gleichungen im neuen System mit  $z_i$ ), dann besitzt man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Das lässt sich leicht auflösen nach  $x_1^{(s)} = \bar{x}_1$  und  $x_2^{(s)} = \bar{x}_2$  und liefert

$$\begin{aligned} x_1^{(s)} &= z_1 \xi \sqrt{x} \\ x_2^{(s)} &= z_2 \frac{\sqrt{x}}{\xi} \end{aligned}$$

sowie die Betrachtung  $y = \pm 1$  mit  $\xi(x, \pm 1)$

$$\begin{aligned} x_1^{(c+)} &= \frac{x_1^{(s)}}{x}, & x_2^{(c+)} &= x_2^{(s)} \\ x_1^{(c-)} &= x_1^{(s)}, & x_2^{(c-)} &= \frac{x_2^{(s)}}{x} \end{aligned}$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (mit  $z_i = x_i$ ), die in Abschnitt 5.2.1 bzw. Abschnitte 5.1, 5.2, (Gln. (38), (39) bzw. Gln. (36), (37)) für die Bedingung abgeleitet wurde, dass die Rapidität des ausgehenden schweren Quark-Paares erhalten bleiben soll, nämlich

$$\begin{aligned} x_1^{(s)} &= x_1 \xi \sqrt{\frac{s_2 = s + v_1 + v_2}{s}} = x_1 \sqrt{\frac{s + v_2}{s + v_1}} \sqrt{\frac{s + v_1 + v_2}{s}} = \\ &= x_1 \sqrt{\frac{(s + v_1 + v_2)(s + v_2)}{s(s + v_1)}} = \bar{x}_1 \end{aligned}$$

$x_2^{(s)}$  folgt analog

$$x_2^{(s)} = x_2 \sqrt{\frac{(s + v_1 + v_2)(s + v_1)}{s(s + v_2)}} = \bar{x}_2$$

$x_{1,2}^{(c\pm)}$  sind für beide Observable gleich. Sie sind (zur Wiederholung)

$$\begin{aligned} x_1^{(c+)} &= x_1^{(s)} / x \\ x_2^{(c+)} &= x_2^{(s)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1^{(c-)} &= x_1^{(s)} \\ x_2^{(c-)} &= x_2^{(s)} / x \end{aligned}$$

Diese Impulse dienen dann als Anfangsbedingung für die Verteilungsfunktionen  $f_j(x_i^{(s)}, Q^2)$ . Diese müssen nun nicht mehr kleiner Eins sein. Sollten Werte größer Eins generiert werden, dann sind die Strukturfunktionen mit Null auszuwerten. Die kollinearen differentiellen Beiträge zum Wirkungsquerschnitt sind proportional dem „Born“-Matrizelement  $M^{(b)}$ . In dieses Matrizelement werden die Partonenimpulse, je nachdem welches Parton emittiert, mit  $x p_1 = x x_1 P_1$  benutzt.

Die Anfangsbedingungen für die Dichtefunktionen müssen aber eindeutig sein, um den „Backward-Algorithmus“ zu starten. Das ist gewährleistet, wenn kollineare Auswertungen der Verteilungsfunktionen  $f_i$  über  $xx_i^{(c\pm)} = x_{1,2}^{(s)}$  geschehen, denn dann wird jeweils (für Seite 1 und 2)  $x_{1,2}^{(s)}$  benutzt (s. u. für  $y \rightarrow \pm 1$ ).

Anstatt der Erhaltung der Rapidität ist es durchaus möglich, eine andere Observable als diese zu benutzen, z. B. das longitudinale Moment der ausgehenden schweren Quarks  $k_{Q\bar{Q}}$ . Die Ergebnisse für beide Bedingungen sind, wie erwähnt, in Abschnitt 5.2.1 gegeben (oder auch in den Abschnitten 5.1 und 5.2). Es ist nun leicht möglich, die Limes anzugeben im „Soft“- ( $x \rightarrow 1$ ) und „Kollinearen“- ( $y \rightarrow \pm 1$ ) Fall und ist für beide Observablen gültig.

Das Ergebnis ist für  $x \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} x_1^{(s)} &\rightarrow z_1 & x_2^{(s)} &\rightarrow z_2 \\ x_1^{(c+)} &\rightarrow z_1 & x_2^{(c+)} &\rightarrow z_2 \\ x_1^{(c-)} &\rightarrow z_1 & x_2^{(c-)} &\rightarrow z_2 \end{aligned} \quad (44)$$

Das Ergebnis ist für  $y \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} x_1^{(s)} &\rightarrow xz_1 & x_2^{(s)} &\rightarrow z_2 \\ x_1^{(c+)} &\rightarrow z_1 & x_2^{(c+)} &\rightarrow z_2 \end{aligned} \quad (45)$$

Das Ergebnis für  $y \rightarrow -1$

$$\begin{aligned} x_1^{(s)} &\rightarrow z_1 & x_2^{(s)} &\rightarrow xz_2 \\ x_1^{(c-)} &\rightarrow z_1 & x_2^{(c-)} &\rightarrow z_2 \end{aligned} \quad (46)$$

Die restlichen Fälle werden nicht benötigt.

## 6.2 Zugrunde liegende Statistik unter Beachtung der negativen Eventgewichte

Die Terme aus dem vorherigen Abschnitt werden über BASES [13, 14] numerisch berechnet. Mit SPRING [13, 14] werden entsprechend der Berechnung von BASES Events generiert. Zu beiden Ereignisklassen existiert dann eine bestimmte Anzahl an Events,  $N_H$  und  $N_S$  respektive. Unter einer Vorgabe der totalen Anzahl an zu generierenden Events  $N_{tot}$  wird die Aufteilung bestimmt über

$$N_H = N_{tot} \frac{J_H}{J_H + J_S} \quad N_S = N_{tot} \frac{N_S}{N_H + N_S}$$

$J_H$  und  $J_S$  sind die Absolutwerte der Integrale  $I_H$  und  $I_S$ . Negative Events werden durch SPRING generiert, bevor der Absolutwert des



Integrals bestimmt wird. Die Rückgabe von SPRING enthält dann alle notwendigen Informationen bzgl. eines Events, u. a. auch sein Gewicht  $\omega_i = \pm 1$  mit  $i = 1, \dots, (N_H, N_S)$ . Diese Gewichte haben die Eigenschaft

$$\frac{J_H}{N_H} \sum_{i=1}^{N_H} \omega_i^{(N_H)} = I_H \qquad \frac{J_S}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \omega_i^{(N_S)} = I_S$$

so dass gilt

$$\sigma_{tot} = \frac{J_H + J_S}{N_{tot}} \left( \sum_{i=1}^{N_H} \omega_i^{(N_H)} + \sum_{i=1}^{N_S} \omega_i^{(N_S)} \right)$$

Damit wird der korrekte Wirkungsquerschnitt für die Produktion von  $b$ -Quarks bestimmt.

Negative Gewichte werden über diese Methode in einer Anzahl ( $i=S, H$ )

$$f_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I_i}{J_i} \right)$$

erzeugt. Diese treten dann auf, wenn in dem Ausdruck aus Abschnitt 5 die negativen Beiträge für einen Phasenraumunkt  $(z_1, z_2, \phi_3)$  größer sind als die restlichen, positiven Terme.

Sollten  $N_{ev} < N_{tot}$  Events generiert werden, dann wird  $\sigma_{tot}$  mit dem Faktor  $N_{ev}/N_{tot}$  multipliziert, um den anteiligen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, der dieser Anzahl  $N_{ev}$  entspricht. Das ist erlaubt, da ungewichtete Events generiert werden.

Optional ist es möglich, an DPMJET III die Anweisung zu übergeben, dass alle  $N_{tot}$  Events bearbeitet werden (Kapitel 8) bzw., dass alle  $b$ -Events den PHOJET-Partonen-Schauer benutzen. Diese beiden Optionen können unabhängig eingestellt werden. Die Benutzung der letztgenannten Optionen entspricht der prinzipiellen Methode von Frixione und Webber, da alle im Voraus generierten  $b$ -Events in den DPMJET III-Partonen-Schauer gehen.

### 6.3 Zur Konstruktion des Subtraktionsterms

In diesem Abschnitt wird das grundlegende Aussehen des Subtraktionsterms bestimmt und dargestellt. Die Eigenschaften, die an diesen Term gestellt werden müssen, sind schon in Kapitel 4 bei der Vorstellung der „Subtraktions“-Methode anhand eines Modellsystems erläutert worden als auch zu Beginn des Kapitels 6: Konstruiert wird dieser Term als Counterterm zum Emissionsbeitrag zum Wirkungsquerschnitt (diese Bedingung wird im nächsten Abschnitt allerdings noch abgeschwächt werden müssen), und er muss den Partonen-Schauer-Beitrag eliminieren können (siehe auch Abschnitte 4.2 und 4.3).

Es findet wieder eine Trennung nach Emissionen aus dem Anfangs- und Endzustand statt.

Wie erwähnt, sollte der Subtraktionsterm die Eigenschaft haben, dass er proportional zur „Born“-Ordnung des betrachteten Subprozesses und proportional zu  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  in der Entwicklung des „Sudakov“-Faktors sein (und damit entsteht eine effektive  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -Proportionalität des Subtraktionsterms). Die Proportionalität zur „Born“-Ordnung ist für die Produktion schwerer Quarks weder im

„Soft“- noch im „Kollinearen“-Grenzfall *exakt* erfüllt, denn die Matrixelemente, die den harten Subprozess beschreiben, sind nicht mehr rein proportional zum „Born“-Term. Trotzdem ist die Methode von [4, 5] brauchbar, wie man zum einen bei dem Test des Subtraktionsterms anhand der Vektorbosonproduktion von  $W^+W^-$ -Paaren im Kapitel 7 sehen wird, und zum anderen wird im nächsten Abschnitt darauf eingegangen werden, wie mit diesem Umstand umgegangen werden kann, ohne einen neuen Ansatz wählen zu müssen.

Die Entwicklung des „QCD-Sudakov“-Faktors bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  hat die gewünschte Eigenschaft, dass er divergent im „Soft“- und „Kollinearen“-Bereich werden kann bei einer Emission eines Partons, wie sich weiter unten zeigen wird (das entsprechende Verhalten wird durch die Terme  $P_{a \rightarrow bc}^{(0)}$  („Splitting-Funktionen“, in dem ein Gluon emittiert wird) und  $dQ^2/Q^2$  erzeugt). Das ist notwendig, um Divergenzen gleichen Typs des Terms  $d\Sigma_{ab}^{(f)}/d\phi_3$  abfangen zu können. Beide Integrale,  $I_H$  und  $I_S$ , sind dann endlich, und ihre Summe ergibt den totalen Wirkungsquerschnitt.

## 6.4 Fortsetzung zum Partonen-Schauer (Teil 2)

Zunächst folgen die Beschreibungen der Algorithmen, die für die Partonenemissionen aus dem Anfangszustand („Backward-Algorithmus“) und aus dem Endzustand („Forward-Algorithmus“) benutzt werden. Diese beiden Ansätze unterscheiden sich, indem sie Prozessverzweigungen einmal *rückwärts* gerichtet betrachten („Backward-Algorithmus“), also *entgegen* der physikalischen Zeit, und einmal *vorwärts* gerichtet („Forward-Algorithmus“).

„Initial State Radiation“, also Partonenemissionen aus dem Anfangszustand, werden durch die erste Methode effektiv behandelt.

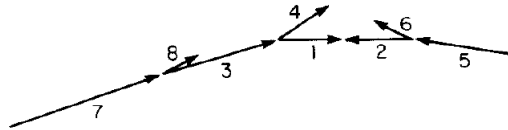


Abbildung 25: Darstellung von Mehrfach-Verzweigungen aus dem Anfangszustand die durch die Partonen 7 und 5 initiiert wurden. Die Partonen 1 und 2 erzeugen den „harten Stoß“, die Partonen 8,4 und 6 wurden während des Partonen-Schauers emittiert [54].

Die Gründe in diesem Vorgehen, in einem Computerprogramm Verzweigungen  $a \rightarrow bc$  nicht entsprechend ihres zeitlichen Auftauchens zu behandeln liegen darin, dass man einmal nicht weiß, welches Parton,  $b$  oder  $c$ , in den harten Subprozess geht, und weiter ist es im Voraus nicht möglich zu wissen, bei welchem Wert eine adäquate Obergrenze für die „Hard Scattering“-Skala  $Q^2$  anzusetzen

ist. In Abbildung 25 laufen Parton 1,2 auf diesen Punkt zu. Dieser Ort ist durch das Maximum einer Virtualität  $Q^2$  gekennzeichnet.

In PHOJET/PYTHIA wird dieses Problem dadurch gelöst [54], dass der physikalische Subprozess *rückwärts* betrachtet gesehen wird, von einem Ort ausgehend, indem Parton 1 und 2 aus Abbildung 25, miteinander wechselwirken. Dazu wird eine Skala  $Q^2$  günstig gewählt und mit diesem Ort (im Phasenraum) assoziiert. Je nach Subprozess und beteiligten Massen sind z. B. für  $Q^2$  mögliche Werte  $p_t^2, p_t^2 + m^2$ .

Sind diese Variablen gewählt, so muss für den Partonen-Schauer jede Verzweigung  $a \rightarrow bc$  rekonstruiert werden (so dass Energie und Impuls erhalten sind), d.h., es muss geprüft werden, welche Verzweigung Anlass gegeben haben könnte, ein Parton  $b$  (oder  $c$ ) zu erzeugen. Diese Möglichkeit steht in Konkurrenz mit der alternativen Möglichkeit, nämlich, dass dieses Parton  $b$  schon auf der (betragsmäßig) kleinsten Skala  $Q_0^2$  vorhanden war, so dass das Parton  $b$  aus dem Hadron gelöst wurde bei der Kollision. Auf Abbildung 25 bezogen heißt das, dass ständig geprüft wird, ob Parton 1,3,7 aus dem Hadron gelöst wurde oder nicht. Wenn dies nicht der Fall ist, so muss es eine Verzweigung gegeben haben, z. B.  $3 \rightarrow 41$ , davor, wenn 1 nicht aus dem Hadron stammt,  $7 \rightarrow 83$  usw. Dieses Verfahren wird für beide Partonen-Seiten benutzt.

Im „Backward-Algorithmus“ wird die Wahrscheinlichkeit eines Partons  $b$  einer Prozessverzweigung  $a \rightarrow bc$  für eine Umwandlung in ein Parton  $a$  berechnet. Dazu betrachtet man die Änderung der Verteilungsfunktion  $f_b(x, t)$  in Abhängigkeit der Änderung von  $t = \ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})$  betrachtet. Also

$$\frac{\partial f_b(x, t)}{\partial t} = \sum_{ac} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} f_a(x', t) \frac{\alpha_{abc}}{2\pi} P_{a \rightarrow bc}\left(\frac{x}{x'}\right)$$

Das ist die Altarelli-Parisi Gleichung für Verteilungsfunktionen [11] (Abschnitt 2.3). Sie beschreibt in diesem Fall unter Vorgabe einer Anfangsverteilung  $f_b(x, t_0)$ , wie sich diese Größe in „Zukunft“ entwickeln wird, also zu  $t \neq t_0$ .

$\alpha_{abc}$  soll andeuten, dass sowohl (im Prinzip) Photoemission als auch Partonemissionen möglich sind ( $\alpha_{em}, \alpha_s$ ). Der Term  $\frac{dx'}{x'}$  ist ein „Relikt“ aus dem differentiellen, eindimensionalen Phasenraum,  $d\phi_1$  (Energiekomponente  $\frac{dE}{2\pi E}$ ). Das Produkt  $f_a P_{a \rightarrow bc}$  ist die Umwandlungswahrscheinlichkeit eines Partons  $a$  in ein Parton des Typs  $b$  plus einem *belanglosen*  $c$ , worüber summiert wird. Die Funktionen  $P_{ac}(z)$  sind die Altarelli-Parisi-Splitting Funktionen (Abschnitt 2.3). Das Integral erstreckt sich über alle höheren Impulse  $x' \geq x$ . Nur diese Impulse können für eine *zukünftige* Entwicklung der Größe  $f_b(x, t)$  in Frage kommen.

Diese Gleichung beschreibt also die Wahrscheinlichkeit während einer kleinen Erhöhung  $dt$ , dass es für das Parton  $a$  mit dem Impuls  $x'$  die Möglichkeit gibt, sich in ein Parton des Typs  $b$  mit dem Impuls  $x = zx'$  umzuwandeln (plus Parton  $c$  mit  $x' - x = (1 - z)x'$ ).

Im „Backward-Algorithmus“ ist dann während einer kleinen Erniedrigung von  $dt$  für das Parton  $b$  die Möglichkeit gegeben, sich in ein Parton vom Typ  $a$  umzuwandeln.

Die relative Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\frac{df_b(x, t)}{f_b(x, t)} = |dt| \sum_{ac} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \frac{f_a(x', t)}{f_b(x, t)} \frac{\alpha_{abc}}{2\pi} P_{a \rightarrow bc}\left(\frac{x}{x'}\right)$$

Auch hier wurde wieder über alle höheren Impulse summiert. Im Übrigen wird

$\alpha_{abc}$  mit der starken Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  identifiziert werden. Man kann obige Gleichung auch wie folgt interpretieren: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Parton  $b$  mit einem Impuls  $x$  bei einer geringen Verkleinerung  $dt$  verschwindet ist

$$dP_b = \frac{df_b(x, t)}{f_b(x, t)}$$

Man definiert noch einen Formfaktor („Sudakov“-Term oder auch „Sudakov“-Faktor)

$$S_b(x, t_{max}, t) = \exp \left\{ - \int_t^{t_{max}} dt' \sum_{ac} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{f_a(\frac{x}{z}, t')}{f_b(x, t')} P_{a \rightarrow bc}(z) \right\} \quad (47)$$

der schon für den Modellfall in vereinfachter Form angegeben wurde (Kapitel 4). Diese Gleichung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Parton vom Typ  $b$  sich *nicht* verwandelt in ein Parton vom Typ  $a$  im Bereich der Virtualität von  $t_{max}$  zu  $t \leq t_{max}$ .

Praktisch umgesetzt wird diese Gleichung nach folgendem Schema

- i) die Virtualität  $t$  von Parton  $b$  wird ermittelt, indem  $S_b(x, t_{max}, t)$  gleich einer Zufallszahl  $r \in 0, \dots, 1$  gesetzt wird; diese Gleichung wird dann nach  $t$  aufgelöst; ist die Zufallszahl kleiner als  $S_b(x, t_{max}, t_0)$ , dann existierte das Parton  $b$  schon auf der Skala  $t_0$  und keine weiteren Verzweigungen werden stattfinden
- ii) die relative Wahrscheinlichkeit für verschiedene Verzweigungen  $a \rightarrow bc$  ist durch

$$\int \frac{dx'}{x'} \frac{f_a(x', t)}{f_b(x, t)} P_{a \rightarrow bc}(x/x')$$

gegeben, mit dem Wert  $t$  aus i); integriert wird über alle höheren Impulse

- iii) die Impulsverteilung für die zu wählende Variable  $x'$  ist durch den Integranden in ii) gegeben

Generiert wird durch diesen Algorithmus eine Folge (für  $Q^2$  sind die Beträge aufgetragen)

$$Q_0^2 < Q_1^2 < \dots < Q_{max}^2, \quad \mathcal{O}(1) \simeq x_0 > x_1 > \dots > x_{min}$$

Das kann man verdeutlichen, wie in Abbildung 26 geschehen. Der Pfad in dieser Abbildung ist schon entgegen der Zeitrichtung („Backward“) eingezeichnet. Ausgehend von einem Quark, das aus einem Hadron *gelöst* wurde, wird dieses Quark der Folge nach mehrere Gluonen emittieren. Jedes Splitting ist dabei mit verschiedenen Werten  $(x_i, t_i)$  verbunden. Der Ort, an dem dieses Quark eine Wechselwirkung mit einem anderen Parton eingeht, ist *nach*  $-t_3$  angesiedelt.

In Abschnitt 5.4 ist die rekonstruierte Kinematik aufgeführt für eine Verzweigung  $3 \rightarrow 14$ , wie sie in Abbildung 25 zu sehen ist. Darauf bezogen kann aus Parton 1 und Parton 2 die totale Subenergie  $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$  gebildet werden. Über den „Backward-Algorithmus“ wird dann zur Virtualität  $Q^2$  die Reaktion  $3 \rightarrow 14$  festgelegt werden können, welches die Virtualität  $Q_1^2$  und  $z = x_1/x_3$  definiert.

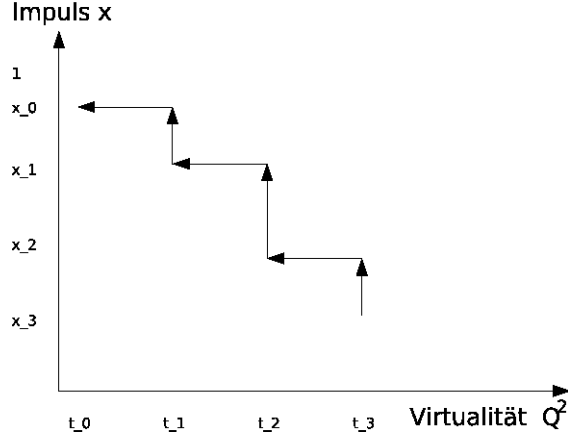
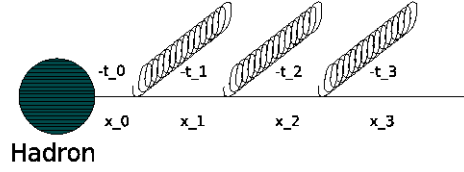


Abbildung 26: Ein Emissionsprozess wird dargestellt in der  $Q^2 - x$ -Ebene.

Die Rekonstruktion des Vierervektors  $p_3$  geschieht dann über die Definition  $s_{32} = (p_3 + p_2) = s_{12}/z$ .

Der „Sudakov“-Faktor (Gln. (47)) beschreibt in dieser Form (im Mittel) korrekt das physikalische Splitting-Verhalten. Z. B. ist es wahrscheinlicher [54], dass ein Gluon in einem Proton von einem  $u$ -Quark emittiert wurde, also von einem  $d$ -Quark (betrachtet bei einer kleinen Virtualität  $t_0$ ). Oder betrachtet man die Produktion schwerer Quarks, gesehen bei einer Minimum-Skala  $Q^2$ , bei der erst die Produktion schwerer Quarks einsetzen kann, denn dort wird der Nenner verschwinden, und der Exponent von  $S_b$  wird gegen  $-\infty$  gehen, so dass  $S_b \rightarrow 0$ .

Zum weiteren Voranschreiten gilt noch

$$dt = d \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) = \frac{dQ^2}{Q^2}$$

Ein messbarer, differentieller Wirkungsquerschnitt hat schematisch die Form (die Renormierungsskala  $\mu$  ist nicht mit aufgeführt)

$$d\sigma_{mess} \sim dx_1 dx_2 f_a^{(H_1)}(x_1) f_b^{(H_2)}(x_2) d\sigma_{part}$$

$d\sigma_{part}$  enthält alle Information des harten Subprozesses. Diese Form muss auch der Subtraktionsterm haben. Multipliziert wird diese Gleichung dann mit dem  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  Term der Entwicklung des „Sudakov“-Terms (Gln. (47)), wie es auch in Abschnitt 4.3 für den Modellfall geschehen ist. Insgesamt lautet das Ergebnis mit dieser Entwicklung für den Subtraktionsterm für „Initial State Radiation“

(wobei  $d\sigma_{part}$  durch  $d\sigma_{ab}^{(b)}$  ersetzt wurde)

$$\begin{aligned}
d\sigma|_{PS} &= \sum_{abc} dx_1^{(PS)} dx_2^{(PS)} \frac{\alpha_s}{2\pi} d\sigma_{ab}^{(b)}(x_1^{(PS)} P_1, x_2^{(PS)} P_2) \\
&\times \left( \frac{dQ_+^2}{Q_+^2} \frac{dz_+}{z_+} \frac{d\varphi_+}{2\pi} P_{ac}^{(0)}(z_+) f_c^{(H_1)}\left(\frac{x_1^{(PS)}}{z_+}\right) f_b^{(H_2)}(x_2^{(PS)}) \right. \\
&\left. + \frac{dQ_-^2}{Q_-^2} \frac{dz_-}{z_-} \frac{d\varphi_-}{2\pi} P_{bc}^{(0)}(z_-) f_a^{(H_1)}(x_1^{(PS)}) f_c^{(H_2)}\left(\frac{x_2^{(PS)}}{z_-}\right) \right)
\end{aligned} \tag{48}$$

Das  $\pm$  bezieht sich darauf, welches der eingehenden Partonen gesplittet ist. Die  $\varphi_{\pm}$ -Abhängigkeit ist hier nur formal und wurde hinzugefügt. Dieser Term wird später bei der Betrachtung des differentiellen „Dreiteilchenphasenraums“,  $d\phi_3$ , benötigt.

Beispiel: Das Parton der „+“-Seite soll emittieren. Mit Hilfe der (nicht integrierten)  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Entwicklung der Gln. (47) kann diese „Seite“ der Gln. (48) wie folgt erzeugt werden: In den „harten Stoß“ laufen Partonen zur „Born“-Ordnung ein mit den Flavours  $a, b$  (deswegen  $d\sigma_{ab}^{(b)}$ ). Das Parton  $a$  (die „+“-Seite) wandelt sich auf *seinem* Weg *rückwärts* in ein Parton vom Typ  $c$ . Dazu muss der Sudakov-Form-Faktor  $S_a$  betrachten (zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , um daraus die Wahrscheinlichkeit *für* eine Partonemission von der „+“-Seite zu erhalten), was dann einen Faktor  $\frac{f_c}{f_a} P_{c \rightarrow ax}$  liefert ( $x$  ist ein Parton beliebigen Typs; hierüber wird summiert). Der Faktor  $f_a$  im Nenner kürzt sich mit dem  $f_a$  aus dem messbaren, differentiellen Wirkungsquerschnitt heraus und übrig bleibt ein Produkt der Form  $f_c f_b$  (siehe dazu die „+“-Terme in  $d\sigma|_{PS}$ ).

Die Bezeichnung  $PS$  an den Impulsen lässt die Bedeutung noch offen. Am Ende dieses Kapitels werden sie identifiziert mit den aus dem Abschnitt 6.1, Gln. (44), (45), (46), bekannten Impulsen  $x_1^{(PS)} = x_1^{(s)} = \bar{x}_1$  und  $x_2^{(PS)} = x_2^{(s)} = \bar{x}_2$ , wobei  $\bar{x}_i$  die Impulse eines  $2 \rightarrow 2$  Prozesses sind (siehe auch Kapitel 5). Diese Prozesse dienen als Anfangsbedingung, u. a. zur Auswertung der Strukturfunktionen, um den Wirkungsquerschnitt bis NLO über die modifizierte „Subtraktions“-Methode berechnen zu können.

Sichtbar ist außerdem nun, dass dieser Ausdruck „Kollineare“- ( $Q^2 \rightarrow 0$ ) und „Soft-Divergenzen“ ( $z \rightarrow 1$ ) besitzt (die Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen, die der Emission eines Gluons zugeordnet sind, sind von der Form  $\sim 1/(1-z)$ , siehe Abschnitt 2.3). Nur bei den Prozessen, in denen ein Gluon emittiert wird, können „Soft-Divergenzen“ im Emissionsterm  $d\bar{\Sigma}_{ab}/d\phi_3$  auftreten. Diese Divergenzen dienen für die numerische Auswertung der Integrale  $I_H$  und  $I_S$  aus Kapitel 4 (fast) als Counterterm, so dass beide Integrale für sich endlich sind, Kapitel 6. Das *fast* wird in den Abschnitten 6.4-6.6 noch geklärt werden.

Ausgehende Partonen durchlaufen einen „Final State“-Schauer. Zur Veranschaulichung kann wieder Abbildung 26 dienen, indem sowohl die Pfeilrichtungen *im* Diagramm umgekehrt werden als auch durch die formale Ersetzung  $t \Leftrightarrow -t$ . Die aus dem „harten Stoß“ laufenden Partonen sind hier die schweren  $b$ -Quarks. Der Subtraktionsterm hat in diesem Stadium ein ähnliches Aussehen. Die richtigen Impulse sind hier aber schon eingesetzt. Im Gegensatz zu einer Emission aus dem Anfangszustand, können Emissionen des Endzustandes aber keinen Ein-

fluss auf den Subprozess ausüben.

Er lautet unter der gleichen Vorgehensweise wie für „Initial State Radiation“

$$d\sigma_{ab}|_{PS} = d\bar{x}_{1f}d\bar{x}_{2f}f_a^{(H_1)}(\bar{x}_{1f})f_b^{(H_2)}(\bar{x}_{2f})\overline{M}_{ab}d\phi_2(\bar{x}_{1f}\bar{x}_{2f}S) \quad (49)$$

$$\times \left( \frac{dQ_Q^2}{Q_Q^2} dz_Q \frac{d\varphi_Q}{2\pi} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}^{(0)}(z_Q) + \frac{dQ_{\bar{Q}}^2}{Q_{\bar{Q}}^2} dz_{\bar{Q}} \frac{d\varphi_{\bar{Q}}}{2\pi} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{q\bar{q}}^{(0)}(z_{\bar{Q}}) \right)$$

wobei der  $\varphi_Q$  Winkel wieder hinzugefügt wurde. Seine Integration ist einfach, denn PYTHIA (wie PHOJET) emittiert das Parton  $c$  isotropisch (das hat einen Vorteil: Jegliche Korrelationen (Vorzugsrichtungen), wohin dass zusätzliche Parton emittiert wird, werden dadurch weggemittelt; z. B. wird in HERWIG zu den  $H$ -Prozessen  $gi \rightarrow Q\bar{Q}i$ ,  $i = g, q, \bar{q}$ , der Term  $\cos(2\phi)$  zu den Matrixelementen addiert, was dort im Subtraktionsterm berücksichtigt werden muss).

Motiviert ist dieser Ausdruck, da der „Sudakov“-Faktor für einen „Final State“-Schauer (Splitting  $a \rightarrow bc$ ) diese Form („Forward-Algorithmus“)

$$S_a(t) = \exp \left( - \int_{t_0}^t dt' \sum_{b,c} \mathcal{I}_{a \rightarrow bc}(t') \right)$$

hat mit

$$\mathcal{I}_{a \rightarrow bc}(t) = \int_{z_-(t)}^{z_+(t)} dz \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{a \rightarrow bc}(z)$$

Die  $P_{a \rightarrow bc}(z)$  sind die Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen. Die „Splitting-Funktionen“, in der ein Gluon aus dem Endzustand emittiert werden kann, lautet ( $C_F = \frac{4}{3}$ ,  $N_C = 3$  und  $T_R = \frac{N_F}{2}$ ;  $N_C$ =Anzahl der Farben,  $N_F$ =Anzahl der Flavours)

$$P_{q \rightarrow qg}^{(0)}(z) = C_F \frac{1+z^2}{1-z}$$

Im Anfangszustand sind außerdem diese Funktionen möglich

$$P_{g \rightarrow gg}^{(0)}(z) = N_C \frac{(1-z(1-z))^2}{z(1-z)}$$

und

$$P_{g \rightarrow q\bar{q}}^{(0)}(z) = T_R(z^2 + (1-z)^2)$$

Dass hier nirgends die +-Beschreibung im Zusammenhang mit den „Splitting-Funktionen“ aufgeführt werden hat den Grund, dass in einem Computerprogramm die Erhaltung notwendiger Größen wie Flavour und Energie *automatisch* eingehalten werden.

In einer Verzweigung  $a \rightarrow bc$  können die Grenzen für die erlaubten  $z$  angegeben werden. Der kinematisch erlaubte Bereich ist

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{m_b^2 - m_c^2}{m_a^2} \pm \frac{|\vec{p}_a|}{E_a} \frac{\sqrt{(m_a^2 - m_b^2 - m_c^2)^2 - 4m_b^2 m_c^2}}{m_a^2} \right\}$$

mit  $Q^2 = m_a^2$ . Dieser Term reduziert sich, da dem Gluon keine Ruhemasse eingeräumt werden muss. Üblich und einfacher in der Auswertung ist aber folgender Ausdruck für die  $z$ -Auswahl (es sei aber daran erinnert, dass den einzelnen Partonen in PYTHIA eine „Cut Off“-Masse  $Q_0^2$  zugeschrieben wird, so dass

mindestens  $m_i^2 = Q_0^2 \neq 0$  gilt)

$$z_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \beta_a \Theta(m_a^2 - m_{a,min}^2))$$

mit  $\beta_a = \frac{|\vec{p}_a|}{E_a}$  und  $z_- \leq z \leq z_+$ . Dieses *unconstrained*  $z$  legt den kinematischen Bereich fest für die Auswahl und wird im Weiteren benutzt. Der „Zerfall“ in zwei masselose Teilchen  $a, b$  ( $p_a^{(0)}, p_b^{(0)}$ ) ist nun einfach. Es muss nur gewährleistet sein, dass  $m_b < z_a E_a, m_c < (1 - z_a) E_a$  sowie  $m_b + m_c < m_a$  ist.

Eine Entwicklung dieses „Sudakov“-Faktors bis  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  liefert den gewünschten Term, wenn man beachtet, dass beide ausgehenden Quarks emittieren können. Auch die geforderten Divergenzen treten auf für  $Q^2 \rightarrow 0$  und  $z \rightarrow 1$  (durch die Funktionen  $P_{a \rightarrow bc}(z)$ ), wobei allerdings noch an die oben erwähnten Vorbehalte zu Beginn des Abschnitts 6.3 erinnert sei.

## 6.5 Verbindung „Initial- und „Final“-Subtraktionsterme

Zuerst werden die relevanten Terme aufgeführt, die zur Berechnung der Subtraktionsterme notwendig sind. Dieser ist

$$d\sigma|_{PS} = \sum_{ab} \sum_{L=1}^4 d\sigma_{ab}^{(L)}|_{PS}$$

$a, b$  sind die Flavours und  $L$  bezeichnet die ein- bzw. ausgehenden Partonenlinien. Mit  $\pm$  wird das eingehende Parton bezeichnet, das ein zusätzliches Parton emittiert hat. Mit  $Q, \bar{Q}$  werden die schweren Quark/Antiquark-Paare bezeichnet.

Ein Beitrag zum Subtraktionsterm, das von einem eingehenden Parton stammt, lautet (ohne explizite Summe; das „+“-Zeichen deutet an, dass das *von links* kommende Parton splittet)

$$d\sigma_{ab}^+|_{PS} = d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 f_a^{(H_1)}(\bar{x}_1/z_+) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2) \bar{M}_{cb}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}) d\phi_2(\bar{x}_1 \bar{x}_2 S) \\ \times \frac{dQ_+^2}{Q_+^2} \frac{dz_+}{z_+} \frac{d\varphi_+}{2\pi} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ca}^{(0)}(z_+)$$

Die Impulse und die Mandelstam-Invarianten sind in den Abschnitten 5.1, 5.2 angegeben worden. Sollte das andere Parton splitten, sind die Argumente der Verteilungsfunktionen zu vertauschen nebst der formalen Ersetzung  $+ \leftrightarrow -$ .  $S$  stellt die totale quadratische Energie der Hadronen dar. Die Integration über den Azimuthwinkel  $\varphi$  ist einfach, da isotropisch verteilt, und mit  $\bar{M}_{cb}$  werden die Matrixelemente in niedrigster Ordnung, gemittelt über eingehende und summiert über ausgehende Information, bezeichnet. Schließlich ist mit  $\phi_2$  der Phasenraum zweier ausgehender Teilchen bezeichnet. Er lässt sich parametrisieren

$$d\phi_2(\bar{s}) = \frac{\bar{\beta}(\bar{s})}{16\pi} d\cos\theta_{in}$$



mit  $\bar{\beta}(\bar{s}) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\bar{s}}}$ . Die Bezeichnung *in* soll den Umstand kennzeichnen, dass der „harte Stoß“ den Polarwinkel  $\theta$  für *eingehende* Partonen festlegt. Dieser Polarwinkel muss notwendigerweise der selbe Winkel  $\theta$  sein, den die zwei *ausgehenden* Partonen festlegen. Die Mandelstam-Invarianten, die in Kapitel 5 berechnet wurden, legen einen  $2 \rightarrow 2$  Prozess eindeutig fest und müssen übereinstimmen. Das wird für die endgültige Festlegung der Map  $P_{H \rightarrow S}$  notwendig sein und wird etwas weiter unten genauer aufgeführt und gelöst.

Für eine Emission des Endzustandes (hier vom schweren Quark) kann man diesen Term angeben

$$d\sigma_{ab}^{(Q)}|_{PS} = d\bar{x}_{1f} d\bar{x}_{2f} f_a^{(H_1)}(\bar{x}_{1f}) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_{2f}) \overline{M}_{ab}(\bar{x}_{1f}, \bar{x}_{2f}, \bar{t}_Q) d\phi_2(\bar{x}_{1f} \bar{x}_{2f} S) \\ \times \frac{dQ_Q^2}{Q_Q^2} dz_Q \frac{d\varphi_Q}{2\pi} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}^{(0)}(z_Q)$$

Man kann  $\bar{x}_{1f} = x_1$  und  $\bar{x}_{2f} = x_2$  benutzen sowie  $\bar{s} = s$  (Abschnitt 5.2). Die Parametrisierung des „Zweiteilchenphasenraums“ ist oben angegeben (mit  $in \leftrightarrow out$ ).

Um diese Beiträge unter ein gemeinsames Integral zu schreiben, wie es die Vorgehensweise des modifizierten Subtraktionsschemas erfordert, ist es notwendig, die Terme mit den selben Koordinaten zu parametrisieren.

Das Maß des ersten Terms lautet nach einer Variablensubstitution

$$d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 dz_+ dQ_+^2 d\varphi_+ \sim dx_1 dx_2 dx_{in} dy_{in} d\varphi_{in} d\cos\theta_{in}$$

Hier wurde benutzt, dass es durch die Abschnitte 5.1 und 5.2 (Gln. (36), (37)) eine Umrechnung gibt zwischen  $\bar{x}_i$  und  $x_i (i = 1, 2)$ . Des Weiteren existiert eine Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(z_+, Q_+^2, \varphi_+)}{\partial(x_{in}, y_{in}, \varphi_{in})}$$

wobei die  $\varphi$ -Abhängigkeit einfach ist. Die Bezeichnung *in* gilt wieder für die in den Subprozess eingehenden Quantitäten.

Das Maß des zweiten Terms lautet

$$d\bar{x}_{1f} d\bar{x}_{2f} dz_Q dQ_Q^2 d\varphi_Q \sim dx_1 dx_2 dx_{out} dy_{out} d\varphi_{out} d\cos\theta_{out}$$

Hier konnten die Impulse direkt umbenannt werden in  $x_1$  und  $x_2$  (Abschnitt 5.2). Die Jacobi-Determinante kann formal übernommen werden aus dem ersten Term

$$\frac{\partial(z_Q, Q_Q^2, \varphi_Q)}{\partial(x_{out}, y_{out}, \varphi_{out})}$$

Auch hier ist die  $\varphi$ -Abhängigkeit wieder einfach. Die Bezeichnung *out* soll die ausgehende schweren Quarks (+emittiertes Parton) bezeichnen. Beide Jacobi-Determinanten sind zunächst durch die in den Abschnitten 5.4.1, Gln. (40) und 5.5.1, Gln. (41) gefundenen Ausdrücke gegeben.

Man sieht, dass für die Forderung, dass die beiden Terme vereint zu *einem* Subtraktionsterm unter *einem* Integral geschrieben werden sollen, nun Gleichheit für die *in* und *out* Variablen hergestellt werden muss.

Dazu bietet es sich an, die Variablen des „Drei-Körper“-Phasenraums zu benutzen. In ihm ist das zusätzliche Parton parametrisiert  $(x, y)$ . Er lautet [4]

$$d\phi_3(s) = \frac{s\bar{\beta}(xs)}{1024\pi^4}(1-x) dx dy d\varphi d\cos\theta_Q$$

$1-x$  ist die Partonenenergie (in Einheiten von  $\frac{\sqrt{s}}{2}$ ). Für  $y$  gilt

$$-1 \leq y \leq 1$$

und ist der  $\cos$  des Polarwinkels unter dem das Parton emittiert wird. Für  $\varphi$  gilt

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

(Azimuthwinkel). Es bleibt  $\theta_Q$  mit

$$0 \leq \theta_Q \leq \pi$$

Er ist der Streuwinkel der schweren Quarks in ihrem „Center of Mass“-System und wird gesondert betrachtet.

Es ist dann möglich,  $(x_{in}, y_{in}, \varphi_{in})$  und  $(x_{out}, y_{out}, \varphi_{out})$  mit  $(x, y, \varphi)$  zu identifizieren, so dass die Jacobi-Determinanten in beiden Termen das (generische) Aussehen

$$\frac{\partial(z, Q^2, \tilde{\varphi})}{\partial(x, y, \varphi)}$$

besitzen (für entsprechendes  $z, Q^2, \tilde{\varphi}$ ). Die  $\tilde{\varphi}$ -Abhängigkeit fällt im Prinzip heraus (durch einfache Integration), da, wie erwähnt, dieser Winkel in den Programmen PHOJET und PYTHIA isotrop verteilt ist.

Als nächstes wird das Problem des Streuwinkels  $\theta$  beider Terme zur Definition der angesprochenen Map angegangen. Er muss (jeweils) mit der Wahl  $\theta_Q$  aus dem „Dreiteilchenphasenraum“ übereinstimmen.

Das typische Aussehen einer  $t$ -Kanal Invariante ist

$$\bar{t}(\bar{s}, \bar{\theta}) = -\frac{1}{2}\bar{s}(1 - \bar{\beta}(\bar{s}) \cos \bar{\theta}_Q)$$

$\bar{\theta}_Q$  ist im  $Q\bar{Q}$ -Schwerpunktsystem definiert.

