

Rolf T. Schulte

Modellierung und Simulation von wellenbasierten Structural Health Monitoring - Systemen mit der Spektral-Elemente Methode

Schriftenreihe der Arbeitsgruppe
für Technische Mechanik
im Institut für Mechanik und Regelungs-
technik - Mechatronik

Herausgeber: Claus-Peter Fritzen

Band 1

Impressum

Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen

Arbeitsgruppe für Technische Mechanik

Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Universität Siegen

57068 Siegen

ISSN 2191-5601

URN urn:nbn:de:hbz:467-4799

Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2010

**MODELLIERUNG UND SIMULATION VON
WELLENBASIERTEEN STRUCTURAL HEALTH MONITORING-
SYSTEMEN MIT DER SPEKTRAL-ELEMENTE METHODE**

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Rolf T. Schulte
aus Kirchhundem

eingereicht dem Fachbereich
Maschinenbau
der Universität Siegen

Referent: Prof. Dr.-Ing. C.-P. Fritzen
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. P. Betsch

Tag der mündlichen Prüfung:
17. Dezember 2010

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Regelungstechnik – Mechatronik der Universität Siegen.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen, für seine fachliche Betreuung, seine stets motivierende Unterstützung sowie für viele interessante Diskussionen, die häufig zu neuen Arbeitsschritten und Erkenntnissen geführt haben.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch danke ich für die Übernahme des Korreferats und der damit verbundenen Mühen. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Carolus und Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Xin Jiang für ihre Beiträge im Rahmen des Promotionsverfahrens.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Kollegen Dipl.-Ing. Jochen Moll für zahlreiche Diskussionen und die konstruktive Zusammenarbeit. Für ihre Unterstützung bei experimentellen Arbeiten im Labor danke ich den Herren Dipl.-Ing Wolfgang Richter und Gerhard Dietrich. Ein weiterer Dank gilt allen ehemaligen Kollegen am Institut für Mechanik für die gute Arbeitsatmosphäre, insbesondere den Herren Dr.-Ing. Boris Künkler und Dipl.-Ing. Philipp Köster. Gedankt sei auch allen studentischen Hilfskräfte sowie Studierenden, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten Beiträge zu dieser Arbeit geleistet haben.

Für die finanzielle Unterstützung des Projekts danke ich der European Aeronautic Defence and Space Company (EADS).

Besonders herzlichen Dank möchte ich an meine Eltern richten, die mich stets nach Kräften bei meiner Arbeit unterstützt haben.

Siegen, im Dezember 2010

Rolf T. Schulte

Inhalt

Symbolverzeichnis	IV
Kurzfassung	XI
1 Einleitung	1
1.1 Konzept, Klassifizierung und Stand der Technik von Structural Health Monitoring (SHM)-Verfahren.....	1
1.2 Ziele und Aufbau dieser Arbeit.....	8
2 Grundlagen	10
2.1 Wellen in elastischen Kontinua	10
2.1.1 Grundbegriffe.....	10
2.1.2 Wellengleichung.....	11
2.1.3 Allgemeine Feldgleichungen.....	12
2.1.4 Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	16
2.1.5 Geführte Wellen in Platten.....	17
2.2 Zweidimensionale Theorien für ebene Laminate	27
2.2.1 Plattentheorie nach Kirchhoff; CLPT.....	27
2.2.2 Reissner-Mindlin Plattentheorie; FSDT	29
2.2.3 Schubkorrekturfaktoren.....	31
2.3 Methode der finiten Elemente.....	32
2.3.1 Diskretisierung	33
2.3.2 Wahl eines geeigneten Ansatzes	33
2.3.3 Bestimmung der Systemmatrizen.....	34
2.3.4 Einbau der Randbedingungen und Lösung des Systems	35
2.4 Spektralelemente Methode	35
2.4.1 Spektralelemente auf Basis einer Transformation der Wellengleichung in den Frequenzbereich.....	36
2.4.2 Spektralelemente im Zeitbereich	38
2.5 Piezoelektrische Materialien.....	43
3 Ein effizientes Spektralelement zur Modellierung flacher Schalen unter hochfrequenter Anregung	47
3.1 Kinematik.....	47
3.2 Konstitutives Gesetz	49
3.3 Approximation der Verschiebungen.....	51

3.4 Schwache Form der Bewegungsgleichungen	56
3.5 Berechnung der Elementmatrizen.....	57
3.5.1 Numerische Integration nach Lobatto.....	57
3.5.2 Elementsteifigkeits- und Elementmassenmatrix.....	58
3.6 Spezielle Elementeigenschaften symmetrischer Laminare.....	60
3.7 Berücksichtigung von Materialdämpfung	61
3.8 Berücksichtigung von statischen Vorlasten.....	65
4 Ein Simulationswerkzeug zur Modellierung von SHM-Systemen auf Basis hochfrequenter Wellen	68
4.1 Erstellen eines Spektralelement-Gittermodells.....	68
4.1.1 Generierung von Masterelementen	69
4.1.2 Implementierung der Spektralknoten	70
4.2 Berechnung der Elementmatrizen und des Gesamtsystems.....	72
4.3 Implementierung von Randbedingungen.....	76
4.3.1 Dirichlet-RB: vorgegebene Verschiebungen.....	76
4.3.2 Neumann-RB: externe Kräfte	77
4.4 Piezoelektrische Aktuatoren und Sensoren.....	77
4.4.1 Beiträge der piezoelektrischen Elemente zu den Systemmatrizen.....	77
4.4.2 Aktuatorgleichungen	80
4.4.3 Sensorgleichungen	82
4.5 Lösung des resultierenden Gleichungssystems.....	86
4.5.1 Zentrales Differenzenverfahren.....	87
4.5.2 Numerische Stabilität	89
4.6 Modellierung von Schädigungen	90
4.6.1 Modellierung von Rissen.....	91
4.6.2 Modellierung von Delaminationen.....	93
4.6.3 Kontaktformulierung für Delaminationen.....	97
5 Numerische Studien	99
5.1 Verwendete Anregungssignale	99
5.2 Untersuchung der notwendigen räumlichen Diskretisierung.....	101
5.3 Verhalten der Lösung bei zu grober zeitlicher Diskretisierung.....	108
5.4 Richtungsabhängige Dämpfung.....	109
5.5 Unterschiedliche Modellierung der Piezoelemente	111
5.6 Charakteristik von Wellen in einer versteiften Platte	117

5.7	Interaktion von Wellen mit unterschiedlich modellierten Schädigungen.....	121
5.7.1	<i>Modellierung einer Delamination durch getrennte Elementlagen verglichen mit einer Reduktion des E-Moduls</i>	<i>122</i>
5.7.2	<i>Einfluss von Kontakt bei der Modellierung einer Delamination durch getrennte Elementlagen.....</i>	<i>125</i>
5.7.3	<i>Einfluss der Delaminationsform auf die Veränderungen des Wellenfeldes...</i>	<i>129</i>
5.7.4	<i>Modellierung eines Risses</i>	<i>131</i>
6	Modellanpassung mit Hilfe von Wellengeschwindigkeiten - Parameteridentifikation	133
6.1	Berechnung der Dispersionskurven aus den Bewegungsgleichungen.....	134
6.2	Modell-Updating.....	142
6.2.1	<i>Sensitivitätsanalyse</i>	<i>143</i>
6.2.2	<i>Strategie zur Modellanpassung.....</i>	<i>145</i>
7	Anwendungsbeispiele	149
7.1	Vergleich von Simulationsergebnissen mit Messungen an Laborstrukturen.....	149
7.1.1	<i>Quasi-unidirektionale GFK-Platte.....</i>	<i>149</i>
7.1.2	<i>CFK-Platte mit Delamination</i>	<i>156</i>
7.1.3	<i>Platte unter statischer Vorlast.....</i>	<i>161</i>
7.2	Numerische Studien komplexerer Anwendungsfälle.....	165
7.2.1	<i>Verschiedene Schadensfälle eines ebenen, versteiften Panels</i>	<i>165</i>
7.2.2	<i>Modellierung eines Phased Array-Systems.....</i>	<i>174</i>
8	Zusammenfassung und Diskussion.....	180
9	Literatur.....	187

Symbolverzeichnis

Abkürzungen

CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (lat.: Kohlenstoff = Carbon)
CLPT	klassische Laminattheorie nach Kirchhoff (engl.: classical laminated plate theory)
EKS	Elementkoordinatensystem
FSDT	Verallgemeinerung der Plattentheorie nach Reissner / Mindlin (engl.: first-order shear deformation laminated plate theory)
GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff
GLL	Gauss-Lobatto-Legendre
GKS	globales Koordinatensystem
NDT	Zerstörungsfreie Prüfung (engl.: non-destructive testing)
PZT	Bleizirkontitanat (engl.: Plumbum Zirconate Titanate)
SHM	Structural Health Monitoring
SMF	Schalenmittelfläche

Lateinische Buchstaben

a_i	Amplitude
A	Amplitude
A_i	i -te antisymmetrische Mode
A_{ij}	Längssteifigkeit
A_{pzt}	Fläche eines Piezoelements
B	Amplitude
B_{ij}	Biege-Dehn-Kopplungssteifigkeit
\mathbf{B}	Dehnungs-Verschiebungsmatrix
\mathbf{B}_{geo}	Operatormatrix
c	Ausbreitungsgeschwindigkeit
c_g	Gruppengeschwindigkeit
c_{gx}, c_{gy}	Komponente der Gruppengeschwindigkeit in x - bzw. y -Richtung
c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}	konstante Koeffizienten

c_p	Phasengeschwindigkeit
c_L	Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwelle
c_T	Phasengeschwindigkeit der Transversalwelle
C_{ijkl}	konstitutive Matrix
C^*	komplexer, viskoelastischer Steifigkeitstensor
C	Amplitude
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{C}_{mat}	Material-Dämpfungsmatrix
$\mathbf{C}_{mat}^{(pzt)}$	Material-Dämpfungsmatrix eines Piezoelements
C_{pzt}	Kapazität eines Piezoelements
\mathbf{C}_{pzt}	Dämpfungsmatrix aus dem Beitrag der Piezoelemente
d_{kij}	Tensor der piezoelektrischen Ladungskonstanten
d	Gitterdimension
D_j	dielektrische Verschiebung
D_{ij}	Biegesteifigkeit
\mathbf{D}	Materialsteifigkeitsmatrix
\mathbf{D}_{pzt}	Materialsteifigkeitsmatrix eines Piezoelements
$\hat{\mathbf{D}}$	Diagonalmatrix
\mathbf{e}	Einheitsvektor
$\bar{\mathbf{e}}$	Tensor der piezoelektrischen Spannungskoeffizienten
E	Elastizitätsmodul
\bar{E}_i	elektrisches Feld
f	Frequenz
F	Kraft
\mathbf{F}	Vektor der generalisierten äußeren Kräfte
$\hat{\mathbf{F}}$	Vektor der effektiven Lasten
\mathbf{F}_{kont}	Vektor der Kontaktkräfte
g_l	Funktion des linkslaufenden Wellenteils
g_r	Funktion des rechtslaufenden Wellenteils
G	Schubmodul

G	Kontakt-Verschiebungs-Zwangsbedingungsmatrix
h	Plattendicke
h_{pzt}	Dicke eines Piezoelements
H	Matrix der Trägheitsterme
\mathbf{H}_{pzt}	Matrix der Trägheitsterme der Piezoelemente
I	Massenträgheitsmoment
J	Jacobi-Matrix
k	Wellenzahl
k_L	Wellenzahl der Longitudinalwelle
k_T	Wellenzahl der Transversalwelle
K	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_{dyn}	dynamische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_{geo}	geometrische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_{pzt}	Steifigkeitsmatrix aus dem Beitrag der Piezoelemente
$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$	dielektrische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{x\varphi}$	piezoelektrische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_{xx}	mechanische Steifigkeitsmatrix
L_i	Legendre-Polynom i -ten Grades
Lo_i	Lobatto-Polynom i -ten Grades
L	Gesamtanzahl der Laminatschichten
L	Lastmatrix
$\hat{\mathbf{L}}$	untere Dreiecksmatrix
$\bar{\mathbf{L}}$	Matrix des Gleichungssystems zur Berechnung der Dispersionskurven
L_{pzt}	Anzahl der Schichten eines applizierten Piezoaktuators / -sensors (inklusive möglichen Isolations- und Kontaktierungslagen)
M_{ij}	resultierendes Moment
M	Massenmatrix
$\hat{\mathbf{M}}$	effektive Massenmatrix
\mathbf{M}_{pzt}	Massenmatrix aus dem Beitrag der Piezoelemente
N_{ij}	resultierende Kraft

N_m	Anzahl der Knoten eines Masterelements
$N(x, y)$	Element-Formfunktion
N^*	Anzahl Knoten
p	Konstante
p	Konstante
P_x, P_y	generalisierte, externe Kräfte
$P(\xi)$	Interpolationspolynom
q	Konstante
$\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$	Vektor der generalisierten Knotenverschiebungen, -geschwindigkeiten und -beschleunigungen
$q(x, y)$	Ansatzfunktion
\bar{q}	transversale Flächenlast
\hat{q}	Knotenvariable
$\mathbf{q}^t, \dot{\mathbf{q}}^t, \ddot{\mathbf{q}}^t$	Vektor der generalisierten Knotenverschiebungen, -geschwindigkeiten und -beschleunigungen zum Zeitpunkt t
\mathbf{q}_{ok}	Knotenverschiebung ohne Berücksichtigung von Kontakt
\mathbf{q}_{cor}	Korrektur der Knotenverschiebung wegen Kontakt
Q	resultierende Schubkraft
Q_{ij}	auf den ebenen Spannungszustand reduzierte Steifigkeit (Material-KS)
\bar{Q}_{ij}	auf den ebenen Spannungszustand reduzierte Steifigkeit (Laminat-KS)
Q_{sens}	Ladung des Piezosensors
\mathbf{R}	Rotationsmatrix
S_{ijkl}	mechanischer Nachgiebigkeitstensor
S_i	i -te symmetrische Mode
t	Zeit
Δt	Zeitschrittweite
Δt_{max}	maximale Zeitschrittweite
T	Periodendauer
T_x, T_y	generalisierte, externe Kräfte
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
\mathbf{T}_c	Transformationsmatrix

$\mathbf{T}^{(e)}$	Transformationsmatrix eines Elements
u	Verschiebung der Mittelfläche in x -Richtung
u_i	Verschiebungsvektor, i -te Komponente des Verschiebungsvektors
\tilde{u}	unabhängige Verschiebung in x -Richtung
U_{akt}	Aktuatorspannung
U_{sens}	Sensorspannung
v	Verschiebung der Mittelfläche in y -Richtung
\tilde{v}	unabhängige Verschiebung in y -Richtung
\bar{v}_{max}	maximale Wellengeschwindigkeit
w	Verschiebung der Mittelfläche in z -Richtung
\bar{w}_i	Integrationsgewicht
\tilde{w}	unabhängige Verschiebung in z -Richtung
x, y, z	kartesische Koordinaten
x_i	kartesische Koordinaten, i -te Komponente
Δx_{min}	minimaler Abstand zweier Gitterknoten
\mathbf{x}	Vektor der Knotenkoordinaten
\mathbf{x}_e	Knotenkoordinaten im Elementkoordinatensystem
\mathbf{x}_g	Knotenkoordinaten im globalen Koordinatensystem
z_0	z -Koordinate der nicht verformten Schalenmittelfläche

Griechische Buchstaben

α_{CFL}	Courant-Konstante
$\bar{\alpha}$	Koeffizient
β	Winkel der Phasengeschwindigkeit bzw. des Wellenzahlvektors
β_g	Winkel der Gruppengeschwindigkeit
$\bar{\beta}$	Koeffizient
γ_{ij}	Gleitungskomponente ij
ζ	Koeffizient zur Bewertung der Ähnlichkeit
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
∇^2	Laplace-Operator

ε_{ij}	Dehnungstensor; Dehnungskomponente ij
ε^b	Biegedehnung
ε^{mb}	Membrandehnung
ε^s	Schubdehnung
$\bar{\varepsilon}_{ij}^\sigma$	dielektrische Permittivität bei konstanter mechanischer Spannung
ε_{ipq}	Permutationssymbol
ϕ	Winkel zwischen Material-KS und Laminat-KS
Φ	skalares Potenzial
Φ_i	i -te Formfunktion eines Masterelements
η	lokale Koordinate im Referenzelement
Γ^e	Rand des Elementgebiets
Γ_{il}	Christoffel-Tensor
φ	elektrisches Potenzial
κ	Schubkorrekturfaktor
λ	Wellenlänge
λ_k	Vektor der Lagrange Multiplikatoren
Λ	Anzahl der Knoten pro minimaler Wellenlänge
λ_{La}	1. Lamésche Konstante
μ_{La}	2. Lamésche Konstante
ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte
σ_{ij}	Spannungstensor / Spannungskomponente ij
θ_x	Verdrehwinkel um die x -Achse
θ_y	Verdrehwinkel um die y -Achse
ϑ	Winkel zwischen den Richtung der Gruppengeschwindigkeit und der Phasengeschwindigkeit in anisotropen Werkstoffen
φ_L	Winkel der Longitudinalwelle
φ_T	Winkel der Transversalwelle
Θ	Potenzialfunktion
ω	Kreisfrequenz
Ω^e	Elementgebiet

ξ	lokale Koordinate im Referenzelement
ξ	Vektor der lokalen Koordinaten im Referenzelement
ψ_i	Lagrange Polynom, i -te Formfunktion
$\Psi_{ij}(\xi, \eta)$	zweidimensionale Formfunktion
Ψ	Matrix der Formfunktionen
$\bar{\Psi}$	komplexes Potenzial

Kurzfassung

Eine Vielzahl lasttragender technischer Strukturen bedarf zur Gewährleistung der Betriebssicherheit einer regelmäßigen Überprüfung ihrer Integrität, da aus technologischen, wirtschaftlichen oder ökologischen Gründen keine dauerhafte Auslegung möglich ist. Über die gesamte Lebensdauer dieser Strukturen stellen die notwendigen Inspektionen, die in der Regel mit hohem manuellen Arbeitsaufwand einhergehen, einen großen wirtschaftlichen Faktor dar. Zudem bewirkt der menschliche Faktor ein nicht unerhebliches Risiko, Schäden zu übersehen. Daher existiert eine hohe Nachfrage nach Methoden, die eine selbständige Strukturüberwachung mit permanent installierter Sensorik ermöglichen. Derartige Verfahren werden unter dem Oberbegriff „Structural Health Monitoring (SHM)“ zusammengefasst.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf Verfahren zur Überwachung dünnwandiger Strukturen, die auf so genannten geführten Wellen basieren. Diese Wellen, die mit Hilfe piezoelektrischer Elemente angeregt und detektiert werden, interagieren stark mit Strukturdiskontinuitäten (Rissen, Delaminationen) und weisen daher eine hohe Sensitivität schon gegenüber kleinen Schädigungen auf. Eine erhebliche Herausforderung ist jedoch die Auslegung eines derartigen SHM-Systems für konkrete Strukturen: Die Anpassung und Optimierung von Parametern wie Aktuator- und Sensorpositionen, Signalformen und Auswertelgorithmen erfolgt bisher meist durch eine große Anzahl von Vorversuchen und ist damit zeitaufwändig und kostenintensiv. Zudem wird ein tiefgreifendes Verständnis der bei der Wellenausbreitung ablaufenden Vorgänge benötigt. Nach einer Zusammenfassung notwendiger Grundlagen stellt diese Arbeit ein leistungsfähiges Simulationsverfahren basierend auf Spektralelementen vor, mit dem Wellenausbreitungsvorgänge in flachen Schalenstrukturen mit einer höheren Effizienz simuliert werden können, als dies mit konventionellen Finiten Elementen möglich ist. Dadurch wird es möglich, ein derartiges SHM-System im Stadium der Vorentwicklung schon vor einer realen Installation virtuell abzubilden und z.B. die Detektierbarkeit von Schädigungen zu untersuchen.

Auf der Basis von Simulationsmodellen werden in verschiedenen Studien grundlegende Eigenschaften der Wellenausbreitung untersucht. Dabei werden unter anderem unterschiedliche Modelle der piezoelektrischen Aktuatoren und Sensoren sowie verschiedene Schädigungsmodelle betrachtet. Die Sensitivität diverser Sensorkonfigurationen hinsichtlich typischer Schädigungen einer versteiften Schalenstruktur wird detailliert analysiert. Ein Vergleich mit verschiedenen experimentellen Studien erlaubt eine Validierung des vorgestellten Simulationsverfahrens.

1 Einleitung

Aufgrund technologischer, wirtschaftlicher und ökologischer Anforderungen werden heutzutage viele Strukturen oder Bauteile nicht dauerhaft, sondern nur für eine begrenzte Lebensdauer ausgelegt. Um die Betriebssicherheit zu gewährleisten, müssen diese Strukturen daher entweder nach festgelegten Zeitintervallen oder belastungsorientiert nach dem Durchlaufen eines zuvor definierten Lastspektrums mit Hilfe von zerstörungsfreien Prüftechniken (NDT, engl.: non-destructive testing) inspiziert werden. Dazu werden beispielsweise visuelle Prüfungen, Ultraschall- oder Thermografieverfahren eingesetzt. In der Regel sind diese Inspektionen sehr personal- und zeitintensiv und damit ein erheblicher wirtschaftlicher Faktor. In der Luftfahrtindustrie beispielsweise summieren sich die Aufwendungen für Inspektion, Wartung und Instandsetzung während der Gesamtlebensdauer eines Flugzeugs auf bis zu 85% der Gesamtausgaben [BOLLER 2001].

Neben finanziellen sprechen jedoch auch sicherheitstechnische Gründe für ein Überdenken dieser bisher eingesetzten Routinen. Während bei metallischen Bauteilen die Vorhersage notwendiger Inspektionsintervalle mit Hilfe der bruchmechanischen Gesetzmäßigkeiten [SURESH 2003] noch verhältnismäßig gut möglich ist, führt die zunehmende Verwendung von modernen Verbundwerkstoffen wie kohlenstoff- oder glasfaserverstärktem Kunststoff (CFK bzw. GFK) zu neuen Anforderungen: Schädigungen entwickeln sich dabei oft nicht in Abhängigkeit von der Anzahl der Belastungszyklen, sondern entstehen sehr plötzlich, beispielsweise durch eine Schlagschädigung (engl.: Impact). Möglicherweise führt eine derartige Schädigung somit schon vor der nächsten planmäßigen Inspektion zum Bauteilversagen.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma bieten Verfahren, die permanent die Integrität der Struktur überwachen und die unter dem Begriff „Structural Health Monitoring“ (SHM) bekannt geworden sind. Im folgenden Abschnitt wird zunächst ein kurzer Überblick über historische Entwicklungen und den derzeitigen Stand der Technik auf diesem Gebiet gegeben, bevor in Abschnitt 1.2 der Fokus und Beitrag dieser Arbeit vorgestellt wird.

1.1 Konzept, Klassifizierung und Stand der Technik von Structural Health Monitoring (SHM)-Verfahren

Structural Health Monitoring ist ein verhältnismäßig neues, multidisziplinäres Forschungsgebiet, dessen systematische Anfänge etwa zu Ende der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts liegen. Das hauptsächliche Unterscheidungsmerkmal von SHM-Verfahren gegenüber konventionellem NDT ist die Verwendung von permanent mit der Struktur verbundenen Sensoren (und eventuell Aktuatoren), die kontinuierlich oder auf Anforderung Informationen über den

Zustand der Struktur liefern können. Die Strukturen erlangen dadurch in Verbindung mit Signalanalyseverfahren eine gewisse künstliche Intelligenz. Neben den schon angesprochenen offensichtlichen Einflüssen derartiger Systeme im Hinblick auf erhöhte Betriebssicherheit und verringerte Wartungskosten können sich nach [SCHMIDT *et al.* 2004] noch wesentlich weitergehende Implikationen auf das Strukturdesign ergeben, Bild 1.1.

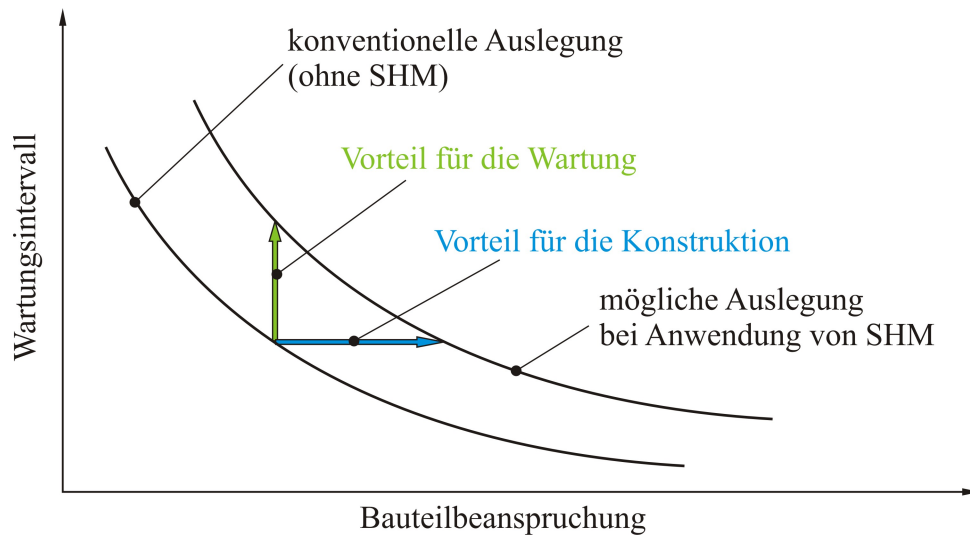


Bild 1.1: Vorteile von SHM-Systemen bei Wartung und Konstruktion nach [Schmidt *et al.* 2004]

Schmidt *et al.* prognostizieren beispielsweise eine Materialeinsparung von bis zu 20 Prozent, falls ein SHM-System im Designprozess von Luftfahrtstrukturen berücksichtigt werden kann. Dies impliziert einen erheblichen positiven Einfluss auf ökonomische und ökologische Belange beim Betrieb eines Flugzeugs.

Den Aufbau eines SHM-Systems kann man sich prinzipiell analog zum menschlichen Nervensystem in Verbindung mit Rückenmark und Gehirn vorstellen (Bild 1.2). Ähnlich wie beim menschlichen Organismus können durch ein Netz von Aktoren und Sensoren (Nervenenden) Veränderungen innerhalb der Struktur aufgenommen werden. Durch Signalleitungen (Nerven und Rückenmark) werden diese Daten an eine Auswerteeinheit (Gehirn) übergeben. Mit Hilfe von Signalverarbeitung und intelligenten Auswertelgorithmen können dadurch Schädigungen ab einer gewissen Größenordnung detektiert, lokalisiert und quantifiziert werden. Ebenso wie der menschliche Körper einen „Schaden“ in Form von Schmerzempfinden anzeigt, muss auch von einem SHM-System eine Rückmeldung an den Anwender erfolgen. Dazu ist eine geeignete Schnittstelle vorzusehen, mit der die berechneten Daten auf möglichst humankompatible Weise bereitgestellt werden. Wie in Bild 1.2 dargestellt, kann es sich dabei beispielsweise um die grafische Ausgabe von Schädigungsort und Schädigungsintensität handeln.

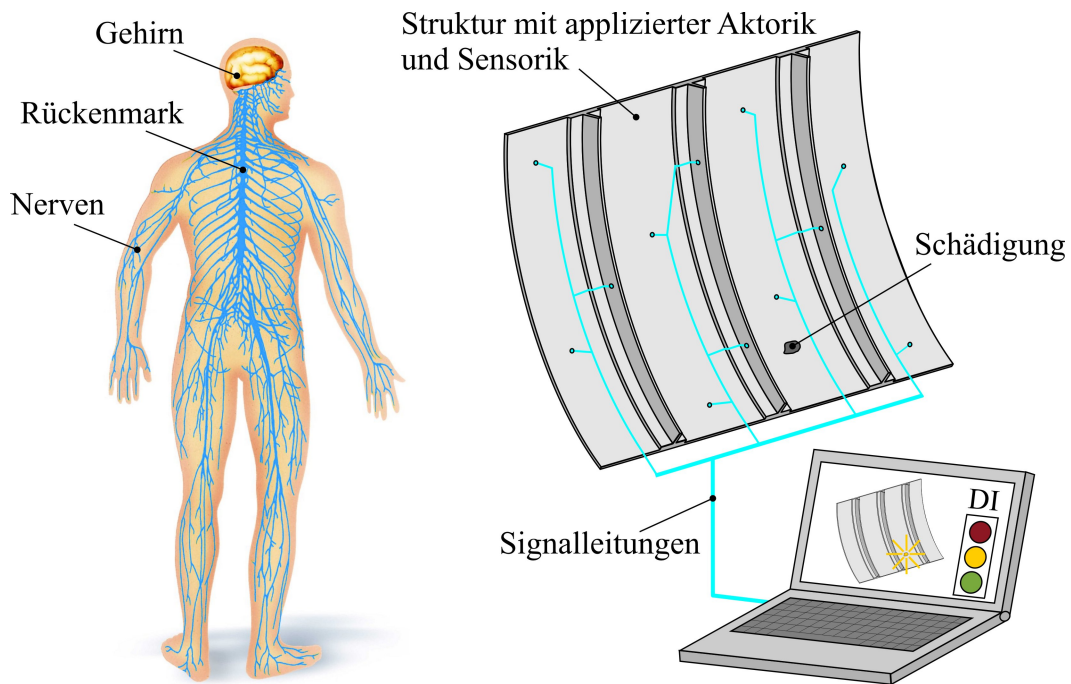


Bild 1.2: Mit SHM-System bestückte, intelligente Struktur im Vergleich zum Menschen

Eine Einteilung von SHM-Verfahren ist auf verschiedene Weise möglich. Rytter definierte 1993 eine erste Einteilung in 4 Ebenen [RYTTER 1993], die in der Folgezeit um eine fünfte Ebene ergänzt wurde [WORDEN und DULIEU-BARTON 2004], vergleiche Bild 1.3. Während Rytter ursprünglich auf die Ebene der Klassifikation verzichtet hat, wird gerade dieser Ebene heute eine größere Bedeutung beigemessen, da sich eine Quantifizierung in der Regel erst nach einer Klassifikation durchführen lässt und moderne Faserverbundwerkstoffe verschiedene Schädigungsarten aufweisen können.

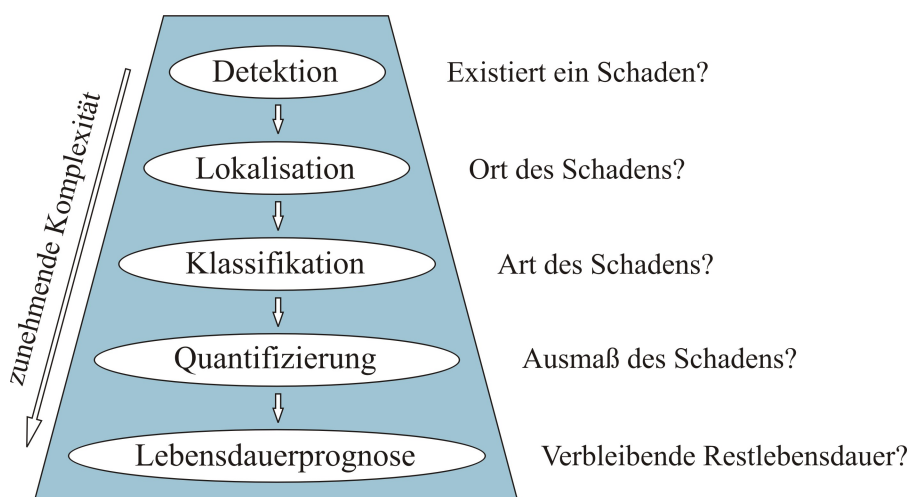


Bild 1.3: Ebenen der SHM-Verfahren nach [WORDEN und DULIEU-BARTON 2004]

Eine andere Art der Einteilung nimmt Mengelkamp vor, der in *globale*, *lokale* und *ergänzende* Verfahren unterteilt [MENGELKAMP 2006]. Weitere Unterteilungen können beispielsweise

in *aktive* und *passive* Systeme [GIURGIUTIU 2007] oder in *modellgestützte* und *rein datenbasierte* (also ohne Rechenmodell arbeitende) Verfahren erfolgen.

Kennzeichen *globaler*, schwingungsbasierter Verfahren ist, dass sie vielfach ein relativ grobes Sensornetz verwenden, um globale Strukturgrößen wie Eigenfrequenzen, Eigenformen und Dämpfungen zu überwachen. Diese Verfahren arbeiten in der Regel in einem niedrigen Frequenzbereich unterhalb von 500Hz, bei verschiedenen Anwendungen wie Brücken oder Windkraftanlagen sogar oft unterhalb von 50Hz [BOHLE 2005], [KRAEMER und FRITZEN 2010]. Es kommen dabei sowohl *modellgestützte* Verfahren, beispielsweise [FRISWELL und MOTTERSHEAD 1995] und [JENNEWEIN 1999] als auch *rein datenbasierte* Ansätze zum Einsatz, [KULLAA 2009] und [KRAEMER und FRITZEN 2007]. Einen guten Überblick über schwingungsbasierte Verfahren geben [DOEBLING *et al.* 1998] sowie Kapitel 2 des Buchs [BALAGEAS *et al.* 2006]. Als besonders erfolgversprechend haben sich diejenigen *globalen* Verfahren erwiesen, die keine besonderen Anregungssignale benötigen, sondern deren Anregung allein aus Betriebslasten oder Umwelteinflüssen resultiert.

Lokale Verfahren haben in der Regel ein deutlich höheres Auflösungsvermögen und können Schädigungen daher genauer lokalisieren. Dies ist physikalisch dadurch zu begründen, dass diese Verfahren einerseits ein dichteres Sensornetz aufweisen und andererseits in einem höheren Frequenzbereich arbeiten. Die Wellenlänge steht daher in einem besseren Verhältnis zur Abmessung des Schadens.

Ein *lokales* Verfahren ist die von Liang entwickelte Impedanz-Methode [LIANG *et al.* 1996]. Ihr wirtschaftlicher Einsatz wurde jedoch erst durch die Entwicklung eines low-cost Impedanz-Sensors durch die Arbeitsgruppe um Inman möglich [PEAIRS *et al.* 2004]. Grundprinzip dieser Methode ist die Veränderung des Impedanzspektrums einer Struktur durch eine Schädigung. Diese Veränderung lässt sich mit Hilfe eines applizierten piezoelektrischen Elements in Form von Änderungen des Spektrums der elektrischen Impedanz messen [PEAIRS 2006]. Das Piezoelement wird dabei gleichzeitig als Aktuator und Sensor verwendet. Weitere Anwendung findet diese Methode auch zur Überprüfung der applizierten Aktuatorik / Sensorik, vergleiche [ECKSTEIN *et al.* 2008].

Eine weitere, sehr große Gruppe von *lokalen* Verfahren basiert auf der Verwendung von elastischen Wellen. Dabei ist zwischen *passiven* und *aktiven* Systemen zu unterscheiden. *Passive* Systeme beschränken sich darauf, in die Struktur „hineinzuhorchen“. Es werden somit keine Aktuatoren benötigt, sondern elastische Wellen mit Hilfe von Sensoren ausschließlich detektiert. Wie in Bild 1.4 links dargestellt, können dies zum Beispiel Impact-Ereignisse sein. Auf

Basis der gemessenen elastischen Wellen lassen sich Impacts detektieren und lokalisieren. Dazu werden *modellgestützte* Verfahren [SEYDEL und CHANG 2001], [DOYLE 1987], neuronale Netze [WORDEN und STASZEWSKI 2008] oder Optimierungsverfahren [DZHAFEROV 2009] eingesetzt.

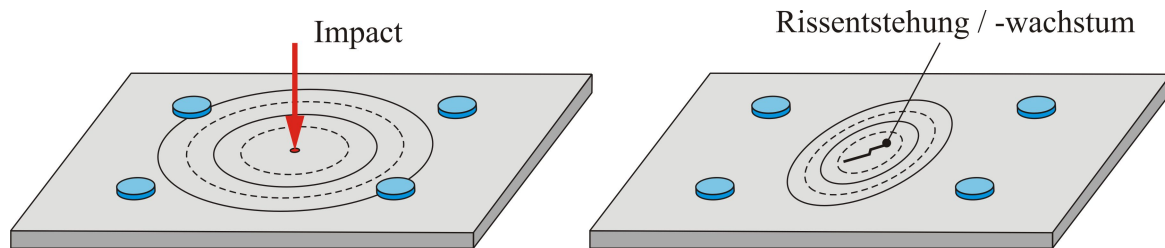


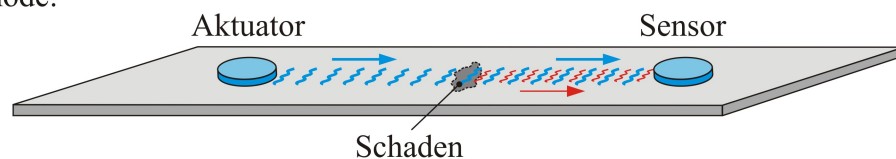
Bild 1.4: Passive, wellenbasierte SHM-Systeme

Die mit Acoustic Emission (AE) bezeichnete Methode (Bild 1.4 rechts) detektiert Signale, die direkt von einem Schaden ausgehen [HOLFORD 2009]. Mit dieser Methode ist unter Umständen das Wachstum einer Schädigung beobachtbar, da beispielsweise bei der Ausbreitung eines Risses charakteristische Signale emittiert werden.

Neben piezoelektrischen Sensoren können zur Messung von Dehnungen und / oder Temperatur auch faseroptische Sensoren (fiber bragg grating, FBG) eingesetzt werden [MEASURES 2001], [Li *et al.* 2004]. Sie haben keinerlei Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern, was in bestimmten Anwendungsgebieten einen Vorteil darstellen kann.

Aktive Systeme verwenden neben Sensoren auch Aktuatoren, um elastische Wellen in die Struktur gezielt einzuleiten. Es wird dabei zwischen der so genannten Pitch-Catch Methode und der Pulse-Echo Methode unterschieden, die beide in Bild 1.5 veranschaulicht sind.

Pitch-Catch Methode:



Pulse-Echo Methode:

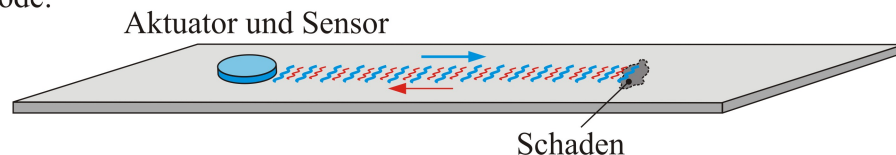


Bild 1.5: Aktive, wellenbasierte SHM-Systeme

In dünnwandigen Bauteilen werden hauptsächlich so genannte geführte Wellen eingesetzt, die sich in Lamb-Wellen und horizontale Scherwellen (engl.: shear-horizontal-(SH)-waves) unterteilen lassen. Die theoretischen Grundlagen der Lamb-Wellen wurden schon zu Beginn des

zwanzigsten Jahrhunderts von Sir Horace Lamb hergeleitet [LAMB 1917]. Sie breiten sich in dünnwandigen Strukturen mit freien Oberflächen aus und sind teilweise stark dispersiv. In der Praxis wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit daher oft aus so genannten Dispersionsdiagrammen entnommen. Grundlegende Eigenschaften von Lamb-Wellen sind bei [STASZEWSKI *et al.* 2004] und im Kapitel 8 von [ROSE 1999] ausführlich diskutiert. SH-Wellen lassen sich in isotropen Werkstoffen nur durch spezielle Wandler erzeugen, weshalb ihr Einsatz weniger weit verbreitet ist.

Geführte Wellen interagieren auf Grund ihres Ausbreitungsmechanismus stark mit Materialinhomogenitäten, weshalb sie sich sehr gut zur Strukturüberwachung eignen. Pionierarbeit bei der Entwicklung von automatisierten Systemen, die mit Hilfe von Piezoaktuatoren geführte Wellen in einer Struktur induzieren und messen können, wurde von der Arbeitsgruppe um Chang geleistet [CHANG 1995], [CHANG 1998]. Einen recht umfassenden Überblick sowohl über die Grundlagen wie auch verschiedene Anwendungsszenarien gibt [GIURGIUTIU 2007].

In den letzten etwa zehn Jahren sind eine Vielzahl von Auswertelgorithmen auf der Basis von geführten Wellen entwickelt worden. Park und Chang definieren einen einfachen Schadensindikator, der auf der relativen Differenz elektrischer Spannungssignale beruht. Dabei werden aktuelle Messwerte mit Daten der ungeschädigten Struktur verglichen, um somit eine Aussage über mögliche Veränderungen zu erhalten [PARK und CHANG 2003]. Mengelkamp stellt in Kapitel 4.5 von [MENDELKAMP 2006] einen energie- und einen korrelationsbasierten Schadensindikator sowie eine Methode auf Basis der Signal-Hüllkurven vor, die Schädigungen auf einem Pfad vom Aktuator zum Sensor anzeigen. Ein Verfahren auf Basis von Differenzen der Sensorspannungssignale in Verbindung mit einer Auswertung mittels Visualisierungstechniken stellen [MOLL *et al.* 2009] vor. Eine weitere Anwendung dieses Verfahrens, das von einer sehr guten Synchronisation der Spannungssignale abhängig ist, ist in [MOLL *et al.* 2010] für die Schädigungslokalisierung in einer anisotropen Platte vorgestellt. Die notwendigen Sensorspannungssignale werden in beiden Fällen mit der in dieser Arbeit vorgestellten Simulationmethode berechnet.

Ein weiterer viel versprechender Ansatz basiert auf der Anwendung eines so genannten phasengesteuerten Feldes (engl.: phased array). Dieses Konzept, das ursprünglich aus der Radartechnik stammt und anschließend in der Ultraschalltechnik im Rahmen der zerstörungsfreien Prüfung eingesetzt wurde, ist von [GIURGIUTIU und BAO 2002] auf die Anregung von Lamb-Wellen durch applizierte Piezoaktuatoren erweitert worden. Prinzipiell kann durch eine phasenverschobene Anregung von mehreren, nahe beieinander positionierten Aktuatoren eine

Vorzugsrichtung gewählt werden, in die Wellen mit höherer Amplitude emittiert werden. In Analogie zu einem Radarstrahl, mit dem ein Gebiet abgetastet wird, wird dieses Konzept auch als „Embedded Ultrasonic Structural Radar (EUSR)“ bezeichnet.

Neben den bisher angesprochenen Algorithmen und Verfahren existiert eine Vielzahl weiterer Methoden, die hier nicht näher vorgestellt werden sollen. Einen guten allgemeinen Überblick geben [BALAGEAS *et al.* 2006], [ADAMS 2007] und [GIURGIUTIU 2007]. Darüber hinaus existieren auch einige Verfahren, die auf nicht-mechanischen Grundlagen basieren. Sie verwenden beispielsweise den elektrischen Widerstand oder elektro-magnetische Verfahren, vergleiche [LEMISTRE *et al.* 2000], [ANGELIDIS *et al.* 2005], [BUDELMANN *et al.* 2001] und [TODOROKI *et al.* 2002].

Trotz der Vielzahl der Institutionen und Arbeitsgruppen, die mittlerweile auf dem Gebiet des Structural Health Monitorings forschen, ist zu beobachten, dass die Mehrzahl der vorgeschlagenen Verfahren bisher ausschließlich im Laborstadium demonstriert wurde. Zur Bewertung des technologischen Reifegrades bietet sich eine Einteilung in „technology readiness levels“, TRLs an, vergleiche [MANKINS 1995]. Die meisten derzeit vorliegenden Systeme lassen sich dabei in den Bereich TRL 2 (i.e. Technologiekonzept und / oder Applikation formuliert) bis TRL 5 (i.e. Komponenten oder Versuchsaufbau validiert in relevanter Umgebung) einordnen. Bis jetzt sind nur relativ wenige SHM-Systeme in reale Strukturen, die oft wesentlich komplexer als Laboraufbauten sind, transferiert worden. Die Gründe für diesen Sachverhalt sind mannigfaltig und reichen von Zertifizierungsvorschriften der zuständigen Behörden (beispielsweise in der Luftfahrtindustrie), über Schwierigkeiten bei der Herstellung bzw. dauerhaften Installation der Sensorik, bis hin zur Komplexität der verwendeten Technologie an sich. Herzberg *et al.* stellen in einer vergleichenden Analyse verschiedener Verfahren an einer kleinen CFK-Flugzeugkomponente fest, dass alle getesteten Systeme auf Grund von technischen Schwierigkeiten noch erheblicher Weiterentwicklung bis zum Einsatz in realen Anwendungen bedürfen [HERZBERG *et al.* 2008]. Neben einer Verbesserung der Schädigungserkennung und -lokalisierung wird von der Seite potenzieller Anwender auch eine möglichst genaue Quantifizierung einer Schädigung gefordert, um dies in Form eines Schadensindex in ein bestehendes Daten-Managementsystem einzubeziehen [KUMAR *et al.* 2009] und in Wartungspläne zu integrieren.

Langfristiges Entwicklungsziel bilden Systeme, die über das reine Monitoring einer Struktur weit hinausgehen. Wenn es gelingt, auf Basis einer ausreichend genau quantifizierten Schädigung eine Prognose der verbleibenden Restlebensdauer eines Bauteils zu machen (vergleiche

die fünfte Ebene in Bild 1.3), ermöglicht dies einen Übergang vom Health-Monitoring zum integrierten Health-Management, was die Wunschvorstellung potenzieller Endanwender wie beispielsweise Luftfahrtgesellschaften ist.

1.2 Ziele und Aufbau dieser Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zur Weiterentwicklung lokaler SHM-Systeme im höheren Frequenzbereich zu leisten. Dazu wird zunächst ein leistungsfähiges Simulationsverfahren vorgestellt, mit dem Wellenausbreitungsvorgänge in flachen Schalenstrukturen mit einer höheren Effizienz simuliert werden können, als dies mit konventionellen finiten Elementen möglich ist. Dadurch wird eine Grundlage geschaffen, mit der ein derartiges SHM-System im Stadium der Vorentwicklung schon vor einer realen Installation virtuell abgebildet werden kann. Auf diese Weise lassen sich viele grundlegende Erkenntnisse und Phänomene auf der Basis von Simulationsmodellen gewinnen, wie im Verlauf der Arbeit dargestellt ist. Schon vor der zeit- und kostenaufwändigen realen Installation können virtuell eine Anpassung des SHM-Systems an die entsprechende Struktur und eine Optimierung des Systems durchgeführt werden.

In Kapitel 2 werden die notwendigen Grundlagen für die Entwicklung wellenbasierter SHM-Systeme und deren effiziente Modellierung vorgestellt, wobei zunächst detailliert auf die grundlegenden Mechanismen der Wellenausbreitung - insbesondere im Hinblick auf geführte Wellen in dünnwandigen Strukturen - eingegangen wird. Im Anschluss wird kurz die Modellierung von dünnwandigen Strukturen mit Hilfe verschiedener Plattentheorien behandelt, bevor die Vorgehensweise der Methode der finiten Elemente und so genannte Spektralelemente vorgestellt werden. In Abschnitt 2.5 sind abschließend einige grundlegende Mechanismen piezoelektrischer Materialien dargestellt, die für die Aktuatorik und Sensorik verwendet werden.

Im dritten Kapitel wird ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Spektralelement für flache Schalen detailliert hergeleitet. Neben der Berechnung der Massen- und Steifigkeitsmatrizen werden Möglichkeiten dargestellt, wie einerseits eine richtungsabhängige Materialdämpfung und andererseits statische Vorlasten integriert werden können. Kapitel 4 stellt daran anschließend den gesamten Ablauf der Simulation eines wellenbasierten SHM-Systems dar. Dabei werden alle notwendigen Schritte von der Generierung eines entsprechenden Spektralknotengitters über den Zusammenbau der globalen Systemmatrizen bis hin zur Lösung des Systems im Detail vorgestellt. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Integration der notwendigen Aktuatorik und Sensorik (Abschnitt 4.4) und der realistischen Modellierung von Struktur-

schäden (Abschnitt 4.6), die zur vollständigen Simulation eines derartigen SHM-Systems unerlässlich sind.

Kapitel 5 stellt verschiedene numerische Studien vor, die mit Hilfe des entwickelten Simulationswerkzeugs durchgeführt worden sind. Unter anderem wird in diesem Rahmen die notwendige räumliche und zeitliche Diskretisierung untersucht sowie ein Vergleich unterschiedlicher Modellierungen der Piezoelemente durchgeführt. Weitere Schwerpunkte bestehen in der Untersuchung grundlegender Charakteristika von Wellen in versteiften Panels sowie in der Erforschung der Interaktion verschiedener Wellenmoden mit unterschiedlichen Strukturschädigungen, beispielsweise Rissen und Delaminationen.

Neben der angesprochenen Einsatzmöglichkeit des vorgestellten Simulationswerkzeugs im Rahmen der Vorentwicklung ist der Einsatz auch in späteren Entwicklungsstadien möglich und sinnvoll. Dabei geht es dann in vielen Fällen um die Optimierung von Systemdetails oder von Signalauswerteargorithmen. In diesem Zusammenhang kann es sehr wichtig sein, die Realität mit möglichst hoher Genauigkeit im Modell abbilden zu können. Im sechsten Kapitel wird daher eine Strategie vorgestellt, wie die Materialparameter eines Simulationsmodells auf effiziente Weise angepasst werden können, um eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen Messdaten und Simulationsdaten zu erzielen. Für diesen Prozess, der auch als Modell-Updating bezeichnet wird, werden die Dispersionskurven des entsprechenden Materials direkt aus den verwendeten Bewegungsgleichungen hergeleitet.

Kapitel 7 demonstriert verschiedene Anwendungen des vorgestellten Simulationswerkzeugs an isotropen und anisotropen Werkstoffen. Zunächst werden zur Validierung des entwickelten Modells Vergleiche mit experimentellen Daten durchgeführt, wobei sowohl Wellenausbreitungsvorgänge in ungeschädigten Strukturen als auch die Interaktion mit Schädigungen analysiert werden. Daran anschließend werden numerische Untersuchungen an realitätsnahen, komplexeren Strukturen in Kombination mit unterschiedlichen Schädigungen vorgestellt. Am Beispiel eines phased arrays kommt dabei auch ein Simulationsmodell mit aufwendigerer Aktuatorik und Sensorik zum Einsatz.

Den Abschluss der Arbeit bildet eine Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse. Dabei werden die Vorteile des vorgestellten Werkzeugs aber auch die Grenzen der verwendeten Modelle und Theorien herausgearbeitet. In einem kurzen Ausblick werden darüber hinaus weitere potenzielle Anwendungs- und Entwicklungsmöglichkeiten des vorgestellten Werkzeugs aufgezeigt.

2 Grundlagen

2.1 Wellen in elastischen Kontinua

In diesem Abschnitt erfolgt zunächst die Vorstellung einiger Grundbegriffe, die üblicherweise zur Beschreibung und Klassifizierung von Schwingungen und Wellen verwendet werden. Daran schließt sich ein Abschnitt über die Wellengleichung an. Mit Hilfe der angegebenen Differenzialgleichung lassen sich ebene Wellen in allen Systemen mathematisch beschreiben. Die allgemeinen Feldgleichungen für isotrope und anisotrope Medien sowie eine kurze Erläuterung des Dispersionsbegriffs schlagen die Brücke zu den geführten Wellen in Platten, die detailliert vorgestellt werden.

Wellen können grundsätzlich immer dann entstehen, wenn schwingungsfähige Systeme miteinander gekoppelt sind. Durch die Kopplung werden Schwingungen zwischen den benachbarten Systemen übertragen, was zu einer räumlichen Ausbreitung des Schwingungszustandes und damit zu Wellen führt. Für die Anregung der einzelnen Oszillatoren wird Energie benötigt, die in Ausbreitungsrichtung übertragen wird, ohne dass dabei ein Transport von Materie erfolgt.

2.1.1 Grundbegriffe

In der Wellentheorie von Kontinua sind die Oszillatoren infinitesimal kleine Materieelemente. Schwingungsbewegungen dieser Elemente sind in alle Raumrichtungen möglich, was zu grundlegend unterschiedlichen Wellenarten führt. Fällt die Schwingungsrichtung der Oszillatoren mit der Ausbreitungsrichtung der Welle zusammen, so spricht man von Longitudinalwellen. Steht die Ausbreitungsrichtung der Welle senkrecht zur Schwingungsrichtung, so wird sie als Transversalwelle bezeichnet. Die Kopplung der Materieteilchen untereinander bestimmt die grundsätzliche Ausbreitungsfähigkeit von Wellen in einem Kontinuum. Bei idealen Fluiden können beispielsweise wegen der fehlenden inneren Reibung keine Schubkräfte übertragen werden, weshalb in solchen Medien nur Longitudinalwellen ausbreitungsfähig sind. Lediglich an der Grenzschicht zwischen Flüssigkeiten und Gasen kann es zu transversalen Oberflächenwellen kommen [HERING *et al.* 2004]. Bei Festkörpern können beide Wellentypen vorkommen, wobei Transversalwellen in Form von Biege- und Scherwellen auftreten.

Die Auslenkung der Oszillatoren ist grundsätzlich von Zeit und Ort abhängig. Mit Hilfe der Periodendauer T und der Wellenlänge λ ergibt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle zu

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad (2.1)$$

und mit der Frequenz $f = 1/T$ erhält man die fundamentale Gleichung

$$c = f \lambda. \quad (2.2)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist grundsätzlich von der Kopplung der Oszillatoren untereinander abhängig. Je steifer die Kopplung, desto höher ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung von Wellen ist die Wellenzahl k , die angibt wie viele Wellenlängen auf das 2π -fache der Längeneinheit entfallen. Mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ergibt sich der Zusammenhang mit den anderen Größen zu

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{f \lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.3)$$

Die Verbindung benachbarter Punkte mit gleichem Schwingungszustand liefert eine geometrische Fläche, die so genannte Wellenfront. Ihre Form hängt von der Anregung sowie den Eigenschaften des Kontinuums ab. Von besonderer Bedeutung sind die in Bild 2.1 dargestellten Kugel- bzw. Kreiswellen und ebenen Wellen.



Bild 2.1: Kugel- bzw. Kreiswelle (links) und ebene Welle (rechts)

In genügend großem Abstand vom Anregungspunkt können Ausschnitte einer Kugelwelle näherungsweise als ebene Wellen aufgefasst werden.

2.1.2 Wellengleichung

In allen ungedämpften Systemen, in denen Wellenausbreitung möglich ist, lassen sich ebene Wellen mathematisch durch eine Differenzialgleichung (DGL) der Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

beschreiben, wobei x die Ausbreitungsrichtung ist. Die allgemeine Lösung dieser DGL ist nach d'Alembert jede Funktion des Typs

$$v(x, t) = g_r(x - ct) + g_l(x + ct). \quad (2.5)$$

Dabei beschreibt $g_r(x, t)$ den rechtslaufenden und $g_l(x, t)$ den linkslaufenden Wellenteil.

2.1.3 Allgemeine Feldgleichungen

Während die Herleitung spezieller Wellendifferenzialgleichungen relativ einfach anhand von kinematischen Beziehungen eines infinitesimalen Volumenelements durchgeführt werden kann, wie beispielsweise in [MENGELKAMP 2006] für Longitudinal- und Transversalwellen ausführlich dargestellt ist, werden hier die allgemeinen Feldgleichungen vorgestellt, wobei von kleinen Verformungen ausgegangen wird. Für eine kompakte Darstellung wird die Indexnotation verwendet, bei der die kartesischen Koordinaten x, y, z durch x_k mit $k = 1, 2, 3$ gekennzeichnet werden. Zusätzlich wird die Einsteinsche Summenkonvention vorausgesetzt.

Die grundlegende Beziehung für ein allgemeines, homogenes, anisotropes Medium kann in Form zweier Kopplungsgleichungen angegeben werden. Die erste dieser Gleichungen,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.6)$$

stellt die Beziehung zwischen der räumlichen Änderung der einen Feldgröße Spannung σ_{ij} und der zeitlichen Änderung der anderen Feldgröße Verschiebung u_i her. ρ bezeichnet die Materialdichte. Die zweite Gleichung ist die Spannungs-Dehnungsbeziehung für ein anisotropes Kontinuum

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.7)$$

Dabei ist C_{ijkl} die in Bezug auf die Indizes k und l symmetrische, konstitutive Matrix und ε_{kl} bezeichnet die Dehnung, siehe Gleichung (2.10).

Feldgleichungen für isotrope Medien

Mit Hilfe der Laméschen Konstanten λ_{La} und μ_{La} lässt sich im isotropen Fall die Spannungs-Dehnungsrelation zu

$$\sigma_{ij} = \lambda_{La} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_{La} \varepsilon_{ij} \quad (2.8)$$

vereinfachen. δ_{ij} bezeichnet dabei das Kronecker-Symbol und der Zusammenhang der Lamé-schen Konstanten mit den Ingenieurkonstanten E , G und ν ist durch

$$\lambda_{La} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu_{La} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.9)$$

gegeben. Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen wird durch den Dehnungstensor

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

beschrieben. Einsetzen des Dehnungstensors (2.10) in den Spannungstensor (2.8) und nachfolgendes Ableiten nach dem Ort liefert zusammen mit der ersten Kopplungsgleichung (2.6) die allgemeine Feldgleichung für den isotropen Fall,

$$\lambda_{La} \delta_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} + \mu_{La} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.11)$$

die als Navier-Lamé-Gleichung bezeichnet wird. Diese Gleichung lässt sich elegant mittels der Methode der Helmholtz-Zerlegung lösen. Dazu wird die Verschiebung mit Hilfe eines skalaren Potentials Φ und eines Vektorpotentials $\bar{\Psi}$ ausgedrückt gemäß

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \varepsilon_{ipq} \frac{\partial \bar{\Psi}_q}{\partial x_p}. \quad (2.12)$$

Hier bezeichnet ε_{ipq} das Permutationssymbol und $\bar{\Psi}$ besitzt die wichtige Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.13)$$

ist. Einsetzen von (2.12) in (2.11) liefert

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\lambda_{La} + 2\mu_{La}) \nabla^2 \Phi - \rho \ddot{\Phi} \right] + \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\mu_{La} \nabla^2 \bar{\Psi}_q - \rho \ddot{\bar{\Psi}}_q \right] \varepsilon_{pqi} = 0, \quad (2.14)$$

wobei \in_{pqi} wiederum das Permutationssymbol und ∇^2 den Laplace-Operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.15)$$

bezeichnet. Gleichungssatz (2.14) wird erfüllt, wenn die Terme in den eckigen Klammern verschwinden, so dass sich die Gleichungen

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

und

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_k}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_k}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

ergeben. c_L und c_T bezeichnen dabei die Wellengeschwindigkeiten der Longitudinal- und der Transversalwelle und werden mit Hilfe der Steifigkeit und der Dichte definiert:

$$c_L^2 = \frac{\lambda_{La} + 2\mu_{La}}{\rho} \quad \text{und} \quad c_T^2 = \frac{\mu_{La}}{\rho}. \quad (2.18)$$

Die Bewegungsgleichung (2.11) ist also in zwei einfachere, unabhängige Wellengleichungen zerlegt worden. Dies bedeutet, dass sich in unbegrenzten Medien Longitudinal- und Transversalwellen (die auch Torsionswellen beinhalten) ausbreiten, ohne miteinander zu interagieren. Eine Kopplung findet nur an den Grenzen eines Körpers statt, vergleiche Abschnitt 2.1.5.

Feldgleichungen für anisotrope Medien

Im allgemeinen, anisotropen Fall lässt sich die Spannungs-Dehnungsrelation (2.7) nicht weiter vereinfachen. Einsetzen in (2.6) liefert somit

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) = \rho \ddot{u}_i. \quad (2.19)$$

Durch die Symmetrie der konstitutiven Matrix dürfen k und l vertauscht werden:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \rho \ddot{u}_i. \quad (2.20)$$

Wird nun die Annahme ebener, harmonischer Wellen der Form

$$u_i = A_i \cdot e^{[i(k_j x_j - \omega t)]} \quad (2.21)$$

getroffen und in (2.20) eingesetzt, so ergibt sich ein Eigenwertproblem. Mit Hilfe der Tensoranalysis lässt sich zeigen, dass gilt:

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = k_j k_k u_l. \quad (2.22)$$

Mit (2.20) folgt daraus:

$$C_{ijkl} k_j k_k u_l = \rho \omega^2 u_i. \quad (2.23)$$

Mit $u_i = u_i \delta_{il}$ ergibt sich daraus die bekannte Christoffel-Gleichung:

$$(\rho \omega^2 \delta_{il} - C_{ijkl} k_j k_k) u_l = 0. \quad (2.24)$$

Es gelten die Beziehungen $k_j = n_j \cdot k$ und $k_k = n_k \cdot k$, wobei die n_i den jeweiligen Richtungskosinus der Normalen der Wellenfront bezeichnen. Damit lässt sich (2.24) zu

$$(\Gamma_{il} - \rho c^2 \delta_{il}) u_l = 0 \quad (2.25)$$

umformen, wobei der Zusammenhang (2.3) eingesetzt wurde und Γ_{il} den Christoffel-Tensor bezeichnet:

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k. \quad (2.26)$$

Gleichung (2.26) liefert somit drei homogene Gleichungen, deren nichttriviale Lösung sich durch das Nullsetzen der Determinante der Koeffizientenmatrix ergibt:

$$|\Gamma_{il} - \rho c^2 \delta_{im}| = 0. \quad (2.27)$$

Aus diesem Ausdruck können nun für beliebige Wellenzahlvektoren k_j die zugehörigen Geschwindigkeiten bestimmt werden.

2.1.4 Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Bei der Schadensdiagnose mittels geführter Wellen werden üblicherweise Wellenpakete, auch Bursts genannt, verwendet. Diese Signale - Beispiele sind in Abschnitt 5.1 angegeben - bestehen, wie sich leicht durch eine Fourier-Zerlegung zeigen lässt, nicht nur aus einer Welle mit einer bestimmten Frequenz, sondern aus der Überlagerung einer Vielzahl von Wellen unterschiedlicher Frequenz. Während die Wellengeschwindigkeit der reinen Longitudinal- und der reinen Transversalwelle nur von Materialparametern, nicht aber von der Frequenz abhängig ist (vergleiche (2.18)), gilt dies, wie im weiteren Verlauf noch detailliert zu sehen ist, bei geführten Wellen in Platten im Allgemeinen nicht. In diesem Zusammenhang treten die wichtigen Begriffe der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit auf, die im Folgenden definiert werden:

Die Geschwindigkeit der Ausbreitung eines Schwingungszustandes konstanter Phase wird als Phasengeschwindigkeit bezeichnet, und ist durch

$$c_p = \frac{\omega}{k} \quad (2.28)$$

definiert. Diejenige Geschwindigkeit, mit der sich die Hüllkurve einer Wellengruppe bewegt, wird mit Gruppengeschwindigkeit bezeichnet und gemäß der Vorschrift

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (2.29)$$

berechnet. Eine vollständige Herleitung dieser Zusammenhänge ist in [CREMER und HECKL 1996] angegeben. Bei anisotropen Werkstoffen ist zusätzlich zu beachten, dass die Wellenzahl k im Allgemeinen in den Vektor \mathbf{k} übergeht, vergleiche Abschnitt 6.1. Die Gruppengeschwindigkeit gibt die Geschwindigkeit des Energietransportes im System an.

In Bild 2.2 ist eine Welle mit unterschiedlicher Phasen- und Gruppengeschwindigkeit veranschaulicht. Zwischen den beiden dargestellten Zeitpunkten hat sich ein Zustand konstanter Phase, beispielsweise der rot markierte Nulldurchgang, genau um eine mittlere Wellenlänge nach rechts weiterbewegt. Die Wellengruppe ist in diesem Zeitraum nur ein wesentlich kleineres Stück fortgeschritten, was durch das mit einem blauen Pfeil markierte Maximum der Hüllkurve verdeutlicht wird. Die nicht ausgefüllten Markierungen im unteren Bild entsprechen den Positionen zum ersten Zeitpunkt (oberes Bild). Ein ursprünglich begrenztes Wellenpaket „zerläuft“ somit mit zunehmender Zeitdauer und ändert dabei seine Form. Dieses Verhalten wird als Dispersion bezeichnet.

