A Casson-Lin invariant for knots in homology 3-spheres

Zusammenfassung: Im Jahr 1985 definierte A. Casson eine topologische Invariante $\lambda(\Sigma)$ für Homologie-3-Sphären Σ, die, vereinfacht formuliert, nicht-abelsche SU(2)-Darstellungen der Fundamentalgruppe von Σ mit Vorzeichen zählt. X.-S. Lin griff das konstruktive Prinzip Casson's auf und definierte 1992 eine Invariante $h(k)$ für Knoten k in der 3-Sphäre S^3. Die Berechnung von $h(k)$ führt auf einen von Lin als "mysteriös" eingeschätzten Zusammenhang mit der Knotensignatur σ_k, einer klassischen Seifert-Invariante.

In der vorliegenden Arbeit werden beide Ansätze zusammengeführt, um unter Verwendung von SU(2)-Darstellungen der Knotengruppe $\pi_1(\Sigma - k)$ eine Schnittzahl $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ zu definieren (wobei α anzeigt, dass für die Darstellung der Knotenmeridiane SU(2)-Matrizen mit Spur $2\cos\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$, verwendet werden). Das zentrale Resultat ist die Berechnung von $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ mit Hilfe eines Skein-Algorithmus. Aus dieser folgt, dass $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ eine Invariante für Knoten in Homologie-3-Sphären ist. Es ergibt sich

$$s^\alpha(k \subset \Sigma) = 2\lambda(\Sigma) + \frac{1}{2}\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha}) ,$$

wobei die äquivariante Signatur $\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha})$ eine Verallgemeinerung der Knotensignatur darstellt. Damit bildet $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ das topologische Gegenstück zu der von C. Herald auf analytischem Wege definierten Invariante $h_\alpha(\Sigma, k)$. Die Invarianten von Casson und Lin ergeben sich als Spezialfälle $\lim_{\alpha\to 0,\pi} s^\alpha(k \subset \Sigma)$ bzw. $s^{\pi/2}(k \subset S^3)$.

Das Resultat der Berechnung wird zeigt, dass die Bedingung $\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha}) \neq 0$ hinreichend für die Existenz eines abelschen Limes nicht-abelscher Darstellungen von $\pi_1(\Sigma - k)$ ist. Insbesondere folgt, dass $\pi_1(\Sigma - k)$ in einem solchen Fall nicht-abelsche SU(2)-Darstellungen ermöglicht. Darüberhinaus werden die Zusammenhänge, die man zwischen $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ und der klassischen Seifert-Invariante $\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha})$ beobachten kann, begründet.

Abstract: In 1985 A. Casson defined a topological invariant $\lambda(\Sigma)$ for homology 3-spheres. Roughly speaking, $\lambda(\Sigma)$ counts the irreducible SU(2)-representations of the fundamental group of Σ with signs. In 1992, motivated by Casson's construction, X.-S. Lin defined an invariant $h(k)$ for knots k in the 3-sphere S^3. The computation yields a correlation to the knot signature σ_k, a classical Seifert invariant, which seemed "mysterious" to Lin.

Combining both constructions, we define an intersection number $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ using the representations of the knot group $\pi_1(\Sigma - k)$ (where α indicates that SU(2)-matrices with trace $2\cos\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$, are used to represent the knot meridians). Our main result is the computation of $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ by using a skein algorithm. The computation implies that $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ is actually an invariant for knots in homology 3-spheres. It yields

$$s^\alpha(k \subset \Sigma) = 2\lambda(\Sigma) + \frac{1}{2}\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha}) ,$$

where the equivariant signature $\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha})$ is a generalization of the knot signature. It turns out that $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ is the topological counterpart of the knot invariant $h_\alpha(\Sigma, k)$ defined by C. Herald along the lines of the analytical interpretation of Casson's invariant. The invariants of Casson and Lin appear as the special cases $\lim_{\alpha\to 0,\pi} s^\alpha(k \subset \Sigma)$ and $s^{\pi/2}(k \subset S^3)$ respectively.

Using the results of the computation we show that the condition $\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha}) \neq 0$ ensures the existence of an abelian limit of non-abelian representations of $\pi_1(\Sigma - k)$. In particular this implies that $\pi_1(\Sigma - k)$ admits non-abelian SU(2)-representations. Furthermore the computation of $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ provides an explanation of the correlations between the invariant $s^\alpha(k \subset \Sigma)$ based on representation spaces and the classical Seifert invariant $\sigma_{k\subset\Sigma}(e^{2i\alpha})$.