Diese Schreibweise für die Invariante gilt sicher für beide Terme (für eine Emission aus dem Anfangszustand wie aus dem Endzustand mit der jeweiligen Definition von  $\bar{\theta}_Q$ ; die Terme werden überdacht, um eindeutig einen  $2 \rightarrow 2$ -Prozess zu kennzeichnen, den diese Mandelstam-Invarianten auszeichnen). Bisher galt

$$\bar{t}(\bar{s} = s, \theta_{out}) = \bar{t}_{FSR}$$

und

$$\bar{t}(s_2 = s + v_1 + v_2, \theta_{in}) = \bar{t}_{ISR}$$

wobei die Kürzel  $ISR$  und  $FSR$  die Zugehörigkeit der  $\bar{t}$ -Invarianten bezeichnen. Auch hier bedeuten  $\theta_{in}, \theta_{out}$  die zu ihrem Zustand gehörenden Winkel, definiert im „Center of Mass“-System. Sie sind auch aus den Abschnitten 5.1, 5.2 bekannt. Diese Gleichungen lassen sich mit Hilfe der obigen Ausdrücke nach  $\theta_{in}$  und  $\theta_{out}$  auflösen. Beide zeichnen dadurch aber einen *verschiedenen* Polarwin-

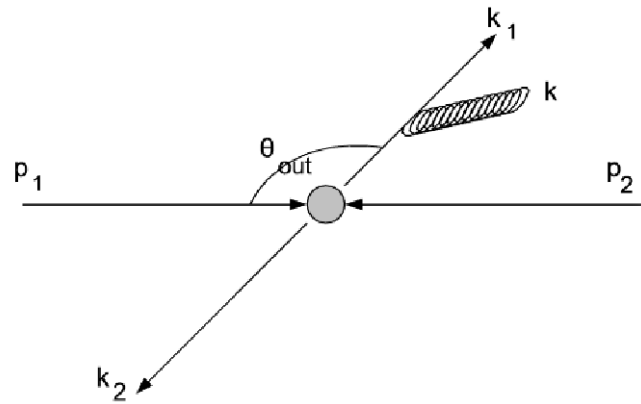
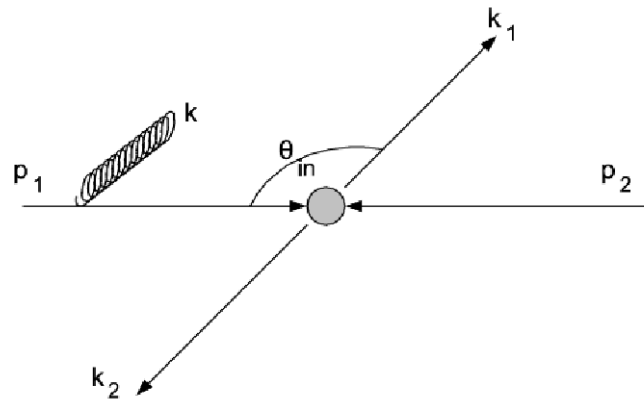


Abbildung 27: Die unterschiedlichen Streuwinkel für Emissionen aus dem Anfangszustand und dem Endzustand werden im 'Zero Angle Limit' angeglichen.

kel aus, wohingegen das modifizierte Subtraktionsschema aber eine eindeutige Wahl dieses Winkels benötigt.

Eine Lösung [4] besteht darin, für eine gegebene  $2 \rightarrow 3$ -Konfiguration den „Kollinearen Limes“ zu berechnen und daraus die  $2 \rightarrow 2$ -Invarianten zu bestimmen, indiziert durch das Superskript (0).

Es sollen nun jeweils zwei mal zwei Impulspaare aufgestellt werden (im „Kollinearen Limes“), zuerst die Impulse, die über den Winkel  $\theta_{in}$  den Subprozess beschreiben, dann über  $\theta_{out}$ , die ebenfalls den Subprozess beschreiben. Beide Sätze werden sich zunächst noch in der  $s$ -Kanal-Invarianten und im angesprochenem Streuwinkel unterscheiden.

Ersetzt man  $\bar{t}_{ISR}$  über dieses Verfahren durch diesen Limes,  $\bar{t}_+^{(0)}$ , und  $\bar{t}_{FSR}$  durch  $\bar{t}_Q^{(0)}$ , dann folgt für  $ISR$

$$\begin{aligned} s_+^{(0)} &= xs \\ \bar{t}_+^{(0)} &= -\frac{1}{2}xs(1 - \bar{\beta}(xs) \cos \theta_{in}) \end{aligned}$$

Man prüft das Ergebnis nach über  $\bar{t}_+^{(0)} = -2k_1p_1, t_k = v_1 = 0$  für den Fall, dass das  $+$ -Parton kollinear emittiert.

Mit der expliziten Parametrisierung der fünf Impulse  $p_1, p_2, k, k_1, k_2$  ([23], Appendix C) im „Center of Mass“-System der schweren Quarks (es gilt:  $p_1 + p_2 - k - k_1 - k_2 = 0$ )

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^0(1, 0, 0, 1) \\ p_2 &= p_2^0(1, 0, \sin \psi, \cos \psi) \\ k &= k^0(1, 0, \sin \psi', \cos \psi') \\ k_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{s_2}(1, \beta_x \sin \phi \sin \theta_1, \beta_x \cos \phi \sin \theta_1, \beta_x \cos \theta_1) \\ k_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{s_2}(1, -\beta_x \sin \phi \sin \theta_1, -\beta_x \cos \phi \sin \theta_1, -\beta_x \cos \theta_1) \end{aligned}$$

Die Größen sind (siehe Abschnitt 5.5.1 und Appendix C)

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sqrt{1 - \frac{4m^2}{xs = s_2}} \\ \cos \psi' &= 1 + \frac{t_k = v_1}{2p_1^0 k^0} \\ \cos \psi &= 1 - \frac{s}{2p_1^0 p_2^0} \\ p_1^0 &= \frac{s + t_k}{2\sqrt{s_2}} \\ p_2^0 &= \frac{s + u_k}{2\sqrt{s_2}} \\ k^0 &= -\frac{t_k + u_k}{2\sqrt{s_2}} \end{aligned}$$

$\theta_1$  ist der Streuwinkel (zwischen  $\vec{p}_1$  und  $\vec{k}_1$ ) und  $\phi$  ist der Azimuthwinkel

$$0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Da diese Impulse im „Center of Mass“-System der schweren Quarks gegeben sind, treten im Anfangszustand die Winkel  $\psi, \psi'$  auf. Durch Vergleich ist ersichtlich, dass

$$\cos \theta_{in} = \cos \theta_1 = \cos \theta_Q \quad (50)$$

Die vier Impulse, die über  $\theta_{in}$  festgelegt sind, lauten

$$\begin{aligned} \bar{p}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{xs}(1, 0, 0, \pm 1) \\ \bar{k}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{xs}(1, \pm \bar{\beta}(xs) \sin \theta_Q, 0, \pm \bar{\beta}(xs) \cos \theta_Q) \end{aligned} \quad (51)$$

Für eine Endzustandsemission gelten ähnliche Impulse, die aber offensichtlich verschieden sind von der Gln. (51)

$$\begin{aligned} \bar{p}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{s}(1, 0, 0, \pm 1) \\ \bar{k}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{s}(1, \pm \bar{\beta}(s) \sin \theta_{out}, 0, \pm \bar{\beta}(s) \cos \theta_{out}) \end{aligned} \quad (52)$$

Zur Ableitung von  $\theta_{out}$  folgt mit

$$\bar{s}_Q^{(0)} = s$$

und

$$\bar{t}_Q^{(0)} = -\frac{1}{2}s(1 - \bar{\beta}(s) \cos \theta_{out}(x, \cos \theta_Q))$$

aber nun mit [5]

$$\cos \theta_{out}(x, \cos \theta_Q) = -\frac{1-x - (1+x) \cos \theta_Q}{1+x - (1-x) \cos \theta_Q} \quad (53)$$

Für den „Soft Limes“ ( $x \rightarrow 1$ ) geht dieser Ausdruck in

$$\cos \theta_{out}(1, \cos \theta_Q) = \cos \theta_Q$$

über. Nur im „Soft Limes“ stimmen beide Winkel wieder überein, was aber zu erwarten ist [5].

Zur Ableitung (als Beispiel ist hier der „Kollinearen Limes“  $t_k(x, y = -1) = 0$  angeführt) kann man die Parametrisierung aus [23] nehmen + Identifikation  $q_2 = t_2, \hat{q}_1 = u_1 = -s - t_k - q_1, \omega_1 = \omega_1$ . Eine geeignete Drehung lässt den Anteil mit  $\cos \theta_2$  dann verschwinden ( $\cos \theta_{out} = \cos \theta_1$ )

$$\begin{aligned} q_2 &= -\frac{s + u_k(x, y = -1)}{2}(1 + \beta_x \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \psi + \beta_x \cos \theta_1 \cos \psi) \\ q_1 &= -\frac{s + t_k(x, y = -1)}{2}(1 - \beta_x \cos \theta_1) \\ \omega_1 &= \frac{1}{2}s(1-x)(1 - \beta_x \cos \theta_1) \end{aligned}$$

Einsetzen in den entsprechenden Ausdruck aus Abschnitt 5.2

$$\bar{t}_Q = \hat{t} = -\frac{1}{2}s \left( 1 - \underbrace{\left( \frac{t_2 - u_1}{s - \omega_1} \right) \frac{\bar{\beta}}{\beta_2}}_{\equiv \bar{\beta}(s) \cos \theta_{out}} \right)$$

mit ( $s = \bar{s}$ )

$$\bar{\beta} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\bar{s}}}$$

und

$$\beta_2 = \sqrt{1 - \frac{4sm^2}{(s - \omega_1)^2}}$$

liefert das Ergebnis (Gln. (53)).

Es soll noch mal betont werden, dass das Ziel in diesem Abschnitt eine eindeutige Definition des Streuwinkels  $\theta_Q$  sein muss (und damit eine eindeutige Map  $P_{H \rightarrow S}$ ). Betrachtet wurde dazu dieser Streuwinkel  $\theta_Q$ , wie er auf verschiedene Weise durch eine Emission eines Partons aus dem Anfangszustand und einer Emission eines Partons aus dem Endzustand definiert wurde. Mit der Prozedur, den „Kollinearen Limes“ der beiden Invarianten,  $\bar{t}_\pm, \bar{t}_{Q,\bar{Q}}$ , zu berechnen, konnten zwei Impulspaare (Gln. (51), (52)) aufgestellt werden (für die Emission aus dem Anfangs- und Endzustand; diese Impulspaare werden wegen dieser Prozedur in Form einer  $2 \rightarrow 2$  Kinematik angegeben), mit der die Abbildung (Map  $P_{H \rightarrow S}$ ) vervollständigt werden wird.

Trotz der bisherigen Betrachtung sind die  $s$ -Kanal-Invarianten sowie die Streuwinkel der Impulspaare immer noch nicht identisch (siehe Vorfaktoren in Gln. (51), (52)). Ein weiterer Schritt zur Lösung [4] liegt zunächst in der Beobachtung, dass zwischen den Streuwinkeln für  $x \rightarrow 1$ , im „Soft Limes“ also, Gleichheit herrscht (unter der Nebenbedingung, dass die Energie auf den Wert  $\sqrt{xs}$  festgehalten wird).

Die nächste nützliche Beobachtung ist, dass die Impulse als Integrationsvariable im Subtraktionsschema auftauchen.

Es galt

$$xs = s_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 S$$

was bekannt aus Abschnitt 5.1 ist. Es beschreibt die  $s$ -Kanal Invariante für den Fall, dass aus dem Anfangszustand ein Parton emittiert wird.

$$s = x_1 x_2 S$$

ist die  $s$ -Kanal Invariante für eine „Final State“-Emission. Zwischen den Impulsen gibt es die aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 bekannten Relationen der Form

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_i), \quad i = 1, 2$$

je nachdem, ob die Rapidität oder der longitudinale Impuls des schweren Quark-Paares erhalten bleiben soll.  $x_i$  sind Integrationsvariable mit

$$0 \leq x_i \leq 1$$

Dieser Wertebereich gilt auch für die  $\bar{x}_i$  Werte. Solange es sich um Integrationsvariablen handelt, ist es möglich, eine Ersetzung vorzunehmen, da sie den selben Wertebereich durchlaufen müssen

$$x_i \leftrightarrow \bar{x}_i$$

Durch diese Ersetzung (+ einer Jacobi-Determinante) sind beide Kanäle (unter dem Integralzeichen) identisch, und die Impulse (bzw. die daraus abgeleiteten Invarianten)

$$\begin{aligned}\bar{p}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{xs}(1, 0, 0, \pm 1) \\ \bar{k}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{xs}(1, \pm\bar{\beta}(xs)\sin\theta_Q, 0, \pm\bar{\beta}(xs)\cos\theta_Q)\end{aligned}\quad (54)$$

sind dann *auch* in der Lage, die Partonenemission des Endzustandes zu beschreiben. Man besitzt jetzt also *einen* Satz an Variablen, mit denen die Kinematik des „harten Stoßes“ beschrieben werden kann. Denn mit

$$xs = \bar{s} = \bar{x}_1\bar{x}_2S$$

für die Impulse des Initialzustandes und

$$s = x_1x_2S$$

für die Impulse des „Final“-Zustandes

$$\begin{aligned}\bar{p}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{s}(1, 0, 0, \pm 1) \\ \bar{k}_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{s}(1, \pm\bar{\beta}(s)\sin\theta_{out}, 0, \pm\bar{\beta}(s)\cos\theta_{out})\end{aligned}\quad (55)$$

ist mit der erwähnten Ersetzung ersichtlich, dass die  $s$ -Kanal-Invarianten (Gln. (54), (55)) identisch sind.

Wie sich diese Transformation weiter auswirkt, wird am Ende des nächsten Abschnitts genau aufgeführt.

## 6.6 Endgültige Form des Subtraktionsterms

In diesem Kapitel werden die endgültigen Ausdrücke aufgeführt, die als Fortran Code implementiert wurden.

Zunächst wird der Subtraktionsterm für den Fall eines aus dem Anfangszustand emittierten Partons präsentiert, wobei es nach Abschnitt 5.1 (und 5.4.1) keine Rolle spielt, von welchem Parton es emittiert wurde.

Aus dem Abschnitt 6.4, Gln. (48), ist folgender Term bekannt für eine Partonenemission aus dem Anfangszustand

$$\begin{aligned}d\sigma|_{PS} &= \sum_{abc} dx_1^{(PS)} dx_2^{(PS)} \frac{\alpha_s}{2\pi} d\sigma_{ab}^{(b)}(x_1^{(PS)} P_1, x_2^{(PS)} P_2) \\ &\times \left( \frac{dQ_+^2}{Q_+^2} \frac{dz_+}{z_+} \frac{d\varphi_+}{2\pi} P_{ac}^{(0)}(z_+) f_c^{(H_1)}\left(\frac{x_1^{(PS)}}{z_+}\right) f_b^{(H_2)}(x_2^{(PS)}) \right. \\ &\left. + \frac{dQ_-^2}{Q_-^2} \frac{dz_-}{z_-} \frac{d\varphi_-}{2\pi} P_{bc}^{(0)}(z_-) f_a^{(H_1)}(x_1^{(PS)}) f_c^{(H_2)}\left(\frac{x_2^{(PS)}}{z_-}\right) \right)\end{aligned}$$

Es reicht, dabei sich auf einen Ausdruck zu beschränken, und das Ergebnis später für eine Emission von der anderen Partonenlinie zu übernehmen (die Argumente der Verteilungsfunktionen sind zu vertauschen). Die  $\varphi_{\pm}$ -Abhängigkeit ist in

diesem Ausdruck künstlich hinzugefügt worden. Des Weiteren wird er wieder heraus integriert werden. Lediglich bei der Betrachtung des „Dreiteilchenphasenraums“ wird er für einen Vergleich benötigt.

Es ergibt sich zunächst (ohne explizite Summe und mit der Identifikation  $x_i^{(PS)} \leftrightarrow \bar{x}_i = x_i^{(s)}$ , siehe Ende des Abschnitts 6.1)

$$d\sigma_{cb}|_{PS} = d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 f_c^{(H_1)}(\bar{x}_1/z) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2) \overline{M}_{ab}^{(b)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}) d\phi_2(\bar{x}_1 \bar{x}_2 S) \\ \times \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{dz}{z} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ac}^{(0)}(z)$$

wobei  $d\phi_2 = \frac{\bar{\beta}(\bar{s})}{16\pi} d \cos \theta_Q$  ist.

Wegen der Variablensubstitutionen bietet es sich an, den Ausdruck blockweise zu schreiben. Dann gilt

$$d\sigma_{cb}|_{PS} = \mathcal{L}_{cb} \mathcal{B}_{ac} \overline{\mathcal{H}}_{ab} dx_1 dx_2 dx dy d\varphi d \cos \theta_{in}$$

mit

$$\mathcal{L}_{cb} = \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{1}{z} f_c^{(H_1)}(\bar{x}_1/z) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2) \\ \mathcal{B}_{ac} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{P_{ac}^{(0)}(z)}{Q^2} \\ \overline{\mathcal{H}}_{ab} = \frac{\bar{\beta}(\bar{s} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 S)}{16\pi} \overline{M}_{ab}^{(b)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t})$$

Hier wurde noch der Winkel  $\theta_{in}$  aus Abschnitt 6.4 benutzt.

Die erste Jacobi-Determinante kann je nach zusätzlicher Erhaltungsgröße für das ausgehende Quark-Paar folgende Werte annehmen (siehe 5.1, 5.2, Gln. (36), (37))

$$\frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{cases} x & \text{bei Erhaltung der Rapidität} \\ \frac{xx_+}{\sqrt{x_+^2 - x_1 x_2 v_1 v_2 / s^2}} & \text{bei Erhaltung des long. Moments} \end{cases} \quad (56)$$

Die zweite Jacobi-Determinante ist in dem Abschnitt 5.4.1, Gln. (40), aufgeführt. Die Invarianten finden sich in Abschnitt 5.1.

Der Subtraktionsterm für eine Emission aus dem Endzustand ist ebenfalls in dem Abschnitt 6.4, Gln. (49), angegeben (hier für eine Emission von dem Quark)

$$d\sigma_{cb}|_{PS} = d\bar{x}_{1f} d\bar{x}_{2f} f_c^{(H_1)}(\bar{x}_{1f}) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_{2f}) \overline{M}_{cb}^{(b)}(\bar{x}_{1f}, \bar{x}_{2f}, \bar{t}_Q) d\phi_2(\bar{x}_{1f} \bar{x}_{2f} S) \\ \times \frac{dQ_Q^2}{Q_Q^2} \frac{d\varphi_Q}{2\pi} dz_Q \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}^{(0)}(z_Q)$$

Nützlich ist  $\bar{x}_{1f} = x_1$  und  $\bar{x}_{2f} = x_2$  sowie  $\bar{s} = s$  (Abschnitt 5.2).

Es ist wieder übersichtlicher, die Blockschreibweise zu benutzen (mit der gleichen Ersetzung wie im ersten Fall, sowie das Weglassen des Label  $Q$ , bis auf bei



dem Winkel  $\theta_Q$  wg. seiner Sonderrolle)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cb} &= f_c^{(H_1)}(x_1) f_b^{(H_2)}(x_2) \\ \mathcal{B}_{cb} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{P_{qq}^{(0)}(z)}{Q^2} \\ \mathcal{H}_{cb} &= \frac{\bar{\beta}(x_1 x_2 S)}{16\pi} \overline{M}_{cb}^{(b)}(x_1, x_2, \bar{t})\end{aligned}$$

Die Jacobi-Determinante und die Invarianten sind aus den Abschnitten 5.2 und 5.5.1, Gln. (41), zu entnehmen. Nun ergibt sich hier

$$d\sigma_{cb}|_{PS} = \mathcal{L}_{cb} \mathcal{B}_{ac} \mathcal{H}_{ab} dx_1 dx_2 dx dy d\varphi d\cos\theta_{out}$$

Auch hier wurde der Streuwinkel  $\theta_{out}$  aus Abschnitt 6.4 benutzt, anstatt ihn direkt mit  $\theta_Q$  zu identifizieren, was im Falle einer „Initialstate“-Emission möglich ist. Die Rolle dieser beiden Streuwinkel wird sich mit der Einführung des „Dreiteilchenphasenraums“ klären.

In beiden Fällen ist (und muss nach Kapitel 4 und 6) die Form des Subtraktionsterms

$$d\sigma_{cb}|_{PS} = dx_1 dx_2 \frac{d\overline{\Sigma}_{cb}}{d\phi_3} |_{PS} d\phi_3$$

sein, damit dieser Term in dem modifizierten Subtraktionsschema aufgenommen werden kann.  $d\phi_3$  ist der differentielle Phasenraum für drei Teilchen im Endzustand und ist durch

$$d\phi_3(s) = \frac{s\bar{\beta}(xs)}{1024\pi^4} (1-x) dx dy d\varphi d\cos\theta_Q$$

gegeben. Durch Umstellen gilt

$$dx dy d\varphi d\cos\theta_Q = d\phi_3 \frac{1024\pi^4}{s\bar{\beta}(xs)} \frac{1}{(1-x)}$$

Damit werden  $\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{H}$  für die Fälle wie folgt abgeändert. Für eine Emission aus dem Anfangszustand (hier von Parton 1) gilt dann

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cb} &= \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{1}{z} f_c^{(H_1)}(\bar{x}_1/z) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2) \\ \mathcal{B}_{ac} &= \alpha_s \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{P_{ac}^{(0)}(z)}{(1-x)Q^2} \\ \mathcal{H}_{ab} &= \frac{16\pi}{x_1 x_2 S} \frac{d\cos\theta_{in}}{d\cos\theta_Q} \overline{M}_{ab}^{(b)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t})\end{aligned}$$

und für eine Emission aus dem Endzustand ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cb} &= f_c^{(H_1)}(x_1) f_b^{(H_2)}(x_2) \\ \mathcal{B}_{cb} &= \alpha_s \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{P_{qq}^{(0)}(z)}{(1-x)Q^2} \\ \mathcal{H}_{cb} &= \frac{16\pi}{x_1 x_2 S} \frac{d\cos\theta_{out}}{d\cos\theta_Q} \frac{\bar{\beta}(x_1 x_2 S)}{\bar{\beta}(\bar{x}_1 \bar{x}_2 S)} \overline{M}_{cb}^{(b)}(x_1, x_2, \bar{t})\end{aligned}$$

gültig. Die *in* und *out* Variablen sind aus Abschnitt 6.4 zu nehmen.

Im Abschnitt 6.4 wurde auch dargelegt, dass der Winkel  $\theta_Q$  eindeutig sein muss. Es ist hier ersichtlich warum: Mit einem eindeutigen Winkel ist es möglich, für *S*- und *H*-Events eine Parametrisierung  $d\phi_3$  zu benutzen.

Zur Auswertung der obigen Formeln werden nun also anstatt der Mandelstam-Invarianten aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 (insbesondere  $\bar{t}$  für Emissionen aus dem Anfangs- bzw. Endzustand) die Mandelstam-Invarianten im „Kollinearen Limes“ (Abschnitt 6.4) benötigt. Die Invarianten, die über diese Prozedur berechnet wurden, werden zur Auswertung der *S*- und *H*-Events herangezogen.

Weil die Benutzung der  $x_i$ -Impulse sich nun geändert hat für die Partonemission aus dem Endzustand, wird eine Jacobi-Determinante für den  $\mathcal{L}$ -Term notwendig. Dafür kürzen sich die  $\bar{\beta}$ -Terme aus  $\mathcal{H}$  heraus. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cb} &= \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)} f_c^{(H_1)}(\bar{x}_1) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2) \\ \mathcal{B}_{cb} &= \alpha_s \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{P_{qq}^{(0)}(z)}{(1-x)Q^2} \\ \mathcal{H}_{cb} &= \frac{16\pi}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 S} \frac{d \cos \theta_{out}}{d \cos \theta_Q} \overline{M}_{cb}^{(b)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t})\end{aligned}$$

In [5] wurde der Subtraktionsterm mit Funktionen  $\mathcal{G}$  multipliziert. Das war dort notwendig, da HERWIG in der Produktion von Vektorbosonen, der als Test herangezogen wurde, nicht das richtige Verhalten im „Soft“-Grenzfall zeigt. Dazu wurde eine Funktion  $\mathcal{G}$  definiert, die dem Subtraktionsterm das richtige Grenzverhalten aufzwingt.

$$\mathcal{G}(x) = \frac{(1 - T(x))^{2\alpha}}{T(x)^{2\alpha} + (1 - T(x))^{2\alpha}} \quad (57)$$

mit  $T(x) = x$  und  $\alpha > 1$

Für  $\mathcal{G}$  gilt

$$\lim_{x, y \rightarrow 1, \pm 1} \mathcal{G} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{G} = 1$$

und wird sowohl im „Soft“- als auch „Kollinearen“-Fall dem Subtraktionsterm multiplikativ angehängt werden (daher oben  $x, y$ ), was über  $\mathcal{G}_c$  und  $\mathcal{G}_s$  gekennzeichnet wird.

Wie man im Kapitel 7 noch sehen wird, beschreibt DPMJET III die Vektorproduktion korrekt mit den in den Abschnitten 5.4 und 5.5 abgeleiteten Variablen. Die Erzeugung der schweren Quarks ist hingegen etwas komplizierter. Das Limesverhalten ist nicht ausschließlich proportional zum „Born“-Term. Zu diesem Term gesellen sich mehrere Faktoren und bilden mit dem „Born“-Term zusammen die „Soft/Kollinearen“ Matrixelemente [5, 23]. Daher muss der Subtraktionsterm noch dahingehend manipuliert werden, dass er dem Grenzverhalten gerecht wird [4, 5]. Das geschieht über die  $\mathcal{G}$ -Funktionen aus Gln. (57).

Der Subtraktionsterm kann nun vollständig angegeben werden

$$\frac{d\overline{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS} = \mathcal{G}_s(x)\mathcal{G}_y(y) \sum_L \frac{d\overline{\Sigma}_{ab}}{d\phi_3}|_{PS} + (1 - \mathcal{G}_s(x))M_{ab}(S) + (1 - \mathcal{G}_c(y))M_{ab}(C)$$

$$-(1 - \mathcal{G}_s(x))M_{ab}(S)(1 - \mathcal{G}_c(y))M_{ab}(SC)$$

Die Matrixelemente  $M_{ab}(S, C, SC)$  bezeichnen die führenden Ordnungen „Soft“, „Kollinear“ und „Soft-Kollinearen“ des Terms

$$\frac{d\overline{\Sigma}_{ab}^{(f)}}{d\phi_3}|_{ev}$$

der die Emission des Partons von einer der äußeren Linie beschreibt. Werden Konfigurationen erzeugt, in denen  $x \rightarrow 0, 1$  und/oder  $y \rightarrow \pm 1$  nehmen in dem Subtraktionsterm die entsprechenden Terme das Verhalten an, welches durch die Parameterwahl  $x, y$  indiziert ist: Für „Soft“,  $x \rightarrow 1$ , ist der Subtraktionsterm nur durch die Matrixelemente  $M_{ab}(S)$  gegeben, wird ein *hartes* Parton emittiert,  $x \rightarrow 0$ , so wird der Subtraktionsterm ganz durch den berechneten Ausdruck festgelegt sein. Für die „Kollinearen“-Fälle gilt entsprechendes.

## 7 Überprüfung des Subtraktionsterms konstruiert über die gewählten Partonen-Schauer-Variablen

In diesem Abschnitt soll überprüft werden, ob der differentielle Wirkungsquerschnitt des Subtraktionsterms im „Soft“- bzw. „Kollinearen“-Grenzfall eines emittierten  $H$ -Partons dem theoretisch zu erwartenden Ergebnis entspricht. Wie in [4] wird nicht die Produktion schwerer Quarks als Test herangezogen, sondern die Produktion von  $W^+W^-$  Paaren. Diese Produktion besitzt die einfachere Farbstruktur, bietet aber auch die Möglichkeit zu überprüfen, ob die Wahl der Partonen-Schauer-Variablen des „Monte Carlo“-Generators, wie in dem Kapitel 5 (insbesondere die Abschnitte 5.4 und 5.5) geschehen, das richtige Grenzverhalten aufzeigt.

HERWIG zeigte auf Grund der dort herangezogenen Schauer-Variablen  $(\xi, z)$  im „Soft Limes“ ein Verhalten, das zunächst verhinderte, den Subtraktionsterm als einen Counterterm einzusetzen (für  $d\Sigma_{ab}^{(f)}/d\phi_3|_{ev}$ ). Der Subtraktionsterm wurde dort mit einer Funktion multipliziert (Abschnitt 6.6), die diesem das richtige Verhalten aufzwingt. Die in [4] und [5] gewählten Funktionen  $\mathcal{G}$  sind (nahezu) willkürlich, und eine Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes von  $\mathcal{G}$  wurde dort nicht gefunden.

Betrachtet wird nun die Vektorproduktion in der Reaktion  $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-g$ , da dieser Subprozess als einziger im „Soft“- und „Kollinearen Limes“ Divergenzen zeigen kann. Auf die anderen Fälle wird am Ende des Abschnittes eingegangen. Die Emission des Gluons geschieht natürlich aus dem Anfangszustand, da die Bosonen farblos sind. Das zu verwendende Matrixelement ist dann  $\overline{M}_{q\bar{q}}^{(b)}$ .

Der **soft Limes**,  $x \rightarrow 1$ , ergibt durch Ablesen [4] oder [55]

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^+(p_1, p_2)}{d\phi_3} \right|_{PS} + \left. \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^-(p_1, p_2)}{d\phi_3} \right|_{PS} \\ & \rightarrow 8\pi\alpha_s C_F \frac{p_1 \cdot p_2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \overline{M}_{q\bar{q}}^{(b)}(p_1, p_2) \\ & \rightarrow \frac{64\pi\alpha_s}{s} \frac{C_F}{(1-x)^2(1-y^2)} \overline{M}_{q\bar{q}}^{(b)}(p_1, p_2) \end{aligned}$$

Das muss auch das Ergebnis für die Auswertung des Subtraktionsterms mit Hilfe der gewählten Schauer-Variablen sein. Die Faktoren der Form  $\frac{p_i p_j}{p_i \cdot k p_j \cdot k}$  werden in der Literatur auch Eikonalfaktoren genannt und sind typisch bei einer Betrachtung eines Subprozesses im „Soft Limes“. Im Abschnitt 7.1 ist dazu ein Beispiel gebracht.

Die Faktoren  $\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{H}$  aus dem vorherigen Kapitel (und bezogen auf den obigen Prozess mit  $c = q, b = \bar{q}, a = g$ , also einer Emission aus dem Anfangszustand) werden jetzt noch einmal explizit aufgeführt.

Die Jacobi-Determinanten (siehe z. B. Abschnitt 6.6, Gln. (56))

$$\frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)}$$

sowie die „Splitting-Funktion“

$$P_{qq}(z) = C_F \frac{1+z^2}{1-z}$$

werden im Limes  $x \rightarrow 1$  betrachtet.

Die Determinante (Abschnitt 5.4.1, Gln. (40)) ist

$$\frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{2}s(1-x)$$

für eine Emission aus dem Anfangszustand (egal, welches Parton emittiert hat), die Splittingvariable ist  $z(x, y) = x$  und die Virtualität ist  $Q_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(1-x)(1 \mp y)$  (die Label (1,2) für eine Emission von Seite 1/2), Abschnitte 5.4 und 5.4.1.

Die Faktoren sind nun

$$\mathcal{L}_{cb} = \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{1}{z} f_c^{(H_1)}(\bar{x}_1/z) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2) \rightarrow f_c^{(H_1)}(x_1) f_b^{(H_2)}(x_2)$$

denn die Determinante geht für beide Fälle im „Soft Limes“ gegen  $x$ . Die Splittingvariable  $z(x, y)$  ist mit  $x$  identifiziert worden, so dass sich beides heraus kürzt.

Die Argumente der Dichtefunktionen  $f_c, f_b$  verhalten sich mit  $z \rightarrow 1$  und  $\bar{x}_1 \rightarrow x_1$  sowie  $\bar{x}_2 \rightarrow x_2$  wie oben angegeben (siehe auch 6.1, Gln. (44-46)), und es entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ac} &= \alpha_S \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{P_{ac}^{(0)}(z)}{(1-x)Q^2} \rightarrow \alpha_S \frac{1}{2}s(1-x) C_F \frac{1+z^2}{1-z} \frac{1}{(1-x)Q_{1,2}^2} \\ &\rightarrow \alpha_S \frac{1}{2} C_F \frac{1+z^2}{1-z} \frac{2}{(1-x)(1 \mp y)} \\ &\rightarrow \alpha_S \frac{1}{2} C_F \frac{1+z^2}{1-z} \left\{ \frac{4(1-x)}{(1-x)^2(1-y^2)} \right\} \end{aligned}$$

Hier wurden beide Nenner,  $Q_1^2$  und  $Q_2^2$ , im letzten Schritt addiert, um der Emission beider Seiten Rechnung zu tragen. Mit  $(1-x) = (1-z)$  ergibt sich für diesen Faktor

$$\mathcal{B}_{ca} = \alpha_S \frac{1}{2} C_F \frac{1+z^2}{1-z} \left\{ \frac{4(1-x)}{(1-x)^2(1-y^2)} \right\} \rightarrow \alpha_S C_F (1+z^2) \frac{2}{(1-x)^2(1-y^2)}$$

Unter Beachtung, dass im „Soft Limes“  $z \rightarrow 1$  gilt, ergibt sich

$$\mathcal{B}_{ca} \simeq \alpha_S C_F \frac{4}{(1-x)^2(1-y^2)}$$

Der nächste Faktor ist

$$\mathcal{H}_{ab} = \frac{16\pi}{x_1 x_2 S} \frac{d \cos \theta_{in}}{d \cos \theta_Q} \overline{M}_{ab}^{(b)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t})$$

Er ändert sich mit der (formalen) Vertauschung der Flavours  $a \leftrightarrow c$  und  $s = x_1 x_2 S$  und mit  $\frac{d \cos \theta_{in}}{d \cos \theta_Q} = 1$ , Abschnitt 6.5, ab zu

$$\mathcal{H}_{cb} = \frac{16\pi}{s} \overline{M}_{cb}^{(b)}(p_1, p_2)$$

Das Produkt beider Faktoren  $(\mathcal{B}_{ca}, \mathcal{H}_{ab})$  ergibt das geforderte Ergebnis

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}}^+(p_1, p_2)}{d\phi_3}\Big|_{MC} + \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^-(p_1, p_2)}{d\phi_3}\Big|_{MC} \rightarrow \frac{64\pi\alpha_s}{s} \frac{C_F}{(1-x)^2(1-y^2)} M_{q\bar{q}}^{(b)}(p_1, p_2)$$

Als nächstes wird die **kollineare Betrachtung** angeführt. Das zu erwartende Ergebnis ist [4, 23]

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}}^+(p_1, p_2)}{d\phi_3}\Big|_{MC} \xrightarrow{y \rightarrow +1} \frac{16\pi\alpha_s}{s} \frac{P_{q\bar{q}}^{(0)}(x)}{(1-x)(1-y)} M_{q\bar{q}}^{(b)}(xp_1, p_2)$$

und

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q}}^-(p_1, p_2)}{d\phi_3}\Big|_{MC} \xrightarrow{y \rightarrow -1} \frac{16\pi\alpha_s}{s} \frac{P_{q\bar{q}}^{(0)}(x)}{(1-x)(1+y)} M_{q\bar{q}}^{(b)}(p_1, xp_2)$$

Die Jacobi-Determinante des Terms (Abschnitt 6.1, Gln. (44-46))

$$\mathcal{L}_{cb} = \frac{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{1}{z} f_c^{(H_1)}(\bar{x}_1/z) f_b^{(H_2)}(\bar{x}_2)$$

kürzt sich auch hier mit dem Faktor  $z(x, y) = x$  heraus, da  $z(x, y)$  unabhängig von  $y$  ist; das gilt für  $y \rightarrow \pm 1$ , denn das bedeutet entweder  $v_1 \rightarrow 0$  oder  $v_2 \rightarrow 0$ , so dass auch beim Erhalt des longitudinalen Moments die Jacobi-Determinante gegen  $x$  geht.

Die Argumente der Verteilungsfunktionen  $f_c$  und  $f_b$  sind im  $y \rightarrow \pm 1$  Limes nach Kapitel 6, Abschnitt 6.1,

$$\frac{\bar{x}_1}{z} = \frac{xx_1}{z=x} = x_1 \quad \text{und} \quad x_2$$

sowie

$$x_1 \quad \text{und} \quad \frac{\bar{x}_2}{z} = \frac{xx_2}{z=x} = x_2$$

so dass  $\mathcal{L}_{cb}$  sich in beiden Limes reduziert auf

$$\mathcal{L}_{cb} = f_c^{(H_1)}(x_1) f_b^{(H_2)}(x_2)$$

Der Faktor

$$\mathcal{B}_{ac} = \alpha_S \frac{\partial(z, Q^2)}{\partial(x, y)} \frac{P_{q\bar{q}}^{(0)}(z)}{(1-x)Q^2}$$

wird im  $y \rightarrow 1$  Limes mit  $z = x$

$$\mathcal{B}_{ac} = \alpha_S \frac{1}{2} s(1-x) \frac{P_{q\bar{q}}^{(0)}(x)}{(1-x)\frac{1}{2}s(1-x)(1-y)} \rightarrow \alpha_s \frac{P_{q\bar{q}}^{(0)}(x)}{(1-x)(1-y)}$$

Im  $y \rightarrow -1$  Limes wird er letztendlich zu

$$\mathcal{B}_{ac} \rightarrow \alpha_s \frac{P_{q\bar{q}}^{(0)}(x)}{(1-x)(1+y)}$$

Zum Schluss sei noch der Faktor  $\mathcal{H}_{cb}$  für beide Fälle betrachtet. Er wird für  $y \rightarrow \pm 1$  zu

$$\mathcal{H}_{cb} = \frac{16\pi}{s} \overline{M}_{q\bar{q}}^{(b)}(xp_1, p_2)$$

und

$$\mathcal{H}_{cb} = \frac{16\pi}{s} \overline{M}_{q\bar{q}}^{(b)}(p_1, xp_2)$$

Die Argumente für das Matrixelement sind im Limes

$$\bar{x}_1 = xx_1, \bar{x}_2 = x_2$$

und

$$\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = xx_2$$

Die Produkte von  $\mathcal{B}_{ac}$  und  $\mathcal{H}_{cb}$  ergeben das geforderte Ergebnis für die „Kollinearen Limes“  $y \rightarrow \pm 1$ .

Im Gegensatz zu dem Programm HERWIG beschreibt DPMJET III die Limes korrekt (wie PHOJET *und* PYTHIA), dank der richtig gewählten Schauer-Variablen aus Abschnitt 5.4 und 5.4.1. Die Fälle, in denen nun ein masseloses Quark oder Antiquark emittiert wird, brauchen wegen der Korrektheit *beider* Grenzfälle nicht mehr separat behandelt zu werden.

## 7.1 Eikonalfaktoren in der Vektorbosonproduktion

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel präsentiert [55, 9], wie die Eikonalfaktoren in der Vektorbosonproduktion im **soft Limes** auftreten. Danach wird für den gleichen Prozess die Amplitude für den **kollinearen Limes** berechnet. In beiden Fällen kann das Ergebnis mit den Angaben aus dem Abschnitt darüber (7) verglichen werden.

Betrachtet wird dafür der Prozess

$$q(p_1, a) + \bar{q}(p_2, b) \rightarrow W^+(k_1, \mu) + W^-(k_2, \nu) + g(k, \rho, \alpha)$$

wobei  $a, b$  Farbindices sind,  $\mu, \nu$  sind Polarisationsindizes und  $\rho$  und  $\alpha$  sind Polarisation sowie Farbindex des Partons. Dieses Beispiel wird hier angebracht, da es das Prinzip verdeutlicht, aber gleichzeitig einfacher zu handhaben ist wegen der einfacheren Farbstruktur.

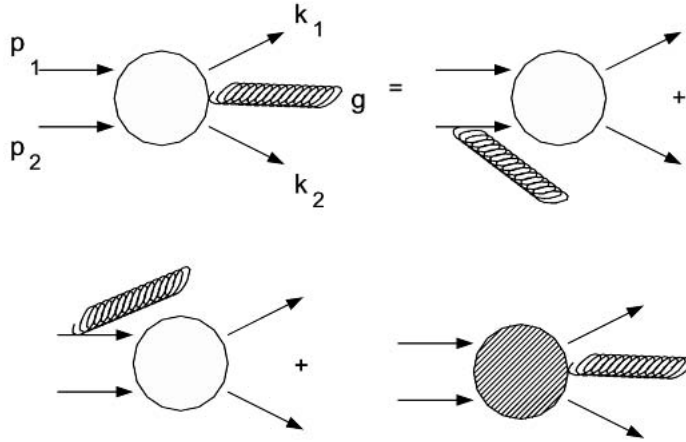


Abbildung 28: Zerlegung der resultierenden Amplitude im „Soft Limes“ [55].

Im **soft Limes**  $x \rightarrow 1$  ist eine Zerlegung der Amplitude nach Abbildung 28 möglich. Es ergibt sich

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^- + \mathcal{R}$$

wobei  $\mathcal{R}$  der reguläre Anteil der Amplitude in diesem Limes darstellen soll (schraffierter Anteil).  $+$  und  $-$  beziehen sich wieder auf das Parton, welches das Parton emittiert hat.

Der  $\mathcal{A}^+$  Anteil ist

$$\mathcal{A}^+ = \bar{v}(p_2) \alpha_s \lambda_{ca}^\alpha \frac{1}{(p_1 - k)_\rho \cdot \gamma^\rho - m_1} B_{bc}^{\nu\mu} u(p_1)$$



$B_{bc}^{\nu\mu}$  ist das Matrixelement zur untersten Ordnung (LO), wenn ein Quark und ein Antiquark annihilieren, um ein Vektorbosonpaar zu erzeugen. Den 3-Vertex  $\gamma W^+ W^-$  kann man z. B. aus [56] entnehmen.

Erweitert man diese Amplitude mit dem Faktor  $\frac{(p_1-k)_\rho \cdot \gamma^\rho}{(p_1-k)_\rho \cdot \gamma^\rho}$  und vernachlässigt die Masse des Partons  $m_1$ , so entsteht

$$\mathcal{A}^+ = \bar{v}(p_2) \alpha_s \lambda_{ca}^\alpha \frac{B_{cb}^{\nu\mu}}{2t_k} (p_1 - k)_\rho \cdot \gamma^\rho u(p_1)$$

Auf die gleiche Weise konstruiert man  $\mathcal{A}^-$ . Das Ergebnis ist

$$\mathcal{A}^- = \bar{v}(p_2) \alpha_s \lambda_{bc}^\alpha \frac{\gamma^\rho}{2u_k} (k - p_2)_\rho B_{ca}^{\nu\mu} u(p_1)$$

Der „Soft Limes“ beider Amplituden ist

$$\mathcal{A}^+ = -\frac{1}{2} \bar{v}(p_2) \alpha_s \lambda_{ca}^\alpha B_{bc}^{\nu\mu} u(p_1) \frac{p_1^\rho}{p_1 \cdot k} + \mathcal{O}(1)$$

bzw.

$$\mathcal{A}^- = \frac{1}{2} \bar{v}(p_2) \alpha_s \lambda_{bc}^\alpha B_{ca}^{\nu\mu} u(p_1) \frac{p_2^\rho}{p_2 \cdot k} + \mathcal{O}(1)$$

$\mathcal{O}(1)$  stellt den nicht singulären Anteil der Amplitude im „Soft Limes“ dar. Für  $B_{ba}^{\nu\mu}$  gilt, in unterster Ordnung,  $B_{ba}^{\nu\mu} = \delta_{ba} b^{\nu\mu}$ . Dann ergibt sich für das Quadrat der Amplitude ( $= 2\Re(\mathcal{A}^{+*} \mathcal{A}^-)$ )

$$|\mathcal{A}(k \rightarrow 0)|^2 = \frac{1}{4} \alpha_s^2 \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) \delta^{\alpha\beta} |\mathcal{A}^{(b)}|^2 \frac{2p_1 p_2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)}$$

Der Anteil

$$\mathcal{A}^{(b)} = \bar{v}(p_2) B_{ba}^{\nu\mu} u(p_1)$$

entspricht einem Prozess ohne Partonenemission, wie oben erwähnt.  $|\mathcal{A}^{(b)}|^2$  ist das quadrierte LO-Matrixelement, gemittelt und summiert über die *internen* Informationen. Schließlich verschwinden die Beiträge noch, die bei dem Quadrieren der Gesamtamplitude auftreten,  $|\mathcal{A}^\pm|^2$  wg.  $p_i^2 \simeq 0$

Für eine Betrachtung des Prozesses im **kollinearen** Gebiet empfiehlt sich eine Parametrisierung des Gluonimpulses, indem explizit der Transversalimpuls  $k_T$  auftritt. Dieser kann nach dem Aufstellen der Amplitude im Limes  $k_T \rightarrow 0$  betrachtet werden, wobei das erwähnte divergente Verhalten sichtbar wird.