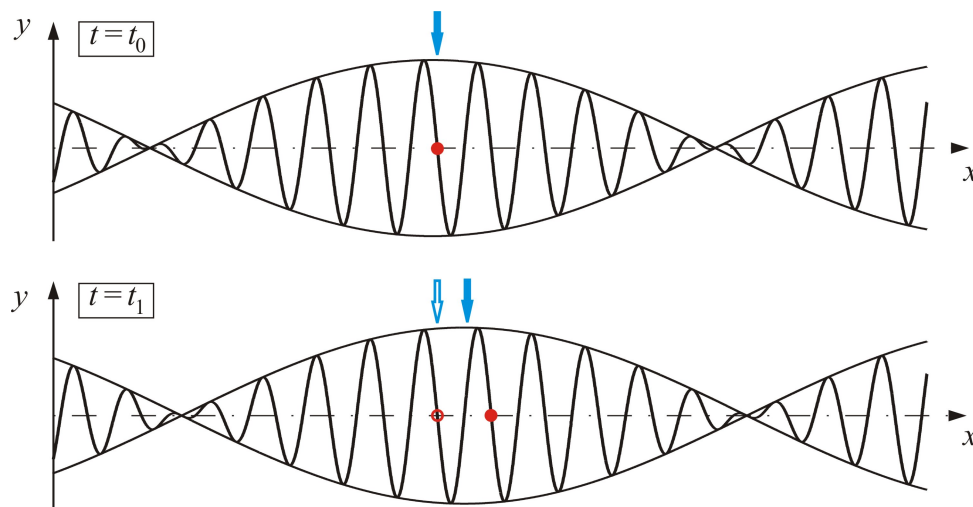


Bild 2.2: Zur Veranschaulichung unterschiedlicher Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Falls Phasen- und Gruppengeschwindigkeit identisch sind, tritt keine Dispersion auf. Dieser Fall kann nur auftreten, wenn für alle Wellenzahlen die Beziehung

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (2.30)$$

erfüllt ist. Wie sich leicht durch Auftragung von ω über k zeigen lässt, kann dies nur durch

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_g = \text{const.} \quad (2.31)$$

sichergestellt werden. Somit ist in diesem Fall die Phasengeschwindigkeit nicht von der Frequenz abhängig.

2.1.5 Geführte Wellen in Platten

Die in Abschnitt 2.1.3 vorgestellten reinen Longitudinal- und Transversalwellen (vergleiche beispielsweise Gleichungen (2.16) und (2.17)) treten - wie oben schon kurz erwähnt - nur in unendlich ausgedehnten Festkörpern auf. An Grenzflächen und somit auch an freien Oberflächen werden Wellen teilweise reflektiert und teilweise in andere Wellenarten umgewandelt, wie in der nachfolgenden Grafik, Bild 2.3, veranschaulicht ist. Dargestellt ist eine unter dem Winkel φ_L einfallende, reine Longitudinalwelle, die teilweise reflektiert wird (Prinzip: Ausfallswinkel gleich Einfallswinkel), teilweise jedoch in eine Transversalwelle umgeformt wird. Diese neue, rot dargestellte Welle weist einen anderen Ausfallswinkel φ_T auf.

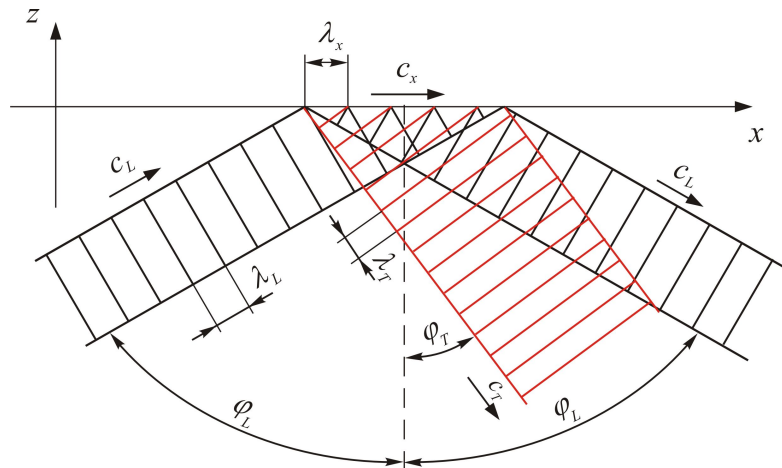


Bild 2.3: Reflexion und Konversion von Wellen an einer freien Oberfläche

Dieser Zusammenhang gilt analog auch für einfallende Transversalwellen. Aus Bild 2.3 lässt sich folgender Zusammenhang zwischen den Wellenzahlen und den Ein- und Ausfallswinkeln der beiden Wellen aufstellen:

$$\frac{k_L}{k_T} = \frac{c_T}{c_L} = \frac{\sin \varphi_T}{\sin \varphi_L} \quad (2.32)$$

Die Gruppengeschwindigkeit, mit der Energie in x -Richtung transportiert wird, kann durch

$$c_{gx} = c_L \sin \varphi_L \quad (2.33)$$

basierend auf der Gruppengeschwindigkeit der Longitudinalwelle angegeben werden.

Durch Anregung einer Platte können im Allgemeinen sowohl Longitudinal- als auch Transversalwellen entstehen. Aus Longitudinal- und vertikalen Scherwellen resultieren durch das oben beschriebene Verhalten an freien Oberflächen nach einer gewissen zurückgelegten Strecke durch Superposition unterschiedliche Wellenpakete, die unter dem Oberbegriff geführte Wellen bekannt sind. Die genaue Ausprägung ist dabei von der Plattendicke, der Anregungsfrequenz und dem Einfallswinkel abhängig. Derartige Wellen werden als Lamb-Wellen bezeichnet und sind nachfolgend detailliert beschrieben.

Lamb-Wellen

Der Name Lamb-Wellen geht auf Sir Horace Lamb zurück, der 1917 Untersuchungen auf diesem Gebiet veröffentlichte [LAMB 1917]. Grundsätzlich können Lamb-Wellen symmetrische und antisymmetrische Moden aufweisen, die mit S_i sowie A_i bezeichnet werden. Der Index i dient zur Unterscheidung der einzelnen Moden und beginnt bei 0. Mit steigender An-

regungsfrequenz nimmt die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden zu. In Bild 2.4 sind die Formen der jeweils ersten drei Moden schematisch dargestellt.

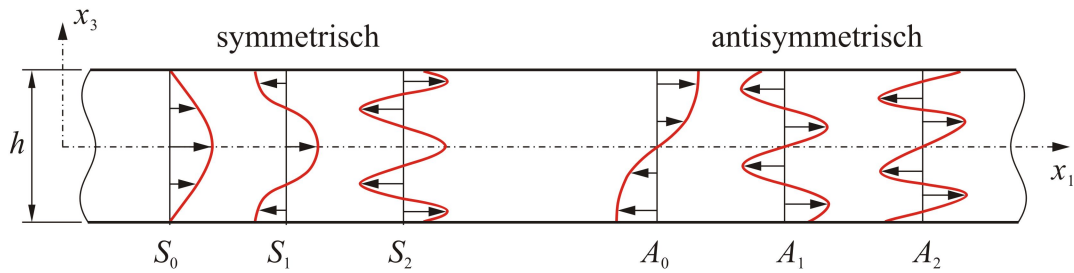


Bild 2.4: Symmetrische und antisymmetrische Lamb-Wellenmoden

Lamb-Wellen interagieren bereits mit sehr kleinen Strukturschäden, weshalb sie gut zur Schadensdiagnose geeignet sind. Auf Grund der Vielzahl möglicher Moden und der damit verbundenen Schwierigkeiten bei der Interpretation der Signale wird das Anregungsspektrum in der Regel so gewählt, dass nur die erste symmetrische und antisymmetrische Mode angeregt werden. In verschiedenen Veröffentlichungen werden allerdings auch gezielt andere Moden wie die A_1 -Mode zur Diagnose genutzt, vergleiche beispielsweise [THOMAS *et al.* 2004]. Eine weitere wesentliche Voraussetzung zur Interpretation gemessener Signale stellt die Kenntnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit der verschiedenen Moden dar. Werden für die Verschiebungen folgende Ansätze gemacht, vergl. Kapitel 8 von [ROSE 1999],

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial x_3}, \\
 u_2 &= 0, \\
 u_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Theta}{\partial x_1},
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

und in die allgemeine isotrope Feldgleichung (2.11) eingesetzt, so ergeben sich nach längerer Herleitung unter Verwendung der Helmholtz-Zerlegung folgende Wellengleichungen für die Longitudinalwelle:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}
 \tag{2.35}$$

und die Transversalwelle:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}. \quad (2.36)$$

Diese Gleichungen sind Spezialfälle der in (2.16) und (2.17) angegebenen allgemeinen Formulierung. Als Ansätze für die Potenzialfunktionen werden Lösungen dieser beiden Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \Phi &= [B_1 \sin(px_3) + B_2 \cos(px_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad \text{und} \\ \Theta &= [C_1 \sin(qx_3) + C_2 \cos(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

verwendet. Diese Ansätze beschreiben stehende Wellen in x_3 -Richtung und sich ausbreitende Wellen in x_1 -Richtung. Die Konstanten p und q lauten dabei

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad \text{und} \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2. \quad (2.38)$$

Mit den gewählten Verschiebungsansätzen (2.34) lassen sich durch Einsetzen in die zweite Kopplungsgleichung (2.8) auch die Spannungen als Funktion der Potentiale ausdrücken. Somit lassen sich sowohl Verschiebungen wie auch Spannungen mit Hilfe der gewählten Ansatzfunktionen angeben. Es entsteht dabei ein zur x_3 -Ebene symmetrischer und ein antisymmetrischer Anteil. Die Gleichungen des symmetrischen Teils ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} u_1 &= [ik B_2 \cos(px_3) + q C_1 \cos(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_3 &= [-p B_2 \sin(px_3) + ik C_1 \sin(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \sigma_{31} &= \mu_{La} [-2ik p B_2 \sin(px_3) + (k^2 - q^2) C_1 \sin(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \sigma_{33} &= [-\lambda_{La} (k^2 + p^2) B_2 \cos(px_3) - 2\mu_{La} (p^2 B_2 \cos(px_3) + ik q C_1 \cos(qx_3))] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

die des antisymmetrischen Teils zu

$$\begin{aligned} u_1 &= [ik B_1 \sin(px_3) - q C_2 \sin(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ u_3 &= [p B_1 \cos(px_3) - ik C_2 \cos(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \sigma_{31} &= \mu_{La} [2ik p B_1 \cos(px_3) + (k^2 - q^2) C_2 \cos(qx_3)] e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\sigma_{33} = \left[-\lambda_{La} (k^2 + p^2) B_1 \sin(px_3) - 2\mu_{La} (p^2 B_1 \sin(px_3) - i k q C_2 \sin(qx_3)) \right] e^{i(kx_1 - \omega t)}.$$

Diese Aufspaltung in symmetrischen- und antisymmetrischen Anteil ist nicht allgemeingültig, sondern gilt nur im Spezialfall der zur x_3 -Ebene symmetrischen, isotropen Platte. Die Bestimmung der vier noch unbekanntenen Konstanten ist aus den Randbedingungen möglich: An den lastfreien Oberflächen der Platte müssen die Spannungen verschwinden:

$$\sigma_{31}(x_3 = \pm h/2) = \sigma_{33}(x_3 = \pm h/2) = 0. \quad (2.41)$$

Somit ergeben sich vier Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten. Nichttriviale Lösungen existieren nur, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses homogenen Gleichungssystems verschwindet. Jede Lösung, die zu einer verschwindenden Determinante führt, liefert die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Mode für ein konkretes Produkt aus Frequenz und Plattendicke. Nach einigen Umformungen, vergleiche dazu Abschnitt 8.2 von [ROSE 1999], ergeben sich daraus die sogenannten Rayleigh-Lamb Gleichungen:

$$\frac{\tan\left(\frac{qh}{2}\right)}{\tan\left(\frac{ph}{2}\right)} = -\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \quad (2.42)$$

für die symmetrischen und

$$\frac{\tan\left(\frac{qh}{2}\right)}{\tan\left(\frac{ph}{2}\right)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} \quad (2.43)$$

für die antisymmetrischen Lamb-Moden. Zur Lösung dieser Gleichungen müssen numerische Verfahren verwendet werden. Die Lösungen werden üblicherweise in Form sogenannter Dispersionsdiagramme angegeben. In Bild 2.5 ist die Phasengeschwindigkeit der Moden einer Lamb-Welle dargestellt, Bild 2.6 veranschaulicht die zugehörigen Gruppengeschwindigkeiten. Als Materialparameter werden Literaturwerte für Aluminium verwendet.

In beiden Diagrammen sind antisymmetrische Moden als rote Linien und symmetrischen Moden als schwarze Linien dargestellt. An der erheblichen Krümmung der Kurven ist schon auf den ersten Blick erkennbar, dass Lamb-Wellen im Allgemeinen dispersiv sind. Um ein starkes Zerfließen der Signalformen während der Ausbreitung zu verhindern werden zur Lamb-Wellen basierten Schadensdiagnose daher in der Regel schmalbandige Signale verwendet,

wie sie in Abschnitt 5.1 beschrieben sind. Dadurch ist es möglich, die am Sensor aufgenommenen Signale verschiedenen Moden zuzuordnen, was eine physikalische Interpretation erleichtert.

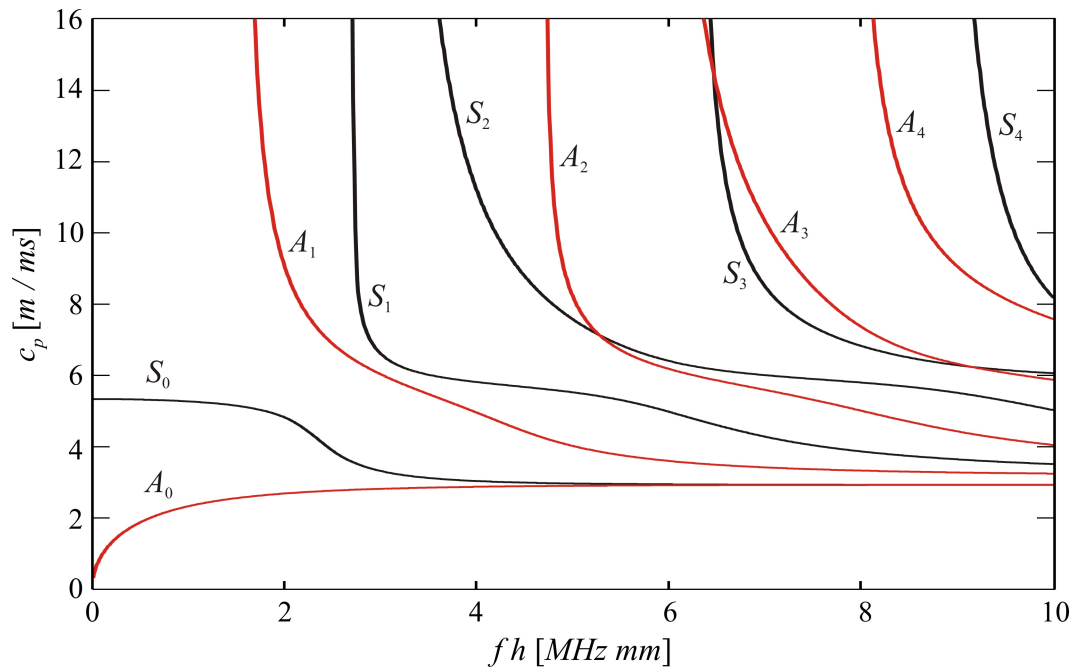


Bild 2.5: Phasengeschwindigkeit verschiedener Moden einer Lamb-Welle

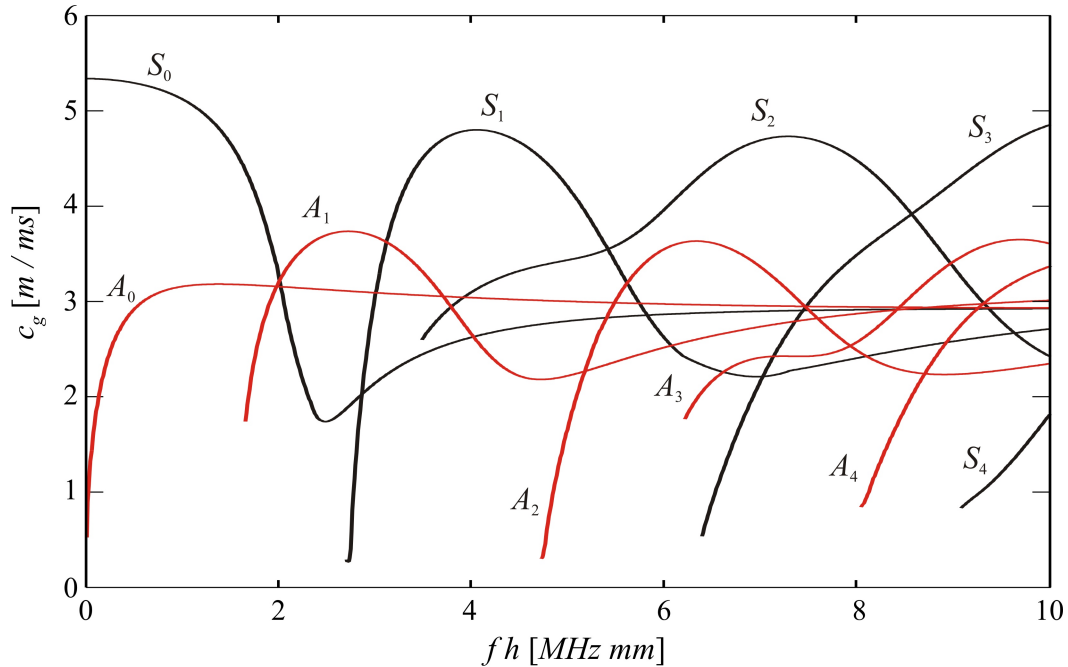


Bild 2.6: Gruppengeschwindigkeit verschiedener Moden einer Lamb-Welle

Weiterhin wird - wie oben schon erwähnt - das Anregungsspektrum üblicherweise dahingehend beschränkt, dass nur die niedrigste symmetrische und antisymmetrische Mode angeregt werden, was für Aluminium einem Produkt aus Bauteildicke und maximaler Anregungsfre-

quenz von etwa $1,7\text{MHz mm}$ entspricht. Bei näherer Betrachtung dieses Bereichs fällt auf, dass die S_0 -Mode bis etwa $0,8\text{MHz mm}$ nur wenig dispersiv ist, die A_0 -Mode hingegen unterhalb von 1MHz mm hohe Dispersion aufweist.

SH-Wellen

Eine weitere Gruppe von geführten Wellen bilden die so genannten horizontalen Scherwellen, die auch als SH -Wellen bezeichnet werden. Ihre Partikelbewegungen laufen horizontal innerhalb der Platte, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ab (Bild 2.7).

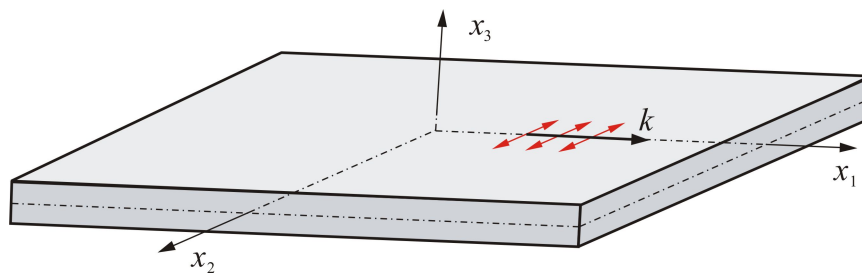


Bild 2.7: Ausbreitung einer SH -Welle in x_1 -Richtung. Die Partikelbewegung (rot dargestellt) findet nur in x_2 -Richtung statt

SH -Wellen können im Allgemeinen bei isotropen Platten nicht signifikant mit Hilfe eines applizierten Piezoelementes angeregt werden. Stattdessen kommen speziell zu diesem Zweck entwickelte Wandler zum Einsatz. Bei anisotropen Materialien werden jedoch unter Umständen neben A_0 - und S_0 -Mode auch mit einfachen Piezoelementen SH -Wellen generiert, vergleiche die Ergebnisse in Abschnitt 7.1.1. Im Rahmen dieser Arbeit werden die SH -Wellen jedoch nicht für die Schädigungsdiagnose verwendet. Die Herleitung der Dispersionskurven der SH -Wellen läuft ähnlich wie für die Lamb-Wellen ab und soll daher hier nicht explizit dargestellt werden. Sie ist detailliert in Kapitel 15 des Buches [ROSE 1999] angegeben. Die Dispersionsgleichungen der SH -Wellen lassen sich demnach mit Hilfe der in Gleichung (2.38) definierten Konstanten q und der Plattendicke h zu

$$\sin\left(\frac{qh}{2}\right) = 0 \quad (2.44)$$

für die symmetrischen und

$$\cos\left(\frac{qh}{2}\right) = 0 \quad (2.45)$$

für die antisymmetrischen SH -Moden ausdrücken. Im Gegensatz zu den Lamb-Moden lassen sich hier explizite Lösungen dieser Gleichungen angeben:

$$q h = n\pi, \quad (2.46)$$

wobei $n \in \{0, 2, 4, \dots\}$ für die symmetrischen Moden und $n \in \{1, 3, 5, \dots\}$ für die antisymmetrischen Moden lautet. Mit der Definition von q gemäß Gleichung (2.38) und der Wellenzahl k gemäß Gleichung (2.28) folgt direkt eine andere Form der Darstellung:

$$\frac{\omega^2}{c_T^2} - \frac{\omega^2}{c_p^2} = \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2. \quad (2.47)$$

Wie sich aus dieser Darstellung ersehen lässt, weist die SH_0 -Mode keine Dispersion auf, denn durch Einsetzen von $n = 0$ ergibt sich der von der Kreisfrequenz unabhängige, einfache Zusammenhang $c_p = c_T$. Im Gegensatz zu den Lamb-Wellen, bei denen alle Moden Dispersion aufweisen, ist die SH_0 -Mode also nicht dispersiv, sondern breitet sich unabhängig von der Frequenz mit der Geschwindigkeit einer Transversalwelle c_T aus und ist somit nur von den Materialparametern abhängig, vergleiche (2.18).

Geführte Wellen in anisotropen und geschichteten Medien

Schon im Fall einer anisotropen Einzelschicht ist die im vorherigen Abschnitt vorgestellte Methode nicht mehr anwendbar, weil die allgemeinen Feldgleichungen (2.6) und (2.7) sich nicht zu der Form (2.11) vereinfachen lassen. Daher muss die sogenannte Teilwellen-Technik (englisch: partial wave technique) verwendet werden, die ausführlich in [AULD 1990] dargestellt ist. Die prinzipielle Vorgehensweise dieser Methode besteht darin, alle ausbreitungsfähigen Teilwellen in der Form

$$u_j = a_j e^{ik(x_1 + l_{x_3} x_3)} \quad (2.48)$$

anzunehmen, wobei gilt: $l_{x_3} = k_{x_3} / k_{x_1}$ und der Index j über die drei Raumrichtungen läuft. Werden diese Ansätze in geeigneter Weise in die Christoffel-Gleichung (2.24) eingesetzt, so führt dies zu einem linearen, homogenen Gleichungssystem aus drei Gleichungen in die drei Polarisationsrichtungen für jede Teilwelle. Nullsetzen der Koeffizientendeterminante führt zu einer Bestimmungsgleichung für l_{x_3} , wodurch die Ausbreitungsrichtung der Teilwellen bestimmt wird. Als letzter Schritt ist dann eine Linearkombination dieser Teilwellen mit unbe-

kannten Amplitudenkoeffizienten in die entsprechenden Randbedingungen - nach wie vor müssen an den lastfreien Rändern die Spannungen verschwinden - einzusetzen. Im resultierenden Gleichungssystem sind die Amplitudenkoeffizienten nun Funktionen der Materialparameter und des Produkts aus Dicke und Wellenzahl. Wie im isotropen Fall lassen sich die Dispersionskurven nun aus der Bedingung einer verschwindenden Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ermitteln.

Typische in der Luftfahrtindustrie verwendete Verbundwerkstoffe bestehen aus mehreren Einzellagen, wobei jede Lage in den meisten Fällen anisotrop ist. Teilweise kommen jedoch auch isotrope Einzellagen zum Einsatz, beispielsweise bei Glare®, einem von Airbus verwendeten Verbundwerkstoff aus Aluminium- und Glasfaserschichten. Im Allgemeinen lassen sich die Dispersionskurven von mehrlagigen Werkstoffen mit Hilfe der Transfermatrix-Methode, vergleiche [THOMSON 1950] und [CASTAINGS und HOSTEN 1994], oder der globalen Matrix Methode (engl.: global matrix method) bestimmen, vergleiche [KNOPOFF 1964] oder Kapitel 13 in [ROSE 1999]. Bei der letzteren Methode werden neben den Randbedingungen am oberen und unteren Plattenrand Übergangsbedingungen zwischen den einzelnen Schichten definiert. Diese Vorgehensweise führt dann bei einer Platte aus n isotropen Schichten zu einer $4n \times 4n$ Koeffizientenmatrix.

Partikelverschiebung ausgewählter Lamb-Wellen

Neben den Dispersionskurven, die eine wichtige Grundlage für viele wellenbasierte SHM-Systeme bilden, wird an dieser Stelle auch die Form einiger Lamb-Wellenmoden über dem Plattenquerschnitt genauer betrachtet. Eine schematische, qualitative Darstellung der jeweils ersten drei symmetrischen und antisymmetrischen Moden ist schon in Bild 2.4 angegeben. An dieser Stelle erfolgt eine quantitative Betrachtung der Modenform der A_0 - und S_0 -Mode über dem Plattenquerschnitt in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz. Bild 2.8 zeigt den Verlauf der transversalen Verschiebungen w bzw. in Indexnotation u_3 (durchgezogene Linien) und der Normalverschiebungen u bzw. u_1 (gestrichelte Linien) der S_0 -Mode für unterschiedliche Produkte aus Anregungsfrequenz und Plattendicke. Die Verschiebungen sind dabei auf den jeweiligen Maximalwert der Normalverschiebung normiert.

Während für $f \cdot h = 0,25 \text{ MHz mm}$ die Normalverschiebung des Querschnitts näherungsweise konstant ist und die Transversalverschiebung selbst an den Plattenoberflächen deutlich geringer ausgeprägt ist, ist bei $f \cdot h = 2 \text{ MHz mm}$ die Normalverschiebung im Wesentlichen auf die Plattenmitte konzentriert und an den Oberflächen dominiert die Transversalverschiebung.

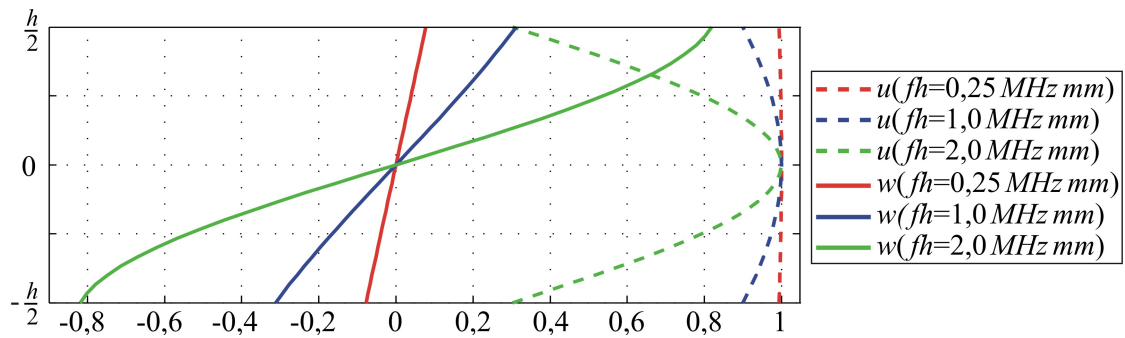


Bild 2.8: Normalisierte Verschiebungsverläufe der S_0 -Mode

In Bild 2.9 sind die entsprechenden Verschiebungsverläufe der A_0 -Mode angegeben. Hierbei sind die Moden auf den jeweiligen Maximalwert der Transversalverschiebung normiert. Auch hier sind mit ansteigendem Wert von $f \cdot h$ deutliche Veränderungen erkennbar: Während für c die Transversalverschiebung fast konstant über der Dicke ist und die Normalverschiebung näherungsweise eine Gerade darstellt, nimmt insbesondere die Normalverschiebung bei größerem $f \cdot h$ einen komplexeren Verlauf an, der erheblich von einer Geraden abweicht.

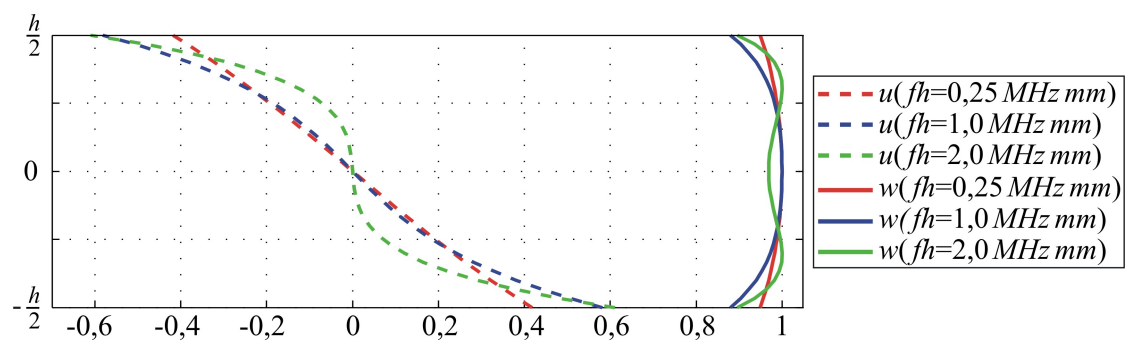


Bild 2.9: Normalisierte Verschiebungsverläufe der A_0 -Mode

Da für die Mehrzahl der bisher entwickelten wellenbasierten SHM-Systeme die Anregungsfrequenzen derart gewählt werden, dass nur die grundlegenden A_0 - und S_0 -Moden auftreten, konzentriert sich die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modellierung für wellenbasierte SHM-Systeme ebenfalls auf diesen Bereich. Für eine korrekte Modellierung der höheren Lamb-Moden und auch der A_0 - und S_0 -Mode bei größerem Produkt aus Plattendicke und Anregungsfrequenz $f \cdot h$ wird unbedingt ein dreidimensionales Modell benötigt. Demgegenüber kann der Verschiebungsverlauf der letztgenannten beiden Moden über dem Plattenquerschnitt im Bereich kleiner $f \cdot h$ -Werte (vergleiche die in Bild 2.8 und Bild 2.9 jeweils rot dargestellten Kurven) näherungsweise auch mit Hilfe der kinematischen Ansätze von zweidimensionalen Plattenelementen abgebildet werden, vergleiche dazu auch Bild 2.10. Dies ermöglicht eine Modellierung mit einer wesentlich verringerten Anzahl von Freiheitsgraden, was gerade bei größeren zu modellierenden Strukturbereichen einen bedeutenden Vorteil darstellen kann.

Wie in Kapitel 6 dieser Arbeit ausführlich dargestellt ist, können im Bereich kleiner $f \cdot h$ -Werte auch mit Hilfe zweidimensionaler Ansätze die Dispersionskurven mit einer hinreichenden Genauigkeit modelliert werden. Im folgenden Abschnitt sind daher einige Grundlagen zur Beschreibung von anisotropen Platten mit Hilfe von zweidimensionalen Elementen zusammengefasst.

2.2 Zweidimensionale Theorien für ebene Lamine

Im Rahmen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie muss jede Lage eines Laminats als 3D-Volumen modelliert werden, wodurch auch über die Plattendicke eine Vielzahl von Elementen benötigt wird. Dadurch entstehen schon bei kleinen Strukturbereichen schnell sehr große Gleichungssysteme, die entsprechend speicher- und rechenzeitintensiv gelöst werden müssen. Bei zweidimensionalen Theorien, die mit Hilfe geeigneter Annahmen für die Kinematik und / oder den Spannungszustand aus der dreidimensionalen Theorie abgeleitet werden, wird die gesamte Dicke mit einem Element approximiert. Dreidimensionale Ansätze sind in der Lage, die Spannungen innerhalb des Laminats, insbesondere in der Nähe von Diskontinuitäten oder an hoch belasteten Stellen, genauer wiederzugeben als zweidimensionale Modelle. Demgegenüber stehen jedoch ein wesentlich größerer numerischer Aufwand und die Tatsache, dass das globale Verhalten eines Laminats moderater Dicke in vielen Fällen auch mit Hilfe zweidimensionaler Ansätze ausreichend genau beschrieben werden kann. Die zweidimensionalen Theorien werden auch als äquivalente Einzelschicht-Theorien (ESL, engl.: equivalent single layer) bezeichnet, da das heterogene Laminat als eine äquivalente Einzelschicht mit komplexem konstitutivem Verhalten aufgefasst wird.

2.2.1 Plattentheorie nach Kirchhoff; CLPT

Die einfachste ESL-Laminattheorie ist eine Erweiterung der Plattentheorie nach Kirchhoff auf laminierte Verbundwerkstoffplatten. Diese Theorie wird im englischen auch als „classical laminated plate theory“ (CLPT) bezeichnet. Die grundlegenden kinematischen Annahmen dieser Theorie sind die folgenden:

- Gerade, senkrecht zur Mittelfläche stehende Linien bleiben auch nach einer Verformung gerade;
- In Dickenrichtung findet keine Ausdehnung statt;
- Gerade, senkrecht zur Mittelfläche stehende Linien stehen auch nach einer Verformung noch senkrecht auf der Mittelfläche.

Die ersten beiden Annahmen bewirken eine Unabhängigkeit der transversalen Verschiebung von der Dickenkoordinate und ein Verschwinden der transversalen Dehnung: $\varepsilon_{zz} = 0$. Die dritte Annahme führt zu verschwindendem transversalen Schub: $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Die drei unabhängigen Verschiebungen \tilde{u} , \tilde{v} und \tilde{w} werden in Form des Verschiebungsfeldes

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \tilde{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \tilde{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{2.49}$$

ausgedrückt. Hierbei bezeichnen u , v und w die Verschiebungen der Mittelfläche, die durch $z = 0$ gekennzeichnet ist. Wegen der wesentlich geringeren Ausdehnung in Dickenrichtung wird vom ebenen Spannungszustand ausgegangen.

Mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips, das in der Form

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt\tag{2.50}$$

ausgedrückt werden kann, wobei δU die virtuelle Verzerrungsenergie, δV die virtuelle Arbeit äußerer Kräfte und δK die virtuelle kinetische Energie bezeichnet, lassen sich folgende Bewegungsgleichungen herleiten, vergleiche beispielsweise [REDDY 2004]:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right);\tag{2.51}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right);\tag{2.52}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N(w) + \bar{q} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).\tag{2.53}$$

Dabei sind die Massenträgheiten durch

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \int_{h^e} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \rho(z) dz.\tag{2.54}$$

gegeben und die resultierenden Kräfte und Momente pro Längeneinheit durch

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{h^e} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{h^e} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \cdot z dz . \quad (2.55)$$

$N(w)$ ist gemäß

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.56)$$

definiert und $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$ bezeichnet eine angreifende transversale Flächenlast. Für eine ausführliche Darstellung dieser Herleitung sei beispielsweise auf [REDDY 2004] verwiesen; die Grundlagen der Kirchhoff-Plattentheorie wurden schon 1850 für den isotropen Fall von Kirchhoff veröffentlicht [KIRCHHOFF 1850].

Bei Verwendung dieser Theorie treten somit nur drei unabhängige Verschiebungsfreiheitsgrade auf, jedoch werden transversale Querschubeffekte sowie die Rotationsträgheit vernachlässigt. Aus diesem Grund ist der Einsatzbereich dieser Theorie auf dünne Platten und ein Anregungssignal im relativ niedrigen Frequenzbereich beschränkt.

2.2.2 Reissner-Mindlin Plattentheorie; FSDT

Eine bessere Approximation von dickeren Platten sowie von Platten unter dynamischer Anregung im höheren Frequenzbereich liefert die im englischen mit „first-order shear deformation laminated plate theory“ (FSDT) bezeichnete Theorie, die eine Verallgemeinerung der Plattentheorie nach Reissner und Mindlin darstellt, vergleiche [REISSNER 1945] und [MINDLIN 1951]. Auch diese Theorie basiert auf der Annahme des ebenen Spannungszustandes, die dritte kinematische Annahme von Kirchhoff wird jedoch nicht länger vorausgesetzt, sondern es wird nun transversaler Schub zugelassen.

Das Verschiebungsfeld nimmt die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z \cdot \theta_y(x, y, t); \\ \tilde{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \cdot \theta_x(x, y, t); \\ \tilde{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Neben den Verschiebungen der Mittelfläche treten nun mit θ_x und θ_y die Verdrehungen des Elementquerschnitts um x - respektive y -Achse zusätzlich als unabhängige Knotenvariablen auf. Die sich somit ergebende Plattenkinematik ist in Bild 2.10 skizziert.

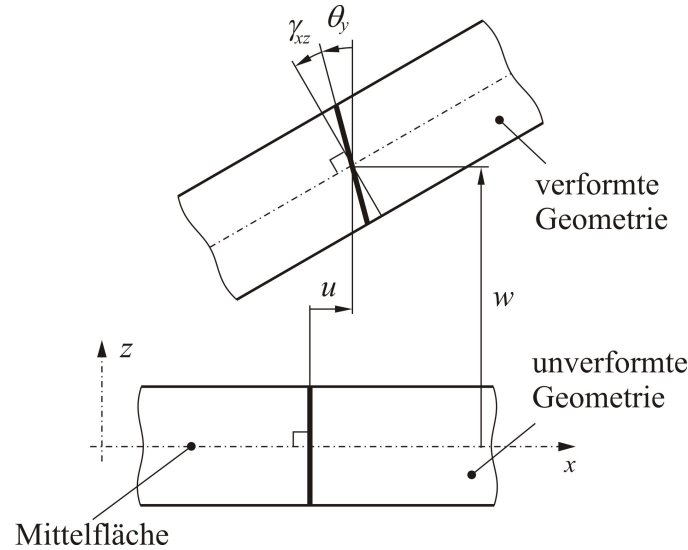


Bild 2.10: Plattenkinematik nach Reissner / Mindlin

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich unter Verwendung des Hamiltonschen Prinzips damit zu

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}; \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}; \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N(w) + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = -I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.62)$$

Neben den oben schon eingeführten Größen werden hier die resultierenden Schubkräfte pro Längeneinheit

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{h^e} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (2.63)$$

und die Rotationsträgheit $I_2 = \int_{h^e} z^2 \rho(z) dz$ verwendet. Bei dieser Theorie treten also fünf unabhängige Freiheitsgrade auf, was einen höheren numerischen Aufwand bei der computer-gestützten Implementierung bedeutet. Insbesondere im höherfrequenten Bereich hat jedoch die zusätzliche Berücksichtigung der Rotationsträgheit einen signifikanten Einfluss, wie in Abschnitt 6 kurz aufgezeigt ist. Durch die Berücksichtigung von transversalem Schub ist darüber hinaus auch die Analyse dickerer Lamine mit höherer Genauigkeit möglich. Der Schub wird im Rahmen dieser Theorie jedoch als konstant über den Querschnitt angenommen, was im Vergleich zur Realität eine nicht unerhebliche Vereinfachung darstellt, weshalb so genannte Schubkorrekturfaktoren eingeführt werden, um diese Tatsache zu berücksichtigen.

2.2.3 Schubkorrekturfaktoren

Da der transversale Schub in Rahmen der FSDT konstant angenommen wird, ergeben sich daraus auch konstante transversale Schubspannungen. Schon aus der elementaren Theorie homogener, isotroper Balken ergibt sich jedoch eine parabolische Schubspannungsverteilung über dem Querschnitt. Die in der Literatur am häufigsten angewandte Korrektur dieses Sachverhalts wird mittels Schubkorrekturfaktoren durchgeführt. Dabei wird Gleichung (2.63) folgendermaßen modifiziert:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \int_{h^e} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz. \quad (2.64)$$

Zur Bestimmung des in Gleichung (2.64) eingeführten Schubkorrekturfaktors κ werden dabei zwei unterschiedliche Ansätze verwendet. Einerseits kann das Verhältnis der Verzerrungsenergien, die sich aus der FSDT und der dreidimensionalen Elastizitätstheorie ergeben, gebildet und daraus κ berechnet werden. Für einen homogenen, isotropen Balken ergibt sich daraus beispielsweise ein Wert von $\kappa = 5/6$, ein Wert der auch von Reissner gefunden wurde [REISSNER 1945]. Eine umfassende Literaturübersicht zu dieser Thematik gibt [ROHWER 1988].

Bei anisotropen Laminen ist es in der Regel wesentlich schwieriger, die exakte Schubspannungsverteilung - und damit die Verzerrungsenergie - zu berechnen. In der VDI-Richtlinie 2014 wird beispielsweise der nicht parabolische Verlauf der Schubspannungen aus Querkraft

über dem Querschnitt eines anisotropen Balkens aufgezeigt [VDI-RICHTLINIEN 2006], Bild 2.11. Die Gesamtfläche der Schubspannung ist in den drei Fällen konstant, weicht aber wegen des unterschiedlichen Lagenaufbaus von der parabolischen Form des isotropen Balkens ab.

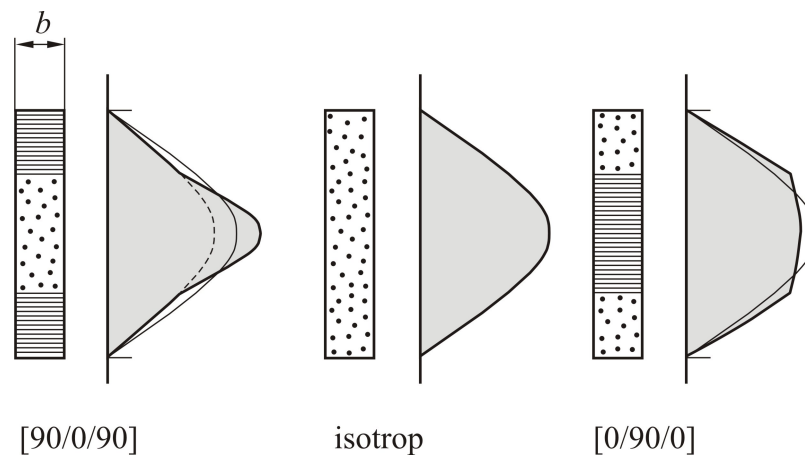


Bild 2.11: Einfluss des Lagenaufbaus auf die Verteilung der transversalen Schubspannung nach [VDI-Richtlinien 2006]

Eine andere, weit verbreitete Vorgehensweise besteht darin, die erste Biege-Eigenfrequenz, die durch die FSDT berechnet wird, in Relation zur exakten Lösung oder zu experimentell ermittelten Daten zu setzen und daraus κ zu bestimmen. Nach dieser Methode bestimmt beispielsweise Mindlin einen Wert von $\kappa = \pi^2 / 12$. Er postuliert jedoch eine zusätzliche Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl [MINDLIN 1951]. Den gleichen Wert verwendet auch [SUN und WHITNEY 1973]. [DOYLE 1997] gibt einige Anregungen, wie die Bestimmung von κ basierend auf Messdaten durchgeführt werden kann. Der Nachteil dieser Methodik besteht insbesondere in dem möglicherweise erheblichen Aufwand, da für jeden vorkommenden Lagenaufbau in die verschiedenen Raumrichtungen detaillierte Berechnungen oder Experimente gemacht werden müssen.

Bei allen in dieser Arbeit gezeigten Simulationsergebnissen wird, sofern nicht anders angegeben, ein Wert von $\kappa = 5/6$ für isotrope Werkstoffe verwendet. Im Falle von anisotropem Laminat wird hingegen $\kappa = \pi^2 / 12$ eingesetzt.

2.3 Methode der finiten Elemente

Die Finite Elemente Methode (FEM) kann generell als eine numerische Behandlungsweise zur Lösung partieller Differentialgleichungen aufgefasst werden. Der Begriff der „finiten Elemente“ wurde dabei erstmals von Clough verwendet [CLOUGH 1960]. Eine strukturierte Darstellung des dabei verfolgten Vorgehens lässt sich durch eine Unterteilung in aufeinander folgende Schritte erzielen, die in den folgenden Unterkapiteln kurz dargestellt sind. Ausführ-

liche, allgemeine Darstellungen der FE-Methode finden sich mittlerweile in einer großen Zahl von Fachbüchern, beispielsweise sei auf [HUGHES 1987], [ZIENKIEWICZ und TAYLOR 2005], [SCHWARZ 1991] oder [BATHE 2002] verwiesen. Auch aktuell wird auf diesem Gebiet intensiv geforscht, so dass eine Vielzahl wissenschaftlicher Arbeiten neueren Datums - beispielsweise zur Formulierung spezieller, fortschrittlicher Elemente - in einschlägigen wissenschaftlichen Zeitschriften zu finden ist.

2.3.1 Diskretisierung

Der erste Schritt zur Lösung einer gegebenen Aufgabe mit Hilfe der Methode der finiten Elemente bildet die Zerlegung des Grundgebiets in einfache Teilgebiete, die so genannten finiten Elemente. Dabei ist die Art dieser Diskretisierung häufig durch die Aufgabenstellung teilweise vorgegeben. Insbesondere die verwendeten Elementtypen sind in Abhängigkeit des Gebiets und der Aufgabenstellung zu wählen. Grundsätzlich erlaubt die Diskretisierung eine sehr flexible, dem Problem angepasste Erfassung des betrachteten Gebiets. Im Allgemeinen ist dabei darauf zu achten, dass keine zu spitzen und zu stumpfen Winkel innerhalb der Elemente auftreten, um numerische Probleme zu vermeiden. Das gegebene Gebiet wird im Anschluss formal durch die Fläche der approximierenden Elemente ersetzt.

2.3.2 Wahl eines geeigneten Ansatzes

In jedem Element ist ein geeigneter Ansatz für die das Problem beschreibende Funktion zu wählen. Bei zweidimensionalen Problemen werden im einfachsten Fall beispielsweise lineare Polynome der Gestalt

$$q(x, y) = c_{k1} + c_{k2}x + c_{k3}y \quad (2.65)$$

verwendet. Oftmals kommen auch bilineare Ansätze oder höhergradige Polynome zum Einsatz. Die Art des Ansatzes ist dabei einerseits von der Form des Elements abhängig, andererseits jedoch auch von der Art des zu behandelnden Problems. Beim Übergang von einem Element zum Benachbarten sind nämlich in der Regel bestimmte problemabhängige Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen. Um diese Stetigkeitsanforderungen zu erfüllen, sind Ansätze mit konstanten Koeffizienten c_k nicht geeignet. Stattdessen muss der Funktionsverlauf mit Hilfe von Funktionswerten – und in vielen Fällen auch Ableitungen - an bestimmten Stellen des Elements, den so genannten Knotenpunkten, ausgedrückt werden. Die in den Knotenpunkten verwendeten Funktionswerte (und Ableitungen) werden als Knotenvariablen bezeichnet und sind in Gleichung (2.66) durch ein Dach gekennzeichnet. Die Ansatzfunktionen lassen sich als Linearkombination aus den Knotenvariablen und den sogenannten Formfunk-

tionen darstellen, so dass man für ein zweidimensionales Element mit N^* Knoten die Darstellung

$$q^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^*} \hat{q}_i^{(e)} N_i^{(e)}(x, y) \quad (2.66)$$

erhält. Der hochgestellte Index (e) kennzeichnet dabei, dass es sich um ein bestimmtes Element handelt. Da diese Darstellung für beliebige Knotenvariable $\hat{q}_i^{(e)}$ gültig sein muss, folgt direkt eine notwendige Interpolationseigenschaft der Formfunktionen: Im Knotenpunkt $P_i^{(e)}$ mit den Koordinaten $(x_i^{(e)}, y_i^{(e)})$ muss die Formfunktion $N_i^{(e)}(x, y)$ den Wert Eins aufweisen, und in allen anderen Knotenpunkten verschwinden:

$$N_i^{(e)}(x_j^{(e)}, y_j^{(e)}) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i \end{cases} \quad (2.67)$$

Im Allgemeinen wird durch die Approximation (2.66) ein kontinuierliches in ein diskretes System überführt. Die unabhängigen Knotenvariablen sind dabei die Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems.

2.3.3 Bestimmung der Systemmatrizen

Viele Aufgabenstellungen im Bereich der Elastomechanik lassen sich sehr zweckmäßig mit Hilfe eines Variationsprinzips der Mechanik behandeln. Häufig werden beispielsweise das Prinzip der virtuellen Arbeit, das Prinzip der virtuellen Verschiebung, das Prinzip des Minimums der gesamten Energie oder - bei dynamischen Problemen - das Hamiltonsche Prinzip angewandt. Eine detaillierte Erläuterung dieser Prinzipien ist in vielen Lehrbüchern der Mechanik enthalten. Kann ein derartiges Prinzip benutzt werden, so ist zur Bestimmung der Matrizen des resultierenden Gleichungssystems ein Ansatz der Gestalt (2.66) in das Funktional des zugehörigen Extremalprinzips einzusetzen. Die Lösung basiert dann in der Regel auf einem Verfahren nach Ritz [RITZ 1909].

Falls für das betrachtete Problem kein echtes Minimalprinzip zur Verfügung steht, ist die schwache Form des zugrundeliegenden Rand- oder Anfangswertproblems aufzustellen. Dabei wird ebenfalls ein Ansatz der Form (2.66) verwendet, wobei die Formfunktionen N_i nun als Ansatzfunktionen und bei der Methode nach Galerkin auch als Gewichtsfunktionen auftauchen [GALERKIN 1915].

In beiden Fällen ergeben sich Funktionen in den unbekanntenen Knotenverschiebungen q_i und möglicherweise deren Ableitungen, die als Summe der Beiträge aller einzelnen Elemente

formuliert sind. Für ein lineares, strukturdynamisches Problem ergibt sich dann in einer allgemeinen Form eine Bewegungsgleichung der Art

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.68)$$

wobei \mathbf{M} , \mathbf{C} und \mathbf{K} als Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix bezeichnet werden und \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ und $\ddot{\mathbf{q}}$ den Vektor der Knotenverschiebungen und seine zeitlichen Ableitungen darstellen. Im Vektor \mathbf{F} werden die äußeren Lasten zusammengefasst. Für die Berechnung der Matrizen sind auf Elementebene Integrale auszuwerten und anschließend im Rahmen des so genannten Assembly-Prozesses zu den globalen Systemmatrizen zusammenzufassen. Die Berechnungen auf Elementebene werden dazu üblicherweise an einem so genannten Referenzelement durchgeführt, das auf einem Referenzgebiet definiert ist.

2.3.4 Einbau der Randbedingungen und Lösung des Systems

Abschließend sind die bestehenden Randbedingungen in das resultierende Gleichungssystem einzubauen und das System ist zu lösen. Bei den Randbedingungen ist zu unterscheiden zwischen Dirichlet-Randbedingungen, bei denen ein Funktionswert vorgegeben ist, und Neumann-Randbedingungen, bei denen die Ableitung eines Funktionswertes vorgegeben ist. Die konkreten physikalischen Größen hängen dabei vom vorliegenden Problem ab, im Falle der Elastomechanik sind es in der Regel vorgegebene Verschiebungen (Dirichlet-RB) oder Kräfte (Neumann-RB). Eine Dirichlet-Randbedingung kann prinzipiell immer durch Streichen eines Freiheitsgrades und Ergänzung der rechten Seite des Systems berücksichtigt werden. Neumann-Randbedingungen liefern ebenfalls einen Anteil zur rechten Seite.

Geeignete Lösungsverfahren sind stark von der konkreten Art der Problemstellung abhängig. Bei transienten strukturdynamischen Problemen mit einer vorgegebenen zeitabhängigen Erregung $\mathbf{F}(t)$ können beispielsweise explizite oder implizite Zeitintegrationsverfahren eingesetzt werden, vergleiche [BATHE 2002], Abschnitt 9. Die Vielzahl der möglichen Lösungsstrategien wird an dieser Stelle nicht weiter diskutiert, sondern auf die oben angegebene einschlägige Fachliteratur verwiesen.

2.4 Spektralelemente Methode

Der Begriff „Spektralelemente Methode“ wird in der Literatur für die Bezeichnung zweier grundsätzlich unterschiedlicher Lösungsmethoden verwendet. Einerseits verbirgt sich hinter diesem Sammelbegriff eine Vorgehensweise, die auf der Transformation einer zugrundelie-

genden Wellengleichung in den Frequenzbereich basiert. Diese transformierte Grundgleichung wird dann exakt gelöst.

Die andere Methode, die unter dem gleichen Namen bekannt ist, ist sehr eng mit der im vorigen Abschnitt vorgestellten FEM verwandt. Sie basiert auf einer speziellen Wahl der Ansatzfunktionen (vergl. Abschnitt 2.3.2) in Verbindung mit speziell ausgewählten Elementknoten. Der Begriff „Spektral“ kennzeichnet dabei die exzellenten Konvergenzeigenschaften dieser Elemente.

Beide Herangehensweisen sind in bestimmten Bereichen sehr gut für die Simulation von hochfrequenten Wellenausbreitungsvorgängen geeignet. In den folgenden beiden Unterkapiteln werden daher die wesentlichen „Bausteine“ beider Methoden dargestellt, wobei insbesondere auf die Unterschiede im Vergleich zur klassischen FEM detailliert eingegangen wird.

2.4.1 Spektralelemente auf Basis einer Transformation der Wellengleichung in den Frequenzbereich

Die Grundlage der auf einer Transformation in den Frequenzbereich basierenden Spektralelemente Methode (SEM_F) bildet eine dynamische, frequenzabhängige Steifigkeitsmatrix, die erstmals 1941 von Koloušek verwendet wurde [KOLOUŠEK 1941]. Spektralelemente wurden jedoch erst wesentlich später von Beskos und Narayan basierend auf der Laplace-Transformation vorgestellt [BESKOS und NARAYANAN 1983]. Neben der Laplace Transformation ist grundsätzlich auch die Verwendung der Fourier Transformation oder einer Wavelet Transformation möglich. Weitere Verbreitung erfuhr diese Methodik insbesondere durch Arbeiten von Doyle und seinen Mitarbeitern, die nach zahlreichen Veröffentlichungen in wissenschaftlichen Zeitschriften zu einem Buch führten [DOYLE 1997]. Die Arbeiten dieser Gruppe basieren hauptsächlich auf der Verwendung der Fast Fourier Transformation (FFT) und beschäftigen sich vor allem mit isotropen Werkstoffen. In einem aktuellen Buch von Gopalakrishnan, Chakraborty und Roy Mahapatra werden Spektralelemente für anisotrope und inhomogene Materialien vorgestellt [GOPALAKRISHNAN *et al.* 2007]. Zwei Kapitel dieses Buches sind darüber hinaus detailliert der Verwendung von Spektralelementen im Kontext von SHM gewidmet.

Die dynamische Steifigkeitsmatrix der SEM_F unterscheidet sich stark von der konventionellen dynamischen Steifigkeitsmatrix der konventionellen FEM im Zeitbereich, die man sich - bei Vernachlässigung von Dämpfungseffekten - unter der Annahme von harmonischer Bewegung folgendermaßen vorstellen kann:

$$\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{K}_{stat} - \omega^2 \mathbf{M}. \quad (2.69)$$

Bei der SEM_F wird demgegenüber für jede betrachtete Frequenz eine Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{dyn}(\omega)$ berechnet, wobei die verwendeten Basisfunktionen die exakten analytischen Lösungen der zugrunde liegenden Bewegungsdifferentialgleichungen im Frequenzbereich sind. Man spricht hier deshalb von einer im Hinblick auf die verwendete elastomechanische Theorie exakten Berücksichtigung der Masse der Struktur im Gegensatz zur traditionellen FEM, wo Polynome als Basisfunktionen zur Approximation eingesetzt werden, wie in Abschnitt 2.3.2 vorgestellt ist. Dadurch wird die Dynamik der Struktur - im Gegensatz zur Approximation bei der konventionellen FEM - im Rahmen der verwendeten Theorie exakt wiedergegeben.

Der Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix der Struktur erfolgt analog zur konventionellen FEM. Zur Lösung werden zunächst die angreifenden Kräfte in ihre Frequenzanteile zerlegt, wozu eine Fast Fourier Transformation (FFT) durchgeführt wird. Das System wird dann für jede Frequenz gelöst.

Mit Hilfe der inversen Fourier Transformation (IFFT) lässt sich daraus wieder die Strukturantwort im Zeitbereich bestimmen. Das Prinzip dieses Ablaufs ist in Form eines vereinfachten Flussdiagramms in Bild 2.12 dargestellt.

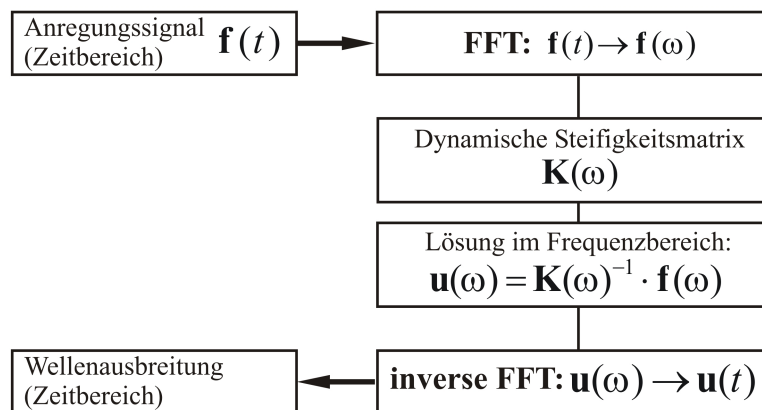


Bild 2.12: Flussdiagramm zum Ablauf der Simulation von Wellenausbreitungsvorgängen mit Spektralelementen im Frequenzbereich

Durch die Verwendung der analytisch exakten Lösungen ist die Güte der Gesamtlösung nicht mehr von der Diskretisierung abhängig. Daher kann ein Element für einen großen Bereich einer Struktur verwendet werden, so lange keine Geometrie- oder Materialänderungen in diesem Bereich vorliegen. Eine gegebene Struktur kann so unter Umständen in ein diskretes System mit nur sehr wenigen Freiheitsgraden überführt werden. Ein weiterer Vorteil der SEM_F

gegenüber der FEM besteht in der Möglichkeit, so genannte „Throw-off Elemente“ zu generieren, die an einer Seite keine Reflexionen aufweisen. Dadurch ergibt sich eine sehr elegante Möglichkeit, quasi unendliche Strukturen zu modellieren bzw. gezielt Randreflexionen auszublenken.

Zusammenfassend lassen sich also als wesentliche Vorteile der SEM_F die hohe Genauigkeit bei in der Regel wesentlich geringerer Systemgröße und die sehr einfache Implementierung reflexionsfreier Ränder festhalten.

Demgegenüber stehen jedoch auch wesentliche systembedingte Nachteile, wobei zunächst die Periodizität der FFT zu erwähnen ist, die bei zwei- oder dreidimensionalen Problemstellungen zu erhöhten Schwierigkeiten führt. Des Weiteren stehen für Plattenstrukturen mit beliebigen Randbedingungen keine allgemeingültigen analytischen Lösungen mehr zur Verfügung. Stattdessen sind die Lösungen, sofern überhaupt analytisch erzielbar, immer von den spezifischen Randbedingungen des Problems abhängig. Eine analytische Lösung wurde beispielsweise für den Spezialfall einer an zwei Seiten gelenkig gelagerten Platte von Levy vorgestellt [LEVY 1899]. Einige Ansätze, wie dieses Problem für beliebige Randbedingungen angegangen werden kann, werden von Kulla in [KULLA 1997] vorgestellt, wo beliebige Randbedingungen in Form von diskreten Fourier-Reihen angenähert werden. Ähnliche Vorgehensweisen finden sich etwa in [CHAKRABORTY und GOPALAKRISHNAN 2006], [GORMAN 1999] oder [GORMAN 2005]. Für zwei- oder dreidimensionale Strukturen hat sich diese Methode aufgrund dieser Schwierigkeiten jedoch bisher nicht entscheidend durchsetzen können.

2.4.2 Spektralelemente im Zeitbereich

Die Spektrale Finite Elemente Methode im Zeitbereich, im Folgenden mit SEM bezeichnet, ist eine fortschrittliche Implementierung der FEM. Sie geht zurück auf Arbeiten von Patera, der die Grundidee 1984 im Rahmen der Simulation von Strömungsvorgängen von Fluiden veröffentlichte [PATERA 1984]. Der Begriff „spektral“ kennzeichnet dabei die exzellente Konvergenzeigenschaft: Der numerische Fehler der Approximation sinkt schneller als jede Potenz von $1/p$, wobei p den Polynomgrad der verwendeten Interpolationspolynome bezeichnet. Im Gegensatz zu klassischen finiten Elementen mit höherer Ansatzordnung (oft als Elemente des p -Typs bezeichnet) sind die Elementknoten jedoch nicht gleichmäßig auf dem Element verteilt, sondern entsprechen den Nullstellen speziell ausgewählter orthogonaler Polynome. Üblicherweise werden diese Punkte dann ebenfalls als Integrationspunkte zur numerischen Bestimmung der Elementmatrizen verwendet. Daraus ergeben sich einige wesentliche

Unterschiede im Vergleich zu herkömmlichen finiten Elementen, die im Folgenden an einem eindimensionalen Element kurz dargestellt sind.

Zur Festlegung der inneren Elementknoten können entweder Chebyshev- oder Lobatto-Polynome eingesetzt werden. Die $N+1$ Elementknoten eines eindimensionalen Elements, dessen Interpolationsfunktionen den Grad N aufweisen, werden bei Verwendung eines Lobatto-Polynoms durch die Nullstellen folgender Funktion gebildet:

$$(1 - \xi^2) \cdot Lo_{N-1}(\xi). \quad (2.70)$$

$Lo_i(\xi)$ bezeichnet dabei das Lobatto-Polynom von Grad i , welches auf dem Referenzgebiet $\xi \in [-1;1]$ folgendermaßen definiert werden kann:

$$Lo_i(\xi) = \frac{dL_{i+1}(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2^{i+1} \cdot (i+1)!} \cdot \frac{d^{i+2}}{d\xi^{i+2}} (\xi^2 - 1)^{i+1}. \quad (2.71)$$

$L_{i+1}(\xi)$ entspricht dabei dem Legendre-Polynom und $(i)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot i$ kennzeichnet die Fakultät. Das Legendre-Polynom ist allgemein gemäß

$$L_i(\xi) = \frac{1}{2^i \cdot i!} \cdot \frac{d^i}{d\xi^i} (\xi^2 - 1)^i \quad (2.72)$$

definiert. Die so definierten Elementknoten werden auch als Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) Punkte bezeichnet. Da das in Abschnitt 3 dieser Arbeit entwickelte Element auf der Knotenverteilung mittels des Lobatto-Polynoms basiert, wird an dieser Stelle auf eine Darstellung der Chebyshev-Polynome verzichtet und auf [POZRIKIDIS 2005] oder [DAUKSHER und EMERY 2000] verwiesen.

Als Interpolationsfunktion werden üblicherweise Lagrange-Polynome eingesetzt. Die i -te Interpolationsfunktion lässt sich unter Verwendung der zugeordneten Stützstelle i sowie allen anderen Stützstellen des Elementgebiets allgemein gemäß

$$\psi_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_{i-1}) \cdot (\xi - \xi_{i+1}) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_{m+1})}{(\xi_i - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) \cdot (\xi_i - \xi_{i+1}) \cdot \dots \cdot (\xi_i - \xi_{m+1})} \quad (2.73)$$

bilden. Bezogen auf die Verwendung der Stützstellen gemäß (2.70) können diese Polynome mittels der Definition der Lobatto- und Legendre-Polynome auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\psi_i(\xi) = \frac{1}{m \cdot (m+1) \cdot L_m(\xi_i)} \cdot \frac{(\xi^2 - 1) \cdot Lo_{m-1}(\xi)}{\xi - \xi_i}. \quad (2.74)$$

Wie sich leicht nachprüfen lässt, erfüllen diese Polynome die kardinale Interpolationseigenschaft (2.67). In Bild 2.13 sind die Knotenverteilung und die zugehörigen Interpolationsfunktionen auf dem Referenzintervall $-1 \leq \xi \leq 1$ beispielhaft für 7 GLL Knoten dargestellt.