Die Parametrisierung des Gluonimpulses („Sudakov-Dekomposition“) lautet

$$k = (1-x)p + \xi\eta + k_T \tag{58}$$

$p$  ist der Quarkimpuls (oder Antiquarkimpuls),  $\xi$  ist ein noch zu bestimmender Faktor und  $\eta$  ist ein lichtartiger Vierervektor ( $\eta^2 = 0$ ), mit der möglichen Darstellung  $\eta^\mu = (1, 0, 0, -1)$ . Schließlich ist  $k_T = |\vec{k}_T| = |(0, \vec{k}_T, 0)|$ . Für Relationen untereinander gelten

$$\eta \cdot p \neq 0, \quad p \cdot k_T = 0, \quad \eta \cdot k_T = 0 \tag{59}$$

Die letzte Gleichung vereinfacht die Forderung  $k^2 = 0$  stark, wie man explizit sieht

$$k^2 = (1-x)p^2 + (\xi\eta)^2 + k_T^2 + 2\xi\eta k_T + 2(1-x)p(\xi\eta + k_T) = 0$$

mit der Lösung für die unbekannte Konstante  $\xi$

$$\xi = -\frac{k_T^2}{2(1-x)p \cdot \eta} \quad (60)$$

Daraus lässt sich  $t_k = (p_1 - k)^2 \simeq -2p_1 \cdot k$  einfach berechnen. Es gilt dann

$$t_k = -2p_1 k = -2\xi p_1 \cdot \eta = \frac{k_T^2}{1-x}$$

Wie im „Soft Limes“ kann die Amplitude zerlegt werden in einen Anteil, der für die Emission steht und einen regulären Anteil, der keine Divergenzen aufzeigen wird, wenn der Limes  $k_T \rightarrow 0$  genommen wird. Die Zerlegung ist

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{R}$$

Die Amplitude für den „Born“-Prozess ist zunächst wie im vorherigen Fall

$$\bar{v}(p_2) B_{ba}^{\nu\mu}(p_1 - k, p_2) u(p_1)$$

Für die Summe über die Information des Endzustandes des Gluons, also deren Polarisationszustände, gilt in dieser Eichung

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu \epsilon_r^\nu = P^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{\eta^\mu k^\nu + k^\mu \eta^\nu}{\eta \cdot k} \quad (61)$$

Die Polarisationssumme geht über zwei Freiheitsgrade. Die Amplitude lautet, wie oben,

$$\bar{v}(p_2) \alpha_s \lambda_{ca}^\alpha \frac{B_{cb}^{\nu\mu}(p_1 - k, p_2)}{2t_k} (p_1 - k)_\rho \cdot \gamma^\rho u(p_1)$$

mit  $B_{cb}^{\nu\mu} = \delta_{cb} b^{\nu\mu}$  in unterster Ordnung. Der Vorfaktor lautet (die Farbmatrizen können einfach herausgezogen werden)  $\alpha_s^2 \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) \delta^{\alpha\beta} / 4t_k^2$  und mit der Abkürzung  $\Gamma = \delta_{cb} b^{\nu\mu} (p_1 - k) \gamma^\rho$ . Die Mittelung über die Spins der eingehenden sowie ausgehenden Zustände führt mit dem Matrixelement  $\mathcal{M} = \bar{v}_s(p') \Gamma u_r(p)$  zu

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \Gamma(\not{p}' - m) \tilde{\Gamma}(\not{p} + m) \right]$$

und mit  $\tilde{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$  zunächst unter Vernachlässigung der Massen der Quarks auf

$$\frac{\alpha_s^2 \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) \delta^{\alpha\beta}}{4t_k^2} \text{Tr} \left[ b^{\nu\mu}(p_1 - k, p_2) (p_1 - k) \gamma^\rho p_1 \gamma^{\rho'} \tilde{b}^{\nu'\mu'}(p_1 - k, p_2) p_2 \right] P_{\rho\rho'}$$

Man kann nun sehen, dass beide Gamma-Matrizen,  $\gamma^\rho$  und  $\gamma^{\rho'}$ , in der Spur (in vier Dimensionen) durch Kontraktion mit der Polarisationssumme Gln.(61) ausgewertet werden können, ebenso wie der Faktor  $(p_1 - k) = xp_1 - \xi \cdot \eta - \vec{k}_T$ . Mit

Gln.(58)  $\eta \cdot k = (1-x)p_1$ , der Polarisationssumme, Gln.(61),  $P_{\rho\rho'}$  zur Auswertung der Polarisationsvektoren der Bosonen sowie Gln.(59) und der Amplitude  $|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}^+ + \mathcal{R}|^2$  im Limes  $k_T \rightarrow 0$  kann dann beides geschrieben werden

$$|\mathcal{A}(k_T \rightarrow 0)|^2 \sim -\frac{\alpha_s^2 \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) \delta^{\alpha\beta}}{4t_k^2} 2t_k \left( \frac{1+x^2}{1-x} \right) \text{Tr}(b^{\nu\mu} p_1 \tilde{b}^{\nu'\mu'} p_2)$$

+weniger singuläre Terme für den Fall  $|\vec{k}_T| \rightarrow 0$ .

Der Ausdruck

$$\frac{1+x^2}{1-x}, \quad 0 \leq x < 1$$

ist die bekannte Altarelli-Parisi-Splitting-Funktion  $P_{qq}(x)$  aus Abschnitt 2.3. Mit  $t_k \sim (1-x)(1-y)$  kann für den Fall, dass das Quark ein Gluon kollinear emittiert, sofort qualitativ der Vergleich hergestellt werden mit dem angegebenen Ergebnis aus Abschnitt 7. Wenn das Antiquark emittiert, kann die Rechnung ohne Umstände für diese Situation wiederholt werden, wobei  $t_k$  mit  $u_k \sim (1-x)(1+y)$  ersetzt werden muss.

## 8 Eventgenerierung mit DPMJET III

In diesem Abschnitt soll kurz beschrieben werden, wie mit Hilfe des Programms DPMJET III <sup>4</sup> Events erzeugt werden <sup>5</sup> (das Programm DPMJET III wurde von Stefan Roesler, Ralph Engel und Johannes Ranft geschrieben [3]; eine Vorversion (DTUNUC 2.2) wurde von Stefan Roesler in Zusammenarbeit mit Ralph Engel und Johannes Ranft im Zusammenhang mit seiner Doktorarbeit geschrieben [57, 58]; das Programm PHOJET wurde von Ralph Engel in seiner Doktorarbeit entwickelt [59]). Im Folgenden wird nur die Phase genauer betrachtet, die später auch für die Produktion schwerer Quarks zuständig sein wird.

Das Programm DPMJET III ermöglicht die Simulation von Streuvorgängen beliebiger Hadronen und/oder Nukleonen und benutzt PHOJET (v1.12) für die individuelle Hadronenstreuung und für den „Initial State“-Schauer sowie PYTHIA (v6.115) einmal für die Beschreibung des Hadronisierungsvorgangs als auch für die Durchführung des „Final State“-Schauers.

Zur akkuraten Beschreibung der Hadronenstreuung unterteilt PHOJET diese in diverse physikalisch relevante Prozessarten („Non Diffraktiv“ etc.). Entscheidend für die Auswahl eines dieser Abschnitte ist der für diese Prozessart im Voraus bereitgestellte uneikonalisierte Wirkungsquerschnitt. Das geschieht in einer numerischen Phase, die jedem Event vorangestellt wird. Wie in dem Abschnitt 2.6 angedeutet, wird jede dieser Prozessarten durch eine Bildung von „Color Singulets“ („Strings“) abgeschlossen. Diese „Ketten“ werden dann dem Programm PYTHIA zur Hadronisierung übergeben.

Um im Folgenden ein Ereignis zu erzeugen, muss ein Aufruf der PHOJET Subroutine PHO\_EVENT aus DPMJET III betrachtet werden (Aufruf durch die Subroutine DT\_EVENTB). Vorausgegangen ist dabei eine vom User initiierte Anfrage in Form eines physikalischen Prozesses (durch eine vom User bereitgestellte Datei), in dem ein ausgewähltes Projektil auf ein ausgewähltes Target *geschossen* wird. Dieser Anfrage können Optionen angehängt werden. Zwingend erforderlich ist natürlich neben der Angabe der Target- und Projektilart (Proton/Neutron bzw. deren Antiteilchen) die Angabe der Stoßenergie in Form einer Schwerpunktsenergie im „Center of Mass“-System der Teilchen. Kern-Kern Stöße sollen im weiteren Verlauf nicht betrachtet werden.

Übergeben werden an die Subroutine PHO\_EVENT u. a. die Impulse der Hadronen als Parameter dieser Subroutine als auch einige Konstanten, die üblicherweise in COMMON Blöcke gespeichert sind (PHO\_DATINI und PHO\_FITPAR initialisieren die wichtigsten COMMON Blöcke und Felder(Arrays)).

Der erste für diese Arbeit wichtige Aufruf ist die Subroutine PHO\_MCINI, die in erster Linie der numerischen Berechnung des totalen harten Wirkungsquerschnittes dient, dessen Prozesse in PHOJET in „Leading Order“ vorliegen <sup>6</sup>.

---

<sup>4</sup>Im Wesentlichen bezieht sich die folgende Beschreibung auf das Programm PHOJET, da keine Kern-Kern-Streuung betrachtet werden.

<sup>5</sup>Die PHOJET-Bezugsquelle lautet: <http://www-ik.fzk.de/~engel>. DPMJET III ist lizenzrechtlich geschützt, siehe dazu die Seite: <http://sroesler.home.cern.ch/sroesler/dpmjet3.html>

<sup>6</sup>Für Streuungen von Photonen werden neben den „direct“-QCD Prozessen, indem Photonen direkt mit einem Partnerteilchen punktiert wechselwirken, auch „Resolved“-Prozesse erlaubt; in diesen Prozessen kann die Wellenfunktion eines teilnehmendes Photon als ein zusammengesetztes Teilchen gedacht werden, dass in alle erlaubten Zustände fluktuiert, z. B. in ein Quark-Antiquark-Paar; dieses Fermionpaar kann dann behandelt werden, wie ein Input für ein LO-Prozess.

Nach diesen Vorbereitungen ist die weitere Aufrufabfolge

→ (PHO\_HARXTO) → (PHO\_HARXPT) → (PHO\_HARXR2) bzw.  
(PHO\_HARXD2) → (PHO\_HARXR3)

Der Term, der in diesen Routinen berechnet wird ist [38]

$$\sigma_h = \sum_{i,j \rightarrow k,l} \iiint dx_1 dx_2 dt x_1 f_i(x_1, Q^2) x_2 f_j(x_2, Q^2) \frac{1}{x_1 x_2} \pi M_{i,j \rightarrow k,l}^2 \frac{\alpha_s^2(Q^2)}{\hat{s}^2}$$

$f_{i,j}(x_{1,2}, Q^2)$  sind die Verteilungsfunktionen für die Partonen  $i, j$  und  $M_{i,j \rightarrow k,l}^2$  sind die Matrixelemente für einen Subprozess  $i+j \rightarrow k+l$ . Es gilt die Bedingung für die Mandelstam-Invarianten  $(\hat{s}, \hat{t}, \hat{u})$   $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0$ , sowie die explizite Relation  $t \leftrightarrow Q^2$ . Dieser Term wird für die weitere Verwertung umgeschrieben. Der Faktor  $N_m$  ist einfach die Anzahl der Endzustände für den Subprozess  $m$  ( $1 \leq m \leq 8$ ), wobei  $i, j$  gegeben ist. Er lautet dann

$$\sigma_h = \sum_m N_m \sum_{i,j}^{(m)} \iiint dx_1 dx_2 dv x_1 f_i(x_1, Q^2) x_2 f_j(x_2, Q^2) \frac{1}{x_1 x_2} \pi M_m^2 \frac{\alpha_s^2(Q^2)}{\hat{s}}$$

mit  $dv = d\hat{t}/\hat{s}$  und die  $\sum_{i,j}^{(m)}$  soll  $i, j$  auf Prozess  $m$  beschränkt bedeuten. Die Mandelstam-Invarianten erfüllen die Relation  $1 + u + v = 0$  mit  $u = \hat{u}/\hat{s}$  und  $v = \hat{t}/\hat{s}$ . Dieser Term muss noch mit der Stufenfunktion multipliziert werden, um den Energiebereich, in dem  $\sigma_h$  gültig sein kann, einzugrenzen. Die Funktion lautet

$$\Theta(x_1 x_2 - a_\perp)$$

mit  $a_\perp = \frac{4p_{T,min}^2}{s}$  und  $s$  ist die totale quadr. Hadronenenergie;  $p_{T,min}$  ist abhängig von der totalen quadr. Energie  $s$  und hat als unteren Wert  $p_{T,min} = 2.5 \text{ GeV}/c$ .

Für die Eventgenerierung ist es günstiger, den Ausdruck in folgende Form zu bringen [38]

$$\sigma_h = \sum_m \iiint dx_1 dx_2 dv g_m h_m = \sum_m \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \hat{h}_m$$

wobei

$$g_m(x_1, x_2, v) = \frac{\pi}{\hat{s}} M_m^2 \frac{1}{(x_1 x_2)^2} \Theta(x_1 x_2 - a)$$

$$h_m(x_1, x_2, v) = \sum_{i,j}^{(m)} x_1 f_i(x_1, Q^2) x_2 f_j(x_2, Q^2) \alpha_s^2(Q^2)$$

sowie

$$\hat{h}_m = A_m h_m$$

mit

$$A_m = \int_a^1 \int_a^1 \int_{-0.5(1+W)}^{-0.5(1-W)} dx_1 dx_2 dv g_m(x_1, x_2, v)$$

und  $W = \sqrt{1 - a/(x_1 x_2)}$ . Für die neuen Variablen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  gelten noch die Umrechnungen

$$d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{g_m(x_1, x_2, v)}{A_m} dx_1 dx_2 dv$$

Hier werden  $x_1, x_2$  bestimmt (aus  $g_m(x_1, x_2, v)$ ) und der Subprozess  $m$ . Vorausgegangen sein muss aber der Eikonalisierungprozess der Wirkungsquerschnitte, der an die Phase nach der Bestimmung von  $\sigma_h$  anschließt (Abschnitt 2.6). Die skalierte Mandelstam-Invariante  $v$  und die  $x$ -Impulse sind gültig im Bereich

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(1+W) &\leq v \leq -\frac{1}{2}(1-W) \\ a &\leq x_1 \leq 1 \\ a &\leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Die Routine PHO\_HARFAC berechnet  $A_m$  (und legt für jedes  $m$  für die gewählten Werte den berechneten Wert  $A_m$  in ein Array HFAC( $m$ ) ab). Das Maximum des Integranden  $\hat{h}_{m,max}$  wird in der Routine PHO\_HARWGX/PHO\_HARWGI berechnet und in einem Array HWGX( $m$ ) abgelegt für den Subprozess  $m$ ; die Summe der „Resolved“-Prozesse wird in HWGX(9) gespeichert. Aus der Funktion  $g_m$  werden die  $x$ -Impulse (Routine PHO\_HARKIN) sowie die Mandelstam-Invarianten bestimmt, um die Matrixelemente des Subprozesses  $m$  auswerten zu können. Die Funktion  $h_m$  wird in der Routine PHO\_HARWGH berechnet (Array HWGH( $m$ )). Der Subprozess  $m$  selbst wird in der Routine PHO\_HARSCA bestimmt über HWGX(9). Aus dem Ausdruck

$$P_m = \frac{\hat{h}_{m,max}}{\sum_m \hat{h}_{m,max}}$$

wird durch Vergleich mit einer Zufallszahl der Subprozess  $m$  ausgewählt, der in diesem Event betrachtet werden soll. Neben der Wahl des Subprozesses  $m$  ist noch die Flavourwahl für die eingehenden und ausgehenden Partonen wichtig. Die in dem Prozess erzeugten Partonen werden mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  mit einem der Flavours  $u, d, s, c$  belegt. Die den Prozess verursachenden Partonen bekommen die Flavours, die mit Hilfe der Funktion PHO\_HARWGH (Produkt zweier Verteilungsfunktionen der Seite 1 und Seite 2) berechnet werden. Zusammenfassend kann dieser Algorithmus zur Bestimmung des harten Wirkungsquerschnittes in fünf Schritte dargelegt werden

- 1) Der Subprozess wird aus dem Ausdruck

$$P_m = \frac{\hat{h}_{m,max}}{\sum_m \hat{h}_{m,max}}$$

gewonnen (PHO\_HARSCA), wobei  $\hat{h}_{m,max}$  im Feld HWGX( $m$ ) gespeichert ist,  $1 \leq m \leq 8$ .

- 2) Die  $x$ -Impulse  $x_{1,2}$  und  $v$  werden anhand der Funktion  $g_m dx_1 dx_2 dv$  berechnet (in der Funktion PHO\_HARKIN).
- 3) Das Gewicht  $\hat{h}_m(x_1, x_2, v)$  muss berechnet werden (die Funktion PHO\_HARWGH speichert im Array HWGH( $m$ ) diese Werte).

- 4) Der Event wird abgelehnt, falls eine Zahl  $R = \hat{h}_m / \hat{h}_{m,max} < \xi$ ,  $\xi \in (0 \dots 1)$ .
- 5) Die Flavours für die an diesem Prozess beteiligten Partonen werden bestimmt. Für „Initial State“-Partonen geschieht dies mit Hilfe der Funktion PHO\_HARWGH; diese führt ein Produkt der beiden beteiligten Verteilungsfunktionen (multipliziert mit einer Zufallszahl) durch und testet, für einen gegebenen Prozess  $m$  und gegebenes  $x_1, x_2, Q^2$ , wann dieses Produkt kleiner wird als eine neue Auswertung des Produktes zweier Verteilungsfunktionen (die zugleich über alle Flavours summiert wird).

Mit diesem Algorithmus ist es möglich, den Wirkungsquerschnitt über

$$\sigma_{h,MC} = \sum_m \sigma_{h,MC}^m$$

mit

$$\sigma_{h,MC}^m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{h}_m$$

zu berechnen.  $N$  ist die totale Anzahl der Events („Accepted“ als auch „Rejected“).

Der totale harte Wirkungsquerschnitt  $\sigma_h$  wird einer Prozedur unterzogen, um die Unitarität des Modells zu gewährleisten (Eikonalisierung) [40, 33, 34]. Der Eikonalisierungsprozess startet mit einem Aufruf der Routine PHO\_PRBDIS (aus PHO\_MCINI heraus, also noch *bevor* die Eventphase beginnt). In dieser Subroutine wird in Abhängigkeit der Prozessart und der Energie tabellarisch die mittlere Anzahl der möglichen Austauschgraphen bestimmt. Die weiteren Aufrufe sind

→ (PHO\_XSECT) → (PHO\_EIKON) → (PHO\_BORNCS)

In dieser Folge findet die Eikonalisierung aller Wirkungsquerschnitte statt. Die Prozedur definiert eine Funktion  $\chi_i(B, s)$  (Eikonal) im Impactparameter-Raum in Abhängigkeit der totalen Schwerpunktsenergie  $s$  in der Form

$$\chi_i(B, s) = \frac{\sigma_i}{8\pi b_i} \exp \left\{ -\frac{B^2}{4b_i} \right\}$$

wobei  $\sigma_i$  für den zu eikonalisierenden Wirkungsquerschnitt steht ( $i = s, h, TP, L$  für „Soft“-, „Hard“-, „Triple Pomeron“ und „Loop Pomeron“-Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt). Die  $b_i$  sind für den Beitrag typische Parameter, definiert in

PHO\_DATINI.

Diese Funktion ist normiert, so dass

$$\sigma_i = \int 2\chi_i(B, s) d^2 B$$

Definiert man nun eine Funktion

$$\sigma(l_c, m_c, n_c, p_c, B, s) = \frac{(2\chi_s)^{l_c}}{l_c!} \frac{(2\chi_h)^{m_c}}{m_c!} \frac{(-2\chi_{TP})^{n_c}}{n_c!} \frac{(-2\chi_L)^{p_c}}{p_c!} \exp\{-2\chi(B, s)\}$$

mit  $l_c, m_c, n_c, p_c$  als Anzahl der „Cut-(Pomeron)Graphen“ und

$$\chi(B, s) = \chi_s(B, s) + \chi_h(B, s) - \chi_{TP}(B, s) - \chi_L(B, s)$$

Die Summe über

$$0 \leq (l_c, m_c, n_c, p_c) < \infty$$

zeigt, dass dieser Wert dann tatsächlich endlich (normiert) ist.

Diese Anzahl wird in der Routine PHO\_SAMPRB bestimmt. Nach Beendigung der Routine PHO\_MCINI wird dann PHO\_SAMPRO aufgerufen; der Rückgabewert dieser Funktion entscheidet dann bei einem Aufruf von PHO\_PARTON, welche Art von Prozess betrachtet werden soll mit Hilfe der eikonalisierten Wirkungsquerschnitte (in PHO\_PRBDIS wird die Wahrscheinlichkeit für eine Anzahl an „Soft/Hard Pomerons“ für ein Event bestimmt (in Abhängigkeit der Schwerpunktsenergie und dem Stoßparameter)). Mögliche Prozesse sind

*Non Diffraktiv*  
*Elastisch*  
*Quasi Elastisch*  
*Diffraktiv (zentral)*  
*Diffraktiv (Seite1/2)*  
*Diffraktiv (Seite1+2)*  
*Resolved+Direct*

An Hand dieser Wahrscheinlichkeit wird, wie in PHO\_SAMPRO, über einen Vergleich mit einer Zufallszahl die Anzahl der „Cut Graphen“ bestimmt. Eine Änderung in einem der Wirkungsquerschnitte wird dann eine erhöhte Zahl an „Cut Graphen“ zur Folge haben für diese Prozessart, so dass für die Erzeugung schwerer Quarks die Addition des pQCD-Wirkungsquerschnittes  $\sigma_{b\bar{b}}$  zu dem bisher generierten harten „Leading Order“-Wirkungsquerschnitt (vor der Eikonalisierung) möglich ist und zu einer im Mittel größeren Anzahl an „Cut Graphen“ („Hard Pomerons“) führen wird. Dass dieses erlaubt ist, sieht man an den Eikonalen

$$\chi_{i=h}(B, s) = \frac{\sigma_h}{8\pi b_h} \exp \left\{ -\frac{B^2}{4b_h} \right\}$$

Eine Korrektur des harten Wirkungsquerschnittes  $\sigma_h$  könnte höchstens eine Änderung des Parameters  $b_h$  bedeuten, der aber unabhängig von  $s$  ist mit [40]  $b_h = b = 3.52 \text{ GeV}^{-2}$ .

Unsere Methode, **schwere Quarks** zu erzeugen, wird durch das Package BASES und SPRING [13, 14] bewerkstelligt. Über BASES wird der totale Wirkungsquerschnitt der schweren Quark-Paare berechnet ( $\sigma_{b\bar{b}}$ ), und über SPRING werden die notwendigen Events generiert, die in einer Datei abgespeichert werden. Nach dem Start von DPMJET III wird mit der neuen Parameterkarte die gesamte Datei in den Speicher gelesen. Da hierbei die „Next to Leading Order“ berücksichtigt werden, sind die Gewichte  $\omega_i = \pm 1$ . Wie in [4] werden Events der Zahl  $N_H$  ( $H$ -Events) und  $N_S$  ( $S$ -Events) erzeugt mit  $N_{tot} = N_H + N_S$  und

$$N_H = N_{tot} \frac{J_H}{J_H + J_S} \quad N_S = N_{tot} \frac{J_S}{J_H + J_S}$$



$J_H$  und  $J_S$  sind die Absolutwerte der Integrale  $I_H$  und  $I_S$  mit  $\sigma_{b\bar{b}} = I_H + I_S$ .  $N_{tot}$  ist die Anzahl der Events, die generiert werden. Dieses ist ohne weiteres im Voraus möglich, da ohne Eikonalisierung die Produktion schwerer Quarks unabhängig vom restlichen Ereignis stattfindet.  $N_{tot}$  ist die einzige Zahl, die vorgegeben werden muss, typischerweise liegt  $N_{tot}$  bei mindestens einigen hunderttausend Events.

Der Output von SPRING ist eine Datei („mrs107.events“), die  $N_{tot}$  Events enthält und die im Anschluss in DPMJET III herein geladen werden. Standardmäßig sind dies 400 Tsd. Events (COMMON Blöcke IMPULS und INFO; alle hinzugefügten Common Blöcke sind in der Datei userplotfix.f definiert). Darin sind die 5 Eventimpulse (plus Labimpulse  $x_1, x_2$ ), die Farbstruktur des Events sowie die Flavours der Partonen zu finden (der Flavorendzustand ist bekannt; der Viererimpuls des  $H$ -Partons kann der Nullvektor sein). Weiterhin ist jeder Event gekennzeichnet als „Event“ oder „Counterevent“. Das Gewicht der Counterevents ist  $\omega_i = -1$ . Teilchen, die über Events mit diesem Gewicht erzeugt werden, dienen lediglich als Korrektur für die entsprechenden Histogramme mit den Gewichten  $\omega_i = +1$ .

Für die Umsetzung der Farbstruktur ist ein Interface geschrieben worden. In dem  $N_c \rightarrow \infty$  Limes ist die PHOJET-Konvention, dass für Gluonen der erste Farbwert positiv (damit der zweite Farbwert negativ) und für Quarks/Antiquarks die zweite Farbe per Konvention auf den Wert Null gesetzt wird. Damit lässt sich der Farboutput aus dem Programm BASES direkt als Farbzuzuweisung unter PHOJET verwenden (die PHOJET-Routinen sind PHO\_SELCOL für Splittingprozesse und PHO\_HARCOL für Matrixelementberechnungen).

Wenn es PHOJET erlaubt werden soll, schwere Quarks zu erzeugen, so ist die Frage, wie die neuen Prozesse ( $H$ - und  $S$ -Events) mit den LO-PHOJET Prozessen zusammen wirken.

Zunächst wird der über BASES erzeugte Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{b\bar{b}}$  im uneikonalisiertem Zustand zu dem vorhandenem totalen harten (LO) Wirkungsquerschnitt addiert (die Datei mit den Wirkungsquerschnitten hat den Namen „mrs107.integrals“; in ihr sind vier Werte zu finden; es sind  $J_H, J_S, I_H, I_S$ ). Das geschieht direkt nach seiner Berechnung in der Routine PHO\_HARMC1.

Das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte ( $\sigma_{LO}$  und  $\sigma_{b\bar{b}}$ ) für eine vorgegebene Schwerpunktsenergie  $\sqrt{S_H}$  ist dann ein Kriterium, wann ein neuer  $b$ -Event geladen werden soll

$$R = \frac{\sigma_{b\bar{b}}}{\sigma_{LO} + \sigma_{b\bar{b}}}$$

Ist eine Zufallszahl  $r \in (0 \dots 1)$  kleiner als  $R$ , so tritt dieser Fall ein, und die Subroutine PHO\_HARSCA lädt *zufällig* eines der Events aus dem Speicher.

Es ist auch möglich, wenn z. B. die Rechenzeit eine Rolle spielt, eine andere Methode zu verwenden. Neben der zufälligen Auswahl der Events aus einer vorgefertigten Liste (SPRING), können auch *alle*  $b$ -Events aus dieser Liste nacheinander in DPMJET III herein zu laden. Dazu wird DPMJET III in eine Endlosschleife versetzt. Es ist dabei möglich, als Abbruchbedingung die Anzahl der möglichen  $b$ -Events festzulegen <sup>7</sup>.

Um DPMJET III/PHOJET anzuweisen, schwere Quarks zu produzieren, wur-

<sup>7</sup>Bsp. für eine zufällige Auswahl auf einem Dual Core 2x2.16 GHz: 2x60Mio Events, coll.Type  $p\bar{p}$ , CM-Energie  $\sqrt{S_H} = 1800$  GeV, ca.202 Tsd.  $b\bar{b}$ -Quark-Paare, ca.27h.

de eine neue Parameterkarte samt Optionen, im Wesentlichen zu Testzwecken, eingeführt <sup>8</sup>. Eine Abweichung in den Ergebnissen bzgl. der  $b$ -Produktion ist innerhalb der drei Optionen nicht auszumachen.

Das Generieren der  $b$ -Events unter SPRING erzeugt fast immer auch einige *misgenerated* Events. Diese Events können unter PHOJET zu Fehlermeldungen der Subroutine PHO\_CHECK führen, die die Einhaltung der Quantenzahlen eventweise beaufsichtigt. PHOJET erlaubt für einen kompletten Lauf 20 solcher Fehler, ohne dass der Run abgebrochen wird. Viele dieser Events werden durch die Subroutine SUMP ausgesondert. Bei 400 Tsd.  $b$ -Events werden meistens zwischen 0 und 5 solcher Events erzeugt, so dass dadurch keine große Gefahr für einen Abbruch des Laufs bestehen kann.

Sollten mehr als die standardmäßigen 400 Tsd. Events nötig sein, so werden auch mehr *misgenerated* Events erzeugt. Die Variable  $m\text{a}\text{t}\text{r}\text{y}$  in der Subroutine RUN\_OF\_SPRING (Datei „mcatnlo\_int.f“) steuert die Anzahl der Versuche, einen *guten* Event zu erzeugen. Momentan ist die Variable auf  $m\text{a}\text{t}\text{r}\text{y}=1000$  gestellt, Standard ist  $m\text{a}\text{t}\text{r}\text{y}=50$ . Die Eventgenerierung dauert durch Hochsetzen dieser Variable natürlich länger.

Für die Eventgenerierung ist durchweg für die Parametrisierung des Hadroneninhaltes die Parton Density Function (PDF) der Gruppe MRST, MRST2001,  $\Lambda = 267$  MeV,  $\alpha_s(M_z) = 0.121$ , 5 „Active Flavours“ (im  $\overline{MS}$ -Renormierungssystem) genommen worden [60] <sup>9</sup>. Die Datei heißt „alf121“. Andere Möglichkeiten sind ebenfalls von dieser Gruppe. Die entsprechenden Dateien heißen „alf119“, „alf117“ und „j121“ (Endungen, wie „\*.dat“, sind zu entfernen). Ein paar Eigenschaften (entnommen aus der Datei „libofpdf.f“, u. a. der totale Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung der  $b$ -Quarks in einer  $p\bar{p}$ -Kollision bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV, sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Schwerpunktsenergie: $\sqrt{s} = 1.8$ TeV, coll. Type: $p\bar{p}$					
Datei	$\sigma_{b\bar{b}}^{NLO}$ [ $\mu\text{b}$ ]	$p_t^{full}$ [GeV/c]	$p_t^{\geq 6 \text{ GeV}/c}$ [GeV/c]	$\Lambda_5$ [GeV]	$\alpha_s(M_z)$
„cteq6m“	CTEQ6M	$46.69 \pm 0.04$	$16.30 \pm 0.02$	0.226	0.118
„alf119“	MRST2001_1	$43.64 \pm 0.04$	$15.71 \pm 0.04$	0.239	0.119
„alf117“	MRST2001_2	$42.69 \pm 0.04$	$15.21 \pm 0.04$	0.214	0.117
„alf121“	MRST2001_3	$44.29 \pm 0.04$	$16.15 \pm 0.02$	0.267	0.121
„j121“	MRST2001_4	$43.64 \pm 0.04$	$15.94 \pm 0.02$	0.267	0.121

Die Fehler entstammen ausschließlich aus dem Programm BASES.

Die Fortran-Dateien sind über den Befehl „g77 -w -fno-automatic -finit-local-zero \*.f -L \$CERNLIB -lpacklib“ kompiliert worden, wobei \$CERNLIB den Pfad zu den Cernlibs enthält, und -lpacklib linkt die Bibliothek „libpacklib.a“ der Cernlibs <sup>10</sup>. In ihr ist z. B. die Plot-Routine HBOOK enthalten. Die Optionen „-fno-automatic“ und „-finit-local-zero“ stellen sicher, dass alle lokalen Variablen ein „save“-Statement bekommen, und dass diese Variablen mit einer binären Null initialisiert werden. Die erste Option sollte angegeben werden, da ansonsten die Auswertung von  $\alpha_s$  in der Datei „libofpdf.f“ fehlschlägt.

<sup>8</sup> Die Erweiterung des Programms DPMJET III/PHOJET ist als „usercode“ hinterlegt und auf Wunsch vom Autor oder dessen Betreuer zu haben.

<sup>9</sup>Der  $b$ -Quarkinhalt wird nach [5] konsequenterweise zu Null gesetzt, damit im Anfangszustand keine  $b$ -Flavours auftauchen.

<sup>10</sup>Kompiliert wurde unter OpenSuse 10.2 und 10.3 mit dem „gcc v4.2.1“ und „gcc v4.2.2“ sowie mit dem Fortran-Compiler „g77 v3.4.6“.

Nach dem Start eines Laufs kann über „grep -i 'Event Nr' Name-der-Output-Datei.txt“ in der Konsole der aktuelle Event abgefragt werden <sup>11</sup>. Das kann hilfreich sein, da die Version von PYTHIA (v6.115) in einigen sehr seltenen Fällen plötzlich eine Vielzahl von „advisory warnings“ abgibt. Das kann sogar zu einem Abbruch des Laufs führen (normalerweise passiert dieser Umstand innerhalb der ersten Millionen Events) <sup>1213</sup>.

Um den Zerfall der *B*-Mesonen auszustellen, muss in der Subroutine MYDECAY die „goto 800“ Anweisung unkommentiert werden, und in der Subroutine DT\_EVTFRG sollte die Variable auf „onoff=.false.“ für diese Mesonen stehen. Weiterhin muss in der Subroutine PLOMBR die „goto 666“ Anweisung unkommentiert sein. Für eine Rekonstruktion (Kapitel 10) muss der umgekehrte Weg beschriftet werden. Vieles steht auch noch einmal explizit im Quelltext.

*Hinweis:* An BASES/SPRING sind, neben dem Subtraktionsterm, noch einige kleinere Modifikationen vorgenommen, z. B. mussten die beiden eingehenden Subprozessimpulse erst *masselos* gemacht werden, da HERWIG einer anderen Konvention folgt. Alle Änderungen oder Zusätze sind aber im Quelltext zu finden und sind mit meinem Namen referenziert.

Die von mir verfassten Bestandteile innerhalb DPMJET III/PHOJET und BASES/SPRING können beliebig verwendet und modifiziert werden, solange Änderungen als nicht von mir kenntlich gemacht werden.

---

<sup>11</sup>Die Ausgabe gibt die Eventnummer zurück, bei dem ein schweres Quark-Paar aus der Liste entnommen wurde und ist somit nicht völlig aktuell. Bis zur ersten Million Events werden diese regelmässig ausgegeben, danach nur noch sporadisch, etwa drei bis fünf mal pro 20000 Events; nach dem Start kann das Beschreiben der Datei etwas dauern, da Linux zuerst die Daten in einen Buffer schreibt, und danach in die Output-Datei; mit dem Befehl „sync“ kann dieser Buffer sofort geleert werden.

<sup>12</sup>Mit höheren Versionen von PYTHIA (z. B. PYTHIA 6.2) scheint das nicht der Fall zu sein; möchte man eine höhere Version von PYTHIA mit DPMJET III linken als die Version 6.115 (auf die sich alle präsentierten Ergebnisse beziehen), so müssen in allen Common Blöcken COMMON/PYDAT3/ die Feldgrenzen von 4000 auf 8000 erhöht werden (siehe Subroutine MYDECAY). Weiterhin sollten dafür die Dummy-Subroutinen „PDFSET“, „STRUCTM“ und „STRUCTP“ in der Datei „dpmjet-xyz3.0.f“ kommentiert werden.

<sup>13</sup>Über „grep -i 'produced b of kind' Name-der-Output-Datei.txt“ und „grep -i 'Bs from' Name-der-Output-Datei.txt“ die Gesamtanzahl und die Zahl der in einem positiven/negativen Event produzierten *B*-Mesonen erfragt werden (wenn der Zerfall ausgestellt ist)

## 9 Ergebnisse erzielt durch DPMJET III

DPMJET/PHOJET (inkl. PYTHIA) ist ein Programmpaket, das experimentelle Daten zu verschiedenen Streuvorgängen erfolgreich beschreibt. Dazu sein auf die wichtigen Arbeiten der letzten Jahre verwiesen [61]–[65] und [66]–[71]. Speziell PHOJET betreffende Arbeiten sind in [59]–[79] zu finden.

In dem folgenden Abschnitt 9.1 und in dem darauf folgenden Kapitel 10 werden die Ergebnisse des Transversalimpulsspektrums gezeigt, die durch die Implementierung der  $b$ -Quarks in PHOJET unter Beachtung des neuen Subtraktionsterms bestimmt wurden (Kapitel 5, insbesondere ab Abschnitt 5.4 und 5.5). Dieses beinhaltet (Abschnitt 9.1) einen Vergleich mit den exp. Daten, die im Fermilab und am Jefferson Lab gewonnen wurden (CDF-Run-I- und Run-II-Daten). Die Daten aus Run-Ia und Run-Ib ( $\sqrt{s} = 1.8$  TeV,  $p\bar{p}$ ) werden nicht herangezogen. Die Vorhersagen des Transversalimpulsspektrums für eine LHCb-Konfiguration wird sich in Kapitel 10 finden.

### 9.1 Transversalimpulsverteilung von „Bottom“-Mesonen im Vergleich mit den Fermilab-Daten

Wir wenden uns jetzt der  $B$ -Hadronenproduktion in einen Energiebereich zu, in dem experimentelle Daten vorhanden sind. Zunächst werden hier Grafiken zur  $B$ -Mesonenproduktion gegen ihr Transversalimpulsspektrum aufgeführt, die noch mit dem voreingestellten Subtraktionsterm produziert wurden (für das Simulationsprogramm HERWIG, Abbildungen 29 und 30). Danach folgt die Abbildung 32, in der bei den im Voraus generierten  $b$ -Events der Subtraktionsterm für das Programm DPMJET III angepasst wurde. Dieser Subtraktionsterm beseitigt, wie in Kapitel 4 und 6 gesehen, das „Double Counting“-Problem (bis NLO) und stellt durch die  $b$ -Quark-Voraus-Produktion dazu das richtige Verhältnis dieser Quarks her bzgl. ihrer Eventgewichte  $\omega_i = \pm 1$  ( $i = \text{Eventnummer}$ ).

Die Abbildungen 29–32 stellen den differentiellen  $p_t$ -Verlauf von  $B^\pm$ - und  $B^0, \bar{B}^0$ -Mesonen für eine  $p\bar{p}$ -Reaktion bei einer Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV dar (die Einträge wurden für diese Abbildungen gemittelt). Aufgetragen wurden die Einträge unter den Bedingungen für Rapiditäten  $|y| < 1$  und  $p_t \geq 6$  GeV/c, wie sie in [80] zu finden sind. Aus diesem Artikel wurden auch die experimentellen Daten entnommen, die in den Grafiken zum Vergleich übertragen wurden.

In den beiden Abbildungen 29 und 30 ist zunächst der voreingestellte HERWIG-Subtraktionsterm benutzt worden. Die Einträge repräsentieren die mittlere „Bottom“-Produktion bis NLO (Abbildung 29, grüne Grafik) und einschließlich LO (Abbildung 30, blaue Grafik). Für die jeweils frei wählbare Renormierungs- und Faktorisierungsskala gilt hier  $\mu_R = \mu_F = \mu_0 = \sqrt{m_b^2 + p_t^2}$ . Wie zu Beginn des Kapitels 5 erwähnt, verbleibt  $\mu_0$  hier aber der Einfachheit halber in dieser Einstellung, obwohl das Programm PHOJET mit masselosen partonischen Anfangszuständen arbeitet, und deswegen konsequenterweise  $\mu_0^2 = p_t^2$  zu setzen wäre. Es treten in den Grafiken keine Auffälligkeiten auf hinsichtlich dieser Einstellung. Die NLO-Grafik liegt unter diesen Bedingungen am unteren Ende des theoretischen Bandes in Figur 2 aus [80]. Es wurden keine Manipulationen („Tuning“) an PYTHIA versucht oder durchgeführt, die zu einer veränderten Anzahl an fragmentierten  $B$ -Mesonen führen könnten. Die „Standardeinstellungen“ führen im Allgemeinen, wie in Abschnitt vorher gesehen, zu guten Ergebnissen.

Es ist bekannt, dass die gemessene „Bottom“-Produktion die einfache stö-

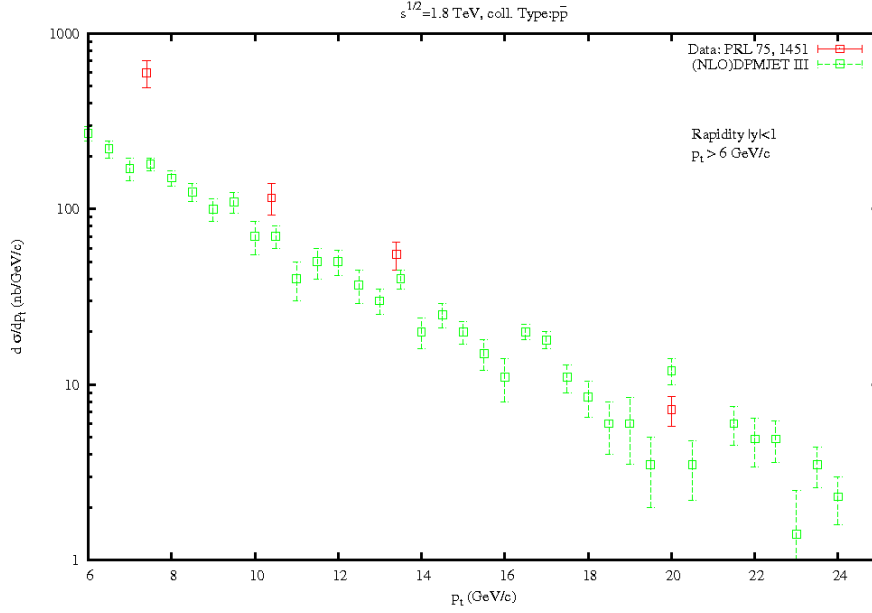


Abbildung 29: Mittlere  $B$ -Mesonenproduktion ( $B^\pm, B^0, \bar{B}^0$ ) - differentieller Wirkungsquerschnitt bis einschließlich NLO (grüne Grafik); für die Skalen  $\mu_R$  und  $\mu_F$  gelten  $\mu_R = \mu_F = \mu_0$ ; der Subtraktionsterm ist angepasst für das Programm **HERWIG**. Die roten Einträge sind aus [80] entnommen.

rungstheoretischen Vorhersagen deutlich überschreiten. Diese Vorhersagen befinden sich, wie oben erwähnt, allerdings noch im Bereich einer systematisch theoretischen Unsicherheit [81, 82, 83, 84].

Zur Anpassung der „Monte Carlo“-Daten an die experimentellen Daten können daher die frei wählbaren Renormierungs- und Faktorisierungsskalen herangezogen werden. Für die restlichen Abbildungen werden die Faktorisierungsskala  $\mu_F^2$  dazu mit dem Wert 25 multipliziert und die Renormierungsskala  $\mu_R^2$  durch den Wert 75 dividiert. Die Werte sehen auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich aus<sup>14</sup>, siehe auch [81, 83], aber die Freiheit, diese Skalen wählen zu dürfen, legitimiert diesen Schritt. Die Abbildungen 31 und 32 zeigen das Ergebnis dieser Änderung für die Programme HERWIG und DPMJET III angepassten Subtraktionsterme respektive.

Der Effekt,  $\mu_R$  eventweise kleiner zu wählen, besteht darin, dass die Kopplungskonstante  $\alpha_s(Q^2)$  zu größeren Werten rutscht (siehe z. B. Abbildungen 31 und 32 als Vergleich zu Abbildung 29 und Abbildung 6, Abschnitt 2.5).

Ein Wirkungsquerschnitt proportional zu einer Potenz von  $\alpha_s$  wird dadurch größer, vor allem bei kleineren Transversalimpulsen, während bei größeren Impulsen dieser zusätzliche Anteil nicht (oder kaum) ins Gewicht fallen wird (das diese Annahme *so* nicht für alle Schwerpunktsenergien völlig zutrifft, wird man in Kapitel 10 sehen). Die Wirkung, die eine Erhöhung der Faktorisierungsskala

<sup>14</sup>In der Literatur werden die Renormierungs- und Faktorisierungsskala meist innerhalb des Intervalls  $\frac{\mu_0}{2} \leq \mu_R = \mu_F \leq 2\mu_0$  gewählt; die genommenen Werte sind aber in der gleichen Größenordnung.

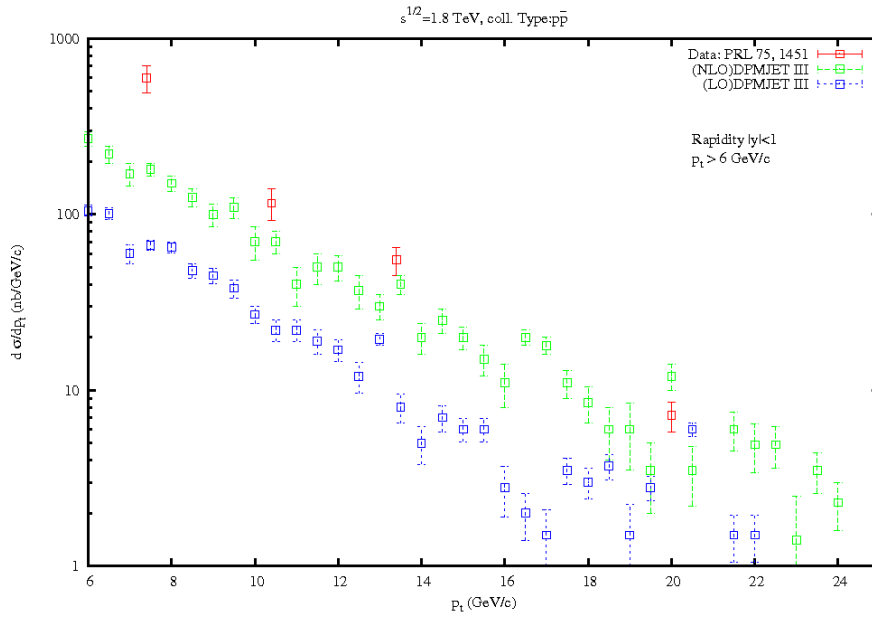


Abbildung 30: Mittlere  $B$ -Mesonenproduktion ( $B^\pm, B^0, \bar{B}^0$ ) - differentieller  $p_t$ -Wirkungsquerschnitt bis einschließlich NLO (grüne Grafik), aufgeführt ist auch der differentielle Wirkungsquerschnitt zur „Born“-Ordnung (blaue Grafik), es gilt  $\mu_R = \mu_F = \mu_0$ ; der Subtraktionsterm ist angepasst für das Programm **HERWIG**. Die exp. Datenpunkte, hier rot eingefärbt, sind aus [80] entnommen.

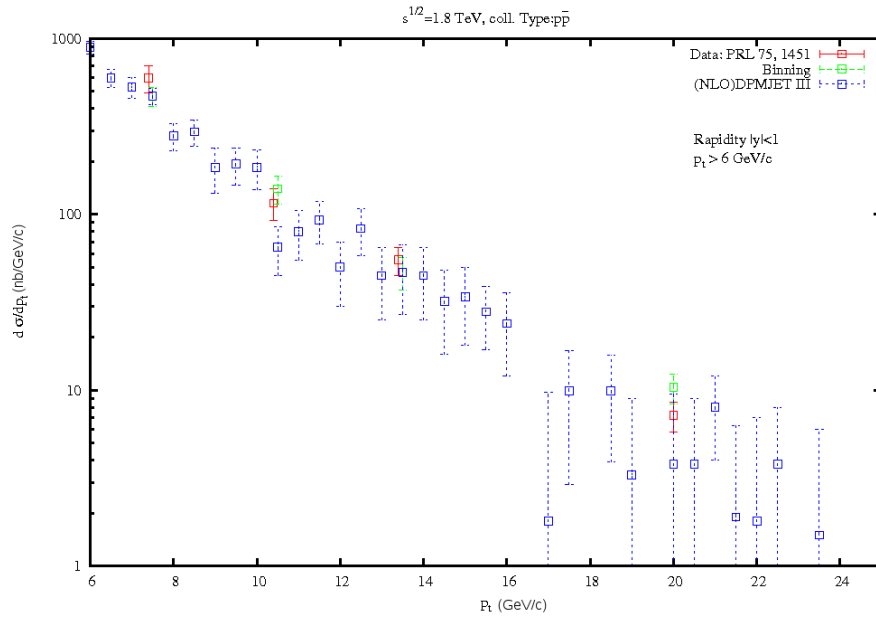


Abbildung 31: Mittlere  $B$ -Mesonenproduktion ( $B^\pm, B^0, \bar{B}^0$ ) - aufgetragen ist auch hier der differentielle  $p_t$ -Wirkungsquerschnitt (blaue Grafik); die Skalen  $\mu_F$  und  $\mu_R$  sind in dieser Grafik wie im Text angegeben variiert worden, siehe Seite 133; der Subtraktionsterm ist angepasst für das Programm **HERWIG**. Die roten (exp.) Datenpunkte sind erneut aus [80]. Die grünen Einträge entspricht einer einfachen Mittelwertbildung der blauen Einträge. Die  $p_t$ -Intervalle sind: (6.0-8.5), (9.0-11.5), (12.0-14.5), (15.0-25.0) GeV/c.

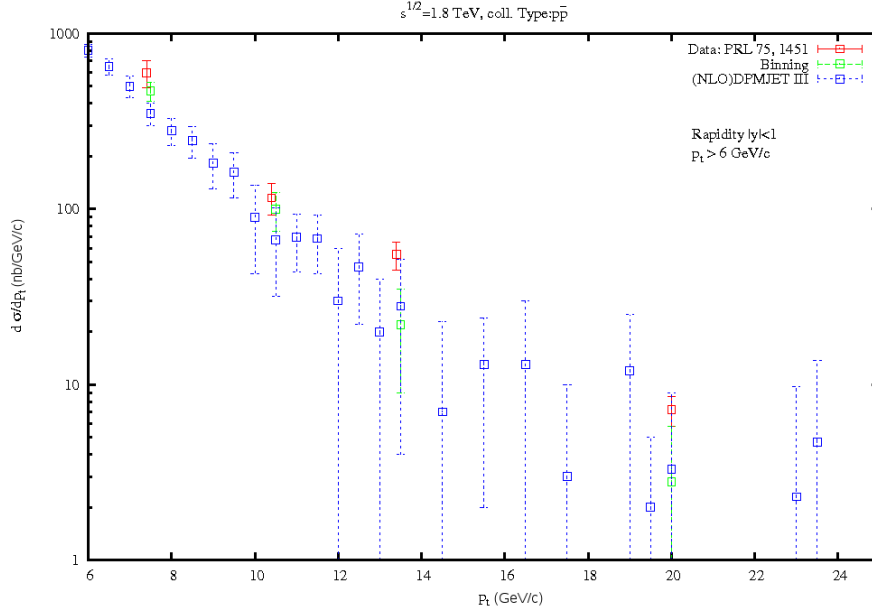


Abbildung 32: Mittlere  $B$ -Mesonenproduktion ( $B^\pm, B^0, \bar{B}^0$ ) - aufgetragen ist in dieser Abbildung der differentieller  $p_t$ -Wirkungsquerschnitt bis einschließlich NLO (blaue Grafik); die Skalen  $\mu_F, \mu_R$  wurden wie im Text angegeben variiert, siehe Seite 133; der Subtraktionsterm ist angepasst für das Programm **DPMJET III**. Die roten (exp.) Datenpunkte sind wieder aus [80] entnommen. Die grünen Einträge entsprechen wieder einer einfachen Mittelwertbildung der blauen Einträge. Die  $p_t$ -Intervalle sind: (6.0-8.5), (9.0-11.5), (12.0-14.5), (15.0-25.0) GeV/c.

$\mu_F$  beinhaltet, besteht in der Erhöhung in für das „virtuelle“ Photon (der  $DIS$ -Prozesse) *sichtbare* Spektrum des Partoneninhalts des Hadrons. Die Folge der Skalenveränderung ist, das (im Wesentlichen) mehr Gluonen *aufgelöst* werden (siehe Abbildungen 7,8, Abschnitt 2.1), und natürlich auch mehr Quarks- und Antiquarks, wobei im Verhältnis die Gluonen bei größeren  $Q$  (und kleineren  $x$ ) dominieren. Insgesamt führt also auch diese Manipulation zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnittes.

Abbildung 32 zeigt die Einträge, die durch DPMJET III erzeugt wurden, mit dem für dieses Programm angepassten Subtraktionsterm. Ansonsten ist im Vergleich zu oben die Konfiguration gleich geblieben.

Der  $p_t$ -Verlauf ist für moderate Werte wesentlich *glatter* als mit dem vorherigen Subtraktionsterm. Dafür sind aber für  $p_t > 14$  GeV/c die Werte stärker ausgedünnt. Das kommt daher, dass mit dem neuen Subtraktionsterm etwas mehr negative Events generiert werden<sup>15</sup>, die eine Korrektur darstellen. Abhilfe könnte sicher eine erhöhte Eventanzahl bieten (mit beiden Subtraktionstermen sind etwas unter 500 Mio. Events generiert worden).

<sup>15</sup>Die Anzahl der negativen Event variiert mit den gewählten Skalenwerten  $\mu_R, \mu_F$ . Wie man in Abb. 33-35 sehen kann, macht es natürlich keinen Sinn mehr Events zu generieren, wenn der Anteil aller erzeugten negativen  $b$ -Quark-Events nahe bei 50 % liegt.



Eine Alternative wäre, den Transversalimpuls  $p_t$  der  $b$ -Quarks nach unten zu begrenzen, z. B. auf min. 5 GeV/c. Mit dieser Limitierung ist es möglich, den Anteil negativer Events auf den Wert abzusenken, der bei der Benutzung des HERWIG-Subtraktionsterms auftaucht (dort sind typischerweise 25 %-33 % der Events negativ (sinkend mit einer Erhöhung der Schwerpunktsenergie, siehe weiter unten)). Der Nachteil dieser Einstellung ist, dass nun weniger  $B$ -Hadronen erzeugt werden, da  $\sigma_{tot}$  kleiner ist. Gerade dieser moderate  $p_t$ -Bereich enthält den größten Anteil an  $b$ -Quarks. Das lässt sich aber durch mehr Events kompensieren, wobei *mehr* in diesem Zusammenhang heißt, das etwa ein Faktor

$$\frac{\sigma_{tot}^{full\ p_t}}{\sigma_{tot}^{p_t > 5\ GeV/c^2}}$$

mehr an Events generiert werden müssen.

Im ersteren Fall dagegen wird mit dem HERWIG-Subtraktionsterm eine relative Anzahl von etwa 0.40 (=0.70 (*Plus-b*-Quark-Events) - 0.30 (*Minus-b*-Quark-Events)) *echte* Events erzeugt, mit dem DPMJET III-Subtraktionsterm dagegen etwa 0.31 (=0.65 - 0.34). Damit müssten  $\frac{0.4}{0.31} \simeq 1.29$  mal mehr Events erzeugt werden, um auf eine ähnliche „Statistik“ zu kommen, also etwa 645 Mio. Günstiger ist also, im Hinblick auf die Statistik, die letztere Möglichkeit.

Da der erreichte Fehler etwa dem der experimentellen Daten entspricht wurde beides nicht weiter verfolgt. Positiv ist auch hier, dass bei höheren Schwerpunktsenergien die Anzahl der durch den DPMJET III-Subtraktionsterm produzierten *Minus*-Events zurückgeht und bei  $\sqrt{s} = 14$  TeV schon bei etwa 31 % liegen, anstatt bei über 32 %, wie im Beispiel vorher, siehe dazu die Abbildung 33-35. In ihnen wird der energieabhängige Verlauf der erzeugten negativen Events aufgezeigt, in Abbildung 33 und Abbildung 34 für HERWIG- und DPMJET III-Subtraktionsterm, in Abbildung 35 ein Vergleich dazu. Der DPMJET III-Subtraktionsterm produziert durchweg etwas mehr an negativen Event-Gewichten. Wie für die Eventgenerierung mit dem HERWIG-Subtraktionsterm senkt sich aber auch unter DPMJET III der Anteil der negativen Event-Gewichte zu höheren Schwerpunktsenergien deutlich ab. Der im Voraus generierte harte Wirkungsquerschnitt (bis NLO) ist für beide Programme natürlich gleich.

Die Suche nach einem geeigneteren  $\zeta$  (Abschnitt 3.3) führt zu keiner Verbesserung. Über dem gesamten Bereich  $\zeta \in (0 \dots 1)$  bleibt die Anzahl der negativen Events innerhalb von 1 % stabil.

Als nächstes werden die experimentellen CDF-Run-II-Daten verglichen, wie sie in [85] präsentiert werden. Für die Abbildungen 36 und 37 wurden etwa 500 Mio. Events generiert. Die beiden danach folgenden Abbildungen, Abb. 38 und Abb. 40, zeigen die gleiche Datenlage erneut, bis auf den Unterschied, dass für Transversalimpulse größer als 14.5 GeV/c (im Prinzip ist dieser Wert etwas willkürlich) ca. 50 %<sup>16</sup> der Einträge der positiven Events eines Laufs genommen wurde, um einen möglichen Ausgleich zu schaffen wg. der negativen Events in einem *normalen* Lauf<sup>17</sup> mit geringer Eventanzahl. Dieses ließe sich auch ganz

<sup>16</sup>Diese Zahl ist abhängig davon, wie das Originalverhältnis der Einträge unter HBOOK aussieht. Die Anzahl der Einträge ist dort ablesbar für Events mit positiver als auch negativer Signatur.

<sup>17</sup>Ein herkömmlicher Lauf produziert ca. 66 % Events mit positiver *und* etwa 34 % Events

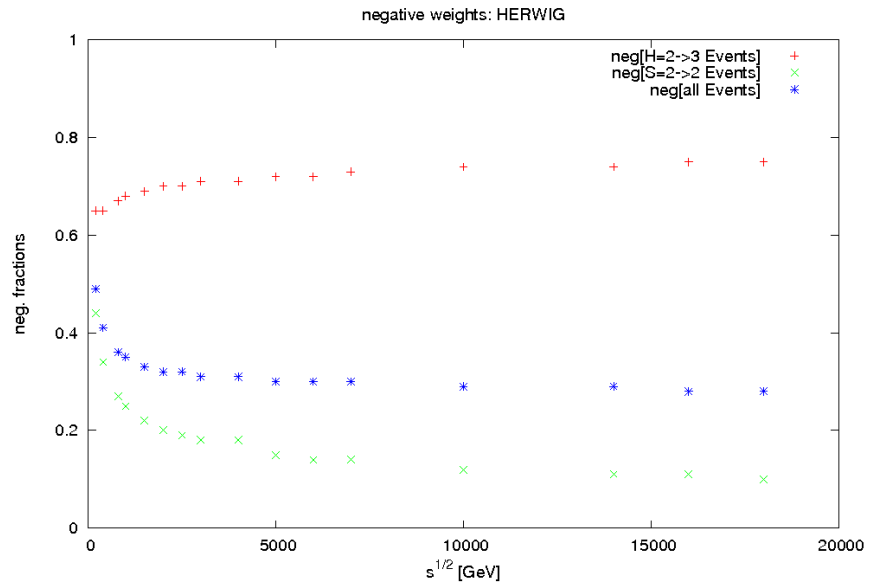


Abbildung 33: Anteil der negativen Gewichte produziert mit dem **HERWIG**-Subtraktionsterm.

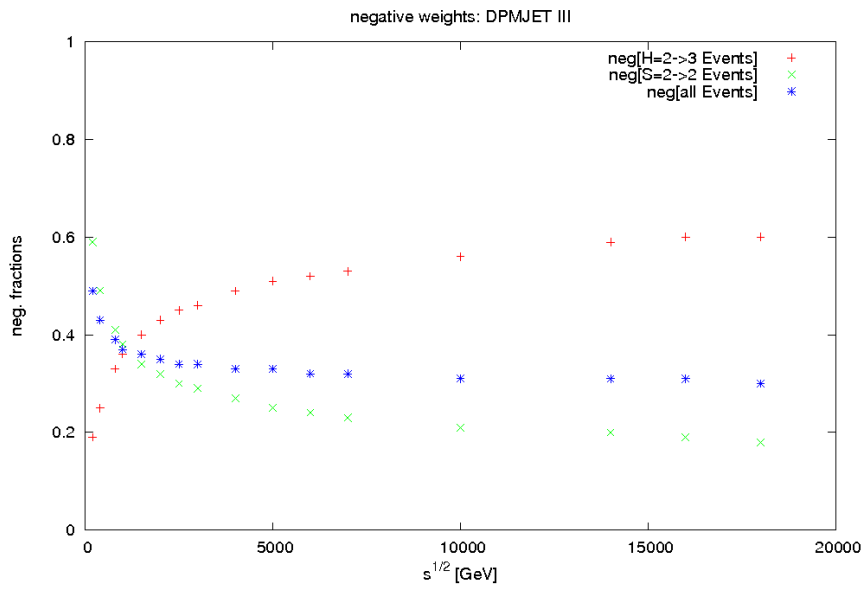


Abbildung 34: Anteil der negativen Gewichte produziert mit dem **DPMJET III**-Subtraktionsterm.

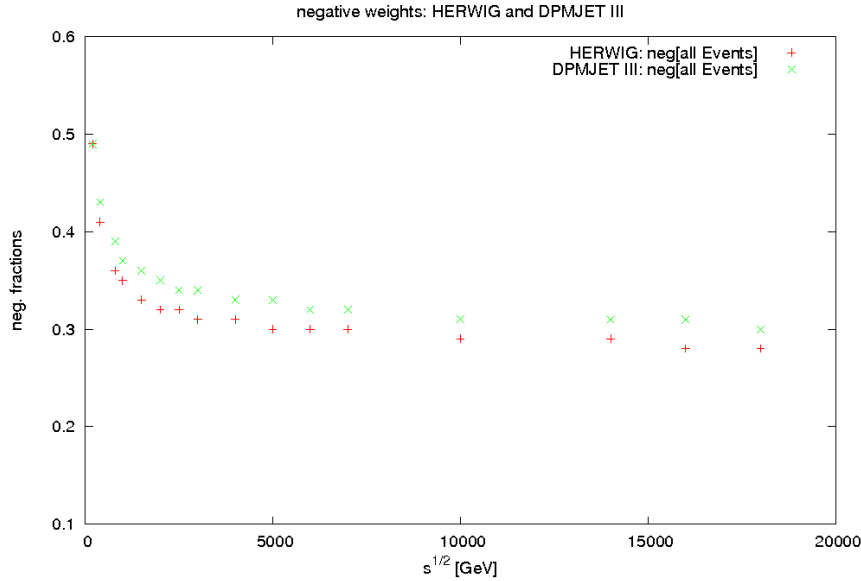


Abbildung 35: Vergleich der negativen Gewichte („all“) produziert durch die beiden Subtraktionsterme; **DPMJET III** produziert etwas mehr an negativen Gewichten.

umgehen, wenn genügend Events produziert werden ( $\# > 0.8 - 1$  Mrd.). Für kürzere Laufzeiten empfiehlt sich aber diese Methode, denn es gibt keinen Unterschied zwischen den Events mit positiven und negativen Vorzeichen<sup>18</sup>.

Schließlich werden in den Abbildungen 39 und 41 die Einträge in den gewählten  $p_t$ -Bereichen<sup>19</sup> zusammengefasst („Binning“), so wie es die assoziierten Abbildungen 38 und 40 vorgeben<sup>20</sup>. Der jeweils letzte Binning-Eintrag besteht nur aus positiven Events, siehe auch die Bildunterschriften in den Abb. 38, 40.

Beide Figuren beschreiben mit dieser Skaleneinstellung<sup>21</sup> recht gut die Run II-Daten, wie sie von der CDF-Kollaboration herausgegeben wurden [85].

In der ersten Konfiguration ( $\sqrt{s} = 1.8$  TeV, coll. Type:  $p\bar{p}$ ) konnten die Daten mit beiden Subtraktionstermen (sowie einer Skalenanpassung) recht gut beschrieben werden. Für höhere Transversalimpulse (ab ca.  $p_t > 14$  GeV/c) zeigen sich einige Lücken, wenn der Subtraktionsterm für DPMJET III angepasst ist. Aber selbst damit können die Daten durchaus adäquat beschrieben werden („Binning“, grüne Einträge in Abbildung 32). Im Prinzip gilt das Gleiche für Abbildung 31, also wenn der Subtraktionsterm für das Programm HERWIG

mit negativen Signatur (siehe auch Abb. 33-35, da diese Zahl abhängig ist von der Schwerpunktsenergie.). Wenn für hohe Transversalimpulse wenige Einträge vorhanden sind, schmälern die Events mit neg. Signatur die Statistik für diesen Bereich. Das kann soweit gehen, dass in diesem  $p_t$ -Bereich keine Aussage getroffen werden kann. Deswegen wird zu diesem „Trick“ gegriffen in der Hoffnung, für Läufe mit einer kleineren Eventanzahl trotzdem hinreichend gute Aussage treffen zu können.

<sup>18</sup>Bezogen auf ihrem Dominanzbereich.

<sup>19</sup>Diese liegen bei (6 – 8.5), (9 – 11.5), (12 – 14.5) und (15 – 25) GeV/c.

<sup>20</sup>Für diese Abbildungen wurde das „Binning“ hauptsächlich deswegen durchgeführt, um die statistischen Fehlerbalken zu reduzieren.

<sup>21</sup> $\mu_R^2$  wurde durch den Faktor 75 geteilt,  $\mu_F^2$  wurde mit dem Faktor 25 multipliziert.

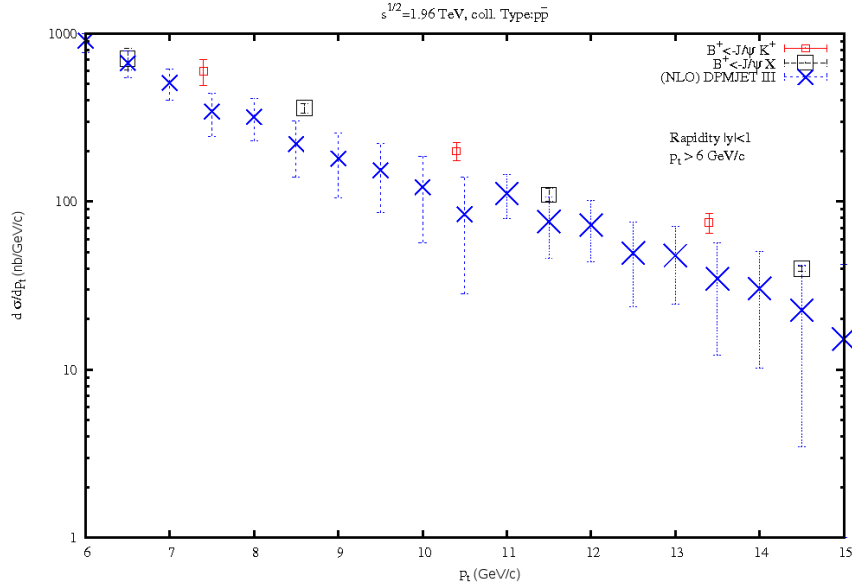


Abbildung 36:  $B^+$ -Mesonenproduktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV, zunächst in dem  $p_t$ -Bereich von 6 – 15 GeV/c. Die experimentellen Daten stammen aus den Rekonstruktionen, so wie sie in der Legende angegeben sind. Entnommen sind sie aus [85], siehe dazu auch [83]. Der Subtraktionsterm ist für **DPMJET III** angepasst. Typischerweise ist auch hier wieder der *glattere* Verlauf für moderate Transversalimpulse zu sehen. Für höhere Impulse hingegen sorgen die negativen Event-Beiträge für eine etwas schlechtere Beschreibung.

angepasst ist. Auch hier zeigt das „Binning“ gute Resultate. Die zweite Konfiguration zu einer höheren Schwerpunktsenergie ( $\sqrt{s} = 1.96$  TeV) liefert ein ähnliches Bild ab. Mit beiden Subtraktionstermen konnte eine gute Übereinstimmung erreicht werden. Um die Schwierigkeiten für die höheren Transversalimpulse etwas zu dämpfen, wurde hier ein Graph zusammengesetzt („Komposition“) aus mehreren verschiedenen Datensätzen (die aber zum gleichen Lauf gehörten). Diese sind in den beiden Abbildungen als grüne Einträge kenntlich gemacht und sind, wenn zu wenige Datenpunkte aus einem Lauf (die aus positiven *und* negativen Events bestehen) vorhanden sind, gut, um diesen  $p_t$ -Bereich zu beschreiben. Sie bestehen lediglich aus Events mit positiver Signatur.

In [86] findet sich ein umfassendes Review zu diesem Thema. Dort werden nicht nur experimentelle Daten vom Fermilab präsentiert, sondern auch Daten etlicher anderer Institutionen. Ein kleiner Nachteil in [86] besteht darin, dass die Daten mit LO-Voraussagen verglichen werden (inkl. K-Faktoren).

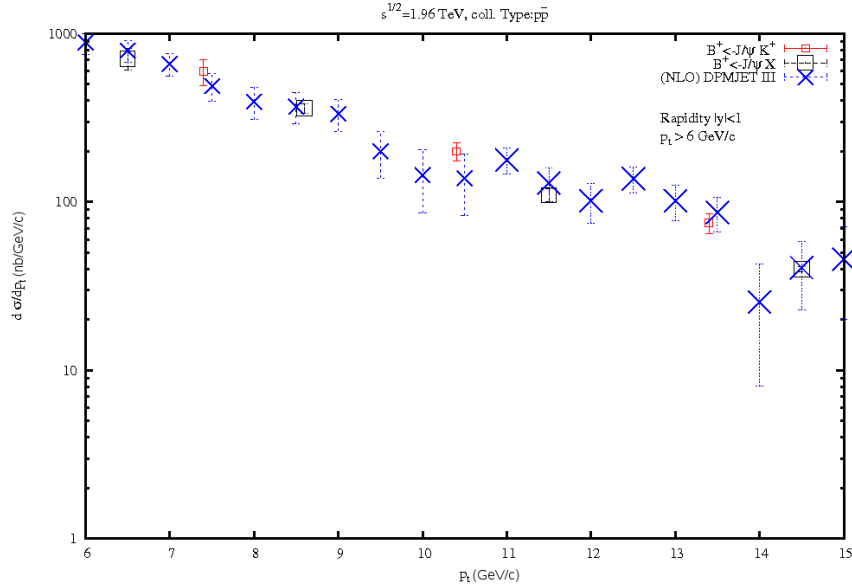


Abbildung 37:  $B^+$ -Mesonenproduktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ , zunächst in dem  $p_t$ -Bereich von  $6 - 15 \text{ GeV}/c$ . Die experimentellen Daten stammen aus den Rekonstruktionen, so wie sie in der Legende angegeben sind. Entnommen sind sie wieder aus [85]. Der Subtraktionsterm ist für **HERWIG** angepasst. Der Verlauf ist insgesamt wieder *unruhiger* im Vergleich zur vorherigen Abbildung (bezogen auf den gleichen  $p_t$ -Bereich von etwa  $6 - 15 \text{ GeV}/c$ ), hat aber dafür den Vorteil, wegen der etwas geringeren produzierten negativen Beiträge, für höhere Transversalimpulse besser mit den experimentellen Daten übereinzustimmen (hier nicht aufgeführt).

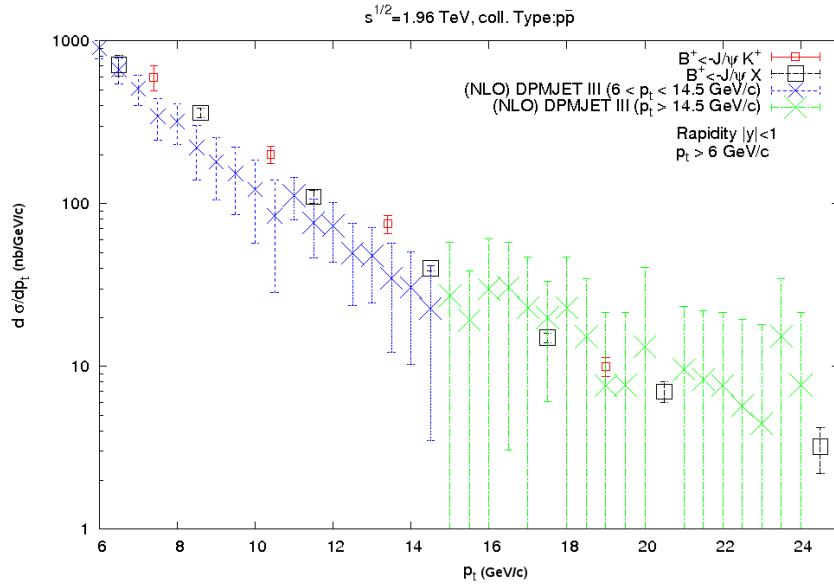


Abbildung 38: „Komposition“ einer  $B^+$ -Mesonenproduktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV. Die experimentellen Daten stammen aus den Rekonstruktionen, so wie sie in der Legende angegeben sind. Entnommen sind sie wieder aus [85]. Der Subtraktionsterm ist für **DPMJET III** angepasst. Für  $p_t > 14.5$  GeV/c wurden ca. 50% der Einträge der positiven Events genommen wegen der besseren Statistik, siehe dazu Seite 137, unten. Die etwas größeren (grünen) Fehlerbalken stammen daher, dass nur etwa ein Drittel der positiven Events des kompletten Laufs für diese Abbildung verwendet werden konnten. Die grünen Einträge beschreiben aber deutlich besser den fraglichen  $p_t$ -Bereich, siehe dazu Abbildung 36. Es wurden etwas zu wenige Events generiert (die negativen Events *ziehen* hierbei die positiven Events zu weit nach unten), deswegen erscheint zwischen den blauen und den grünen Einträgen ein kleiner „Knick“.

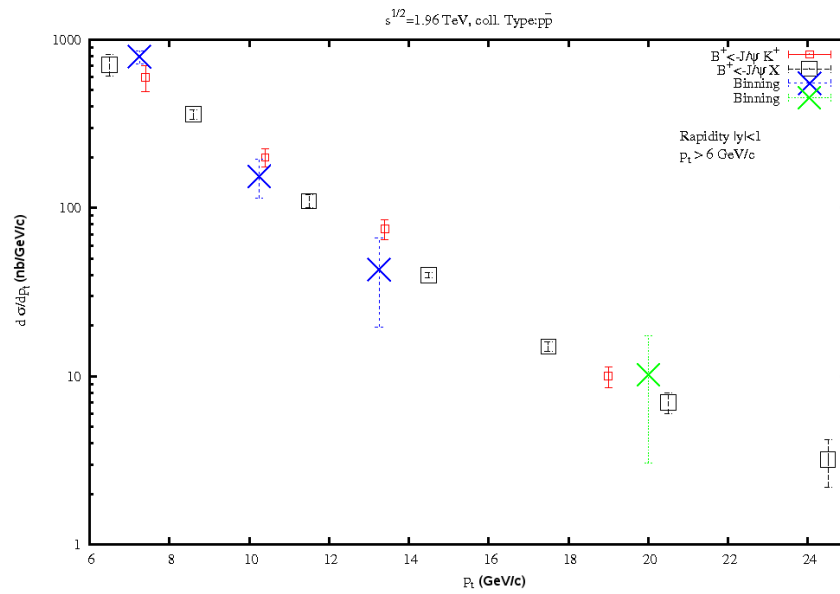


Abbildung 39: „Binning“-Grafik für eine  $B^+$ -Mesonenproduktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ . Die Konfiguration ist zu der vorherigen Abbildung 38 gleich geblieben. Die  $p_t$ -Intervalle sind wie gehabt. Der erste und der letzte Wert liegen etwas über den Daten, da vermutlich die Skalen (siehe Seite 133) ein klein wenig zu hoch gewählt sind. Dass die beiden mittleren Einträge „durchsacken“ liegt an der etwas geringen Eventanzahl.

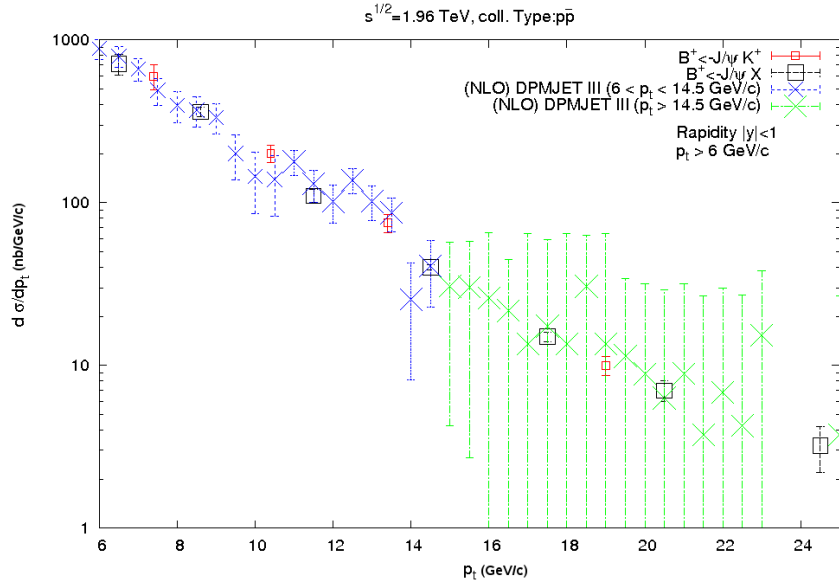


Abbildung 40: „Komposition“ einer  $B^+$ -Mesonenproduktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV. Die experimentellen Daten stammen aus den Rekonstruktionen, so wie sie in der Legende angegeben sind. Entnommen sind sie wieder aus [85]. Der Subtraktionsterm ist für **HERWIG** angepasst. Für  $p_t > 14.5$  GeV/c wurden ca. 50% der Einträge der positiven Events genommen wegen der besseren Statistik, siehe auch hier dazu Seite 137, unten. Die größeren (grünen) Fehlerbalken stammen daher, dass nur ca. ein Drittel der positiven Events des kompletten Laufs für diese Abbildung verwendet werden konnten. Auch hier zeigt sich wieder eine kleine Lücke bei  $p_t > 23$  GeV/c wg. der etwas zu kleinen Eventanzahl. Die grünen Einträge scheinen auch hier unter diesen Umständen besser die exp. Daten zu beschreiben, siehe Abbildung 37.



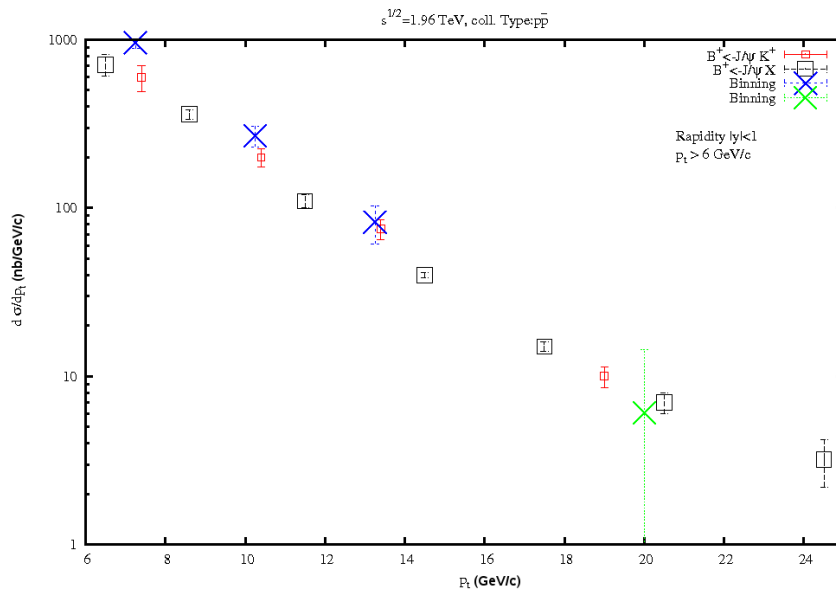


Abbildung 41: „Binning“-Grafik für eine  $B^+$ -Mesonenproduktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ . Die Konfiguration ist zu der vorherigen Abbildung 40 gleich geblieben. Die  $p_t$ -Intervalle sind wie gehabt. Die ersten drei Einträge sind etwas zu hoch, dagegen scheint der letzte (grüne) Eintrag zu niedrig. Im Vergleich mit dem für **DPMJET III** angepassten Subtraktionsterm erscheint die „Steigung“ des „Binning“-Graphen etwas zu steil.

## 10 Voraussagen für das LHC

Für die allgemeinen Vorhersagen von DPMJET III für das LHC sei auf die CERN Workshop Präsentation für das LHC verwiesen [66, 67]. Im Rahmen dieser Arbeit interessiert nur die „Bottom“-Produktion.

### 10.1 Vorhersagen für LHCb - Transversalimpulsverteilung von „Bottom“-Mesonen

In Abschnitt 9.1 wurden für die Fermilab-Konfiguration Transversalimpulsverteilungen für die verschiedenen Subtraktionsterme angegeben. In diesem Abschnitt wird dieses für die LHCb-Konfiguration durchgeführt, um echte Vorhersagen zu machen. Für diesen Zweck bleibt das „Setup“ zuerst unverändert. Insbesondere die Skalen  $\mu_R$  und  $\mu_F$  sind nachwievor auf den Wert  $\mu_0$  gesetzt. In den folgenden Grafiken liegt die Schwerpunktsenergie der  $pp$ -Kollisionen bei  $\sqrt{s} = 14$  TeV <sup>22</sup>.

Die Abbildungen 42 und 43 beschreiben das Transversalimpulsspektrum der  $B$ -Mesonen bis NLO mit einem für HERWIG und DPMJET III angepassten Subtraktionsterm. Der Plot mit dem HERWIG-Subtraktionsterm ist hierbei hilfreich für die Abschätzung des systematischen Fehlers. Die Grafiken darunter, Abbildung 44 und 45, beschreiben zunächst nur bis LO die gleiche Größe. Für alle Abbildungen in diesem Abschnitt wurden, wie in dem Abschnitt 9.1, die Einträge unter den Bedingungen für die **Rapidität**  $|y| < 1$  und einem unterem **Transversalimpuls**  $p_t > 6$  GeV/c aufgenommen.

Die erste Grafik, die den differentiellen LO-Wirkungsquerschnitt für eine Skaleneinstellung wie in Abschnitt 9.1 beschreibt, scheint gegenüber den Abbildungen 42 und 43 etwas daneben zu liegen und ist deswegen nicht aufgeführt. Der Grund, weshalb vor allem bei höheren Transversalimpulsen der LO einen nahezu gleichen bzw. größeren differentiellen Wirkungsquerschnitt hat als der Verlauf des differentiellen Wirkungsquerschnittes bis NLO, kann nur darin liegen, dass bei den *großen* Abweichungen der Skalen  $\mu_R, \mu_F$  von  $\mu_0$  die negativen Beiträge, die durch den Subtraktionsterm erzeugt werden, in den NLO Grafiken zunehmen, und einen *realistischen* NLO- $p_t$ -Verlauf produzieren (Abbildung 42, 43), während diese Korrektur in der LO-Abbildungen nicht vorhanden ist.

Der komplette Verlauf der Grafik über alle  $p_t$  ist für moderate Transversalimpulse ( $\sim 0 - 8$  GeV/c) generell der Form  $\text{NLO} \geq \text{LO}$  <sup>23</sup>. Lediglich die Flanken der Grafiken, zu höheren  $p_t$  also, zeigen ein etwas *unnatürliches* Verhalten.

Die nächsten beiden Grafiken zeigen das Transversalimpulsspektrum, in dem die Skalen  $\mu_F, \mu_R$  so eingestellt sind, dass sie in etwa den von den LHCb-Kollaborationen angegebenen Wirkungsquerschnitt von  $\sigma_{b\bar{b}} \sim 500 \mu\text{b}$  über die NLO-Grafiken reproduzieren [87] (Abbildung 44, die Faktorisierungsskala  $\mu_F^2$  wird mit Zwei multipliziert, die Renormierungsskala  $\mu_R^2$  wird durch Drei geteilt), sowie nicht verändert sind, also  $\mu_F = \mu_R = \mu_0$ , Abbildung 45. Aufgeführt werden jetzt noch jeweils zwei Abbildungen, indem der Subtraktionsterm für HERWIG und für DPMJET III angepasst ist. In den vier Grafiken ist der LO-

<sup>22</sup>Wie in Abschnitt 9.1 wurden die Renormierungs- und Faktorisierungsskalen verändert angenommen. Das führt zu einer deutlichen Steigerung der  $B$ -Mesonen-Produktion (Faktor  $> 10$ ); insgesamt wurden für diese Grafiken zwischen 1.5 und 2.5 Mrd. Events produziert.