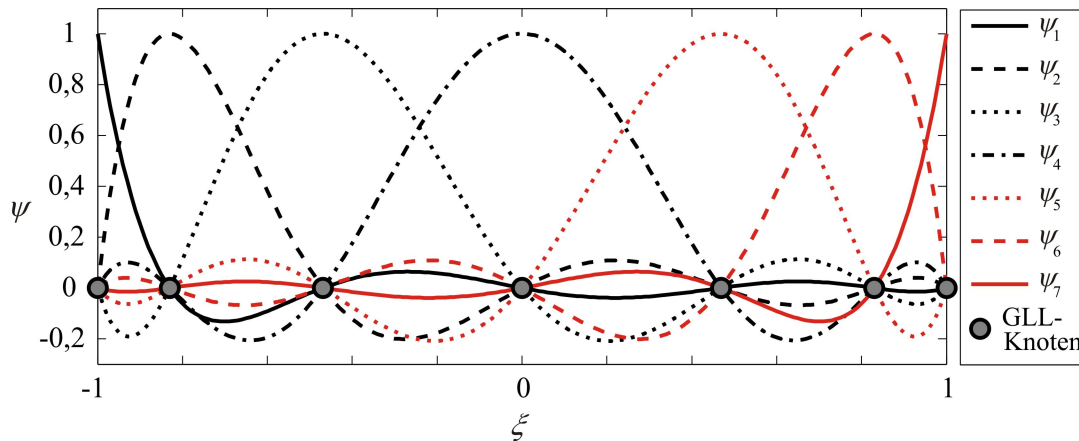


Bild 2.13: Lagrange Interpolationspolynome durch sieben Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) Punkte auf dem Referenzintervall $[-1, 1]$

Die diskrete Orthogonalität wird auch in Bild 2.13 deutlich, weil jede Formfunktion genau Eins an ihrem jeweils korrespondierenden Knoten, und Null an allen anderen Knoten beträgt. Darüber hinaus ist in Bild 2.13 zu erkennen, dass die Interpolationsfunktionen, die auf der Basis der GLL-Knoten definiert sind, bei diesem Beispiel nur im Bereich zwischen etwa $-0,2$ und 1 variieren. Unabhängig vom Polynomgrad gilt für Lagrange-Formfunktionen auf Basis von GLL-Knoten auch allgemein

$$|\psi_i(\xi)| \leq 1. \quad (2.75)$$

Dies ist ein wesentlicher Vorteil gegenüber Elementen, die auf einer gleichmäßigen Knotenverteilung basieren. In diesem Falle kommt es bei der Verwendung von höhergradigen Polynomen zu den so genannten Runge Oszillationen an den Enden des Elements, wie in Bild 2.14 am Beispiel eines Neunknotenelements dargestellt ist. Diese Oszillationen bewirken eine schlechtere Approximation und somit unter Umständen einen erheblichen numerischen Fehler der FE-Lösung. Zum direkten Vergleich ist in Bild 2.15 ein Neunknotenelement basierend auf den GLL-Knoten gezeigt, wo keinerlei derartige Oszillationen auftreten. Theoretische Betrachtungen in [POZRIKIDIS 2005] zeigen, dass durch diese Art der Interpolation die höchstmögliche Genauigkeit der Approximation erzielt wird.

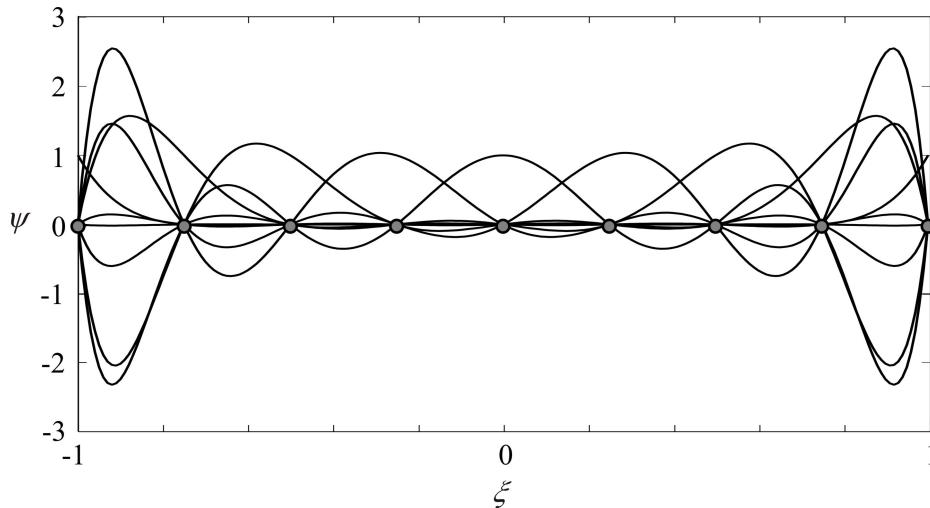


Bild 2.14: Lagrange Interpolationspolynome durch neun regelmäßig angeordnete Punkte auf dem Referenzintervall; Runge Oszillationen an den Elementrändern

Wie weiter oben schon erwähnt, werden üblicherweise die GLL-Knoten eines Spektralelements auch als Integrationspunkte verwendet.

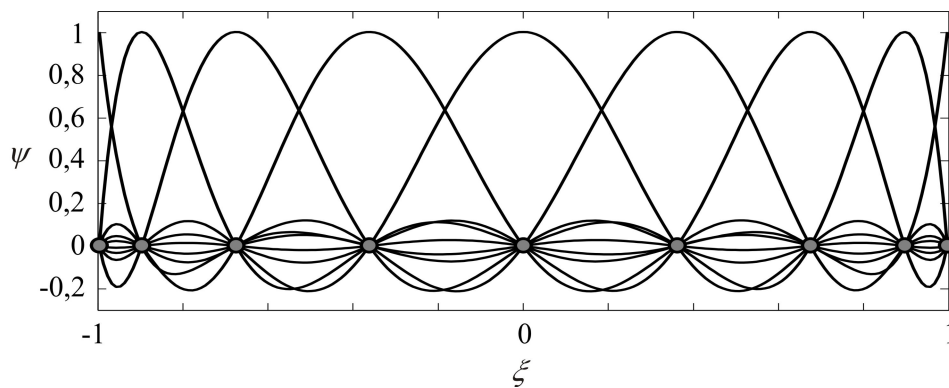


Bild 2.15: Lagrange Interpolationspolynome durch neun GLL Punkte auf dem Referenzintervall

Auch dies ist ein Alleinstellungsmerkmal von Spektralelementen gegenüber konventionellen finiten Elementen mit niedriger Ansatzordnung, wo in der Regel Gauss-Punkte verwendet werden, vergleiche Bild 2.16. Dies hat insbesondere einen Einfluss auf die Gestalt der Elementmassenmatrix. Die Einträge einer dimensionslosen Elementmassenmatrix eines eindimensionalen Referenzelements haben – unabhängig vom konkret betrachteten Problem – die Struktur

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 \psi_i(\xi) \cdot \psi_j(\xi) d\xi. \quad (2.76)$$

Aufgrund der diskreten Orthogonalität der Formfunktionen führt dies bei Verwendung der GLL-Knoten als Stützstellen der numerischen Integration zu optimal konzentrierten Matrizen (vgl. auch [SPRAGUE und GEERS 2008]), weil das Produkt der Formfunktionen an den GLL-

Knoten nur im Falle von $i=j$ genau Eins ist und in allen anderen Fällen verschwindet. Bei der Gauss-Integration ist dies nicht der Fall, da dort Stützstellen verwendet werden, an denen in der Regel alle Formfunktionen einen von Null verschiedenen Wert aufweisen, Bild 2.16.

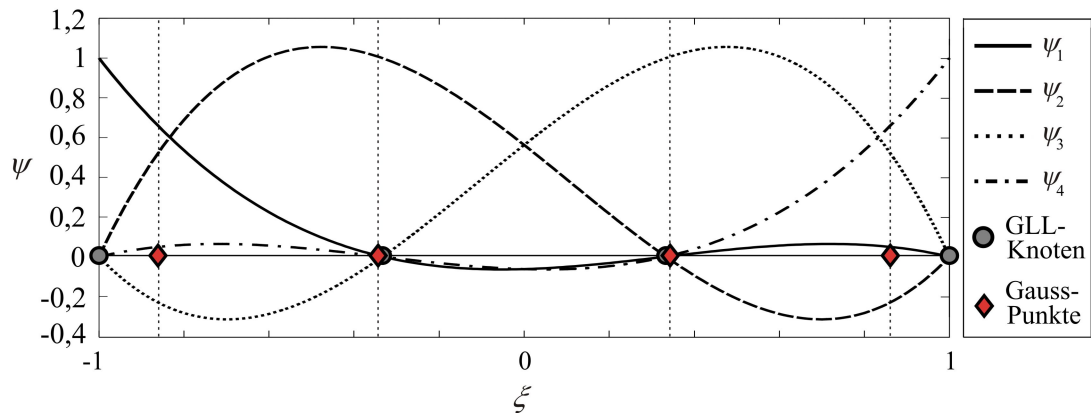


Bild 2.16: Kubisches Element mit gleichmäßiger Knotenverteilung; in rot sind zusätzlich die Gauss-Punkte für die numerische Integration dargestellt

Wie im Verlauf der Arbeit noch detailliert aufgezeigt wird, haben diese optimal konzentrierten Massenmatrizen einen wesentlichen Einfluss auf die Effizienz der Lösung des resultierenden Gleichungssystems. Auf die Lobatto-Integrationsregel wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen, da sie in Abschnitt 3.5.1 detailliert vorgestellt wird.

Zusammenfassend bieten Spektralelemente im Zeitbereich zwei wesentliche Vorteile gegenüber konventionellen Elementen: eine bei gleicher Anzahl an Freiheitsgraden verbesserte Approximationsgenauigkeit und die Möglichkeit optimal konzentrierte Massenmatrizen zu generieren. Im Hinblick auf die bei hochfrequenten Wellen auftretenden kurzen Wellenlängen ist eine gute Approximation mit so wenigen Elementknoten wie möglich ein wichtiges Kriterium für eine geeignete, effiziente Modellierung. Eine unter Umständen auftretende Diagonalgestalt der Massenmatrix kann darüber hinaus einen erheblichen positiven Einfluss auf die Effizienz der eingesetzten Lösungsstrategien des resultierenden Gesamtsystems haben.

Neben den in diesem Abschnitt vorgestellten Grundlagen eines eindimensionalen Spektralelements sind in der Literatur verschiedene weitere Elementtypen auf dieser Basis dokumentiert. Zrahia stellt beispielsweise viereckige zweidimensionale Elemente mit drei Freiheitsgraden pro Knoten für Platten vor [ZRAHIA und BAR-YOSEPH 1995], die in ähnlicher Form von Kudela et al. zur Modellierung von Composite-Platten verwendet werden [KUDELA et al. 2007]. Diese Elemente basieren auf dem Tensorprodukt der GLL-Stützstellen in zwei Raumrichtungen. Eine Formulierung von zweidimensionalen, dreieckigen Elementen wird in [KOMATITSCH et al. 2001] vorgestellt, wo so genannte Fekete-Punkte zur Interpolation verwendet werden. Im Hinblick auf Genauigkeit und numerische Stabilität sind jedoch vierecki-

ge Elemente zu bevorzugen. Spektral-Volumenelemente werden beispielsweise von [PRIOLO *et al.* 1994], [KOMATITSCH und VILOTTE 1998] und [SERIANI 1998] zur Modellierung seismischer Wellen eingesetzt. In diesem Zusammenhang werden auch Modelle zur Berechnung von Erdbebenwellen der gesamten Erde entwickelt, die dann auf Supercomputern parallelisiert berechnet werden, siehe beispielsweise [KOMATITSCH und TROMP 2001] und [KOMATITSCH *et al.* 2003]. Zur Simulation von Wellen in ebenen Schalen setzen [PENG *et al.* 2009] Spektral-Volumenelemente ein, betrachten jedoch nur Wellen innerhalb der Ebene, keine Transversalwellen.

2.5 Piezoelektrische Materialien

Bei den SHM-Systemen, mit denen sich diese Arbeit befasst, werden zur Anregung und zur Messung hochfrequenter Ultraschallwellen so genannte piezoelektrische Elemente verwendet. Daher sind in diesem Abschnitt die wichtigsten Grundlagen über piezoelektrische Materialien, ihre mathematische Beschreibung und die Kopplung der elektrischen und mechanischen Systemeigenschaften kurz zusammengefasst.

Das griechische Wort „piezo“ bedeutet übersetzt „ich drücke“. Mit Piezoelektrizität wird die Fähigkeit bestimmter Materialien bezeichnet, als Reaktion auf eine aufgebrachte mechanische Spannung eine elektrische Ladung zu generieren (direkter piezoelektrischer Effekt). Dieses Verhalten wurde erstmals im Jahr 1880 von Jaques und Pierre Curie an einigen Kristallen beobachtet. Dieser Effekt ist reversibel, so dass ein angelegtes elektrisches Feld eine mechanische Dehnung hervorruft, was als inverser piezoelektrischer Effekt bezeichnet wird. Diese Kopplung von elektrischen und mechanischen Größen kann in einer Bewegungsgleichung der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{qq} & \mathbf{K}_{q\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi q} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

ausgedrückt werden, vergleiche beispielsweise [TZOU 1993]. Dabei wird der Vektor der mechanischen Größen um den Vektor der elektrischen Potentiale $\boldsymbol{\phi}$ erweitert, die an den Aktuatoren anliegen bzw. an den Sensoren gemessen werden können. Die Kopplung beschränkt sich im Wesentlichen auf die Steifigkeitsmatrix, da die elektrischen Trägheiten und Dämpfungen vernachlässigbar klein sind. Die Steifigkeitsmatrix kann, wie in (2.77) angegeben, in vier Untermatrizen zerlegt werden, wobei \mathbf{K}_{qq} die mechanische, $\mathbf{K}_{q\phi} = \mathbf{K}_{\phi q}^T$ die piezoelektrische und $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ die dielektrische Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Entsprechend der Methode

der finiten Elemente (vergleiche auch Abschnitt 2.3) lässt sich somit auch ein mechanisch-elektrisch gekoppeltes System prinzipiell diskretisieren.

In der technischen Anwendung kommen hauptsächlich drei Materialien zum Einsatz. Bleizirkontitanat (PZT) und Bariumtitanat (BTO) werden als Sinterkörper hergestellt, was zwei wesentliche Vorteile mit sich bringt: die Polarisationsrichtung und die Formgebung kann fast beliebig gestaltet werden. In Bild 2.17 sind die drei technisch nutzbaren Varianten des piezoelektrischen Effekts, die von der Polarisationsrichtung abhängen, dargestellt.

Insbesondere für Anwendungen im Bereich der Sensorik werden zunehmend auch Polyvinylidenfluoride (PVDF) eingesetzt, deren piezoelektrische Eigenschaften erst 1969 von Kawai entdeckt wurden [KAWAI 1969]. Da sie einen vergleichsweise geringen Elastizitätsmodul aufweisen, wird die Dynamik der untersuchten Struktur durch die Sensorik nur wenig beeinflusst.

Alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen basieren auf relativ geringen Anregungsspannungen im Bereich von maximal 12 Volt. Wie in [MENGELKAMP 2006] experimentell nachgewiesen ist, kann in diesem Bereich in guter Näherung von linearem Materialverhalten ausgegangen werden, bei dem keine nennenswerte Hysterese auftritt.

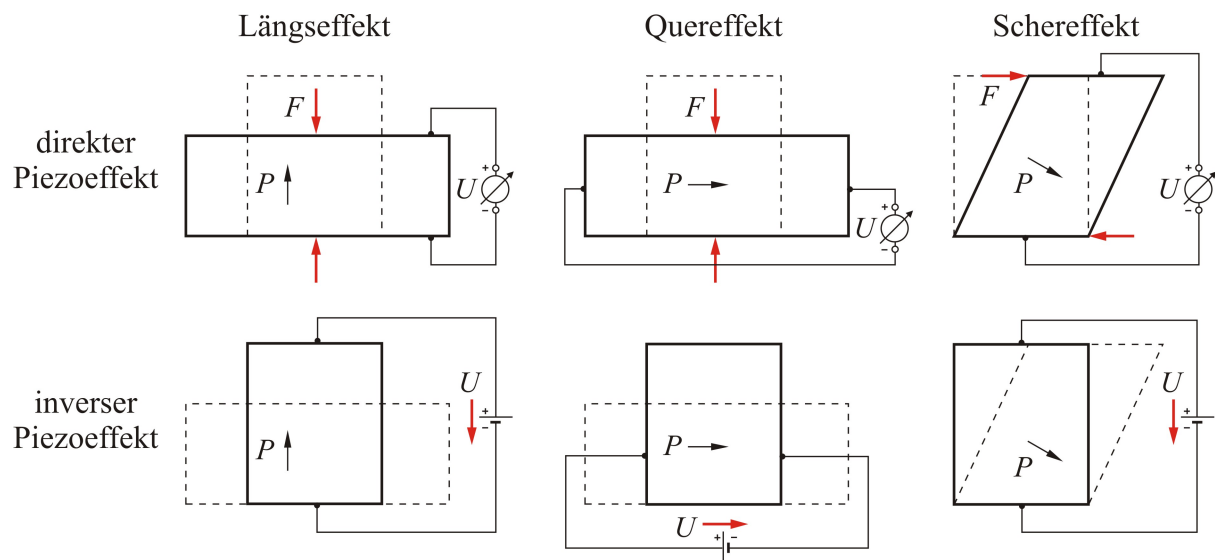


Bild 2.17: Direkter und inverser piezoelektrischer Effekt

Die konstitutiven Gleichungen eines piezoelektrischen Materials lassen sich nach [ELLIS 1987] allgemein gemäß

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} \bar{E}_k \quad (2.78)$$

$$D_j = d_{jkl} \sigma_{kl} + \bar{\varepsilon}_{jk}^\sigma \bar{E}_k \quad (2.79)$$

ausdrücken, wobei ε_{ij} den mechanischen Dehnungstensor, s_{ijkl}^E den mechanischen Nachgiebigkeitstensor bei konstantem elektrischen Feld, d_{kij} den Tensor der piezoelektrischen Ladungskonstanten und \bar{E}_k das elektrische Feld bezeichnet. D_j repräsentiert die dielektrische Verschiebung und $\bar{\varepsilon}_{jk}^\sigma$ bezeichnet die dielektrische Permittivität bei konstanter mechanischer Spannung. Nach [CALOMFIRESCU 2008] wird Gleichung (2.78) häufig als Aktuator-Gleichung, (2.79) als Sensor-Gleichung bezeichnet.

Bei den in dieser Arbeit ausschließlich betrachteten flächigen Aktuatoren gemäß Bild 2.18 wird als Hauptpolarisationsrichtung die 3-Richtung vereinbart.

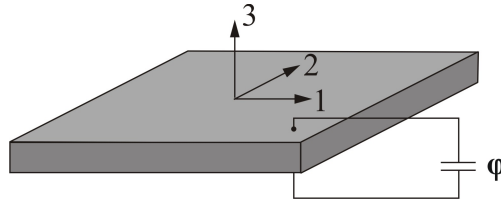


Bild 2.18: Definition der Achsenbezeichnung bei flächigen Piezoelementen

Unter Verwendung der Kelvin-Voigt Notation lauten die obigen Gleichungen für ein derartiges Piezoelement in ausführlicher Form

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

sowie

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{22}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Wie aus den fünf unabhängigen Konstanten des Nachgiebigkeitstensors in (2.80) ersichtlich ist, wird transversal isotropes Materialverhalten vorausgesetzt, vergl. dazu beispielsweise [ALTENBACH *et al.* 2004]. Dabei wird die 1-2 Ebene als Isotropieebene angenommen. Je nach spezifischer Applikation und den sich daraus ergebenden Annahmen lassen sich obige Gleichungen noch weiter umformen, so dass direkte Zusammenhänge zwischen Verformungsgrößen und elektrischen Spannungen angegeben werden können. Ausführliche Herleitungen für verschiedene Konfigurationen von Piezoelementen auf Balken finden sich dazu beispielsweise in Kapitel 4 von [JENNEWEIN 1999]. In den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 dieser Arbeit werden entsprechende Gleichungen für Piezoelemente auf flachen Schalenstrukturen angegeben.

3 Ein effizientes Spektralelement zur Modellierung flacher Schalen unter hochfrequenter Anregung

Dieses Kapitel stellt ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Spektralelement zur Modellierung flacher Schalen detailliert vor. Die Entwicklung dieses Elements erfolgt dabei gezielt für den Einsatz zur Modellierung von lokal flachen, dünnwandigen Strukturen, die im höheren Frequenzbereich angeregt werden. Aus der in Abschnitt 2.2 durchgeführten Betrachtung verschiedener Plattentheorien ergibt sich in diesem Zusammenhang direkt, dass die klassische Plattentheorie nach Kirchhoff für diesen Zweck nicht geeignet ist. Durch die Vernachlässigung von Rotationsträgheit und transversalem Schub entfallen dort gerade Terme, die bei höheren Frequenzen zunehmenden Einfluss haben. Eine bessere Übereinstimmung mit dem realen Bauteilverhalten im höheren Frequenzbereich kann durch die Verwendung der Plattentheorie nach Reissner und Mindlin (FSDT) erzielt werden, die diese beiden Effekte mit berücksichtigt, aber dennoch nur zwei weitere unabhängige Freiheitsgrade benötigt. Eine noch genauere Abbildung der Realität kann durch die Verwendung von Plattentheorien höherer Ordnung erzielt werden, wodurch jedoch auch der numerische Aufwand durch das Hinzufügen weiterer Freiheitsgrade immer weiter ansteigt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird daher als Kompromiss zwischen hoher Effizienz und ausreichend genauer Abbildung der Realität ein Ansatz auf Basis der Reissner-Mindlin Theorie gewählt.

3.1 Kinematik

Die drei unabhängigen Verschiebungen \tilde{u} , \tilde{v} und \tilde{w} werden gemäß dieser Theorie in Form des Verschiebungsfeldes

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + \frac{\partial z_0}{\partial x} \cdot w(x, y, z, t) + z \cdot \theta_y(x, y, t) \\ \tilde{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + \frac{\partial z_0}{\partial y} \cdot w(x, y, z, t) - z \cdot \theta_x(x, y, t) \\ \tilde{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

ausgedrückt, vergleiche dazu auch Bild 3.1. Hierbei bezeichnen $(u, v, w, \theta_x, \theta_y)$ unbekannte, zu bestimmende Funktionen. u , v und w beschreiben die Verschiebungen der Schalenmittelfläche (SMF), θ_x und θ_y die Verdrehungen des Elementquerschnitts. Durch die Terme

$\frac{\partial z_0}{\partial x} \cdot w(x, y, z, t)$ und $\frac{\partial z_0}{\partial y} \cdot w(x, y, z, t)$ wird eine vorhandene Krümmung der Schale durch eine Vorverformung berücksichtigt, vergleiche auch [WAGNER 1985]. Bei ebenen Schalen entfallen diese Terme.

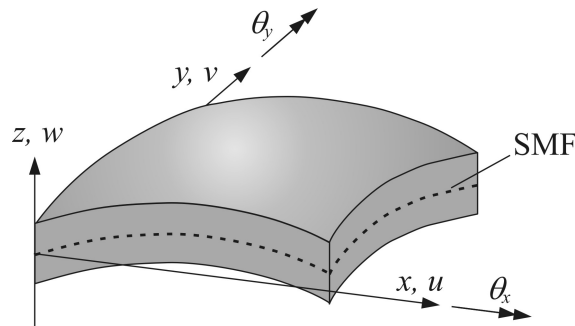


Bild 3.1: Kinematische Größen zur Beschreibung einer flach gekrümmten Schale; gestrichelt dargestellt ist die Schalenmittelfläche (SMF)

Durch diesen Ansatz (3.1) ergibt sich eine Formulierung mit fünf unabhängigen Freiheitsgraden in kartesischen Koordinaten. Die Gültigkeit dieses Ansatzes ist auf Schalen mit geringer Krümmung beschränkt.

Die in Gleichung (3.1) explizit ausgeschriebene Zeitabhängigkeit der Verschiebungen wird bei den folgenden Gleichungen ebenfalls vorausgesetzt, jedoch zur besseren Übersichtlichkeit nicht mehr dargestellt.

Auf Basis dieses Ansatzes können nun die Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ angegeben werden. Wie wir später sehen werden ist dazu eine Aufteilung in Biege- ($\boldsymbol{\varepsilon}^b$), Schub- ($\boldsymbol{\varepsilon}^s$) und Membrananteile ($\boldsymbol{\varepsilon}^{mb}$) sinnvoll:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} z \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \boldsymbol{\varepsilon}^s \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{mb} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Die einzelnen Anteile lassen sich dabei gemäß der folgenden drei Gleichungen formulieren:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^b \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{mb} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mb} \\ \varepsilon_{yy}^{mb} \\ \gamma_{xy}^{mb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial z_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

3.2 Konstitutives Gesetz

Gemäß den Voraussetzungen der Reissner-Mindlin Plattentheorie wird vom ebenen Spannungszustand, also $\sigma_{33} = 0$ ausgegangen. Mit dieser Annahme ergibt sich aus dem verallgemeinerten dreidimensionalen Hookeschen Gesetz das konstitutive Gesetz einer linearen orthotropen Einzelschicht zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (3.6)$$

und

$$\begin{bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (3.7)$$

Die $Q_{ij}^{(k)}$ bezeichnen dabei die auf den ebenen Spannungszustand reduzierten Steifigkeiten im Materialkoordinatensystem der k -ten Einzelschicht, die mit den Ingenieurkonstanten folgendermaßen zusammenhängen:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \cdot \nu_{21}^{(k)}}; & Q_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_{12}^{(k)} \cdot E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \cdot \nu_{21}^{(k)}}; & Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \cdot \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)}; & Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}; & Q_{55}^{(k)} &= G_{13}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Umgerechnet auf das (globale) Laminatkoordinatensystem (vergleiche Bild 3.2) ergibt sich aus (3.6) und (3.7)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (3.9)$$

und

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (3.10)$$

Die $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ sind die auf das Laminatkoordinatensystem umgerechneten Steifigkeiten.

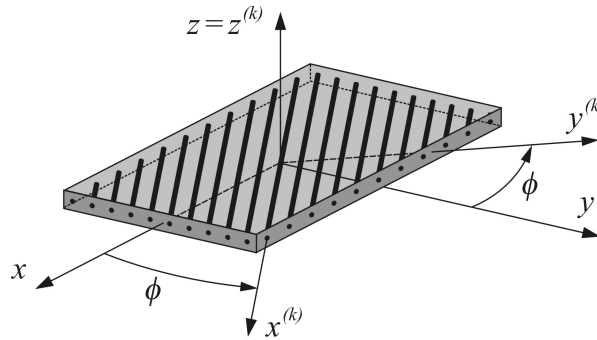


Bild 3.2: Laminatkoordinatensystem (x, y, z) und k -te Laminateneinzelnschicht mit zugehörigem Materialkoordinatensystem $(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)})$

Diese Steifigkeiten können aus denen im Materialkoordinatensystem gemäß

$$\bar{Q}_{ij}^{(k)} = \mathbf{T}(-\phi^{(k)}) Q_{ij}^{(k)} \mathbf{T}^T(-\phi^{(k)}). \quad (3.11)$$

berechnet werden, wie beispielsweise in [REDDY 2004] oder [ALTENBACH *et al.* 2004] hergeleitet ist. $\phi^{(k)}$ bezeichnet dabei den Winkel zwischen Laminatkoordinatensystem und Materialkoordinatensystem der k -ten Schicht, siehe Bild 3.2, und die Transformationsmatrix \mathbf{T} lässt sich folgendermaßen angeben:

$$\mathbf{T}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \phi \sin \phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \phi \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \phi & \cos \phi \sin \phi & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Für ein aus L Einzellagen bestehendes Laminat lässt sich nun der Zusammenhang zwischen den Schnittlasten und den Dehnungen angeben:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^L \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mb} \\ \varepsilon_{yy}^{mb} \\ \varepsilon_{xy}^{mb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ \varepsilon_{xy}^b \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

und

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^L \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \cdot z dz = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{mb} \\ \varepsilon_{yy}^{mb} \\ \varepsilon_{xy}^{mb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ \varepsilon_{xy}^b \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

sowie

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \kappa \cdot \sum_{k=1}^L \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Dabei werden A_{ij} als Längssteifigkeiten, D_{ij} als Biegesteifigkeiten und B_{ij} als Biege-Dehn-Kopplungsteifigkeiten bezeichnet, die wie folgt definiert sind:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{h^e} \bar{Q}_{ij} \cdot (1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^L \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \cdot (1, z, z^2) dz. \quad (3.16)$$

Die Membran- und Biegedehnungen ε^{mb} und ε^b sowie die Gleitungen γ^s sind in den Gleichungen (3.3) bis (3.5) definiert worden, κ ist der Schubkorrekturfaktor, vergl. Abschnitt 2.2.3, und h^e bezeichnet die gesamte Laminatdicke.

3.3 Approximation der Verschiebungen

Um das kontinuierliche System in ein diskretes System zu überführen, muss auf Elementebene ein Ansatz der Form (2.66) für das Verschiebungsfeld gemacht werden. Als Knotenwerte werden dabei, wie in 2.4.2 detailliert dargestellt, die Nullstellen eines speziellen Polynoms verwendet. Für ein zweidimensionales Element bietet sich dazu im Allgemeinen ein Tensorprodukt an.

Um die optimalen Interpolationseigenschaften der in 2.4.2 vorgestellten eindimensionalen Formfunktionen auch hier verwenden zu können, werden die $N-1$ inneren Elementknoten in beide Raumrichtungen identisch durch die Nullstellen der Lobatto-Polynome vom Grad $(N-1)$

definiert. Die zweidimensionale Formfunktion $\Psi_{ij}(\xi, \eta)$ des Knotens (i, j) lässt sich auf dieser Knotenbasis dann als Produkt der eindimensionalen Formfunktionen (2.73) angeben:

$$\Psi_{ij}(\xi, \eta) = \psi_i(\xi) \cdot \psi_j(\eta). \quad (3.17)$$

Für das zweidimensionale Referenzelement mit den lokalen Koordinaten $-1 \leq \xi \leq 1$ und $-1 \leq \eta \leq 1$ ergeben sich damit die in Bild 3.3 für 5 und 9 GLL-Knoten beispielhaft dargestellten Knotenverteilungen.

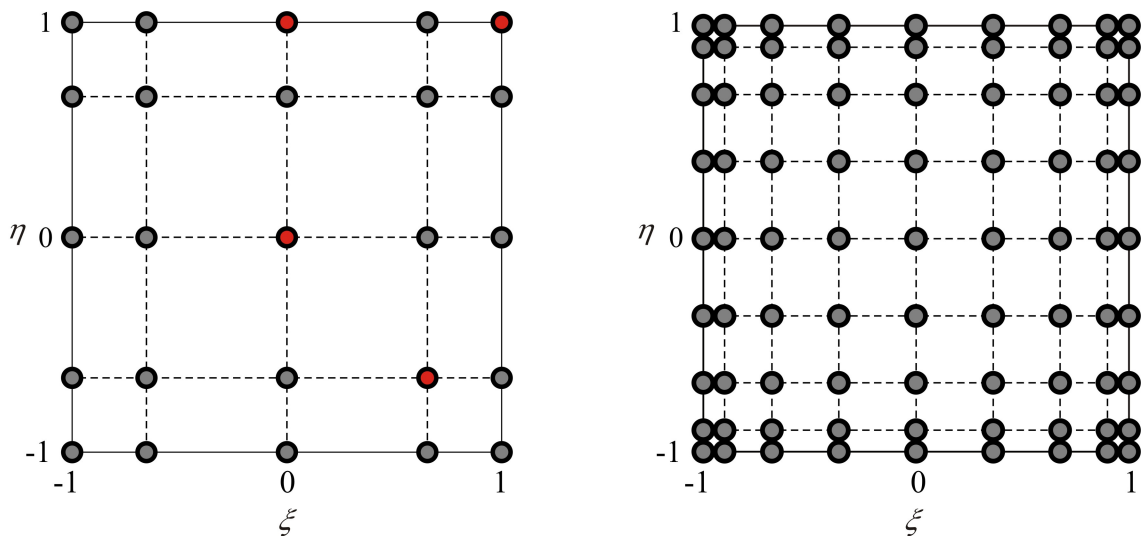


Bild 3.3: Beispielhafte Knotenverteilung im Referenzelement, 5 GLL-Knoten (links) und 9 GLL Knoten (rechts) pro Elementkante

Wie aus Bild 3.3 ersichtlich ist, führt eine Erhöhung der Knotenzahl pro Elementkante zu einer gewissen Anhäufung von Knoten an den Elementecken, was auch als „Clustering“ bezeichnet wird. Dieses Phänomen hat einige Auswirkungen auf die für die Praxis zu empfehlende maximale Anzahl von Knoten pro Elementkante, wie ausführlich in Abschnitt 4.5 diskutiert ist.

Da die Elementformfunktionen, die sich aus (3.17) ergeben, sich deutlich von den häufig in der Literatur abgebildeten Formfunktionen für Elemente mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen unterscheiden, sind vier exemplarisch ausgewählte Vertreter für ein Element mit 5 GLL-Knoten pro Elementkante in Bild 3.4 dargestellt. Die zugehörigen Knoten sind in Bild 3.3 in rot eingefärbt. Es ist sehr gut zu erkennen, dass diese Funktionen die kardinale Interpolationseigenschaft (2.67) erfüllen, also an jeweils allen anderen Elementknoten verschwinden.

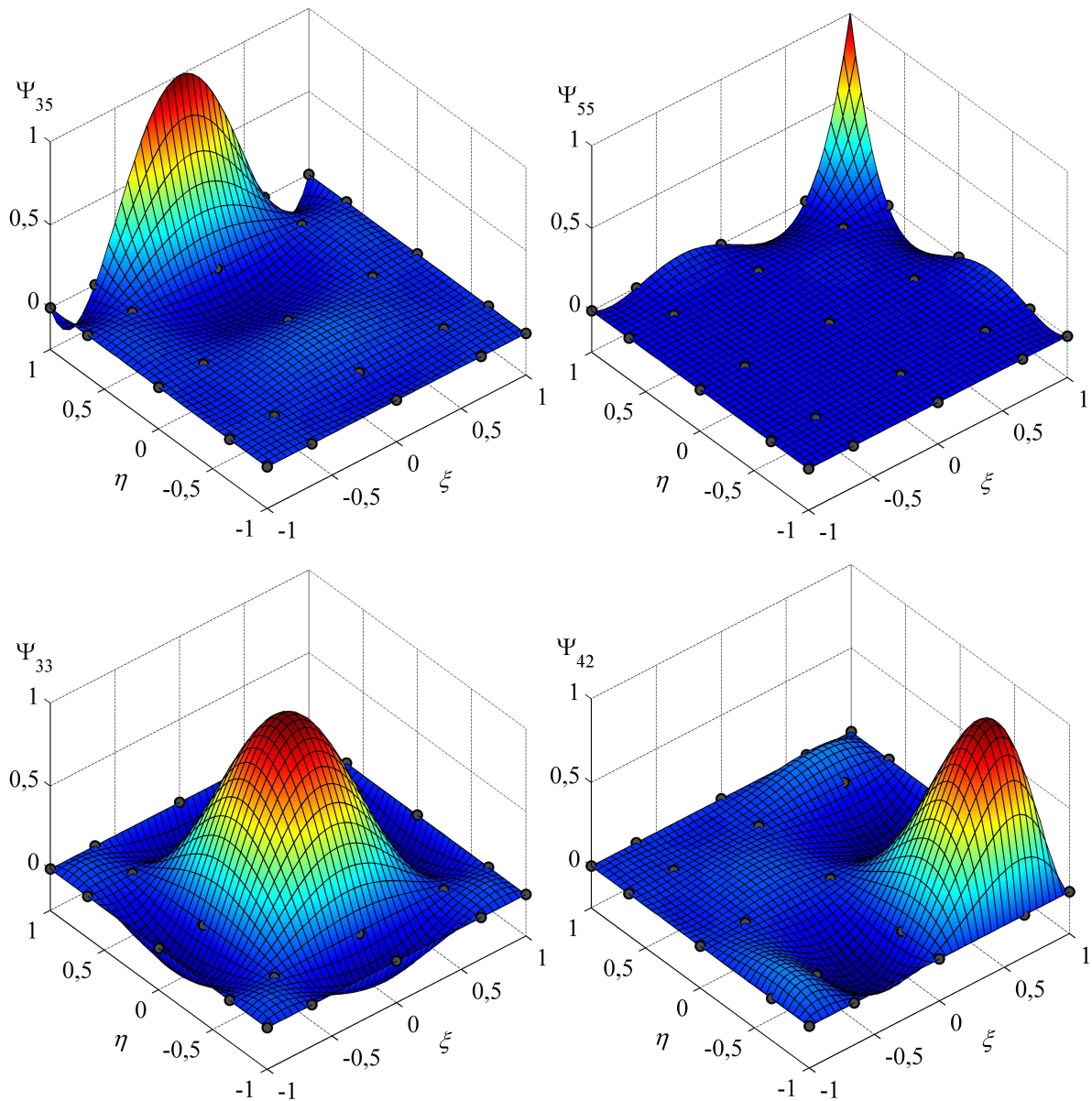


Bild 3.4: Vier exemplarisch ausgewählte Formfunktionen Ψ_{ij} eines Spektral-Schalenelements mit 5 GLL-Knoten pro Kantenlänge

Für die Herleitung des hier entwickelten Spektralelements wird das isoparametrische Konzept verwendet. Dabei werden für die Approximation der Knotenkoordinaten und der unabhängigen Variablen die gleichen Formfunktionen verwendet. Allgemein kann also ein beliebiges, zulässiges Element mittels

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Psi_{ij}(\xi) \mathbf{x}_{ij} . \quad (3.18)$$

auf das Referenzelement abgebildet werden. Für Gleichung (3.18) ist bewusst eine allgemeine, vektorielle Darstellung gewählt, die verschiedene Optionen im Hinblick auf die Dimension der Vektoren \mathbf{x} und ξ beinhaltet. Auf diese Abbildung wird in Kapitel 4.2 nochmals

detailliert eingegangen. Zunächst soll an dieser Stelle die Annahme gelten, dass ein zweidimensionales Element, dessen Knotenpunkte durch $\mathbf{x}_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}]^T$ definiert sind, in ein zweidimensionales Referenzgebiet abgebildet werden soll, dessen Koordinaten durch $\xi = [\xi, \eta]^T$ bestimmt sind. Für ein Element mit beispielsweise 5 GLL-Knoten pro Elementkante kann mit (3.19) dann theoretisch auch ein erheblich krummlinig berandetes Element in das Referenzgebiet abgebildet werden, wie in Bild 3.5 dargestellt ist.

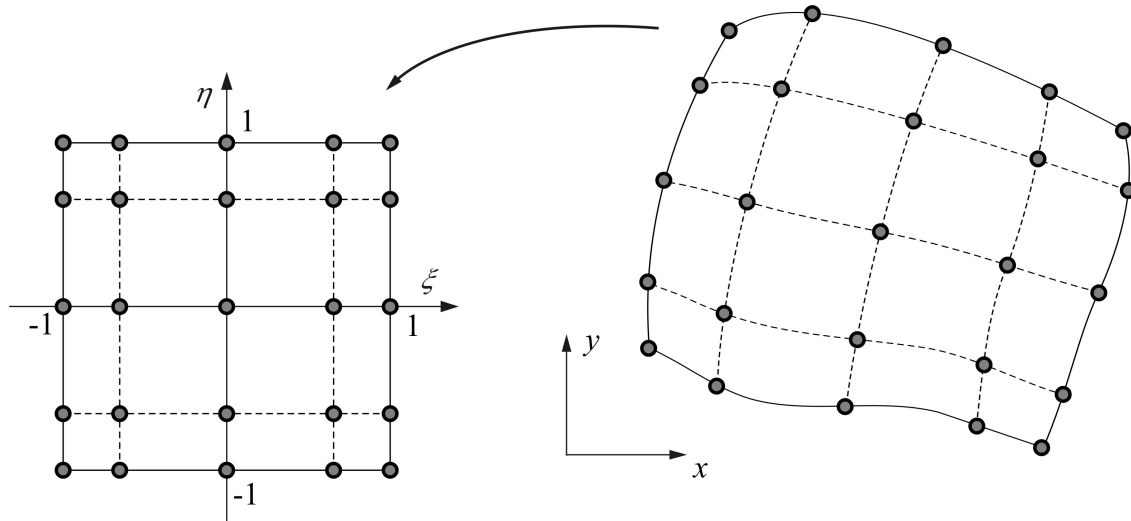


Bild 3.5: Abbildung eines krummlinig berandeten Elements auf das Referenzelement nach dem isoparametrischen Konzept

Unter Verwendung dieser Formfunktionen wird nun das Verschiebungsfeld auf Elementebene allgemein in der folgenden Form approximiert:

$$\begin{bmatrix} w(\xi, \eta) \\ \theta_x(\xi, \eta) \\ \theta_y(\xi, \eta) \\ u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \begin{bmatrix} \Psi_{ij}^w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{ij}^\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{ij}^\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{ij}^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{ij}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{\theta}_x(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{\theta}_y(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{u}(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{v}(\xi_i, \eta_j) \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi} \mathbf{q}^{(e)}. \quad (3.19)$$

Hierbei ist $\mathbf{\Psi}$ die Matrix der Formfunktionen und $\mathbf{q}^{(e)}$ der Vektor der unabhängigen Knotenfreiheitsgrade. Durch diese Approximation wird ein kontinuierliches in ein diskretes System überführt. Die mit einem Dach gekennzeichneten unabhängigen Knotenvariablen sind dann die Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems. Durch die allgemeine Notation einer Matrix von Formfunktionen bleibt die Möglichkeit erhalten, unterschiedliche Ansatzfunktionen für die unterschiedlichen Freiheitsgrade zu wählen. Dies soll im Folgenden jedoch nicht

verfolgt werden, sondern es werden alle Freiheitsgrade mit den gleichen Funktionen approximiert, so dass sich folgende Vereinfachung ergibt:

$$\begin{bmatrix} w(\xi, \eta) \\ \theta_x(\xi, \eta) \\ \theta_y(\xi, \eta) \\ u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Psi_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{q}_{ij}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \psi_i(\xi) \cdot \psi_j(\eta) \begin{bmatrix} \hat{w}(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{\theta}_x(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{\theta}_y(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{u}(\xi_i, \eta_j) \\ \hat{v}(\xi_i, \eta_j) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Hier repräsentiert ψ die eindimensionale Formfunktion (2.73).

Die Verzerrungen lassen sich auf Basis dieser Approximation mit Hilfe einer Operatormatrix \mathbf{B} in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade angeben:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}^{(e)}. \quad (3.21)$$

Die Matrix \mathbf{B} , die als Dehnungs-Verschiebungs-Matrix bezeichnet wird, ist dabei aus Untermatrizen mit dem Beitrag aus jeder Formfunktion Ψ_{ij} aufgebaut:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{11}, \dots, \mathbf{B}_{ij}, \dots, \mathbf{B}_{(N+1)(N+1)}]. \quad (3.22)$$

Ihre einzelnen Beiträge setzen sich gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} & -\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

zusammen.

Mit Hilfe der Jacobimatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

lässt sich der Zusammenhang von \mathbf{B} mit den lokalen Elementkoordinaten gemäß

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

angeben. Wie sich aus den letzten 3 Zeilen der Gleichung (3.23) – bzw. auch schon aus (3.5) – ergibt, werden im Fall einer Schale mit schwacher Krümmung die Membrandehnungen nicht nur aus den Verschiebungen in der Ebene gebildet, sondern auch die dazu senkrechten Verschiebungen gehen in die Berechnung ein. Dieser Anteil verschwindet für ebene Schalen, weil in diesem Fall die Ableitungen $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ und $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ zu Null werden.

3.4 Schwache Form der Bewegungsgleichungen

Durch Multiplikation der Bewegungsgleichungen der FSDT, Gleichungen (2.58) bis (2.62), mit den generalisierten virtuellen Verschiebungen δw , $\delta \theta_x$, $\delta \theta_y$, δu und δv , die hier als Testfunktionen aufgefasst werden können, und partieller Integration über das Elementgebiet ergeben sich nach [REDDY 2004] die Gleichungen der schwachen Form zu

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \delta w}{\partial x} Q_x + \frac{\partial \delta w}{\partial y} Q_y - \delta w q + I_0 \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left(\hat{N}_{xx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \left(\hat{N}_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3.26)$$

$$- \left[\left(Q_x + \hat{N}_{xx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) n_x + \left(Q_y + \hat{N}_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) n_y \right] \delta w ds = 0$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} M_{yy} + \delta \theta_x Q_y + I_2 \delta \theta_x \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + I_1 \delta \theta_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dx dy \quad (3.27)$$

$$- \oint_{\Gamma^e} T_y \delta \theta_x ds = 0$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} M_{xy} + \delta \theta_y Q_x + I_2 \delta \theta_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} + I_1 \delta \theta_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} T_x \delta \theta_y ds = 0 \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_{xy} + I_0 \delta u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \delta u \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} P_x \delta u ds = 0 \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} N_{yy} + I_0 \delta v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \delta v \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} P_y \delta v ds = 0. \quad (3.30)$$

Die Umlaufintegrale über den Gebietsrand enthalten die generalisierten Kräfte, vergleiche [REDDY 2004]. Damit liegen nun alle notwendigen Grundlagen vor, um die Elementmatrizen für ein flach gekrümmtes Spektral-Schalenelement zu generieren. Zunächst soll dabei die Annahme getroffen werden, dass keine äußeren Kantenkräfte in der Schalenebene angreifen. Damit verschwinden die Terme \hat{N}_{xx} , \hat{N}_{xy} und \hat{N}_{yy} in Gleichung (3.26).

3.5 Berechnung der Elementmatrizen

Die Integration über das Elementgebiet wird in der Praxis numerisch durchgeführt, wobei die Lobatto-Integrationsregel verwendet wird.

3.5.1 Numerische Integration nach Lobatto

Bei der numerischen Integration nach Lobatto wird eine nichtsinguläre Funktion $f(\xi)$ allgemein gemäß der Vorschrift

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{N+1} f(\xi_i) \psi_{N,i}(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N+1} f(\xi_i) \bar{w}_i \quad (3.31)$$

berechnet. $P(\xi)$ bezeichnet das Interpolationspolynom der Funktion $f(\xi)$. Die Integrationsstützstellen ξ_i sind die Nullstellen des komplettierten Lobatto-Polynoms vom Grad $(N+1)$:

$$Lo_{N+1}^c(\xi) = (1 - \xi^2) Lo_{N-1}(\xi). \quad (3.32)$$

Sie entsprechen damit also den Stützstellen der Interpolationsfunktion des eindimensionalen Spektralelements, siehe auch Gleichung (2.70). Die Integrationsgewichte \bar{w}_i ergeben sich zu

$$\bar{w}_i = \int_{-1}^1 \psi_{N,i}(\xi) d\xi. \quad (3.33)$$

Nach der Ausführung der Integration lässt sich dieser Ausdruck zu

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{w}_{N+1} = \frac{2}{N(N+1)}, \\ \bar{w}_i &= \frac{2}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{L_N^2(\xi_i)} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.34)$$

umformen, wobei L_N das Legendre-Polynom N -ten Grades bezeichnet, vergleiche (2.72). Für die praktische Implementierung werden diese Integrationsgewichte sinnvollerweise einmal mit hoher Genauigkeit bestimmt und dann in tabellarischer Form hinterlegt, so dass für eine konkrete Berechnung von Elementmatrizen auf die gespeicherten Werte zugegriffen werden kann.

Ein gegenüber konventionellen finiten Elementen wesentlicher Unterschied ist die schon erwähnte Tatsache, dass die Stützstellen der numerischen Integration den Elementknoten entsprechen. Bei einer Integration über die Formfunktionen eines Elements führt dies dazu, dass an jedem auszuwertenden Integrationspunkt nur der jeweils betrachtete Knotenwert einen Beitrag zum Funktionswert liefert. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass dies eine erhebliche Auswirkung auf die Gestalt der Elementmassenmatrix hat.

3.5.2 Elementsteifigkeits- und Elementmassenmatrix

Zur Bestimmung der Elementmatrizen wird der Ansatz gemäß Gleichung (3.20) in die schwache Form eingesetzt und anschließend die numerische Integration nach Lobatto durchgeführt. Die daraus resultierende Elementsteifigkeitsmatrix lässt sich dann in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\mathbf{B}(x, y)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\mathbf{B}(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{D} \mathbf{B}(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

angeben. \bar{w} bezeichnen hierbei die Integrationsgewichte, Gleichung (3.34). Die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D} enthält die Längs-, Biege- und Biege-Dehn-Steifigkeiten, die in Gleichung (3.16) definiert sind. Ihre Anordnung wird durch die Dehnungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} bzw. schon durch die Anordnung des Dehnungsvektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ vorgegeben und ergibt sich zu

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} & \kappa A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Die Biegesteifigkeiten B_{ij} , die in der Materialsteifigkeitsmatrix auftreten sind dabei nicht mit Einträgen der Dehnungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} zu verwechseln. Die Bezeichnung beider Größen mit dem Buchstabe B hat sich in der einschlägigen Literatur als Standard etabliert, weshalb auch hier nicht davon abgewichen wird. κ bezeichnet den in Abschnitt 2.2.3 eingeführten Schubkorrekturfaktor.

Die Elementmassenmatrix ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\Psi(x, y)]^T \mathbf{H} \Psi(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\Psi(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{H} \Psi(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

wobei die Matrix \mathbf{H} folgendermaßen aus den Trägheitstermen aufgebaut ist:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & -I_1 \\ 0 & 0 & I_2 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & I_0 & 0 \\ 0 & -I_1 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Die schon in Abschnitt 2.2 definierten Trägheitsterme sind hier zur besseren Übersicht nochmals zusammenfassend angegeben:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \int_{h^e} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} \rho(z) dz. \quad (3.39)$$

Mit h^e ist dabei die Dicke des Schalenelements gekennzeichnet.

Auf Elementebene ergibt sich mit Hilfe dieser Matrizen also das resultierende lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (3.40)$$

wobei im Vektor $\mathbf{F}^{(e)}$ die Beiträge der generalisierten Kräfte zusammengefasst werden. Auf eine detaillierte Angabe der dabei auftretenden Integrale wird an dieser Stelle verzichtet und auf [REDDY 2004] verwiesen, da die inneren Kräfte bei dem Zusammenbau der globalen Matrizen (Assembly) im Inneren des betrachteten Gebiets nach dem grundlegenden mechanischen Prinzip „actio gleich reactio“ verschwinden. Im Inneren des betrachteten Gebiets sind also im Allgemeinen nur diejenigen Anteile des Vektor $\mathbf{F}^{(e)}$ von weitergehendem Interesse, die aus den angreifenden, externen Lasten bestehen.

Im Zusammenhang mit den weiter oben erläuterten speziellen numerischen Eigenschaften der Integration nach Lobatto können sich in einigen Spezialfällen noch weitere Vereinfachungen der Elementmatrizen ergeben. Da der bei weitem überwiegende Teil der in der Praxis, insbesondere in der Luftfahrt, verwendeten Lamine einen symmetrischen Lagenaufbau hat, werden im folgenden Abschnitt gezielt die speziellen Eigenschaften symmetrischer Lamine betrachtet.

3.6 Spezielle Elementeigenschaften symmetrischer Lamine

Für symmetrisch zur Schalenmittelfläche (SMF) aufgebaute Lamine ergeben sich bei der Bestimmung der Elementsteifigkeits- und der Elementmassenmatrix einige Vereinfachungen. Betrachten wir zunächst den Einfluss auf die Massenmatrix. Bei einem symmetrisch zur SMF aufgebauten Element, bei dem die Integration zur Bestimmung der Trägheitsterme von $-h_e/2$ bis $h_e/2$ durchgeführt wird, ergibt sich aus (3.39), dass die mit I_1 bezeichneten Terme verschwinden. Dieser Fall führt demnach zu einer diagonalen Trägheitsmatrix \mathbf{H}_{sym} :

$$\mathbf{H}_{sym} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Durch die spezielle Eigenschaft der Lobatto-Integration in Verbindung mit der Auswahl der GLL Elementknoten liegt damit für symmetrische Lamine eine diagonale Massenmatrix vor, denn es gilt die diskrete Orthogonalität

$$\Psi_n(x_i, y_j) \cdot \Psi_m(x_i, y_j) = \delta_{mn}. \quad (3.42)$$

In Bezug auf die Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Definition der Biege-Dehn-Kopplungssteifigkeiten B_{ij} , dass diese Terme bei einem zur SMF symmetrisch aufgebauten Laminat entfallen. In diesem Fall stellt die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D} keine Kopplung zwischen Biege- und Membrandehnungen mehr her:

$$\mathbf{D}_{sym} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} & \kappa A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Im Fall von ebenen Schalen entfällt, wie am Ende von Abschnitt 3.3 aufgezeigt, auch die Kopplung von Biege- und Membrananteilen über die Dehnungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} . Für symmetrisch aufgebaute, ebene Lamine besteht daher die Möglichkeit, die Platten-Anteile (also Biegung und Schub) vollständig von den Membran-Anteilen zu entkoppeln und zwei getrennte, kleinere Gleichungssysteme aufzubauen.

Auf beide hier erwähnte Aspekte von symmetrischen Laminaten wird im Verlauf dieser Arbeit an verschiedenen Stellen noch weiter eingegangen, weil sich daraus einige interessante Aspekte für die Lösung spezieller Systeme ergeben. Im folgenden Abschnitt wird jedoch zunächst erläutert, wie auf Elementebene eine Materialdämpfung berücksichtigt werden kann.

3.7 Berücksichtigung von Materialdämpfung

Zur realistischen Modellierung von Wellenausbreitungsvorgängen ist insbesondere in Faserverbundwerkstoffen eine Berücksichtigung von Materialdämpfung unerlässlich. Während bei metallischen Werkstoffen der Effekt der Materialdämpfung häufig nicht sehr stark ausgeprägt ist und daher eventuell vernachlässigt werden kann, ist dies bei Faserverbundlaminaten nicht mehr der Fall. Dennoch wird dieser Punkt oftmals, beispielsweise in [KUDELA *et al.* 2007],

[KUDELA und OSTACHOWICZ 2009] und [PENG *et al.* 2009], aus Gründen der Vereinfachung vernachlässigt. Da das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Simulationswerkzeug jedoch für eine realitätsnahe Modellierung eingesetzt und auch experimentell validiert wird, soll Materialdämpfung hier implementiert werden.

In der Literatur finden sich hauptsächlich zwei Ansätze, um das Dämpfungsverhalten von Materialien zu beschreiben: hysteretische und viskose Dämpfung. Das hysteretische Dämpfungsmodell basiert auf komplexen Werten für die Steifigkeit des betrachteten Materials:

$$C_{ij}^* = C_{ij} + i \cdot C'_{ij}, \quad (3.44)$$

wobei C_{ij} und C'_{ij} Real- und Imaginärteil des komplexen, viskoelastischen Steifigkeitstensors sind. Die resultierende Bewegungsgleichung erhält damit die Form

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{*(e)} + \mathbf{K}^{*(e)} \mathbf{q}^{*(e)} = \mathbf{F}^{(e)}(t), \quad (3.45)$$

wobei $\mathbf{K}^{*(e)}$ die komplexe Steifigkeitsmatrix bezeichnet, die die Dämpfung bewirkt, und der Vektor der generalisierten Element-Knotenverschiebungen $\mathbf{q}^{*(e)}$ ebenfalls komplex wird. Dieses Modell wird häufig im Rahmen von analytischen Lösungen im Frequenzbereich eingesetzt. Im Zeitbereich sind die daraus resultierenden komplexen Knotenwerte schwierig zu interpretieren.

Das viskose Dämpfungsmodell, welches sehr häufig im Rahmen der FE-Analyse in der Strukturmechanik eingesetzt wird, basiert auf der Annahme einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung. Dies führt zu einer Bewegungsgleichung der Form

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{C}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}(t), \quad (3.46)$$

Die Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}^{(e)}$ wird dabei häufig nach der so genannten Bequemlichkeitshypothese proportional zur Massen- und Steifigkeitsmatrix angenommen:

$$\mathbf{C}^{(e)} = \bar{\alpha} \mathbf{M}^{(e)} + \bar{\beta} \mathbf{K}^{(e)}. \quad (3.47)$$

Die in (3.47) auftretenden skalaren Koeffizienten α und β werden dabei üblicherweise experimentell bestimmt. Neben diesen beiden hauptsächlich verwendeten Modellen existieren einige weitere Ansätze, insbesondere die Verwendung von fraktionalem Ableitungen scheint erfolgversprechend, vergleiche beispielsweise [BAGLEY und TORVIK 1985] und [SCHMIDT und GAUL 2002].

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine viskose Dämpfung gemäß (3.46) angenommen. Im Gegensatz zur Bequemlichkeitshypothese wird die Dämpfungsmatrix jedoch anders aufgebaut. Insbesondere Faserverbundwerkstoffe zeigen oftmals eher einen umgekehrt proportionalen Zusammenhang der Dämpfung zur Steifigkeit als eine direkte Proportionalität. Bei einer unidirektionalen Laminatschicht ist in aller Regel die Dämpfung in Faserrichtung (maximale Steifigkeit) wesentlich geringer, als quer zur Faserrichtung (geringe Steifigkeit). Ein proportionaler Zusammenhang der Dämpfungsmatrix zur Steifigkeitsmatrix wird daher nicht angenommen. Um jedoch eine richtungsabhängige Dämpfung modellieren zu können, ist eine allein massenproportionale Dämpfungsmatrix nicht ausreichend.

Stattdessen wird für jede orthotrope Einzelschicht in ihrem jeweiligen Materialkoordinatensystem (vergleiche Bild 3.2) eine Materialdämpfungsmatrix der Form

$$\mathbf{C}_{mat}^{(k)} = \begin{bmatrix} (C_{\vartheta}^{(k)} + C_{\vartheta m}^{(k)})/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\vartheta m}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\vartheta}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_f^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_m^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

angenommen. Die Anordnung orientiert sich an der zuvor festgelegten Anordnung der Knotenfreiheitsgrade, vergleiche (3.20). $C_{\vartheta}^{(k)}$ und $C_{\vartheta m}^{(k)}$ sind somit Werte zur Beschreibung der Materialdämpfung der Verdrehfreiheitsgrade, $C_f^{(k)}$ und $C_m^{(k)}$ beschreiben die Materialdämpfung in der Ebene. Prinzipiell könnte ein fünfter Parameter zur getrennten Festlegung der Dämpfung des z -Verschiebungsfreiheitsgrads definiert werden. Wie aus (3.48) ersichtlich wird darauf jedoch verzichtet und es wird stattdessen der Mittelwert aus $C_{\vartheta}^{(k)}$ und $C_{\vartheta m}^{(k)}$ verwendet. Die Indizes f und m stehen für „Faserrichtung“ und „Matrix“. Im Laminatkoordinatensystem entspricht gemäß Bild 3.2 die Faserrichtung der $x^{(k)}$ -Richtung, in die dazu senkrechte $y^{(k)}$ -Richtung sind die Eigenschaften der Matrix vorherrschend.

Insgesamt sind somit vier Materialdämpfungsparameter festzulegen, mit denen auch eine richtungsabhängige Materialdämpfung vorgegeben werden kann, wie sie bei Laminaten wie erwähnt zu finden ist. Ähnlich wie schon bei den reduzierten Steifigkeiten (vergleiche Abschnitt 3.2) lassen sich auch diese Dämpfungsparameter in das Laminatkoordinatensystem transformieren:

$$\bar{\mathbf{C}}_{mat}^{(k)} = \mathbf{T}_c(-\phi^{(k)}) \mathbf{C}_{mat}^{(k)} \mathbf{T}_c^T(-\phi^{(k)}). \quad (3.49)$$

ϕ bezeichnet hier wiederum den Winkel zwischen dem Laminatkoordinatensystem und dem Materialkoordinatensystem der k -ten Einzelschicht, siehe Bild 3.2. Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_d ist dabei folgendermaßen aufgebaut:

$$\mathbf{T}_c(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2 \phi & \sin^2 \phi \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 \phi & \cos^2 \phi \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Die Materialdämpfungsmatrix eines Laminatverbundes wird nun nach der Vorschrift

$$\mathbf{C}_{mat} = \int_{h^e} \bar{\mathbf{C}}_{mat} dz = \sum_{k=1}^L \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{C}}_{mat}^{(k)} dz. \quad (3.51)$$

ermittelt. Die Elementdämpfungsmatrix lässt sich damit nach einer ähnlichen Vorschrift wie die Massenmatrix gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\boldsymbol{\Psi}(x, y)]^T \mathbf{C}_{mat} \boldsymbol{\Psi}(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\boldsymbol{\Psi}(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{C}_{mat} \boldsymbol{\Psi}(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

aufbauen. Im Falle eines nur aus 0° - und 90° -Lagen aufgebauten Laminats ergibt sich eine diagonale Massenmatrix, in anderen Fällen können Nebendiagonalelemente auftreten. Wie wir später noch im Detail sehen werden, ist aus Gründen der Recheneffizienz eine Diagonalmatrix anzustreben. Ein erheblicher Effizienzgewinn ergibt sich insbesondere für symmetrische Laminats (vergl. Abschnitt 3.6) bei denen eine ebenfalls diagonale Massenmatrix vorliegt. Daher wird in diesem Fall empfohlen, die Materialdämpfungsmatrix \mathbf{C}_{mat} vor der Berechnung der Elementdämpfungsmatrix zu diagonalisieren. Verschiedene Methoden zur Diagonalisierung werden von [ZIENKIEWICZ und TAYLOR 1989] vorgestellt. Eine geeignete Methode stellt beispielsweise die HRZ-Methode dar, die nach ihren Entwicklern Hinton, Rock und Zienkiewicz benannt ist [HINTON *et al.* 1976]. Bei dieser Methode, ist die Erhaltung der Gesamtdämpfung garantiert. Aufgrund der Struktur der Dämpfungsmatrix kann auch eine

einfache Zeilensummation verwendet werden, wodurch ebenfalls Erhaltung der Gesamtdämpfung gegeben ist.

Als Nachteil des verwendeten Dämpfungsansatzes muss erwähnt werden, dass durch die Diagonalgestalt keine Dämpfung der Kopplung zwischen verschiedenen Freiheitsgraden möglich ist. Wie im Verlauf der Arbeit deutlich wird, lassen jedoch mit dieser Formulierung dennoch realitätsnahe Ergebnisse erzielen, vergleiche Kapitel 7.1.

An dieser Stelle liegt nun die vollständige Beschreibung eines im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Spektralelements zur Modellierung flach gekrümmter Schalen vor. Im nun folgenden letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Elementformulierung noch um die Berücksichtigung statischer Vorlasten erweitert.

3.8 Berücksichtigung von statischen Vorlasten

Wie schon in der Einleitung ausführlich dargestellt, ist eines der übergeordneten Ziel dieser Arbeit die Entwicklung eines effizienten Werkzeugs, mit dem reale SHM-Systeme, die auf der Verwendung hochfrequenter Wellenausbreitungsvorgänge basieren, simuliert werden können. Das in diesem Kapitel entwickelte Spektralelement soll daher im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden, um damit Wellenausbreitungsvorgänge in realitätsnahen, dünnwandigen Strukturen zu simulieren.

In vielen vorstellbaren Anwendungsbereichen derartiger SHM-Systeme wirken in Abhängigkeit der jeweiligen Situation unterschiedliche, quasistatische oder niederfrequente Lasten auf die Struktur ein. Bild 3.6 veranschaulicht zwei typische Lastfälle im Luftfahrtbereich. Bei einem voll betankten Flugzeug am Boden liegt durch die Gewichtskraft des Treibstoffs in den Flügeln eine erhebliche nach unten wirkende Last vor (links). Demgegenüber sorgen die Auftriebskräfte im Flug für erhebliche nach oben wirkende, resultierende Lasten (rechts).

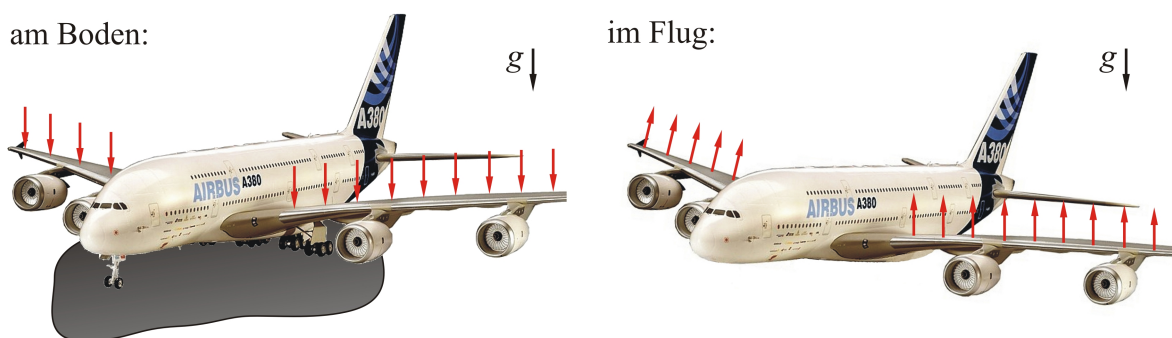


Bild 3.6: Veranschaulichung unterschiedlicher Lastfälle an einem Flugzeug; am Boden (links) und in der Luft (rechts)

Dadurch wirken beispielsweise im Bereich der Anschlüsse der Flügel an den Rumpf stark unterschiedliche quasistatische Lasten auf die Bauteile.

Ähnliches gilt für die Flügel einer Windkraftanlage, bei denen das Eigengewicht durch die Rotation zu einem ständigen Wechsel von Zug- und Druckbeanspruchungen führt. Zusätzlich treten bei der Rotation erhebliche Zentrifugalkräfte auf, die im Stillstand nicht auftreten. Ein in diesem Bereich anwendbares SHM-System muss daher entweder insensitive gegenüber diesem Effekt sein, oder es muss diesen Effekt mit berücksichtigen, um nicht nur aufgrund einer veränderten statischen Vorlast einen falschen Alarm zu verursachen.