<sup>23</sup>NLO bedeutet hier, wie im übrigen Text auch, bis *einschließlich* der Ordnung NLO

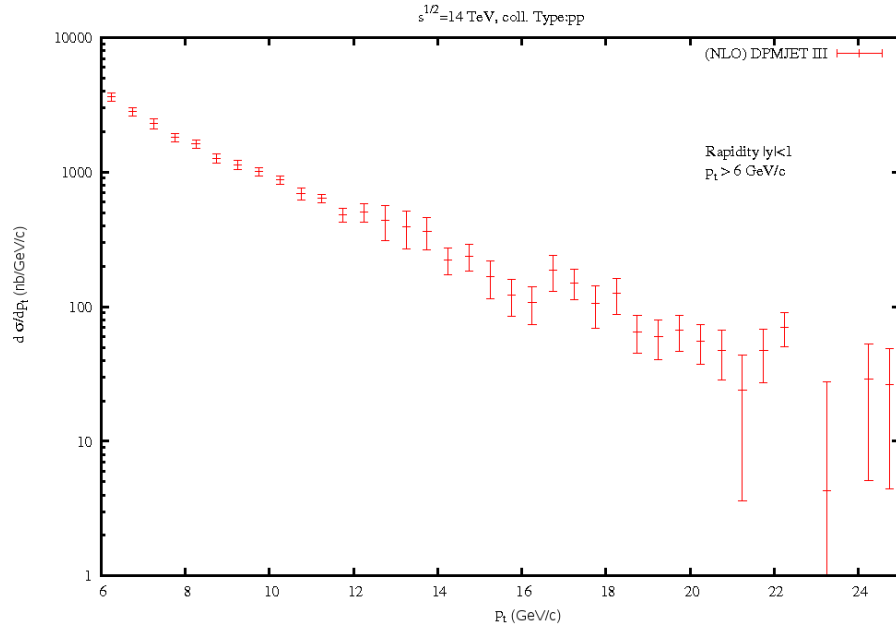


Abbildung 42: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - aufgetragen ist das Transversalimpulsspektrum bis NLO, die Skalen  $\mu_R$  und  $\mu_F$  sind wie in Abschnitt 9.1 variiert; der Subtraktionsterm ist angepasst für das Programm **HERWIG**.

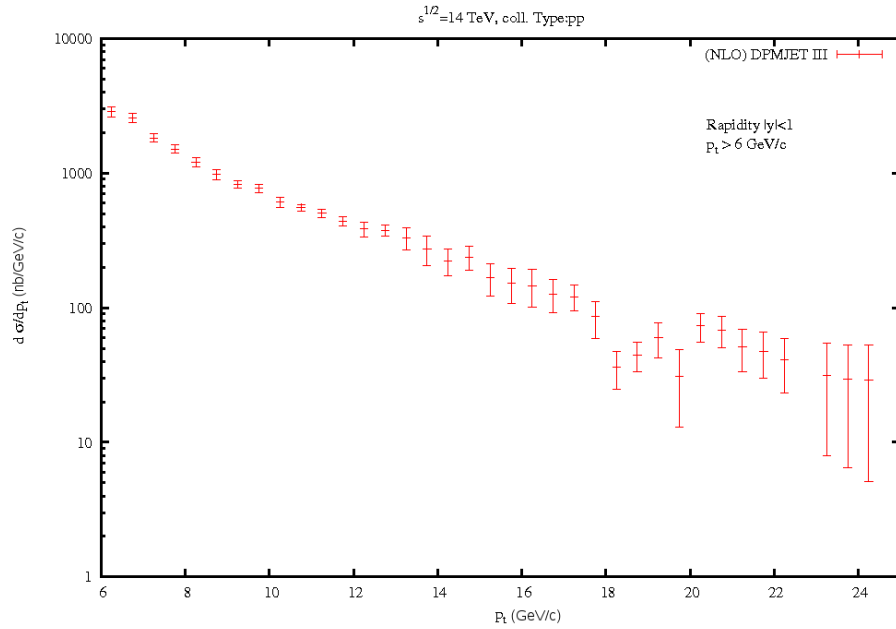


Abbildung 43: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - aufgetragen ist das Transversalimpulsspektrum bis NLO, die Skalen  $\mu_R$  und  $\mu_F$  sind wie in Abschnitt 9.1 variiert; der Subtraktionsterm ist angepasst für das Programm **DPMJET III**.

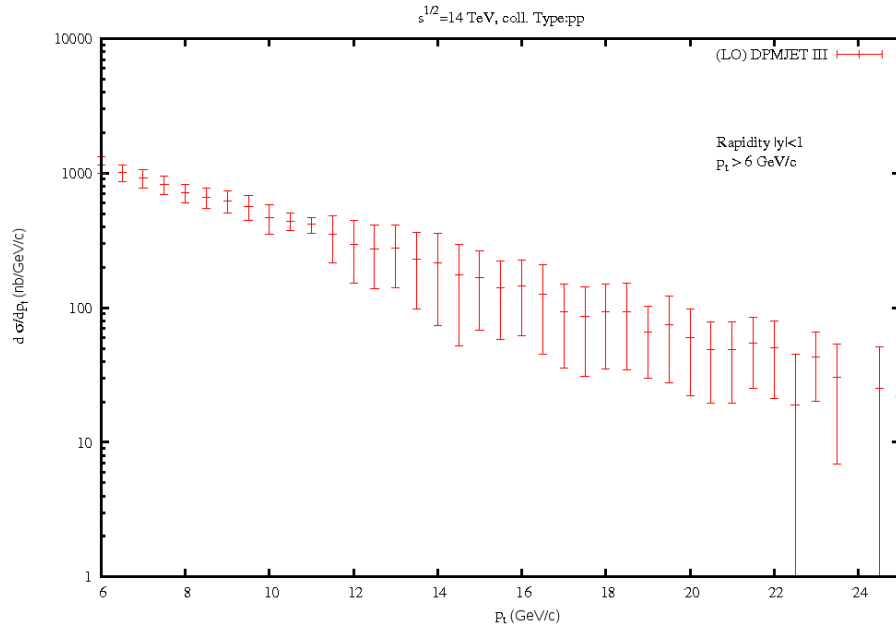


Abbildung 44: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - „Leading Order“-Transversalimpulsspektrum; die Skala  $\mu_F^2$  wurde mit dem Faktor Zwei multipliziert, und die Skala  $\mu_R^2$  wurde durch den Faktor Drei dividiert.

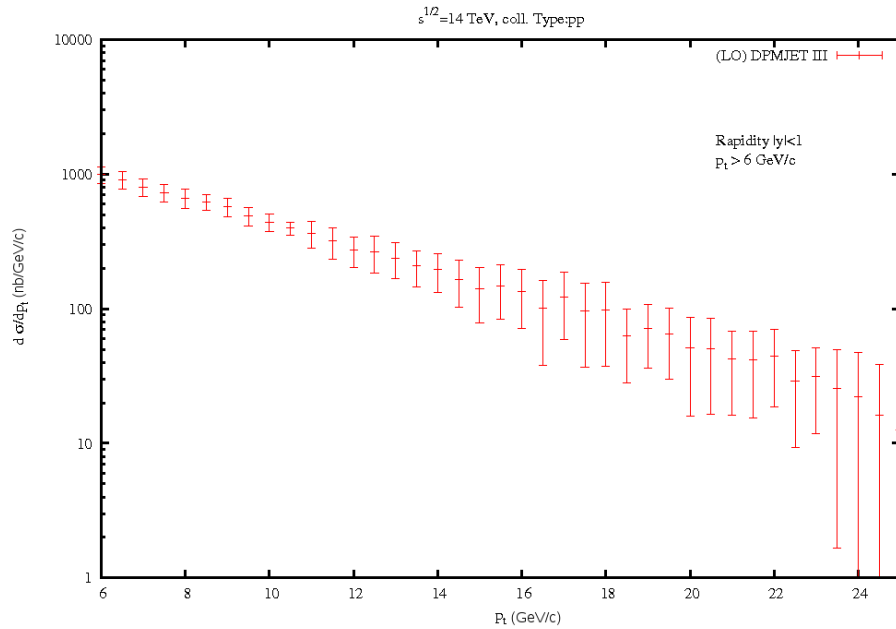


Abbildung 45: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - „Leading Order“-Transversalimpulsspektrum; die Skalen  $\mu_F$  und  $\mu_R$  sind unverändert auf  $\mu_0$ .

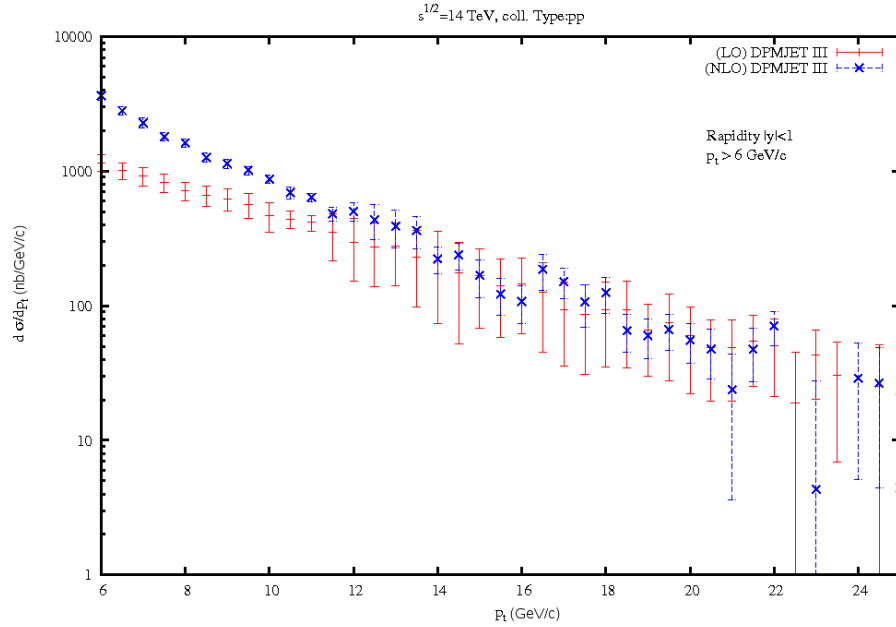


Abbildung 46: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - Transversalimpulsspektrum LO und bis NLO; für die „Leading Order“-Verteilung wurde die Skala  $\mu_F^2$  mit dem Faktor Zwei multipliziert, und die Skala  $\mu_R^2$  wurde durch Drei geteilt; der Subtraktionsterm ist für das Programm **HERWIG** angepasst (NLO).

und der NLO-Verlauf kombiniert. Die Skalen sind hier ausschließlich für die LO-Verläufe wie in den Bildunterschriften angepasst.

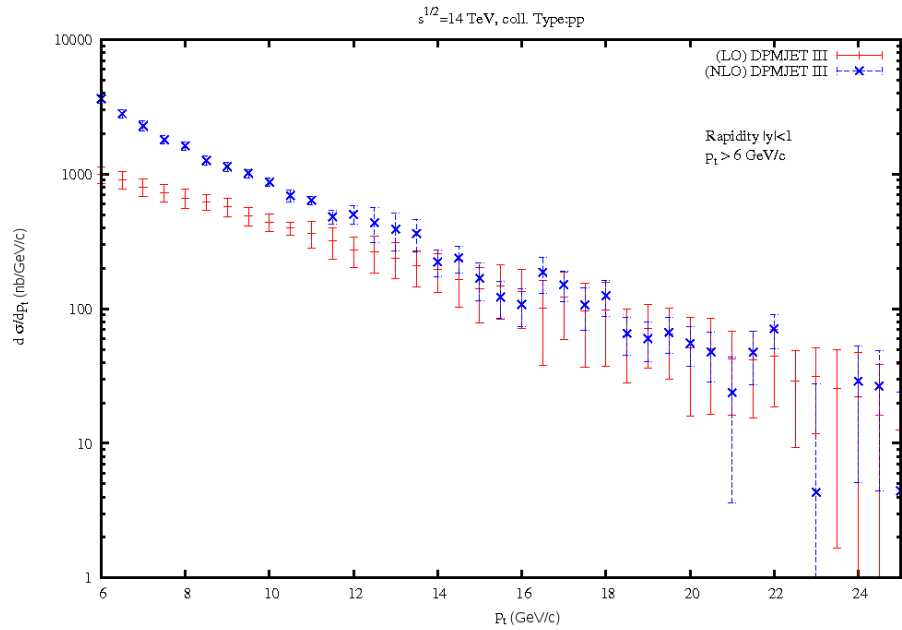


Abbildung 47: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - Transversalimpulsspektrum LO und bis NLO; für die „Leading Order“-Verteilung wurden die Skalen  $\mu_F$  und  $\mu_R$  unverändert auf  $\mu_0$  gelassen; der Subtraktionsterm ist für das Programm **HERWIG** angepasst (NLO).

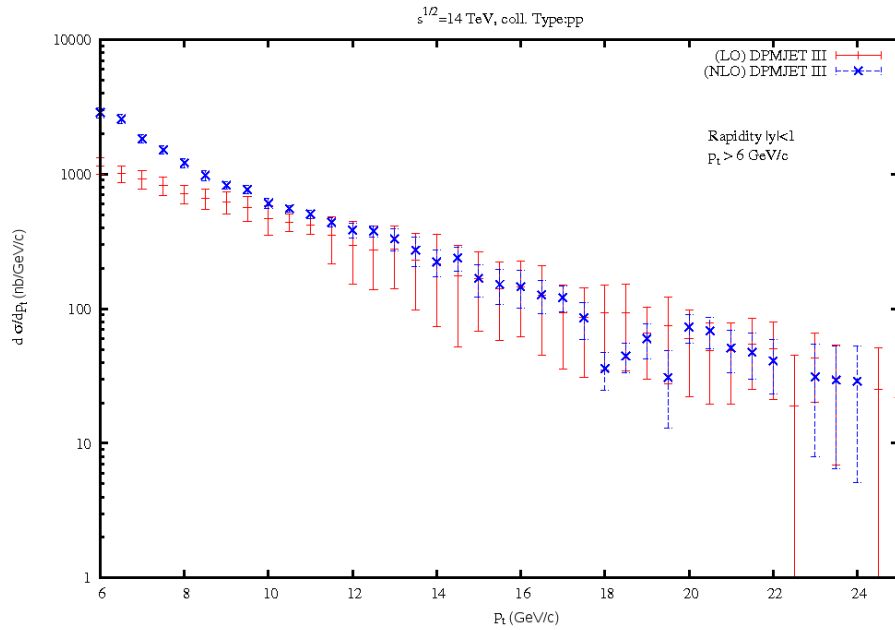


Abbildung 48: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - Transversalimpulsspektrum LO und bis NLO; für die „Leading Order“-Verteilung wurde die Skala  $\mu_F^2$  mit dem Faktor Zwei multipliziert, und die Skala  $\mu_R^2$  wurde durch Drei geteilt; der Subtraktionsterm ist für das Programm **DPMJET III** angepasst (NLO).

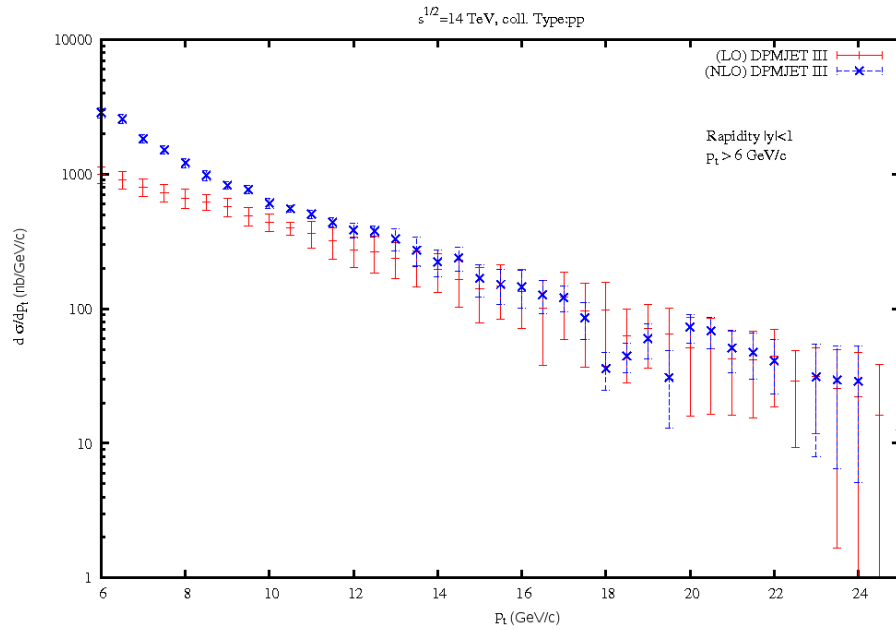


Abbildung 49: Mittlere  $B$ -Mesonen-Produktion - Transversalimpulsspektrum LO und bis NLO; für die „Leading Order“-Verteilung wurden die Skalen  $\mu_F$  und  $\mu_R$  unverändert auf  $\mu_0$  gelassen; der Subtraktionsterm ist für das Programm DPMJET III angepasst (NLO).



## 10.2 Anwendung – Rekonstruktionen bei LHCb Energien

Das Programm DPMJET III ist im Hinblick auf Fragen, die die Teilchenerzeugung betreffen, ein vollwertiges Simulationsprogramm. Es ist daher sicher geeignet, im Rahmen der Vorgaben, die im Wesentlichen die Vielfalt der Teilchen betreffen, Rekonstruktionen zuverlässig durchführen zu können.

In realen Detektorexperimenten werden Unmengen an Daten aufgenommen. Zwei wichtige Aspekte dieser (echten) Daten sind, wie daraus die Teilchenspur und wo deren Identitäten rekonstruiert werden.

Ein Großteil der Daten wird als  $\pi$ - oder  $K$ -Mesonen *gesehen*, die entweder als direkte Produkte entstanden sind oder durch (mehrfache) Zerfälle aus instabilen, kurzlebigen Teilchen (oder Resonanzen) erzeugt wurden (*gesehen* meint: Jede erfolgreiche Detektion beinhaltet natürlich mehrere Randbedingungen an die Konfiguration der Anlage; abhängig davon, kann das Verhältnis der detektierten Teilchen sich ändern, z. B. wird am LHC erwartet, dass  $\pi/K$ -Mesonen und Protonen in dem  $p_t$ -Bereich von 0.3-1.5 GeV/c und  $|\eta| < 2.5$  Einheiten zuverlässig erkannt werden).

Möchte man  $B$ -Mesonen identifizieren können, dann kommt man nicht umhin, die Reaktionsprodukte (Tochterprodukte) zu analysieren und darauf zu testen, ob sie aus dem entsprechenden Zerfall entstanden sein können (die direkte Beobachtung von  $B$ -Mesonen ist entsprechend schwerer zu realisieren, wg. der geringen Lebensdauer von einigen  $10^{-12}$  s). Auch dieses Testprogramm ist innerhalb von DPMJET III verfügbar (unter den gleichen Bedingungen, wie sie in Fußnote 8 auf Seite 130 formuliert sind; siehe dazu auch die Fußnote 5 auf Seite 124).

Offensichtliche Größen für diesen Test sind natürlich die invariante Masse des Mutterproduktes (hier des  $B$ -Mesons) und Quantenzahlen, wie die Ladung. Allgemein sind aber alle additiven Größen dafür gut geeignet, nur sind die o. g. *besonders* einfach zugänglich.

Als Anwendung werden hier zwei verschiedene Reaktionen betrachtet, in denen kurzzeitig  $B$ -Mesonen erzeugt werden. Zum einen werden aus den Reaktionen  $p\bar{p}$  und  $pp$  versucht,  $B^\pm$ -Mesonen aus dem Kanal  $B^\pm \rightarrow J/\psi(\mu^+\mu^-)K^\pm$  zu rekonstruieren.

Zum anderen wird, ähnlich wie in [88], der Zerfall  $B_s^0 \rightarrow D_s^\pm(K^\pm K^0)\pi^\mp$  betrachtet. Dass hier das  $D_s^\mp$ -Meson nicht durch den gleichen Kanal zerfällt, nämlich  $D_s^\mp \rightarrow K^+K^-\pi^\pm$ , liegt an der Beschränkung seitens PYTHIA (v6.115), welches nicht alle Kanäle implementiert hat, wie sie in [89] zu finden sind.

Bei der Rekonstruktion treten im Allgemeinen Schwierigkeiten mit Reaktionen auf, die eine gleiche Signatur (Ladung etc.) haben, z. B. zerfallen  $B^0 \rightarrow K^+K^-$  oder auch in  $B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Wenn ersterer Zerfall betrachtet wird, tritt die zweite Reaktion möglicherweise als Hintergrund auf, wenn die invariante Masse nahe der  $B^0$ -Masse liegt (die Ladungen der Produkte sind gleich und sind somit keine Hilfe; die Auflösung, ob ein Tochterprodukt ein Pion oder Kaon ist, ist nur unter gewissen Bedingungen möglich und vom Detektor abhängig: Z. B. werden am LHCb Hadronen über zwei RICH-Detektoren („Ring Imaging Cherenkov“ detectors) identifiziert, die (für RICH1) Teilchen in einem Impuls-Rahmen von 1-60 GeV/c bzw. (für RICH2) bis 100 GeV/c identifizieren können [87]). Eine Aufgabe wird also sein, Bedingungen („Cuts“) zu setzen, die diesen Hintergrund von dem zu untersuchenden Zerfallskanal möglichst gut abgrenzen.

Die „Cuts“ lassen sich grob in zwei Kategorien einteilen: Bedingungen an die

Impulse (der Töchter) und geometrische Bedingungen.

Die Impuls-„Cuts“ sind meistens Mindestanforderungen an die Transversalimpulse. Für eine erfolgreiche Detektion (im realen Experiment) ist dies notwendig, da die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Erkennung der Töchter stark abnimmt außerhalb dieses Fensters. Alle benutzten  $p_t$ -„Cuts“ sind aus der entsprechenden Literatur entnommen. Sie sind jeweils im Text bzw. in der Grafik aufgeführt.

Geometrische „Cuts“ sind z. B. die Strecken zwischen Erzeugung und Zerfall des Partikels, wie in Abbildung 51 angedeutet. Im „Primary Vertex“ werden die Teilchen erzeugt und einige davon besitzen die Möglichkeit, in einem gewissen Abstand („Decay Vertex“) von dem „Primary Vertex“ zu zerfallen. In Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie sind für bestimmte Teilchen bestimmte Mindestabstände („Decay Length“, dl) typisch, was sich nutzen lässt, um die Mutterprodukte mit besserer Wahrscheinlichkeit identifizieren zu können.

Eine weitere Möglichkeit ist, durch die möglichen Töchterprodukte zu iterieren und daraus die Teilchen zu nehmen, die einen Vektor generieren, der auf den „Primary Vertex“ zeigt (mit einer max. Unsicherheit  $b$ , dem Stoßparameter, was als Radius einer (kleinen) Kugel um den „Primary Vertex“ gedeutet werden kann). Im Prinzip wird natürlich eine Mischung aller Bedingungen das beste Ergebnis liefern.

Mehr zu den obigen „Cuts“ und weitere Einschränkungen finden sich in der entsprechenden Literatur [80, 90, 88, 91].

Diese „Background Studies“, wie sie typischerweise von experimentellen Gruppen (z. B. CERN) herausgegeben werden (z. B. für Reaktionen von denen ausgegangen werden kann, dass sie demnächst am LHC(b) beobachtet werden können), gehen natürlich weit über das hinaus, was wir hier betrachten können. In ihnen werden z. B. CP verletzende  $B$ -Zerfälle oder selten  $B$ -Zerfälle studiert [90, 88, 91]. Die aufgeführten „Cuts“ werden, wie oben erwähnt, von dort übernommen.

Da DPMJET III als Stand-Alone-Programm benutzt wird, kann man nicht erwarten, mit den von experimentellen Gruppen herausgegebenen Studien konkurrieren zu können. Der Aufwand, der dort für die Rekonstruktion betrieben wird, ist sehr hoch und beinhaltet mehrere Programme, die für solche Zwecke optimiert sind.

Es soll aber an den Beispielen gezeigt werden, dass es mit DPMJET III durchaus möglich ist, schnell und auf eine einfache Weise, (die möglichen) Zerfallskanäle aufzudecken, ohne dass die Hintergrundzerfälle das eigentliche Signal zu sehr verdecken.

Ein ungewollter Vorteil für die Rekonstruktion unter DPMJET III ist natürlich der Umstand, dass unter PYTHIA (v6.115) nur die dominantesten Zerfallskanäle möglich sind. Z. B. kann das  $B^\pm$  laut PDG [89] auf 341 Arten zerfallen, unterteilt in verschiedene Moden (Semi Leptonic and Leptonic Modes, Inclusive Modes,  $D$ ,  $D^*$ ,  $D_s$  Modes etc.). In PYTHIA existieren 36 Zerfallsmöglichkeiten für das  $B^\pm$ -Meson. Vom  $B_s^0$ -Meson dagegen sind im PDG 28 Zerfallsarten aufgeführt, darunter Zerfälle der Form  $B_s^0 \rightarrow D_s^- + anything$ . In PYTHIA sind davon nur einige explizit realisiert (39 Zerfallskanäle).

Die kleinsten Verzweigungsverhältnisse, die unter PYTHIA möglich sind, sind von der Größenordnung  $10^{-4}$ , so dass die gesamte Verzweigungswahrscheinlichkeit für zwei sukzessive Zerfälle bei mindestens  $10^{-8}$  liegt. Z. B. kann ein Strange- $B$ -Meson über dem Kanal  $B_s^0 \rightarrow \eta_c \eta (\gamma \mu^+ \mu^-)$  in dieser (für eine Rekon-

struktions eher unrealistische) Konstellation mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0.0002 \cdot 0.0003 = 6 \cdot 10^{-8}$  zerfallen, so dass im Mittel etwa  $10^8$  Events generiert werden müssen, um 6 Ereignisse zu finden. Dass dazu die „Cuts“ bestmöglich angepasst sein müssen, erscheint klar zu sein. Für eine solch kleine, mögliche Ausbeute ist es notwendig, den Hintergrund zu eliminieren bzw. weitestgehend zu drücken. Das geschieht mit den o. g. Impuls- bzw. geometrischen „Cuts“. In der entsprechenden Literatur gilt

$$\xi = \frac{S}{\sqrt{S+B}}$$

als Maß dafür abschätzen zu können, ob das Signal als annehmbar zu interpretieren ist.  $S$  ist die Anzahl der Hits *über* dem Background, die Anzahl  $B$  ist dann selbsterklärend.

Mit den gewählten „Cuts“ soll dann diese Größe maximiert werden [92]. Hier wird aber nicht weiter darauf eingegangen.

Die Definition der Güte  $\xi$  ist etwas unglücklich, denn es ist möglich, den Background  $B$  durch weitere Histogrammunterteilung *verschwinden* zu lassen oder zumindest die Breite einer Histogrammsäule auf die kleinste detektierbare Masse zu ändern (wodurch  $B$  absinkt), welche von den Geräten wahrgenommen werden können (die Intervallbreite ist überall mit  $5 \text{ MeV}/c^2$  gewählt worden), so dass  $\xi$  aber immer noch abhängig ist von der gewählten Unterteilung. Das Signal über dem Background  $S$  selbst würde dabei aber stabil bleiben.

Im Weiteren wird immer angenommen, dass die konstante Intervallbreite bei  $5 \text{ MeV}/c^2$  liegt. Mit diesem Wert ist es möglich, alle Rekonstruktionen erfolgreich durchzuführen.

Die Abbildung 51 soll als Verdeutlichung für die weitere Diskussion dienen. Der „Primary Vertex“ ist der Ort des zentralen Stoßes der Reaktion und liegt fest im Nullpunkt des Koordinatensystems, was eine Näherung darstellt. Es wird also kein „Primary Vertex“-Fit nötig sein (zudem ist es in den realen Experimenten möglich, dass mehrere Hadronen gleichzeitig aufeinander stoßen können; diese Option ist auch unter PYTHIA einstellbar; unter DPMJET III ist dieses aber im Augenblick nicht realisiert). Der Großteil der Teilchen wird hier erzeugt.

Der „Secondary Vertex“ („Secondary Vertex“=„Decay Vertex“) bezieht sich auf die ausgewählte Reaktion: Ein  $B$ -Meson, welches im „Primary Vertex“ erzeugt wurde, zerfällt im Abstand  $l(= dl)$  im „Decay Vertex“, hier in zwei Reaktionsprodukte. Eines dieser Produkte wird nach einer gewissen Zeit erneut zerfallen. Für die hier betrachteten beiden Reaktionen sind dies das neutrale  $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$  und das  $D_s^\pm \rightarrow K^\pm K^0$ . Die komplette Zerfallswahrscheinlichkeit beider Reaktionen liegt bei  $8 \cdot 10^{-4} \cdot 1$  und bei  $0.0035 \cdot 0.028 = 9.8 \cdot 10^{-5}$ .

Das neutrale  $J/\psi$  soll ausschließlich in Myonen zerfallen. Dass diese Näherung möglich ist, ohne das Ergebnis stark zu verfälschen, sieht man daran, dass unter PYTHIA nur der weitere Zerfall in ein  $e^+e^-$ -Paar sowie in einen zufälligen, hadronischen Modus, möglich ist. Beide Möglichkeiten lassen sich aber experimentell von dem Myonenpaar (in gewissen  $(p_t)$ -Grenzen) ziemlich sicher unterscheiden. Das Einschalten beider Kanäle könnte durch Betrachten von mehr Events einfach kompensiert werden.

Für Texte in den folgenden Abbildungen gilt, dass Gleichheitszeichen einen Mindestwert bedeuten, wenn es sich um Impuls-„Cuts“ handelt, z. B. bedeutet  $p_{tK} = 1.25 \text{ GeV}/c$ , dass diese Abbildung unter der Bedingung erstellt wurde,

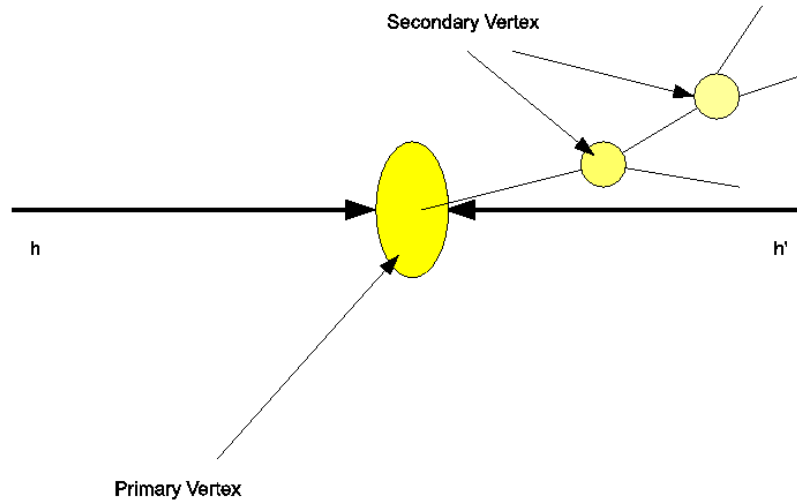


Abbildung 50:  $hh' \rightarrow BX$

dass das Kaon *mindestens* einen Transversalimpuls von 1.25 GeV/c haben muss, um in die Abbildung mit aufgenommen zu werden.

Die Obergrenzen für Impuls-„Cuts“ werden bei einem Zweierzerfall stets auf ein Tochterprodukt angewandt. Dieses hat den Grund, dass im Vergleich zur Erzeugung eines Teilchens durch einen Übergang, z. B. eines  $J/\psi$  (welches durch ein  $c$  Quark Einfang entstanden ist, das aus einem  $b \rightarrow c$  Quark herrührt) die Zerfallsprodukte eines aus einer Direktproduktion entstandenen  $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$  in seinem Ruhesystem eine symmetrische  $p_t$ -Verteilung besitzen (von  $p_t \simeq 1.5$  GeV/c).

Durch diesen Übergang  $b \rightarrow c$  kann das  $c$  Quark einen kleinen, zusätzlichen Impuls bekommen (z. B. 0.5 GeV/c), der auf das  $J/\psi$  übertragen wird. Danach könnten beide Myonen einen Transversalimpuls von 2 GeV/c und 1 GeV/c haben. Ein Impuls-„Cut“ für *beide* Myonen von  $p_t = 1.5$  GeV/c würde dieses *gute*  $J/\psi$  aussondern.

Bei geometrischen „Cuts“ bezeichnen Gleichheitszeichen einen maximal zulässigen Wert.  $b = 0.1$  mm bedeutet damit, dass der Stoßparameter *höchstens* 0.1 mm groß sein darf.

Da die Kenntnis der Detektoren und Anlagen der experimentellen Gruppen begrenzt ist, besteht unsere Strategie darin, eine *vereinfachte* Analyse auf die bekannten Fermilab und LHCb Energien anzuwenden, also für die Schwerpunktsenergien  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV und dem Reaktionstyp  $p\bar{p}$  und  $\sqrt{s} = 14$  TeV mit dem Reaktionstyp  $pp$ . Für erstere Konfiguration wurde in Kapitel 9 das  $p_t$ -Spektrum des differentiellen Wirkungsquerschnittes herangezogen um zu zeigen, dass das modifizierte Programm die Daten beschreiben kann. Durch diesen Vergleich hoffen wir, zu einer nützlichen Aussage zu kommen. Die Renormierungs- und Faktorisierungsskalen wurden für diesen Abschnitt etwas herabgesenkt, wodurch aber prinzipiell keine Änderungen entstehen:  $\mu_R^2$  wurde durch 40 dividiert und  $\mu_F^2$  wurde mit 20 multipliziert. Durch diese Änderungen werden etwa zwei mal *weniger* schwere Quarks weniger produziert.

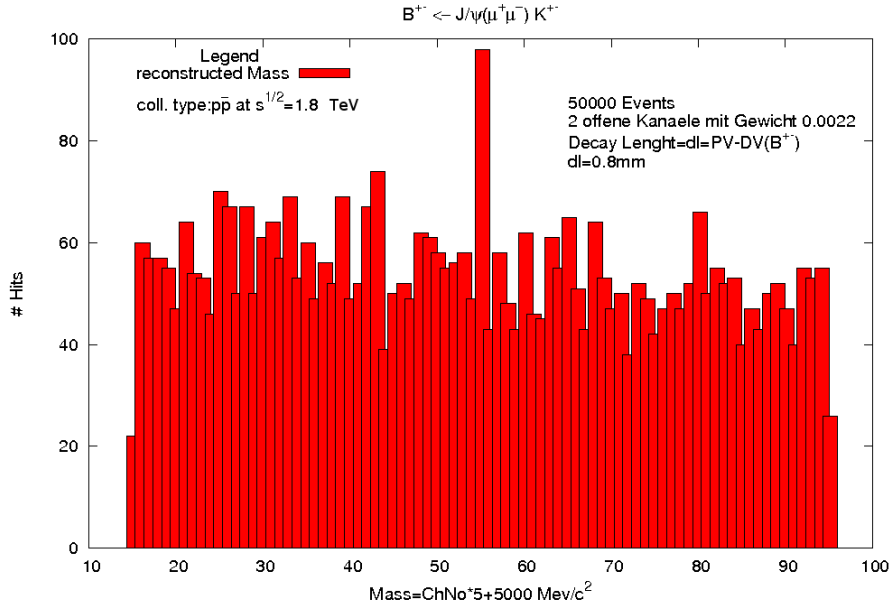


Abbildung 51: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B^\pm$ ) im ersten Versuch. Die Schwerpunktsenergie für die Reaktion  $p\bar{p}$  liegt bei  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV. Der Einfachheit halber wurden zunächst nur zwei Zerfallskanäle geöffnet, als geometrischer „Cut“ wurde nur der Abstand zwischen „Primary Vertex“ und „Decay Vertex“ genommen.

Zunächst wird der Kanal  $B^\pm \rightarrow J/\psi(\mu^+\mu^-)K^\pm$  in einer  $p\bar{p}$ -Reaktion bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV betrachtet. In PYTHIA können einzelne Zerfallskanäle an und aus gestellt werden. Eine einfache Methode, das gewünschte Signal *künstlich* zu erhöhen besteht darin, möglichst wenige andere Kanäle offen zu lassen. Zur Festlegung der „Cuts“ werden zu Anfang nur zwei Zerfallskanäle mit einem kleinem Gewicht offen gelassen. Danach werden alle Kanäle wieder geöffnet in der Hoffnung, ein annehmbares Signal zu bekommen. Alle Grafiken beziehen sich auf die *relative* Anzahl an  $B$ -Mesonen, also die Anzahl der Mesonen, die aus Events mit pos. Signatur minus der Anzahl der Mesonen aus Events mit neg. Signatur entstanden sind. Als Subtraktionsterm wurde nur der für DPMJET III berechnete Ausdruck genommen, da es zum existierenden Subtraktionsterm für das Programm HERWIG in Bezug auf die Anzahl der *rekonstruierten*  $B$ -Mesonen keinen Unterschied gibt. Das liegt daran, dass die „Cuts“ den größten Teil der Mesonen aussortieren.

Die Anzahl der Events liegt mit zwei offenen Kanälen bei (willkürlichen) 50000, wobei etwa eine totale Anzahl von 150  $B^\pm$  produziert wird. Sobald mehr Zerfallskanäle möglich sind, müssen die Events erhöht werden.

In dieser ersten Grafik haben die beiden Kanäle ein Originalgewicht von 0.0022. Es sind die Zerfälle  $B^\pm \rightarrow J/\psi K^\pm$  (0.0008) und  $B^\pm \rightarrow J/\psi K^{*\pm}$  (0.0014). Bei nur zwei geöffneten Kanälen ist deren Gewicht zusammen natürlich 1, und die Einzelgewichte sind verteilt entsprechend dem Originalverhältnis. Soweit nicht anders erwähnt, werden es diese beiden Kanäle sein, die zur (will-

kürlichen) Festlegung von „Cuts“ herangezogen werden.

Als „Cut“ wurde lediglich der Abstand „Primary Vertex“-„Decay Vertex“ (des  $B$ -Mesons) mit  $dl=0.8$  mm angebracht [93]. Aufgetragen ist hier die Masse gegen die Anzahl der Treffer für eine bestimmte, der Kanalnummer („ChNo“) entsprechenden Masse. Insgesamt kann die invariante Masse von etwa 5000-5500  $\text{MeV}/c^2$  betrachtet werden ( $\pm 200$   $\text{MeV}/c^2$  um die erwartete Masse herum). Die Breite einer Säule liegt bei 5  $\text{MeV}/c^2$ . Die Masse des gesuchten  $B^\pm$ -Mesons liegt bei 5278.9  $\text{MeV}/c^2$  (PYTHIA Masse).

Man sieht schon hier, dass eine Säule bei „ChNo“ $\sim 56$  heraus sticht (55.78) und das Original  $B$ -Meson sein könnte. Der Background ist aber noch sehr präsent und liegt bei min. 60 Hits über dem gesamten Bereich.

Dieser Hintergrund kann durch alle Kombinationen von Teilchen mit der richtigen Ladung gebildet werden, die nicht im „Primary Vertex“ entstanden sind (wg.  $dl=0.8$  mm). Darunter können z. B.  $\pi^+\pi^- + \pi^\pm$  oder  $\pi^+\pi^- + K^\pm$  liegen.

Die Anzahl der Teilchen über dem Background liegt bei grob 25.

Für die erste Grafik liegt  $\xi \simeq 2.56$ , was als Signal ein sehr guter Wert ist. Da hier aber nur zwei Kanäle geöffnet sind, wird die Säule um „ChNo“ 56 stark absinken sobald mehrere Kanäle offen sind, und  $\xi$  wird gegen 0 gehen.

Weitere „Cuts“ müssen angebracht werden. In der nächsten Grafik, Abbildung 53, sind zwei zusätzliche Bedingungen angebracht. Das Kaon wird sicher erkannt werden, und sein Transversalimpuls sollte mindestens  $p_{tK} = 1.25$   $\text{GeV}/c$  sein [80].

$\xi$  hat den Wert  $\xi \simeq 2.58$  und ist etwas größer als der Wert vorher. Der Effekt dieser beiden Bedingungen ist lediglich eine Verkleinerung der Ausgangsgrafik, was trotzdem als Erfolg angesehen werden kann. Denn nun sind mit weiteren „Cuts“ die Bedingungen günstig, das Signal weiter hervorzuheben.

Die nächste Grafik zeigt, dass es aber noch besser geht.

Hier liegt der Wert von  $\xi$  bei  $\xi \simeq 3.88$  und ist kaum mehr zu vergrößern. Die zwei neuen „Cuts“ sind geometrische „Cuts“. Dazu wird einmal ein Radius  $b=0.1$  mm um den „Primary Vertex“ erzeugt. Aus allen gewählten Töchterimpulsen wird ein Vektor erzeugt. Liegt dieser Vektor innerhalb einer Kugel (mit Radius  $b$ ) um den „Primary Vertex“, dann werden die Töchter als Zerfallsprodukte anerkannt und als Signal für ein  $B^\pm$ -Meson gewählt. Zudem wird nun die Zerfallslänge des  $J/\psi$  betrachtet ( $dl2$ ). Alternativ ist hier der Einfachheit halber aber der Abstand „Primary Vertex“-„Decay Vertex“ ( $J/\psi$ ) genommen worden und muss damit größer sein als „Primary Vertex“-„Decay Vertex“ ( $B$ ). Er ist auf  $dl2=0.9$  mm gesetzt. Beide Größen sind äquivalent.

Mit diesen „Cuts“ wird nun ein kompletter Lauf betrachtet ( $p\bar{p}$ ,  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV). Um eine vernünftige Anzahl Events generieren zu können, kann man diese abschätzen: Bei 50000 Events und 4 offenen Kanälen ist das Signal noch gut sichtbar (hier sind keine Grafiken mit 4 offenen Kanälen aufgeführt); das Gewicht der einzelnen Kanäle liegt dann etwa bei 0.25. Das tatsächliche Gewicht der Reaktion liegt (s. o.) bei  $8 \cdot 10^{-4}$ . Damit folgt für die geschätzte Anzahl Events etwa  $\frac{0.25}{0.0008} \cdot 50000 \simeq 15.6$  Mio.. Das Ergebnis im vierten und letzten Versuch mit 15 Mio. Events ist in Abbildung 55 zu sehen.

Die Qualität des Signals liegt bei  $\xi \simeq 2.48$ . Das zeigt deutlich, dass unter DPMJET III diese Rekonstruktion und unter dieser Konfiguration gut möglich

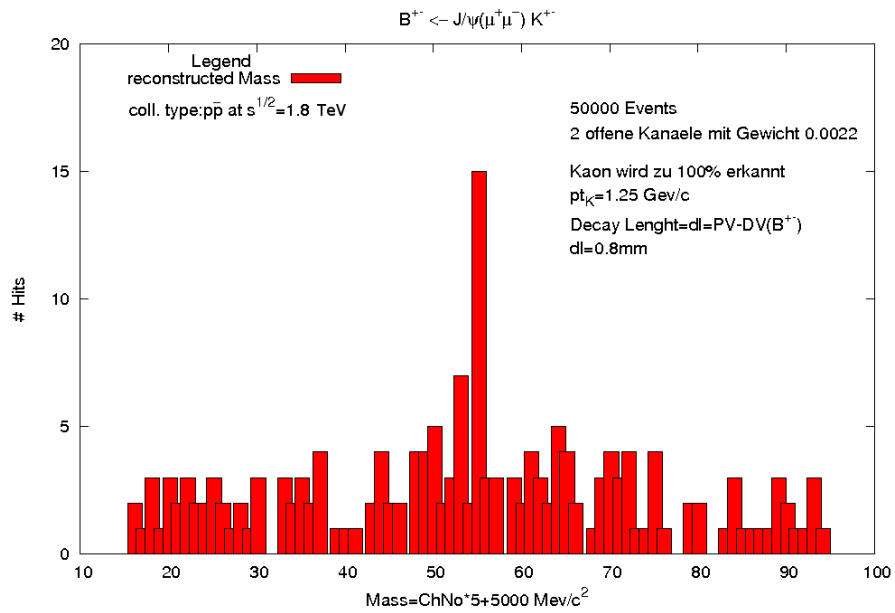


Abbildung 52: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B^\pm$ ) im zweiten Versuch, mit ansonsten fast gleicher Einstellung wie in der Grafik zuvor. Hinzugekommen wurde, dass das Kaon des untersuchten Zerfalls sicher erkannt werden kann (siehe Text für diese Bedingung), und dass der Transversalimpuls des Kaons mindestens  $p_{tK} = 1.25 \text{ GeV}/c$  besitzt.

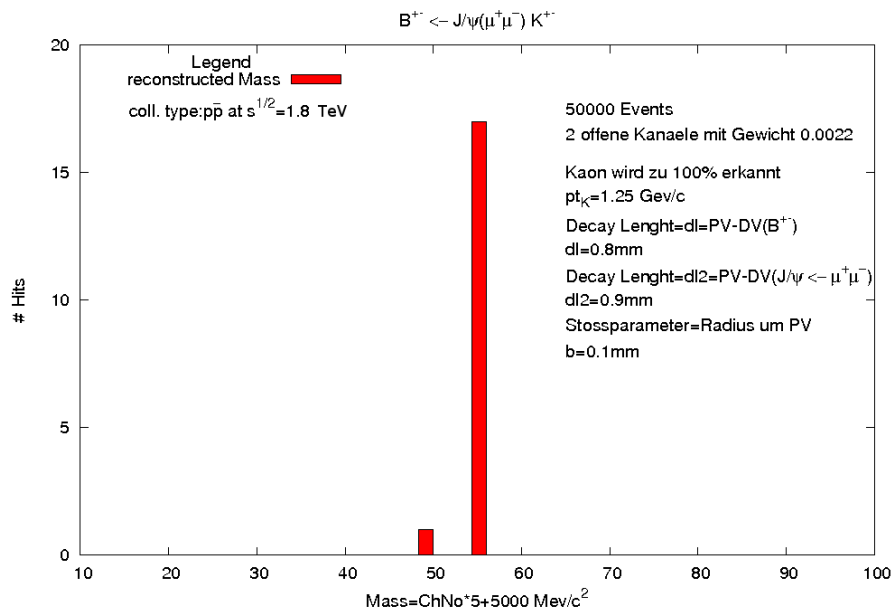


Abbildung 53: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B^\pm$ ) im dritten Versuch. Als „Cut“ wurde hinzugenommen, dass die „Decay Vertex“ Length des  $J/\Psi$  einen bestimmten Wert  $dl2$  nicht unterschreiten darf, um in diese Grafik aufgenommen zu werden. Zudem wurde nun um den „Primary Vertex“ eine 'kleine Kugel' gedacht. Nur Vektoren, die innerhalb dieser Kugel liegen, tragen zu der Grafik bei (Stoßparameter).



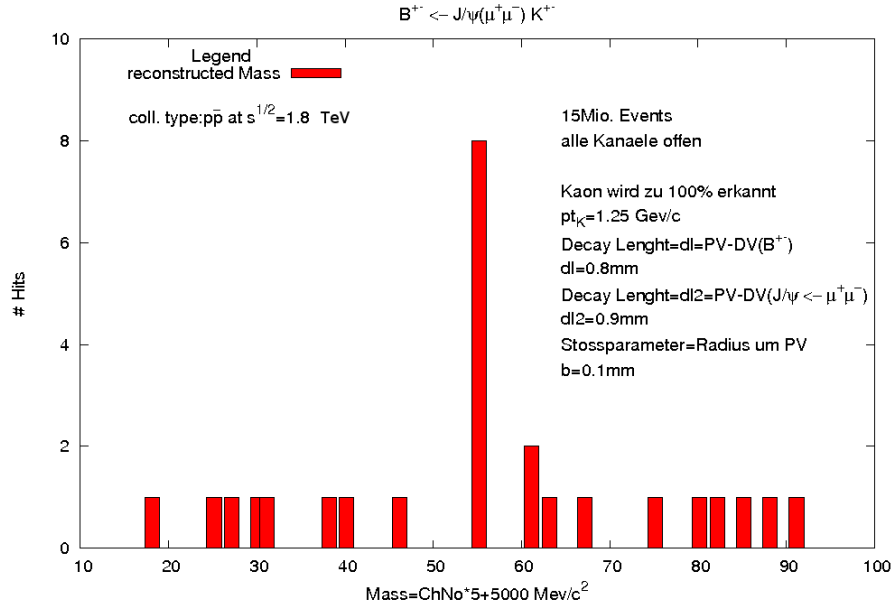


Abbildung 54: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B^\pm$ ). Alle Kanäle sind offen. Die „Cuts“ sind wie in der vorherigen Abbildung gesetzt.

ist.

Als nächstes wird der gleiche Zerfallskanal beim Reaktionstyp  $pp$  mit einer Energie von  $\sqrt{s} = 14$  TeV betrachtet.

Verzichtet wird hier auf die Folge von Grafiken. Angegeben wird aber ein Zwischenergebnis für einen Lauf von 200000 Events und zwei offenen Kanälen (wobei ca. 2600  $B^\pm$ -Mesonen erzeugt wurden). Damit kann die Eventanzahl für einen echten Lauf abgeschätzt werden.

Wie man in der Grafik erkennen kann, sind die „Cuts“ nicht wesentlich verschieden von dem vorherigen Lauf, obwohl eine höher Schwerpunktsenergie gewählt wurde. Das liegt daran, dass das Verhältnis von Laufzeit für einen kompletten Job und Signalqualität  $\xi$  möglichst günstig gehalten werden soll, was der Erfahrung am besten mit einer Mischung aller „Cuts“ möglich ist.

Denkbar wäre auch, die Größe  $dl$  auf 11 mm oder höher zu setzen, um allein mit diesem „Cut“ den Hintergrund abzurängen ( $B$ -Mesonen haben eine geringe Lebensdauer, die dennoch etwa ein Faktor 1000 höher liegt als die der  $D$ -Mesonen, zeichnen aber eine typische Mindestlängenskala aus (abhängig von der Schwerpunktsenergie) von der Größenordnung  $\langle l \rangle = v \cdot t = \frac{\partial H}{\partial |\vec{p}|} \cdot \gamma \tau = \frac{|\vec{p}|c^2}{E} \frac{E}{m_0^B c^2} \tau = \tau \cdot \frac{|\vec{p}|}{m_0^B} \simeq 2 \cdot 10^{-12} s \cdot \frac{30 \text{ GeV}/c}{5.3 \text{ GeV}/c^2} \simeq 3 \text{ mm}$ ). Der für  $|\vec{p}|$  genommene Wert ist ein Schätzwert, da der Transversalimpuls für die Erzeugung eines  $b$ -Quarks mindestens 5 GeV/c beträgt,  $\tau$  ist die mittlere Lebensdauer des Mesons und  $H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + (m_0^B)^2 c^4}$ .

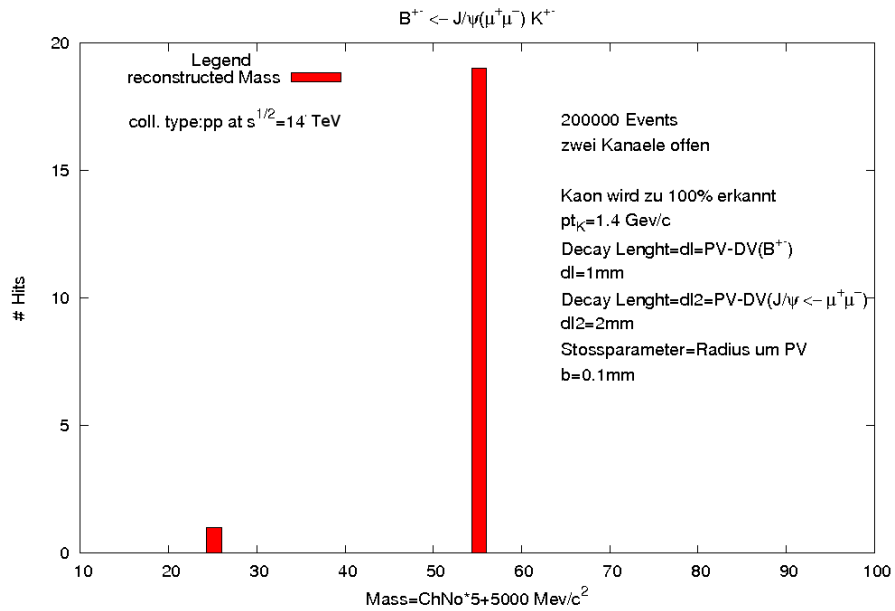


Abbildung 55: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B^\pm$ ) im ersten Versuch mit der neuen Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Der Kollisionstyp ist  $pp$ . In dieser Zwischengrafik wurden 200000 Events mit zwei offenen Kanälen betrachtet. Wie in der Grafik zuvor, sind sofort Impuls- und geometrische „Cuts“ angebracht.

Die Qualität des Signals aus der Abbildung 56 ist  $\xi \simeq 4.00$ .  
 Mit dieser Güte ist das Signal noch zu erkennen, wenn nur 20000 Events betrachtet werden. Der komplette Lauf sollte somit mindestens  $\frac{0.5}{0.0008} \cdot 20000 = 12.5$  Mio. enthalten.

Für die folgende Abbildung wurden 13 Mio.  $pp$ -Events bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 14$  TeV erzeugt. Der Versuch, mit dieser Event-Anzahl auszukommen, ist erfolgreich. Für  $\xi$  wird der Wert  $\xi \simeq 1.79$  ermittelt.

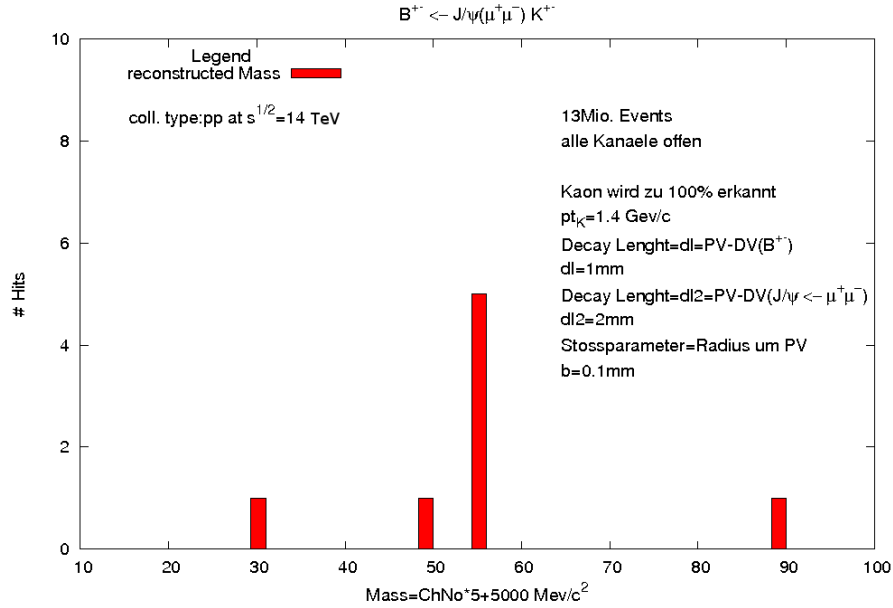


Abbildung 56: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B^\pm$ ). Hier sind alle Kanäle geöffnet. 13 Mio.  $pp$ -Event wurden generiert. Zu der vorherigen Grafik besteht bzgl. der „Cuts“ kein Unterschied.

Der nächste **Zerfallskanal** ist  $B_s^0 \rightarrow D_s^\pm(K^\pm K^0)\pi^\mp$ , der bei der LHCb Energie (coll. Type:  $pp$ ) von  $\sqrt{s} = 14$  TeV betrachtet wird.

Das Produkt der Einzelgewichte der Verzweigungsverhältnisse (s.o.) ist  $0.0035 \cdot 0.028 = 9.8 \cdot 10^{-5}$ . Dieser Wert ist etwa 8 mal kleiner als im Zerfallskanal aus der vorherigen Situation zur selben Energie mit 13 Mio. Events. Das spräche dafür, auch etwa 8 mal so viele Events generieren zu lassen, also etwa 100 Mio., was einer Laufzeit von ca. 50 h entspricht.

Bei einem Testlauf mit 60 Mio.  $pp$ -Events ergibt sich die Abbildung 58.

Die (PYTHIA)-Masse für ein  $B_s^0$ -Meson liegt bei  $5369.3 \text{ GeV}/c^2$ , so dass in der Histogrammdarstellung diese Wert bei etwa „ChNo“ 74 lokalisiert ist. Hier ist auch das Maximum zu finden. Mit 60 Mio. Events (d. h. weniger als  $8 \cdot 13$  Mio. Events) ist es möglich, ein Signal auszumachen. Die Güte kann mit etwa  $\xi \simeq 1.34$  angegeben werden, was einen Mittelwert darstellt, denn der Background ist nicht eindeutig ausgeprägt.

Die zwei verschiedenen Reaktionen, die hier betrachtet wurden, konnten mit

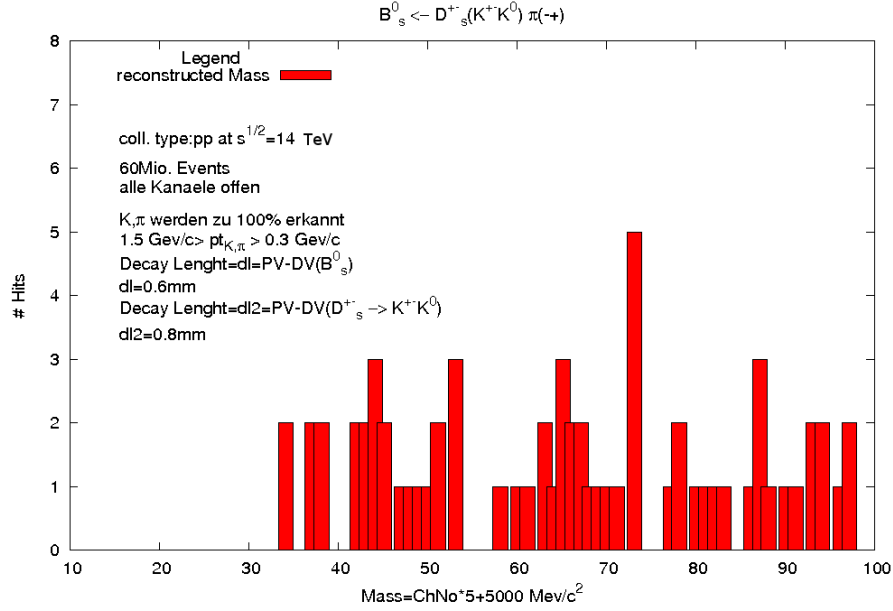


Abbildung 57: Die rekonstruierte Masse des  $B$ -Mesons ( $B_s^0$ ). Die Schwerpunktsenergie für eine  $pp$ -Kollision liegt bei  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Wie in den Grafiken zuvor sind auch hier alle „Cuts“ (Impuls- wie auch geometrische) angebracht. Aufgeführt ist hier ein Testlauf, mit gutem Ergebnis. Deswegen kann auf eine weitere Grafik verzichtet werden, da diese nur in einer erhöhten Anzahl an Events bestünde.

DPMJET III rekonstruiert werden. Es waren zum einen der Kanal  $B^\pm \rightarrow J/\psi(\mu^+\mu^-)K^\pm$ , die bei Schwerpunktsenergien ( $\bar{p}p$ ) von 1.8 TeV und 14 TeV betrachtet wurden und zum anderen war es der  $B_s^0 \rightarrow D_s^\pm(K^\pm K^0)\pi^\mp$ -Kanal, der bei einer  $pp$ -Reaktion mit der Schwerpunktsenergie von 14 TeV rekonstruiert wurde.

Dass diese Rekonstruktionen auf deutliche Weise aufgedeckt werden konnten, ist sicher der limitierten Anzahl an möglichen Kanälen zu verdanken, die in PYTHIA (v6.115) implementiert sind (36 Kanäle für den Zerfall des  $B^\pm$  und 39 Kanäle für den Zerfall des  $B_s^0$ )<sup>24</sup>. Die sukzessiven Zerfällen haben 6 ( $K^\pm$ ), 33 ( $D^\pm$ ) und 3 ( $J/\Psi$ ) Möglichkeiten, zu zerfallen. Natürlich haben die Kanäle jeweils verschiedene Zerfallsgewichte. Im „Particle Data Booklet“ [89] sind dagegen zum Teil einige Hundert Zerfallsarten möglich, allerdings mit sehr geringen Zerfallsbreiten. Im Prinzip könnte natürlich jeder Kanal durch eine entsprechend lange Laufzeit aufgedeckt werden.

<sup>24</sup>Die längste Laufzeit lag bei meinem Dual Core Rechner, 2 Jobs gleichzeitig, bei etwa 30 h, wovon hier immer nur ein Job aufgetragen ist.

## 11 Zusammenfassung und Ausblick

Die Implementierung der  $b$ -Quarks bis „Next to Leading Order“ (NLO) nach dem Schema von S. Frixione und B.R. Webber [4, 5] unter DPMJET III hat in dem Kapitel 9 eine moderate bis gute Übereinstimmung gezeigt. Dass dazu die frei wählbaren Faktorierungs- und Renormierungsskalen  $\mu_F, \mu_R$  etwas weit von ihrem üblichen Intervall gesetzt werden müssen<sup>25</sup>, ist bekannt (siehe z. B. [81, 82, 83, 84]). Werden in DPMJET III die genannten Skalen direkt auf  $\mu_0$  gesetzt, *fehlt* etwa ein Faktor 2.5<sup>26</sup> zur Anpassung an die verwendeten Daten im Bereich moderater Transversalimpulse. Das verwundert nicht, denn auch das eingangs erwähnte MC@NLO oder FONLL<sup>27</sup> verwenden die gleichen NLO-QCD-Rechnungen [23, 94], wie sie auch für diese Arbeit benutzt wurden. Das Programm FONLL kann diesen fehlenden Faktor stark reduzieren (auf etwa 1.7 [81] in dem Bereich von  $p_t \sim 3 - 5 \text{ GeV}/c$ ), u. a. dadurch, indem für eine Beschreibung der Fragmentierung von Quarks in beobachtbare Hadronen eine Peterson-Funktion<sup>28</sup> mit einem Parameterwert von  $\epsilon_Q = 0.002$  benutzt wird<sup>29</sup>. Der Defaultwert von  $\epsilon_Q = 0.006$  ist hingegen eine etwas schlechtere Wahl, wenn  $b$ -Hadronen (im Falle, dass „Next to Leading Log“-Eigenschaften (NLL) vorhanden sind [81]) beschrieben werden sollen. Diese NLL-Eigenschaft ist in FONLL analytisch vorhanden. In DPMJET III wird diese durch das Vorhandensein der „Schauer-Maschinerie“ (in Verbindung mit dem NLO-Code) beschrieben, die einen adäquaten Ersatz hierzu darstellt. Angemerkt sei, dass DPMJET III mit PYTHIA natürlich eine „Lund Fragmentation Function“ benutzt<sup>30</sup>, obwohl es auch hier Hinweise gibt, dass die Standardparameter  $a, b$  für die Produktion von  $b$ -Hadronen im „Lund Fragmentation Model“ nicht optimal sind und

<sup>25</sup>Damit ist, wie in Kapitel 9, das Intervall  $\frac{\mu_0}{2} \leq \mu_F = \mu_R \leq 2\mu_0$  gemeint.

<sup>26</sup>Dieser Wert bezieht sich auf die „Binning“-Grafiken aus Abschnitt 9.1. Wird der volle Verlauf zum Vergleich herangezogen, so *fehlt* etwa ein Faktor 3. Im Prinzip ist aber die Zusammenfassung von  $p_t$ -Intervallen als Vergleich mit den experimentellen Daten die korrektere Form.

<sup>27</sup>Die Grundlagen für das Programm FONLL werden in [95] vorgestellt. Die Artikel [81, 82] machen ausführlich Gebrauch von diesem Programm. In [82] werden die ersten  $p\bar{p}$ -Daten ( $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ ), die von der CDF-Kollaboration herausgegeben wurden, betrachtet und mit FONLL verglichen.

<sup>28</sup>Diese wird zur Beschreibung benötigt, *wieviele* Hadronen in Abhängigkeit des long. Impuls durch das Modell im Mittel erzeugt werden können. Sie lautet:  $D(z, \epsilon_Q) \propto (z(1-1/z-\epsilon_Q/(1-z)))^2)^{-1}$  [24]. Der Defaultwert für den Parameter ist  $\epsilon_Q = 0.006$ . Der kleinere  $\epsilon_Q$ -Wert sorgt dafür, dass es mehr *schnellere* schwere Hadronen gibt. Für das  $p_t$ -Spektrum wird zudem eine Kartvelishvili-Fragmentierungsfunktion [96] benutzt, im Gegensatz zu PYTHIA, welches in DPMJET III für die Fragmentierung zuständig ist.

<sup>29</sup>In FONLL wird zudem indirekt für einen kleinen hadronischen  $p_t$ -Bereich von  $p_t \sim 3 - 5 \text{ GeV}/c$  eine Anpassung dieser Fragmentierungsfunktion im Mellin-Raum durchgeführt „N=2-Fit“ (gegen die  $B$ -Meson-Energie  $x_E$ ) [81], da die größte Diskrepanz zwischen Theorie und Daten in diesem  $p_t$ -Bereich liegt.

<sup>30</sup>Sie ist von der Form:  $D_Q^H(z) \propto \frac{(1-z)^a}{1+bm_Q^2} e^{-bm_Q^2/z}$  mit  $a = 0.3, b = 0.58 \text{ GeV}^{-2}$  und  $m_\perp$  als Transversalmasse; die Schalter in PYTHIA sind: MSTJ(11) für die Auswahl der Frag-Funktion sowie PARJ(41), PARJ(42) für die Parameter  $a, b$ . Die Standardeinstellung für PHOJET ist:  $a = 0.3$  und  $b = 0.86 \text{ GeV}^{-2}$ , siehe Subroutine DT\_INITJS (mode=1). Der neue  $b$ -Wert läßt das Maximum zu etwas *härteren*  $z$  wandern und etwas schmaler und damit größer werden.

<sup>31</sup>/oder <sup>32</sup> besser eine Peterson-Fragmentation-Funktion benutzt werden sollte mit  $\epsilon_Q \simeq 0.0038$ . Das Problem mit beiden Vorschlägen ist, dass PYTHIA durchweg für alle Flavours diese Fragmentation-Funktion benutzen wird und nicht nur speziell für die  $b$ -Flavours. Die Variation der Renormierungs- und Faktorisierungsskalen erscheint daher als einfachere Testmöglichkeit.

Ein Manko ist es, dass bisher nur Hadronen-Stöße beschrieben werden können. Die Komplexität der analytischen NLO-Rechnungen machen es aber (bisher) unmöglich, in Echtzeit Events zu generieren, wenn Kerne involviert sind. Z. B. benötigt das Programm BASES schon min. 3 Minuten (wenn die Genauigkeit dieser Berechnung weitest möglich nach unten gesetzt wird), den totalen  $b$ -Wirkungsquerschnitt für einen einzigen Energiewert zu berechnen. Da es in Kern-Kern-Stößen vielfältige Möglichkeiten gibt miteinander zu wechselwirken, wächst die Anzahl der zu betrachteten Energiewerte mit der Anzahl an Nukleonen stark an. Ein einfacher „Lauf“ würde somit einige Jahre dauern können.

Die große Anzahl an negativen Event-Gewichten ist ebenfalls ungünstig für die Gesamtperformance. Sie belegen grob 30 % aller Events, so dass insgesamt nur etwa 30 % der Events Aussagen über die physikalischen Observablen tragen. Damit muss sowohl die Gesamtveranstanzahl um den Faktor 3 angehoben werden als natürlich auch die Gesamtlaufzeit um den gleichen Faktor, um im Vergleich mit Läufen *ohne* negative Events standhalten zu können (wenn es also um Aussagen geht, die keine  $b$ -Hadronen enthalten). Wie man in Kapitel 9 sieht, sind natürlich vor allem die höheren Impulse betroffen von dieser großen Anzahl an negativen Events aus statistischen Gründen. Im Hinblick auf die Laufzeit gibt es aber dazu eine Möglichkeit für einen groben Ausblick auf die *echte* Verteilung: Da sich die negativen Events durch nichts von den Events mit positiven Eventvorzeichen unterscheiden ist es möglich, sich ausschließlich auf die etwa 50 %<sup>33</sup> von den positiven Events zu beziehen (wg. der größeren Anzahl an positiven gegenüber den negativen Events). Das ist exemplarisch in Abschnitt 9.1 für die CDF-Run II-Daten geschehen. Damit kann dieses starke Ausdünnen für seltene Ereignisse umgangen werden. Nichtsdesto Trotz *liefert* diese Methode prinzipiell korrektes Verhalten bei entsprechender Laufzeit.

Nicht unerwähnt bleiben soll eine Methode, in der negative Eventgewichte komplett vermieden werden können. Diese wurde etwa zwei Jahre nach Aufstellen der hier verwendeten Methode von Paolo Nason entwickelt und vorgestellt [52]. Sie erzeugt durch eine Modifizierung der Schauer-Algorithmen die *härteste* Partonemission als erste (plus „Angular Ordering“) und verhindert auf diese Weise die Einführung negativer Eventgewichte. Die Unsicherheit, die durch eine Modifizierung dieser Algorithmen entsteht, wird durch die MC@NLO-Methode allerdings vermieden <sup>34</sup>.

In Kapitel 10 wurde das Setup aus Kapitel 9 prinzipiell übertragen (also die Einstellung bzgl. der Skalen  $\mu_R, \mu_F$ ). Die dort präsentierten LO-Abbildungen

<sup>31</sup>Das ist der Schalter MSTJ(11)=3, „Hybrid Scheme“. Jean Francois Arguin berichtet auf seiner Webseite Werte für  $a = 0.82 \pm 0.22$  und  $b = 2.3 \pm 0.6 \text{ GeV}^{-2}$ .

Siehe: [http://hep.physics.utoronto.ca/JeanFrancoisArguin/topmass/wmass\\_analysis/...bjes\\_lepconstr/bjes\\_lepconstr.html](http://hep.physics.utoronto.ca/JeanFrancoisArguin/topmass/wmass_analysis/...bjes_lepconstr/bjes_lepconstr.html) bzw. Table 3 in [97] und Table 1 in [98].

<sup>32</sup>Dissertation von Axel Leins (2002) „Suche nach der Produktion einzelner Top-Quarks mit dem OPAL-Detektor“: <http://edoc.ub.uni-muenchen.de/535/>.

<sup>33</sup>Diese Zahl hängt davon ab, wie in Abschnitt 9.1 dargelegt, wie das Verhältnis von positiven zu negativen Events ist. Das lässt sich in der HBOOK-Ausgabe ablesen.

<sup>34</sup>In dieser Methode braucht es nicht bekannt zu sein, *wann* die härteste Emission auftritt. Es ist ausreichend, im Mittel diesen Beitrag durch den Subtraktionsterm eliminieren zu können.

sind mit der Standardeinstellung für die Skalen bei höheren Transversalimpulsen ähnlich (oder sogar etwas höher) als die NLO-Abbildungen. Das liegt daran, wie in Abschnitt 10.1 erklärt, dass die negativen Events als Korrektur in den LO-Abbildungen fehlen. Deswegen wurden für die LO-Graphen diese Skalen etwas reduziert.

In Abschnitt 10.2 konnte ausgenutzt werden, dass unter PYTHIA (v6.115) die dominantesten Zerfallskanäle implementiert sind (vgl. [89]). Eine weitere Annahme war, dass der „Primary Vertex“, also der zentrale „Stoßpunkt“ der Hadronen, als bekannt (im Nullpunkt) vorausgesetzt werden konnte. Zudem wurden zur Rekonstruktion maximal zwei sukzessive Zerfälle betrachtet (mit einem Zerfallsgewicht von  $> 10^{-8}$ ). Dabei wurde um den jeweiligen Vertex eine kleine Kugel mit einem Radius  $b$  gedacht gelegt. Konvergierten zwei Impulsvektoren innerhalb dieser kleinen „Unsicherheit“, so wird davon ausgegangen, dass es aus einem Zerfall stammte. Dass dieser Stoßparameter  $b$  so „überdimensioniert“ gewählt werden konnte (Millimeterbereich), hat damit zu tun, dass in jedem Hadronen-Event nur relativ wenige Ereignisse durch die anderen „Cuts“ übrig gelassen werden (Massebedingung, Bedingungen an die Impulse, insbesondere an die Transversalimpulse. Die Apparatur weist bzgl. solcher Größen ein „Fenster“ auf, indem eine Identifikation sicher möglich ist, z. B. gilt im CMS-Experiment für die sichere  $\pi, K, p$ -Erkennung die Bedingung, dass ihr  $p_t$  im Bereich von  $0.3 - 1.5$  GeV/c liegen muss, siehe auch [87] und [90]–[92]; Ähnliches gilt für die Elektronen und Müonen mit einem  $p_t$ -Fenster von  $4 - 1000$  GeV/c bzw.  $3.5 - 1500$  GeV/c.). Da in Events hauptsächlich die leichteren Hadronen produziert werden wie Pionen und Kaonen, ist eine Überprüfung der Masse (des zerfallenden Objektes) wichtig. Z. B. können die Töchterprodukte  $\pi^+ K^-$  sowohl das  $\bar{B}_d^0$ -Meson ergeben als auch das  $B_s^0$ -Meson (jedes dieser Mesonen hat also diesen Zerfallskanal). Das zweite Meson ist natürlicher etwas schwerer. Betrachtet man nun die Zerfallsprodukte verteilt auf einen Raumwinkel von  $4\pi$  unter Beachtung einer typischen Zerfallslänge ( $dl$ ) zwischen dem „Primary Vertex“ und dem „Secondary Vertex“ von einigen Millimetern, dann sind die gewählten „Cuts“ zur Identifikation ausreichend (unter PYTHIA).

Es stellt sich heraus, dass eine Identifikation mit Hilfe von DPMJET III kein prinzipielles Problem darstellt. Die oben angesprochenen Annahmen (fester Stoßpunkt im Nullpunkt, max. zwei Zerfallsgenerationen) beschleunigen zwar eine Identifikation, können diese aber nicht verhindern. Ein (meist) üblicher Vertexfit schmiert das Signal über dem Background höchstens aus. Verschwindet dieses Signal, so kann durch fortwährendes Anpassen der „Cuts“, insbesondere der geometrischen „Cuts“, und entsprechend längerer Laufzeit, dieses wieder in den Vordergrund gebracht werden. Dehnt man die Anzahl der Zerfallsgenerationen aus, so kann auch diese Hürde durch eine längere Laufzeit genommen werden, was natürlich zu technischen Schwierigkeiten führen kann („Wie lange kann ein Rechner unbeaufsichtigt und sicher laufen?“) aber nicht zu prinzipiellen. Die Partikelidentifikation, hier besonders solche aus dem Bereich der  $b$ -Hadronen, ist natürlich nur ein Zwischenschritt. Von größerem Belang ist z. B. ([87]–[90]) die Bestimmung der relativen Häufigkeit bestimmter  $B$ -Meson-Übergänge in CP-Eigenzustände, z. B. des  $B_{d/s}^0, \bar{B}_{d/s}^0$ . Daraus können dann interessierende Größen, wie die drei Winkel <sup>35</sup> der Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, be-

<sup>35</sup>Diese Winkel können aus den sechs Unitaritätsbedingungen, die aus  $VV^\dagger = 1_3$  folgen, bestimmt werden [99, 100], wobei  $V$  die CKM-Matrix darstellt.

stimmt werden, siehe z. B. [90]. Im Prinzip ist es nun mit dem Vorhandensein der  $b$ -Hadronen möglich, alle Parameter der CKM-Matrix zu bestimmen.



## Appendizes

In diesen Appendizes werden verschiedene, zumeist grundlegende Dinge aufgeführt, die in den vorherigen Abschnitten und Anhängen keinen Platz oder keine Zuordnung gefunden haben. Was zu Beginn des Kapitels 2 angeführt wurde, soll im Wesentlichen auch für die folgenden Appendizes zutreffen, nämlich ein gewisses Maß an Hintergrundinformation zu liefern.

In den Abschnitten 2.1-2.6 sind einige Informationen der QCD betreffend aufgeführt und im Abschnitt 6.4 sind Informationen bzgl. der „Schauer-Algorithmen“ zu finden.

## A Dirac-Algebra in N Dimensionen

In diesem Appendix werden einige Relationen aufgeführt, auf die man in der Literatur immer wieder stößt. Vieles kann in [10] oder [56] gefunden werden. [10] hat eine etwas gewöhnungsbedürftige Konvention. Auch in [101] sind viele Relationen aufgeführt.

Die bekannteste Eigenschaft der Gamma-Matrizen ist sicher

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} I$$

für  $\mu, \nu \in (0, \dots, n-1)$ . Damit können die meisten der folgenden Identitäten gezeigt werden.

Sobald Spuren involviert sind, ist die Vertauschung zweier Matrizen innerhalb der Spur nützlich

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

Mit  $I = I_N$  ist immer die Einheitsmatrix in  $N$  Dimensionen gemeint. Die Spur  $Tr(I_N) = N$  wird *definiert*, damit auch in  $N$  Dimensionen

$$Tr(\gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4g_{\alpha\beta}$$

gilt [102]. Spuren über eine ungerade Anzahl an Gamma-Matrizen verschwinden

$$Tr(\text{ungerade \# an } \gamma) = 0$$

Das Slashsymbol, welches im Folgenden vorkommen wird, kann über

$$\not{a} = a \cdot \gamma = a_0 \gamma_0 - \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$$

definiert werden, wobei  $\vec{a}$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Vektor ist. Die Komponenten dieses Vektors vertauschen mit den Gamma-Matrizen.

In vier Dimensionen ist eine zusätzliche Gamma-Matrix,  $\gamma_5$ , konstruierbar. Sie ist in  $N = 4$  definiert über

$$\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu$$

Einige elementare Eigenschaften in  $N$  Dimensionen sind (siehe für eine Behandlung von  $\gamma_5$  in der „Dimensionalen Regularisierung“ auch [103])

i)  $\gamma_0^2 = I$

ii)  $\gamma_i^2 = -I$  für  $i = 1, \dots, n-1$

- iii)  $\gamma_0^+ = \gamma_0$   
 iv)  $\gamma_i^+ = -\gamma_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$

Weitere Eigenschaften sind

- a)  $\gamma_\mu \gamma^\mu = g_\mu^\mu I = NI$   
 b)  $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu = (2 - N)\gamma_\alpha$   
 c)  $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4g_{\alpha\beta}I + (N - 4)\gamma_\alpha \gamma_\beta$   
 d)  $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma^\mu = -2\gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\alpha - (N - 4)\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda$   
 e)  $Tr(\gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4g_{\alpha\beta}$   
 f)  $Tr(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\rho) = 4(g_{\alpha\beta}g_{\lambda\rho} - g_{\alpha\lambda}g_{\beta\rho} + g_{\alpha\rho}g_{\beta\lambda})$   
 g)  $Tr(\gamma_5) = 0$   
 h)  $Tr(\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0$   
 i)  $Tr(\not{a} \not{b}) = 4(a \cdot b)$   
 j)  $Tr(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$

Zur Lösung der Eigenschaft b) muss man nur  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I$  ausnutzen. Damit iteriert immer ein Index nach rechts (oder links), so dass (irgendwann) a) benutzt werden kann. Dieses Vorgehen gilt auch für c) und d).

Eigenschaft e) (f),h)) profitiert von der Vertauschung zweier Matrizen unter der Spur, denn  $Tr(AB) = Tr(BA)$ . Addiert man zu e)  $Tr(\gamma_\beta \gamma_\alpha)$  und teilt durch Zwei, so gilt die Identität  $\frac{1}{2}Tr(\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}) = \frac{1}{2}Tr(2g_{\mu\nu}I) = 4g_{\mu\nu}$ .

g) und h) sind auch klar, wenn die Spur einer ungeraden Anzahl an Gamma-Matrizen verschwindet. Zur Ableitung von h) kann auch hier wieder  $\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_\alpha$  hinzu addiert werden, was in g) mündet (multipliziert mit einer Konstanten).

In i) können die Komponenten  $a, b$  aus der Spur herausgezogen werden (mit  $\not{a} = a \cdot \gamma = a_\mu \gamma^\mu$ ). Dann kann e) benutzt werden.

j) ist etwas umfangreicher. Zunächst bringt man die vier Komponenten *maximal* durcheinander, was in einer Rotation um eine Stelle nach links oder rechts resultiert (man kann auch zwei oder drei Stellen nehmen), also z. B.

$$Tr(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = +Tr(\not{b} \not{c} \not{d} \not{a})$$

Danach betrachtet man zwei Slash-Vektoren (hier  $\not{d}, \not{a}$ ) und wendet einmal  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I$  an, was in

$$Tr(\not{b} \not{c} \not{d} \not{a}) = -Tr(\not{b} \not{c} \not{a} \not{d}) + 2a \cdot d \cdot Tr(\not{b} \not{c})$$

resultiert. Dieses wiederholt man, bis auf der rechten Seite das Ausgangsobjekt wieder dasteht.

In den Artikeln [104, 105] kann man die Beschreibung eines neuen Algorithmus zur Auswertung von Spuren von Dirac-Gamma-Matrizen finden, mit dem der Aufwand zu ihrer Auswertung wesentlich reduziert werden kann. Z. B. besteht die Auswertung einer Spur mit 10  $\gamma$ -Matrizen mit Hilfe von  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I$  schon aus 945 Termen. Die neue Methode reduziert diese Zahl auf ganze 32.

Zum Schluss dieses Appendixes A werden einige Relationen bzgl. des Farbaustausches in Feynman-Diagrammen angegeben.

In jedem QCD-Feynman-Diagramm muss der Farbaustausch miteinbezogen werden. Für  $N_c = 3$  Farben ist die zugrunde liegende Gruppenstruktur die der  $SU(3)$ . Dazu existieren  $8 = 3^2 - 1$  Farbmatriizen entsprechend der 8 existierenden Gluonen-Felder.

Die Farbmatriizen werden üblicherweise mit  $T_a$ , ( $a = 1, \dots, 8$ ), bezeichnet mit  $(T_a)_{ij}$ , was einen Farbübergang der Linie mit der „Farbe“  $i$  nach „Farbe“  $j$  kennzeichnen soll unter Aussendung eines Gluons mit Farbe  $i\bar{j}$ . Das entspricht dem „Quark-Quark-Gluon“-Vertex Farbübergang in der QCD. Eine häufigere Schreibweise ist für den gleichen Übergang  $(T_a)_{i\bar{j}}$ , wobei der hochgestellte Index die *zukünftige* Farbe der Linie anzeigen soll (entsprechend dem zeitlichen Verlauf des Diagramms) oder  $(T_a)_{\bar{j}i}$ , um mit  $\bar{j}$  die Antifarbe des ausgesandten Gluons zu kennzeichnen (und damit die Farbe  $j$ , die die Linie nun hat).

Die Matrizen erfüllen die Kommutatorgleichung

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

und die Antikommutatorgleichung

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3}\delta_{ab}I + d_{abc}T_c$$

$f_{abc}, d_{abc}$  sind die Strukturkonstanten. Für  $f_{abc}$  gelten

a	b	c	$f_{abc}$
1	2	3	1
1	4	7	1/2
1	5	6	-1/2
2	4	6	1/2
2	5	7	1/2
3	4	5	1/2
3	6	7	-1/2
4	5	8	$\sqrt{3}/2$
6	7	8	$\sqrt{3}/2$

Die Konstanten  $d_{abc}$  lassen sich leicht ableiten, wenn man Gln. (63), (64) der Eigenschaft benutzt. Multipliziert man

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

mit  $T_c$  und zieht die Spur, so ergibt sich

$$if_{abc} = 2Tr(T_a T_b T_c - T_b T_a T_c)$$

Der gleiche Vorgang für die Antikommutatorgleichung

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3}\delta_{ab}I + d_{abc}T_c$$

liefert nach einer Multiplikation mit  $T_c$  sowie Ziehen der Spur

$$d_{abc} = 2Tr(T_a T_b T_c + T_b T_a T_c)$$

Addiert man beide Terme, so entsteht die Eigenschaft aus Gln. (65). Die letzte Gleichung, Gln. (66), kann mit Gln. (62) einfach gezeigt werden, wenn man bedenkt, dass nur die Terme mit  $i = j$  und  $l = k$  beitragen. Danach muss Gln. (64) benutzt werden.

Die Eigenschaften sind

$$(T_a)_i^j (T_a)_k^l = \frac{1}{2} \left[ \delta_i^l \delta_k^j - \frac{1}{3} \delta_i^j \delta_k^l \right] \quad (62)$$

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad (63)$$

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (64)$$

$$\text{Tr}(T_a T_b T_c) = \frac{1}{4} (d_{abc} + i f_{abc}) \quad (65)$$

$$\text{Tr}(T_a T_b T_a T_c) = -\frac{1}{12} \delta_{bc} \quad (66)$$

## B Dimensionale Regularisierung, Wick-Rotation und die Renormierung

Die Notwendigkeit für eine Regularisierung von Integralen besteht immer dann, wenn Integrationen über Wertebereiche durchgeführt werden, die den Integranden unbestimmt werden lässt. Das geschieht im Kontext der Auswertung von Matrixelementen dann, wenn das zugehörige Feynman-Diagramm Schleifen (bzw. Loops) aufweist und Integrationen über innere Impulse ins Unendliche tendieren oder wenn masselose Propagatoren betrachtet werden, die bei kleineren Impulsen zu Pole führen können. Im ersten Fall treten sicher ultraviolette Divergenzen auf, im zweiten Fall werden zusätzlich infrarote Divergenzen erscheinen. In diesem Abschnitt soll die dimensionale Regularisierung nur kurz skizziert werden. Diskussionen und einige Beispiele sind in [101, 106, 107, 108, 109, 110] zu finden.