Grundsätzlich haben statische Vorlasten einen Einfluss auf die Wellengeschwindigkeit geführter Wellen. Dieser wird beispielsweise bei Saiteninstrumenten ausgenutzt, die durch eine Veränderung der Vorspannung der Saiten gestimmt werden können. Von [LIVINGSTON *et al.* 1995] wird dieser Effekt eingesetzt, um Axiallasten von Balken aus Transversalschwingungen zu bestimmen.

Aus diesem Grund wird die vorliegende Elementformulierung an dieser Stelle erweitert, damit dieser Effekt in der Simulation nachgebildet werden kann. Dazu muss die in Abschnitt 3.4 getroffene Einschränkung, dass keine äußeren Kantenkräfte in der Schalenebene angreifen, formal aufgehoben werden. Diese äußeren Kräfte – siehe Gleichung (3.26) - liefern somit einen zusätzlichen Beitrag zur Elementsteifigkeit. Üblicherweise wird ihr Beitrag in der sogenannten geometrischen Steifigkeitsmatrix zusammengefasst, die folgendermaßen definiert werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{geo}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\mathbf{B}_{geo}(x, y)]^T \mathbf{L} \mathbf{B}_{geo}(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\mathbf{B}_{geo}(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{L} \mathbf{B}_{geo}(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dabei weist \mathbf{B}_{geo} eine ähnliche Struktur wie die schon bekannte Dehnungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} auf:

$$\mathbf{B}_{geo} = \left[\mathbf{B}_{geo11}, \dots, \mathbf{B}_{geoij}, \dots, \mathbf{B}_{geo(N+1)(N+1)} \right]. \quad (3.54)$$

Wie sich in Gleichung (3.26) erkennen lässt, treten im Zusammenhang mit diesen äußeren Lasten nur die Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ auf. Daher sind die einzelnen Beiträge \mathbf{B}_{geoij} nur in der ersten Spalte gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{B}_{geo\ ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

besetzt. Die Lastmatrix, in der die in der Ebene angreifenden Linienlasten, die die statischen Vorlasten bewirken, zusammengefasst werden, ist folgendermaßen aufgebaut:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{xx} & \hat{N}_{xy} \\ \hat{N}_{xy} & \hat{N}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Insgesamt ergibt sich hieraus also eine zusätzliche Steifigkeit für den z -Freiheitsgrad. Die Elementgesamtsteifigkeit lässt sich somit abschließend zu

$$\mathbf{K}_{ges}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} + \mathbf{K}_{geo}^{(e)}. \quad (3.57)$$

angeben.

4 Ein Simulationswerkzeug zur Modellierung von SHM-Systemen auf Basis hochfrequenter Wellen

Eine effiziente Simulation wellenbasierter SHM-Systeme ist nicht allein durch das in Kapitel 3 entwickelte Spektralelement möglich. Neben der grundlegenden Elementformulierung ist die Aufmerksamkeit auf die Vernetzung der Struktur sowie die Assemblierung und die Lösung des Gesamtsystems zu richten. Weitere wesentliche Aspekte sind die Berücksichtigung von Aktuatorik und Sensorik und nicht zuletzt auch eine realitätsnahe Nachbildung von möglichen Strukturschäden. Ein Beispiel für eine typische Substruktur eines modernen Flugzeugs, die mit dem in dieser Arbeit entwickelten Simulationswerkzeug untersucht werden kann, ist das in Bild 4.1 dargestellte, versteifte Panel.

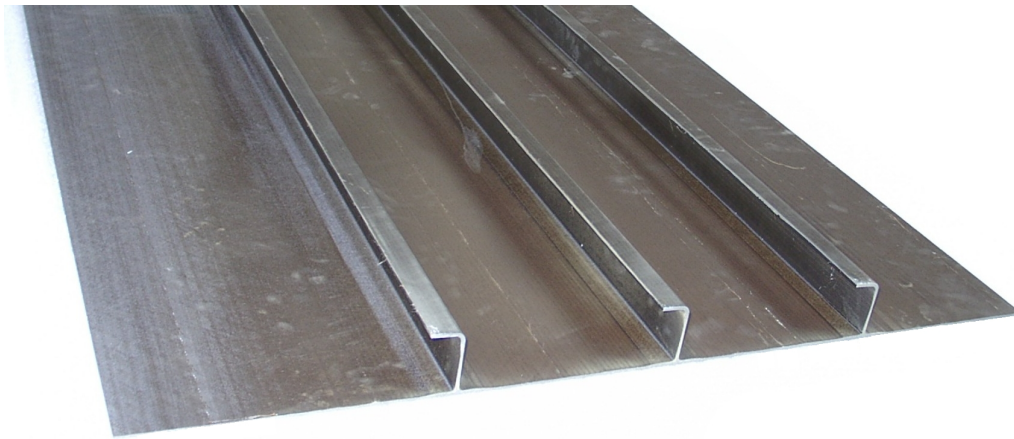


Bild 4.1: Versteiftes Panel aus CFK-Werkstoff; typische Substruktur im Flugzeugbau

Anhand eines SHM-Systems für ein derartiges Bauteil ist im Folgenden der gesamte Simulationsablauf von der Erstellung eines geeigneten Modells bis hin zur elektrischen Spannung am Sensor als Simulationsergebnis dargestellt. Es werden dazu sowohl die grundlegenden, verwendeten Algorithmen vorgestellt, als auch Details zur Implementierung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Software-Lösung aufgezeigt.

4.1 Erstellen eines Spektralelement-Gittermodells

Den ersten Schritt im Rahmen des Simulationsprozesses bildet die Zerlegung des gesamten Gebiets in geeignete Elemente, vergleiche Abschnitt 2.3.1. Für diesen Prozess, der auch als Vernetzung oder englischsprachig als „meshing“ bezeichnet wird, steht bei der Verwendung von konventionellen finiten Elementen mit niedriger Ansatzordnung (typischerweise linear oder quadratisch) eine Vielzahl frei oder kommerziell erhältlicher Programme zur Verfügung. Nach Kenntniss des Autors existieren jedoch zur direkten Erzeugung von Spektralelementgittern derzeit noch keine verfügbaren Software-Tools.

Während es für Strukturen mit sehr einfacher Geometrie - beispielsweise bei rechteckigen Platten - leicht möglich ist, das notwendige Elementgitter manuell zu erstellen, ist dies bei komplexeren Bauteilen wie der versteiften Schalenstruktur aus Bild 4.1 oder gekrümmten Strukturen nur mit erheblichem Aufwand möglich. Eine Behandlung dieses Problems ermöglicht die folgende Strategie: Mit Hilfe eines kommerziellen Preprocessors wird zunächst ein Elementgitter aus so genannten Masterelementen generiert. Diese Masterelemente definieren die Ränder der zu erzeugenden Spektralelemente, so dass in einem zweiten Schritt in dieses Masterelementgitter Spektralknoten implementiert werden, was die Geometrie der Spektralelemente vollständig definiert.

4.1.1 Generierung von Masterelementen

Zur Erzeugung des Masterelementgitters wird in dieser Arbeit das kommerzielle System ABAQUS-CAE eingesetzt. Die Bauteilgeometrie der betrachteten Struktur ist dort zunächst als Flächenmodell zu erstellen, wie in Bild 4.2 links dargestellt ist. Im Anschluss wird in dieses Geometriemodell ein Masterelementgitter gelegt. Schon dieser Schritt definiert durch die Größe der Masterelemente auch die Größe der Spektralelemente. Daher ist schon an dieser Stelle unbedingt auf eine optimale räumliche Diskretisierung - also eine bestmögliche Größe der Masterelemente - zu achten. Bei der hochfrequenten Wellenausbreitung wird die notwendige Diskretisierung in der Regel nur zu einem geringen Teil durch die Bauteilgeometrie beeinflusst, sondern das wesentliche Kriterium ist eine ausreichende Anzahl an Elementknoten pro minimaler im Anregungssignal enthaltener Wellenlänge. Grundlegende numerische Studien zu diesem Thema sind in Abschnitt 5.2 dargestellt.

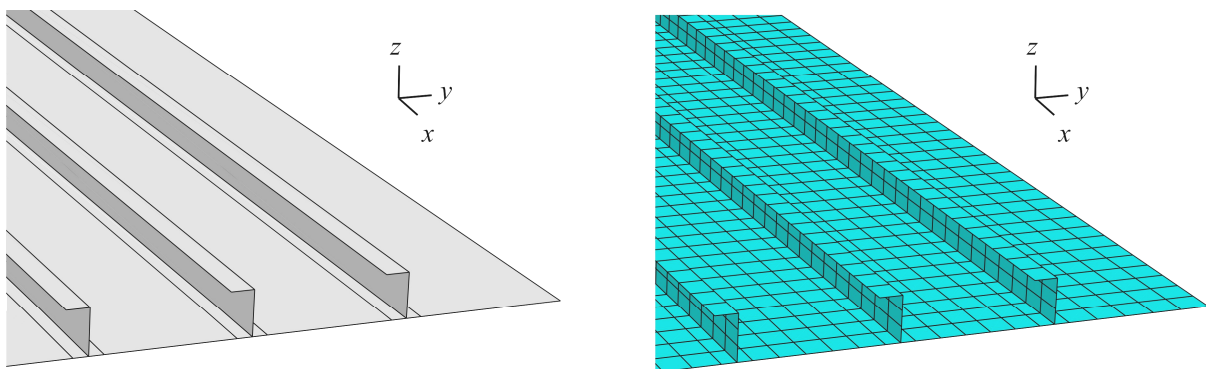


Bild 4.2: Teilansicht eines Geometriemodells (links) und eines Masterelement-Gittermodells eines versteiften Panels (rechts); erstellt mit ABAQUS-CAE

Bei lokal ebenen Strukturen, die keine stärker gekrümmten Ränder aufweisen, kann das Masterelementgitter aus linearen Vierknoten-Elementen, aufgebaut werden, wie in Bild 4.2 rechts dargestellt ist. Die Auswahl der Elementformulierung ist beliebig, da im Folgenden nur die

Knotenkoordinaten und die Zuordnung der Knoten zu den Elementen benötigt werden. Es ist allerdings unbedingt darauf zu achten, keine dreieckigen Masterelemente zu verwenden, da die Spektralelemente auf einem Tensorprodukt basieren, vergleiche Abschnitt 3.3. Bei nicht viereckigen Elementen lassen sich daher keine Spektralknoten implementieren.

Um die Geometrie lokal gekrümmter oder krummlinig berandeter Strukturen mit höherer Genauigkeit abbilden zu können, empfiehlt sich der Einsatz von achtknotigen Schalenelementen (SR8-Elementen) mit quadratischer Ansatzfunktion, wie in Bild 4.3 dargestellt ist.

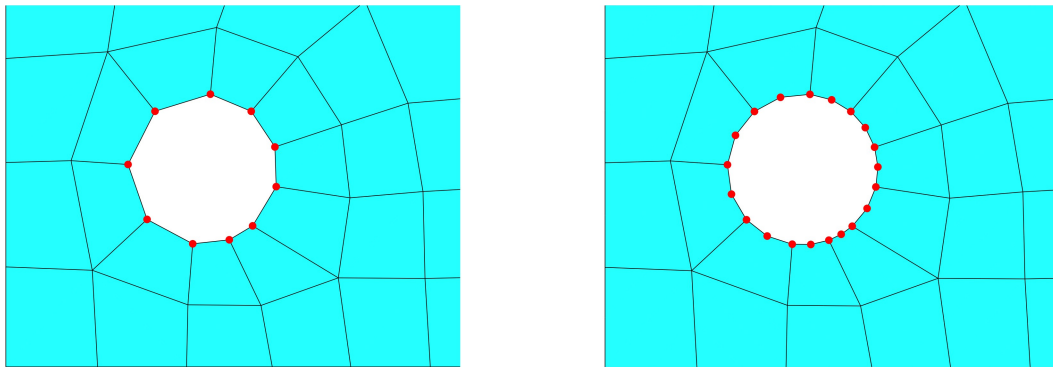


Bild 4.3: Verbesserte Approximation der Bauteilgeometrie am Beispiel eines Kreislochs durch quadratisch formulierte Elemente (rechts) gegenüber linearen Elementen (links)

Wie in Bild 4.3 links deutlich zu erkennen ist, führt eine Vernetzung mit linearen Masterelementen bei einem kreisförmigen Loch zu einer sehr groben Approximation. Dadurch kann das Reflexionsverhalten hochfrequenter Wellen unter Umständen nicht mit ausreichender Genauigkeit abgebildet werden. Durch die Verwendung von Masterelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen kann dies erheblich verbessert werden (Bild 4.3 rechts).

Das so erzeugte Masterelementgitter kann nun in Form einer Export-Datei ausgegeben werden, die die Koordinaten der Elementknoten in einem globalen Koordinatensystem, sowie die Zuordnung der Knoten zu den Elementen enthält. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann anstelle von ABAQUS-CAE auch ein beliebiges anderes System verwendet werden, das in der Lage ist, diese Daten in Form einer Export-Datei zur Verfügung zu stellen.

4.1.2 Implementierung der Spektralknoten

Basierend auf den übergebenen Masterelement-Gitterdaten lassen sich im nächsten Schritt die Spektralknoten in dieses Gitter integrieren. Dazu wird ausgenutzt, dass einerseits die Positionen der Masterelementknoten in einem globalen Koordinatensystem bekannt sind und andererseits die Koordinaten der Spektralknoten im Referenzelement ebenfalls festliegen. Im Allgemeinen wird dazu mit einer Abbildung gemäß

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_m} \Phi_i(\xi) \mathbf{x}_i \quad (4.1)$$

der Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Spektralknoten im Referenzelement mit den Koordinaten im globalen Koordinatensystem hergestellt. N_m bezeichnet die Anzahl der Knoten des jeweiligen Masterelements. Im Unterschied zu Gleichung (3.18) werden an dieser Stelle nicht die Formfunktionen der Spektral-Schalenelemente gemäß (3.17) verwendet, sondern es werden die Formfunktionen für lineare Vierknoten- bzw. quadratische Achtknoten-elemente eingesetzt, weil aus dem Masterelementgitter nur die entsprechende Anzahl an Knoten zur Verfügung steht. Im Falle von Vierknotenelementen lauten diese Formfunktionen:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= 0,25 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta), & \Phi_2(\xi) &= 0,25 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta), \\ \Phi_3(\xi) &= 0,25 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta), & \Phi_4(\xi) &= 0,25 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bei Achtknotenelementen können in Anlehnung an [BATHE 2002] folgende quadratischen Ansatzfunktionen verwendet werden:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= 0,25 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) - 0,5 \cdot \Phi_5(\xi) - 0,5 \cdot \Phi_8(\xi), \\ \Phi_2(\xi) &= 0,25 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) - 0,5 \cdot \Phi_5(\xi) - 0,5 \cdot \Phi_6(\xi), \\ \Phi_3(\xi) &= 0,25 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) - 0,5 \cdot \Phi_6(\xi) - 0,5 \cdot \Phi_7(\xi), \\ \Phi_4(\xi) &= 0,25 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) - 0,5 \cdot \Phi_7(\xi) - 0,5 \cdot \Phi_8(\xi), \\ \Phi_5(\xi) &= 0,5 \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta), & \Phi_6(\xi) &= 0,5 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta^2), \\ \Phi_7(\xi) &= 0,5 \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta), & \Phi_8(\xi) &= 0,5 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Auf eine grafische Darstellung dieser Funktionen wird hier verzichtet, da sie in vielen Standardwerken zur Finiten Elemente Methode angegeben sind, z.B. [HUGHES 1987]. Mit Hilfe dieser Abbildung lassen sich zu den bekannten Koordinaten der Spektralknoten im ξ -System die zugehörigen Koordinaten im \mathbf{x} -System auf Basis der vorgegebenen Masterelementknoten bestimmen. Bild 4.4 greift die in Bild 4.3 vorgestellten Gitter nochmals auf, wobei nun GLL-Knoten eingefügt sind. Es ist in Bild 4.4 ersichtlich, dass durch die Nutzung der höherwertigen Formfunktionen der quadratischen Ansätze, die Lage der GLL-Knoten wesentlich besser an eine gekrümmte Geometrie angepasst ist. Während die äußeren GLL-Knoten bei der Verwendung von vierknotigen Masterelementen wegen der linearen Ansätze nur auf die Verbin-

dingungsgerade zweier Eckknoten abgebildet werden, ist mittels der quadratischen Ansätze eine Abbildung auf gekrümmte Ränder möglich, Bild 4.4.

Diese Implementierung der Spektralknoten wird in einer Schleife über alle Masterelemente durchgeführt, so dass für jedes einzelne Element die globalen Koordinaten der Spektralknoten berechnet und abgespeichert werden.

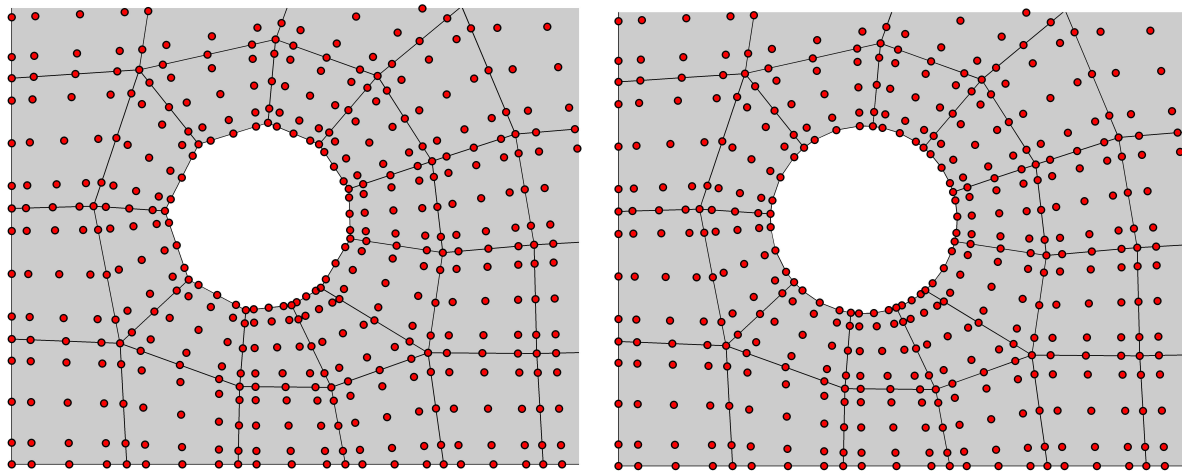


Bild 4.4: Resultierende Spektralelementgitter auf der Basis von linearen Masterelementen (links) und quadratischen Masterelementen (rechts)

Neben der Erstellung des Element-Gitters sind vor der Berechnung der Elementmatrizen für jedes Element weitere Größen zu definieren. Diese umfassen sowohl Materialparameter wie Dichte, Steifigkeits- und Dämpfungsparameter als auch Lagenaufbau und Dicke der Einzellaugen des jeweiligen Elements. Prinzipiell ist es möglich, diese Größen ebenfalls mit Hilfe eines kommerziell verfügbaren Präprozessors zu definieren, was im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt wird. Stattdessen werden diese Parameter erst im Anschluss an die Netzgenerierung innerhalb des Simulationstools zugewiesen. Diese Vorgehensweise erlaubt eine wesentlich höhere Flexibilität bei einer nachträglichen Änderung verschiedener Parameter. Beispielsweise müssen entsprechende Werte im Rahmen der Anpassung eines Modells an Messwerte (Modell-Updating, vergleiche auch Abschnitte 6.2 und 7.1) nicht nochmal auf der Ebene des Präprozessors geändert werden, sondern können leicht innerhalb des bestehenden Tools modifiziert werden.

4.2 Berechnung der Elementmatrizen und des Gesamtsystems

Basierend auf dem nun vorliegenden Knotengitter der Spektralelemente können die Elementmatrizen bestimmt werden. Dazu wird zunächst mit Hilfe der vorliegenden globalen Koordinaten der Elementknoten für jedes Element ein entsprechendes lokales Elementkoordinatensystem (EKS) bestimmt. Anhand der in Bild 4.5 dargestellten Skizze eines beliebig im Raum

liegenden, vierknotigen Masterelements lassen sich die Basisvektoren des lokalen Elementkoordinatensystems bestimmen.

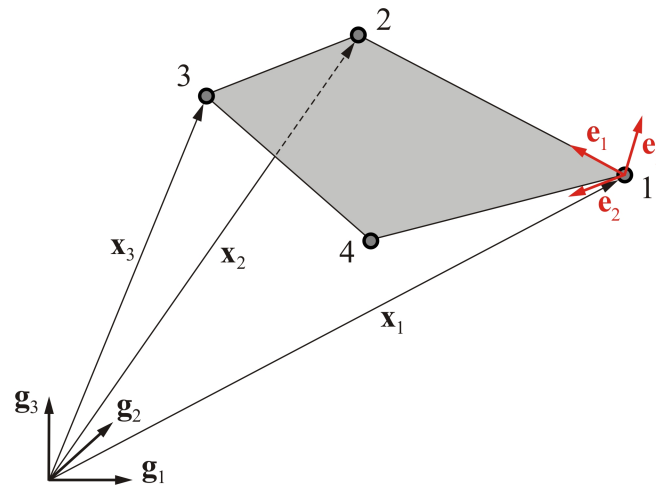


Bild 4.5: Veranschaulichung zur Definition eines lokalen Elementkoordinatensystems

Sie ergeben sich zu:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)}{|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)|}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \quad (4.6)$$

Mit Hilfe der so erzeugten Basisvektoren lässt sich zudem eine Transformation zwischen lokalem EKS und globalem Systemkoordinatensystem beschreiben. Durch eine Anordnung dieser Vektoren in einer Rotationsmatrix

$$\mathbf{R} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] \quad (4.7)$$

können die globalen Richtungen aus den lokalen Koordinaten mittels

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{R}\mathbf{x}_e \quad (4.8)$$

berechnet werden. Wie wir noch sehen werden, ist die Verschiebung des Ursprungs der Koordinatensysteme, die in (4.8) additiv zu berücksichtigen wäre, im weiteren Berechnungsverlauf nicht von Interesse und wird daher hier vernachlässigt.

Im lokalen EKS sind nun die Elementmatrizen gemäß der in Kapitel 3 angegebenen Vorschriften zu berechnen. Dabei ist folgender Sonderfall zu beachten: In Abschnitt 3.3 wurde bei der Approximation der Elementknoten im Rahmen des isoparametrischen Konzepts die Annahme getroffen, dass sowohl \mathbf{x} als auch ξ die Dimension Zwei aufweisen. Bei räumlich gekrümmten Schalen, deren Masterelemente in Form von Achtknotenelementen generiert werden, ist dies jedoch nicht der Fall, sondern die globalen Knotenkoordinaten liegen in drei Dimensionen vor: $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$. Gleichung (4.1) stellt in diesem Fall einen Zusammenhang zwischen den Spektralknoten aus dem zweidimensionalen Referenzgebiet $\xi = [\xi, \eta]^T$ und einem dreidimensionalen Gebiet $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ her. Die zur Berechnung der Elementmatrizen verwendete Jacobimatrix, vergleiche (3.24), hat dann die Form

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

ist somit also nicht mehr invertierbar. Für den Zusammenhang der Dehnungs-Verschiebungsmatrix \mathbf{B} mit den lokalen Koordinaten ist daher nicht mehr die Umkehrmatrix \mathbf{J}^{-1} , sondern die Pseudo-Inverse der Jacobimatrix zu verwenden, [CASSELMAN 2005]. Anstelle der in den Abschnitten 3.5 und 3.7 bei der Berechnung der Elementmassen-, Elementdämpfungs- und Elementsteifigkeitsmatrizen verwendeten Determinante der Jacobimatrix ist zudem $\sqrt{\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J})}$ als Maß für das Flächenverhältnis von Referenzelement und Spektralelement einzusetzen.

Im nächsten Schritt sind die globalen Systemmatrizen im Rahmen des Assembly-Prozesses aufzustellen. Dabei werden die Beiträge aller Elemente zunächst in das globale Systemkoordinatensystem transformiert und anschließend in den globalen Systemmatrizen aufsummiert. Es ist dabei zu beachten, dass bei der in Kapitel 3 vorgestellten Elementformulierung fünf Freiheitsgrade pro Elementknoten – drei Translationen und zwei Rotationen – verwendet werden. Für eine allgemeingültige Transformation werden jedoch sechs Freiheitsgrade benötigt. Bei den hier vorliegenden Elementen ist dazu also ein zusätzlicher rotatorischer Freiheitsgrad θ_z um die lokale z -Achse notwendig. Prinzipiell könnte dazu eine veränderte Formulierung der Membrananteile des Elements verwendet werden, die diesen Freiheitsgrad explizit beinhaltet, vergleiche beispielsweise [ZHU und ZACHARIA 1996] oder [FREY 1989]. Im Rahmen dieser Arbeit wird stattdessen jedoch eine von [BATHE und HO 1981] propagierte

Lösung bevorzugt, nach der auf Elementebene ein artifizierter Freiheitsgrad θ_z definiert wird, dem eine kleine, jedoch üblicherweise von Null verschiedene, künstliche Steifigkeit und Trägheit zugeordnet werden. Da für die Lösung des resultierenden Gleichungssystems ein explizites Verfahren eingesetzt wird, keine externen Lasten an lokalen θ_z -Freiheitsgraden eingeleitet werden und nur kleine Verformungen auftreten, ist nach [ZHU und ZACHARIA 1996] diese Strategie durchaus geeignet. Bei der Festlegung geeigneter, konkreter Werte ist im Allgemeinen ein Optimum zwischen zwei Bedingungen zu finden: Einerseits ist auf die Kondition der resultierenden Matrizen zu achten, was eine gewisse minimale Größe dieser Terme nach sich zieht, andererseits darf die Steifigkeit des Gesamtsystems nicht übermäßig verändert werden, wodurch die Terme nach oben begrenzt werden.

Mit diesem zusätzlichen Freiheitsgrad erhält der Vektor der Knotenfreiheitsgrade aus Gleichung (3.19) nun im lokalen EKS die Form

$$\mathbf{q}^{(e)} = [\hat{w}, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y, \hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}_z]^T. \quad (4.10)$$

Mit Hilfe einer Transformationsmatrix, die aus der in (4.7) definierten Rotationsmatrix gemäß

$$\mathbf{T}^{(q)} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 & R_{31} & R_{32} & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & 0 & 0 & R_{23} \\ R_{13} & 0 & 0 & R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{23} & 0 & 0 & R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & R_{31} & R_{32} & 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

aufgebaut werden kann, können die Knotenfreiheitsgrade in das globale Systemkoordinatensystem überführt werden:

$$\mathbf{q}_{GKS}^{(e)} = \mathbf{T}^{(q)} \mathbf{q}^{(e)}. \quad (4.12)$$

Aus dieser Transformationsmatrix lässt sich eine Matrix zur Transformation aller Freiheitsgrade eines Elements erzeugen:

$$\mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{(q)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{(q)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \mathbf{T}_{(N+1)^2}^{(q)} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Damit können nun ebenfalls die - um die entsprechenden Werte für den zusätzlich eingefügten Freiheitsgrad ergänzten - Elementmatrizen aus dem EKS in das globale Koordinatensystem transformiert werden:

$$\mathbf{K}_{GKS}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}^{T(e)}, \quad \mathbf{M}_{GKS}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{M}^{(e)} \mathbf{T}^{T(e)}, \quad \mathbf{C}_{GKS}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{T}^{T(e)}. \quad (4.14)$$

Addition aller Elementbeiträge der mittels (4.14) ins globale Koordinatensystem transformierten Matrizen liefert somit das resultierende lineare Gleichungssystem der Struktur:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (4.15)$$

In dieses Gleichungssystem können nun die vorliegenden Randbedingungen eingebaut werden.

4.3 Implementierung von Randbedingungen

Die Implementierung der Randbedingungen erfolgt grundsätzlich gemäß der in Abschnitt 2.3.4 kurz dargestellten Vorgehensweise analog zur FEM.

4.3.1 Dirichlet-RB: vorgegebene Verschiebungen

Dirichlet-Randbedingungen, in diesem Fall also vorgegebene Verschiebungen oder Auflagerbedingungen, können prinzipiell durch Streichung der entsprechenden Spalten und Zeilen der Systemmatrizen und die Berücksichtigung der vorgegebenen Verschiebung im Verschiebungsvektor eingebaut werden. Wie dies im Detail aussehen kann, ist beispielsweise in [WISSMANN und SARNES 2007] sehr detailliert beschrieben. Bei dieser Vorgehensweise, die zwar den Vorteil bietet, dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems reduziert, ist jedoch in der Regel eine aufwändige zusätzliche Indizierung bzw. Umspeicherung der Matrizen nötig. In der Regel entfallen nur verhältnismäßig wenige Freiheitsgrade, so dass die Reduktion der Systemgröße nicht erheblich ist. Daher wird auf eine Streichung verzichtet und die entsprechenden Gleichungen der Randbedingungen werden lediglich mit in das Gesamtsystem eingearbeitet. Im Rahmen des zur Systemlösung verwendeten zentralen Differenzenverfahrens (siehe Abschnitt 4.5) ist dazu keine weitere Veränderung der Systemmatrizen notwendig, sondern es sind nur die vorgegebenen zeitabhängigen Verschiebungen in die entsprechenden Gleichungen mit einzubeziehen. Die an diesen Stellen resultierenden unbekannt Kräfte sind im Rahmen der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen nicht von weitergehendem Interesse, weshalb sie nicht besonders bestimmt werden. Vorschriften für

ihre Berechnung sind beispielsweise in [WISSMANN und SARNES 2007] oder [BATHE 2002] angegeben.

4.3.2 Neumann-RB: externe Kräfte

Neumann-Randbedingungen, in diesem Fall also externe Kräfte, können direkt in Form des Kraftvektors auf der rechten Seite von (4.15) vorgegeben werden, ohne dass dazu weitere Modifikationen notwendig sind. Dazu sind vorgegebene externe Kräfte an die entsprechenden Positionen des Kraftvektors einzusortieren.

4.4 Piezoelektrische Aktuatoren und Sensoren

Während in den Kapiteln 3 und 4 bisher ausschließlich das mechanische Strukturmodell behandelt wurde, ist es zur vollständigen Modellierung eines wellenbasierten SHM-Systems notwendig, die Kopplung zwischen der Struktur und den piezoelektrischen Elementen, die als Aktuatoren oder Sensoren betrieben werden können, in den Simulationsprozess zu integrieren. Grundsätzlich sind dabei zwei Effekte zu berücksichtigen: Das Aufbringen der Piezoelemente führt einerseits zu zusätzlichen Termen in der Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix, andererseits ist die Kopplung der mechanischen mit den elektrischen Größen infolge des piezoelektrischen Effekts zu berücksichtigen. Grundsätzlich ist es möglich, diese Kopplung durch Elemente zu realisieren, die neben den mechanischen zusätzliche elektrische Freiheitsgrade aufweisen und somit zu einer Bewegungsgleichung der Form (2.77) führen. Finite Elemente für piezoelektrische Schalen werden unter anderem von [LAMMERING und MESECKE-RISCHMANN 2003] oder [TZOU und YE 1996] vorgestellt. Dieser Ansatz wird jedoch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt, da zur Modellierung der hochfrequenten Wellenausbreitung im Allgemeinen ein sehr feines Knotengitter notwendig ist, was sehr große Systemmatrizen hervorruft. Eine Verwendung zusätzlicher elektrischer Freiheitsgrade führt zu einem weiteren erheblichen Anwachsen dieser Matrizen, was eine schnelle und effiziente Lösung immer weiter erschwert. Stattdessen werden nur die zusätzlichen Beiträge der mechanischen Größen der Elemente zu den Systemmatrizen ermittelt und die elektromechanische Kopplung wird in Form von vereinfachten Aktuator- und Sensorgleichungen berücksichtigt.

4.4.1 Beiträge der piezoelektrischen Elemente zu den Systemmatrizen

Der Beitrag der mechanischen Eigenschaften der auf die Struktur applizierten piezoelektrischen Elemente könnte prinzipiell schon bei der Erstellung der Systemmatrizen berücksichtigt werden, indem bei der Berechnung der Elementmatrizen die entsprechenden Lagen des piezoelektrischen Materials mit einbezogen werden. Aus praktischen Erwägungen heraus ist es

jedoch sinnvoller, die zusätzlichen Beiträge separat von den Systemmatrizen der eigentlichen Struktur zu verwalten. Bei Untersuchungen zur optimalen Sensorpositionierung müssen in diesem Fall für jede mögliche Sensor-Konfiguration nur die Beiträge der wenigen applizierten Piezoelemente neu bestimmt werden. Eine erneute Berechnung der gesamten Systemmatrizen ist somit nicht notwendig, was einen wesentlichen Rechenzeitvorteil darstellt.

Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Piezoelemente (auch abkürzend als PZTs bezeichnet) sind entweder quadratische oder runde Elemente, die mit Hilfe eines Klebstoffs auf die Struktur appliziert werden. Dabei ist zu unterscheiden, ob PZTs mit einem sogenannten Umkontakt (UK) verwendet werden, die direkt auf die Struktur geklebt werden können, oder ob eine zusätzliche Kontaktierungslage zwischen PZT und Struktur verwendet wird. In Bild 4.6 sind diese beiden Konfigurationen schematisch dargestellt.

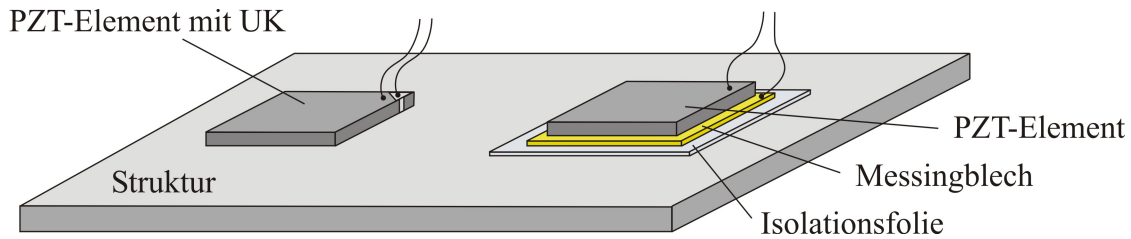


Bild 4.6: Schematische Darstellung von PZT-Elementen mit (links) und ohne Umkontakt (rechts)

Die Bestimmung der zusätzlichen Beiträge zu den Systemmatrizen verläuft weitgehend identisch zur Berechnung der Elementbeiträge der Struktur. Es sind jedoch nur die zusätzlich aufgebrauchten Lagen zu berücksichtigen. Im Falle quadratischer PZT-Elemente gilt daher für die Steifigkeiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{pzt}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\mathbf{B}(x, y)]^T \mathbf{D}_{pzt} \mathbf{B}(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\mathbf{B}(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{D}_{pzt} \mathbf{B}(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Matrix \mathbf{D}_{pzt} ist identisch zur Matrix \mathbf{D} aus (3.36) aufgebaut, enthält jedoch nur die Längs-, Biege- und Kopplungssteifigkeiten der zusätzlich applizierten Lagen:

$$(A_{ij}^{(pzt)}, B_{ij}^{(pzt)}, D_{ij}^{(pzt)}) = \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_{pzt}} \bar{Q}_{ij} \cdot (1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{L_{pzt}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \cdot (1, z, z^2) dz. \quad (4.17)$$

Da die Klebstoffschicht häufig sehr dünn ist, kann sie unter Umständen vernachlässigt werden, so dass bei der in Bild 4.6 links dargestellten Konfiguration nur eine zusätzliche Lage zu berücksichtigen ist. Durch eine zusätzliche Kontaktierung (Bild 4.6 rechts) ist der Effekt der

zusätzlichen Lagen jedoch deutlich ausgeprägt, so dass ihre Berücksichtigung zu empfehlen ist. Die Beiträge zur Massenmatrix ergeben sich für ein Piezoelement zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{pzt}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\boldsymbol{\Psi}(x, y)]^T \mathbf{H}_{pzt} \boldsymbol{\Psi}(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\boldsymbol{\Psi}(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{H}_{pzt} \boldsymbol{\Psi}(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

wobei die Matrix \mathbf{H}_{pzt} die zusätzlichen Trägheitsterme des Piezoelements enthält, die gemäß

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_{pzt}} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} \rho(z) dz \quad (4.19)$$

berechnet werden können und entsprechend (3.38) angeordnet werden.

Die zusätzliche Dämpfung, die insbesondere bei dem in Bild 4.6 rechts dargestellten Fall durch die Isolationsfolie signifikant sein kann, wird gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{pzt}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} [\boldsymbol{\Psi}(x, y)]^T \mathbf{C}_{mat}^{(pzt)} \boldsymbol{\Psi}(x, y) \det(\mathbf{J}) d\Omega \\ &\approx \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{w}_i \bar{w}_j [\boldsymbol{\Psi}(x_{ij}, y_{ij})]^T \mathbf{C}_{mat}^{(pzt)} \boldsymbol{\Psi}(x_{ij}, y_{ij}) \det(\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

bestimmt. Die Materialdämpfungsmatrix $\mathbf{C}_{mat}^{(pzt)}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{C}_{mat}^{(pzt)} = \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2} + h_{pzt}} \bar{\mathbf{C}}_{mat}^{(pzt)} dz = \sum_{k=1}^{L_{pzt}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{C}}_{mat}^{(pzt,k)} dz. \quad (4.21)$$

Gegenüber quadratischen PZTs weisen runde Piezoelemente in der Regel ein gleichmäßigeres Abstrahlverhalten auf. Mit den in dieser Arbeit vorgestellten viereckigen Spektralelementen gestaltet sich die ideale Nachbildung eines runden Piezoelements allerdings schwierig. Eine bessere Erfassung der Geometrie wäre durch die Nachbildung des Piezoelements mit mehreren Spektralelementen möglich. Dies würde jedoch die Verwendung von sehr kleinen Elementen im Bereich der PZTs bedeuten, was den numerischen Aufwand zur Lösung des resultierenden Gleichungssystems stark erhöht, vergleiche Abschnitt 4.5.2. Um dieses Problem zu umgehen, wird eine andere Strategie vorgeschlagen: Das Elementgitter wird derart angepasst, dass die Elementkantenlänge genau dem Durchmesser des verwendeten Piezoelements entspricht, aber bei der Berechnung der zugehörigen Matrizen werden einige Element-

beiträge an den Ecken weggelassen. Diese Vorgehensweise ist in Bild 4.7 dargestellt. Dazu wird das Element gemäß den Integrationsgewichten in Teilflächen unterteilt, die jedem Knoten bei der Integration zugeordnet sind. Wird die jeweilige Teilfläche zu über 50% vom runden PZT überdeckt, so werden die entsprechenden Werte an diesem Knoten mit berücksichtigt. Diese entsprechenden Knoten sind in Bild 4.7 rot eingefärbt. Ist dies nicht der Fall, werden die Einträge der Matrizen zu Null gesetzt. Das runde Piezoelement (dunkelgrau) wird somit in Form eines vieleckigen Polygons approximiert (hellgrau). Es ist deutlich erkennbar, dass eine größere Anzahl an GLL Knoten zu einer besseren geometrischen Approximation führt.

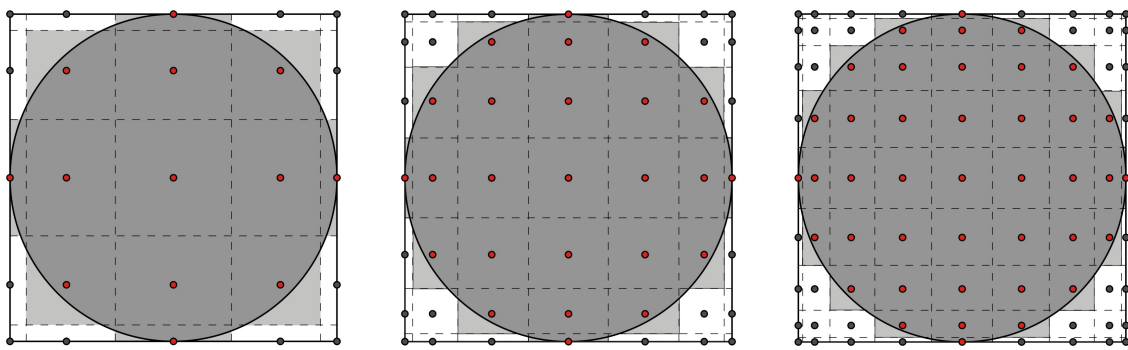


Bild 4.7: Annäherung der runden PZT Geometrie bei Verwendung von fünf (links), sieben (Mitte) und neun (rechts) GLL Knoten

Wie in Abschnitt 4.2 für die Elemente der Struktur dargestellt, können nun auch die zusätzlichen Beiträge der Piezoelemente assembliert werden. Dazu werden zunächst leere Sparse-Matrizen \mathbf{K}_{pzt} , \mathbf{C}_{pzt} und \mathbf{M}_{pzt} entsprechend der Größe der Systemmatrizen initialisiert. Die Freiheitsgrade derjenigen Elemente der Struktur, die an den Stellen der Piezoelemente liegen, definieren die Positionen, an denen die Piezoelementbeiträge einsortiert werden. Die resultierenden Gesamtmatrizen des Systems inklusive der Beiträge der Aktuatoren und Sensoren ergeben sich zu:

$$\mathbf{K}_{ges} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{pzt}, \quad \mathbf{C}_{ges} = \mathbf{C} + \mathbf{C}_{pzt} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{ges} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{pzt}. \quad (4.22)$$

Das vollständige, daraus resultierende Gleichungssystem hat dann die Form

$$\mathbf{K}_{ges} \mathbf{q} + \mathbf{C}_{ges} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{ges} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (4.23)$$

4.4.2 Aktuatorgleichungen

Unter Vernachlässigung elektrostatischer Effekte der piezoelektrischen Schichten lassen sich aus der angelegten elektrischen Spannung die resultierenden freien Dehnungen bestimmen.

Unter der Voraussetzung eines angelegten elektrischen Feldes nur in Dickenrichtung (3-Richtung in Bild 2.18) und $d_{31} = d_{32}$ ergeben sich diese zu

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{d_{31}}{h_{pzt}} U_{akt}(t). \quad (4.24)$$

$U_{akt}(t)$ bezeichnet dabei eine zeitabhängige angelegte Aktuatorspannung und h_{pzt} ist die Dicke des PZTs. Mit der weiteren Annahme identischer Elastizitätsmoduln in x - und y -Richtung (1- und 2-Richtung in Bild 2.18), lässt sich nach [BANKS *et al.* 1997] daraus die induzierte externe mechanische Spannung zu

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{E_1^{(pzt)}}{1-\nu^{(pzt)}} \varepsilon_{xx} \quad (4.25)$$

bestimmen. Das negative Vorzeichen resultiert dabei aus dem mechanischen Grundprinzip „Actio = Reactio“ für die induzierten Spannungen und die Materialspannungen. Durch Integration dieser Spannungen über die Dicke des PZTs lassen sich die induzierten Kräfte und Momente bestimmen:

$$N_{xx} = N_{yy} = \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_{pzt}} \sigma_{xx} dz, \quad (4.26)$$

$$M_{xx} = M_{yy} = \int_{\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}+h_{pzt}} \sigma_{xx} \cdot z dz. \quad (4.27)$$

Ineinander Einsetzen und Ausführen dieser Integration liefert somit

$$N_{xx}^{pzt}(t) = N_{yy}^{pzt}(t) = \frac{-E_1^{(pzt)} \cdot d_{31}}{1-\nu^{(pzt)}} U_{akt}(t), \quad (4.28)$$

$$M_{xx}^{pzt}(t) = M_{yy}^{pzt}(t) = -\frac{1}{8} \frac{E_1^{(pzt)}}{1-\nu^{(pzt)}} \left(4 \left(\frac{h_e}{2} + h_{pzt} \right)^2 - h_e^2 \right) \frac{d_{31}}{h_{pzt}} U_{akt}(t). \quad (4.29)$$

Um die resultierenden Gesamtlasten zu erhalten, sind die Kräfte bzw. Momente pro Längeneinheit aus (4.28) und (4.29) abschließend mit den entsprechenden Kantenlängen der Piezo-elemente zu multiplizieren. Zur Aufteilung in die entsprechenden Knotenlasten an den Kanten der Spektralelemente sind die Integrationsgewichte zu verwenden. Durch entsprechendes Ein-

sortieren gemäß der Systemfreiheitsgrade wird somit ein Kraftvektor $\mathbf{F}(t)$ als Anregungskraft für das resultierende Gleichungssystem (4.23) definiert.

Werden anstelle von rechteckigen Piezoelementen runde PZT-Scheiben eingesetzt, kann eine ähnliche Näherung wie schon in Abschnitt 4.4.1 verwendet werden. Wie in Bild 4.8 dargestellt, werden die entsprechenden Knotenlasten auf Element-Innenknoten verschoben, die der Geometrie der PZT-Scheibe bestmöglich entsprechen.

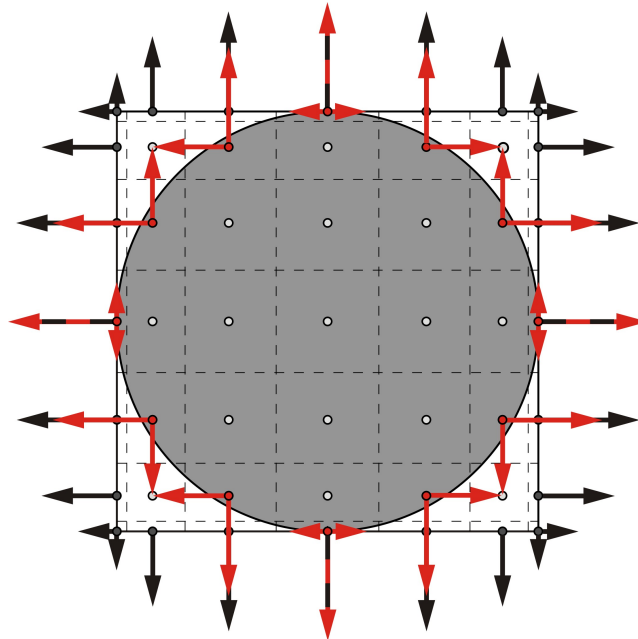


Bild 4.8: Knotenkräfte am Beispiel eines Spektralelements mit 7 GLL-Knoten pro Elementkante; schwarz für ein eckiges PZT-Element, rot für eine runde PZT-Scheibe

Die so erzeugten generalisierten Aktuatorkräfte bewirken ein absolut gleichförmiges Wellenabstrahlverhalten in die verschiedenen Raumrichtungen. Wie in [HUANG *et al.* 2008] durch Laser-Vibrometrie-Messungen für das Abstrahlverhalten der A_0 -Mode eines kreisförmigen PZTs festgestellt wird, ist dies jedoch nicht in idealer Weise der Fall. Es existiert eine Ungleichförmigkeit der abgestrahlten Amplitude über der Abstrahlrichtung, die zusätzlich frequenzabhängig ist. Sofern Messdaten über das Abstrahlverhalten des konkret verwendeten PZT-Typs vorliegen, kann dies durch Gewichtung der aus (4.28) und (4.29) hervorgehenden Linienlasten mit einem richtungsabhängigen Faktor in das Modell einbezogen werden. Bei allen in dieser Arbeit durchgeführten Studien liegen dazu jedoch keine Informationen vor, so dass eine gleichmäßige Abstrahlung angenommen wird.

4.4.3 Sensorgleichungen

Bei einer Verwendung als reiner Sensor kann davon ausgegangen werden, dass kein äußeres elektrisches Feld am PZT-Sensor anliegt. Damit vereinfacht sich die Sensorgleichung (2.67),

da der Summand auf der rechten Seite entfällt. Für einen flächigen Sensor kann darüber hinaus nur die dielektrische Verschiebung in z -Richtung abgegriffen werden (entspricht der 3-Richtung bei der Bezeichnung gemäß Bild 2.18). Sie ergibt sich aus (2.79) unter Berücksichtigung des ebenen Spannungszustandes für dünnwandige Strukturen zu

$$D_3 = d_{31} \cdot \sigma_{xx} + d_{32} \cdot \sigma_{yy} \quad (4.30)$$

Anstatt mit Hilfe der Spannungen lässt sich dieser Zusammenhang auch unter Verwendung der Dehnungen herstellen, die in der Regel einfacher aus den Verschiebungen bestimmt werden können:

$$D_3 = \bar{e}_{31} \cdot \epsilon_{xx} + \bar{e}_{32} \cdot \epsilon_{yy} \quad (4.31)$$

Die piezoelektrischen Spannungskoeffizienten \bar{e} sind durch die Beziehung

$$\bar{e} = C^E \mathbf{d}, \quad (4.32)$$

bei der C^E den Elastizitätstensor bei konstantem elektrischen Feld darstellt, mit den Ladungskonstanten verknüpft. Die entstehende Gesamtladung lässt sich allgemein als Integral

$$Q_{sens} = \int_{A_{pzt}} D_3 dA \quad (4.33)$$

ausdrücken. Indem der PZT als Kondensator aufgefasst wird, lässt sich aus dieser Ladung mit Hilfe der Kapazität C_{pzt} die Sensorspannung berechnen:

$$U_{sens} = \frac{Q_{sens}}{C_{pzt}} \quad (4.34)$$

In der praktischen Anwendung kann die Kapazität dabei entweder mittels eines entsprechenden Messgerätes bestimmt werden oder es kann gemäß [SIROHI und CHOPRA 2000] von einem Plattenkondensator ausgegangen werden, dessen Kapazität sich zu

$$C_{pzt} = \frac{\epsilon_{33}^\sigma \cdot A_{pzt}}{h_{pzt}} \quad (4.35)$$

ergibt. Aus (4.33) ergibt sich mit (4.31) die am Sensor resultierende Ladung demnach zu

$$Q_{sens} = -\iint_{A_{pzt}} F \, dx dy + z_k \iint_{A_{pzt}} G \, dx dy, \quad (4.36)$$

wobei in den Funktionen $F(x, y)$ und $G(x, y)$ die Membran- und Biegedehnungen gemäß

$$F(x, y) = e_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{32} \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad G(x, y) = e_{31} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + e_{32} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (4.37)$$

enthalten sind. Diese Dehnungen können basierend auf den Verschiebungen entweder mit Hilfe der Dehnungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} (vergl. Abschnitt 3.3) oder numerisch bestimmt werden. Die Sensor-Ausgangsspannung ergibt sich durch Einsetzen von (4.36) in (4.34).

Während bei rechteckigen PZTs jeweils über das gesamte Spektralelement zu integrieren ist, wird bei runden PZT-Scheiben wiederum nur derjenige Anteil der Dehnung berücksichtigt, der sich innerhalb der runden Scheibe befindet.

Dies wird ähnlich der Implementierung der Beiträge zu den Systemmatrizen durchgeführt, vergl. Abschnitt 4.4.1. An dieser Stelle wird jedoch der genaue Flächenanteil jeder signifikanten Teilfläche des Spektralelements an der runden Piezoscheibe bestimmt, siehe Bild 4.9.

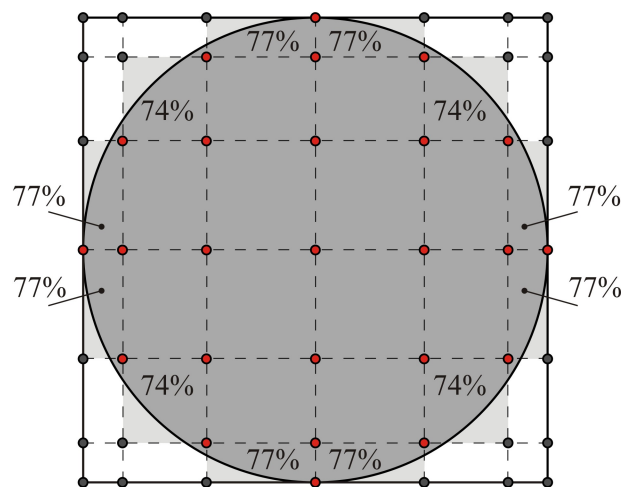


Bild 4.9: Beispiel zur Bestimmung der Teilladungen bei runden PZT-Scheiben

Die für den jeweiligen Bereich errechnete Teilladung wird vor der Integration mit diesem Flächenanteil gewichtet. Die in Bild 4.9 weiß dargestellten Teilflächen haben entweder keinen, oder einen nur sehr geringen Beitrag zur Sensorladung, so dass sie nicht in die Berechnung einbezogen werden. Alle dunkelgrauen Flächen ohne Prozentangabe werden vollständig berücksichtigt.

Bei der Herleitung der Aktuator- und der Sensorgleichungen wurde bislang davon ausgegangen, dass die Dehnungen innerhalb des Piezoelements den Dehnungen innerhalb der Struktur

entsprechen. Dies ist in der Realität durch Verluste in der Klebstoffschicht zwischen PZT-Element und Struktur nicht der Fall. Dies wird auch als „shear-lag“ Effekt bezeichnet. [SIROHI und CHOPRA 2000] stellen dazu eine analytische Lösung vor, die für den Spezialfall reiner Biegung den Zusammenhang zwischen Piezo- und Strukturdehnung angibt:

$$\frac{\varepsilon_{pzt}}{\varepsilon_{str}} = \frac{\cosh(\Xi \cdot l_{pzt}) - 1}{\sinh(\Xi \cdot l_{pzt})} \cdot \sinh(\Xi \cdot x) - \cosh(\Xi \cdot x) + 1, \quad (4.38)$$

wobei gilt:

$$\Xi = \sqrt{\frac{G_k}{E_1^{(pzt)} \cdot h_{pzt} \cdot h_k} + \frac{3 \cdot l_{pzt} \cdot G_k}{E \cdot l_e \cdot h_e \cdot h_k}}. \quad (4.39)$$

Als wesentliche Einflussparameter werden die Dicke h_k und der Schubmodul G_k der Klebstoffschicht identifiziert. Die Verluste lassen sich dabei durch einen möglichst steifen Kleber und eine möglichst dünne Klebstoffschicht minimieren. Im Rahmen des hier vorgestellten Simulationswerkzeugs wird nicht versucht, diesen Effekt analytisch möglichst genau nachzubilden, da in der Praxis oft nur unzureichende Informationen über den Schubmodul sowie die exakte Schichtdicke des Klebers vorliegen. Auch mit einer analytisch weitgehend exakten Modellierung lassen sich somit gemessene Werte nicht unbedingt mit hoher Genauigkeit reproduzieren.

Neben diesen Verlusten weisen PZT-Elemente die Charakteristik auf, die unterschiedlichen Moden in Abhängigkeit von der Frequenz des Anregungssignals mit unterschiedlicher Amplitude anzuregen. Das aus [STASZEWSKI *et al.* 2004] entnommene Bild 4.10 zeigt die Abhängigkeit der gemessenen Maximalamplitude der S_0 - und A_0 -Mode von der Anregungsfrequenz für ein auf einer 2mm dicken Aluminiumplatte appliziertes Piezoelement. Der Verlauf derartiger Kurven ist von der Relation zwischen den geometrischen Abmessungen und Materialparametern der PZTs in Bezug zur Dicke und den Materialparametern der Struktur abhängig.

Ein Modell zur Vorhersage derartiger Kurven stellt Giurgiutiu für runde PZTs auf einer Aluminiumplatte vor und führt an einem Beispiel auch eine experimentelle Verifizierung durch [GIURGIUTIU 2005]. Das Modell bildet die experimentell ermittelten Verläufe qualitativ gut ab. Trotz vergleichsweise hoher Komplexität wird eine vollständige, quantitative Erfassung jedoch nicht erreicht.

Um diese beiden Effekte - Verluste in der Klebstoffschicht und frequenzabhängige Amplitudencharakteristik - innerhalb des hier vorliegenden Simulationsprogramms nachzubilden,

werden zwei skalare Vorfaktoren ζ_s und ζ_A definiert, mit denen die Aktuatorgleichungen (4.28) und (4.29) sowie die Terme für Membran- und Biegeanteil der Sensorgleichung (4.36) multipliziert werden können, um die Amplituden von S_0 - und A_0 -Mode an Messdaten anpassen zu können.

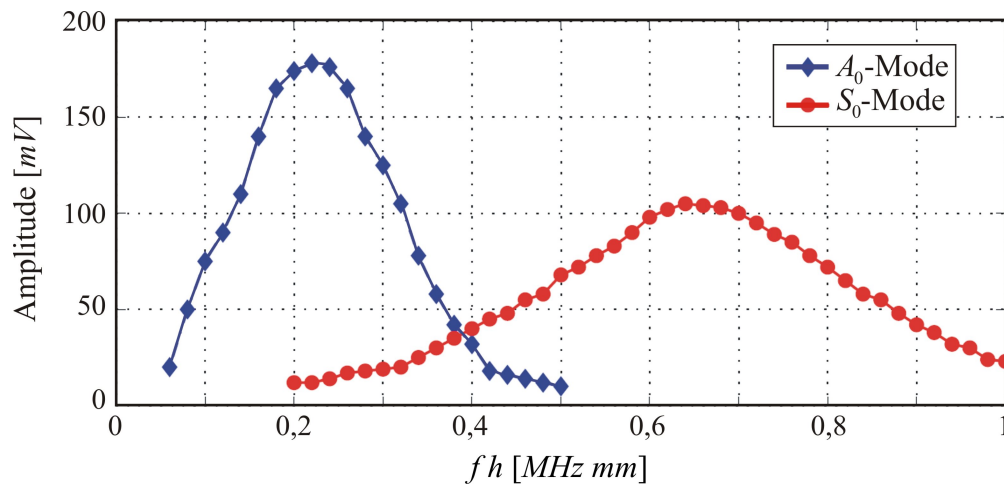


Bild 4.10: Beispielhafter Verlauf der Maximalamplitude von A_0 - und S_0 -Mode in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz; aus [Staszewski et al. 2004].

Diese Faktoren werden in dieser Arbeit ausschließlich im Rahmen von Vergleichen zwischen Simulations- und Messdaten verwendet, wobei die genauen Zahlenwerte bei allen Anwendungsbeispielen in Kapitel 7 detailliert dokumentiert sind. Bei allen rein numerischen Untersuchungen werden beide Faktoren Eins gesetzt.

4.5 Lösung des resultierenden Gleichungssystems

An dieser Stelle liegen nun alle Elemente des Gleichungssystems (4.23) in finaler Form vor: sowohl die Systemmatrizen, als auch die zeitabhängigen, generalisierten, äußeren Kräfte sind definiert. Abschließend wird daher in diesem Abschnitt das Lösungsverfahren des resultierenden Gesamtsystems vorgestellt. Im hier betrachteten Anwendungsfall der Simulation hochfrequenter Wellenausbreitungsvorgänge ist zu bedenken, dass in aller Regel nur ein kurzes Zeitintervall in der Größenordnung einer Millisekunde zu simulieren ist. Daher können explizite Verfahren zur Lösung eingesetzt werden, weil auch bei kleiner Zeitschrittweite die Gesamtanzahl der benötigten Schritte nicht zu groß wird. Wie in Kapitel 3 vorgestellt, ergeben sich für zur Schalenmittelfläche symmetrische Lamine diagonale Massen- und Dämpfungsmatrizen. Um diese Eigenschaft optimal auszunutzen, wird das zentrale Differenzenverfahren, vergleiche beispielsweise [BATHE 2002], Kapitel 9, verwendet. Bei impliziten Verfahren ist demgegenüber immer eine effektive Steifigkeitsmatrix zu zerlegen, so dass der Vorteil der diagonalen Massenmatrix nicht ausgenutzt werden kann.

4.5.1 Zentrales Differenzenverfahren

Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die Annahme der Beschleunigung in der Form

$$\ddot{\mathbf{q}}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{q}^t + \mathbf{q}^{t+\Delta t}). \quad (4.40)$$

Die hochgestellten Indizierungen kennzeichnen dabei den aktuellen Zeitschritt (t), den vorherigen Zeitschritt ($t - \Delta t$) und den neuen Zeitschritt ($t + \Delta t$). Δt entspricht der Zeitschrittweite. Eine Approximation der Geschwindigkeit mit gleicher Fehlerordnung ist durch

$$\dot{\mathbf{q}}^t = \frac{1}{2\Delta t} (-\mathbf{q}^{t-\Delta t} + \mathbf{q}^{t+\Delta t}) \quad (4.41)$$

gegeben. Einsetzen dieser Annahmen (4.40) und (4.41) in die Bewegungsgleichung (4.23) liefert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{ges} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}_{ges} \right) \mathbf{q}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t - \left(\mathbf{K}_{ges} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{ges} \right) \mathbf{q}^t \\ - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{ges} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}_{ges} \right) \mathbf{q}^{t-\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Diese Gleichung kann nach der noch unbekanntem Verschiebung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aufgelöst werden. Im allgemeinen Fall ist dazu zunächst einmal eine Dreiecksfaktorenzerlegung der so genannten effektiven Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}$ durchzuführen:

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{ges} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}_{ges} = \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{L}}^T. \quad (4.43)$$

Dazu wird häufig die Cholesky-Zerlegung verwendet. Für jeden Zeitschritt ist zunächst der Vektor der effektiven Lasten zum Zeitpunkt t gemäß

$$\hat{\mathbf{F}}^t = \mathbf{F}^t - \left(\mathbf{K}_{ges} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{ges} \right) \mathbf{q}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{ges} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}_{ges} \right) \mathbf{q}^{t-\Delta t} \quad (4.44)$$

zu berechnen. Damit lassen sich die Verschiebungen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aus

$$\hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{L}}^T \mathbf{q}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{F}}^t. \quad (4.45)$$

ermitteln.

Durch Einsetzen in (4.40) und (4.41) lassen sich dann bei Bedarf die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten bestimmen. Bei diesem Verfahren ist aus Stabilitätsgründen ein verhältnismäßig kleiner Zeitschritt nötig, vergleiche Abschnitt 4.5.2. Daher ist die Methode nur dann numerisch effizient, wenn die Lösung des Systems (4.45) zu jedem Zeitschritt nur sehr wenig Rechenaufwand erfordert. Dies ist für allgemeine Matrizen bei den hier auftretenden großen Systemen nicht der Fall. Im Falle von symmetrisch zur Schalenmittelfläche aufgebauten Laminaten kann jedoch wegen der Diagonalgestalt der Massen- und Dämpfungsmatrix eine Dreieckszerlegung von $\hat{\mathbf{M}}$ in Verbindung mit einer anschließenden Lösung eines Systems der Gestalt (4.45) vermieden werden. Stattdessen wird die Verschiebung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$, ausgehend von (4.42) mit der Definition der effektiven Lasten gemäß (4.44), komponentenweise nach der Vorschrift

$$q_i^{t+\Delta t} = \frac{\hat{F}_i^t}{\left(\frac{1}{\Delta t^2} M_{ii} + \frac{1}{2\Delta t} C_{ii} \right)} \quad (4.46)$$

berechnet. Damit entfällt jegliche rechenaufwendige Matrixoperation.

Durch das einseitige Aufbringen eines Piezoelements auf die Struktur wird an diesen Stellen die Symmetrie des resultierenden Verbundes gestört. Dadurch kommt es zu zusätzlichen Kopplungen innerhalb der Massenmatrix, wie aus den Gleichungen (3.37) und (3.38) hervorgeht. Es ist dabei jedoch festzustellen, dass es immer nur zu einer Kopplung zwischen Membran- und Biegeanteilen an einem Knoten kommt, nicht aber zu einer zusätzlichen Kopplung zwischen unterschiedlichen Knoten. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, die Lösung des gesamten Gleichungssystems aufzuteilen: Für diejenigen Zeilen und Spalten der Massen- und Dämpfungsmatrix, die Nebendiagonalelemente aufweisen, muss das Gleichungssystem (4.45) mit Hilfe der Matrixzerlegung gelöst werden. Für alle anderen Teile kann Gleichung (4.46) verwendet werden. Da in der Praxis üblicherweise nur eine geringe Anzahl von Aktuatoren bzw. Sensoren verwendet wird, ist der Anteil des Gesamtsystems, der mit Hilfe der Matrixzerlegung gelöst werden muss, wesentlich kleiner als der Rest des Systems. Der Rechenaufwand bleibt somit begrenzt. In Abschnitt 5.5 werden numerische Studien zum Einfluss der durch die Sensorik eingebrachten Koppelterme durchgeführt, um den Mehraufwand in Relation zur Verbesserung der Genauigkeit setzen zu können und somit dem Anwender die Möglichkeit zu eröffnen, unter Umständen gezielt auf die Kopplung zu verzichten.