Integrale der Form

$$I(4) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^2 [(k-p)^2 + m^2]} \quad (67)$$

sind in  $D = 4$  Dimensionen divergent, wenn der innere Impuls nach  $k \rightarrow \infty$  geht. Das ist leicht zu sehen, indem der Divergenzgrad des Integrals Gln. (67) bestimmt wird. Dazu dient ein Vergleich der Potenzen von Zähler und Nenner: Ist die Differenz kleiner Null, so konvergiert das Integral. Sonst divergiert es. Hier ist der Divergenzgrad  $4-4=0$ , so dass das Integral für  $k \rightarrow \infty$  logarithmisch divergiert.

Verlegt man das Integral in drei Dimensionen, so ist der Divergenzgrad  $3-4=-1$ , und das Integral  $I(3)$  konvergiert. Es wurde also allein durch eine Veränderung der Dimension eine Konvergenz des Ausdrucks erreicht.

Ermutigt durch diesen Erfolg versucht man dann, die Dimension als kontinuierliche und komplexe Variable zu betrachten, die, nachdem das Integral (schlussendlich) in  $D = 4 + \epsilon$  (oder häufig auch  $D = 4 \pm 2\epsilon$ ) Dimensionen ausgerechnet wurde, zurück auf  $D = 4$  Dimensionen gesetzt wird. Für das obige Beispiel ist  $\epsilon < 0$ . Man kann natürlich nicht erwarten, dass die Divergenzen nach dem Ausführen des Integrals in  $D$  Dimensionen plus anschließendem Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  verschwunden sind. Vielmehr wird sich herausstellen, dass die Unendlichkeiten sich als Pole eines Parameters  $\epsilon$  zeigen werden, die in Potenzen dieser Variablen im Endergebnis auftauchen werden.

Wichtige Relationen des Hilbertraumes der Zustände bleiben unter den folgenden Eigenschaften erhalten, wenn auch in modifizierter Form. Seien  $f, g$  Funktionen von  $D$ -dimensionalen Vektoren  $p, q$  und  $a, b, \lambda$  seien beliebige Skalare ( $\lambda > 0$ ). Dann gilt zunächst mit der Abkürzung  $p \equiv \vec{p}$  (bis auf die letzte Gleichung, die in diesem Zusammenhang einen Zusatz darstellt)

- Linearität  $\int d^D p [af(p) + bg(p)] = a \int d^D p f(p) + b \int d^D p g(p)$
- Skaleninvarianz  $\int d^D p f(\lambda p) = \lambda^{-D} \int d^D p f(p)$
- Translationsinvarianz  $\int d^D p f(p+q) = \int d^D p f(p)$
- Definition  $\int d^D p (p^2)^\alpha = 0, \forall \alpha$
- Oberflächenintegral  $\int d^D p p \frac{\partial}{\partial p^\mu} f(p) = 0$

- Isotropie  $\int d^D p p_i p_j f(p^2) = \frac{\delta_{ij}}{D} \int d^D p^2 f(p^2)$
- Ersetzung  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}$

Die letzte Eigenschaft dient dazu, die *überzählige* Massedimension, die durch  $d^D p$  eingeführt wird, wieder zu entfernen. Dazu wird eine beliebige Referenzmasse  $\mu$  definiert. Bei Massen wesentlich kleiner oder größer als  $\mu$  wird jedes Integral so modifiziert, dass es regularisiert ist. Ohne diese Eigenschaft würde jedes Integral eine zusätzliche Massedimension bekommen, wie man im folgenden Beispiel gleich sehen wird. Erwähnt sei noch, dass für reelle  $D$  einige Integrale durchaus existieren können. Für komplexe  $D$  hingegen nimmt man die *rechte* Seite als Definition der *linken* Seite des Gleichheitszeichens.

Als Beispiel wird das Integral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (68)$$

betrachtet, mit  $D = 4 - 2\epsilon < 4$ ,  $\epsilon > 0$ . Diese Wahl wird sich als angenehmer erweisen, als z. B.  $D = 4 + \epsilon < 4$ ,  $\epsilon < 0$ , was auch möglich gewesen wäre. Wichtig ist, dass das Integral in  $D$  Dimensionen konvergent ist. Der Vorfaktor  $\mu^{4-D}$  wird zum Schluss hinzugefügt.

Wie man etwas weiter unten noch genauer sehen wird, sind nicht ganzzahlige Integrationen durch einen Übergang zu Kugelkoordinaten definiert, in der der winkelabhängige Anteil analytisch fortgesetzt wird. Es ist einfach, wenn auch etwas mühevoll, eine Parametrisierung der  $D - 1$  Dimensionen zu erreichen, wenn man bedenkt, dass auch hier

$$|\vec{k}^2| = \sum_{i=1}^{D-1} x_i^2$$

gelten muss, was durch das folgende Gleichungssystem erfüllt werden kann

$$\begin{aligned} x_1 &= |\vec{k}^2| \cos \theta_1 \\ x_2 &= |\vec{k}^2| \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ x_{D-2} &= |\vec{k}^2| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{D-2} \\ x_{D-1} &= |\vec{k}^2| \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \cos \theta_{D-2} \end{aligned}$$

Quadriert man paarweise die Gleichungen, angefangen bei den letzten beiden, so entsteht das Ergebnis. Für die Winkel gelten

$$0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i \in (1, \dots, D-3)$$

und

$$0 \leq \theta_{D-2} \leq 2\pi$$

Darüber kann eine Jacobi-Determinante  $J$  ausgerechnet werden, denn

$$\int d^D k = \int dk_0 d^{D-1} k = \int dk_0 |J| d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{D-2}$$

mit

$$|J| = \sin^{D-3} \theta_1 \sin^{D-4} \theta_2 \dots \sin \theta_{D-3}$$

sowie unter Ausnutzung von

$$\int_0^\pi \sin^n \theta d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (69)$$

sind alle Informationen verfügbar. Im letzten Ausdruck *muss* man für komplexe  $n$  davon ausgehen, dass die rechte Seite die linke *definiert*.

Für kugelsymmetrische Räume geht es aber auch einfacher. Es gilt

$$\int d^D k = \int_0^\infty dk k^{D-1} d\Omega_D$$

wobei  $\Omega_D$  die Oberfläche der  $D$ -dimensionalen Kugel darstellt. Sie ist von der Dimension  $D - 1$ . Im Prinzip kann jedes bekannte Integral zur Bestimmung von  $\int d\Omega_D$  herangezogen werden. Das einfachste *eindimensionale* Integral, welches zur  $D$  Potenz genommen werden kann und darunter faktorisiert, ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \int_0^\infty dx e^{-x^2} \rightarrow (\sqrt{\pi})^D = \left( \int dx e^{-x^2} \right)^D = \int d^D x e^{-\sum_{i=1}^D x_i^2} = \\ &= \int d\Omega_D \int dx x^{D-1} e^{-x^2} = \int d\Omega_D \int d(x^2) (x^2)^{\frac{D}{2}-1} e^{-x^2} = \int d\Omega_D \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \\ &\rightarrow \int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} = \Omega_D \end{aligned} \quad (70)$$

Auch hier wird die linke durch die rechte Seite definiert, wenn  $D$  komplex ist. Das Integral aus Gln. (68) wird zu

$$\int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{(k^2 - m^2)^2} \quad (71)$$

Dass für alle Werte von  $D$  *eine eindeutige* Funktion zur Verfügung steht, wird durch ein Theorem gewährleistet, das die analytische Fortsetzung zweier Funktionen  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  beschreibt.

Seien  $G_1, G_2$  Gebiete, auf denen jeweils die Funktionen  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  analytisch sind, und sei  $R = G_1 \cap G_2 \neq 0$ . Wenn  $g_2(z)$  auf  $R$  mit  $g_1(z)$  übereinstimmt, dann kann es nur eine solche Funktion geben (einen Repräsentanten), und  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  nennt man jeweils die analytische Fortsetzung voneinander. Außerhalb der Region  $R$  können die Funktionen verschiedene Repräsentationen besitzen.

In vielen Integrationen kann die Gamma-Funktion als Ergebnis einer (oder mehrere) Integrationen gewählt werden. Nur zwei der möglichen Darstellungen der Gamma-Funktion sind für komplexe Argumente geeignet [109]. Es sind die Eulersche und die Weierstrass'sche Darstellung der Gamma-Funktion

$$\Gamma_E(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \Gamma_W(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$$

$\Gamma_E(z)$  ist für  $Re(z) > 0$  analytisch,  $\Gamma_W(z)$  ist für alle  $z$  analytisch, *außer* an den Stellen  $z = 0, -1, -2, \dots$ .  $\Gamma_W(z)$  ist damit eine analytische Fortsetzung von

$\Gamma_E(z)$ .

Bei der Auswertung obiger Integrale (Gln. (68), (71)) tritt im Nenner eine Schwierigkeit wegen der Minkowski-Metrik auf, denn

$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$$

Die Integration über die Nullkomponente oder die Raumkomponente erfolgt unabhängig, so dass sicher ein Pol auftritt. Da ab hier nur noch eine Integration wichtig ist, reicht eine Substitution zur Umgehung dieses Problems aus (Wick-Rotation).

Eine „Wick-Rotation“ lässt sich wie folgt veranschaulichen. Man betrachte einen generischen Feynman-Propagator

$$\frac{f(k^2)}{[k^2 - r^2 + i\epsilon]^n}$$

wobei in  $r$  alle Größen vereint sind, wie sie aus einer Feynman-Parametrisierung stammen können oder durch äußere Impulse etc. gegeben sein können. Liegt der Zähler nicht in der Form vor, so kann er durch die Ausnutzung der Isotropie (siehe Eigenschaften zu Beginn des Abschnitts) in diese gebracht werden.

Der Propagator zeigt bei einer  $k_0$  Integration Polstellen auf. Diese sind bei

$$k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + r^2 - i\epsilon} = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + r^2} \mp i\epsilon'$$

lokalisiert. Genauer gesagt liegen sie für die drei möglichen Fälle bei

- a)  $\vec{k}^2 + r^2 > 0 \rightarrow (k_0)_1 = \sqrt{\vec{k}^2 + r^2} - i\epsilon'$  und  $(k_0)_2 = -\sqrt{\vec{k}^2 + r^2} + i\epsilon'$
- b)  $\vec{k}^2 + r^2 < 0 \rightarrow (k_0)_1 = i\sqrt{-(\vec{k}^2 + r^2)} - \epsilon''$  und  $(k_0)_2 = -i\sqrt{-(\vec{k}^2 + r^2)} + \epsilon''$
- c)  $\vec{k}^2 + r^2 = 0 \rightarrow (k_0)_1 = \sqrt{-i} - \epsilon'''$  und  $(k_0)_2 = -\sqrt{-i} + \epsilon'''$

Wie man sieht, liegen alle Pole in Quadrant 2 und 4. Die folgende Grafik, Abbildung 58, soll das veranschaulichen. Eine Integration über das holomorphe Gebiet, welches durch der Weg  $C$  umschlossen ist, wird damit zu Null. Es gilt also

$$\int_C dk_0 \frac{f(k^2)}{[k^2 - r^2 + i\epsilon]^n} = 0$$

Die Integration über die Kreisbeiträge verschwindet, und somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{[k^2 - r^2 + i\epsilon]^n} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{f(k^2)}{[k^2 - r^2 + i\epsilon]^n}$$

Mit einer zusätzlichen Substitution

$$k^0 \rightarrow ik_E^0, \quad \vec{k}^i \rightarrow \vec{k}_E^i, \quad i = 1, 2, \dots, D-1$$

folgt für

$$k_E^2 = -(k_E^0)^2 - (\vec{k}_E^i)^2 < 0$$



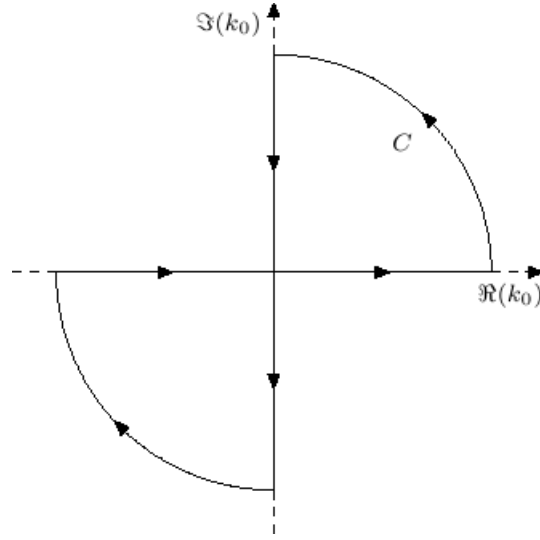


Abbildung 58: Integration über die Contour  $C$  umgeht die Pole im Quadranten 2 und 4.

Der Index „E“ steht für Euklidisch. Schlussendlich wird aus dem Ausgangsintegral

$$i(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{f(k_E^2)}{[k_E^2 + r^2 - i\epsilon]^n} \quad (72)$$

Man dreht die Nullkomponente zu einer Raumkomponente und verlässt damit den Minkowski-Raum zugunsten des Euklidischen Raums. Es ist also durch die obige Substitution bzgl. der Nullkomponente gelungen, Pole im Nenner zu umgehen.

Zurück zum Beispiel. Durch Weglassen des Index „E“ und einem Übergang zum kugelsymmetrischen Raum (Gln. (71), (72)) entsteht

$$\begin{aligned} i \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{(k^2 + m^2)^2} &= i \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dk \frac{k k^{D-2}}{(k^2 + m^2)^2} = \\ &= i \frac{1}{2} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d(k^2) \frac{(k^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(k^2 + m^2)^2} \end{aligned} \quad (73)$$

Unter Benutzung der Substitution

$$x = \frac{m^2}{k^2 + m^2}$$

entsteht die „Beta-Funktion“

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (74)$$

Denn wird

$$\frac{x}{m^2} = \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad k^2 = \frac{m^2(1-x)}{x}, \quad d(k^2) = -\frac{m^2}{x^2} dx$$

eingesetzt in das Integral, so entsteht aus Gln. (73) ( $D = 4 - 2\epsilon$ )

$$\begin{aligned} & i \frac{1}{2} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \left( \frac{1}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \int_0^1 dx x^{1-\frac{D}{2}} (1-x)^{\frac{D}{2}-1} = \\ & = i \frac{1}{2} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \left( \frac{1}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(2)} = \\ & = i \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \left( \frac{1}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma(2-\frac{D}{2}) \rightarrow i \frac{(4\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left( \frac{\mu}{m^2} \right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \end{aligned}$$

Das Ausgangsintegral (Gln. (68))

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}$$

ist für  $D = 4$  logarithmisch divergent. Durch Verkleinerung der Dimension auf  $D = 4 - 2\epsilon$  wurde eine Konvergenz erreicht (regularisiert). Die ursprüngliche ultraviolette Divergenz deckt sich erneut auf, wenn  $\epsilon \rightarrow 0$  betrachtet wird, denn die Gamma-Funktion lässt sich in eine Laurentreihe um  $\epsilon = 0$  entwickeln und ist bis  $\mathcal{O}(\epsilon)$  durch

$$\Gamma(\epsilon) \simeq \frac{1}{\epsilon} - \gamma$$

gegeben ( $\gamma$  ist die Euler-Mascheroni-Konstante). Infrarote Divergenzen tauchen hier nicht auf, da hierfür die Masse  $m$  als Regulator dient. Diese Masse lässt keine Pole zu für  $k \rightarrow 0$ .

Die Entwicklung von

$$i \frac{(4\pi)^\epsilon}{16\pi^2} \left( \frac{\mu}{m^2} \right)^\epsilon \Gamma(\epsilon)$$

bis  $\mathcal{O}(\epsilon)$  lautet damit

$$\frac{i}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{\mu}{m^2} + \log(4\pi) \right)$$

Alle Divergenzen sind also nun auf Pole der Form  $\frac{1}{\epsilon^\alpha}$  abgebildet worden, mit  $\alpha \geq 1$ . Eine Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{1}{\epsilon}$  bezeichnet man als „Minimale Subtraktion“ ( $MS$ ), eine Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi)$  wird mit  $\overline{MS}$  bezeichnet. Generell gilt, je mehr unabhängige Divergenzen auftreten können, z. B. durch Mehrschleifenintegrale, desto höher wird  $\alpha$ .  $\alpha$  spiegelt also die Anzahl der Divergenzen wider.

Bevor nun auf den Begriff der „Renormierung“ eingegangen wird mit einem erläuterndem Beispiel, werden einige mehr oder weniger wichtige Hilfsintegrale und Parametrisierungen aufgeführt, auf die man in der entsprechenden Literatur immer wieder stößt.

- $\int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \frac{(Q^2)^r}{(Q^2 - C)^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(16\pi^2)^{n/4}} C^{r-m+n/2} \frac{\Gamma(r+n/2)\Gamma(m-r-n/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m)}$
- $\frac{1}{k^2+m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(m^2+k^2)}$ ,  $m \neq 0$
- $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\alpha k^2 + 2k \cdot b} = \frac{(\pi/\alpha)^{D/2}}{(2\pi)^D} e^{\frac{b^2}{\alpha}}$ ,  $x > 0$

- d)  $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}$
- e)  $\frac{1}{abc} = \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \frac{1}{[ayx+by(1-x)+c(1-y)]^3}$
- f)  $\frac{1}{a^r b^m} = \frac{\Gamma(r+m)}{\Gamma(r)\Gamma(m)} \int_0^1 dx \frac{x^{r-1}(1-x)^{m-1}}{[ax+b(1-x)]^{r+m}}$
- g) Integrale mit einer ungeraden Anzahl an Integrationsvariablen im Zähler sind Null

Eine ganze Reihe an skalaren Integralen sind in [110] zu finden.

Das Integral a) ist wie das Beispiel zu lösen. Erst eine Wick-Rotation der  $Q_0$ -Komponente, dann eine Aufspaltung des Maßes in Radius- und Winkelintegration. Eine Substitution über  $x = \frac{C}{Q^2+C}$  lässt erneut die Beta-Funktion entstehen, deren Darstellung als Gamma-Funktion oben angegeben wurde.

Die linke Seite von b) stellt einen Propagator da, der schon Wick rotiert ist. b) meint eine andere Art der Parametrisierung von Propagatoren, als die Formen ab d) (Feynman-Parametrisierung). Der Propagator aus b) wird unter c) einfach mit Hilfe eines Gauß-Integrals bestimmt (Exponent auf Binomialform bringen). c) kann sofort im Euklidischen berechnet werden, indem die Integration von  $(-\infty, \infty)$   $D$ -mal (bzw. eine Integration ausführen, und den Wert  $D$ -mal multiplizieren) durchgeführt wird (der Skalar ist  $k \cdot b = k_x b_x + k_y b_y + \dots$ ). Natürlich kann das Integrationsmaß auch in einem anderen Raum betrachtet werden. Die Parametrisierung ab d) heißt Feynman-Parametrisierung.

Die „Renormierung“ befasst sich damit, die Divergenzen, die sich nach der Regularisierung als Pole in einem kleinem Parameter  $\epsilon$  manifestieren, glaubwürdig wieder zu entfernen. Als Ansatzpunkt für diesen Vorgang sind die einzelnen Bestandteile der Lagrangedichte selbst. Sowohl die Parameter wie Masse, Ladung oder Eichparameter etc. als auch die Felder selbst können in der *multiplikativen* „Renormierung“ mit den so genannten Z-Faktoren multipliziert werden. Diese Dichte verursacht mit diesen Bestandteilen die Unendlichkeiten. Da diese Z-Faktoren selbst wieder eine Störungsentwicklung in dem Kopplungsparameter (wie  $\alpha_s$  in der QCD) zulassen, und diese Reihe in der untersten Ordnung ( $\alpha_s^0$ ) beginnt, reproduziert sich zunächst deswegen die ursprüngliche Lagrangedichte (mit seinen Unendlichkeiten). Nachfolgende Terme sind zur Ordnung  $\alpha_s^i$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ). Diese Terme werden dann herangezogen, um die Unendlichkeiten aus der ursprünglichen Lagrangedichte zu eliminieren (zu bemerken ist, dass diese Terme der Faktoren selbst unendlich sind; da diese Unendlichkeiten aber auf die „gleiche Art und Weise“ zustande kommen, ergibt  $\infty - \infty = 0$ ).

Die Z-Faktoren sind

$$Z_j = 1 + \sum_i \delta Z_j^i$$

mit

$$\delta Z_j^i \propto \alpha_s^i$$

In  $Z_j$  sind alle zu verändernden Faktoren für die Parameter und Felder enthalten.

Als Beispiel könnte die Lagrangedichte aus der QED herangezogen werden. Mit

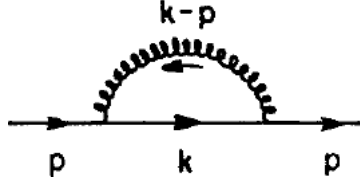


Abbildung 59: Ein-Loop-Diagramm.

Renormierungsfaktoren lautet sie

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_A(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{Z_\xi\xi}\right)Z_A(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \quad (75)$$

$$Z_\psi\bar{\psi}(i\not{\partial} - Z_m m)\psi + Z_e Z_\psi\sqrt{Z_A}e\bar{\psi}A\psi$$

Diese Lagrangedichte wurde durch eine Uminterpretation seiner Elemente erreicht, indem

$$A^\mu \rightarrow \sqrt{Z_A}A^\mu, \quad \psi \rightarrow \sqrt{Z_\psi}\psi, \quad m \rightarrow Z_m m, \quad e \rightarrow Z_e e, \quad \xi \rightarrow Z_\xi\xi$$

in die Ausgangsdichte gesetzt wurde.

Wenn  $Z_j = 1 + \delta Z_j^1$  mit  $\delta Z_j = \mathcal{O}(\alpha_s^1)$  (Einschleifenentwicklung), und der Index  $j$  zeigt die verschiedenen Z-Faktoren an (und nicht die Störungsordnung!), dann zerfällt die ursprüngliche Lagrangedichte (Gln. (75))

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}(\delta Z_j^1)$$

Der erste Anteil liefert die „bekannten“ Feynman-Regeln. Der letzte Term liefert die „Counterterme“, also diejenigen Terme, die mit Hilfe der Z-Faktoren die „Unendlichkeiten“ beseitigen werden. Dazu müssen aber noch Randbedingungen angebracht werden. Die sind derart, dass die freien Konstanten, also die  $\delta Z_j^1$  (in der Einschleifenentwicklung), festgelegt werden. Diese Festlegung geschieht an einem im Prinzip beliebigen „Renormierungspunkt“. Das folgende Beispiel wird das Vorgehen verdeutlichen.

Das Beispiel stellt die Selbstenergie eines Fermions (Quark) durch ein „virtuelles“ Gluon („Ein-Loop-Graph“) dar, siehe Abbildung 59.

Der nötige Propagator [56] ist zum einen der Fermionpropagator

$$\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}\delta_{\alpha\beta}$$

$\alpha, \beta$  stellt den Farbanteil dar und die Masse  $m$  wird im Folgenden vernachlässigt, sowie zum anderen der Gluonpropagator, der in der Feynman-Eichung

$$-i\frac{g_{\mu\nu}\delta_{ab}}{p^2 + i\epsilon}$$

lautet, wobei  $a, b$  der Farbanteil ist. In  $D = 4 - \epsilon$  Dimensionen entsteht dann der Ausdruck (die willkürliche Skala  $\mu^\epsilon$  wird wieder zum Schluss eingefügt)

$$\Sigma^{(2)}(\not{p}) = rg^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu \not{k} \gamma^\mu}{k^2(k-p)^2} \quad (76)$$

Alle Faktoren, wie Farbmatrizen und  $i$ -Faktoren sind in der Größe  $r$  untergebracht. Der Nenner ist nach den Rechenregeln aus Appendix A für

$$\gamma_\mu \not{k} \gamma^\mu = (2 - D) \not{k}$$

mit  $2 - D = \epsilon - 2$ . Mit Hilfe der Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{k^2(k-p)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2(1-x) + (k-p)^2x]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - 2k \cdot px + p^2x]^2}$$

und den Substitutionen

$$Q = k - px \rightarrow Q^2 = k^2 - 2k \cdot px + p^2x^2, \quad C^2 = p^2x^2 - p^2x = p^2x(x-1)$$

entsteht zunächst aus Gln. (76)

$$\Sigma^{(2)}(\not{p}) = rg^2(\epsilon - 2) \int_0^1 dx \int \frac{d^D Q}{(2\pi)^D} \frac{\not{Q} + \not{px}}{[Q^2(x) - C^2(x)]^2} \quad (77)$$

Das  $Q$ -Integral kann mit der in diesem Appendix B angegebenen Formel ausgewertet werden (das Integral über  $Q$  ist Null!). Es entsteht

$$\Sigma^{(2)}(\not{p}) = rg^2(\epsilon - 2) \left( i \frac{(-1)^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \right) \int_0^1 dx \frac{\not{px}}{(C^2)^{2-D/2}}$$

Das Integral ist

$$\begin{aligned} \not{p} \int_0^1 dx x (C^2)^{D/2-2} &= \not{p} \int_0^1 dx x (p^2x(x-1))^{-\epsilon/2} = \\ &= \not{p} (-p^2)^{-\epsilon/2} \int_0^1 dx x^{1-\epsilon/2} (1-x)^{-\epsilon/2} = \not{p} (-p^2)^{-\epsilon/2} B(2 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}) \end{aligned}$$

Hier wurde wieder von der Beta-Funktion (Gln. (74)) Gebrauch gemacht. Alles zusammen ergibt (mit der nötigen Ersetzung  $g^2 \rightarrow g^2 \mu^\epsilon$ )

$$\Sigma^{(2)}(\not{p}) = \not{p} \left[ ir \frac{\mu^\epsilon g^2}{(16\pi^2)} \Gamma(\epsilon/2) \frac{(4\pi)^{\epsilon/2}}{(-p^2)^{\epsilon/2}} (\epsilon - 2) B(2 - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}) \right]$$

Eine Laurent-Entwicklung um  $\epsilon = 0$  ergibt (z. B. mit Hilfe von Mathematica)

$$\Sigma^{(2)}(\not{p}) = - \not{p} ir \frac{g^2}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \log \frac{-p^2}{\mu^2} + 1 + \log(4\pi) - \gamma \right] + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Für die Entwicklung einer Gamma-Funktion reichen aber häufig in diesem Kontext die Formeln (sowie der obige Ausdruck  $\Gamma(\epsilon) \simeq \frac{1}{\epsilon} - \gamma$ )

$$\Gamma(2/\epsilon) \simeq \frac{2}{\epsilon}, \quad B(N - \epsilon/2, 1 - \epsilon/2) \simeq \frac{1}{N}, \quad B(N - \epsilon/2, 2 - \epsilon/2) \simeq \frac{1}{N(N+1)}$$

Auch in diesem Ausdruck manifestiert sich die ultraviolette Divergenz in dem Pol  $\epsilon$ .

Wie kann man nun  $\Sigma^{(2)}(\not{p})$  endlich machen? Im  $MS$ -System wird dazu, grob gesagt [108], einfach der Pol selbst aus  $\Sigma^{(2)}(\not{p})$  entfernt durch entsprechende Anpassung des  $Z$ -Faktors.

$\Sigma^{(2)}(\not{p})$  ist proportional zum Impuls  $p$ . Zur Anpassung des  $Z$ -Faktor betrachtet man deswegen das Inverse der Summe des *unkorrigierten*  $\frac{1}{\not{p}}$ -Propagators und der Korrektur  $\Sigma^{(2)}(\not{p})$  zum *exakten*, aber unrenormalisierten Propagators des Fermions (die Masse war vernachlässigt worden), also

$$P^{-1} = \not{p} + \Sigma^{(2)}(\not{p})$$

und setzt

$$P_R^{-1} = ZP^{-1}$$

Der Index  $R$  deutet den renormalisierten inversen Propagator an. Aus der letzten Gleichung lässt sich

$$Z = 1 + ir \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

sofort ablesen. Es ist der  $Z_\psi$ -Faktor aus der Counterterm-Lagrangedichte, denn diese Felder (in  $\bar{\psi}(i \not{\partial})\psi$ ) schließen den Divergenz verursachenden Operator ein (durch eine Funktionalableitung nach den Feldern und einer Fouriertransformation sowie anschließender Invertierung entsteht der Propagator  $\frac{1}{\not{p}-m}$ ). Damit ist die Korrektur durch

$$\Sigma_R^{(2)}(\not{p}) = \not{p} ir \frac{g^2}{16\pi^2} \left[ \log \frac{-p^2}{\mu^2} - 1 - \log(4\pi) + \gamma \right] + \mathcal{O}(\epsilon)$$

gegeben.

Es gibt auch andere Subtraktionsschemata. Z. B. kann die renormalisierte Korrektur

$$\Sigma_R^{(2)}(\not{p})$$

so definiert werden, dass von der unrenormalisierten Korrektur  $\Sigma^{(2)}(\not{p})$  der gleiche Ausdruck *subtrahiert* wird (an dem oben erwähnten Renormalisierungspunkt), ausgewertet an einem bestimmten Wert des Impulses  $p^2 = -\tilde{p}^2$ , also  $\Sigma^{(2)}(\not{p})_{p^2=-\tilde{p}^2}$ . Damit gilt

$$\Sigma_R^{(2)}(\not{p}) = \Sigma^{(2)}(\not{p}) - \Sigma^{(2)}(\not{p})_{p^2=-\tilde{p}^2}$$

Mit  $P_R^{-1} = ZP^{-1}$  ergibt sich für den  $Z$ -Faktor

$$Z = 1 + ir \frac{g^2}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \log \frac{\tilde{p}^2}{\mu^2} + 1 + \log(4\pi) - \gamma \right]$$

und für die renormalisierte Korrektur des Propagators

$$\Sigma_R^{(2)}(\not{p}) = \not{p} ir \frac{g^2}{16\pi^2} \log \frac{-p^2}{\mu^2}$$

Die Ergebnisse sind in den verschiedenen Subtraktionsschemata unterschiedlich, aber  $\Sigma_R^{(2)}(\not{p})$  stellt keine physikalische Größe dar, sondern ist nur als ein solches Element *innerhalb* einer physikalischen Observable anzusehen. Bricht man die Störungsreihe einer Observablen ab, so entstehen also auch Abhängigkeiten von

dem gewählten Schema.

Im Prinzip gilt, dass die Renormalisierung eines mit einer Divergenz behafteten Graphen dadurch erreicht wird, dass man (möglicherweise eine Summe von) Counterterm-Graphen *niedrigerer* Ordnung betrachten muss. Diese Counterterm-Graphen sind invers zum Propagator, und von niedrigerer Ordnung in der Kopplung.

In diesem Beispiel war nur  $\not{p}$  als inverser Propagator zum divergenten Ausdruck  $\not{p} + \Sigma^{(2)}(\not{p})$  vorhanden, der von *niedrigerer* Ordnung ist. Im *MS*-System wurde dann der Z-Faktor

$$Z = 1 + ir \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$$

erzeugt.

Dieses Beispiel betraf nur die Einschleifenentwicklung. Existieren mehrere solcher Schleifen, die natürlich auch unabhängig voneinander Divergenzen erzeugen können, so ist eine einfache Renormierung nicht mehr möglich. Es existieren aber dazu Vorschriften (Algorithmen), wie das BPHZ-Theorem [111], mit der eine Folge von Z-Faktoren erzeugt werden können, die solche Graphen *endlich* machen. Auch dort stellen sich (im *MS*-System) die Z-Faktoren in der Form von

$$Z_j = 1 + \sum_{i=1}^{\text{Anzahl an Schleifen}} \frac{\delta Z_j^i}{\epsilon^i}$$

heraus.

## C Kinematik und Phasenraumvolumen für 2- und 3-Körperprozesse

Dieser Abschnitt stellt einige wesentliche kinematische Grundlagen vor und entstammt im Wesentlichen aus [27, 55, 112]. Dabei werden für einen „Zwei“- und „Drei-Körper“-Prozess die kinematischen Größen aufgeführt.

Anstatt direkt mit den Viererimpulsen eines „ $N$ -Körper-Prozesses“ zu rechnen, ist es häufig einfacher, die zugehörigen Mandelstam-Invarianten zu betrachten. Für einen „Zwei-Körper“-Prozess  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  existieren deren drei,  $s, t, u$ , die in folgender Weise definiert sind ( $p_i$  sind Viererimpulse)

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten so im  $s$ -Kanal, mit  $s > 4m^2$ ,  $t \leq 0$ ,  $u \leq 0$ . Die Summe aller Mandelstam-Invarianten ergibt

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 = 4m^2$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, wenn alle Massen gleich sind, also  $m_i = m \forall i$ . Analoge Gleichungen gelten im  $t$  und  $u$ -Kanal. Dort betrachtet man die zur Gleichung  $1+2 \rightarrow 3+4$  konjugierten Prozesse,  $1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4$  ( $t$ -Kanal) und  $1+\bar{4} \rightarrow \bar{2}+3$  ( $u$ -Kanal). Der Überstrich bedeutet, dass alle additiven Quantenzahlen in ihr Negatives umgekehrt werden. Diese zwei Kanäle erschließen sich also durch Betrachtung des  $s$ -Kanal-Prozesses, indem die Quantenzahlen dieser Teilchen umgekehrt werden. Ihre physikalisch zugänglichen Bereiche liegen für den  $t$ -Kanal bei

$$t \geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad u \leq 0$$

und für den  $u$ -Kanal

$$u \geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad t \leq 0$$

Hier wurden wieder gleiche Massen gesetzt.

Das „Center of Mass“-System ist definiert als  $s$ -Kanal-Größe, in dem

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

gilt. In diesem System vereinfachen sich häufig die Rechnungen. Durch eine einfache Lorentz-Transformation können alle berechneten Größen in andere Systeme transformiert werden.

Im Folgenden werden für dieses System die allgemein gültigen Formeln eines  $2 \rightarrow 2$ -Prozesses angegeben, ohne Beschränkung auf  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ . Die Viererimpulse sind, wenn Teilchen 1 und 2 sich entlang der  $z$ -Achse bewegen, durch

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \vec{p}) = (E_1, 0, 0, p_z) \\ p_2 &= (E_2, -\vec{p}) = (E_2, 0, 0, -p_z) \\ p_3 &= (E_3, \vec{p}') = (E_3, \vec{p}_T, p'_z) \\ p_4 &= (E_4, -\vec{p}') = (E_4, -\vec{p}_T, -p'_z) \end{aligned}$$



Der Vektor  $\vec{p}_T$  ist der Transversalimpuls und liegt in der  $x - y$ -Ebene. Es gilt  $|\vec{p}_T| = |\vec{p}'| \sin \theta$ . Für die  $z$ -Komponente gilt  $p'_z = |\vec{p}'| \cos \theta$ .  $\theta$  ist der Streuwinkel, wobei hier stets implizit der Azimuthwinkel zu Null gesetzt wird und damit nicht auftritt. Praktisch ist dies durch eine orthogonale Drehung in diese Ebene immer möglich.

Die Energiekomponenten können in Abhängigkeit der  $s$ -Kanal-Invarianten geschrieben werden. Es gilt

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 \rightarrow E_1 + E_2 \geq 0 = \sqrt{s} \rightarrow E_2 = \sqrt{s} - E_1$$

Die „On Shellness“-Bedingung liefert  $p_i^2 = m_i^2$ , also im Speziellen für Teilchen 1 und 2

$$p_1^2 = m_1^2 = E_1^2 - p_z'^2, \quad p_2^2 = m_2^2 = E_2^2 - p_z'^2$$

Eine Subtraktion liefert

$$m_1^2 - m_2^2 = E_1^2 - E_2^2 = (E_1 + E_2)(E_1 - E_2) = \sqrt{s}(E_1 - E_2)$$

Einsetzen der beiden Gleichung liefert für  $E_1$

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_1^2 - m_2^2)$$

Auf gleiche Art lassen sich die anderen Energiekomponenten ableiten

$$E_2 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_2^2 - m_1^2)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_3^2 - m_4^2)$$

$$E_4 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_4^2 - m_3^2)$$

Daraus lassen sich sofort die Raumkomponenten ableiten. Mit  $\vec{p}^2 = p_z'^2 = E_1^2 - m_1^2$  und  $\vec{p}'^2 = \vec{p}_T'^2 + p_z'^2 = E_3^2 - m_3^2$  ergibt sich

$$\vec{p}^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_2^2)$$

$$\vec{p}'^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_3 + m_4)^2] [s - (m_3 - m_4)^2] = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_3^2, m_4^2)$$

mit der Funktion  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$ .

Im „High Energy Limit“  $s \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$E_i \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad \forall i$$

und

$$|\vec{p}|, |\vec{p}'| \simeq \frac{\sqrt{s}}{2}$$

Es fehlt noch der Streuwinkel  $\theta$ . Auch dieser kann in Abhängigkeit von, und das gilt natürlich ganz allgemein, den Mandelstam-Invarianten berechnet werden. Von diesen Ergebnissen wurde in den Abschnitten 6.5 und 7.1 Gebrauch gemacht. Die  $t$ -Kanal-Invariante ist

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2|\vec{p}||\vec{p}'| \cos \theta$$

Alle Größen auf der rechten Seite sind oben aufgeführt. Einsetzen liefert

$$\cos \theta = \frac{s^2 + s(2t - \sum_i m_i^2) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_3^2, m_4^2)}$$

was für den Fall gleicher Massen und  $|\vec{p}| = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}$

$$\cos \theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2} \equiv \cos \theta_s$$

Durch eine Vertauschung  $s \leftrightarrow t$  und  $m_2 \leftrightarrow m_3$  für den  $t$ -Kanal sowie  $s \leftrightarrow u$  und  $m_4 \leftrightarrow m_2$  für den  $u$ -Kanal ergeben sich ähnliche Ausdrücke. Diese sind

$$\cos \theta = \frac{t^2 + t(2s - \sum_i m_i^2) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(t, m_1^2, m_3^2)\lambda^{\frac{1}{2}}(t, m_2^2, m_4^2)}$$

mit (gleiche Massen)

$$\cos \theta_t = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}$$

und

$$\cos \theta = \frac{u^2 + u(2t - \sum_i m_i^2) + (m_1^2 - m_4^2)(m_2^2 - m_3^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(u, m_1^2, m_4^2)\lambda^{\frac{1}{2}}(u, m_2^2, m_3^2)}$$

und (gleiche Massen)

$$\cos \theta_u = 1 + \frac{2t}{u - 4m^2}$$

Das nächste wichtige Bezugssystem ist das Laborsystem, in dem ein Teilchen in Ruhe ( $\vec{p} = \vec{0}$ ) betrachtet wird. Hier soll es das Teilchen

$$\vec{p}_2 = \vec{0}$$

sein. Zunächst wird der  $s$ -Kanal betrachtet. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_L, 0, 0, p_L) \\ p_2 &= (m_2, 0, 0, 0) \\ p_3 &= (E_3, \vec{p}_3) \\ p_4 &= (E_4, \vec{p}_4) \end{aligned}$$

Die Mandelstam-Invarianten sind

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_L \\ t &= (p_2 - p_4)^2 = m_2^2 + m_4^2 - 2m_2 E_4 \\ u &= (p_2 - p_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 - 2m_3 E_3 \end{aligned}$$

Die Energien sind wieder einfach auszurechnen und ergeben

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{2m_2}(s - m_1^2 - m_2^2) \\ E_4 &= \frac{1}{2m_2}(m_2^2 + m_4^2 - t) \\ E_3 &= \frac{1}{2m_2}(m_2^2 + m_3^2 - u) \end{aligned}$$

Der Raumanteil ist mit

$$\begin{aligned} p_L^2 &= E_L^2 - m_1^2 = \frac{1}{4m_2^2} \lambda(s, m_1^2, m_2^2) \\ \vec{p}_4^2 &= E_4^2 - m_4^2 = \frac{1}{4m_2^2} \lambda(t, m_2^2, m_4^2) \\ \vec{p}_3^2 &= E_3^2 - m_3^2 = \frac{1}{4m_2^2} \lambda(u, m_2^2, m_3^2) \end{aligned}$$

gegeben. Aus

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_L E_3 + 2p_L |\vec{p}_3| \cos \theta_L$$

lässt sich im  $s$ -Kanal nach dem Winkel  $\cos \theta$  im Laborsystem auflösen. Es ergibt sich für ungleiche Massen (die anstehenden Vertauschungen beziehen sich auf diesen Ausdruck;  $s, t$  sind stets die unabhängigen Variablen)

$$\cos \theta_L = \frac{-m_1^2 - m_3^2 + t + \frac{m_2^2(m_1^2 + m_2^2 - s)(m_1^2 + m_4^2 - s - t)}{2}}{2\sqrt{-m_1^2 + \frac{m_2^2(m_1^2 + m_3^2 - s)^2}{4}} \sqrt{-m_3^2 + \frac{m_2^2(m_1^2 + m_4^2 - s - t)^2}{4}}}$$

Eine Vertauschung  $s \leftrightarrow t$  und  $m_2 \leftrightarrow m_3$  ergibt im  $t$ -Kanal

$$\begin{aligned} \cos \theta_L &= \frac{(-2 + m_2^2(m_1^2 + m_4^2 - 2s))(m_1^2 + m_2^2 - s)}{\sqrt{(-2m_1 + m_1^2 m_2 + m_2^3 - m_2 s)(2m_1 + m_1^2 m_2 + m_2^3 - m_2 s)}} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{m_2^2(2 + m_1^2 + m_4^2 - 2s)(m_1^2 + m_4^2 - 2(1 + s))}} \end{aligned}$$

Im  $u$ -Kanal entsteht durch die Vertauschung der Winkel  $s \leftrightarrow u$  und  $m_2 \leftrightarrow m_4$

$$\cos \theta_L = \frac{-m_1^2 - m_3^2 + t + \frac{m_2^2(m_1^2 + m_2^2 - s)(m_2^2 + m_3^2 - s)}{2}}{2\sqrt{-m_1^2 + \frac{m_2^2(m_1^2 + m_3^2 - s)^2}{4}} \sqrt{-m_3^2 + \frac{m_2^2(m_2^2 + m_3^2 - s)^2}{4}}}$$

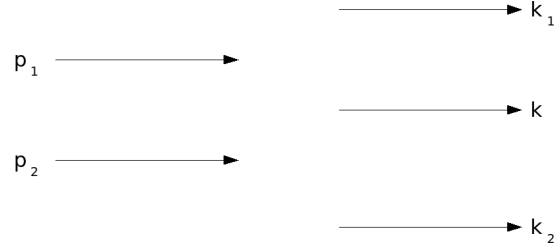


Abbildung 60: Schematische Darstellung des Subprozesses  $p_1 + p_2 \rightarrow k_1 + k_2 + k$ .

Für einen „Drei-Körper“-Prozess können schon 10 Invariante angegeben werden, siehe Abbildung 60, wobei für die folgenden Bezeichnungen die Notation aus [55, 112] übernommen wurde. Mit der Energie-Impulserhaltungs-Gleichung

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2 + k$$

sind die eingehenden und ausgehenden Partonimpulse als solche gekennzeichnet.

Es gibt fünf *unabhängige* Invariante

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2, & t_k &= (p_1 - k)^2, & u_k &= (p_2 - k)^2 \\ q_1 &= (p_1 - k_1)^2, & q_2 &= (p_2 - k_2)^2 \end{aligned} \quad (78)$$

und weitere fünf weitere Invarianten, die *abhängig* von den Erstgenannten sind. Diese sind

$$\begin{aligned} s_2 &= (k_1 + k_2)^2 = s + t_k + u_k, & \hat{q}_1 &= (p_1 - k_2)^2 = 2m^2 - s - t_k - q_1 \\ \hat{q}_2 &= (p_2 - k_1)^2 = 2m^2 - s - u_k - q_2, & w_1 &= (k + k_1)^2 = m - q_1 + q_2 - t_k \\ w_2 &= (k + k_2)^2 = m + q_1 - q_2 - u_k \end{aligned} \quad (79)$$

Da in dieser Arbeit masselose Anfangszustände angenommen werden, wurde  $p_i^2 = 0$  gesetzt.

Mit der Energie-Impulserhaltungsgleichung kann jede Kombination an Impulsen betrachtet werden. Z. B. gilt

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2 - k$$

Quadrieren beider Seiten liefert für die erste Gleichung

$$(k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2 - 2k(p_1 + p_2) = s + (p_1 - k)^2 + (p_2 - k)^2 = s + t_k + u_k$$

Die zweite Gleichung (Gln.-System (79)) kann ähnlich betrachtet werden. Mit  $s = 2p_1p_2$ ,  $t_k = -2p_1k$ ,  $q_1 = -2p_1k_1 + m^2$  (aus Gln.-System (78)) eingesetzt in die rechte Seite der zweiten Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 2m^2 - 2p_1p_2 + 2p_1k + 2p_1k_1 - m^2 &= m^2 - 2p_1p_2 + 2p_1k + 2p_1k_1 = \\ m^2 - 2p_1 \underbrace{(p_2 - k - k_1)}_{=(k_2 - p_1)} &= m^2 - 2p_1(k_2 - p_1) = -2p_1k_2 + m^2 = (p_1 - k_2)^2 = \hat{q}_1 \end{aligned}$$

Die übrigen Gleichungen folgen nach dem selben Schema und sind einfach abzuleiten.

In Abschnitt 6.5 wurde von einer Parametrisierung für die  $2 \rightarrow 3$ -Kinematik Gebrauch gemacht. Diese soll nun hergeleitet werden. Der Anfangszustand sei wieder masselos, also  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ . Das zusätzliche Parton ist ebenfalls masselos,  $k^2 = 0$ . Die ausgehenden Vierervektoren seien  $k_1$  und  $k_2$  mit  $k_1^2 = m^2$ ,  $k_2^2 = m^2$ . Die Parametrisierung sei im Schwerpunktsystem der beiden ausgehenden Quarks angesetzt in Form der bekannten Kugelkoordinaten. Damit gilt zunächst für unbekannte  $\alpha, \beta$

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha(1, \beta \sin \theta_2 \sin \theta_1, \beta \cos \theta_2 \sin \theta_1, \beta \cos \theta_1) \\ k_2 &= \alpha(1, -\beta \sin \theta_2 \sin \theta_1, -\beta \cos \theta_2 \sin \theta_1, -\beta \cos \theta_1) \end{aligned} \quad (80)$$

Die Identifikation des Azimuth- und Polarwinkels ist einfach,  $\theta_1 \equiv \theta$ ,  $\theta_2 \equiv \phi$ . Mit

$$k_1^2 = m^2 = \alpha^2(1 - \beta^2)$$

wird eine Konstante festgelegt. Da im Schwerpunktsystem der massebehafteten Teilchen in Gln. (80) gearbeitet wird, gilt (siehe oben)

$$s_2 = (k_1 + k_2)^2 = (k_1^0 + k_2^0)^2 = (2\alpha)^2 \rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{s_2}}{2}$$

Dadurch ist

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_2}}$$

wobei noch häufig die Abkürzung  $s_2 = xs$  benutzt wird. Der Ausgangszustand liegt somit fest.

Die Ausarbeitung des Anfangszustandes ist etwas umfangreicher. Das zusätzliche Parton muss sicher im gesamten Raum ausgesendet werden können, womit

$$k = k^0(1, 0, \sin \psi', \cos \psi')$$

mit  $k^2 = 0$  und unbekannter Nullkomponente angesetzt werden kann. Damit muss mindestens eines der beiden eingehenden Partonen ebenfalls  $y - z$  Komponenten besitzen, und eines kann die Form

$$p_1 = p_1^0(1, 0, 0, 1)$$

annehmen. Hier soll es das Parton 1 sein. Damit wird der Vierervektor des Partons 2 zu

$$p = p_2^0(1, 0, \sin \psi, \cos \psi)$$

Es gilt jeweils  $p_1^2 = p_2^2 = k^2 = 0$ . Des Weiteren gelten folgende Gleichungen, die für die Ableitung der unbekanntenen Variablen  $p_1^0, p_2^0, k^0, \psi, \psi'$  benutzt werden. Es gelten mit  $p_1 + p_2 - k = k_1 + k_2$

$$\begin{aligned} p_1^0 + p_2^0 - k^0 &= \sqrt{s_2} \\ p_1^0 + p_2^0 \cos \psi - k^0 \cos \psi' &= 0 \\ p_2^0 \sin \psi - k^0 \sin \psi' &= 0 \\ (p_1^0 - k^0)^2 - (p_1^0 - k^0 \cos \psi')^2 - (-k^0 \sin \psi')^2 &= (p_1 - k)^2 = t_k \\ (p_2^0 - k^0)^2 - (p_2^0 \sin \psi - k^0 \sin \psi')^2 - (p_2^0 \cos \psi - k^0 \cos \psi')^2 &= (p_2 - k)^2 = u_k \\ (p_1^0 + p_2^0)^2 - (p_1^0 + p_2^0 \cos \psi)^2 - (p_2^0 \sin \psi)^2 &= (p_1 + p_2)^2 = s \end{aligned}$$

Die erste Gleichung entspricht der Energieerhaltung. Die beiden Gleichungen darunter erhalten den Impuls (die Summe der Impulse im Endzustand ist Null). Die letzten drei Gleichungen entsprechen der Auswertung der bekannten Invarianten aus dem Text darüber.

Die Benutzung von  $t_k$  erlaubt das Auflösen nach dem Winkel  $\psi'$ . Es ist

$$t_k = (p_1^0 - k^0)^2 - [(p_1^0)^2 - 2p_1^0 k^0 \cos \psi' + (k^0)^2 \cos^2 \psi'] - (k^0)^2 \sin^2 \psi' =$$

$$(p_1^0 - k^0)^2 - (p_1^0)^2 - (k^0)^2 + 2p_1^0 k^0 \cos \psi' = 2k^0 p_1^0 (\cos \psi' - 1) \rightarrow \cos \psi' = 1 + \frac{t_k}{2k^0 p_1^0}$$

Als nächstes wird die letzte Gleichung benutzt.  $s$  erlaubt das Auflösen nach dem Winkel  $\psi$ . Es gilt

$$s = (p_1^0 + p_2^0)^2 - (p_1^0)^2 - 2p_1^0 p_2^0 \cos \psi - (p_2^0)^2 \cos^2 \psi - (p_2^0)^2 \sin^2 \psi =$$

$$= 2p_1^0 p_2^0 (1 - \cos \psi) \rightarrow \cos \psi = 1 - \frac{s}{2p_1^0 p_2^0}$$

Das Einsetzen beider Winkel in die zweite Gleichung ergibt

$$p_1^0 + p_2^0 \left(1 - \frac{s}{2p_1^0 p_2^0}\right) - k^0 \left(1 + \frac{t_k}{2k^0 p_1^0}\right) = \underbrace{p_1^0 + p_2^0}_{=\sqrt{s_2+k^0}} - \frac{s}{2p_1^0} - k^0 - \frac{t_k}{2p_1^0} = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{s_2} = \frac{s + t_k}{2p_1^0} \rightarrow p_1^0 = \frac{s + t_k}{2\sqrt{s_2}}$$

Die Komponente  $k^0$  lässt sich durch Quadrieren der zweiten und dritten Gleichung und Summieren errechnen. Nach  $k^0$  aufgelöst ergibt

$$(k^0)^2 = (p_1^0 + p_2^0 \cos \psi)^2 + (p_2^0)^2 \sin^2 \psi = \underbrace{(p_1^0 + p_2^0)^2}_{=(\sqrt{s_2+k^0})^2} - 2p_1^0 p_2^0 (1 - \cos \psi) =$$

$$= s_2 + 2\sqrt{s_2} k^0 + (k^0)^2 - \underbrace{2p_1^0 p_2^0 (1 - \cos \psi)}_{=s} \rightarrow s = s_2 + 2\sqrt{s_2} k^0 \rightarrow$$

$$k^0 = \frac{s - s_2}{2\sqrt{s_2}} = -\frac{t_k + u_k}{2\sqrt{s_2}}$$

womit auch die Komponente  $p_2^0$  sofort festliegt zu

$$p_2^0 = \frac{s + u_k}{2\sqrt{s_2}}$$

wegen  $p_1^0 + p_2^0 - k^0 = \sqrt{s_2}$ .

Im Folgenden soll noch der differentielle Phasenraum für die im Text betrachtete Kinematik hergeleitet werden für  $n = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen. Der Anfangszustand ist wieder masselos, die Teilchen im Endzustand habe jeweils die gleiche Masse. Der  $2 \rightarrow 2$  Fall für  $n$  Dimensionen soll durch

$$p_1 + p_2 \rightarrow k_1 + k_2$$

gekennzeichnet werden mit  $k_1^2 = k_2^2 = m^2$ . Für den  $2 \rightarrow 3$  Fall gilt mit  $k^2 = 0$

$$p_1 + p_2 \rightarrow k_1 + k_2 + k$$

Mit  $\alpha = 1, 2$  Teilchen im Anfangszustand und  $\beta = 3, \dots, N$  Teilchen im Endzustand wird über

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_{i=3}^N \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 (2E_i)} \delta^4\left(\sum_{i=3}^N k_i - p_\alpha\right)$$

der differentielle Wirkungsquerschnitt beschrieben [10].  $|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$  ist die quadrierte Feynman-Amplitude, bei der die *innere* Information entsprechend behandelt wurde (z. B. gemittelt über Anfangszustände und summiert über Endzustände). Für Schwerpunktsenergien sehr viel größer als die Massenquadrate kann im Schwerpunktsystem der eingehenden Teilchen der Fluxfaktor

$$\frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \simeq \frac{1}{2s}$$

herausgezogen werden.

Das Phasenraumvolumen für  $N$  Teilchen im Endzustand ist in  $n$  Dimensionen (mit einer kleinen, aber einfachen Umdefinition der Indizes) durch

$$dR_N = (2\pi)^n \prod_{i=1}^N \frac{d^{n-1} k_i}{(2\pi)^{n-1} (2E_i)} \delta^n\left(\sum_{i=1}^N k_i - p_\alpha\right) \quad (81)$$

gegeben, wobei  $p_\alpha$  der Gesamtimpuls der initiierenden Teilchen ist, z. B.  $p_\alpha = p_1 + p_2$ . Für  $N = 2$  reduziert sich die Gln. (81) auf

$$dR_2 = (2\pi)^n \frac{d^{n-1} k_1}{(2\pi)^{n-1} (2E'_1)} \frac{d^{n-1} k_2}{(2\pi)^{n-1} (2E'_2)} \delta^n(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$

Die komplette  $k_2$  Integration wird benutzt, um die Deltafunktion auf eine Dimension zu reduzieren. Auch können die Vorfaktoren zusammengefasst werden. Es ergibt sich

$$dR_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n-2} (2E'_2)} \frac{d^{n-1} k_1}{(2E'_1)} \delta(E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2)$$

Das verbleibende Differential ist durch  $d^{n-1} k_1 = |\vec{k}_1|^{n-2} d|\vec{k}_1| d\Omega_{n-1}$  gegeben.

Das Volumen ist nach Appendix A, Gln. (70),  $\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$ , was sich für  $n = 4$  auf  $\Omega_3 = 4\pi$  reduziert. Die Matrixelemente könnte aber vom Streuwinkel  $\theta_1$  abhängen ( $\vec{p}_1 \cdot \vec{k}_1 = |\vec{p}_1| |\vec{k}_1| \cdot \cos \theta_1$ ). Deswegen wird der  $\theta_1$ -Beitrag aus dem  $n - 1$  dimensionalen Volumen herausgezogen, und darüber wird *noch nicht* integriert.

Das  $n - 1$  dimensionale differentielle Volumen kann leicht selbst hergeleitet werden, entweder durch die Parametrisierung in Appendix B (Jacobi-Determinante) oder durch einfache Erweiterung des 2 und 3 dimensionalen differentiellen Phasenraums. Kurzum, es ist

$$d^{n-1} k_1 = |\vec{k}_1|^{n-2} d|\vec{k}_1| \sin^{n-3} \theta_1 \sin^{n-4} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-3} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-2}$$

das gesuchte Differential [10, 106]. Man identifiziert leicht  $\theta_1$  als Streuwinkel und  $\theta_2$  als den  $\phi$ -Winkel.

Damit wird das gesuchte Differential

$$d^{n-1}k_1 = |\vec{k}_1|^{n-2} d|\vec{k}_1| \sin^{n-3} \theta_1 d\Omega_{n-2}$$

und

$$\int d\Omega_{n-2} = \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}$$

Im Schwerpunktsystem gilt nun

$$E_1 + E_2 = \sqrt{s} = E'_1 + E'_2$$

und

$$|\vec{k}_1|^2 = |\vec{k}_2|^2$$

mit

$$|\vec{k}_i|^2 = E_i'^2 - m^2$$

Für das Argument der Deltafunktion wird  $g(E'_1, E'_2) = (E'_1 + E'_2 - E_1 - E_2)$  gesetzt. Dann gilt für das Differential

$$d|\vec{k}_1| = \frac{\partial|\vec{k}_1|}{\partial g} dg$$

mit

$$\frac{\partial g}{\partial|\vec{k}_1|} = \left| \frac{\partial(E'_1 + E'_2)}{\partial|\vec{k}_1|} \right|$$

Das Absolutzeichen kommt aus der Regel zur Ableitung von Funktionen, die als Argumente von Deltafunktionen dienen, also

$$\int dx f(x, y) \delta(g(x, y)) = \int dg \frac{1}{\left| \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{y=const.}} f(x, y) \delta(g(x, y))$$

wobei nun in  $f(x, y)$  die gültigen Argumente benutzt werden müssen, für die  $g(x, y) = 0$  gelten mit  $y = const.$ . Es ist

$$\frac{\partial E'_1}{\partial|\vec{k}_1|} = \frac{|\vec{k}_1|}{E'_1}$$

und das Gleiche mit

$$\frac{\partial E'_2}{\partial|\vec{k}_1|} = \frac{|\vec{k}_1|}{E'_2}$$

wegen  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$ . Damit gilt

$$\frac{\partial|\vec{k}_1|}{\partial g} = \frac{1}{\frac{|\vec{k}_1|(E'_1 + E'_2)}{E'_1 E'_2}} = \frac{E'_1 E'_2}{|\vec{k}_1|(E'_1 + E'_2)}$$

Daraus resultiert nun insgesamt (nach einer formalen Integration über die Deltafunktion)

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-2}} \frac{1}{2E'_1} \frac{1}{2E'_2} |\vec{k}_1|^{n-2} \frac{E'_1 E'_2}{|\vec{k}_1|(E'_1 + E'_2)} \sin^{n-3} \theta_1 d\theta_1 d\Omega_{n-2}$$



Mit  $E'_1 = E'_2 = \sqrt{s}/2$  und kürzen der Faktoren sowie  $\Omega_{n-2} = \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}$  liefert

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-2}} \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{s}{4} - m_1^2} \right)^{n-3} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \sin^{n-3} \theta_1 d\theta_1$$

Weiteres Auswerten in  $n = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen ergibt dann

$$\frac{(2\pi)^{2\epsilon}}{4\pi^2} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{1-2\epsilon}{2}} \frac{1}{s^\epsilon} \beta^{1-2\epsilon} \frac{2\pi^{1-\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} \sin^{-2\epsilon} \theta_1 d\theta_1 d\cos\theta_1$$

mit  $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$ .

Daraus wird schlussendlich nach Aufsammeln aller Faktoren das gesuchte Ergebnis für das differentielle Phasenraumvolumen für einen im Anfangszustand masselosen, im Endzustand mit gleicher Masse behafteten  $2 \rightarrow 2$ -Prozesses

$$dR_2 = \frac{2^{2\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} \left( \frac{4\pi}{s} \right)^\epsilon \frac{1}{16\pi} \beta^{1-2\epsilon} \sin^{-2\epsilon} \theta_1 d\theta_1 d\cos\theta_1$$

Zur Berechnung von  $dR_3$  muss man sich im Voraus darüber im Klaren sein, welche Variablen *offen* bleiben sollen (das zusätzliche Parton soll aus dem Endzustand emittiert werden). Neben dem Streuwinkel (und dem Azimutwinkel) hat man die Wahl zwischen den Variablen des emittierten Partons (Energie+Winkel, um z. B. die „Soft- und Kollineare“-Emission des Partons hervorzuheben), oder den Variablen der Quarks/Antiquarks sowie den eingeschlossenen Streuwinkel zwischen den beiden Fermionen. Für das Beispiel hier wird der letztere Fall angenommen, also eine Abhängigkeit der Energie der äußeren Linien (Fermionen), sowie von dem relativen Streuwinkel zwischen den beiden.

Ausgangspunkt ist wieder Gln. (81)

$$dR_N = (2\pi)^n \prod_{i=1}^N \frac{d^{n-1}k_i}{(2\pi)^{n-1}(2E_i)} \delta^n \left( \sum_{i=1}^N k_i - p_\alpha \right)$$

Für  $N = 3$  reduziert sich der Ausdruck (in  $n$  Dimensionen) auf ( $k_1, k_2 =$  Vierervektoren der schweren Quarks mit  $k_i^2 = m^2$ ,  $k_3 =$  Vierervektor des zusätzlichen Partons mit  $k_3^2 = 0$ )

$$dR_3 = (2\pi)^n \frac{d^{n-1}k_1}{(2\pi)^{n-1}(2E_1)} \frac{d^{n-1}k_2}{(2\pi)^{n-1}(2E_2)} \frac{d^{n-1}k_3}{(2\pi)^{n-1}(2E_3)} \delta^n(k_1 + k_2 + k_3 - p_1 - p_2)$$

Alles wird im Schwerpunktsystem von  $q = p_1 + p_2 = (Q, \vec{0}) = (\sqrt{s}, \vec{0})$  betrachtet. Ab hier kann entschieden werden, welche der Variablen für die weitere Integration erhalten bleiben sollen, um die Auswertung der Matrixelemente zu ermöglichen. Deswegen wird  $d^{n-1}k_3$  für eine formale Auswertung mit der Deltafunktion benutzt. Es ergibt sich zunächst

$$dR_3 = \frac{d^{n-1}k_1}{(2\pi)^{n-1}(2E_1)} \frac{d^{n-1}k_2}{(2\pi)^{n-2}(2E_2)} \frac{1}{2E_3} \delta(E_1 + E_2 + E_3 - Q)$$

Beachte, dass zur Kennzeichnung des Ausgangszustand kein Apostroph benutzt wurde, d.h.  $q = p_1 + p_2$ . Mit dem Trick, bzw. mit der Erkenntnis, dass

$$\int \frac{d^{n-1}k_3}{2E_3} = \int d^n k_3 \theta(E_3) \delta(k_3^2)$$

wird über

$$\frac{\delta(E_1 + E_2 + E_3 - Q)}{2E_3} = \delta[(k_1 + k_2 + k_3 - q)^2] \quad (82)$$

das resultierende Integral wesentlich vereinfacht. Zudem kann die Winkelintegration von Teilchen 1 komplett ausgeführt werden. Die relative Winkelintegration wird durch  $k_2$  übernommen (mit  $|\vec{k}_1|$  als Achse).

$$d^{n-1}k_1 = |\vec{k}_1|^{n-2} d|\vec{k}_1| \Omega_{n-1}$$

und

$$d^{n-1}k_2 = |\vec{k}_2|^{n-2} d|\vec{k}_2| \sin^{n-3} \theta_1 d\theta_1 d\Omega_{n-2}$$

wobei  $\theta_1$  der Winkel zwischen  $\vec{k}_1$  und  $\vec{k}_2$  ist. Dieser Winkel wird über  $z = \cos \theta_1$  substituiert. Dann ist

$$\sin^{n-3} \theta_1 d\theta_1 = \sin^{n-4} \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 = -(1-z^2)^{\frac{n-4}{2}} dz$$

Das Auflösen der Klammer in der Deltafunktion, Gln. (82), ergibt

$$-Q^2 - m_1^2 - m_2^2 + 2QE_1 + 2QE_2 - 2(E_1E_2 - |\vec{k}_1||\vec{k}_2|z)$$

Die Integration über  $dz$  liefert somit einen Faktor

$$\frac{1}{2|\vec{k}_1||\vec{k}_2|}$$

(das Minuszeichen spielt keine Rolle innerhalb der Deltafunktion) und  $|\vec{k}_i| = \sqrt{E_i^2 - m^2}$ , gleiche Massen im Endzustand vorausgesetzt. Schließlich gilt noch

$$d|\vec{k}_i| = \frac{\partial |\vec{k}_i|}{\partial E_i} dE_i = \frac{E_i}{\sqrt{E_i^2 - m^2}} dE_i$$

Alles eingesetzt ergibt

$$dR_3 = \frac{1}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} (E_1^2 - m^2)^{\frac{n-4}{2}} (E_2^2 - m^2)^{\frac{n-4}{2}} (1-z^2)^{\frac{n-4}{2}} dE_1 dE_2$$

mit

$$z = -\frac{1}{2} [Q^2 + 2m^2 - 2QE_1 - 2QE_2 - 2E_1E_2] \frac{1}{|\vec{k}_1||\vec{k}_2|}$$

und  $n = 4 - 2\epsilon$  wird der Ausdruck letztendlich zu

$$dR_3 = \frac{1}{(2\pi)^{5-4\epsilon}} \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{3}{2}-\epsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\epsilon)} \frac{\pi^{1-\epsilon}}{\Gamma(1-\epsilon)} (E_1^2 - m^2)^{-\epsilon} (E_2^2 - m^2)^{-\epsilon} (1-z^2)^{-\epsilon} dE_1 dE_2$$

Hier sind alle Singularitäten für  $\epsilon \rightarrow 0$  explizit aufgeführt.

## D Literaturverzeichnis

### Literatur

- [1] R. Engel, *Photoproduction within the Two Component Dual Parton Model. 1. Amplitudes and Cross-Sections*, Z. Phys. C **66**, 203 (1995)
- [2] R. Engel and J. Ranft, *Hadronic Photon-Photon Interactions at High Energies*, Phys. Rev. D **54**, 4244 (1996)
- [3] S. Roesler, R. Engel and J. Ranft, *The Monte Carlo Event Generator DPMJET-III*, arXiv:hep-ph/0012252, *Proc. of Monte Carlo 2000*, Lisboa, Oct. 2000, Springer, p. 1033
- [4] S. Frixione, B.R. Webber, *Matching NLO QCD Computations and Parton Shower Simulations*, JHEP **0206**, 029 (2002)
- [5] S. Frixione, P. Nason, B.R. Webber, *Matching NLO QCD and Parton Showers in Heavy Flavour Production*, JHEP **0308**, 007 (2003)
- [6] G. Corcella et al., *Herwig 6.5: An Event Generator for Hadron Emission Reactions with Interfering Gluons (including Supersymmetric Processes)*, JHEP **0101**, 010 (2001)
- [7] B. Pötter, *Combining QCD Matrix Elements at Next-to-leading-Order with Parton Showers in Electroproduction*, Phys. Rev. D **63**, 114017 (2001)
- [8] M. Dobbs, *Incorporating Next-to-leading-Order Matrix Elements for Hadronic DiBoson Production in Showering Event Generators*, Phys. Rev. D **63**, 034016 (2001)
- [9] B.W. Harris, J.F. Owens, *The Two Cut-Off Phase Space Slicing Method*, Phys. Rev. D **65**, 094032 (2002)
- [10] R.D. Field, *Applications of Perturbative QCD*, Addison Wesley Verlag (1989)
- [11] G. Altarelli, G. Parisi, *Asymptotic Freedom in Parton Language*, Nucl. Phys. B **126**, 298 (1977)
- [12] P. Cvitanovic, R. Horsley, *Exact Solutions of the Altarelli-Parisi Equations*, Nucl. Phys. B **173**, 229 (1980)
- [13] S. Kawabata, *A New Monte Carlo Event Generator for High Energy Physics*, Comput. Phys. Commun. **41**, 127 (1986)
- [14] S. Kawabata, *A New Version of the Multidimensional Integration and Event Generation Packages BASES/SPRING*, Comput. Phys. Commun. **88**, 309 (1995)
- [15] P. Schmüser, *Feynman Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*, Springer-Verlag, 2. neubearbeitete Auflage (1995)
- [16] A.D. Martin, R.G. Roberts, W.J. Stirling and R.S. Thorne, *Parton Distribution incorporating QED contributions*, Eur. Phys. J. C **39**, 155 (2005)

- [17] J. Pumplin et al., *New Generation of Parton Distributions with Uncertainties from Global QCD Analysis*, arXiv:hep-ph/0201195
- [18] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, *Factorization of Hard Processes in QCD*, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5**, 1 (1988)
- [19] Ellis, Stirling and Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press (1996)
- [20] E. Eichten, I. Hinchliffe, K. Lane, C. Quigg, *Supercollider Physics*, Rev. Mod. Phys. **56**, 579 (1984)
- [21] S.I. Alekhin, *Parton Distributions from Deep Inelastic Scattering Data*, Phys.Rev. D **68**, 014002 (2003)
- [22] G. Sterman et al., *Handbook of Perturbative QCD*, Rev. Mod. Phys. **67**, 157 (1995)
- [23] M.L. Mangano, P. Nason, G. Ridolfi, *Heavy Quark Correlations in Hadron Collisions at Next to Leading Order*, Nucl. Phys. B **373**, 295 (1992)
- [24] T. Sjöstrand, Leif Lönnblad, Stephen Mrenna, Peter Skands, *Pythia 6.2 Physics and Manual*, arXiv:hep-ph/0108264
- [25] D.W. Duke, R.G. Roberts, *Determinations of the QCD Strong Coupling  $\alpha_s$  and the Scale  $\Lambda_{QCD}$* , Phys. Rep. **120**, 275 (1985)
- [26] Y. L. Dokshitzer, D. Diakonov and S. I. Troian, *Hard Processes In Quantum Chromodynamics*, Phys. Rept. **58**, 269 (1980)
- [27] V. Barone, E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction*, Springer-Verlag (2002)
- [28] P.D.B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*, Cambridge University Press (1977)
- [29] P.D.B. Collins, *Regge Theory and Particle Physics*, Phys. Rep. **1**, 103 (1971)
- [30] E. Levin, *Everything about Reggeons*, arXiv:hep-ph/9710546v3
- [31] E. Levin, *An Introduction to Pomerons*, arXiv:hep-ph/9808486v1
- [32] V.A. Abramovski, V.N. Gribov, O.V. Kancheli, *Character of Inclusive Spectra and Fluctuations Produced in Inelastic Processes by Multipomeron Exchange*, Sov. J. Nucl. Phys. **18**, 308 (1974)
- [33] K.G. Boreskov, A.B. Kaidalov, V.A. Khoze, A.D. Martin, M.G. Ryskin, *The Partonic Interpretation of Reggeon Theory Models*, Eur. Phys. J. C44, 523 (2005)
- [34] A.B. Kaidalov, *Regge Poles in QCD*, arXiv:hep-ph/0103011
- [35] A.B. Kaidalov, *Diffraction Production Mechanism*, Phys. Rep. **50**, 157 (1979)

- [36] M. Baker, K.A. Ter-Martirosyan, *Gribovs Reggeon Calculus-Its Physical Basis and Implications*, Phys. Rep. **28**, 1 (1976)
- [37] A. Capella, U. Sukhatme, C.-I. Tan and J. Tran Thanh Van, *Dual Parton Model*, Phys. Rep. **236**, 225 (1994)
- [38] K. Hahn, J. Ranft, *Comparing Multiparticle Production within a two-component Dual Parton Model with Collider Data*, Phys. Rev. D **41**, 1463 (1990)
- [39] F.W. Bopp and D. Pertermann, R. Engel, J. Ranft, *New Parton Structure Functions and Minijets in the two-component Dual Parton Model*, Phys. Rev. D **49**, 3236 (1994)
- [40] P. Aurenche, F.W. Bopp, A. Capella, J. Kwiecinski, M. Maire, J. Ranft and J. Tran Thanh Van, *Multiparticle Production in a two-component Dual Parton Model*, Phys. Rev. D **45**, 92 (1992)
- [41] T. Regge, *Introduction to Complex Angular Momentum*, Nuovo Cimento **14**, 951 (1959)
- [42] T. Regge, *Bound States, Shadow States and the Mandelstam Representation*, Nuovo Cimento **18**, 947 (1960)
- [43] K. Werner, *Strings, Pomerons and the VENUS Model of Hadronic Interactions at Ultrarelativistic Energies*, Phys. Rep. **232**, 87 (1993)
- [44] S. Filipponi, G.P. Pancheri, Y. Srivastava, *Regge Trajectories for all Flavours*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1038 (1998)
- [45] S. Filipponi, Y. Shrivastava, *Hadronic Masses and Regge Trajectories*, Phys. Rev. D **58**, 016003 (1998)
- [46] G. Veneziano, *An Introduction to Dual Models of Strong Interactions and their Physical Motivations*, Phys. Rep. **9**, 4 (1973)
- [47] X. Artru, *Classical String Phenomenology. How Strings Work*, Phys. Rep. **97**, 147 (1983)
- [48] X. Artru, G. Mennessier *String Model and Multiproduction*, Nucl. Phys. B **70**, 93 (1974)
- [49] J. Ranft, *Dual Parton Model at Cosmic Ray Energies*, Phys. Rev. D **51**, 64 (1995)
- [50] A.H. Mueller,  *$O(2,1)$  Analysis of Single-Particle Spectra at High Energy*, Phys. Rev. D **2**, 2963 (1970)
- [51] S.-S. Shei, T.-M. Yan, *General Connections Between Inclusive and Exclusive Processes and Cluster Decomposition*, Phys. Rev. D **6**, 6 (1972)
- [52] P. Nason, *A New Method for Combining NLO QCD with Shower Monte Carlo Algorithms*, JHEP **0207**, 012 (2002)
- [53] G. Marchesini, B.R. Webber, *Monte Carlo Simulation of General Hard Processes with Coherent QCD Radiation*, Nucl. Phys. B **310**, 461 (1988)

- [54] T. Sjostrand, *A Model for Initial State Parton Showers*, Phys. Lett. B **157**, 321 (1985)
- [55] S. Frixione, *A Next to Leading Order Calculation of the Cross Section for the Production of  $W^+W^-$  Pairs in Hadronic Collisions*, Nucl. Phys. B **410**, 280 (1994)
- [56] V.I. Borodulin, R.N. Rogalyov, S.R. Slabospitsky, *CORE: COmpendium of RElations: Version 2.1*, arXiv:hep-ph/9507456
- [57] S. Roesler, *Aspects of Nuclear Collisions of Relevance to Cosmic Ray Cascades*, Doctoral Thesis (Universität Siegen 1997)
- [58] A. Ferrari, P. R. Sala, J. Ranft and S. Roesler, *Cascade Particles, Nuclear Evaporation and Residual Nuclei in High-Energy Hadron-Nucleus Interactions*, Z. Phys. C **70**, 413 (1996)
- [59] R. Engel, *Hadronic Interaction of Photons at High Energies*, Doctoral Thesis (Universität Siegen 1997)
- [60] A.D. Martin, R.G. Roberts, W.J. Stirling and R.S. Thorne, *MRST2001: Partons and  $\alpha_s$  from Precise Deep Inelastic Scattering and Tevatron Jet Data*, Eur. Phys. J. C **23**, 73 (2002)
- [61] F.W. Bopp, J. Ranft, *Charged Particle Fluctuation as Signal of the Dynamics in Heavy Ion Processes*, Eur. Phys. J. C **22**, 171 (2001)
- [62] F.W. Bopp, J. Ranft, *Charged Particle Fluctuation in Heavy Ion Collisions*, Acta Phys. Polon. B **33**, 1505 (2002)
- [63] F.W. Bopp, J. Ranft, *Charge Fluctuation in Heavy Ion Collisions*, arXiv:hep-ph/0301067v1
- [64] S.S. Adler et al., *PHENIX Collaboration*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003)
- [65] F.W. Bopp, J. Ranft, R. Engel, and S. Roesler, *d-Au and p-p Collisions at RHIC and the Multichain Monte Carlo DPMJET III*, arXiv:hep-ph/0410027v1
- [66] F.W. Bopp, R. Engel, J. Ranft, and S. Roesler, *Antibaryon to Baryon Production Ratios in Pb – Pb and p-p Collisions at LHC Energies of the DPMJET III Monte Carlo*, arXiv:0706.3870v1 [hep-ph]
- [67] F.W. Bopp, R. Engel, J. Ranft, and S. Roesler, *Inclusive Distribution at the LHC as predicted from the DPMJET III Model with Chain Fusion*, arXiv:0706.3875 [hep-ph]
- [68] F.W. Bopp and J. Ranft, R. Engel, S. Roesler, *Antiparticle to Particle Ratios in Hadron-Hadron and d-Au Collisions in the DPMJET III Monte Carlo*, arXiv:hep-ph/0505035v2
- [69] J. Ranft, *Baryon Stopping in High Energy Collisions and the Extrapolation of Hadron Production Models to Cosmic Ray Energies*, arXiv:hep-ph/0002137v1

- [70] F.W. Bopp, Y.M. Shabelski, *Baryon Number Transfer in High Energy hp Collisions*, Phys. Atom. Nucl. **68**, 2093 (2005)
- [71] F.W. Bopp, Y.M. Shabelski, *String Junctions Effects for Forward and Central Baryon Production in Hadron-Nucleus Collisions*, Eur. Phys. J. A **28**, 237 (2006)
- [72] R. Engel and J. Ranft, *Color Singlet Exchange between Jets and the PHOJET Monte Carlo*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **75A**, 272 (1999)
- [73] F. W. Bopp, R. Engel and J. Ranft, *Rapidity Gaps and the PHOJET Monte Carlo*, arXiv:hep-ph/9803437
- [74] R. Engel, *High Energy Photoproduction and the Dual Parton Model, Prepared for 29th Rencontres de Moriond: QCD and High-Energy Hadronic Interactions, Meribel les Allues, France, 19-26 Mar 1994*
- [75] R. Engel and J. Ranft, *Hadronic Photon Photon Interactions at High Energies, Prepared for 7th Rencontres de Blois: Frontiers in Strong Interactions - 6th International Conference on Elastic and Diffractive Scattering, Blois, France, 20-24 Jun 1995*
- [76] R. Engel, J. Ranft and S. Roesler, *Hard Diffraction and Parton Distributions of the Pomeron, Prepared for 30th Rencontres de Moriond: QCD and High-energy Hadronic Interactions, Meribel les Allues, France, 19-25 Mar 1995*
- [77] R. Engel, J. Ranft and S. Roesler, *Photoproduction off Nuclei and Point-like Photon Interactions. I: Cross Sections and Nuclear Shadowing*, Phys. Rev. D **55**, 6957 (1997)
- [78] S. Roesler, R. Engel and J. Ranft, *Photoproduction off Nuclei and Point-like Photon Interactions. II: Particle Production*, arXiv:hep-ph/9611379
- [79] R. Engel, *Total Cross Sections and Diffraction*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **82**, 221 (2000)
- [80] F. Abe et al., *Measurement of the B Meson Differential Cross Section  $\frac{d\sigma}{dp_t}$  in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1451 (1995)
- [81] M. Cacciari, Paolo Nason, *Is there a Significant Excess in Bottom Hadro-production at the Tevatron?*, Phys. Rev. Lett. **89**, 122003 (2002)
- [82] M. Cacciari, S. Frixione, M. L. Mangano, P. Nason und G. Ridolfi, *QCD analysis of first b cross section data at 1.96-TeV*, JHEP **0407** 033 (2004)
- [83] D. Acosta, *Measurement of the  $J/\psi$  Meson and b-Hadron Production Cross Sections in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1960$  GeV*, Phys. Rev. D **71**, 032001 (2005)
- [84] Matteo Cacciari, *Rise and Fall of the Bottom Quark Production Excess*, arXiv:hep-ph/0407187v1
- [85] A. Abulencia et al., *Measurement of the  $B^+$  Production Cross Section in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1960$  GeV*, Phys. Rev. D **75**, 012010 (2007)



- [86] C. Lourenco, H.K. Wöhri, *Heavy-Flavour Hadro-Production from fixed-Target to Collider Energies*, Phys. Rep. **433**, 127 (2006)
- [87] LHCb, *Technical Design Report - Reoptimized Detector Design and Performance*, Public Note LHCC 2003-030
- [88] J. Borel, L. Nicolas, O. Schneider, J. Van Hunen, *The  $B_s \rightarrow D_s^- \pi^+$ ,  $B_s \rightarrow D_s^\mp K^\pm$  selections*, Public Note LHCb-2007-017
- [89] Particle Data Group, *Review of Particle Physics* (2006), <http://pdg.lbl.gov>
- [90] J. Nardulli,  *$B_s^0 \rightarrow h^+ h'^-$  at LHCb*, Public Note LHCb-2007-016
- [91] J. Libby, *Measuring CP-Violation in  $B_s^0 \rightarrow \phi\phi$  with LHCb*, Public Note LHCb-2006-064
- [92] L. Shchutskaa, A. Golutvin, I. Belyaev, *Study of radiative penguin decays  $B^0 \rightarrow K^{*0} \gamma$  and  $B_0^s \rightarrow \phi \gamma$  at LHCb*, LHCb-PHYS-2007-030
- [93] D. Volyanskyy, J. van Tilburg, *Selection of the  $B_s^0 \rightarrow J/\psi(\mu\mu)\eta'$  decay at LHCb and its sensitivity to the  $B_s^0$  mixing phase  $\phi_s$* , Public Note LHCb-2007-027
- [94] P. Nason, S. Dawson, R.K. Ellis, *The One Particle Inclusive Differential Cross Section for Heavy Quark Production in Hadronic Collisions*, Nucl. Phys. B **327**, 49 (1989)
- [95] P. Nason, *The  $p_t$  Spectrum in Heavy-Flavour Hadroproduction*, JHEP **9805**, 007 (1998)
- [96] V.G. Kartvelishvili, A.K. Likhoded, V.A. Petrov, *On the Fragmentation Functions of Heavy Quarks into Hadrons*, Phys. Lett. B **78**, 615 (1978)
- [97] The OPAL Collaboration, *Inclusive Analysis of the  $b$  Quark Fragmentation Function in  $Z$  Decays at LEP*, Eur. Phys. J. C **29**, 463 (2003)
- [98] E. Ben-Haim et al., *Extraction of the  $x$ -Dependence of the Non-Perturbative QCD  $b$ -Quark Fragmentation Distribution Component*, Phys. Lett. B **580**, 108 (2004)
- [99] M. Battaglia, A.J. Buras, P. Gambino, A. Stocchi, *The CKM Matrix and the Unitarity Triangle*, arXiv:hep-ph/0304132v2
- [100] A.J. Buras, F. Parodi, A. Stocchi, *The CKM Matrix and the Unitarity Triangle: Another Look*, JHEP **0301**, 029 (2003)
- [101] W.J. Marciano, *Dimensional Regularization and Mass Singularities*, Phys. Rev. D **12**, 3861 (1975)
- [102] W.J. Marciano, *Dimensional Regularization and Finit Calculations in Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **84**, 132 (1975)
- [103] F. Jegerlehner, *Facts of Life with  $\gamma_5$* , Eur. Phys. J. C **18**, 673 (2001)



- [104] A.L. Bondarev, *A New Method for Calculation of Traces of Dirac  $\gamma$ -Matrices in Minkowski Space*, Nucl. Phys. B **733**, 48 (2006)
- [105] A.L. Bondarev, A.R. Roslik, *About Calculation of Traces of Dirac  $\gamma$ -Matrices contracted with Massless Vectors in Minkowski Space*, arXiv:0710.0274 [hep-ph]
- [106] W.J. Marciano, A. Sirlin, *Dimensional Regularization of Infrared Divergences*, Nucl. Phys. B **88**, 86 (1975)
- [107] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972)
- [108] G. 't Hooft, *Dimensional Regularization and the Renormalization Group*, Nucl. Phys. B **61**, 455 (1973)
- [109] G. Leibbrandt, *Introduction to the Technique of Dimensional Regularization*, Rev. Mod. Phys **47**, 849 (1975)
- [110] G. 't Hooft, M. Veltman, *Scalar One Loop Integrals*, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979)
- [111] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980)
- [112] S. Frixione, P. Nason, G. Ridolfi, *Strong Corrections to WZ Production at Hadron Colliders*, Nucl. Phys. B **383**, 3 (1992)

# Danksagung

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. F.W. Bopp für die Möglichkeit zur Durchführung dieser Arbeit und für seine vielfältige Unterstützung, ohne die es ungleich schwerer gewesen wäre. Auch möchte ich seine ständige und geduldige Bereitschaft, diese Schrift in ihrer Entstehungsphase zu begleiten, betonen. Die Diskussionen waren, wenn sie auch leider selten zustande kommen konnten, sehr interessant und aufschlussreich.

Bei Prof. Dr. J. Ranft bedanke ich mich, dass er sich als zweiter Gutachter für diese Arbeit bereitgestellt hat sowie für seine kritischen Anmerkungen dazu.

Nicht unerwähnt bleiben dürfen die folgenden Herren, deren Beitrag im Wesentlichen grammatikalischer Natur waren:

Herr Dipl.-Ing. Sven Dehmel

Herr Gerrit Werthebach

Herr Markus Dickel

Bedanken möchte ich mich auch bei der Familie Reusch für die freundliche Aufnahme während der Promotionszeit in ihrem Hause. Vielen Dank!