4.5.2 Numerische Stabilität

Der Nachteil des zentralen Differenzenverfahrens besteht in der Tatsache, dass es sich hierbei um einen nur bedingt stabilen Algorithmus handelt, bei dem die Zeitschrittweite Δt kleiner als ein kritischer Wert Δt_{\max} gewählt werden muss. Diese kritische, maximale Zeitschrittweite darf im Allgemeinen ein bestimmtes Verhältnis zur räumlichen Diskretisierung („Raumschrittweite“) nicht überschreiten. Die Kopplung ist dabei über die maximale Wellengeschwindigkeit gegeben und kann in Form der so genannten Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung angegeben werden [SMITH 1985]:

$$\Delta t_{\max} = \frac{\alpha_{CFL}}{\sqrt{d}} \cdot \frac{\Delta x_{\min}}{\bar{v}_{\max}} = \beta_{CFL} \cdot \frac{\Delta x_{\min}}{\bar{v}_{\max}}. \quad (4.47)$$

Hierin bedeuten Δx_{\min} den minimalen Abstand zweier Gitterknoten, v_{\max} die Ausbreitungsgeschwindigkeit der schnellsten Welle, α_{CFL} die Courant-Konstante und d die Dimension des Gitters. Bei zweidimensionalen Elementen gilt somit $d = 2$. Für die Konstante α_{CFL} gilt $0 < \alpha_{CFL} \leq 1$, ihr genauer Wert ist jedoch stark vom betrachteten Problem abhängig und kann daher nicht allgemein angegeben werden. In der Konstanten β_{CFL} ist der Einfluss der Gitterdimension mit berücksichtigt. Anschaulich lässt sich (4.47) so auffassen, dass die schnellste Welle sich im Gitter während eines Zeitschritts nicht weiter ausbreiten darf als der α_{CFL} -te Teil der halben Gitterzellendiagonale. Wird dieses Kriterium verletzt, kommt es zu Instabilität, die dazu führt, dass sich kleine Störungen - beispielsweise Rundungsfehler - über alle Grenzen aufschaukeln und somit die Lösung unbrauchbar machen.

Dieses Problem könnte natürlich umgangen werden, indem die Zeitschritte noch wesentlich kleiner gewählt werden, als von (4.47) gefordert. Im Sinne einer möglichst effizienten Simulation ist davon jedoch unbedingt abzusehen, da der Rechenaufwand linear mit der Anzahl der benötigten Zeitschritte ansteigt. Daher ist anzustreben, die Zeitschrittweite möglichst nahe an dem kritischen Wert Δt_{\max} zu wählen. In Abschnitt 5.3 wird im Rahmen von numerischen Tests gezielt dieses Stabilitätskriterium verletzt. Bei den in dieser Arbeit typischerweise verwendeten Anregungssignalen lässt sich sehr leicht zwischen einer korrekten und einer aufgrund der numerischen Instabilität verursachten falschen Lösung unterscheiden. Dadurch besteht keine Gefahr, eine falsche Lösung als vermeintlich korrekt einzustufen.

Der aus (4.47) folgende, lineare Zusammenhang der maximal zulässigen Zeitschrittweite mit dem minimalen Knotenabstand impliziert auch Konsequenzen für die räumliche Diskretisie-

rung. Dies bezieht sich einerseits auf die Größe der verwendeten Spektralelemente, die möglichst gleichmäßig gewählt werden, beziehungsweise nicht einzelne, wesentlich kleinere Elemente enthalten sollten. Da die maximale Zeitschrittweite nur vom kleinsten Knotenabstand des Gesamtsystems festgelegt wird, führt schon ein sehr kleines Element zu einem kleineren Zeitschritt und somit zu einer wesentlichen Erhöhung des Rechenaufwandes. Neben der Elementgröße ist auch die Diskretisierung innerhalb der Elemente zu beachten. Wie schon in Abschnitt 3.3 erwähnt, führt eine Erhöhung der Knotenanzahl pro Elementkante zu einer Art „Clustering“, wobei sich die Knoten an den Elementecken anhäufen. Dadurch wird der minimale Knotenabstand bei zunehmender Knotenzahl pro Elementkante sehr klein. In der praktischen Anwendung bedeutet dies, dass von der Verwendung von mehr als 9 bis 10 Knoten pro Elementkante abgesehen werden sollte. Bei Bedarf ist stattdessen eher die Elementgröße zu verringern.

An dieser Stelle ist die Darstellung aller notwendigen Elemente eines maßgeschneiderten Simulationswerkzeugs zur Modellierung von SHM-Systemen auf der Basis von hochfrequenten Wellenausbreitungsvorgängen für eine ungeschädigte Struktur abgeschlossen. Mit den vorgestellten Verfahrensschritten lässt sich innerhalb einer Modell-Struktur die Anregung von Wellen durch Piezoaktuatoren mit einem vorgegebenen Anregungssignal, die Ausbreitung dieser Wellen im Bauteil und die Erfassung dieser Wellen an Sensoren nachbilden. Noch nicht näher betrachtet wurde jedoch die Interaktion der Wellen mit möglichen Strukturschäden.

4.6 Modellierung von Schädigungen

Das essentiellste Merkmal eines SHM-Systems ist die Fähigkeit, eine Aussage über den „Gesundheitszustand“ der betrachteten Struktur zu machen. Mögliche Schädigungen sollen detektiert und nach Möglichkeit auch lokalisiert und quantifiziert werden (vergl. Abschnitt 1). Diese Fähigkeit ist daher das ultimative Qualitätskriterium zur Bewertung eines derartigen Systems. Um das in dieser Arbeit vorgestellte Werkzeug sinnvoll im Rahmen der Entwicklung von SHM-Systemen einsetzen zu können, ist als letzter wesentlicher Baustein eine Modellbildung einiger möglicher Schädigungsfälle vorzunehmen. Nur durch die Betrachtung der Interaktion mit Schädigungen kann beispielsweise eine vergleichende Bewertung verschiedener Sensorkonfigurationen durchgeführt werden.

Die Modellierung der möglichen Schädigungen ist einerseits möglichst realitätsnah zu gestalten, um praktischen Nutzen zu gewährleisten, andererseits darf jedoch auch die Effizienz im Hinblick auf akzeptable Rechengeschwindigkeit nicht außer Acht gelassen werden.

Bei den betrachteten Strukturen treten grundsätzlich unterschiedliche Arten von Schäden auf: Risse sind vor allem bei zyklisch belasteten metallischen Bauteilen zu beobachten während moderne Faserverbundwerkstoffe, also CFK oder GFK, andere Versagensmechanismen aufweisen: Faserbruch und Matrixbruch. Eine spezielle Form des Matrixbruchs ist die so genannte Delamination, bei der es zur Ablösung von Schichten im Inneren der Struktur kommt. Die Ablösung von ursprünglich miteinander verklebten Einzelteilen, beispielsweise Versteifungsrippen auf einer Grundplatte, wird auch mit Debonding bezeichnet.

Die einfachste vorstellbare Modellierung einer Schädigung, die immer eine lokale Schwächung des Bauteils bedeutet, kann durch eine Reduktion der Systemsteifigkeit im Bereich der Schädigung erfolgen. Bei isotropem Material kann beispielsweise der effektive Elastizitätsmodul eines oder mehrerer Elemente verringert werden. Diese Vorgehensweise wird auch in der Literatur häufig verwendet. Insbesondere lassen sich bei modaldatenbasierten Verfahren gute Ergebnisse erzielen, vergleiche [BOHLE 2005], [RICLES und KOSMATKA 1992] und [TEUGHEL *et al.* 2002]. Die Realität wird dabei jedoch nur ungenau nachgebildet. Einige spezifische Merkmale, die bei der Interaktion hochfrequenter Lamb-Wellen mit unterschiedlichen Schadenstypen in der Realität auftreten, können deshalb nicht vollständig erfasst werden. Vergleiche dazu die Untersuchungen in Abschnitt 5.7. Um qualitative und quantitative Evaluation von SHM-Systemen durchführen zu können, müssen wesentliche, spezifische Effekte verschiedener Schadenstypen ausreichend genau nachgebildet werden.

4.6.1 Modellierung von Rissen

Zur Modellierung von Rissen existiert in der Literatur eine Vielzahl von Ansätzen, die eine stark unterschiedliche Komplexität aufweisen. Insbesondere zur Simulation von Risswachstumsvorgängen werden dabei sehr detaillierte bruchmechanische Modelle verwendet, vergleiche beispielsweise [RADAJ und VORMWALD 2007]. Dabei wird zwischen Modellen zur Kurzrissausbreitung, die teilweise auch die Mikrostruktur des Werkstoffs einbeziehen, sowie Konzepten zur Beschreibung langer Risse, wie zum Beispiel das *K*-Konzept, unterschieden.

Der Anspruch eines Rissmodells im Rahmen der in dieser Arbeit betrachteten SHM-Systeme ist es jedoch nicht, das Wachstum eines Risses beschreiben zu können, sondern den Einfluss von Rissen auf die Wellenausbreitung nachzubilden. Die dabei betrachteten Risslängen für eine typische Flugzeug-Substruktur können in der Größenordnung von wenigen Millimetern bis hin zu einigen Zentimetern liegen. Ziel dieser Arbeit ist daher nicht die Implementierung eines komplexen, bruchmechanischen Rissmodells, sondern es geht vor allem darum, das Beugungs- und Reflexionsverhalten einer Materiewelle am Riss verhältnismäßig realitätsnah

abzubilden. Ein wesentliches Kriterium ist dabei die Richtungsabhängigkeit der Reflexion bzw. der Transmission. Während bei einer parallel zu einem geraden Riss laufenden Welle kaum Änderungen auftreten (Bild 4.11 rechts) treten bei einem annähernd senkrechten Auftreffen erhebliche Reflexionen auf (Bild 4.11 links).

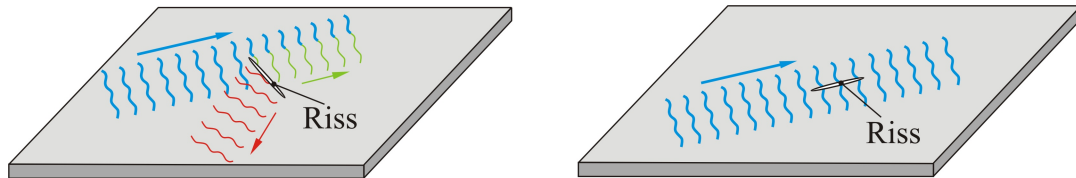


Bild 4.11: Eine Welle trifft auf einen annähernd senkrecht (links) sowie auf einen parallel zur Ausbreitungsrichtung liegenden Riss (rechts)

Dieses experimentell zu beobachtende Verhalten lässt sich durch eine Schwächung des Elastizitätsmoduls eines Elements kaum modellieren, da ein Spektralelement immer eine erhebliche Ausdehnung in beide Raumrichtungen aufweist. Eine einfache, aber zu diesem Zweck wirkungsvolle Modellierung gestaltet sich derart, dass einige Randknoten von benachbarten Spektralelementen voneinander getrennt werden. Dies kann beispielsweise schon bei der Erzeugung des Masterelementgitters durch Verschiebung eines Eckpunktes eines Masterelements geschehen, so dass bei der Erzeugung der Spektralknoten automatisch eine Trennung vorliegt. Ein derartig eingebrachtes Rissmodell ist in Bild 4.12 links schematisch dargestellt. Bei quadratisch formulierten Masterelementen ist es mit dieser Vorgehensweise auch möglich, den elliptischen Verlauf, den ein gerader, geöffneter Riss in der Realität aufweist, teilweise nachzubilden, wie in Bild 4.12 rechts dargestellt ist.

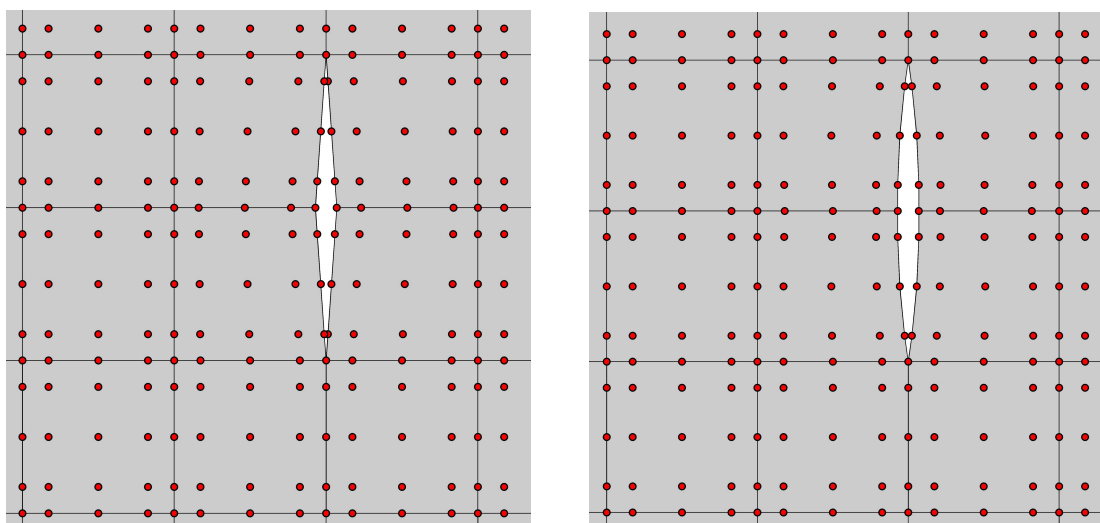


Bild 4.12: Modellierung eines Risses mit Hilfe von linearen (links) oder quadratisch formulierten Masterelementen (rechts)

Da die Rissöffnung in der Realität nicht so groß ist wie bei der schematischen Darstellung in Bild 4.12, ist der Unterschied des Verlaufs der Rissfront in der Anwendung nicht sehr ausgeprägt, so dass die Modellierung mit linearen Masterelementen ausreicht. Eine spezielle Verfeinerung des Elementnetzes an den Rissspitzen wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt, weil eine möglichst genaue Bestimmung des Spannungen in der Nähe der Rissspitzen, die eine solche Verfeinerung notwendig erscheinen lässt, nicht Untersuchungsziel dieser Arbeit ist. Eine gewisse Verfeinerung des Knotengitters ergibt sich automatisch durch die Anordnung der GLL-Knoten, die an den Ecken der Elemente eine höhere Dichte aufweisen, vergleiche auch Bild 4.12.

Bei allen in dieser Arbeit vorgestellten Simulationen mit einem Schaden in Form eines Risses wird zudem angenommen, dass der Riss geöffnet ist und es nicht zu Kontakt zwischen den Rissflanken kommt, weshalb keine Kontaktbedingungen implementiert werden.

4.6.2 Modellierung von Delaminationen

Der Begriff Delamination bezeichnet im Allgemeinen eine Ablösung von Schichten innerhalb eines Werkstoffverbundes. Da in der Praxis verwendete Faserverbundwerkstoffe in der überwiegenden Mehrzahl aus mehreren verbundenen Einzelschichten bestehen, bilden Delaminationen dabei einen sehr häufig auftretenden Schadensfall. Im Gegensatz zu Rissen in metallischen Werkstoffen, die in vielen Fällen an der Bauteiloberfläche erkennbar sind, ist eine Delamination zudem in vielen Fällen an der Oberfläche des Bauteils kaum feststellbar. Die bei der in Bild 4.13 schematisch dargestellten Delamination vergrößert eingezeichnete Spaltdicke zwischen den getrennten Lagen ist in der Realität unter Umständen nur sehr gering oder nicht vorhanden.

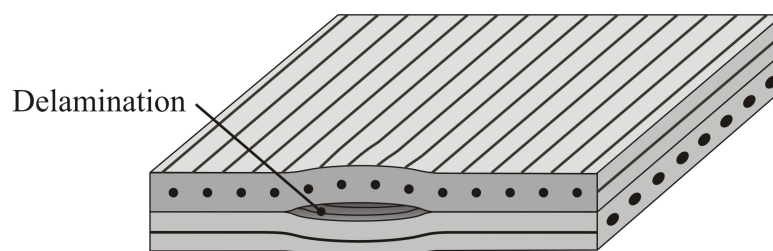


Bild 4.13: Ablösung von Schichten im Werkstoffverbund: Delamination

Daher liegt an der Oberfläche unter Umständen keine signifikante Wölbung des Materials vor.

Zur Modellierung einer Delamination existieren in der Literatur im Wesentlichen zwei unterschiedliche Vorgehensweisen: Dreidimensionale Modelle, die Details einer Delamination mit

hoher Genauigkeit nachbilden können, und einfachere, zweidimensionale Modelle auf Basis von übereinander geschichteten Plattenelementen. Dreidimensionale Modelle werden vorwiegend bei Simulationen verwendet, die sich entweder mit der Entstehung von Delaminationen bei Impactvorgängen, vergleiche beispielsweise [WU und SPRINGER 1988] und [FINN und SPRINGER 1993], oder mit dem Wachstum von Delaminationen unter vorgegebener Belastung auseinandersetzen [WIMMER *et al.* 2006]. Krueger und Minguet verwenden 3D Volumenelemente zur Modellierung der Delaminationsfront in Kombination mit 2D Schalenelementen für die restlichen Strukturbereiche [KRUEGER und MINGUET 2007]. Bei diesen Simulationen wird in der Regel nur ein kleiner Ausschnitt einer Struktur betrachtet, so dass trotz einer sehr feinen, dreidimensionalen Vernetzung das Ausmaß der Rechenmodelle handhabbar bleibt.

Zweidimensionale Modelle auf der Basis geschichteter Platten können demgegenüber auch für die Modellierung wesentlich größerer Strukturbereiche eingesetzt werden. Sie eignen sich daher für die Modellierung innerhalb dieser Arbeit deutlich besser. Die in der Literatur verfügbaren Ansätze lassen sich dabei in zwei Gruppen unterteilen: Einerseits sind dies zwei- oder mehrlagige Elemente, bei denen die Schichten im Bereich der Delamination nicht völlig getrennt betrachtet werden, sondern mit Hilfe von so genannten Kohäsions- oder Interfacelementen verbunden sind. Mit Hilfe dieser Elemente können einerseits Reibungskräfte übertragen werden, andererseits wird die Durchdringung der Lagen verhindert. Derartige Elemente wurden beispielsweise von Borg *et al.* für das kommerzielle Programmpaket LS-DYNA entwickelt [BORG *et al.* 2001], [BORG *et al.* 2002]. Zheng und Sun modellieren eine teilweise delaminierte Platte, indem die komplette Platte aus zwei Element-Lagen aufgebaut wird, die in den nicht delaminierten Teilen durch Zwangsbedingungen gekoppelt sind. Im delaminierten Teil wird eine einfache Kontaktbedingung formuliert, die eine Durchdringung der Elemente verhindert [ZHENG und SUN 1995]. Ousset und Roudolff verwenden bruchmechanische Ansätze zur Bestimmung des Wachstums von Delaminationen, wobei die einzelnen Schichten mittels Mindlin-Platten modelliert sind und mittels einer Kontaktbedingung eine Durchdringung verhindert wird [OUSSET und ROUDOLFF 1997].

Andererseits werden einfachere Ansätze verwendet, deren unterschiedliche Lagen im Bereich der Delamination keinerlei Verbindung mehr aufweisen. Damit wird es zwar ermöglicht, dass die Lagen im Bereich der Delamination unterschiedliche Verschiebungsfelder aufweisen, jedoch können keine direkten Interaktionen zwischen oberer und unterer Lage stattfinden. Derartige Formulierungen werden unter anderem bei [KUDELA und OSTACHOWICZ 2009] zur Simulation von Delaminationen in Platten eingesetzt. Ähnliche Ansätze finden sich auch bei [KRAWCZUK *et al.* 1997] und [ROCHE und ACCORSI 1998] für Delaminationen in Balken.

In dieser Arbeit werden Delaminationen zunächst unter Verwendung letztgenannter, einfacher Ansätze ohne zusätzliche Kopplungsbedingungen modelliert. Dazu werden oberer und unterer Teil der delaminierten Region durch separate Elemente modelliert, wie in Bild 4.14 schematisch dargestellt ist.

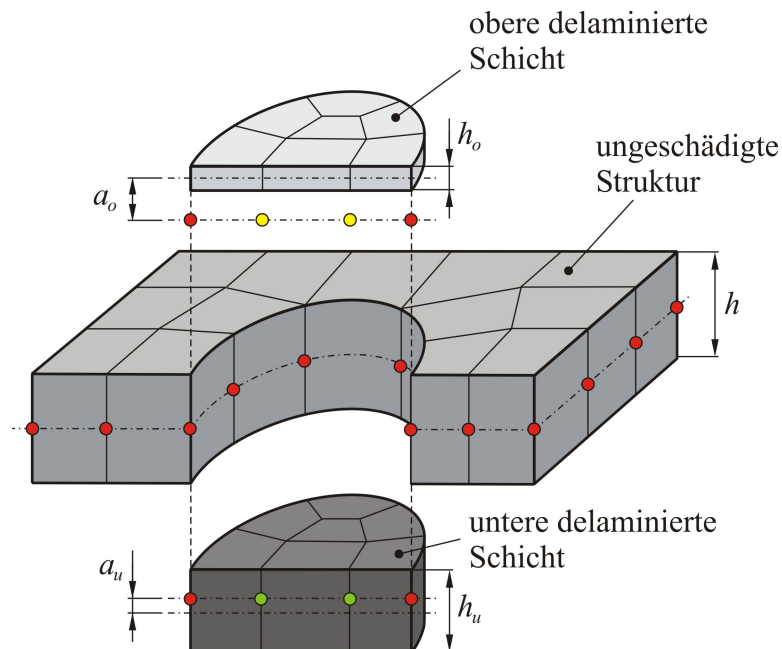


Bild 4.14: Schematische Darstellung der Vernetzung einer Delamination

Die Bauteildicke ist in Bild 4.14 im Vergleich zu den Elementabmessungen stark vergrößert dargestellt. Zur besseren Übersicht sind außerdem nur die sichtbaren Eckknoten des dargestellten Ausschnitts eingezeichnet und nicht alle Spektralknoten auf den entsprechenden Elementkanten. Wie aus der Darstellung hervorgeht, liegen auch die Elementknoten von oberer und unterer delaminierter Schicht auf der neutralen Ebene des Gesamtlaminates. Zur Berechnung der Elementmatrizen innerhalb des delaminierten Bereichs sind daher die jeweiligen Abstände a_o und a_u zwischen der neutralen Ebene des jeweiligen Elements und der neutralen Ebene des Gesamtlaminats zu berücksichtigen. Die Knoten der Elemente in oberer und unterer Schicht weisen identische Koordinaten auf. Während die Knoten am Rand des delaminierten Gebiets identisch und an die umgebende, ungeschädigte Struktur angebunden sind, besteht zwischen den Knoten von oberer und unterer Schicht im Inneren des delaminierten Gebiets keine Verbindung (gelb und grün dargestellt). Durch diese Modellierung können obere und untere Schicht im Bereich der Delamination ein unterschiedliches Verschiebungsfeld aufweisen, das nur an der Delaminationsfront gekoppelt ist. Wie in Bild 4.15 dargestellt ist, kann zusätzlich auch ein Spalt zwischen den voneinander getrennten Schichten implementiert werden.

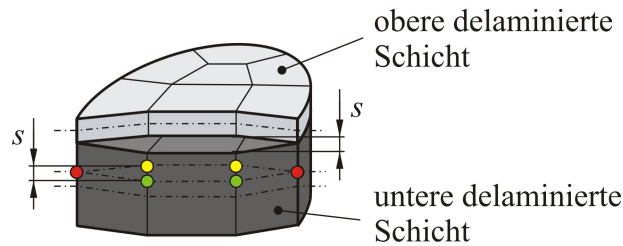


Bild 4.15: Delamination mit Spalt zwischen den Schichten

Dazu können die Knoten der beiden Schichten innerhalb des Delaminationsgebietes mit einem vertikalen Abstand s versehen werden, vergleiche Bild 4.15. Durch die Abstände zur neutralen Ebene des Gesamtlaminats weisen die Elemente im Bereich der Delamination eine erhebliche Asymmetrie auf. Daher liegen bei diesen Elementen Koppelterme zwischen transversalen und rotatorischen Freiheitsgraden vor. Folglich treten bei den Elementmassenmatrizen dieser Elemente auch Trägheitsterme I_1 außerhalb der Diagonalen auf, vergleiche (3.38) und (3.39). Grundsätzlich bewirken diese Koppelterme Modenkonversion, also eine Umwandlung einer Wellenmode in eine andere. Während bei der Modellierung in [KUDELA und OSTACHOWICZ 2009] diese Terme vollständig vernachlässigt sind, um die Diagonalgestalt der Massenmatrix zu erhalten, werden in dieser Arbeit die Koppelterme mit berücksichtigt. Da in Bezug auf die gesamte Systemgröße nur wenige Elemente betroffen sind, kann durch Aufteilung des Gesamtsystems, wie am Ende von Abschnitt 4.5.1 dargestellt ist, dennoch ein effizientes Lösungsschema eingesetzt werden.

Da in dieser Arbeit keine Interface-Elemente zwischen den delaminierten Schichten eingesetzt werden, besteht keinerlei weitere Abhängigkeit zwischen den beiden Lagen. Unter der Annahme, dass sich, wie in Bild 4.15 dargestellt, ein Spalt zwischen den delaminierten Lagen ausbildet, ist dieses Modell für die in dieser Arbeit durchgeführten Studien ausreichend, da bei höherfrequenten Wellenausbreitungsvorgängen nur sehr kleine Verschiebungen im Bereich kleiner 10^{-7} m auftreten. Schon bei einer Spaltdicke von einem Mikrometer ist eine Durchdringung der Schichten im Modell somit ausgeschlossen.

Falls sich kein Spalt zwischen den Schichten ausbildet (siehe Bild 4.14) kann es in der Realität zur Berührung der Schichten kommen, die mit der Übertragung von Normal- und Scherkräften einhergeht. Im bisherigen Modell ist dies nicht berücksichtigt, sondern die Elemente von oberer und unterer Schicht können sich frei durchdringen. Der folgende Abschnitt stellt daher eine Kontaktformulierung vor, die diese Durchdringung verhindert.

4.6.3 Kontaktformulierung für Delaminationen

Um eine Durchdringung der oberen und unteren Elemente des delaminierten Bereichs zu unterbinden wird für alle korrespondierenden Knotenpaare aus oberer und unterer Elementlage innerhalb des Delaminationsgebiets zu jedem Zeitschritt geprüft, ob die Bedingung

$$p = w_o - w_u < 0 \quad (4.48)$$

für mindestens ein Knotenpaar erfüllt ist. Der Index o kennzeichnet einen Knoten der oberen Lage, u ist der dazu korrespondierende Knoten der unteren Schicht. Ist Bedingung (4.48) für mindestens ein Knotenpaar erfüllt, so kommt es an dieser Stelle zur Durchdringung der beiden Schichten. Da ein konformes Netz der beiden Elementlagen verwendet wird und nur sehr kleine Verformungen auftreten, reicht diese einfache Abfrage in Form eines Punt-zu-Punkt Kontaktes zur Bestimmung einer Durchdringung aus. Zur Berechnung der Kontaktkräfte und der Verschiebung wird die in [CARPENTER *et al.* 1991] vorgestellte „Forward increment Lagrange multiplier method“ verwendet. Die Bewegungsgleichung des Systems (4.23) wird dazu durch Lagrange Multiplikatoren ergänzt:

$$\mathbf{K}_{ges} \mathbf{q} + \mathbf{C}_{ges} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{ges} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{F}. \quad (4.49)$$

Die Komponenten des Lagrange Multiplikator Vektors $\boldsymbol{\lambda}_k$ sind die Kontaktkräfte. Mit Hilfe der Matrix \mathbf{G} werden die Kontakt-Zwangsbedingungen ausgedrückt:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.50)$$

Die Berechnung läuft folgendermaßen ab: Im ersten Schritt werden die Knotenverschiebungen des Systems zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ohne den Einfluss eines möglichen Kontakts aus Gleichung (4.45) bzw. bei diagonalen Massen- und Dämpfungsmatrix aus (4.46) berechnet. Zur Verdeutlichung, dass dabei der Kontakt nicht berücksichtigt wird, werden diese Verschiebungen mit $\mathbf{q}_{ok}^{t+\Delta t}$ bezeichnet.

Sofern für mindestens ein Knotenpaar im Delaminationsgebiet Bedingung (4.48) erfüllt ist, werden im zweiten Schritt die Kontaktkräfte der betreffenden Knoten gemäß

$$\mathbf{F}_{kont} = \left\{ \Delta t^2 \cdot \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{M}_{ges}^{-1} \left[\mathbf{G}^{t+\Delta t} \right]^T \right\} \cdot \mathbf{G}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{q}_{ok}^{t+\Delta t} \quad (4.51)$$

berechnet. Obwohl in der formalen Darstellung von Gleichung (4.51) die Inverse der Massenmatrix vorkommt, ist die Berechnung der Kontaktkräfte sehr effizient möglich. Dazu ist zu

bedenken, dass Matrix \mathbf{G} nur Komponenten der lokalen z -Verschiebung enthält. Die zugehörigen Zeilen und Spalten der Massenmatrix weisen daher nur Diagonalelemente auf. Bei der programmtechnischen Umsetzung können deshalb zunächst die entsprechenden Werte der Massenmatrix in einer separaten Diagonalmatrix abgelegt werden, die dann komponentenweise invertiert wird.

Mit Hilfe der Kontaktkräfte werden anschließend Korrekturen des Verschiebungsvektors berechnet:

$$\mathbf{q}_{cor}^{t+\Delta t} = -\Delta t^2 \cdot \mathbf{M}_{ges}^{-1} [\mathbf{G}^{t+\Delta t}]^T \mathbf{F}_{kont}. \quad (4.52)$$

Die korrekte Verschiebung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ergibt sich abschließend aus der Summe

$$\mathbf{q}^{t+\Delta t} = \mathbf{q}_{ok}^{t+\Delta t} + \mathbf{q}_{cor}^{t+\Delta t}. \quad (4.53)$$

Wie in [CARPENTER *et al.* 1991] festgestellt ist, hat diese Formulierung keinen nachteiligen Einfluss auf die numerische Stabilität der Zeitintegration. Der zusätzliche numerische Aufwand ist deshalb sehr moderat, so dass die Effizienz der gesamten Simulation erhalten bleibt. Auf eine Implementierung von komplexeren Kontaktbedingungen, bei denen auch Reibungskräfte an der Kontaktfläche betrachtet werden, wird verzichtet, weil dies mit erheblichem zusätzlichem Rechenaufwand verbunden wäre.

Mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Modellen und Algorithmen zur Implementierung von Schädigungen in das Gesamtsystem ist das in dieser Arbeit entwickelte Simulationswerkzeug vollständig beschrieben. Im nächsten Kapitel werden verschiedene, mit diesem Tool durchgeführte, numerische Studien vorgestellt. Abschnitt 5.7 behandelt in diesem Rahmen auch eine detaillierte numerische Studie zum Einfluss des Kontakts innerhalb der Delamination.

5 Numerische Studien

Nach einer kurzen Einführung der verwendeten Anregungssignale werden in diesem Abschnitt numerische Studien vorgestellt, die grundlegende Eigenschaften des in dieser Arbeit entwickelten Simulationswerkzeugs demonstrieren. Ziel ist es dabei, die Eignung zur Modellierung von wellenbasierten SHM-Systemen aufzuzeigen. Darüber hinaus werden verschiedene allgemeingültige Schlussfolgerungen gezogen, die für die spätere Anwendung Hilfestellung bei der Generierung komplexerer Modelle geben.

5.1 Verwendete Anregungssignale

Als Anregungssignale für die in dieser Arbeit betrachteten SHM-Systeme haben sich modulierte Burst-Signale als sehr zweckmäßig erwiesen, vergleiche zum Beispiel [ROSE 1999] oder [WILCOX *et al.* 2001]. Bei den hier vorgestellten numerischen Studien werden daher modulierte Kosinussignale unterschiedlicher Schwingenzahl verwendet. Bild 5.1 stellt beispielhaft derartige, auf den Maximalwert Eins normierte Signale mit einer Grundfrequenz von 40kHz für drei, fünf und sieben Schwingungen dar. Wie sich deutlich erkennen lässt, führt bei konstanter Grundfrequenz die Verringerung der Anzahl der Schwingungen zu einem kürzeren, auf der Zeitachse stärker lokalisierten Burst.

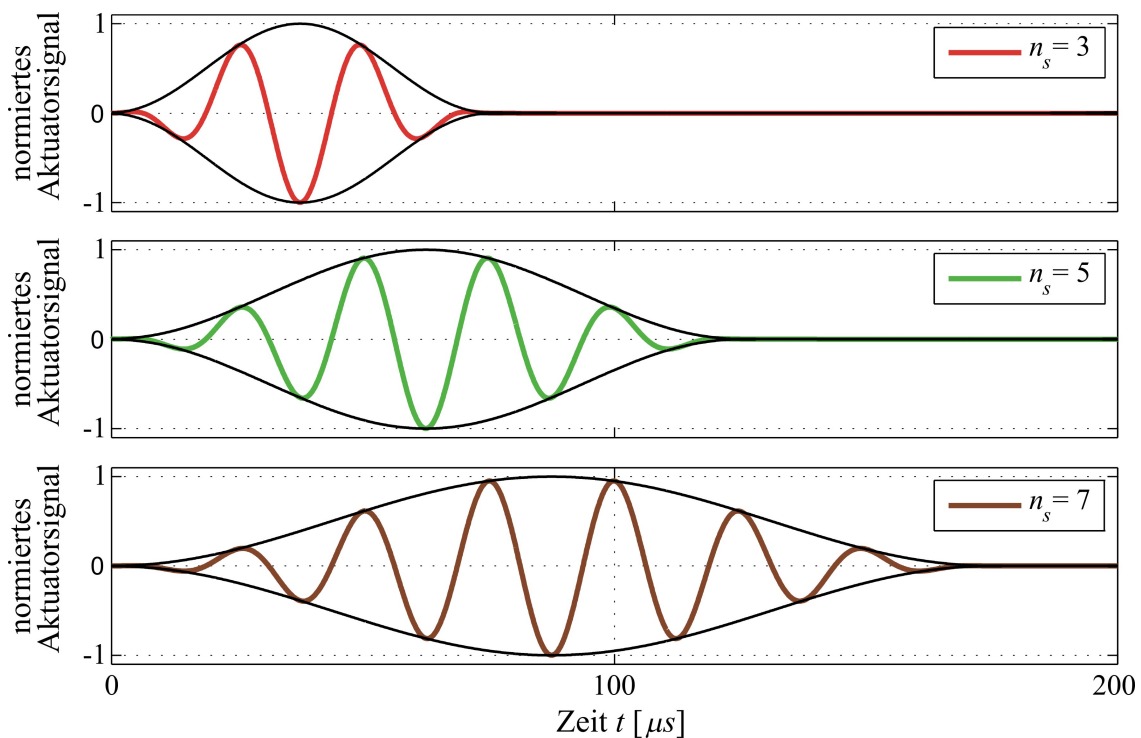


Bild 5.1: Verwendete Anregungssignale mit drei, fünf und sieben Schwingungen; zusätzlich sind die Hüllkurven angegeben

Allgemein lässt sich ein derartiges Signal gemäß Gleichung (5.1) beschreiben. Durch den Vorfaktor wird die maximale Amplitude auf Eins skaliert, das Rechteck-Fenster definiert den zulässigen Bereich einer von Null verschiedenen Amplitude.

$$\chi = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\left[\text{sign}(t) - \text{sign}\left(t - \frac{n_s}{f_c}\right) \right]}_{\text{Rechteck-Fenster}} \cdot \underbrace{\left[1 - \cos\left(2\pi f_c \frac{t}{n_s}\right) \right]}_{\text{Hann-Fenster}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi f_c t)}_{\text{Kosinussignal}}. \quad (5.1)$$

Das Hann-Fenster bewirkt einen sanften Anstieg und Abfall der Signalamplitude, der letzte Term in Gleichung (5.1) stellt das Kosinussignal dar.

Der zugehörige Frequenzgehalt lässt sich aus den entsprechenden Spektren bestimmen, Bild 5.2. Wie daraus hervorgeht, besteht ein antiproportionaler Zusammenhang zwischen der Anzahl der Schwingenspiele und der Breite des angeregten Frequenzspektrums.

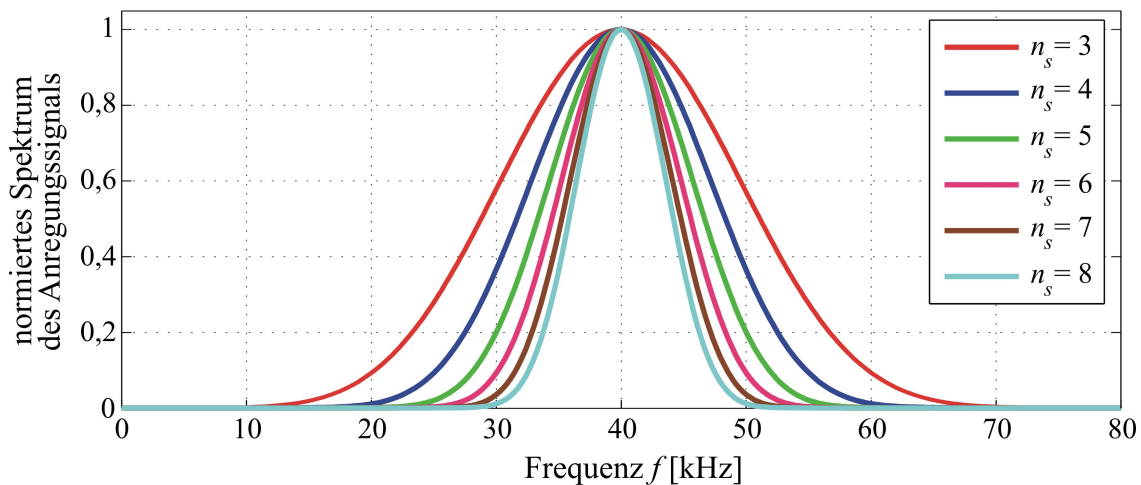


Bild 5.2: Normierte Spektren der Anregungssignale mit unterschiedlicher Schwingenspielzahl

Aufgrund von Dispersionseffekten ist einerseits ein im Frequenzbereich möglichst schmalbandiges Signal zu verwenden, um ein Auseinanderdriften des Bursts zu unterdrücken. Andererseits besteht auch im Zeitbereich Interesse an möglichst kurzen Bursts, da nur dann eine Trennung verschiedener Moden im Antwortsignal der Sensoren möglich ist (vergl. Abschnitt 2.1.5). Dies lässt sich beispielsweise durch Verwendung höherer Anregungsfrequenzen bei einer gleichbleibenden Anzahl von Schwingenspielen erreichen. In der Praxis sind darüber hinaus auch spezifische Effekte der verwendeten Aktuatoren und Sensoren (so genannte Sweet-Spot-Charakteristik, vergleiche auch [STASZEWSKI *et al.* 2004] und Bild 4.10) zu berücksichtigen. Oftmals ist ein Kompromiss der verschiedenen Anforderungen zu finden.

5.2 Untersuchung der notwendigen räumlichen Diskretisierung

Als erster wesentlicher Aspekt wird die räumliche Diskretisierung genauer untersucht. Dabei ist die Frage zu klären, wie fein für eine gegebene Aufgabenstellung das entsprechende Knotengitter zu wählen ist, um eine ausreichend konvergierte Lösung zu erhalten. Für die spätere Anwendung dieses Simulationswerkzeugs sind dazu möglichst allgemeingültige Regeln aufzustellen. Diese sollen sicherstellen, dass einerseits eine korrekte Lösung bestimmt wird, andererseits jedoch nicht eine unnötig feine Diskretisierung durchgeführt wird, da die Effizienz der Berechnung darunter leidet. Als wesentliche Kenngröße Λ zur Bewertung der numerischen Effizienz des Verfahrens kann die Anzahl der benötigten Gitterknotenpunkte pro minimaler im Anregungssignal enthaltener Wellenlänge λ_{min} herangezogen werden:

$$\Lambda = \frac{N_{Knoten}}{\lambda_{min}} \quad (5.2)$$

Da bei den verwendeten Spektralelementen eine ungleichmäßige Knotenverteilung vorliegt, ist für die Anzahl der Knoten ein Mittelwert zu verwenden. Dieser wird in Richtung der Elementdiagonalen bestimmt, weil dort der maximale Knotenabstand und somit die minimale Knotendichte vorliegt. Da zunächst isotropes Materialverhalten vorausgesetzt wird, kann λ_{min} in alle Raumrichtungen identisch angenommen werden und ist somit nur vom Anregungssignal abhängig. Aus der fundamentalen Gleichung (2.2) ergibt sich die minimale Wellenlänge zu:

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}}, \quad (5.3)$$

wobei im Allgemeinen von dispersivem Verhalten, also $c = c(f)$, auszugehen ist, vergleiche Abschnitt 2.1.5. Aus dem verwendeten Anregungssignal ist deshalb zunächst die maximal enthaltene Frequenz und anschließend mit Hilfe von Dispersionsdiagrammen die zugehörige Ausbreitungsgeschwindigkeit zu ermitteln. Der Begriff der Dispersion ist allgemein in Abschnitt 2.1.4 eingeführt worden. Dispersionsdiagramme für die hier verwendete Plattentheorie werden detailliert in Abschnitt 6.1 hergeleitet.

Als erstes Simulationsmodell wird eine isotrope Platte der Abmessungen $400\text{mm} \times 400\text{mm} \times 2\text{mm}$ betrachtet. Als Materialparameter dienen Literaturkennwerte von Aluminium: Elastizitätsmodul $E = 70\text{GPa}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0,33$ und Dichte $\rho = 2700\text{kg/m}^3$. Um ausschließlich den Einfluss der Diskretisierung untersuchen zu können,

wird auf die Berücksichtigung von Piezoelementen und Materialdämpfung zunächst verzichtet. Aus den Dispersionsdiagrammen (vergleiche Abschnitte 2.1.5 und 6.1) ergibt sich für die A_0 - bzw. Biegemode eine wesentlich geringere Geschwindigkeit als für die S_0 - bzw. Longitudinalmode. Mit Gleichung (5.3) folgt somit auch eine geringere Wellenlänge. Daher wird eine Anregung durch eine senkrecht auf der Platte stehende Einzelkraft F_{akt} in z -Richtung vorgenommen, um ausschließlich eine Biegewelle anzuregen. Wie in Bild 5.3 erkennbar, wird diese Kraft an der Position $(0,12m|0,12m)$ eingeleitet. An Position $(0,28m|0,28m)$ werden die Knotenverschiebungen in z -Richtung aufgezeichnet und zur Bewertung der Lösung miteinander verglichen. Es werden drei unterschiedlich grobe, strukturierte Elementgitter mit Elementgrößen von $10mm \times 10mm$, $20mm \times 20mm$ und $40mm \times 40mm$ sowie eine verschiedene Anzahl von GLL-Knoten pro Elementkante N_{GLL} eingesetzt. Bild 5.3 zeigt beispielhaft das Gitter mittlerer Größe.

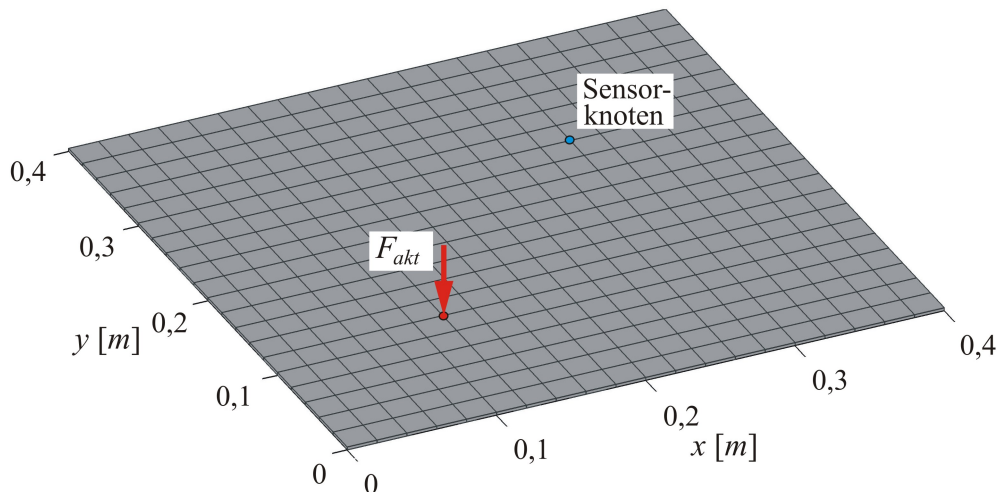


Bild 5.3: Modell zur Untersuchung der notwendigen räumlichen Diskretisierung

Als Anregungssignal wird zunächst ein in Abschnitt 5.1 beschriebenes Burst-Signal der Grundfrequenz $40kHz$ mit vier Schwingungen verwendet. Aus Bild 5.2 ergibt sich für dieses Signal (in dunkelblau dargestellt) eine maximal enthaltene Frequenz von etwa $60kHz$. Aus dem zugehörigen Dispersionsdiagramm der Biegemode (Bild 5.4) folgt eine Wellengeschwindigkeit von $c_{g_60kHz} = 1905m/s$, was mit Gleichung (5.3) zu einer minimalen Wellenlänge von $\lambda_{min} = 31,7mm$ führt. Tabelle 5.1 gibt eine Übersicht der durchgeführten Simulationen. Die Simulationszeit beträgt $T=0,4ms$, weil innerhalb dieser Zeit nicht nur die direkte Welle, sondern auch erste reflektierte Wellen am Sensorknoten ankommen. Der Zeitschritt wird gemäß der CFL-Bedingung (Gleichung (4.47)) gewählt.

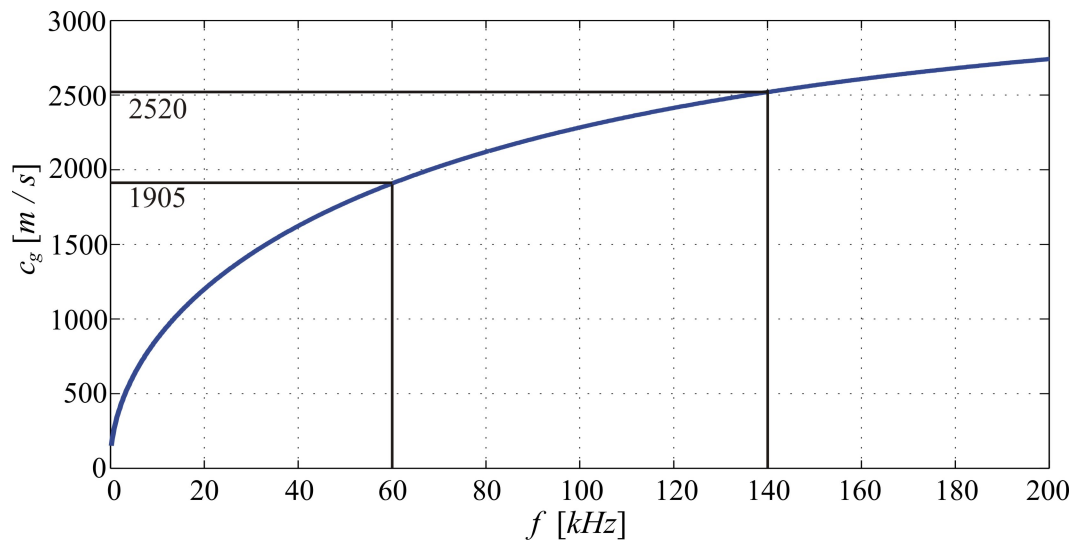


Bild 5.4: Dispersionsdiagramm der Biegewelle einer 2mm dicken Aluminiumplatte

In Tabelle 5.1 sind neben der Kenngröße Λ auch die Anzahl der benötigten Zeitschritte und die Rechenzeit für die Systemlösung erfasst, um eine Aussage über die Effizienz zu ermöglichen. Die Rechenzeiten sind für einen PC mit Intel CoreDuo 6400 CPU (2,13GHz) und 4GB Arbeitsspeicher angegeben.

Tabelle 5.1: Simulationsstudien zur räumlichen Diskretisierung - Teil 1: maximale Frequenz 60kHz

Elementgröße	N_{GLL}	Freiheitsgrade	Zeitschritte	Rechenzeit [s]	Λ	Bezeichnung
10 x 10	4	87846	1735	27,2	6,83	\mathbf{z}_{1a}
10 x 10	5	155526	2777	99,7	9,07	\mathbf{z}_{2a}
10 x 10	6	242406	4082	270,4	11,32	\mathbf{z}_{3a}
10 x 10	7	348486	5649	589,0	13,56	\mathbf{z}_{4a}
20 x 20	5	39366	1389	10,5	4,60	\mathbf{z}_{5a}
20 x 20	6	61206	2041	26,9	5,72	\mathbf{z}_{6a}
20 x 20	7	87846	2825	65,3	6,83	\mathbf{z}_{7a}
40 x 40	9	39366	2392	30,6	4,59	\mathbf{z}_{8a}
40 x 40	10	49686	2980	53,9	5,16	\mathbf{z}_{9a}
40 x 40	11	61206	3633	90,8	5,72	\mathbf{z}_{10a}

Die folgenden zwei Bilder zeigen einige Zeitverläufe der z -Verschiebung des Sensorknotens. Neben der optischen Analyse dieser Verläufe wird zur Bewertung der Abweichung zweier Zeitverläufe \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_j folgender Abweichungskoeffizient verwendet:

$$S_{ij} = 1 - \frac{\left| \text{cov}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) \right|}{\sqrt{\text{var} \mathbf{z}_i \cdot \text{var} \mathbf{z}_j}}. \quad (5.4)$$

Ein Wert von $\zeta_{ij} = 0$ bedeutet keinerlei Abweichung, $\zeta_{ij} = 1$ stellt sich für vollständig unkorrelierte Signale ein. Die Berechnung dieses Koeffizienten liefert für den Vergleich der beiden größten Systeme (Elementgröße $10\text{mm} \times 10\text{mm}$, $N_{GLL} = 6$ bzw. $N_{GLL} = 7$) einen Wert von $\zeta_{3a4a} = 8,8 \cdot 10^{-5}$, also nur eine sehr geringe Abweichung. Daher wird die Lösung mit $N_{GLL} = 7$ als konvergiert betrachtet. Bei der gewählten Auflösung in Bild 5.5 ist dieser Unterschied nicht sichtbar, weshalb die Lösung der Elementgröße $10\text{mm} \times 10\text{mm}$, und $N_{GLL} = 6$ nicht dargestellt ist. Ein Bezug zwischen der Größe des berechneten Koeffizienten und der Darstellung wird durch zwischen weiteren Koeffizienten mit diesem Bild ermöglicht. Für den in Bild 5.5 rot dargestellten Verlauf, dessen Abweichungen optisch gerade noch sichtbar sind, ergibt sich $\zeta_{2a4a} = 3,1 \cdot 10^{-3}$, für den blau dargestellten Verlauf $\zeta_{1a4a} = 1,8 \cdot 10^{-1}$. Wie aus Bild 5.5 und dem Wert des Ähnlichkeitskoeffizienten hervorgeht, weist die Verschiebungslösung des feinen Elementgitters mit $N_{GLL} = 5$ (rot dargestellt) nur eine geringe Abweichung zur Lösung mit $N_{GLL} = 7$ (schwarz) auf. In der Praxis wäre diese Genauigkeit für die hier betrachtete Anwendung akzeptabel, insbesondere unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Rechenzeit des kleineren Systems nur etwa 17% der Rechenzeit des Systems mit $N_{GLL} = 7$ beträgt.

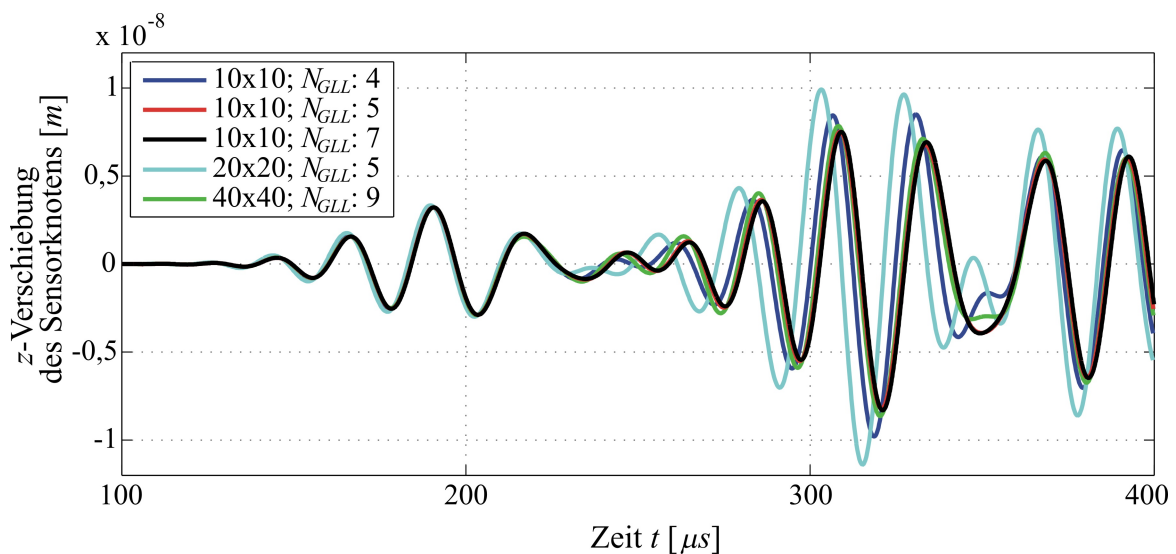


Bild 5.5: Knotenverschiebung in z-Richtung des Sensorknotens; konvergierte Lösung (schwarz) gegenüber Lösungen mit teils zu grober räumlicher Diskretisierung; Grundfrequenz 40kHz

Bei den anderen dargestellten Lösungen treten größere Abweichungen auf; die Diskretisierung ist in diesen Fällen nicht fein genug. Bei der Verwendung von $N_{GLL} = 4$ ist demnach $\Lambda \approx 6,8$ nicht ausreichend, während ein Wert von $\Lambda \approx 9$ bei 5 GLL-Knoten eine genügend gute Approximation liefert. Das Wellenpaket der direkten Welle (140 bis $230\mu\text{s}$) weist bei allen dargestellten Verschiebungsverläufen nur eine geringe Abweichung auf, die sich haupt-

sächlich in einer leicht veränderten Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenpakets äußert. Dieser Unterschied führt jedoch bei den reflektierten Wellenpaketen zu teils erheblichen Unterschieden in Amplitude und Phasenlage.

In Bild 5.6 ist ein vergrößerter Ausschnitt der reflektierten Wellen im Zeitraum von 300 bis 350 μs für vier Knotengitter mit einer allesamt als gut zu bezeichnenden Diskretisierung dargestellt. Während bei der rot dargestellten Kurve noch geringe Abweichungen erkennbar sind, lassen sich bei den anderen Darstellungen bei der gewählten Darstellungsgröße optisch keine Abweichungen mehr feststellen. Die Ähnlichkeitskoeffizienten der in Bild 5.6 zusätzlich zur konvergierten Lösung dargestellten Lösung ergeben sich zu $\zeta_{7a4a} = 1,1 \cdot 10^{-3}$, $\zeta_{9a4a} = 3,6 \cdot 10^{-3}$ und $\zeta_{10a4a} = 2,0 \cdot 10^{-4}$. Die maximale Recheneffizienz wird in diesem Fall durch Verwendung der mittleren Elementgröße $20\text{mm} \times 20\text{mm}$ und $N_{GLL} = 7$ erzielt. Dabei weist das Gitter $\Lambda \approx 6,8$ Knoten pro Wellenlänge auf. Bei Verwendung der Elemente der Abmessungen $40\text{mm} \times 40\text{mm}$ liegt zwar ein um ca. 30% kleineres System vor, wegen der Anhäufung der Knoten an den Elementecken steigt die Anzahl der notwendigen Zeitschritte jedoch so stark an, dass die Rechenzeit wieder zunimmt (vergl. Abschnitt 4.5.2).

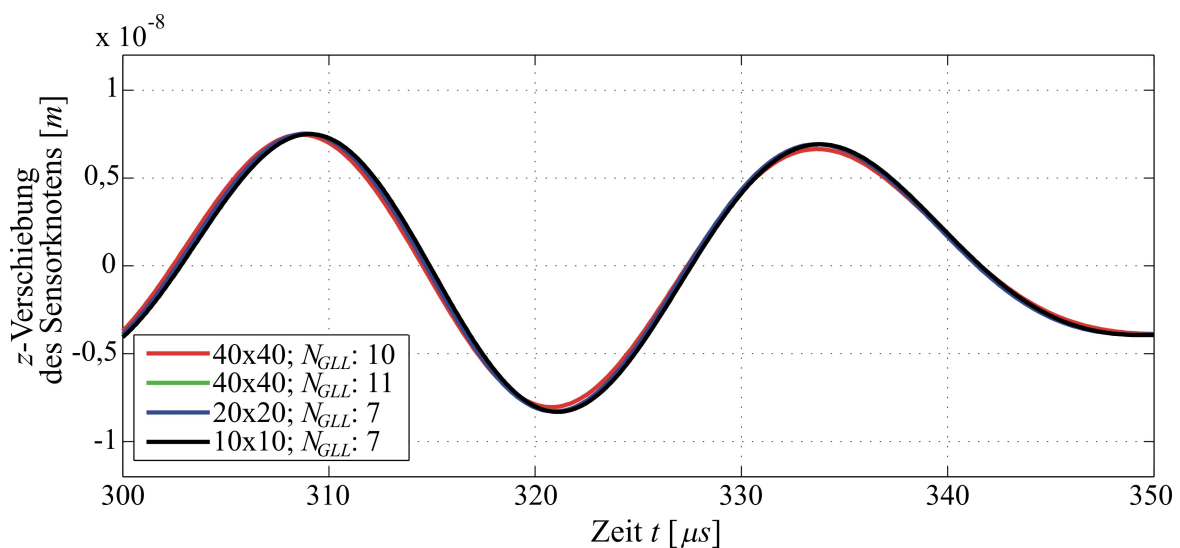


Bild 5.6: Knotenverschiebung in z -Richtung des Sensorknotens; konvergierte Lösung (schwarz) gegenüber Lösungen mit veränderter räumlicher Diskretisierung; Grundfrequenz 40kHz

Festzuhalten ist jedoch, dass bei der Verwendung von $N_{GLL} = 11$ schon $\Lambda \approx 5,7$ Knoten pro Wellenlänge als räumliche Diskretisierung ausreicht. Dies führt zu wesentlich geringeren Anforderungen an den Platzbedarf im Arbeitsspeicher, was neben der Rechenzeit ebenfalls ein wichtiges Kriterium für die praktische Anwendbarkeit ist.

Durch Verwendung eines anderen Anregungssignals wird im Folgenden die Frage untersucht, ob die oben festgestellten Zusammenhänge eine Abhängigkeit von der Frequenz aufweisen. Dazu wird obige Simulation mit exakt identischer Konfiguration wiederholt, wobei nun ein Anregungssignal der Grundfrequenz 100kHz mit fünf Schwingungen verwendet wird. Dieses Signal und das zugehörige Frequenzspektrum sind in Bild 5.7 dargestellt. Es ergibt sich daraus eine maximal enthaltene Frequenz von etwa 140kHz .

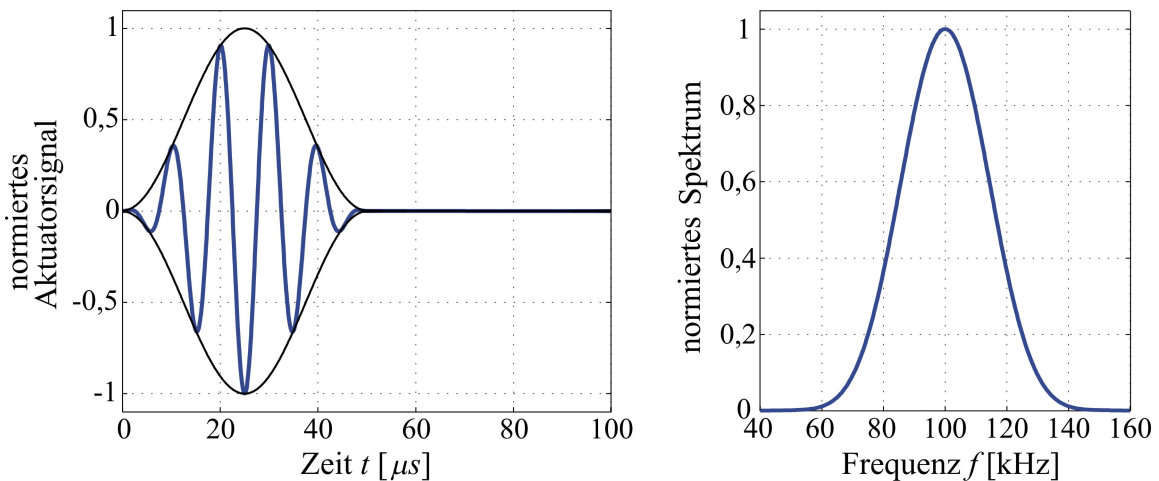


Bild 5.7: Anregungssignal mit fünf Schwingungen und Grundfrequenz 100kHz : Zeitverlauf und Hüllkurve (links) sowie normiertes Spektrum (rechts)

Mit Hilfe des Dispersionsdiagramms Bild 5.4 folgt eine Wellengeschwindigkeit von $c_{g_{140\text{kHz}}} = 2520\text{m/s}$. Mit Gleichung (5.3) führt dies zu einer minimalen Wellenlänge von $\lambda_{\min} = 18\text{mm}$. Die simulierte Zeitdauer beträgt $T = 0,25\text{ms}$, weil durch die höhere Geschwindigkeit schon innerhalb dieser Zeit Reflexionen auftauchen. Eine Übersicht der durchgeführten Simulationen gibt Tabelle 5.2. Einige Verschiebungsverläufe des Sensorknotens sind in Bild 5.8 dargestellt. Wie bei der vorherigen Untersuchung wird der schwarz dargestellte Verlauf der Vernetzung mit $10\text{mm} \times 10\text{mm}$ und $N_{GLL} = 7$ als konvergiert angenommen. Die darauf bezogenen Ähnlichkeitskoeffizienten der anderen dargestellten Verläufe betragen $\zeta_{1b3b} = 2,9 \cdot 10^{-1}$ (blau), $\zeta_{2b3b} = 3,6 \cdot 10^{-3}$ (rot), $\zeta_{5b3b} = 3,4 \cdot 10^{-2}$ (grün) und $\zeta_{6b3b} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ (hellblau). Die schwarze und die hellblaue Kurve liegen - außer im Zoomfenster - optisch vollständig aufeinander, auch der rot dargestellte Verlauf weist nur geringe Abweichungen auf. Bei den $10\text{mm} \times 10\text{mm}$ großen Elementen ist somit eine Diskretisierung von $\Lambda \approx 6,4$ bei $N_{GLL} = 6$ ausreichend (rot dargestellt). Bei $20\text{mm} \times 20\text{mm}$ Elementen und $N_{GLL} = 9$ bietet schon $\Lambda \approx 5,2$ eine ausreichende Auflösung (hellblau, nur im Zoomfenster erkennbar). Größere Abweichungen treten optisch - in Analogie zu den berechneten Ähnlichkeitskoeffizien-

ten - erst bei den grün und blau dargestellten Verläufen auf, woraus geschlossen werden kann, dass $\Lambda \approx 5,2$ bei $N_{GLL} = 5$ (blau) bzw. $\Lambda \approx 4,5$ bei $N_{GLL} = 8$ nicht ausreicht.

Tabelle 5.2: Simulationsstudien zur räumlichen Diskretisierung - Teil 2: maximale Frequenz 140kHz

Elementgröße	N_{GLL}	Freiheitsgrade	Zeitschritte	Rechenzeit [s]	Λ	Bezeichnung
10 x 10	5	155526	1736	62,4	5,15	\mathbf{z}_{1b}
10 x 10	6	242406	2551	168,2	6,42	\mathbf{z}_{2b}
10 x 10	7	348486	3531	367,2	7,70	\mathbf{z}_{3b}
20 x 20	7	87846	1766	40,7	3,88	\mathbf{z}_{4b}
20 x 20	8	119286	2337	84,6	4,51	\mathbf{z}_{5b}
20 x 20	9	155526	2990	171,0	5,15	\mathbf{z}_{6b}
40 x 40	10	49686	1863	33,7	2,92	\mathbf{z}_{7b}
40 x 40	11	61206	2271	56,5	3,24	\mathbf{z}_{8b}
40 x 40	12	73926	2720	93,5	3,56	\mathbf{z}_{9b}

Für die $40\text{mm} \times 40\text{mm}$ großen Elemente ergeben sich, wie aus Tabelle 5.2 hervorgeht, mit den verwendeten GLL-Knotenzahlen Werte von $\Lambda < 3,6$ Knoten pro minimale Wellenlänge. Diese Diskretisierung reicht nicht für eine Lösung mit akzeptabler Genauigkeit aus. Die Abweichungen sind deutlich größer als bei den in Bild 5.8 dargestellten Verschiebungen, weshalb auf eine Abbildung verzichtet wird.

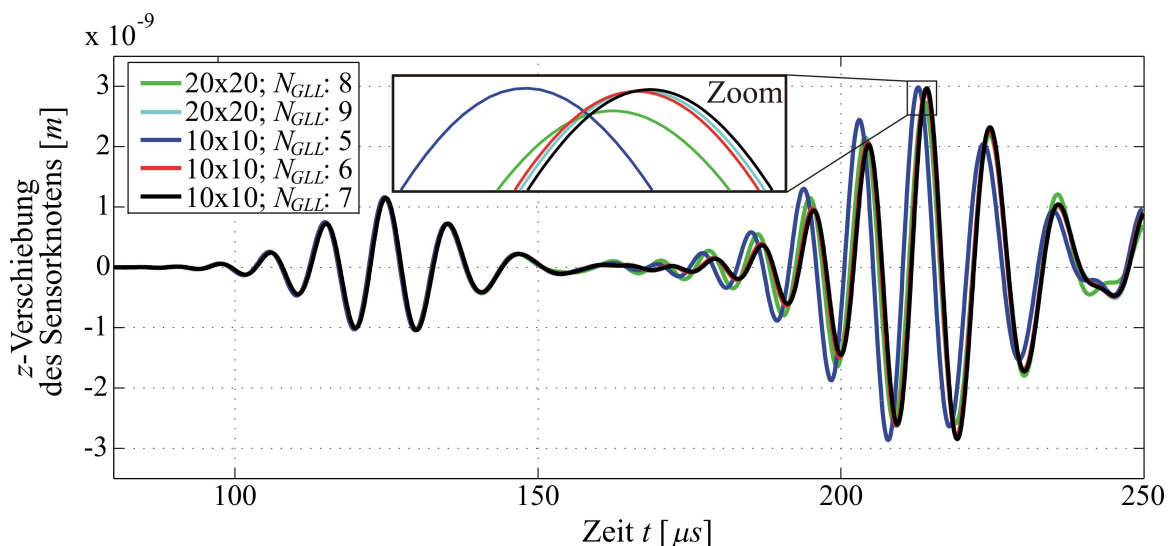


Bild 5.8: Knotenverschiebung in z-Richtung des Sensorknotens; konvergierte Lösung (schwarz) gegenüber Lösungen mit veränderter räumlicher Diskretisierung; Grundfrequenz 100kHz

Eine weitere Erhöhung der Anzahl der GLL-Knoten pro Elementkante wird nicht betrachtet, da dadurch einerseits die Zeit zur Generierung des entsprechenden Systems überproportional ansteigt und andererseits durch das in den Abschnitten 3.3 und 4.5 angesprochene Clustering die zulässige Zeitschrittweite sinkt und daher der Rechenzeitbedarf ansteigt.

Abschließend lassen sich aus diesen Untersuchungen folgende Zusammenhänge festhalten:

- Erst ab $N_{GLL} = 6$ kommt die verbesserte Approximationsgenauigkeit gegenüber konventionellen finiten Elementen niedriger Ansatzordnung deutlich zum Ausdruck.
- Ab $N_{GLL} = 6$ ist ein Wert von $\Lambda \approx 6,4$ Knoten pro minimaler Wellenlänge zur räumlichen Diskretisierung ausreichend.
- Bei größerem N_{GLL} nimmt die notwendige Anzahl von Knoten pro minimaler Wellenlänge noch weiter ab, bei neun Knoten ist $\Lambda \approx 5,2$ ausreichend.
- Eine wesentliche Erhöhung von N_{GLL} über einen Wert von etwa zehn hinaus ist wegen der Anhäufung der Knoten an den Ecken nicht zu empfehlen.
- Falls die Geometrie es ermöglicht, sind eher größere Elemente mit höherem N_{GLL} als kleinere Elemente mit geringerem N_{GLL} zu empfehlen.

Diese Ergebnisse decken sich weitgehend mit Ergebnissen, die Seriani für die Ausbreitung von akustischen Wellen ermittelt hat [SERIANI und PRIOLO 1994]. Während für derartige Simulationen mit finiten Elementen niedriger Ansatzordnung in der Regel etwa 15 bis 20 Knoten pro minimaler Wellenlänge vorliegen müssen, erweist sich ab $N_{GLL} = 6$ ein Wert von $\Lambda \approx 6,4$ als ausreichend, bei $N_{GLL} = 9$ genügt sogar ein Wert von etwa fünf Knoten pro minimaler Wellenlänge. Daher legen diese Studien nahe, nach Möglichkeit größere Elemente zu bevorzugen und N_{GLL} in einem Bereich zwischen sechs und 10 zu wählen als kleinere Elemente mit geringeren Werten für N_{GLL} .

Ein Einfluss der Verwendung von verzerrten Elementen wird an dieser Stelle nicht untersucht, es sei dazu auf Abschnitt 5.7.3 verwiesen.

5.3 Verhalten der Lösung bei zu grober zeitlicher Diskretisierung

Wie in Abschnitt 4.5.2 detailliert ausgeführt, führt die Wahl einer zu großen Zeitschrittweite zu Instabilität des Zentralen-Differenzen-Verfahrens. Die daraus resultierende falsche Systemlösung wächst schnell über alle Grenzen, ist somit also deutlich von einer korrekten Lösung zu unterscheiden. In diesem Abschnitt wird dies nachgewiesen, indem das in Abschnitt 5.2 vorgestellte Simulationsbeispiel nochmals untersucht wird, wobei der Zeitschritt ca. 1% oberhalb der Stabilitätsgrenze gewählt wird. Um eine korrekte und eine instabile Lösung innerhalb eines Diagramms darstellen zu können, wird der Betrag der Verschiebung auf einer

logarithmischen Skala aufgetragen (Bild 5.9). In schwarz ist der Betrag der korrekten Verschiebungslösung aufgetragen, die auch in Bild 5.8 schwarz dargestellt ist.

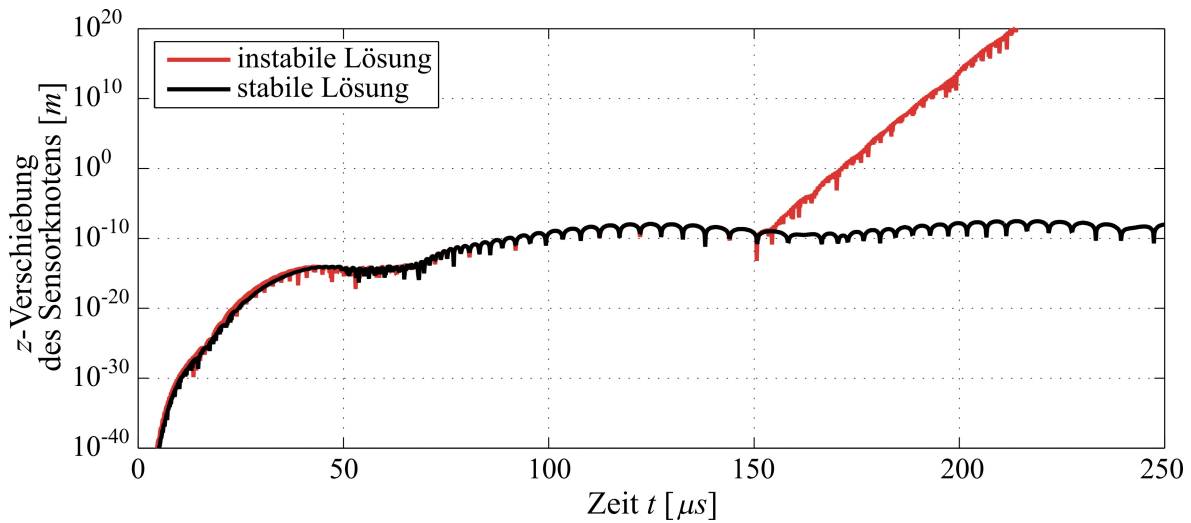


Bild 5.9: Vergleich einer stabilen (schwarz) und einer instabilen Lösung (rot)

Es ist deutlich erkennbar, dass die Verschiebungen im instabilen Fall ab einem bestimmten Zeitpunkt, hier etwa nach $150\mu\text{s}$, exponentiell anwachsen und keinerlei Bezug zur korrekten Lösung mehr haben. Im Gegensatz zu einer aufgrund ungenügender räumlicher Diskretisierung nicht konvergierten Lösung, die nur wenig von der korrekten Lösung abweicht (vergleiche den vorhergehenden Abschnitt), ist an dieser Stelle daher eine klare Trennung von korrekter und instabiler Lösung möglich.

5.4 Richtungsabhängige Dämpfung

Bei anisotropen Werkstoffen liegt in aller Regel neben der unterschiedlichen Steifigkeit auch eine unterschiedliche Materialdämpfung in verschiedenen Raumrichtungen vor. Im hier untersuchten Simulationsbeispiel wird auf Anisotropie der Steifigkeit jedoch verzichtet, da gezielt nur die Effekte der Modellierung richtungsabhängiger Dämpfung (vergl. Abschnitt 3.7) betrachtet werden sollen. Es wird daher ein Simulationsmodell mit identischen Materialparametern und identischer Anregung wie in Abschnitt 5.2 verwendet. Zusätzlich ist nun jedoch eine Dämpfungsmatrix berücksichtigt. Es sind nun drei Sensorknoten auf einem Viertelkreisbogen in Winkelschritten von 45° definiert, um eine Aussage zur Abhängigkeit der Dämpfung von der Ausbreitungsrichtung zu ermöglichen. Die verwendete Konfiguration ist in Bild 5.10 dargestellt. Da wie in Abschnitt 5.2 nur die Biegewelle angeregt wird, haben nur die Dämpfungsterme der Rotationsfreiheitsgrade einen Einfluss. Für eine deutlich erkennbare Richtungsabhängigkeit werden für diese Terme mit $C_{\alpha\alpha} = 50 \cdot C_{\theta\theta}$ in erheblichem Maße unterschiedliche Werte verwendet.

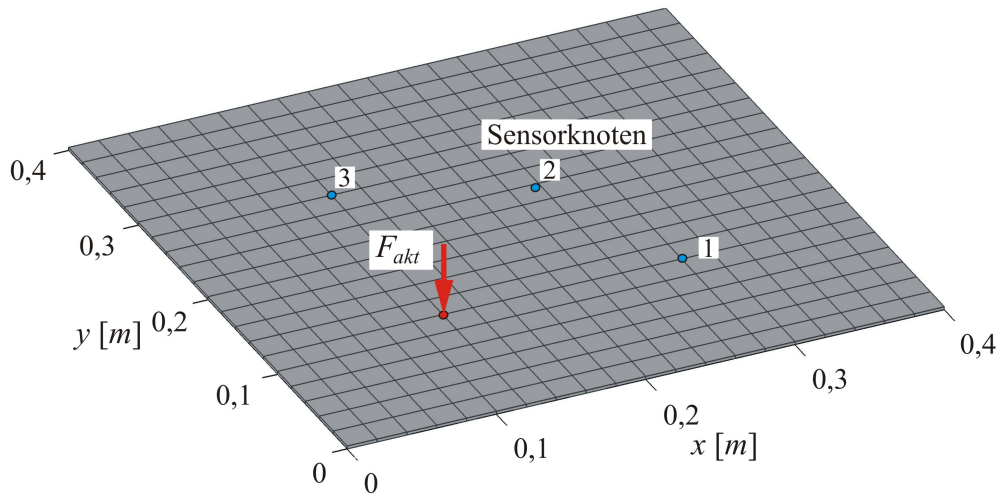


Bild 5.10: Setup zur Untersuchung der Eigenschaften richtungsabhängiger Dämpfungsparameter

In Bild 5.11 sind beispielhaft die Verschiebungsverläufe der drei Sensorknoten dargestellt. Es ist erkennbar, dass sich die Amplitude der Welle an diesen drei Positionen wesentlich unterscheidet. Insbesondere bei dem ersten Wellenpaket (Zeitraum von ca. 80 bis $120\mu\text{s}$) lässt sich die höhere Dämpfung in x -Richtung erkennen, weil die Maximalamplitude des an Sensorknoten 1 aufgezeichneten Signals nur etwa die Hälfte des Wertes an Sensorknoten 3 beträgt. In 45° -Richtung stellt sich ein Mittelwert ein.

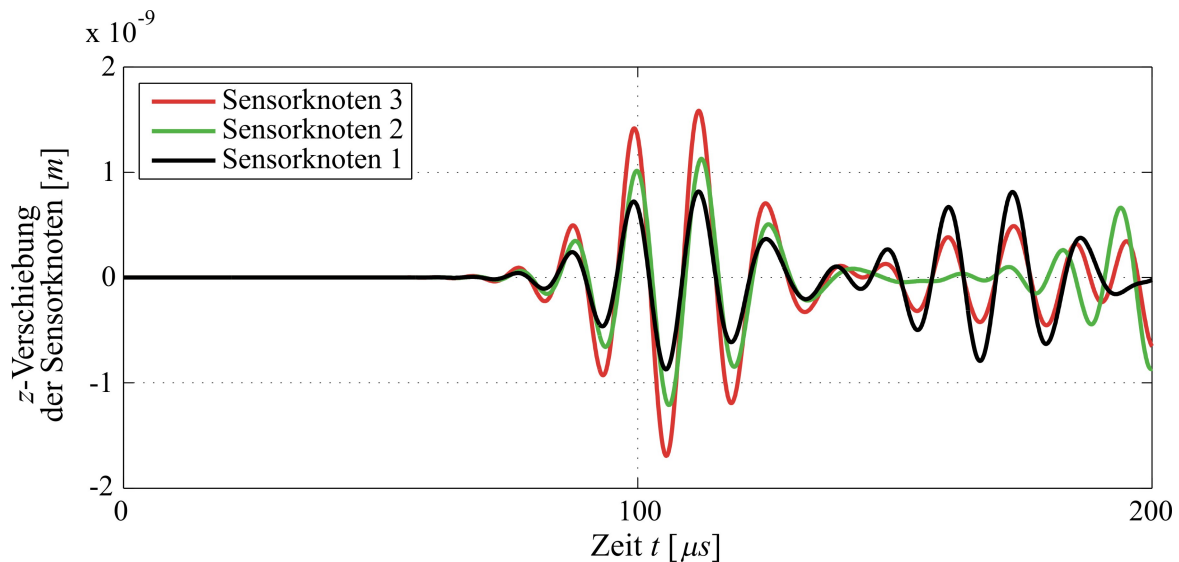


Bild 5.11: Knotenverschiebung in z -Richtung der Sensorknoten 1 (x -Richtung, schwarz), 2 (45° -Richtung, grün) und 3 (y -Richtung, rot)

Die geringe Phasenverschiebung des Signals des Sensorknotens 2 gegenüber den beiden anderen Verläufen entsteht allein dadurch, dass der Abstand dieses Knotens zum Anregungspunkt etwas größer ist, weil im exakt identischen Abstand in 45° -Richtung kein Knoten vorliegt, und daher der nächste Nachbarknoten gewählt ist.

Während bei einem realen SHM-System in der Regel nur Informationen an den Sensorstellen vorliegen, ist es mit Hilfe der Simulation möglich, die Ausbreitung der Welle in der gesamten Struktur darzustellen. Bild 5.12 zeigt eine Momentaufnahme der sich ausbreitenden Welle nach $105\mu\text{s}$. Zur Verdeutlichung sind wiederum Anregungspunkt und Sensorknoten eingezeichnet. Auch aus dieser Darstellung geht die unterschiedliche Abnahme der Amplitude in die verschiedenen Raumrichtungen hervor.

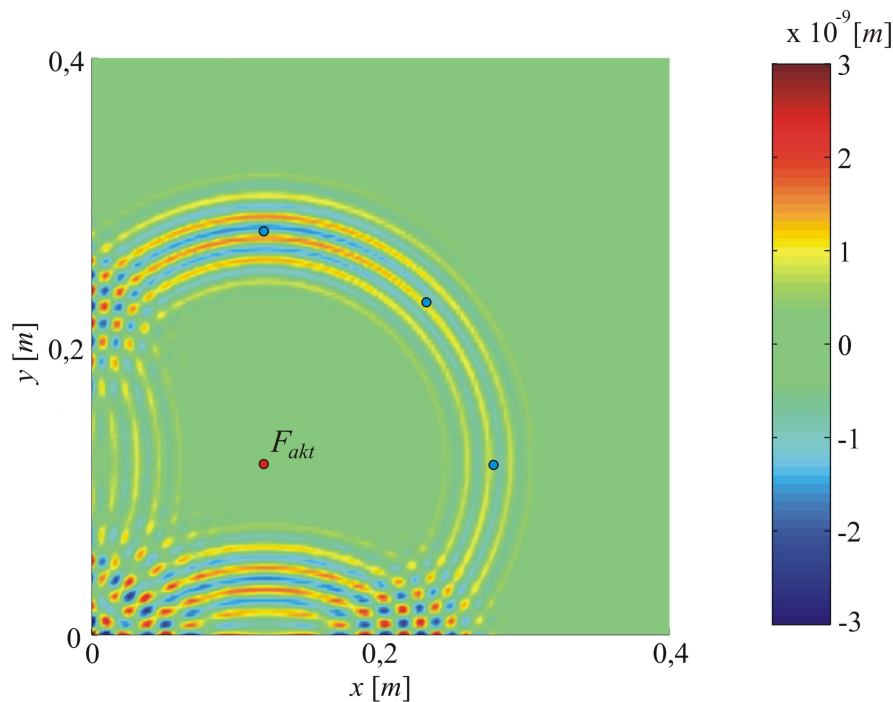


Bild 5.12: Momentaufnahme der sich ausbreitenden Welle nach $105\mu\text{s}$, z -Verschiebung

Prinzipiell kann also mit Hilfe der in Abschnitt 3.7 vorgestellten Formulierung eine richtungsabhängige Materialdämpfung realisiert werden, was eine wesentliche Forderung für eine realitätsnahe Modellierung dieses Effekts bei SHM-Systemen an Faserverbundwerkstoffen darstellt.

5.5 Unterschiedliche Modellierung der Piezoelemente

Ziel dieses Abschnitts ist eine detaillierte Analyse des Einflusses der Modellierung der Piezoelemente auf den Wellenausbreitungsvorgang. Wie in Abschnitt 4.4 dargestellt, werden nicht nur die äquivalenten Kräfte und Momente am Aktuator in Form einer Aktuatorgleichung implementiert und mit Hilfe einer Sensorgleichung elektrische Spannungen am Sensor bestimmt, sondern auch die Beiträge der Piezoelemente zu den Systemmatrizen berücksichtigt. Das einseitige Aufbringen eines Piezoelements auf eine Struktur stört an dieser Stelle jedoch die Symmetrie des Lagenaufbaus, was immer zu einer Kopplung zwischen Membran- und

Verdrehfreiheitsgraden führt. Dadurch verliert die Massenmatrix an diesen Stellen ihre Diagonalgestalt, und die Systemlösung kann nicht mehr vollständig mittels der einfachen Vorschrift (4.46) durchgeführt werden. Somit verringert sich die numerische Effizienz des Verfahrens. In [KUDELA *et al.* 2007] wird daher auf die Berücksichtigung zusätzlicher Beiträge von PZT-Elementen vollständig verzichtet, in [SCHULTE *et al.* 2009] werden für dünne PZTs keine Membran-Verdreh-Koppelterme berücksichtigt. Es stellt sich daher die Frage, wie groß der Einfluss der Piezoelemente auf die Wellenausbreitung ist. Dies wird am Beispiel des in Bild 5.13 dargestellten Systems, einer 2mm dicken Aluminiumplatte mit zwei identischen, 1mm dicken PZT-Elementen, untersucht. Das linke Element wird als Aktuator eingesetzt, am rechten Element das Sensorsignal abgegriffen.

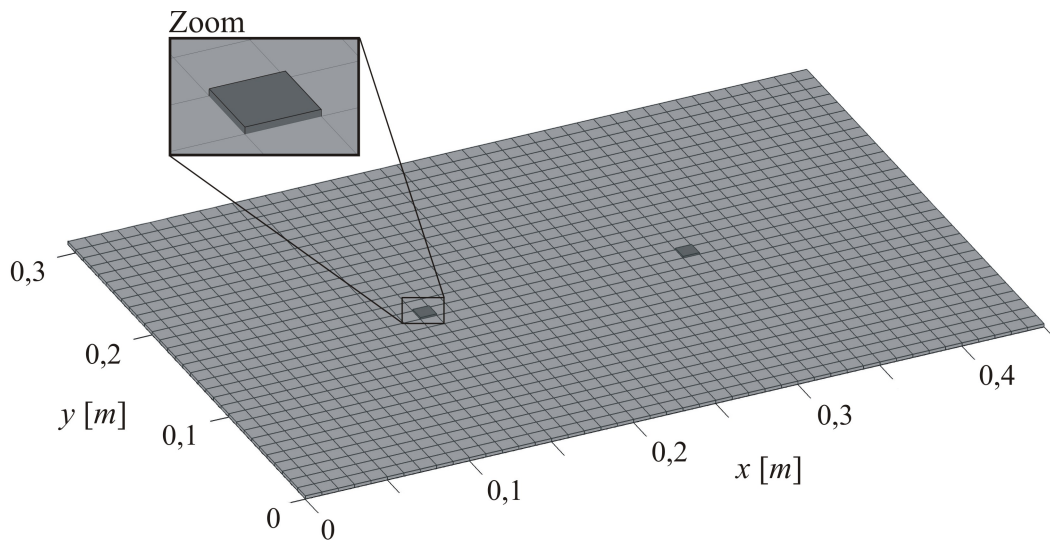


Bild 5.13: Platte mit zwei PZTs zur Untersuchung des Einflusses der Modellierung der Piezoelemente

Die betrachteten Systeme mit vier verschiedenen Modellierungen der Piezoelemente sind in Tabelle 5.3 erläutert.

Tabelle 5.3: Unterschiedliche Modellierung der Piezoelemente

Modell-Nr.	Modell-Bezeichnung	Kurzbeschreibung	Rechenzeit [s]
1	PZTs korrekt	vollständige Systembeiträge der PZTs mit allen Koppeltermen	320
2	ohne PZTs	keine Beiträge der PZTs zum Gesamtsystem	198
3	PZTs diagonal	Systembeiträge ohne Membran-Verdreh-Koppelterme	199
4	PZTs M C diagonal	Steifigkeit mit Membran-Verdreh-Koppeltermen, Massen- und Dämpfungsmatrix ohne Koppelterme	199

Auf den Aktuator wird nun ein Spannungssignal aufgegeben, das der Form der in Abschnitt 5.1 vorgestellten Signale entspricht. Es wird ein Signal der Grundfrequenz 100kHz mit 4 Schwingspielen und einer Amplitude von 10V verwendet. Bild 5.14 zeigt die am Sensor aufgenommenen Spannungssignale bei Anwendung der vier verschiedenen PZT-Modellierungen. Das erste Wellenpaket im Zeitraum von etwa 40 bis $60\mu\text{s}$ korrespondiert zur sich ausbreitenden S_0 -Mode, das nachfolgende Paket mit größerer Amplitude (Zeitbereich 70 bis $110\mu\text{s}$) zur A_0 -Mode. Wie aus Bild 5.14 hervorgeht, stellen sich in Abhängigkeit von der verwendeten Modellierung der Piezoelemente erhebliche Unterschiede im Sensorsignal ein. Während das Signal ohne die Systembeiträge der Piezoelemente (grün) eine ähnliche Amplitude, jedoch eine deutlich veränderte Phasenlage im Vergleich zur korrekten Lösung (rot) aufweist, liefern die beiden anderen Modelle in diesem Fall auch erheblich abweichende Amplituden.

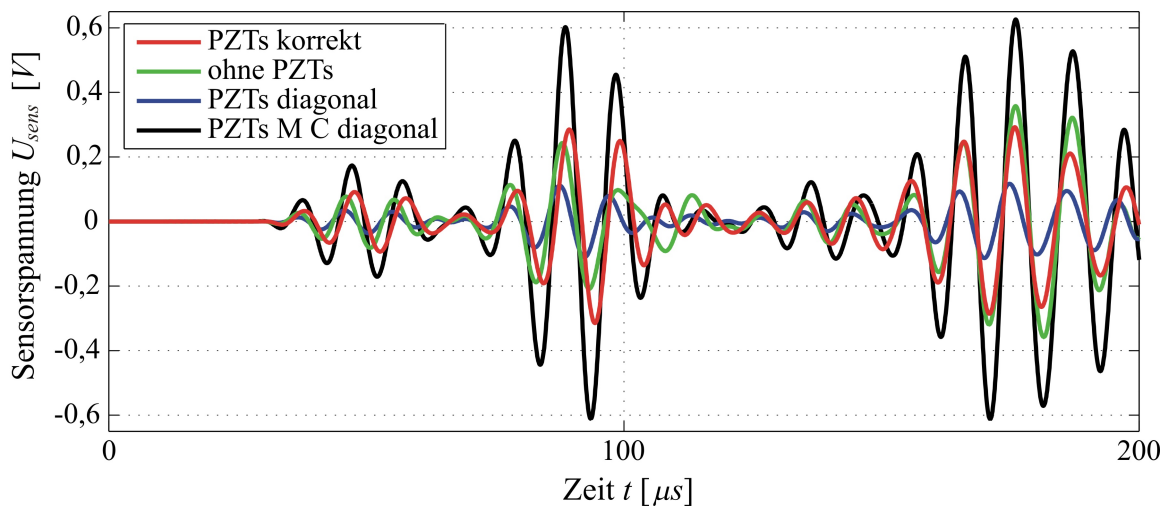


Bild 5.14: Sensorspannung bei verschiedener Modellierung 1mm dicker PZTs; Anregung 100kHz

Durch weitere Studien lassen sich als wesentliche Einflussparameter auf die Abweichungen die Anregungsfrequenz und die Dicke der Piezoelemente erkennen. In Bild 5.15 sind die Ergebnisse der identischen Simulation mit Piezoelementen einer Dicke von $0,5\text{mm}$ dargestellt. In diesem Fall sind die Unterschiede der verschiedenen Modellierungen wesentlich geringer ausgeprägt. Während eine Vernachlässigung aller Koppelterme der Piezoelemente (blau) nach wie vor zu einer zu geringen Amplitude führt, liegen die anderen Signale recht nahe beieinander. Insbesondere das Modell, bei dem nur die Diagonalbeiträge der Massen- und Dämpfungsmatrix der Piezoelemente berücksichtigt werden, liefert eine akzeptable Approximation.

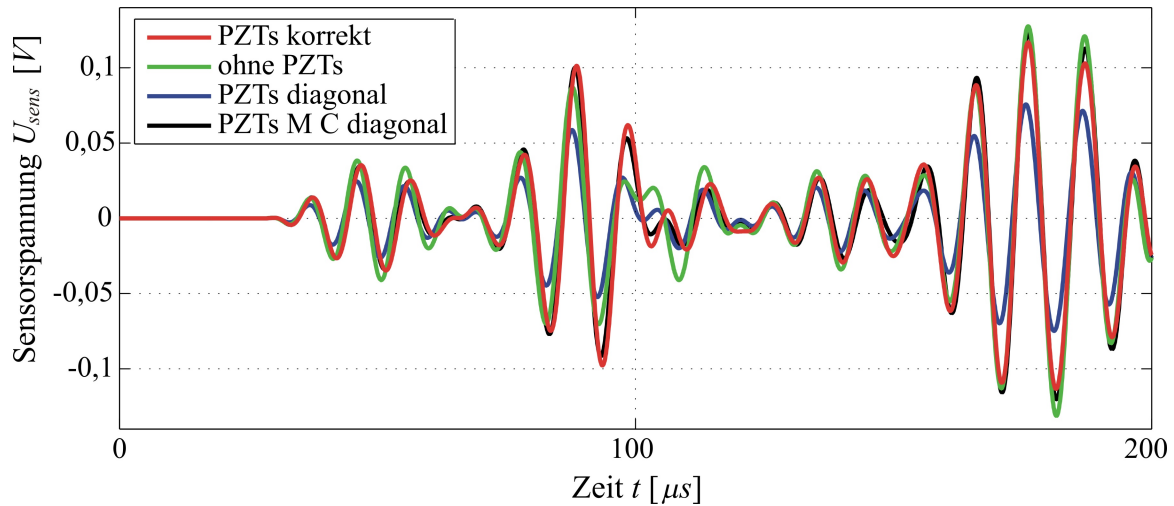


Bild 5.15: Sensorspannung bei verschiedener Modellierung 0,5mm dicker PZTs; Anregung 100kHz

Ein anderer Sachverhalt ergibt sich für ein dickeres PZT-Element. Bild 5.16 zeigt die Ergebnisse für 2mm dicke Piezoelemente.

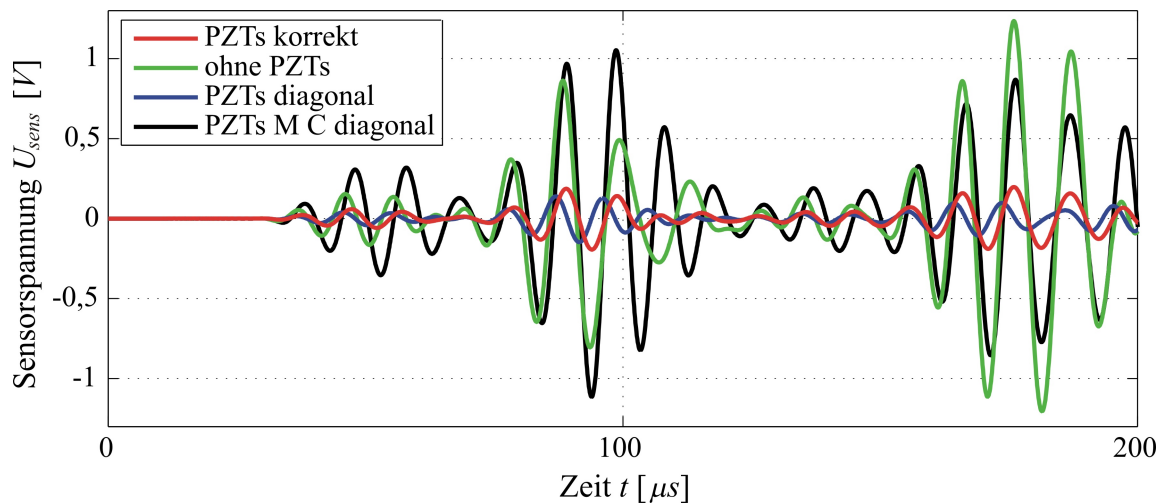


Bild 5.16: Sensorspannung bei verschiedener Modellierung 2mm dicker PZTs; Anregung 100kHz

Im Vergleich zur korrekten Lösung (rot) ergeben sich nun deutlich zu hohe Amplituden, sowohl wenn auf die Systembeiträge der Piezoelemente vollständig verzichtet wird (grün) als auch bei Vernachlässigung der Koppelterme von Massen- und Dämpfungsmatrix (schwarz). Bei zusätzlicher Vernachlässigung der Koppelterme der Steifigkeitsmatrix ist eine erhebliche Phasenverschiebung erkennbar (blau).

Neben der Variation der Dicke der Piezoelemente ist die Analyse des Verhaltens der verschiedenen Modelle bei unterschiedlicher Anregungsfrequenz von Interesse. Für ein Anregungssignal der Grundfrequenz 40kHz kann bei einer PZT-Dicke von 0,5mm das in Bild 5.17 gezeigte Verhalten beobachtet werden.

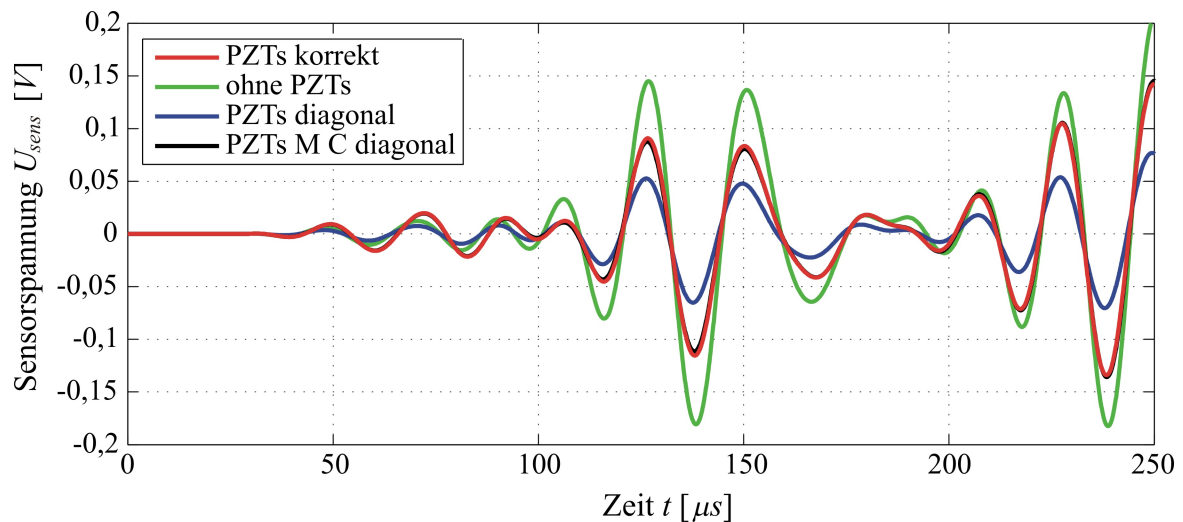


Bild 5.17: Sensorspannung bei verschiedener Modellierung 0,5mm dicker PZTs; Anregung 40kHz

Auch in diesem Fall liefert die Modellierung mit einer diagonalen Massenmatrix (schwarz) ähnliche Ergebnisse wie die korrekte Lösung (rot). Das Modell ohne den Einfluss der PZTs liefert im Bereich der A_0 -Mode zu große Werte (grün), während ohne Berücksichtigung der Koppelterme wiederum zu geringe Spannungen resultieren.

Die an den Piezoelementen durch die Koppelterme auftretende Modenkonzersion kann insbesondere beim direkten Vergleich eines experimentell ermittelten Datensatzes mit einer Simulation eine Rolle spielen, da dadurch zusätzliche Wellenpakete entstehen, die ohne die Koppelterme nicht in der Simulation auftauchen. Um diesen Effekt zu verdeutlichen, stellen die beiden folgenden Bilder zwei Momentaufnahmen der sich ausbreitenden Wellenpakete der A_0 - bzw. Biegemode (Bild 5.18) und der S_0 - bzw. Longitudinalmode (Bild 5.19) nach $65\mu s$ dar. Um im Folgenden nicht weiterhin mit jeweils zwei Begriffen zur Kennzeichnung einer Mode operieren zu müssen, wird an dieser Stelle die Vereinbarung getroffen, dass auch für die mit Hilfe der Simulation berechneten Moden die Begriffe A_0 - und S_0 -Mode verwendet werden, da - wie schon in Kapitel 2.1.5 erläutert - in einem Anregungsbereich $f \cdot h < 1 \text{ MHz mm}$ eine gute Näherung erzielt wird, vergleiche dazu auch Kapitel 6.

Es wird ein Anregungsspannungssignal mit vier Schwingungen der Grundfrequenz 70kHz verwendet. Wie in Bild 5.18 deutlich zu erkennen ist, treten in der Nähe des rechten Piezoelements schon Verschiebungen senkrecht zur Plattenebene auf, obwohl die Wellenpakete der A_0 -Mode noch nicht vom Aktuator bis zum Sensor gelangt sind. Diese zusätzlichen Wellen resultieren allein aus der Modenkonzersion, die eine teilweise Umwandlung der Welle der S_0 -Mode, die schon am Sensor angekommen ist, in eine Welle der A_0 -Mode bewirkt.

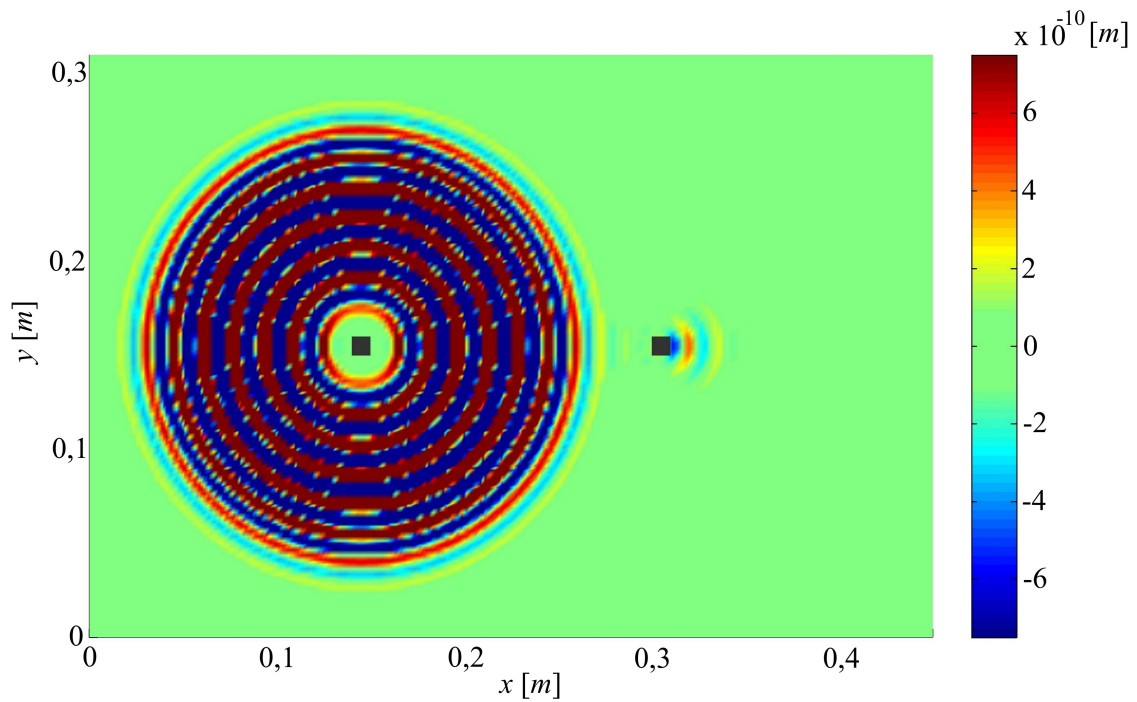


Bild 5.18: Momentaufnahme der z-Verschiebung nach $65\mu s$

Bild 5.19 verdeutlicht, dass die S_0 -Mode den Sensor schon erreicht hat. Außerdem ist erkennbar, dass der Sensor eine kleine Störung des Wellenfeldes bewirkt. Dargestellt ist hier der Betrag des aus x - und y -Verschiebungskomponenten aufgebauten Vektors, weshalb nur positive Werte auftreten.

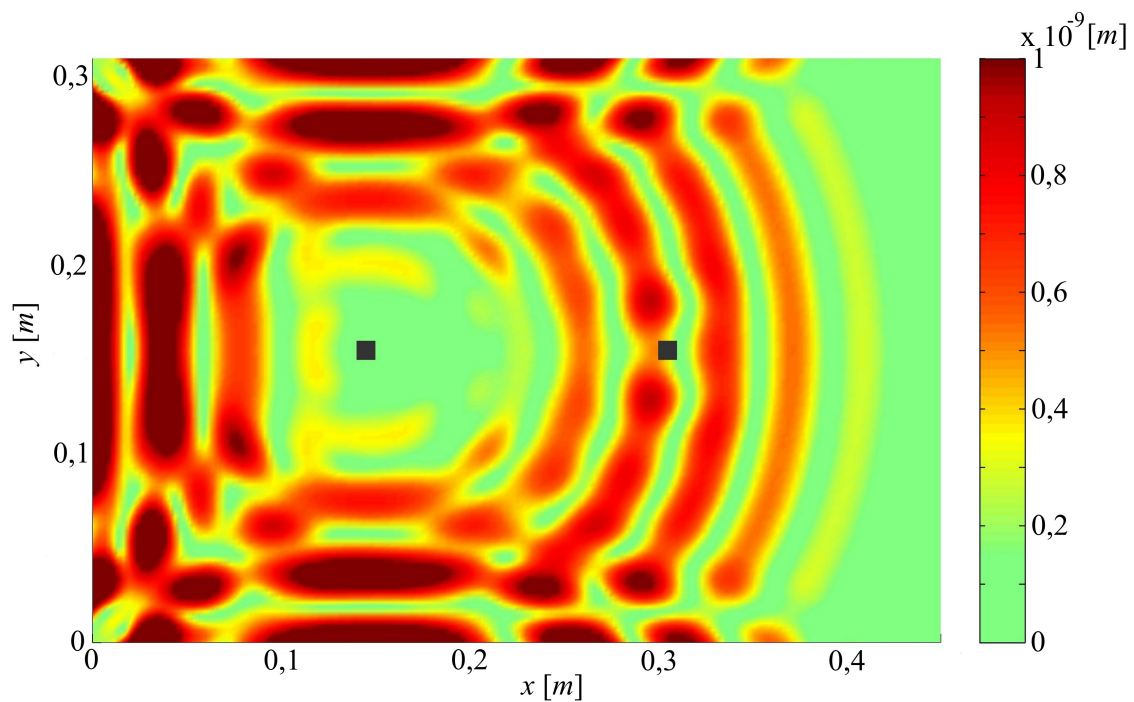


Bild 5.19: Momentaufnahme der Verschiebung in der Ebene nach $65\mu s$

Die auftretende Modenkonzersion an den auf die Struktur aufgebrachten Piezoelementen, die auch experimentell an sprunghaften Querschnittsänderungen zu beobachten ist (vergleiche beispielsweise [LOWE *et al.* 2002]), kann somit innerhalb des Modells nachgebildet werden, sofern die Systembeiträge der Piezoelemente berücksichtigt werden.

Die Auswertung der hier dargestellten sowie einiger weiterer, nicht detailliert dargestellter Simulationen, bei denen Variationen der Dicke der PZTs sowie der Anregungsfrequenzen der verwendeten Signale durchgeführt wurden, erlaubt folgende Schlussfolgerungen:

- Die unterschiedliche Modellierung der Systembeiträge der Piezoelemente hat einen wesentlichen Einfluss auf die resultierenden Spannungssignale, der mit zunehmendem Verhältnis von PZT-Dicke zu Strukturdicke ansteigt;
- Neben Amplitudenfehlern entstehen durch Vernachlässigung der Kopplung auch - teils erhebliche - Phasenverschiebungen, die hauptsächlich auf die zusätzliche Trägheit der PZTs zurückzuführen sind und somit vor allem bei dickeren PZTs auftreten;
- Bei sehr dünnen PZTs liefert das Modell mit diagonaler Massen- und Dämpfungsmatrix in der Regel eine gute Approximation des korrekten Verhaltens, da die Koppelsterme der Trägheit sehr klein werden, bei zunehmender Dicke treten jedoch erhebliche Abweichungen auf.

Zusammenfassend lässt sich die Aussage treffen, dass insbesondere bei der Verwendung von Piezoelementen, die eine ähnliche oder sogar größere Dicke im Vergleich zum analysierten Bauteil aufweisen, eine korrekte Modellierung zu empfehlen ist, während bei dünneren PZTs auch die Näherung durch Vernachlässigung der Koppelsterme der Massen- und Dämpfungsmatrix zu guten Übereinstimmungen mit der korrekten Lösung führt.

5.6 Charakteristik von Wellen in einer versteiften Platte

Eine Konversion der durch angeregte, flächige Piezoelemente eingebrachten Wellenmoden tritt im Allgemeinen natürlich nicht nur an den Piezoelementen auf, sondern auch dort, wo die Struktur sprunghafte Geometrieänderungen aufweist. Eine typische Flugzeug-Substruktur, bei der dieser Fall vorliegt, ist eine flache Schale, die mit Hilfe von so genannten Stringern versteift ist, vergleiche auch Bild 4.1. Anhand der in Bild 5.20 dargestellten, einfachen Grundkonfiguration einer Platte mit einer Versteifungsrippe werden wesentliche Zusammenhänge grundlegend untersucht. Neben der auftretenden Modenkonzersion geht es dabei insbesondere um den „Isolationseffekt“ der Versteifungsrippe auf Wellen innerhalb der Grundplatte und um das Verhalten von Wellen, die im Stringer eingebracht werden. Ein möglichst genaues

Verständnis dieser Vorgänge ist von großer Bedeutung hinsichtlich der optimierten Konfiguration eines SHM-Systems für derartige Strukturen

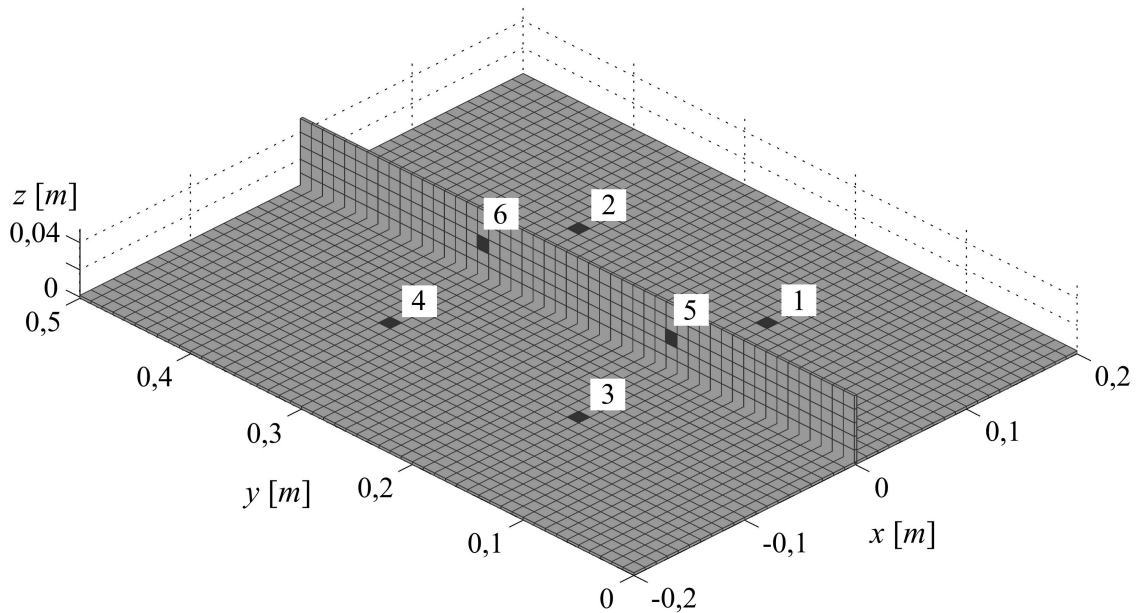


Bild 5.20: Simulationsmodell zur Untersuchung des Einflusses einer Versteifungsrippe auf die Wellenausbreitung

Zunächst wird Piezoelement 3 mit einem Anregungssignal der Grundfrequenz 75kHz und 3 Schwingspielen beaufschlagt. In Bild 5.21 ist eine Momentaufnahme der Verschiebungskomponente normal zur Strukturebene (A_0 -Mode) dargestellt.

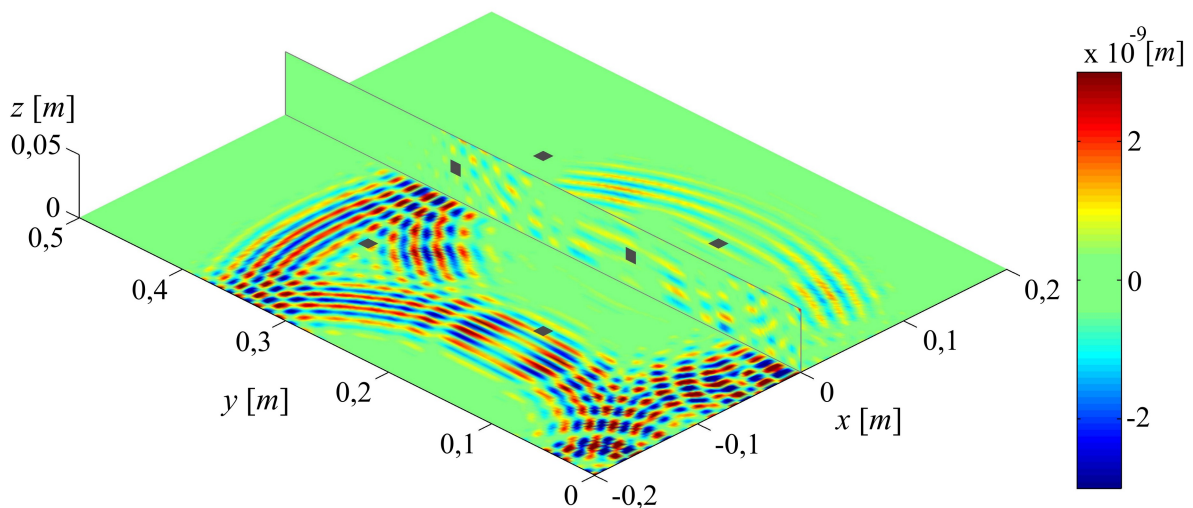


Bild 5.21: Momentaufnahme der Verschiebungskomponente normal zur Strukturebene nach $120\mu\text{s}$

Wie sich deutlich erkennen lässt, wird diese Wellenmode in erheblichem Maße durch die Versteifungsrippe reflektiert. Nur ein geringer Teil der Energie gelangt auf die andere Seite. Ein derartiges Verhalten ist bei der Auslegung eines SHM-Systems von fundamentaler Be-

deutung für eine geeignete Positionierung der Sensorik, da die Ausgangssignale der Sensoren auf der anderen Seite des Stringers eine wesentlich geringere Amplitude aufweisen. Auch für die Interaktion mit einer möglichen Schädigung steht somit entsprechend weniger Energie zur Verfügung, was eine Detektion wesentlich erschwert oder sogar völlig verhindert. Bild 5.22 verdeutlicht, dass dieses Verhalten für die Verschiebungen innerhalb der Strukturebene (S_0 -Mode) weniger ausgeprägt ist.

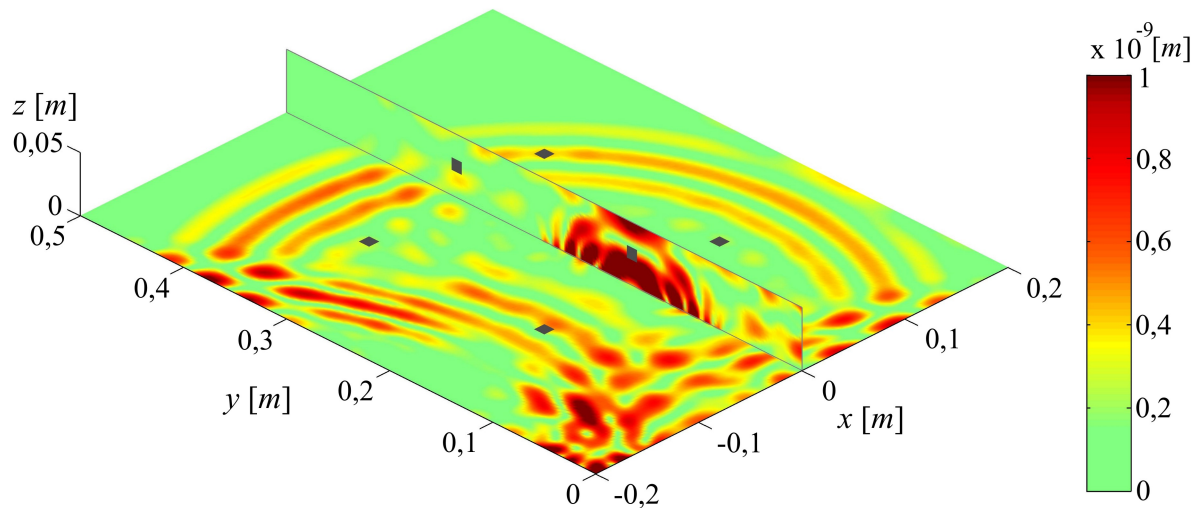


Bild 5.22: Momentaufnahme des Betrags der Verschiebungen in der Strukturebene nach $64\mu s$

Die Verschiebungen mit relativ hoher Amplitude, die in Bild 5.22 innerhalb des Stringers deutlich werden, entstehen durch die Modenkonzersion der A_0 -Mode zur S_0 -Mode. Um dies zu verdeutlichen ist in Bild 5.23 die A_0 -Mode zum gleichen Zeitpunkt dargestellt. Das Wellenpaket hat gerade den Stringer erreicht und führt zur Ausbildung einer Welle der S_0 -Mode innerhalb des Stringers.

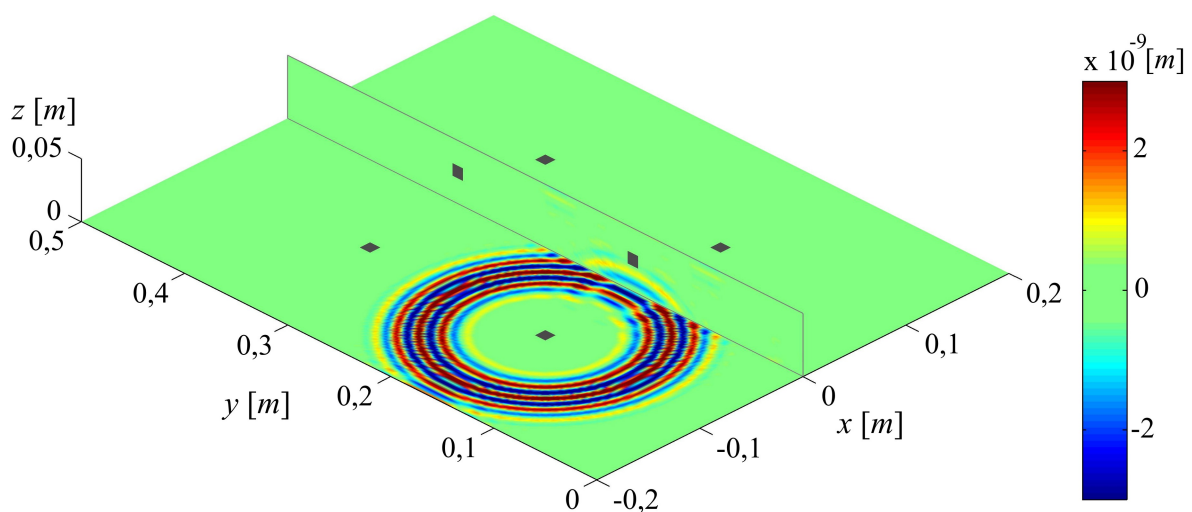


Bild 5.23: Momentaufnahme der Verschiebungskomponente normal zur Strukturebene nach $64\mu s$

Am Stringer tritt jedoch auch Modenkonzersion in die andere Richtung auf, wie sich an der Darstellung des Betrag des aus x - und y -Verschiebungskomponenten aufgebauten Vektors in Bild 5.24 erkennen lässt. Während diese Verschiebungskomponenten innerhalb der Grundplatte die S_0 -Mode approximieren, stellt die x -Komponente der Verschiebung im Stringer die A_0 -Mode dar. Dies lässt sich sehr deutlich auch an den unterschiedlichen Wellenlängen erkennen.

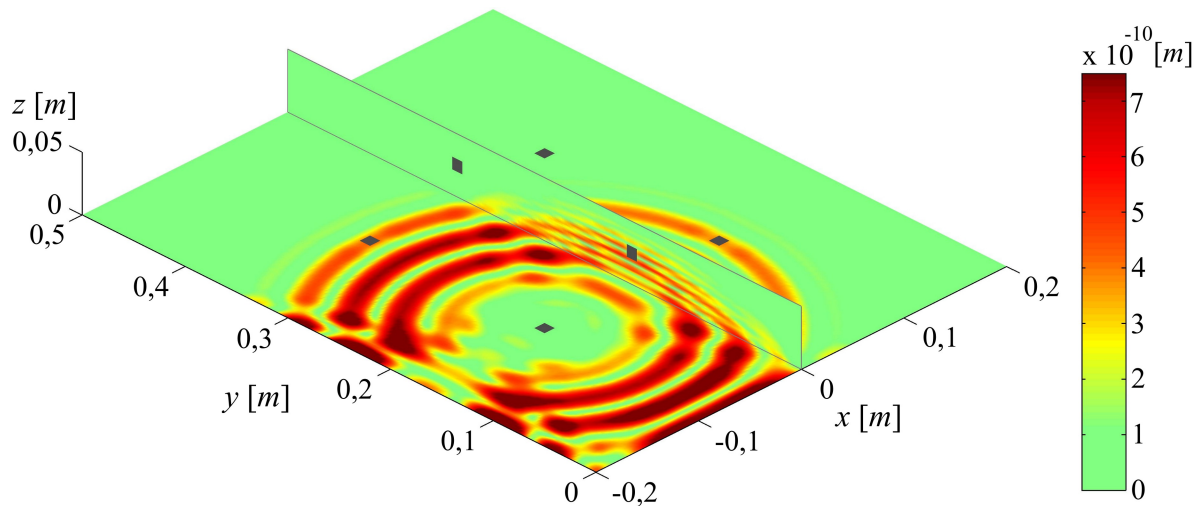


Bild 5.24: Momentaufnahme des Betrag des aus x - und y -Verschiebungskomponenten aufgebauten Vektors nach $44\mu\text{s}$

Weitere interessante Fragestellungen betreffen auch das Verhalten von Wellen, die innerhalb des Stringers angeregt werden. Durch die Ankopplung an die Grundplatte geht mit zunehmender Wellenlaufzeit ein immer größer werdender Anteil von der Energie aus dem Stringer in die Grundplatte über, wie im Folgenden dargestellt ist. Bild 5.25 und Bild 5.26 zeigen die Verschiebung innerhalb der Strukturebene (S_0 -Mode) nach $34\mu\text{s}$ sowie $59\mu\text{s}$. Dabei wird der erhebliche Energiefluss in die Grundplatte deutlich.

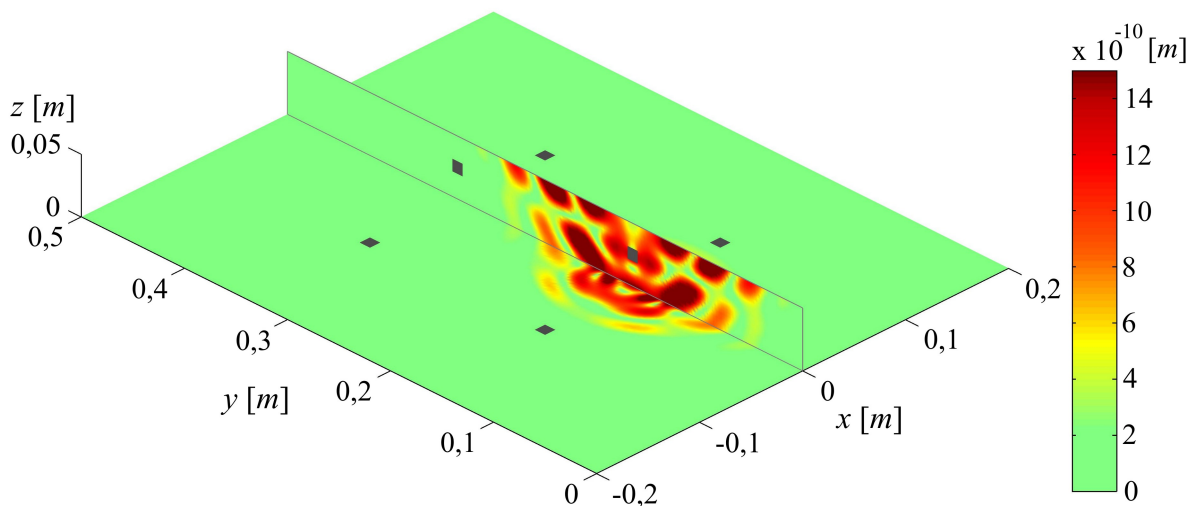


Bild 5.25: Momentaufnahme des Betrags der Verschiebungen in der Strukturebene nach $34\mu\text{s}$

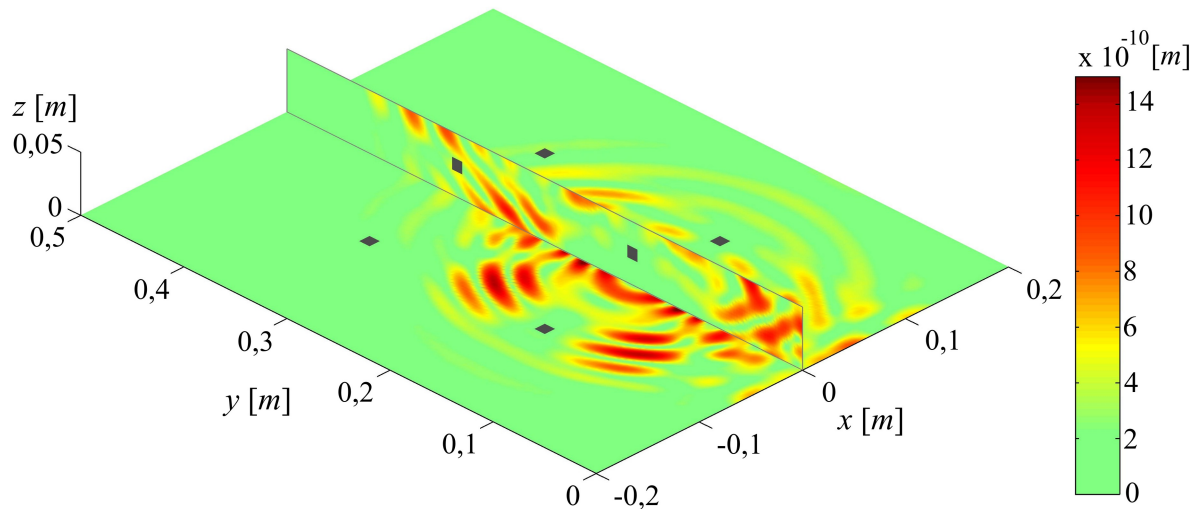


Bild 5.26: Momentaufnahme des Betrags der Verschiebungen in der Strukturebene nach $59\mu\text{s}$

Die Energie der A_0 -Mode bleibt demgegenüber über weite Strecken zu einem größeren Anteil innerhalb des Stringers erhalten, wie aus Bild 5.27 ersichtlich ist. Für die Auslegung von Systemen zum gezielten Monitoring der Stringer, was nach [SCHMIDT *et al.* 2004] einen potentiellen Anwendungsfall darstellt, sind auch diese Informationen von großer Bedeutung, da der maximale Abstand der PZTs maßgeblich davon beeinflusst wird, wie lange ein ausreichender Anteil des Wellenpakets innerhalb des Stringers verbleibt. Die erhebliche Bedeutung dieses Sachverhalts zeigt auch Abschnitt 4.6 der Dissertationschrift [MENDELKAMP 2006].

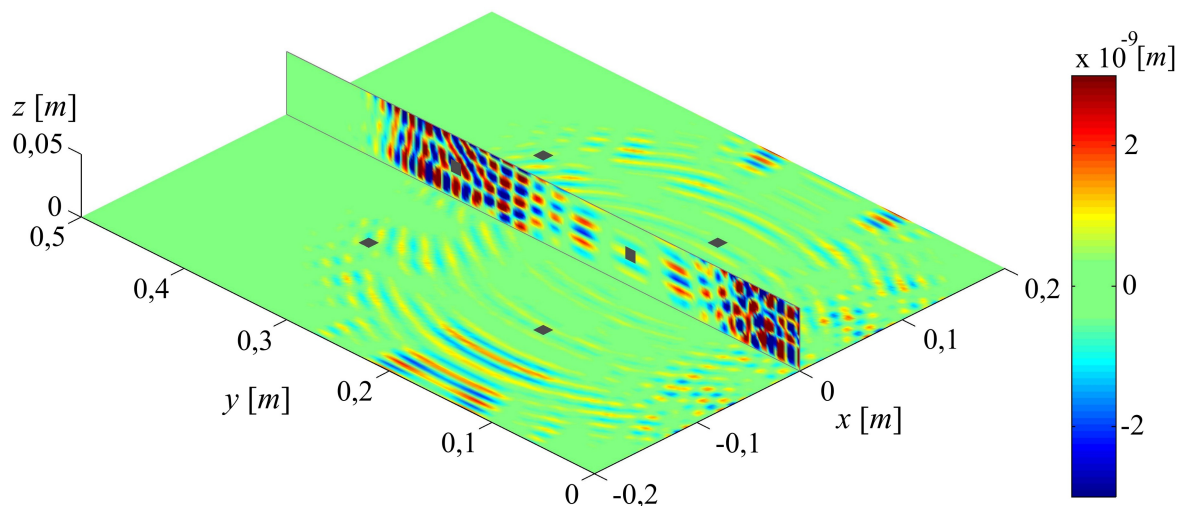


Bild 5.27: Momentaufnahme der Verschiebungskomponente normal zur Strukturebene nach $120\mu\text{s}$

5.7 Interaktion von Wellen mit unterschiedlich modellierten Schädigungen

Die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten, grundlegenden numerischen Untersuchungen beschäftigen sich ausschließlich mit der Wellenausbreitung in ungeschädigten Strukturen. Zur Modellierung von SHM-Systemen ist jedoch auch eine ausreichend genaue Abbildung

der Interaktionen mit Schädigungen von großer Bedeutung, weshalb in diesem Abschnitt die Auswirkungen unterschiedlicher Schädigungsmodelle (vergleiche Kapitel 4.6) untersucht werden. Die Basis dazu ist das Simulationsmodell einer aus acht jeweils $0,5\text{mm}$ dicken Lagen aufgebauten Aluminiumplatte, die mit vier identischen, symmetrisch angeordneten Piezoelementen versehen ist, Bild 5.28. Es werden zunächst 5 GLL-Knoten pro Elementkante verwendet.

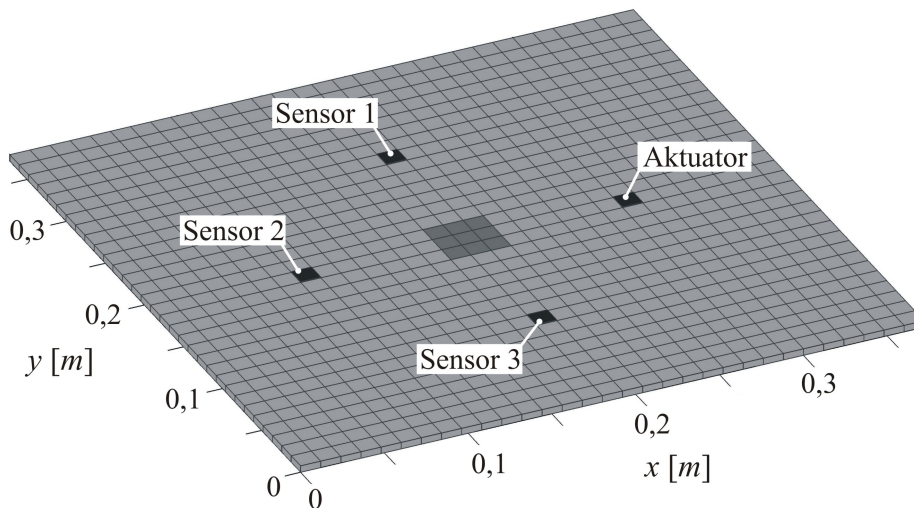


Bild 5.28: Einfaches Modell zur Untersuchung unterschiedlicher Methoden der Simulation von Delaminationen

Auf die Modellierung von unterschiedlichen anisotropen Eigenschaften einzelner Lagen, wie sie bei realen Laminaten vorliegen, wird an dieser Stelle bewusst verzichtet, um den Einfluss einer Delamination ausschließlich in Abhängigkeit des Abstandes zur Plattenmittelfläche zu untersuchen. Innerhalb der in Bild 5.28 dunkelgrau dargestellten neun Elemente in der Plattenmitte werden unterschiedliche Schädigungen eingebracht, deren Auswirkungen auf die Sensorsignale miteinander verglichen werden.

5.7.1 Modellierung einer Delamination durch getrennte Elementlagen verglichen mit einer Reduktion des E-Moduls

Wie aus Abschnitt 4.6 hervorgeht kommt zur Modellierung einer Bauteilschädigung in vielen Fällen die lokale Reduktion des Elastizitätsmoduls zum Einsatz. Daher wird für die einfachsten Schädigungsmodelle eine Verringerung des E-Moduls der neun Elemente um 25% respektive 50% vorgenommen. Im Vergleich dazu wird gemäß Abschnitt 4.6.2 die Delamination durch zwei voneinander getrennte Elementlagen oberhalb und unterhalb der Delamination nachgebildet. Es werden dazu vier verschiedene Positionen der delaminierten Lagen über der Plattendicke modelliert, Bild 5.29.

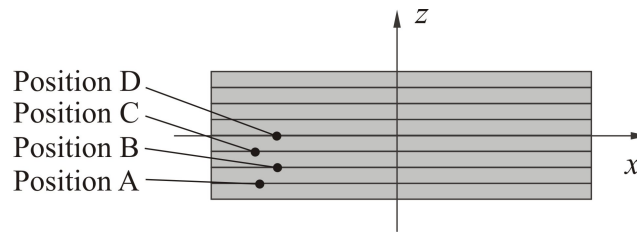


Bild 5.29: Zur Lage der Delamination über der Plattendicke

Aus Symmetriegründen werden Delaminationen zwischen den verbleibenden Lagen oberhalb der neutralen Ebene nicht zusätzlich betrachtet. Kontaktbedingungen zwischen den getrennten Elementlagen kommen zunächst nicht zum Einsatz. Der Aktuator wird mit einem aus vier Schwingspielen bestehenden Burst der Grundfrequenz 50kHz beaufschlagt. Mit Hilfe des entsprechenden Dispersionsdiagramms folgt daraus eine Wellenlänge der A_0 -Mode von 25mm . Bei einer Kantenlänge der Schädigung von 36mm , siehe Bild 5.28, folgt ein Verhältnis der Schadensgröße zur Wellenlänge von ca. 1,55.

In Bild 5.30 sind die Sensorspannungen an Sensor 2 für einen Teil der betrachteten Schädigungsmodelle aufgetragen (die Darstellung aller Modelle in diesem Diagramm ist zu unübersichtlich). Die Schädigung liegt exakt in der Mitte des direkten Wellenlaufwegs vom Aktuator zum Sensor.

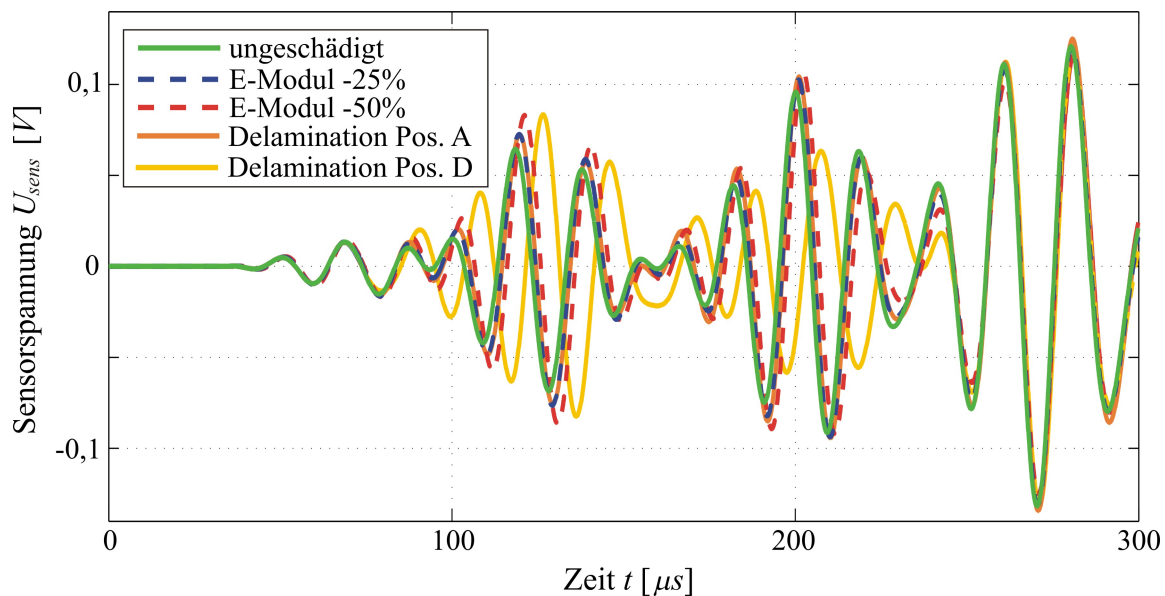


Bild 5.30: Vergleich unterschiedlicher Schädigungsmodelle für eine Delamination

Es wird deutlich, dass die Modellierung der Delamination in unterschiedlicher Höhe einen erheblichen Einfluss auf die am Sensor detektierten Wellenpakete hat. Während das Wellenpaket der S_0 -Mode ($35\mu\text{s}$ bis $80\mu\text{s}$) kaum beeinflusst wird, weisen die folgenden beiden Pakete der direkten A_0 -Mode ($85\mu\text{s}$ bis $150\mu\text{s}$) und der am linken Ende reflektierten A_0 -Mode ($150\mu\text{s}$ bis $230\mu\text{s}$) erhebliche Unterschiede zum Signal der ungeschädigten Struktur auf. Das

letzte Wellenpaket ($>240\mu s$) wird hauptsächlich durch Wellen verursacht, die am oberen und unteren Rand der Platte reflektiert sind, also nicht direkt durch die geschädigte Region gelaufen sind. Daher treten nur geringe Unterschiede zur ungeschädigten Struktur auf.

Um wesentliche Eigenschaften der unterschiedlichen Modelle genauer herauszuarbeiten, werden S_0 - und A_0 -Mode detaillierter betrachtet. In Bild 5.31 ist die S_0 -Mode vergrößert dargestellt, wobei die gleiche Legende wie in Bild 5.30 gilt. Wie sich erkennen lässt bewirkt eine Verringerung des E-Moduls eine zunehmende Verschiebung des am Sensor ankommenden S_0 -Wellenpakets. Die Modellierung der Delamination durch unterschiedliche Elementlagen hat hingegen keinen Einfluss auf die S_0 -Mode. Die Signale der entsprechenden Modelle fallen exakt mit dem Sensorsignal der ungeschädigten Struktur zusammen.

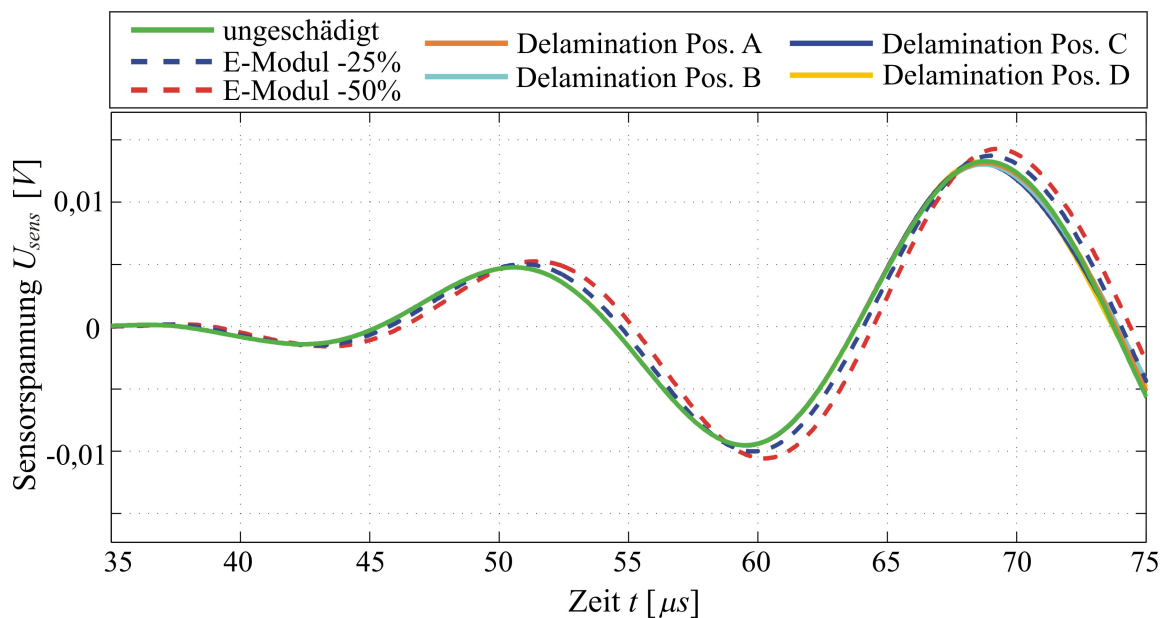


Bild 5.31: Auswirkung unterschiedlicher Schädigungsmodelle auf die S_0 -Mode

Aus dieser Betrachtung geht klar hervor, dass die Auswirkungen einer Delamination qualitativ nicht korrekt durch eine Verringerung der lokalen Systemsteifigkeit in Form einer Absenkung des E-Moduls beschrieben werden kann. Während die S_0 -Mode eine deutliche Sensitivität gegenüber dem reduzierten E-Modul aufweist, ist diese Sensitivität bei der Modellierung durch getrennte Elementlagen nicht gegeben, wie es auch die physikalische Anschauung vermuten lässt.

In Bild 5.32 sind die Wellenpakete der A_0 -Mode vergrößert dargestellt. Auch hier gilt weiterhin die Legende aus Bild 5.30. Es wird deutlich, dass die Verringerung des E-Moduls einen ähnlichen Einfluss auf das Sensorsignal der A_0 -Mode hat wie die Modellierung durch getrennte Elementlagen. Insbesondere stimmt das Sensorsignal bei Reduzierung des E-Moduls um 25% sehr gut mit dem Modell getrennter Elementlagen in Position A überein.

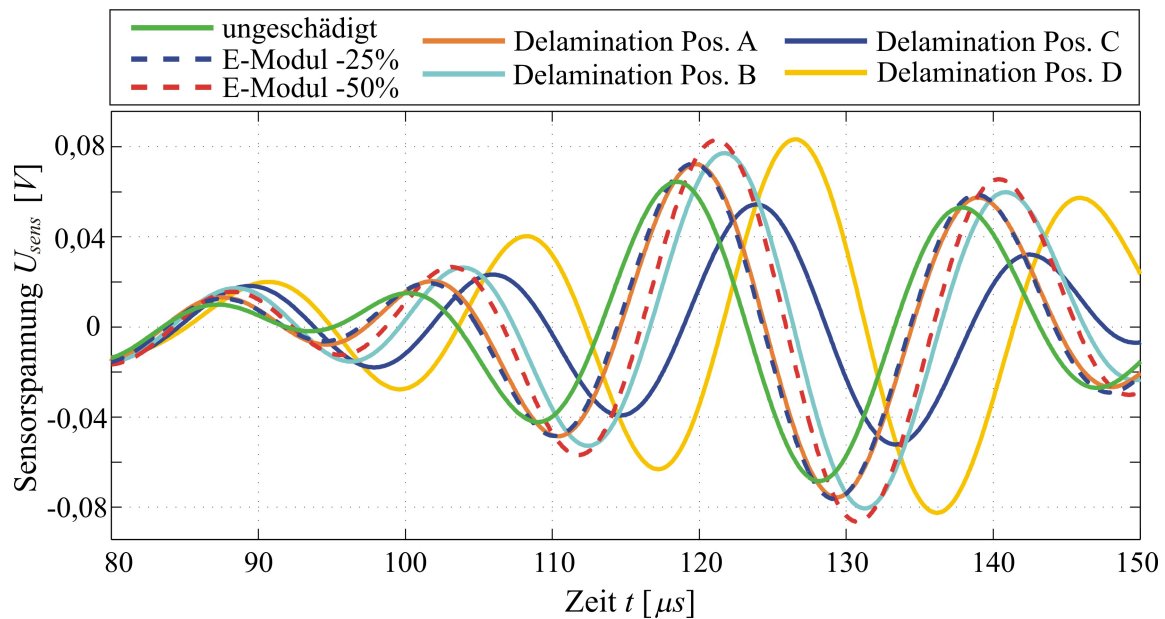


Bild 5.32: Auswirkung unterschiedlicher Schädigungsmodelle auf die A_0 -Mode

Als einfache Alternative zu einer Absenkung des E-Moduls bietet sich an, stattdessen nur den Schubmodul innerhalb des delaminierten Gebiets abzusenken. Dadurch wäre es möglich, die Veränderungen des Sensorsignals der A_0 -Mode nachzubilden, ohne die Signale der S_0 -Mode zu verändern.

Die Modellierung mit Hilfe getrennter Elementlagen zeigt zusätzlich jedoch eine starke Abhängigkeit von der Lage der Delamination innerhalb des Plattenquerschnitts, Bild 5.32. Dieser Effekt lässt sich auch durch eine Absenkung des Schubmoduls nicht nachbilden, so dass dieser Ansatz hier nicht weiter verfolgt wird. Die geringsten Unterschiede zur ungeschädigten Struktur lassen sich bei der Delamination erkennen, die am weitesten von der Plattenmittelebene entfernt liegt (Pos. A). Mit zunehmender Nähe zur Mittelebene wird der Einfluss der Delamination auf die Geschwindigkeit der sich ausbreitenden A_0 -Welle ebenfalls größer. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass dieser Zusammenhang nur für das hier betrachtete Laminat aus identischen, isotropen Einzelschichten gilt. Unterschiedliche anisotrope Laminatschichten bewirken einen zusätzlichen Einfluss, der für jedes konkrete Laminat zu bestimmen ist. Vergleiche dazu auch das Anwendungsbeispiel in Abschnitt 7.1.2.

5.7.2 Einfluss von Kontakt bei der Modellierung einer Delamination durch getrennte Elementlagen

Bei den Untersuchungen im vorherigen Abschnitt ist der mögliche Kontakt zwischen den getrennten Elementlagen einer Delamination vernachlässigt worden. Diesem Modell liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich bei einer realen Delamination ein dünner Spalt zwischen den

Schichten bildet und somit die bei der Wellenausbreitung auftretenden, kleinen Verformungen (Größenordnung $10^{-8}m$) keinen Kontakt bewirken. Falls sich bei der Delamination jedoch kein Spalt ausbildet, so sind zusätzliche Kontaktbedingungen einzuhalten, da sich die Elemente in der Simulation sonst durchdringen können, vergleiche Abschnitt 4.6.3.

Bei dem hier durchgeführten Vergleich dieser beiden Modelle ist grundsätzlich zwischen den lokalen Einflüssen auf das Verschiebungsfeld im Bereich der Delamination und den globalen Einflüssen auf die resultierenden Sensorsignale zu unterscheiden. Bei einem Einsatz der hier vorgestellten Methode im Rahmen der Simulation eines kompletten SHM-Systems ist letztgenannter Einfluss sicherlich von größerer Bedeutung. Für ein detailliertes Verständnis der Vorgänge im Bereich einer Delamination ist jedoch auch eine Betrachtung des erstgenannten Punktes sinnvoll.

Es wird wiederum die in Bild 5.28 vorgestellte Konfiguration mit einer identischen Anregung wie im obigen Abschnitt betrachtet. Der Einfluss der Berücksichtigung der Kontaktbedingung hängt von der Lage der Delamination über dem Plattenquerschnitt ab, wie aus Bild 5.33 hervorgeht, wo die Signale des Sensors 2 für die unterschiedlichen Delaminationspositionen gemäß Bild 5.29 aufgetragen sind. Der Einfluss der Berücksichtigung des möglichen Kontakts zwischen den Elementlagen auf das Sensorsignal ist im Vergleich zum Unterschied der delaminierten Struktur gegenüber dem ungeschädigten Zustand gering.

Bei einer genau auf der Plattenmittelebene liegenden Delamination (Position D) tritt bei isotropen Einzellagen kein Kontakt auf, sofern sich keine zusätzliche Anregung innerhalb des delaminierten Bereichs befindet. Daher unterscheiden sich die Lösungen mit und ohne Kontaktbedingung nicht. Der größte Einfluss liegt bei Delamination an Position C - in der Nähe der Mittelebene - vor, mit zunehmender Entfernung nimmt der Einfluss auf das resultierende Sensorsignal ab. Dies ist anschaulich gut nachvollziehbar, weil mit zunehmendem Abstand der Delamination von der Plattenmittelebene eine der Schichten immer dünner wird, wodurch sich ihre Masse verringert. Die Rückwirkung dieser Schicht bei einem Kontakt mit der wesentlich dickeren anderen Schicht nimmt somit immer weiter ab. Insbesondere für die an Position C angebrachte Delamination zeigt das Sensorsignal unter Berücksichtigung des Kontakts zusätzliche Schwingungen höherer Frequenz, die jedoch nur eine geringe Amplitude aufweisen (besonders deutlich sichtbar im Bereich $145\mu s$ bis $170\mu s$). Diese werden durch Kontaktvorgänge hervorgerufen.

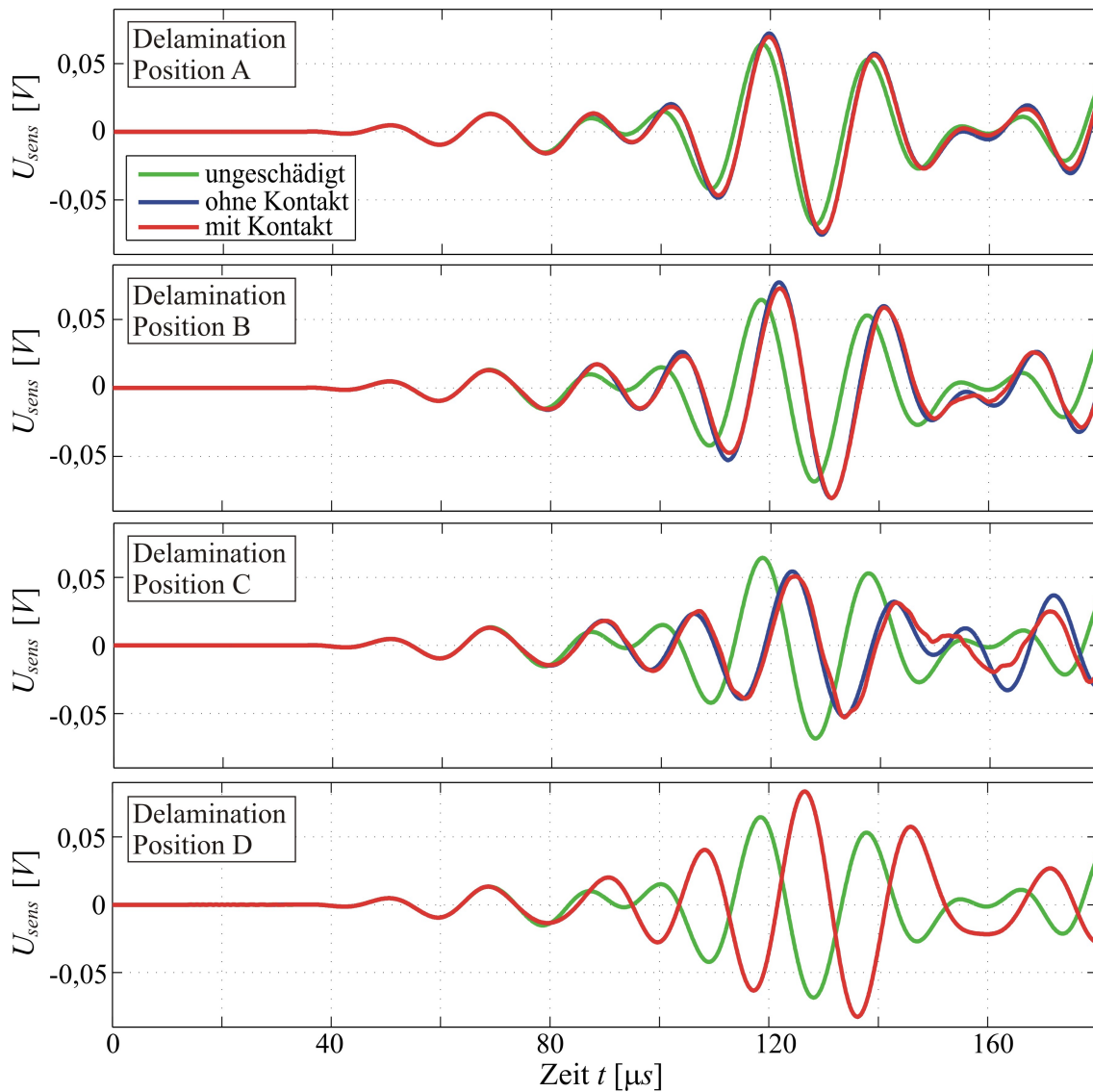


Bild 5.33: Zum Einfluss des Kontakts zwischen delaminierten Schichten auf die Sensorspannung

Im Gegensatz zu den Sensorsignalen wird das lokale Verschiebungsfeld innerhalb der delaminierten Region deutlich beeinflusst, wie die Darstellungen am Beispiel einer in Position B eingebrachten Delamination verdeutlichen. Bild 5.34 und Bild 5.35 zeigen einen Ausschnitt des z -Verschiebungsfeldes in der Mitte der Platte zum gleichen Zeitpunkt ohne und mit Kontaktbedingungen. Die Schädigungsgröße erstreckt sich dabei über etwa 1,5 Wellenlängen, was das weiter oben berechnete Verhältnis von Schädigungsgröße zur Wellenlänge bestätigt.

An den delaminierten Bereich angrenzende, ungeschädigte Elemente sind grün, die obere Elementlage des Delaminationsbereichs ist rot und die untere Lage blau dargestellt. Da die untere Lage bei Delamination in Position B deutlich dünner als die obere Lage ist, treten in dieser Lage größere Verschiebungsamplituden auf.

Ohne Kontaktbedingung durchdringen sich die beiden Elementlagen im Bereich der Delamination (Bild 5.34). Demgegenüber wird durch die Kontaktformulierung diese Durchdringung vollständig verhindert (Bild 5.35).

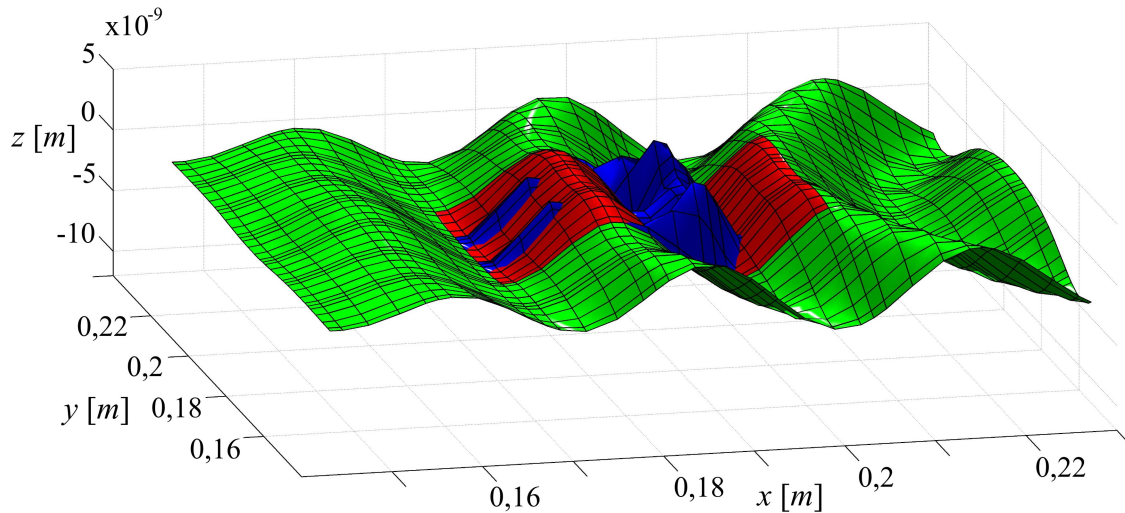


Bild 5.34: *z*-Verschiebungsfeld im Bereich der Delamination ohne Kontaktbedingungen: obere (rot) und untere (blau) Elementlage durchdringen sich

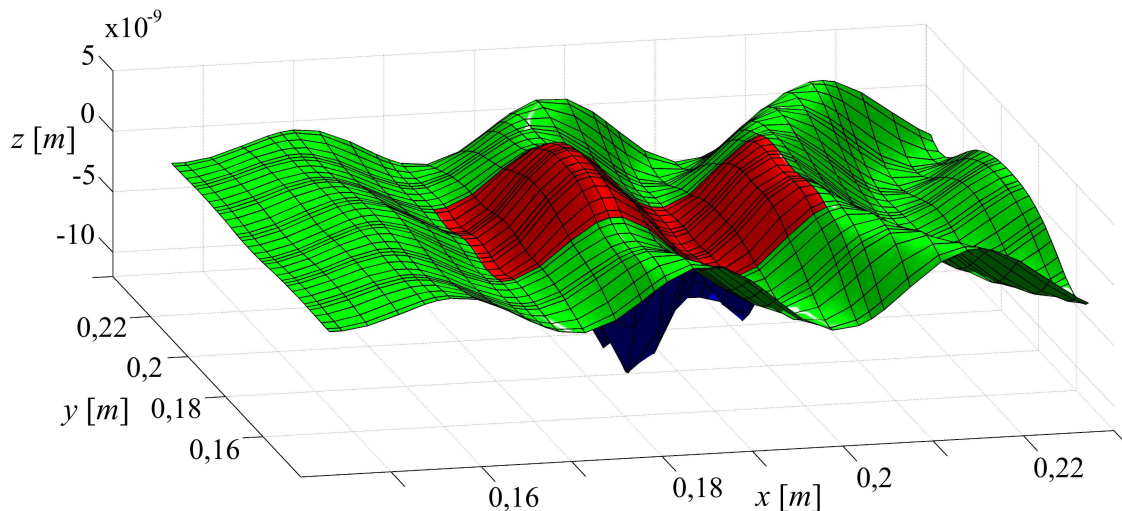


Bild 5.35: *z*-Verschiebungsfeld im Bereich der Delamination mit Kontaktbedingungen: obere (rot) und untere (blau) Elementlage durchdringen sich nicht

Der Vergleich beider Bilder zeigt, dass sich durch die Kontaktbedingung das Verschiebungsfeld innerhalb der delaminierten Region erheblich ändern kann, was insbesondere für die dünnere, blau dargestellte Lage gilt. Daraus ergeben sich jedoch nur vergleichsweise geringe Änderungen am Verschiebungsfeld der gesamten Struktur. Sowohl Phasenlage wie auch Amplitude der Welle weisen nur geringe Unterschiede auf. Dies erklärt die relativ geringen Auswirkungen auf die resultierenden Sensorsignale.

5.7.3 Einfluss der Delaminationsform auf die Veränderungen des Wellenfeldes

Einen wesentlichen Einfluss auf die Veränderungen des Wellenfeldes - und damit auf die Detektierbarkeit der Schädigung an den Sensoren - hat auch die Form der Delamination. Um diesen Einfluss zu verdeutlichen, wird anstatt des 3×3 Elemente großen, delaminierten Bereichs (vergl. Bild 5.28) eine alternative Vernetzung implementiert, Bild 5.36.

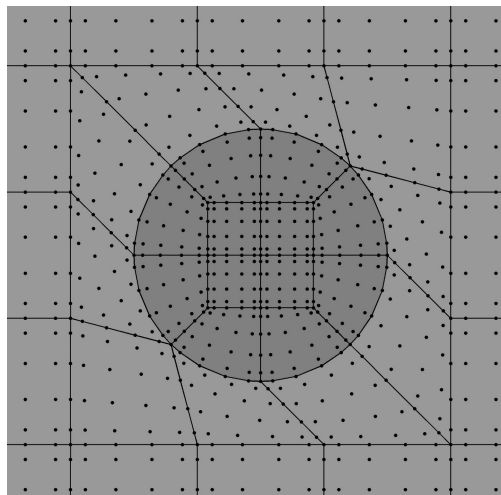


Bild 5.36: Vernetzung zur Generierung einer kreisförmigen Delamination

Die Delamination wird im dunkelgrau dargestellten, kreisförmigen Gebiet implementiert. Wie aus Bild 5.36 hervorgeht, treten im Rahmen dieses Elementgitters auch verzerrte und krummlinig berandete Elemente auf. Vor der Betrachtung des Einflusses der unterschiedlichen Delaminationen werden daher einige Untersuchungen zum Einfluss dieses Netzes durchgeführt. Sie zeigen keine negativen Effekte moderat verzerrter Netze auf das Ergebnis, so lange eine ausreichende räumliche Diskretisierung (vergl. Abschnitt 5.2) gegeben ist. Es treten keine numerischen Artefakte auf, die zu einer Verzerrung des Wellenfeldes führen würden. Als Nachweis sind in Bild 5.37 die an Sensor 2 aufgezeichneten Signale für die ungeschädigte Struktur mit den beiden unterschiedlichen Elementnetzen aufgetragen. Zur Anregung wird ein aus vier Schwingspielen bestehendes Burstsignal der Grundfrequenz 100kHz verwendet. Wegen der sich daraus ergebenden geringeren Wellenlänge werden die Elementknoten pro Kante auf $N_{GLL}=6$ erhöht, wie auch in Bild 5.36 zu sehen ist. Als Verhältnis zwischen Schädigungsgröße und Wellenlänge folgt für die quadratische Schädigung der Kantenlänge 36mm ein Wert von etwa 2,4 und für die runde Schädigung des Durchmessers 24mm ein Wert von etwa 1,6.

Wie aus Bild 5.37 hervorgeht, führt das nicht regelmäßige Gitter zu keiner signifikanten Veränderung des resultierenden Sensorsignals.

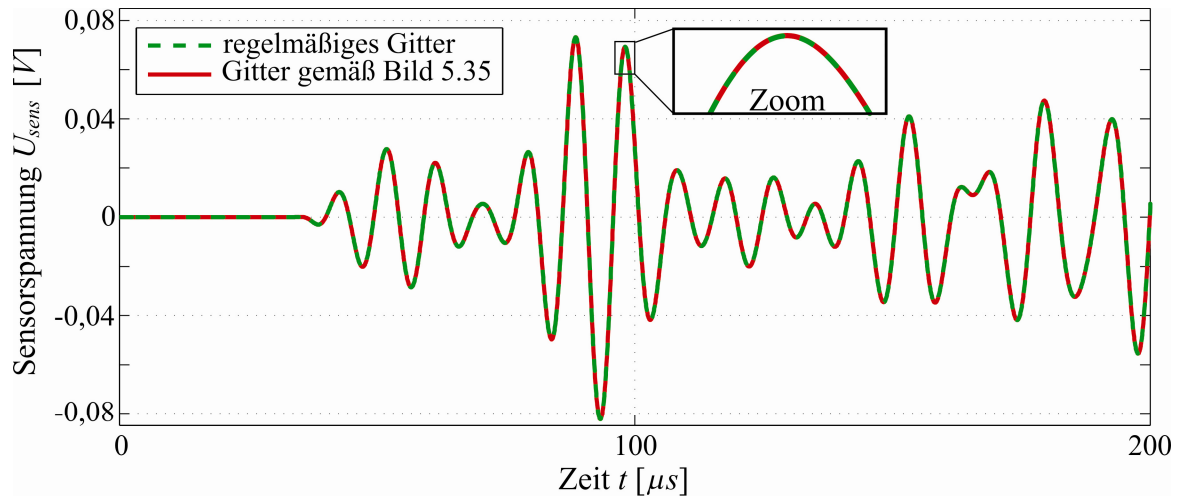


Bild 5.37: Untersuchung zum Einfluss eines nicht regelmäßigen Gitters auf die Wellenausbreitung

Dies wird auch durch eine Analyse ausgewählter Knotenverschiebungen im Bereich des veränderten Gitters bestätigt, die hier nicht detailliert angegeben sind. Grundsätzlich ergibt sich daher durch die verzerrten bzw. krummlinig berandeten Elemente kein signifikanter, negativer Einfluss auf die Qualität des Ergebnisses.

Die folgenden beiden Bilder zeigen das z -Verschiebungsfeld nach $95\mu\text{s}$ für die quadratische Schädigung und die runde Schädigung, die beide zwischen Lage 3 und 4 (Position C gemäß Bild 5.29) liegen. Der Vergleich von Bild 5.38 und Bild 5.39 zeigt einen deutlichen Unterschied hinsichtlich der Intensität der an der Schädigung entstehenden zusätzlichen Wellenpakete.

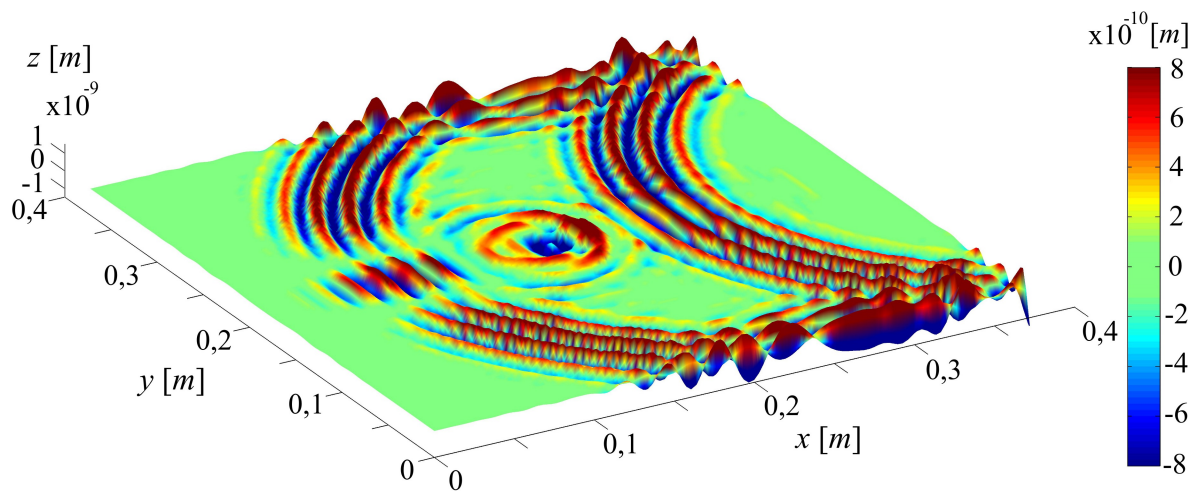


Bild 5.38: Momentaufnahme der z -Verschiebung der Mittelebene nach $95\mu\text{s}$; quadratische Delaminationsfläche 3×3 Elemente

Dies wird einerseits durch die unterschiedliche Größe, andererseits jedoch auch durch die unterschiedliche Form hervorgerufen, da bei der kreisförmigen Fläche in keiner Raumrichtung die Reflexion an einer längeren, geraden Strecke erfolgen kann. In beiden Fällen ist zu

erkennen, dass sich nach Durchlaufen des Wellenpakets der A_0 -Mode durch die Schädigung zwei Zonen herausbilden, in denen es durch destruktive Interferenz zu einer erheblichen Auslöschung der Welle kommt. Bemerkenswert ist dabei insbesondere, dass diese Auslöschungszonen im Fall der quadratischen Delamination weitgehend parallel zu den zwei zur Ausbreitungsrichtung der Welle parallelen Kanten verlaufen (Bild 5.38), während sie im Fall der kreisförmigen Delamination radial vom Mittelpunkt der Delamination ausgehen.

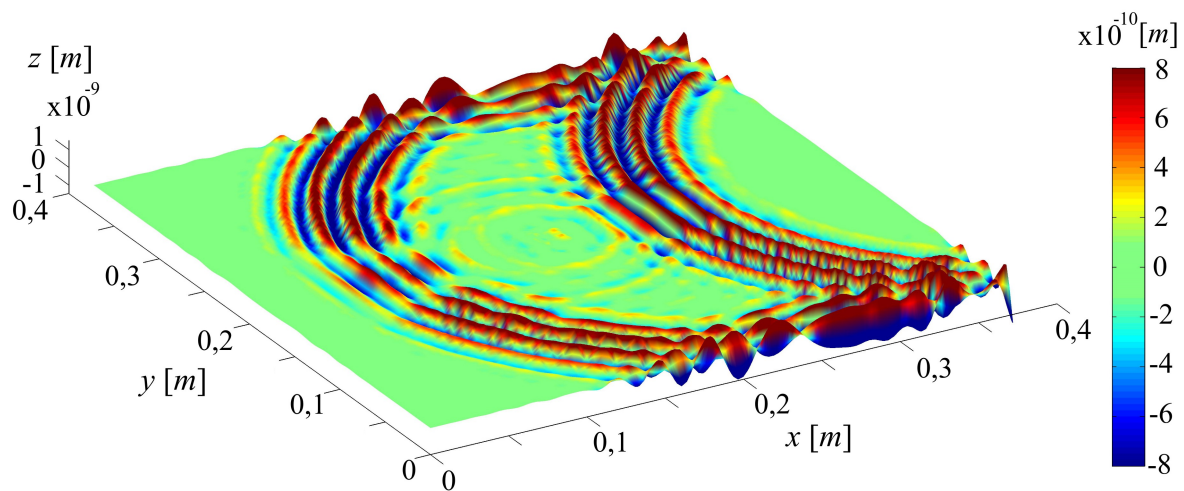


Bild 5.39: Momentaufnahme der z -Verschiebung der Mittelebene nach $95\mu\text{s}$; kreisförmige Delaminationsfläche gemäß Bild 5.36

5.7.4 Modellierung eines Risses

Im Vergleich zu einer Delamination, die einen flächigen Schaden darstellt, weisen die Interaktionen eines Risses, der als linienförmiger Schaden aufgefasst werden kann, eine noch größere Abhängigkeit von der konkreten Lage des Schadens in Bezug auf die Ausbreitungsrichtung der Wellen auf, wie in diesem Abschnitt demonstriert wird. Dazu wird ein 12mm langer, parallel zur y -Achse verlaufender Riss (vergl. Bild 5.28) gemäß des in Abschnitt 4.6.1 erläuterten Verfahrens genau in der Mitte der Struktur eingebracht. Trifft eine Welle senkrecht auf diesen Riss, so treten deutliche Reflexionen auf, wie in Bild 5.40 dargestellt. Im Gegensatz zu Delaminationsschäden, die eine merkliche Veränderung des Wellenbildes in alle Raumrichtungen der Plattenebene bewirken, sind vom Riss ausgehende Wellen jedoch hauptsächlich in die senkrecht zum Riss liegende Richtung zu beobachten. Parallel zum Riss lassen sich keine zusätzlichen Wellen beobachten. Im Extremfall einer genau parallel zum Riss laufenden Welle entstehen keine erkennbaren Veränderungen des Wellenpakets, wie in Bild 5.41 zu sehen ist. Im Gegensatz zur Detektion von Delaminationen ist daher für eine erfolgreiche Detektion eines Risschadens die Orientierung des Risses zur einfallenden Welle von großer Bedeutung.

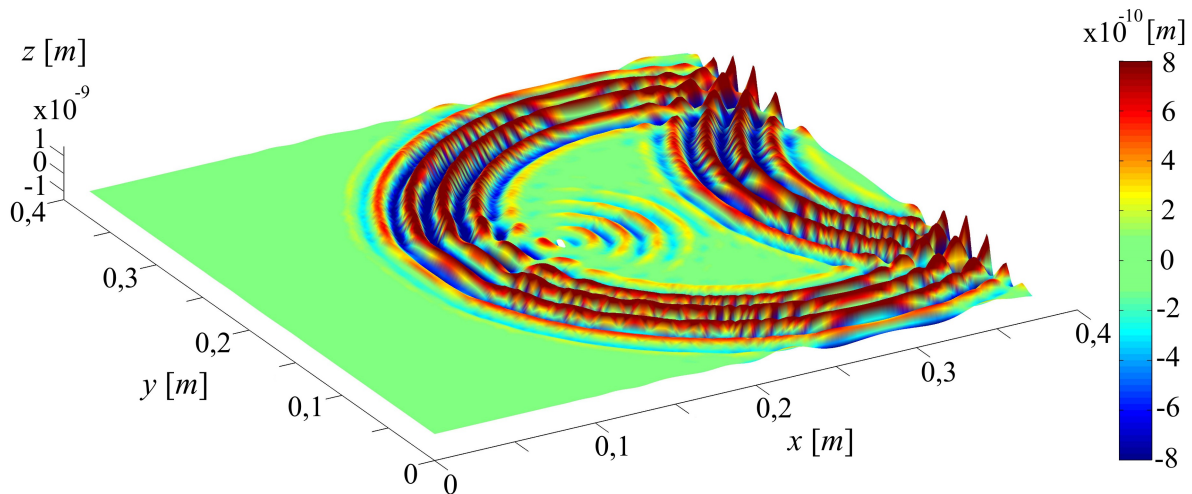


Bild 5.40: Deutlich sichtbare Reflexionen einer senkrecht zum Riss auftreffenden Transversalwelle

Für die Konzeptionierung eines SHM-Systems lässt sich daraus der wesentliche Schluss ziehen, dass zur sicheren Detektion von Rissen die potenziellen Rissorte von Wellen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung überstrichen werden müssen. Auch die S_0 -Mode weist - gegensätzlich zu Delaminationsschäden - eine erhebliche Sensitivität gegenüber einem Riss auf. Auch für diese Mode gelten die hier am Beispiel der Transversalwelle veranschaulichten Abhängigkeiten von der Rissorientierung zur Ausbreitungsrichtung der Welle, weshalb auf eine Darstellung verzichtet wird.

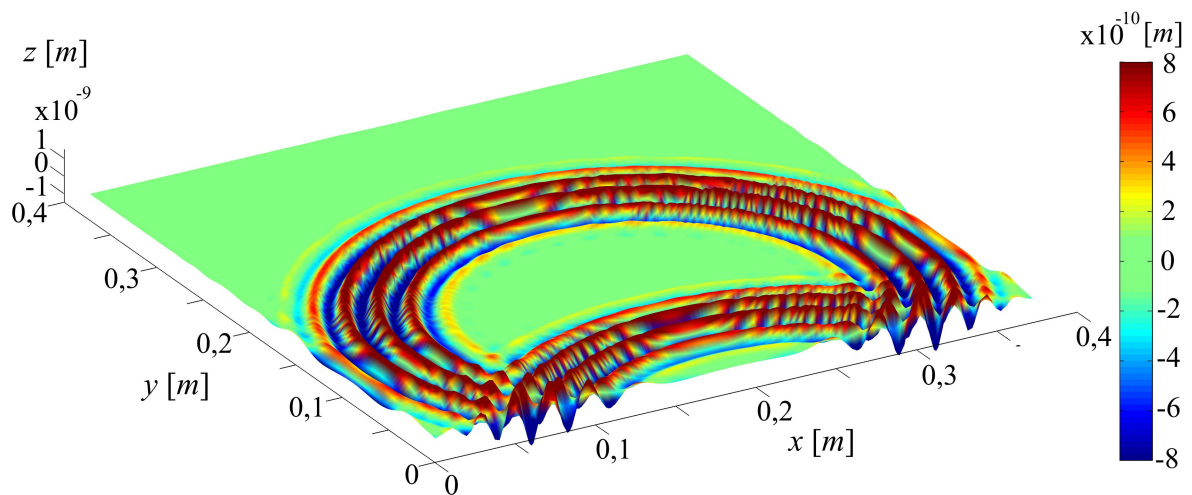


Bild 5.41: Keine Reflexionen bei einer parallel zum Riss laufenden Biegewelle

6 Modellanpassung mit Hilfe von Wellengeschwindigkeiten - Parameteridentifikation

Die Einsatzmöglichkeiten der in dieser Arbeit vorgestellten Simulationssoftware im Rahmen der virtuellen Abbildung von SHM-Systemen lassen sich in zwei wesentliche Gruppen unterteilen. Einerseits lässt sich schon vor dem realen Aufbau eines Systems eine Reihe von grundlegenden Parameterstudien durchführen, um somit den Entwicklungsprozess eines SHM-Systems für eine Struktur zu unterstützen. Zu diesem Zeitpunkt existiert das reale System noch nicht, es liegen noch keine - wie auch immer gearteten - Messwerte vor. Die notwendigen Materialparameter für die verwendeten Rechenmodelle müssen aus technischen Werkstoffdatenblättern entnommen werden. Die Ergebnisse der in diesem Stadium durchgeführten Simulationen können beispielsweise zur Optimierung eines Sensornetzwerkes oder als Ausgangspunkt für die Entwicklung intelligenter Auswertelgorithmen verwendet werden. Eine derartige Anwendung dieser Software ist beispielsweise in [MOLL *et al.* 2010] dargestellt.

Ein zweiter Anwendungsbereich ist die Simulation von mindestens in Teilbereichen schon real existierenden SHM-Systemen, an denen schon Messwerte ermittelt werden können. In diesem Fall ist üblicherweise eine Anpassung des Simulationsmodells an die vorliegenden Messwerte durchzuführen. Dieser Prozess wird als Modell-Updating bezeichnet. Insbesondere bei Faserverbundwerkstoffen weisen die Materialparameter häufig eine relativ große Streuung auf, weshalb in den Datenblättern oftmals nur Bereiche mit einer Abweichung von beispielsweise $\pm 10\%$ angegeben sind. Unter Umständen ist also ein relativ großer Parameterraum im Rahmen der Anpassung abzuarbeiten, was sinnvollerweise nicht durch eine große Anzahl von Simulationsrechnungen, sondern durch eine andere, effizientere Strategie geschieht.

Bei den hier betrachteten Systemen im höheren Frequenzbereich bietet es sich insbesondere an, Wellengeschwindigkeiten als Basis für eine Anpassung des Modells an ein reales System zu verwenden, da sie experimentell ohne großen Aufwand zu ermitteln sind. Dazu wird ein Aktuator mit Bursts einer bestimmten Grundfrequenz angeregt. Aus den an Sensoren aufgezeichneten Signalen lassen sich anschließend mit Hilfe des jeweiligen Abstandes zwischen Aktuator und Sensor die Gruppengeschwindigkeit der jeweiligen Wellenmode bestimmen. Der genaue Ablauf dieses Verfahrens ist in Abschnitt 7.1.1 beschrieben, wo auch verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeiten angegeben sind. Führt man dies für verschiedene Anregungsfrequenzen durch, so erhält man experimentell ermittelte Dispersionskurven für die entsprechende Struktur. Die Wellengeschwindigkeiten des Rechenmodells lassen sich prinzipiell auf exakt die gleiche Weise bestimmen, indem der beschriebene Vor-

gang mit Hilfe der Simulation durchgeführt wird. Durch die vollständige Simulation des Wellenausbreitungsvorgangs ist hierfür jedoch der Rechenzeitbedarf wesentlich größer, als der Zeitbedarf für das Experiment. Für eine Modellanpassung, bei der ein großer Parameterraum abgearbeitet werden muss, ist diese Vorgehensweise daher nicht geeignet. Im folgenden Abschnitt werden daher direkt die Dispersionskurven aus den zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen hergeleitet. Die dazu notwendigen Berechnungen benötigen erheblich geringere Rechenzeit.

6.1 Berechnung der Dispersionskurven aus den Bewegungsgleichungen

Die in Abschnitt 2.2.2 angegebenen Bewegungsgleichungen (2.58) bis (2.62) lassen sich durch Einsetzen der Schnittlasten (3.13) bis (3.15) auch durch die Verschiebungsgrößen angeben, wie ausführlich in [REDDY 2004] dargestellt ist. Für den Fall von symmetrischen Laminaten ergeben sich ohne äußere Belastung die folgenden Gleichungen:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{16} \left(2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (6.1)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{26} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \kappa \cdot A_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \kappa \cdot A_{45} \left(2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \kappa \cdot A_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\ = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} D_{16} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + D_{26} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \\ - \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) - \kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) = -I_2 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y \partial x} + D_{16} \left(2 \cdot \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) - D_{26} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) \\ - \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right) - \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right) = I_2 \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ebene, sich in beliebige Plattenrichtung ausbreitende Wellen können in Form folgender Verschiebungsansätze angenommen werden:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= u_0 \cdot e^{-ikx \cos \beta} e^{-iky \sin \beta} e^{-i\omega t}; & v(x, y, t) &= v_0 \cdot e^{-ikx \cos \beta} e^{-iky \sin \beta} e^{-i\omega t}; \\
 w(x, y, t) &= w_0 \cdot e^{-ikx \cos \beta} e^{-iky \sin \beta} e^{-i\omega t}; & \theta_x(x, y, t) &= \theta_{x0} \cdot e^{-ikx \cos \beta} e^{-iky \sin \beta} e^{-i\omega t}; \\
 \theta_y(x, y, t) &= \theta_{y0} \cdot e^{-ikx \cos \beta} e^{-iky \sin \beta} e^{-i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die mit 0 indizierten Größen bezeichnen die Amplituden und β ist der Winkel der jeweiligen Ausbreitungsrichtung, mit dessen Hilfe die Wellenzahlen in x - und y -Richtung k_x und k_y als $k_x = k \cos \beta$ und $k_y = k \sin \beta$ ausgedrückt werden können. Einsetzen dieser Ansätze in die Bewegungsgleichungen (6.1) bis (6.5) führt auf ein Gleichungssystem, das folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\begin{bmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_{33} & \bar{L}_{34} & \bar{L}_{35} \\ 0 & 0 & \bar{L}_{43} & \bar{L}_{44} & \bar{L}_{45} \\ 0 & 0 & \bar{L}_{53} & \bar{L}_{54} & \bar{L}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_{x0} \\ \theta_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.7}$$

wobei die Elemente der Matrix $\bar{\mathbf{L}}$ wie folgt definiert sind:

$$\bar{L}_{11} = -A_{11}k^2c^2 - 2A_{16}k^2cs - A_{66}k^2s^2 + I_0\omega^2; \tag{6.8}$$

$$\bar{L}_{12} = \bar{L}_{21} = -A_{12}k^2cs - A_{16}k^2c^2 - A_{26}k^2s^2 - A_{66}k^2cs; \tag{6.9}$$

$$\bar{L}_{22} = -2A_{26}k^2cs - A_{22}k^2s^2 - A_{66}k^2c^2 + I_0\omega^2; \tag{6.10}$$

$$\bar{L}_{33} = -\kappa A_{55}k^2c^2 - 2A_{45}k^2cs - \kappa A_{44}k^2s^2 + I_0\omega^2; \tag{6.11}$$

$$\bar{L}_{34} = \kappa A_{45}ikc + \kappa A_{44}iks; \tag{6.12}$$

$$\bar{L}_{43} = -\kappa A_{45}ikc - \kappa A_{44}iks; \tag{6.13}$$

$$\bar{L}_{35} = \bar{L}_{53} = -\kappa A_{55}ikc - \kappa A_{45}iks; \tag{6.14}$$

$$\bar{L}_{44} = D_{66}k^2c^2 + 2D_{26}k^2cs + D_{22}k^2s^2 + \kappa A_{44} - I_0\omega^2; \quad (6.15)$$

$$\bar{L}_{45} = -D_{12}k^2cs - D_{16}k^2c^2 - D_{26}k^2s^2 - D_{66}k^2cs - \kappa A_{45}; \quad (6.16)$$

$$\bar{L}_{54} = D_{12}k^2cs + D_{16}k^2c^2 + D_{26}k^2s^2 + D_{66}k^2cs + \kappa A_{45}; \quad (6.17)$$

$$\bar{L}_{55} = D_{11}k^2c^2 + 2D_{16}k^2cs + D_{66}k^2s^2 + \kappa A_{55} + I_0\omega^2. \quad (6.18)$$

Innerhalb dieser Bezeichnungen gelten die Abkürzungen $c = \cos \beta$ und $s = \sin \beta$. A_{ij} und D_{ij} sind die Elemente der Materialsteifigkeitsmatrix, vergleiche (3.16). Wie auch schon in Abschnitt 3.6 festgestellt, liegen die Gleichungen zur Beschreibung der generalisierten Verschiebungen innerhalb der Ebene und transversal zur Ebene in ungekoppelter Form vor. Aus dem System (6.7) lassen sich somit zwei voneinander entkoppelte, kleinere Gleichungssysteme gewinnen. Die jeweiligen Determinanten dieser Systeme ergeben zwei charakteristische Gleichungen der Form

$$s_4k^4 + s_2k^2 + s_0 = 0 \quad (6.19)$$

sowie

$$a_6k^6 + a_4k^4 + a_2k^2 + a_0 = 0, \quad (6.20)$$

wobei die Koeffizienten dieser Gleichungen im Allgemeinen von der Kreisfrequenz ω und vom Winkel der Ausbreitungsrichtung β abhängen. Die Abhängigkeit von β entfällt für isotrope Werkstoffe. Die vier bzw. sechs Nullstellen dieser Polynome korrespondieren mit zwei bzw. drei Modenpaaren. Da sich die Polynome explizit angeben lassen, kann für die Berechnung der Nullstellen beispielsweise die MATLAB-Funktion *roots* verwendet werden, die diese Aufgabe sehr effektiv erledigt. Während Gleichung (6.19) immer zwei reelle Nullstellen und somit zwei ausbreitungsfähige Moden aufweist, hängt die Anzahl der reellen Nullstellen von (6.20) von der Anregungsfrequenz ab. Dieser Zusammenhang ist in Bild 6.1 veranschaulicht, wo die jeweiligen Quadrate der Nullstellen beider Polynome aufgetragen sind. Betrachtet wird dazu zunächst eine 2mm dicke Aluminiumplatte. Als Materialparameter werden die gleichen Literaturwerte für Aluminium wie in Abschnitt 5.2 verwendet, der Schubkorrekturfaktor beträgt $\kappa = 5/6$. In Bild 6.1 wird deutlich, dass die Quadrate zweier Nullstellen erst ab

einer bestimmten Frequenz, die oft als cut-off Frequenz bezeichnet wird und hier etwa 780kHz beträgt, einen positiven Wert aufweisen und somit zu reellen Nullstellen führen.

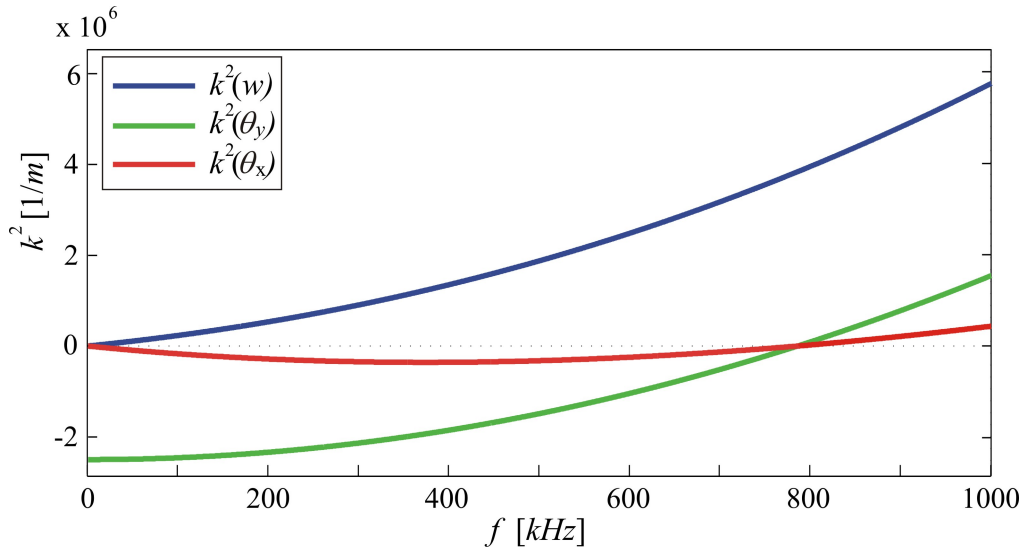


Bild 6.1: Quadrate der Nullstellen der charakteristischen Gleichung (6.20)

Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten aller entsprechenden Moden lassen sich nun mit Hilfe der schon in Abschnitt 2.1.4 angegebenen Vorschriften (2.28) und (2.29) bestimmen. In den folgenden beiden Diagrammen sind diese Geschwindigkeiten über der Frequenz dargestellt. Zusätzlich sind gestrichelt auch die korrekten Lösungen der Rayleigh-Lamb Gleichungen (2.42) und (2.43), die SH_0 -Mode und die Biegemode nach der CLPT (vergleiche Abschnitt 2.2.1) eingetragen.

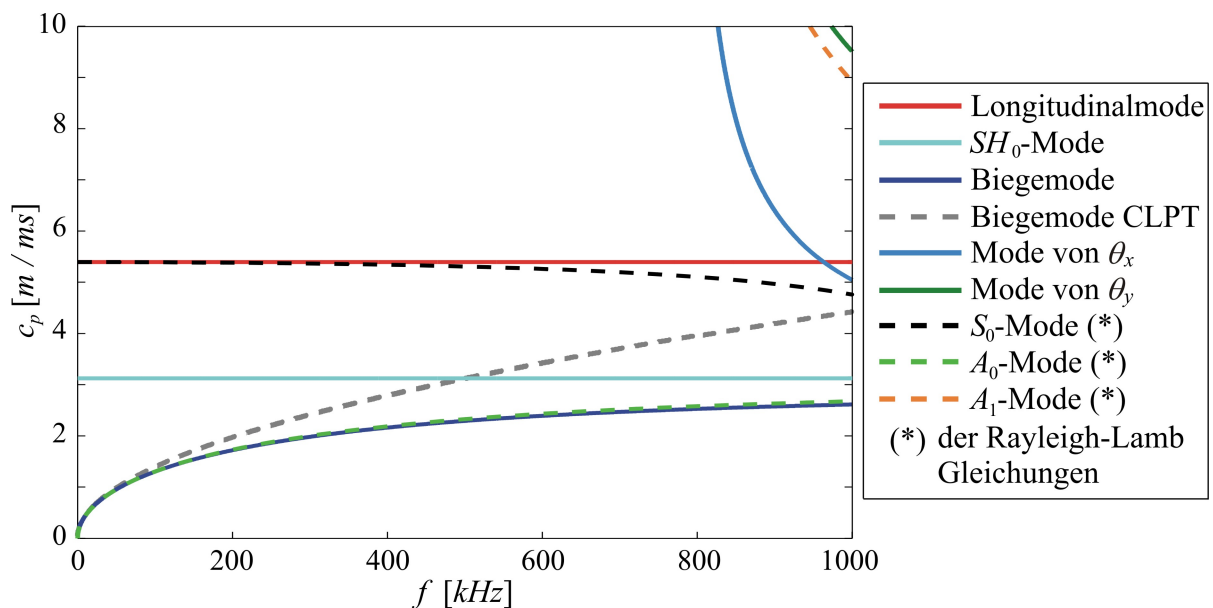


Bild 6.2: Phasengeschwindigkeiten der Wellenmoden in einer 2mm dicken Aluminiumplatte: Vergleich der Plattentheorie mit korrekten Lamb-Moden

Wie sich aus Bild 6.2 ergibt, liefern die Gleichungen der Mindlin-Plattentheorie für dieses Beispiel im Frequenzbereich bis etwa 500kHz Phasengeschwindigkeiten, die gut mit den Werten der korrekten Lösungen der Lamb-Gleichungen korrespondieren. Die Dispersion der S_0 -Mode führt danach zu einer deutlicheren Abweichung von der Longitudinalmode, die durch die verwendete Theorie nicht dispersiv ist. Die Phasengeschwindigkeit der Biegemode der CLPT liefert schon bei wesentlich geringeren Frequenzen stärkere Abweichungen. Die Geschwindigkeit der SH_0 -Mode entspricht, wie in Abschnitt 2.1.5 dargestellt, exakt der Geschwindigkeit einer Transversalwelle und ist nicht dispersiv. Die Geschwindigkeit dieser Mode wird durch das verwendete Modell vollständig korrekt abgebildet. Bei den in Bild 6.3 dargestellten Gruppengeschwindigkeiten kann man bis etwa 350kHz von einer ausreichenden Übereinstimmung sprechen, danach fällt die Gruppengeschwindigkeit der S_0 -Mode merklich gegenüber der Longitudinalmode ab. Die geringeren Abweichungen der Biegemode von der A_0 -Mode könnten durch einen leicht veränderten Schubkorrekturfaktor noch minimiert werden.

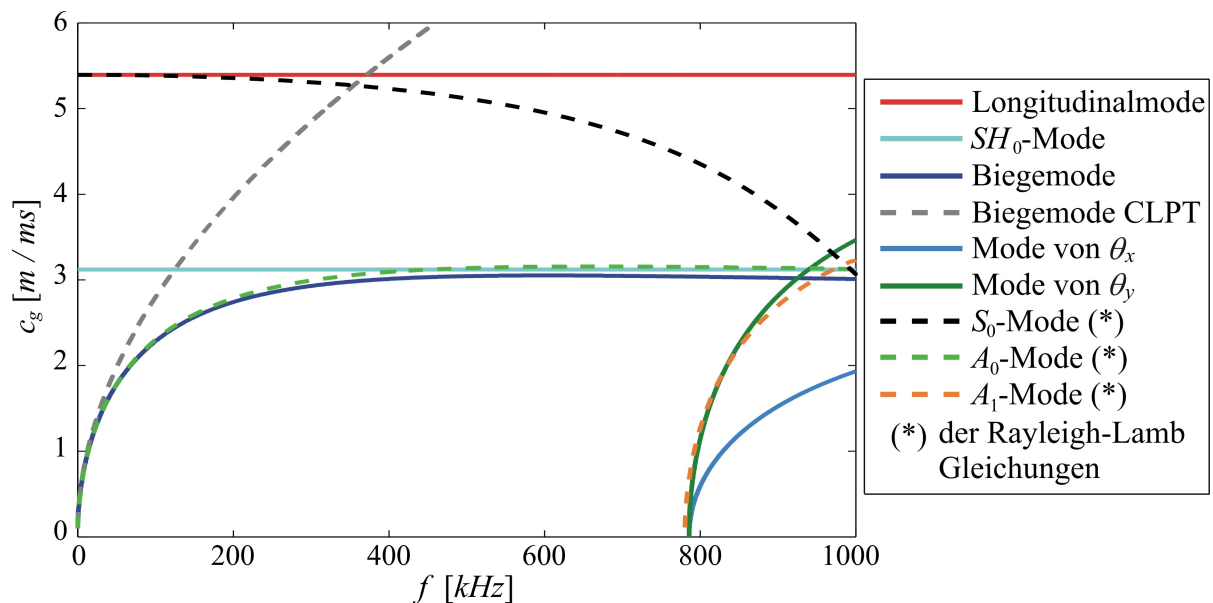


Bild 6.3: Gruppengeschwindigkeiten der Wellenmoden in einer 2mm dicken Aluminiumplatte: Vergleich der Plattentheorie mit korrekten Lamb-Moden

Oberhalb von etwa 780kHz treten weitere Moden der Rotationsfreiheitsgrade sowie die A_1 -Mode auf, die jedoch nicht weiter betrachtet werden sollen, aber der Vollständigkeit halber mit angegeben sind.

Bedenkt man an dieser Stelle zusätzlich die bei realen Strukturen immer auftretenden Abweichungen von den Literaturwerten, die zu Abweichungen von Messwerten von den theoretischen Lösungen führen, so lässt sich aus dieser Darstellung schlussfolgern, dass bis etwa

350kHz, somit also bis $f \cdot h = 0,7\text{MHz mm}$, eine gute Näherung der Wellengeschwindigkeiten geführter Wellen mit Hilfe der FSDT gegeben ist. Dies korrespondiert zur in Abschnitt 2.1.5 angeführten Tatsache, dass die Partikelverschiebungen der geführten Wellen in diesem Bereich in guter Näherung durch zweidimensionale Theorien zu beschreiben sind. Innerhalb dieses Bereichs ist daher eine sinnvolle Modellierung von wellenbasierten SHM-Systemen für dünnwandige, lokal flache Strukturen auf Basis der FSDT möglich.

Bei anisotropen Werkstoffen stellen sich unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellenmoden in Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung ein, da die Elemente der Matrix \mathbf{L} und somit die Koeffizienten der charakteristischen Gleichungen im Allgemeinen vom Winkel β abhängen. Somit ergeben sich in Abhängigkeit der Raumrichtung unterschiedliche Dispersionskurven.

Für die Berechnung der Gruppengeschwindigkeiten ist im Vergleich zu isotropen Werkstoffen der wichtige Unterschied zu beachten, dass die Richtung des Energieflusses (i.e. die Gruppengeschwindigkeit) im Allgemeinen nicht der Richtung des Wellenzahlvektors, bzw. des Vektors der Phasengeschwindigkeit entsprechen muss, wie in Bild 6.4 dargestellt ist.

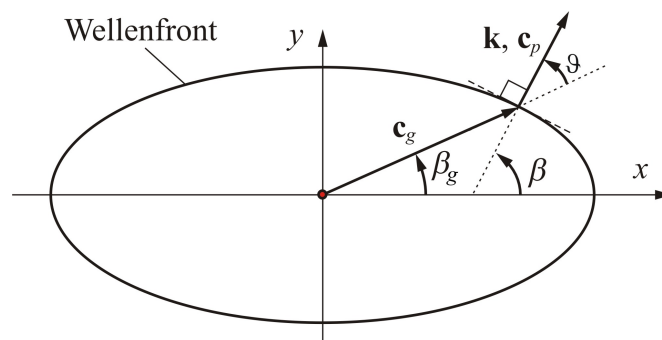


Bild 6.4: Unterschiedliche Richtungen von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Bei Anwendung der Vorschrift (2.29) ist daher zu beachten, dass k nicht länger als skalare Größe behandelt werden darf, sondern der Vektorcharakter zu berücksichtigen ist. Bei der Operation $\partial\omega/\partial k$ handelt es sich daher nun formal um die Bildung eines Gradienten. In einem Polarkoordinatensystem weist dieser Gradient nun radiale Komponenten in Richtung von \mathbf{k} auf, jedoch zusätzlich auch tangentielle Komponenten $\partial\omega/k\partial\beta$ in Umfangsrichtung. Durch Transformation in das kartesische Koordinatensystem entsteht folgende Berechnungsvorschrift der Komponenten der Gruppengeschwindigkeit:

$$\begin{bmatrix} c_{gx} \\ c_{gy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ \frac{\partial \omega}{k \partial \beta} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Die Amplitude der Gruppengeschwindigkeit und der Winkel β_g zur x -Achse ergeben sich damit zu

$$c_g = \sqrt{c_{gx}^2 + c_{gy}^2} \quad \text{und} \quad \beta_g = \arctan\left(\frac{c_{gy}}{c_{gx}}\right). \quad (6.22)$$

Der Differenzwinkel zwischen der Richtung der Gruppengeschwindigkeit β_g und der Richtung der Phasengeschwindigkeit β ergibt sich zu:

$$\vartheta = \beta_g - \beta \quad (6.23)$$

und wird im Englischen als skew angle bezeichnet. Eine allgemeine Veranschaulichung der Zusammenhänge von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ist in den Abschnitten 7G und 7H des Buches von Auld [AULD 1990] dargestellt. Zur Berechnung der in Gleichung (6.21) auftretenden Ableitungen können nach [WANG und YUAN 2007] folgende Beziehungen verwendet werden:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \cong \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2(\beta) - k_1(\beta)} \quad (6.24)$$

und

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = -\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{dk}{d\beta} \cong -\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{k(\beta_2) - k(\beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}. \quad (6.25)$$

Bei isotropen Platten ist ω nur eine Funktion des Betrags des Wellenzahlvektors und nicht von seiner Richtung abhängig, weshalb $\partial \omega / \partial \beta = 0$ gilt. In anisotropen Werkstoffen ist dies jedoch im Allgemeinen nicht der Fall, wie im Folgenden an einem Beispiel aufgezeigt wird. Neben den schon für den isotropen Fall angegebenen Dispersionskurven, bei denen die Geschwindigkeit über der Frequenz dargestellt ist, ist auch eine Auftragung der Geschwindigkeiten über dem Winkel des Wellenzahlvektors β bzw. über der Ausbreitungsrichtung β_g bei konstanter Anregungsfrequenz von Interesse.

Wir betrachten dazu eine anisotrope, 3mm dicke, unidirektionale GFK-Platte, deren Materialparameter in Tabelle 6.1 angegeben sind. Die Faserrichtung beträgt 90° zur x -Achse.

Tabelle 6.1: Materialparameter eines Glasfaserverbundwerkstoffs

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ρ [kg/m ³]
30,7	15,2	4,0	3,1	2,7	0,3	1700

Die folgenden beiden Bilder geben die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeiten in Abhängigkeit von β bzw. β_g an. Als Anregungsfrequenz werden 50kHz und 100kHz betrachtet, was zu unterschiedlichen Kurven der Biegemode führt. Quasi-Longitudinalmode und SH_0 -Mode verändern sich nicht, da sie, wie oben ausgeführt, durch die verwendete Theorie nicht dispersiv modelliert sind. Wie aus Bild 6.5 ersichtlich ist, liegt in Faserrichtung eine etwa 50% höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalmode als quer zur Faserrichtung vor. Die Unterschiede der Geschwindigkeiten der Biegemode sind nicht so stark ausgeprägt, die SH_0 -Mode weist die größten Phasengeschwindigkeiten in $\pm 40^\circ$ -Richtung auf.

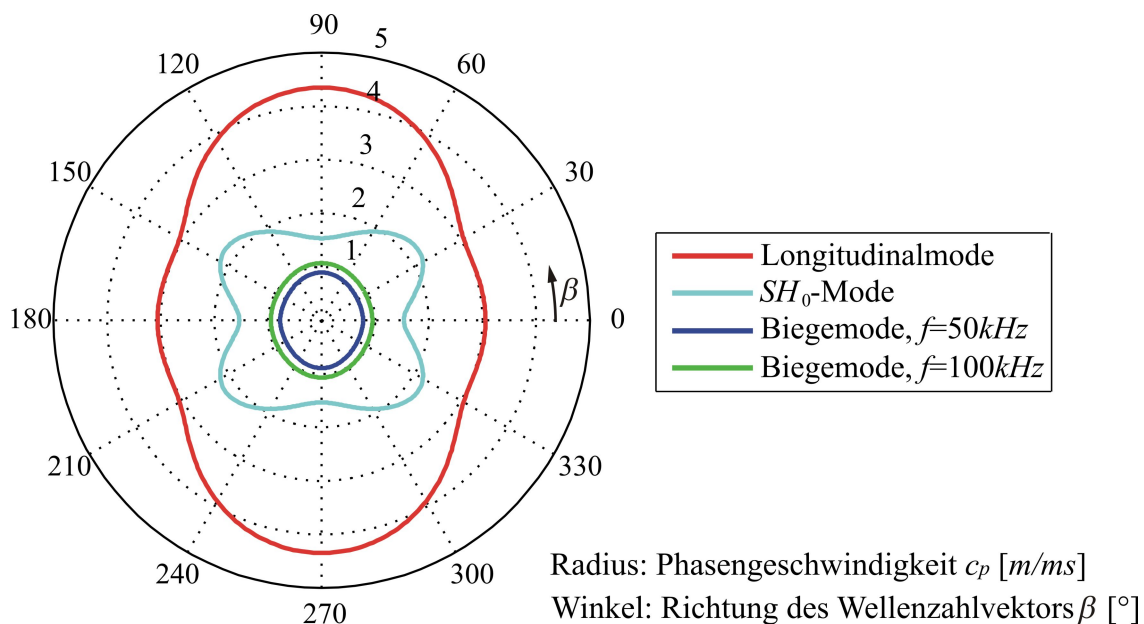


Bild 6.5: Phasengeschwindigkeiten der Wellenmoden in einer unidirektionalen, 3mm dicken Platte aus GFK bei Anregung mit 50kHz und 100kHz

Im Vergleich zu den in Bild 6.6 dargestellten Gruppengeschwindigkeiten lässt sich feststellen, dass für die Longitudinal- und die SH_0 -Mode in Faserrichtung und senkrecht dazu gleiche Werte für c_p und c_g vorliegen, dazwischen die Kurven jedoch deutlich anders verlaufen. Beispielsweise beträgt die Gruppengeschwindigkeit der Longitudinalmode in 60° -Richtung nur etwa $3,4\text{m/ms}$ gegenüber einer Phasengeschwindigkeit von ca. 4m/ms in die gleiche Richtung.

Ohne Berücksichtigung der unterschiedlichen Richtungen der Gruppen- und der Phasengeschwindigkeit hätten die Kurven den gleichen Verlauf. Die zugespitzten Verläufe der SH_0 -Mode im Bereich von $\pm 30^\circ$ bis $\pm 60^\circ$ bzw. $\pm 120^\circ$ bis $\pm 150^\circ$ entstehen dadurch, dass sich die gleiche Gruppengeschwindigkeit durch unterschiedlich gerichtete Wellenzahlvektoren ergibt. Dies bedeutet, dass in diese Richtung eine Anhäufung der Wellenenergie dieser Mode, also eine höhere Amplitude, zu erwarten ist. Dieses Verhalten ist für Wellen in anisotropen Materialien charakteristisch, vergleiche beispielsweise [ROYER und DIEULESAINT 2000].

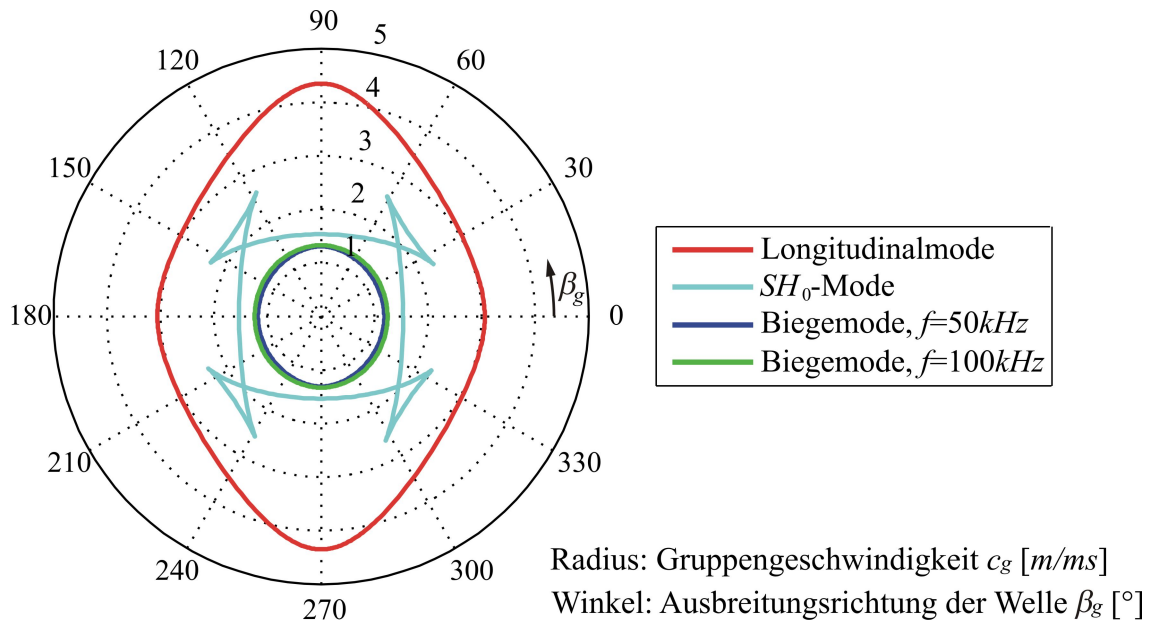


Bild 6.6: Gruppengeschwindigkeiten der Wellenmoden in einer unidirektionalen, 3mm dicken Platte aus GFRK bei Anregung mit 50kHz und 100kHz

6.2 Modell-Updating

Mit oben beschriebener Vorgehensweise lassen sich für ein beliebig geschichtetes, symmetrisches Laminat auf effiziente Weise die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten der einzelnen Wellenmoden bestimmen. Da dafür die identischen Bewegungsgleichungen verwendet werden, die auch den Spektralelementen zugrunde liegen, ergeben sich zwischen den auf diese Weise berechneten Gruppengeschwindigkeiten und denen, die direkt durch Simulation der Wellenausbreitung mit dem SEM-Modell bestimmt werden, keine systematischen Fehler. Im Gegensatz zur rechenzeitaufwändigen Bestimmung mit Hilfe des SEM-Modells ist die hier vorgestellte Methode aber um einige Größenordnungen effizienter, so dass sie auch im Rahmen des Modell-Updating im Rahmen einer Optimierung eingesetzt werden kann.

Eine Strategie zur Bestimmung von Materialparametern aus gemessenen A_0 - und S_0 -Geschwindigkeitsdaten, die auf ähnlichen Grundlagen basiert, stellt Calomfirescu in Kapitel 10 seiner Dissertation [CALOMFIRESCU 2008] vor. Im Gegensatz zu den hier eingesetzten In-

genieurkonstanten verwendet er die Steifigkeitskonstanten C_{ij} , die mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens bestimmt werden. Ausgangsbasis dazu stellen Geschwindigkeitsdaten der beiden Wellenmoden bei n unterschiedlichen Anregungsfrequenzen dar, die in 0° -, 45° - und 90° -Richtung gemessen werden. Das Minimierungsproblem wird dann auf folgende Weise formuliert:

$$f(C_{ij}) = \min \sum_{i=1}^n |c_g(i)_{\text{messung}} - c_g(i)_{\text{theorie}}|^2. \quad (6.26)$$

Zur Lösung dieses Optimierungsproblems kommt ein gradientenfreies Verfahren zum Einsatz. Die theoretischen Werte der Gruppengeschwindigkeit werden mit dem von Calomfirescu entwickelten Programm FIBREWAVE berechnet, dem eine Plattentheorie höherer Ordnung zugrunde liegt. In [CALOMFIRESCU 2008] ist ein detailliertes Flussdiagramm angegeben, wie die schrittweise Bestimmung der einzelnen Steifigkeitsparameter durchgeführt werden kann. Die Formulierung der Zielfunktion (6.26) führt im Allgemeinen zu Steifigkeitsparametern, die gemittelt über die verschiedenen Anregungsfrequenzen zu einer guten Näherung der theoretischen an die gemessenen Werte - also zu einer möglichst gut übereinstimmenden Dispersionskurve - in den untersuchten, diskreten Raumrichtungen führen.

Für den konkreten Vergleich von gemessenen und mit Hilfe der SEM-Simulation berechneten Datensätzen im Zeitbereich ist jedoch diese gemittelte Näherung keine optimale Zielgröße. Stattdessen sollen die Materialparameter so angepasst werden, dass das aktuell betrachtete Signal, dessen Energie hauptsächlich in einem bestimmten Frequenzband liegt (vergl. Abschnitt 5.1), möglichst gut durch die Simulation reproduziert werden kann. Aus diesem Grund eignet sich anstelle der Dispersionskurven eher die Analyse der Geschwindigkeiten über der Ausbreitungsrichtung β_g bei einer konstanten Frequenz, die der Grundfrequenz des Anregungssignals entspricht.

6.2.1 Sensitivitätsanalyse

Um einen Überblick über den Einfluss der verschiedenen Materialparameter auf die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Wellenmoden zu bekommen, wird zunächst eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Aus Bild 6.7 gehen die Sensitivitäten $\partial c_g / \partial E_i$ und $\partial c_g / \partial G_j$ der Gruppengeschwindigkeiten bei konstanter Frequenz in die unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen hervor.

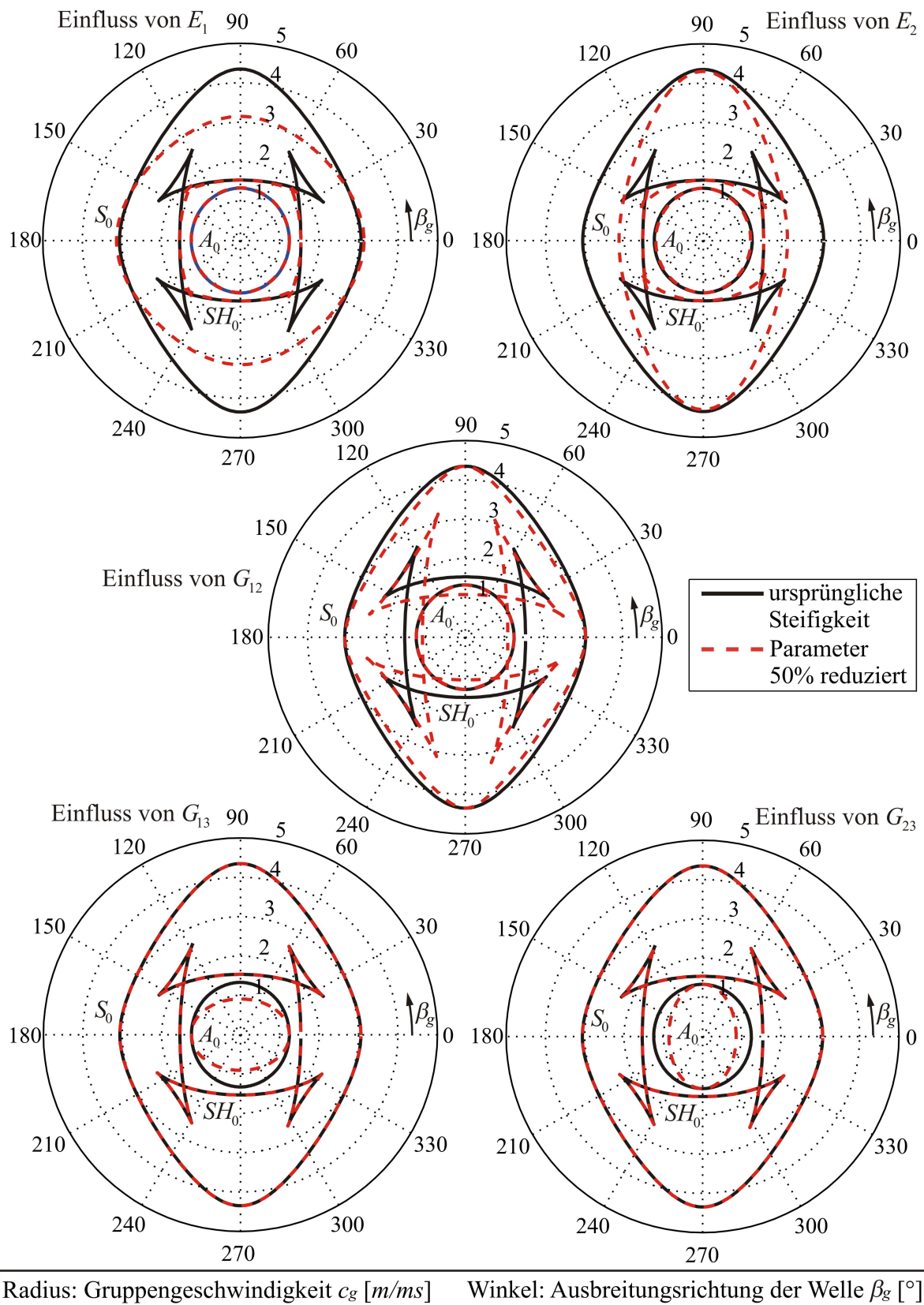


Bild 6.7: Einfluss der Steifigkeitsparameter auf die Gruppengeschwindigkeiten der unterschiedlichen Wellenmoden in die verschiedenen Raumrichtungen

Als Beispiel dient wiederum das unidirektionale Laminat, das schon im vorigen Abschnitt vorgestellt worden ist (Faserrichtung 90° , Materialparameter gemäß Tabelle 6.1, Anregungs-

frequenz 100kHz). Die Sensitivität der Gruppengeschwindigkeit wird untersucht, indem nacheinander alle relevanten Steifigkeitsparameter um 50% reduziert werden. Die sich dann ergebenden Geschwindigkeiten (in den Polardiagrammen in Bild 6.7 rot gestrichelt dargestellt) werden mit den ursprünglichen Werten (in schwarz dargestellt) verglichen.

Wie daraus hervorgeht bewirkt eine Variation von E_1 hauptsächlich eine Änderung der Gruppengeschwindigkeit der S_0 -Mode in Faserrichtung, während die Sensitivität quer zur Faserrichtung nur sehr gering ist. Genau umgekehrt ist dieser Zusammenhang für den Einfluss von E_2 . Die Gruppengeschwindigkeit der A_0 -Mode ist gegenüber beiden Parametern nur in geringem Maße sensitiv, die SH_0 -Mode zeigt eine erhebliche Sensitivität in die $\pm 45^\circ$ -Richtung, jedoch keinerlei Sensitivität in 0° - und 90° -Richtung. Der Schubmodul G_{12} hat einen Einfluss auf die Gruppengeschwindigkeit der S_0 -Mode in $\pm 45^\circ$ -Richtung, jedoch keinerlei Einfluss in 0° - und 90° -Richtung. Die SH_0 -Mode wird hingegen in alle Richtungen beeinflusst. G_{13} und G_{23} haben keinerlei Einfluss auf S_0 - und SH_0 -Mode, sondern ausschließlich auf die A_0 -Mode. G_{13} wirkt sich dabei hauptsächlich in Faserrichtung, G_{23} senkrecht dazu aus.

Da mit den aufgebrauchten Piezoelementen oftmals die SH_0 -Welle nicht in signifikantem Umfang angeregt werden kann, wird sie bei der Anpassung des Modells an die Messdaten nicht weiter berücksichtigt. Eine Anpassung der Querkontraktionszahl ν_{12} wird ebenfalls nicht betrachtet, da ihr Einfluss geringer ist als der Einfluss der in Bild 6.7 untersuchten Steifigkeitsparameter.

Zur Anpassung der Modellparameter für ein unidirektionales Laminat könnte prinzipiell eine sehr ähnliche Vorgehensweise verwendet werden, wie sie in Kapitel 10 von [CALOMFIRESCU 2008] ausführlich dargestellt ist. Dazu wären anstelle der über die verschiedenen Anregungsfrequenzen gemittelten experimentellen Werte jedoch die Messdaten bei ausschließlich einer Anregungsfrequenz zu verwenden.

6.2.2 Strategie zur Modellanpassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Anpassung der Parameter jedoch nicht mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens durchgeführt, sondern es werden die Gruppengeschwindigkeiten innerhalb eines definierten Parameterraums systematisch bestimmt. Ausgangspunkt zur Definition dieses Parameterraums sind die Materialdaten des Werkstoffs, die aus technischen Datenblättern entnommen werden. In Abhängigkeit der dort angegebenen Genauigkeiten kann der zu untersuchende Bereich und die Schrittweite für jeden einzelnen Parameter getrennt festgelegt werden. Da die Sensitivitätsanalyse für E_1 , E_2 und G_{12} nur einen sehr geringen Einfluss auf

die A_0 -Mode und umgekehrt für G_{13} und G_{23} keinerlei Einfluss auf die S_0 -Mode ergeben hat, ist es nicht notwendig, einen fünfdimensionalen, aus allen Parametern bestehenden Parameterraum aufzubauen. Stattdessen kann eine Trennung in zwei Teilgebiete vorgenommen:

Ein erster Parameterraum wird aus E_1 , E_2 und G_{12} aufgebaut. Zur Bewertung der Lösung werden gemessene Geschwindigkeitsdaten ausschließlich von der S_0 -Mode in 0° -, 45° - und 90° -Richtung verwendet. Eine sehr anschauliche Möglichkeit der Bewertung lässt sich erzeugen, indem im Parameterraum nur diejenigen Lösungen dargestellt werden, die innerhalb einer beliebig zu definierenden Toleranz - beispielsweise 1% des nominellen Messwertes - mit mindestens einer der gemessenen Geschwindigkeiten übereinstimmen, Bild 6.8. Die Ausgangsdaten dieser Darstellung entsprechen wieder dem schon zuvor verwendeten Beispiel (Steifigkeitsparameter gemäß Tabelle 6.1, Faserrichtung 90°). Durch unterschiedliche Farben ist verdeutlicht, für welchen Messwert sich das Simulationsergebnis innerhalb des Toleranzbereichs befindet. Als Variationsbereiche der Parameter werden für E_1 und E_2 $\pm 10\%$ und für G_{12} $\pm 20\%$ des Nominalwertes verwendet. Als angenommene Messwerte werden für $c_{g_mess}(S_0, 0^\circ) = 3050\text{m/s}$, $c_{g_mess}(S_0, 45^\circ) = 3140\text{m/s}$ und $c_{g_mess}(S_0, 90^\circ) = 4350\text{m/s}$ verwendet. Der Toleranzbereich für die Geschwindigkeiten beträgt 0,4%. Die Gesamtheit der eingezeichneten Punkte einer Farbe bildet einen flachen Volumenkörper, der quer durch den Parameterraum verläuft.

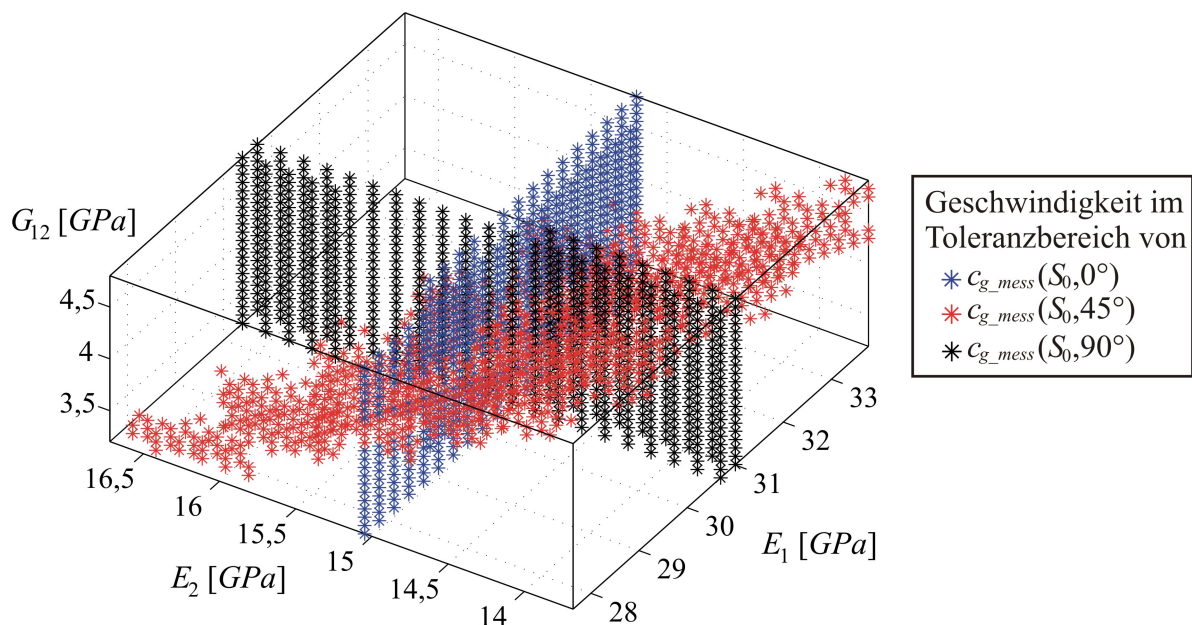


Bild 6.8: Parameterraum zur Analyse der Steifigkeitsparameter mit Einfluss auf die Gruppengeschwindigkeit der S_0 -Mode

An der unterschiedlichen Lage dieser Körper lassen sich die Sensitivitäten der einzelnen Messwerte erkennen. $c_{g_mess}(S_0, 0^\circ)$ ist beispielsweise stark von E_2 abhängig, jedoch kaum von den anderen Steifigkeiten.

Die Schnittmenge der drei so aufgespannten Volumenkörper liefert diejenige Parameterkombination, mit der die Simulation mit allen Messwerten innerhalb der Toleranz übereinstimmt. Lässt sich innerhalb des gewählten Parameterraums keine gemeinsame Schnittmenge aller drei Bereiche bilden, so ist der Parameterraum so lange zu vergrößern, bis dies gelingt. Bei sehr großen Parameterräumen ist es effizient, die Schrittweite zunächst grob zu wählen und den Schnittbereich ungefähr zu bestimmen. Im Anschluss kann dann dieser gefundene Bereich in wesentlich feinere Schritte unterteilt und die Vorgehensweise wiederholt werden.

Nachdem E_1 , E_2 und G_{12} festgelegt sind, wird mit G_{13} und G_{23} eine getrennte, separat analysierte Parameterebene aufgespannt, Bild 6.9. Die Bewertung der Lösung erfolgt dabei mit Hilfe der gemessenen Geschwindigkeiten der A_0 -Mode in 0° - und 90° -Richtung. Die Punkte einer Farbe bilden hier eine schmale Fläche, die quer durch die Parameterebene verläuft. Als angenommene Messwerte werden für dieses Beispiel $c_{g_mess}(A_0, 0^\circ) = 1130\text{m/s}$ und $c_{g_mess}(A_0, 90^\circ) = 1230\text{m/s}$ eingesetzt. Die Breite der Schmalseite der Flächen wird durch die vorgegebene Toleranz bezüglich der gemessenen Geschwindigkeiten festgelegt. Die Schnittmenge der blau und schwarz dargestellten Bereiche liefert die geeigneten Parameter, die zu ausreichend übereinstimmenden Gruppengeschwindigkeiten der A_0 -Mode von Simulationsmodell und Messdaten führen.

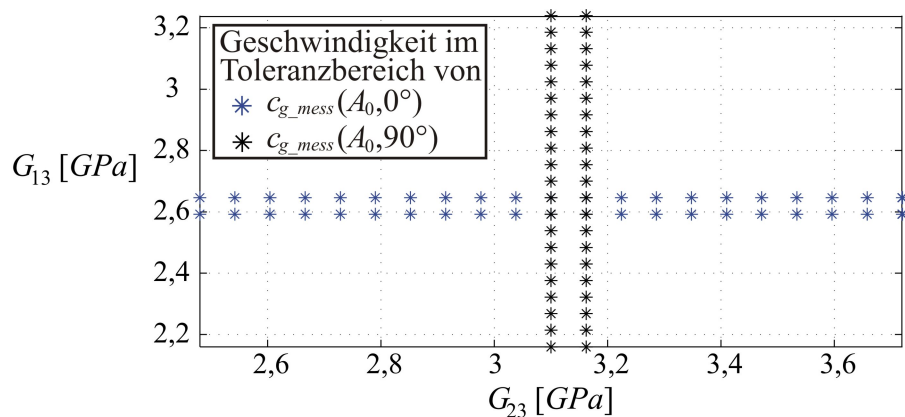


Bild 6.9: Parameterebene der Steifigkeitsparameter mit Einfluss auf die Gruppengeschwindigkeit der A_0 -Mode

Diese Verfahrensweise lässt sich in der gleichen Weise auch zur Parameteranpassung von nicht unidirektionalen Laminaten verwenden. Durch die unterschiedliche Lagenorientierung innerhalb des Laminats geht in diesem Fall jedoch die Eigenschaft verloren, dass sich ein Pa-

parameter nur auf die Geschwindigkeit in eine Richtung deutlich auswirkt. Es bleibt jedoch weiterhin die Tatsache bestehen, dass sich E_1 , E_2 und G_{12} fast ausschließlich auf die S_0 -Mode auswirken (SH_0 wird vernachlässigt) und G_{13} sowie G_{23} keinerlei Einfluss auf die S_0 -Mode sondern nur auf die A_0 -Mode haben. Daraus resultiert eine veränderte Form der aufgespannten Volumenkörper in Bild 6.8 und der Teilflächen in Bild 6.9, was jedoch die Anwendbarkeit dieses Verfahrens nicht grundsätzlich negativ beeinflusst.

Die vorgestellte Strategie ermöglicht eine Anpassung der Wellengeschwindigkeiten des SEM-Modells an gemessene Daten durch Modifikation der Steifigkeitsparameter des Modells. Dazu ist es nicht notwendig eine Vielzahl von vollständigen Modellen aufzubauen und eine große Anzahl von Simulationsläufen durchzuführen. Durch die Verwendung identischer Bewegungsgleichungen zur Formulierung der Spektralelemente und zur Bestimmung der Dispersionkurven, wird kein methodischer Fehler eingebracht. Die Darstellung in Form von verallgemeinerten Parameterräumen ermöglicht nicht nur das Auffinden der besten Parameter, sondern veranschaulicht auch die entsprechenden Sensitivitäten, was bei der Verwendung eines Optimierungsverfahrens oftmals nicht gegeben ist.

7 Anwendungsbeispiele

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Untersuchungen lassen sich in zwei wesentliche Abschnitte unterteilen. Zunächst erfolgt die Analyse verschiedener mit piezoelektrischen Elementen versehener Plattenstrukturen, die nicht nur mit Hilfe des in dieser Arbeit vorgestellten Simulationswerkzeugs numerisch nachgebildet, sondern auch im Labor aufgebaut werden. Dies ermöglicht eine Bewertung der Simulation im Vergleich zu experimentellen Daten. Im darauf folgenden Abschnitt werden numerische Studien an teils komplexeren Strukturen vorgestellt, die verschiedene Einsatzmöglichkeiten der Simulationssoftware im Rahmen der Entwicklung von SHM-Systemen aufzeigen.

7.1 Vergleich von Simulationsergebnissen mit Messungen an Laborstrukturen

7.1.1 Quasi-unidirektionale GFK-Platte

Als Beispiel für eine Struktur mit stark ausgeprägter Anisotropie wird eine mit neun piezoelektrischen Elementen bestückte, quasi-unidirektionale GFK-Platte betrachtet, Bild 7.1.

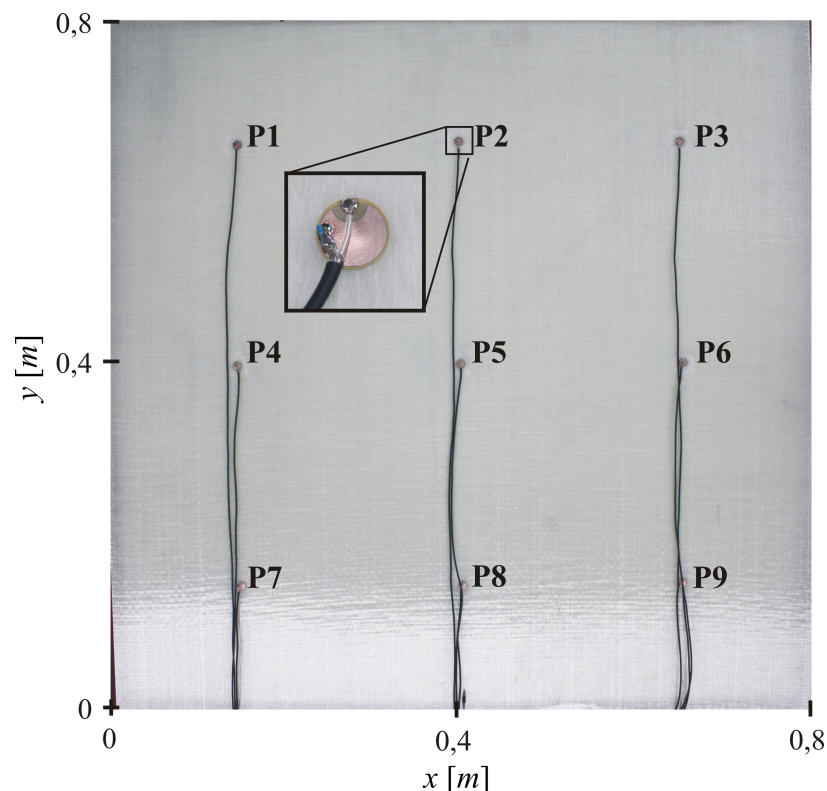


Bild 7.1: Unidirektionale Glasfaserplatte mit neun piezoelektrischen Elementen

Die Platte hat etwa die Abmessungen $800\text{mm} \times 800\text{mm} \times 1,45\text{mm}$. Wie in dem vergrößerten Ausschnitt in Bild 7.1 erkennbar ist, werden runde PZTs mit Umkontakt eingesetzt. Es handelt sich dabei um PZTs des Typs PIC151 der PI Ceramic GmbH, die eine Dicke von $0,25\text{mm}$

und einen Durchmesser von 10mm aufweisen und die direkt, ohne Zwischenschichten, auf die Platte appliziert werden. Hauptfaserrichtung der Platte ist die y -Richtung. Da die vorliegende Platte nicht aus einer Serienproduktion stammt, liegen nur ungefähre Anhaltswerte für die Materialparameter vor. Aus diesem Grunde wird die in Kapitel 6 vorgestellte Strategie zur Modellanpassung verwendet, um auf Basis von gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten in die verschiedenen Raumrichtungen geeignete Materialparameter zu bestimmen. Dazu wird P5 als Aktuator verwendet, und nacheinander mit Burst-Signalen unterschiedlicher Frequenz beaufschlagt. Alle anderen PZTs werden als Sensoren betrieben. Die Messungen werden mit Handscopes HS3 und HS4 der Firma Tiepie durchgeführt. Die maximale Ausgangsamplitude zur Anregung des Aktuators beträgt 12V , die maximale Abtastrate der Messkanäle ist 50MHz bei einer Auflösung von 12 Bit. Durch Ansteuerung über die USB-Schnittstelle direkt aus MATLAB® wird sichergestellt, dass identische Aktuator-Signale für Messung und Simulation verwendet werden. Die Geschwindigkeiten in die verschiedenen Raumrichtungen lassen sich aus der Signallaufzeit und dem Abstand zwischen dem Aktuator P5 und jeweiligen Sensor berechnen. Zur Bestimmung der Signallaufzeit können verschiedene Techniken eingesetzt werden. Bild 7.2 veranschaulicht die Verwendung eines Hüllkurvenverfahrens, bei dem die zeitliche Differenz t_s der Maximalwerte der Hüllkurven bestimmt wird.

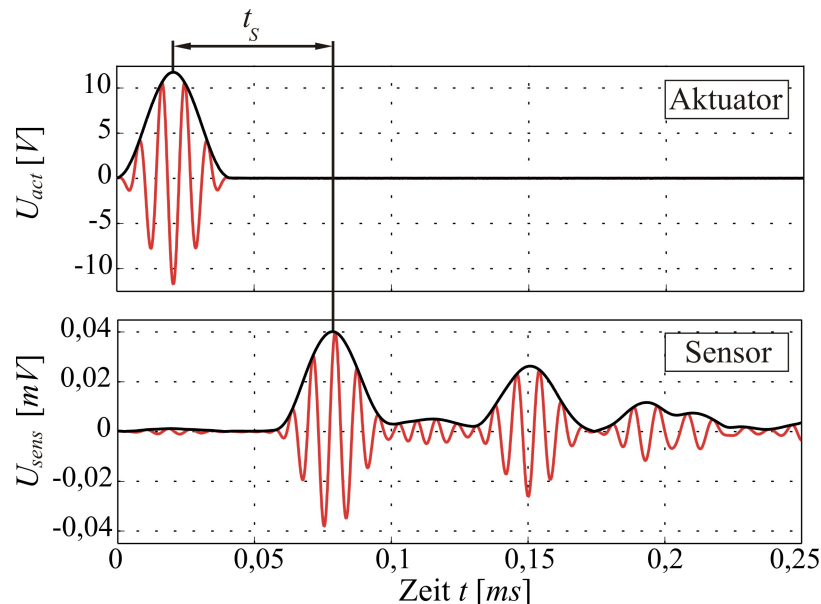


Bild 7.2: Hüllkurvenverfahren zur Bestimmung der Wellenlaufzeit

Es können alternativ auch andere Verfahren eingesetzt werden, beispielsweise die „Doppel-Peak-Technik“, die das Minimum vor dem Maximum jedes Wellenpakets lokalisieren [SEYDEL und CHANG 2001]. Diese Technik weist insbesondere Vorteile hinsichtlich der Automatisierbarkeit auf. Sie sollte allerdings nur eingesetzt werden, wenn die untersuchten Signale keine zu große Dispersion haben. Ansonsten kann es durch das Auseinanderlaufen der

dispersiven Wellenpakete dazu kommen, dass eine deutlich kleinere Signallaufzeit als mit dem Hüllkurvenverfahren bestimmt wird. Alle Verfahren weisen die Gemeinsamkeit auf, dass die Laufzeit des ersten, zur S_0 -Mode gehörenden Wellenpakets gut bestimmt werden kann. Die Laufzeit der A_0 -Mode ist jedoch deutlich schwieriger zu bestimmen, da oft zusätzlich Reflexionen der S_0 -Mode etwa gleichzeitig am Sensor eintreffen, was eine eindeutige Zuordnung eines Wellenpakets zu einer bestimmten Wellenmode sehr erschwert.

Die Materialparameter dieser Platte, die sich aus den ermittelten Wellengeschwindigkeiten bestimmen lassen, sind schon für das Beispiel in Abschnitt 6.1 verwendet worden und in Tabelle 6.1 angegeben. In Bild 7.3 sind die Verläufe der Gruppengeschwindigkeiten über der Ausbreitungsrichtung für eine Anregungsfrequenz von 120kHz in Form eines Polardiagramms dargestellt. Zusätzlich sind die experimentell bestimmten Geschwindigkeiten der S_0 -Mode eingezeichnet. Die Geschwindigkeitsverläufe von S_0 - und SH_0 -Mode unterscheiden sich nicht von den in Kapitel 6 für andere Frequenzen angegebenen Werten, weil das Modell keine Dispersion berücksichtigt, bzw. bei der SH_0 -Mode auch keine Dispersion vorliegt.

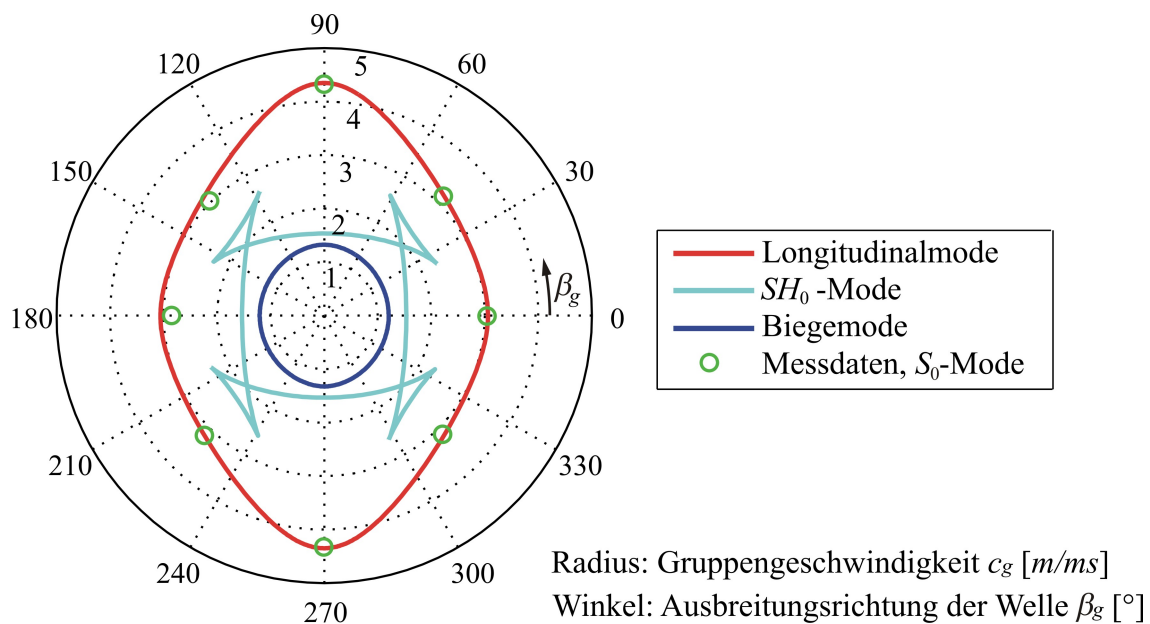


Bild 7.3: Berechnete Gruppengeschwindigkeiten verschiedener Wellenmoden sowie Messdaten der S_0 -Mode in einer unidirektionalen, $1,45\text{mm}$ dicken GFK-Platte bei Anregung mit 120kHz

Die A_0 - bzw. Biegemode weist jedoch auf Grund der veränderten Dicke und Anregungsfrequenz andere Geschwindigkeiten auf. Basierend auf den ermittelten Materialdaten wird ein Spektralelementmodell aufgebaut, das die geometrischen Abmessungen der Platte und der PZTs enthält. Es wird ein regelmäßiges Masterelementgitter verwendet, wobei Elemente der Kantenlänge 12mm (für die Piezoelemente 10mm) und sechs GLL-Knoten pro Elementkante

eingesetzt werden. Die folgenden beiden Darstellungen zeigen Vergleiche von simulierten und gemessenen Sensordaten der PZTs P2, P3 und P6, was Ausbreitungsrichtungen von 90° , 45° und 0° entspricht. Die verwendeten Anregungssignale sind Burst-Signale mit 5 Schwingungen der Frequenz 60kHz (Bild 7.4) und 120kHz (Bild 7.7). Als Aktuator wird P5 verwendet. Die Vorfaktoren zur Anpassung der Amplituden (vergleiche Abschnitt 4.4) werden zu $\zeta_s = \zeta_A = 0,67$ gewählt. Die dargestellten Messsignale sind mit einem Tiefpassfilter gefiltert, um hochfrequentes Rauschen zu unterdrücken. Durch Verwendung von Vorwärts-Rückwärts-Filterung wird dabei keine Phasenverschiebung induziert.

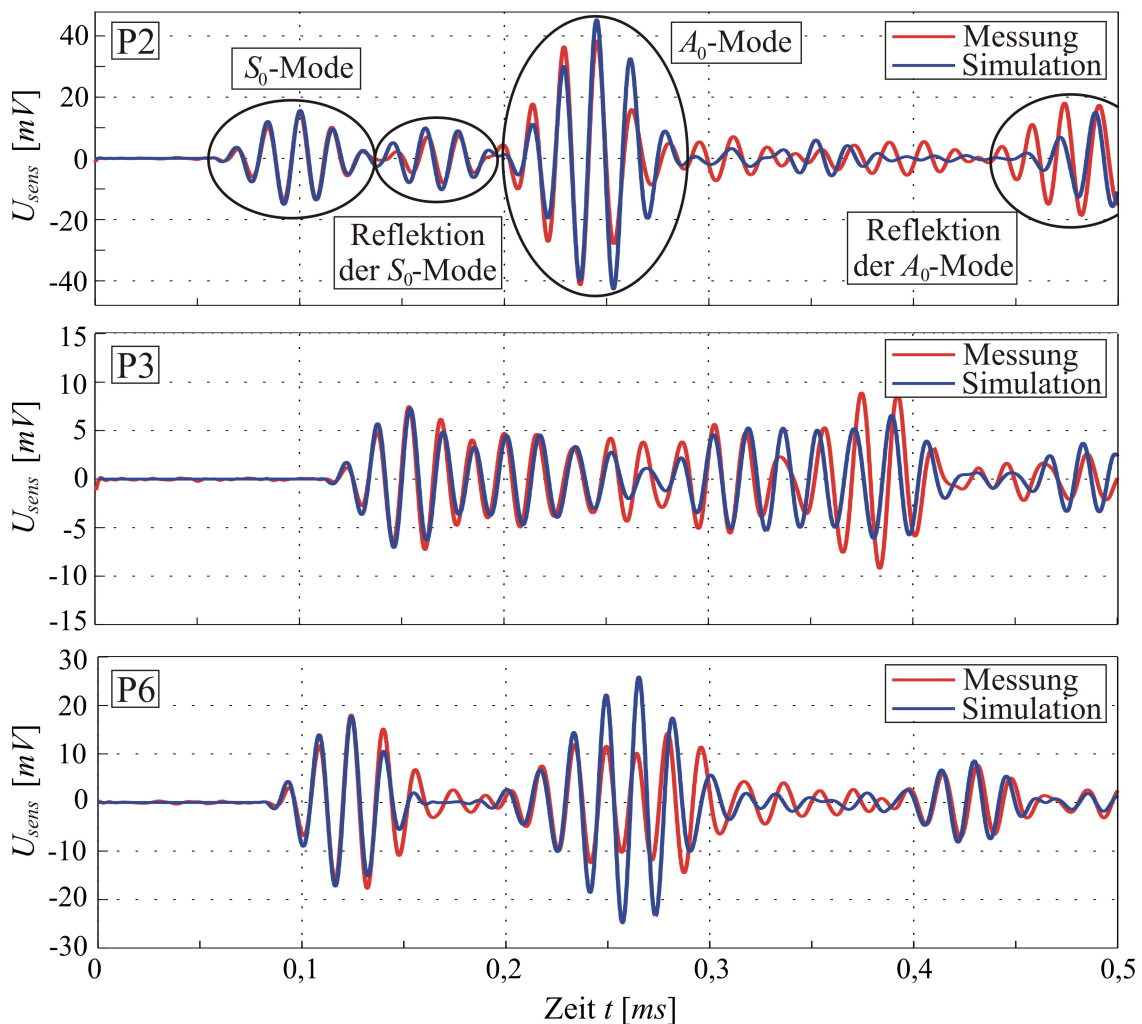


Bild 7.4: Gemessene und simulierte Sensorspannungen der Sensoren P2, P3 und P6 bei 60kHz

Wie aus Bild 7.4 hervorgeht, lassen sich sowohl die verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten (vergl. die Anfangszeiten der ersten Wellenpakete der Sensoren P2 und P6, die den gleichen Abstand zum Aktuator aufweisen) als auch das Dämpfungsverhalten der Wellenmoden in den unterschiedlichen Raumrichtungen (vergl. die Unterschiede der Maximalamplitude der Sensoren P2 und P6) gut in der Simulation abbilden. Insbesondere die direkten Wellenpa-

kete vom Aktuator zum Sensor weisen eine hohe Übereinstimmung auf. Die im Zeitsignal des Sensors P2 angegebene Zuordnung der einzelnen Wellenpakete zu verschiedenen Wellenmoden lässt sich allein auf der Basis von Messdaten nicht zuverlässig angeben, da die gemessenen Spannungssignale den superponierten Zeitverlauf aller Wellenpakete an den jeweiligen Sensorpositionen liefern. Mit Hilfe der Simulation können zu beliebigen Zeitpunkten die Wellenpakete der Membran- und Biegemoden voneinander getrennt im gesamten Bauteil abgebildet werden. Dadurch ist eine Verfolgung der Ausbreitung und somit eine genaue Zuordnung einzelner Wellenpakete möglich. In Bild 7.5 ist beispielsweise die Biegemode in Form der z -Verschiebung nach $0,3ms$ dargestellt. Der Aktuator P5 ist rot gekennzeichnet, die Sensoren sind grau dargestellt.

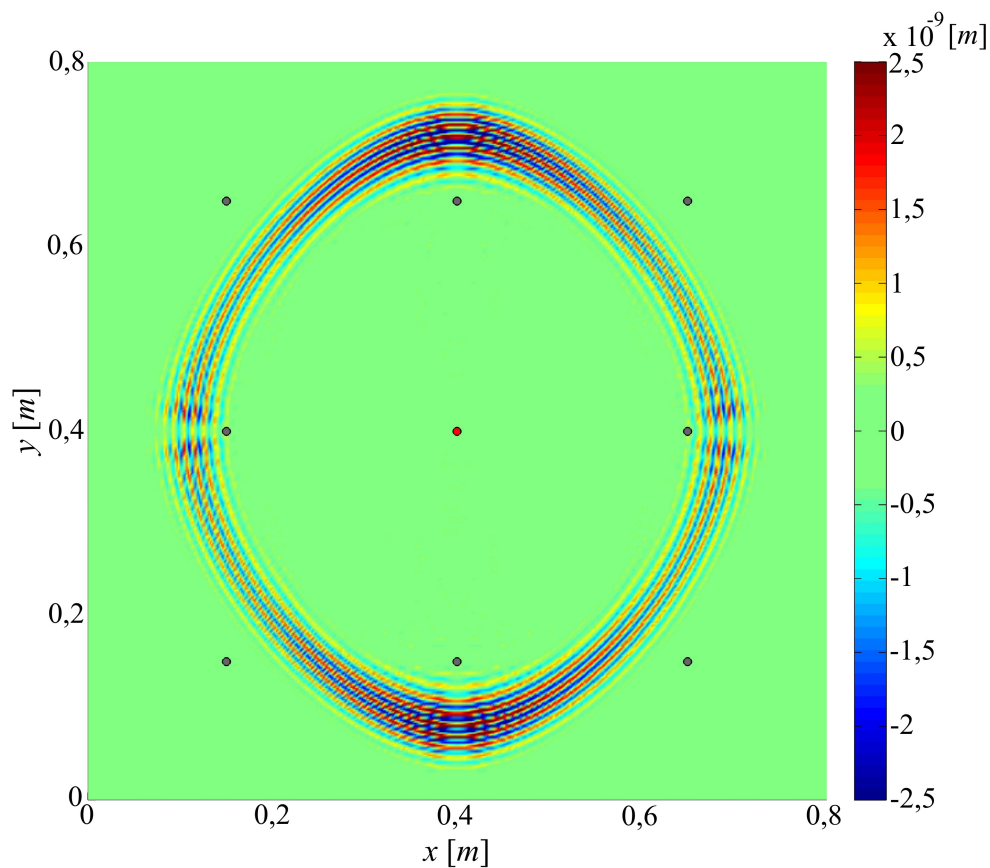


Bild 7.5: Momentaufnahme der z -Verschiebung nach $0,3ms$

Es lässt sich auch hier deutlich die richtungsabhängige Dämpfung erkennen, weil die Amplitude in x -Richtung deutlich stärker als in y -Richtung abnimmt. Bild 7.6 zeigt den Betrag der Verschiebung in der Ebene nach $0,12ms$. Im Gegensatz zur Biegemode ist hier eine starke Richtungsabhängigkeit der Geschwindigkeit erkennbar.

Neben der S_0 -Mode wird - im Gegensatz zu isotropen Strukturen, bei denen dies mit aufgeklebten PZTs kaum möglich ist - auch die SH_0 -Mode angeregt. Dies lässt sich an dem zweiten

Wellenpaket, das eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit und folglich auch eine kleinere Wellenlänge aufweist, ersehen. Die SH_0 -Mode breitet sich mit signifikanter Amplitude hauptsächlich in einem Richtungsbereich zwischen 30° und 60° (und den entsprechenden Bereichen in den anderen Quadranten) aus. Dies stimmt mit den theoretischen Voraussagen der Dispersionskurven gut überein, vergleiche die zugespitzten Bereiche der Dispersionskurven der SH_0 -Mode in Bild 7.3 und die Erklärungen in Abschnitt 6.1 zu diesem Phänomen.

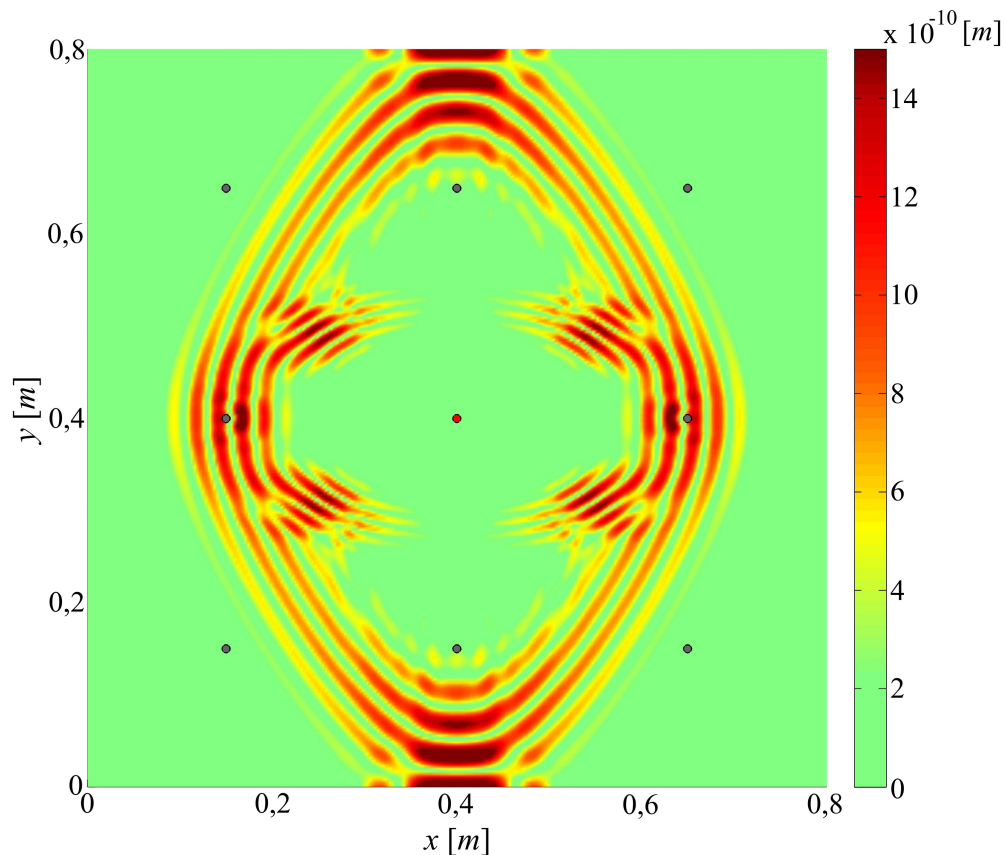


Bild 7.6: Momentaufnahme der Verschiebungen in der Ebene nach 0,12ms

In Bild 7.7 ist der Vergleich zwischen gemessenen und simulierten Sensorsignalen für eine Anregung mit der mittleren Frequenz von 120kHz für die gleichen Sensoren dargestellt. Während alle anderen Simulationsparameter unverändert bleiben, muss der Dämpfungsparameter $C_{\theta m}$, also die Dämpfung des Rotationsfreiheitsgrades in Matrix-Richtung, um 50% erhöht werden, um eine akzeptable Übereinstimmung auch für diese Frequenz zu erzielen. Eine mit ansteigender Frequenz zunehmende Dämpfung ist ein häufig bei Verbundwerkstoffen zu beobachtendes Phänomen. Auch Bild 7.7 zeigt eine recht gute Übereinstimmung der meisten Wellenpakete, die in den Signalen enthalten sind. Durch die höheren Frequenzen und die damit verbundenen kleineren Wellenlängen spielen nun in zunehmendem Maße auch kleine Fehler bei der Simulation der Geometrie oder bei der Positionierung der Sensorik eine immer

größere Rolle. Daher stellen sich nun teilweise gewisse Phasenverschiebungen bei den Wellenpaketen - insbesondere bei Reflexionen - ein.

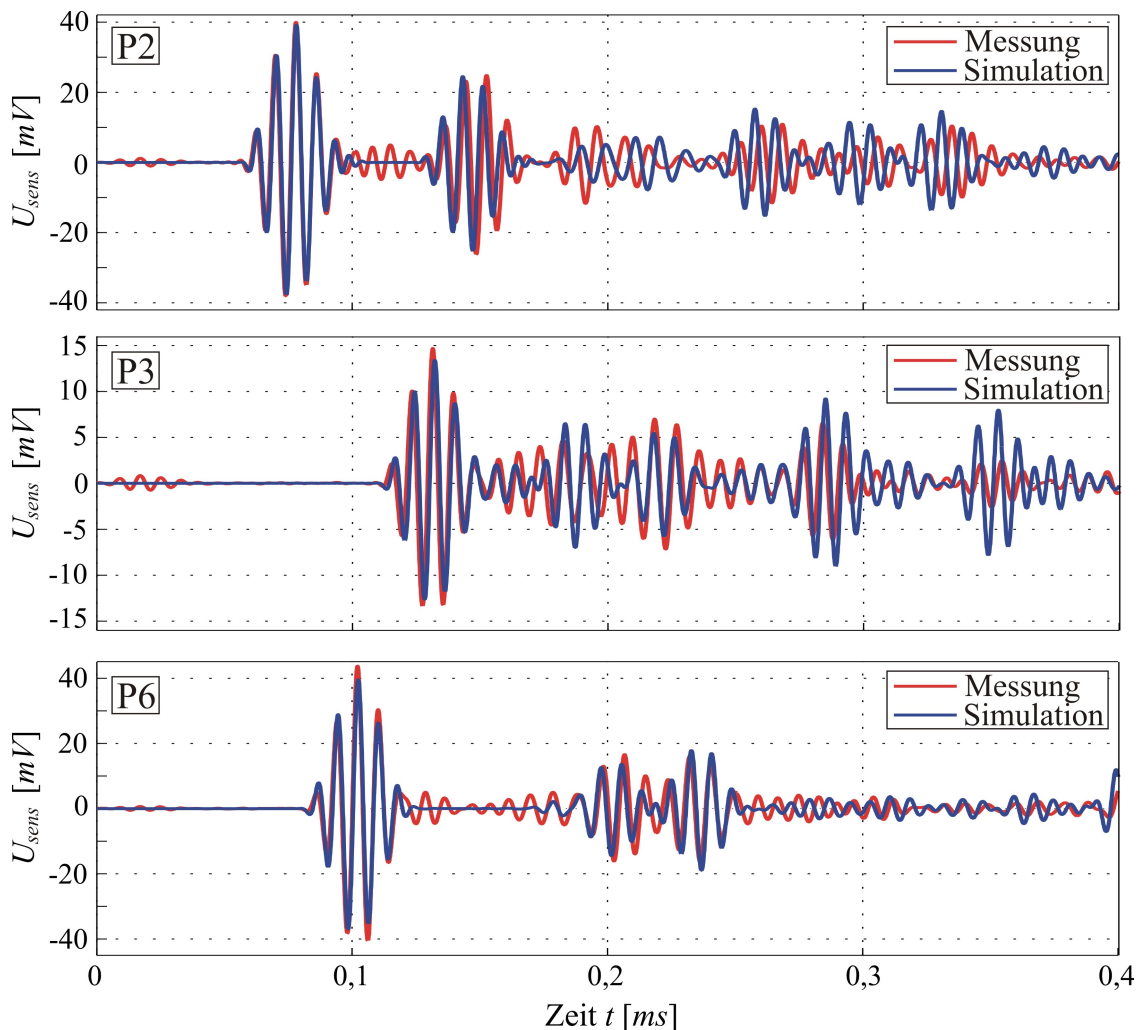


Bild 7.7: Gemessene und simulierte Sensorspannungen der Sensoren P2, P3 und P6 bei 120kHz.

In diesem Anwendungsbeispiel wird die Fähigkeit des Simulationstools zur Modellierung von Strukturen mit ausgeprägter Anisotropie und richtungsabhängiger Dämpfung untersucht. Die Simulation liefert durch die Analyse von Momentaufnahmen der Wellen innerhalb der gesamten Struktur (vergl. Bild 7.5 und Bild 7.6) einen Beitrag zu einem besseren Verständnis der Wellenausbreitung in der Struktur. Um dies durch Messungen zu erhalten, wäre der sehr aufwendige Einsatz eines kostenintensiven 3D-Lasersvibrometers nötig, vergleiche beispielsweise [STASZEWSKI *et al.* 2004].

Da es sich in diesem Beispiel um eine aus nur einer Lage bestehenden GFK-Platte handelt, können Delaminationen und damit die häufigste Versagensursache von Faserverbundwerkstoffen, nicht auftreten. Daher wird im folgenden Beispiel eine andere Struktur analysiert.

7.1.2 CFK-Platte mit Delamination

Zur Untersuchung des Einflusses einer Delamination auf die Wellenausbreitung wird eine aus 16 identischen Lagen bestehende CFK-Platte der Gesamtdicke $4,2\text{mm}$ verwendet. Die Platte weist ein quasi-isotropes Verhalten auf, was durch den Lagenaufbau $[0^\circ, 90^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, -45^\circ, 45^\circ]_s$ erreicht wird. Die nominellen Materialparameter der Einzelschicht laut Datenblatt sind in Tabelle 7.1 angegeben.

Tabelle 7.1: Materialparameter einer CFK-Einzelschicht

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ρ [kg/m ³]
155,0	8,5	4,0	4,0	4,0	0,3	1600

Die vorliegende Platte hat Abmessungen von etwa $500\text{mm} \times 500\text{mm}$ und wird mit neun quadratischen PZTs der Kantenlänge 10mm und der Dicke $0,5\text{mm}$ versehen. In Bild 7.8 ist diese Platte mit der aufgebrachten Sensorik dargestellt. Auch hier werden für die Messungen die Handscopes HS3 und HS4 eingesetzt.

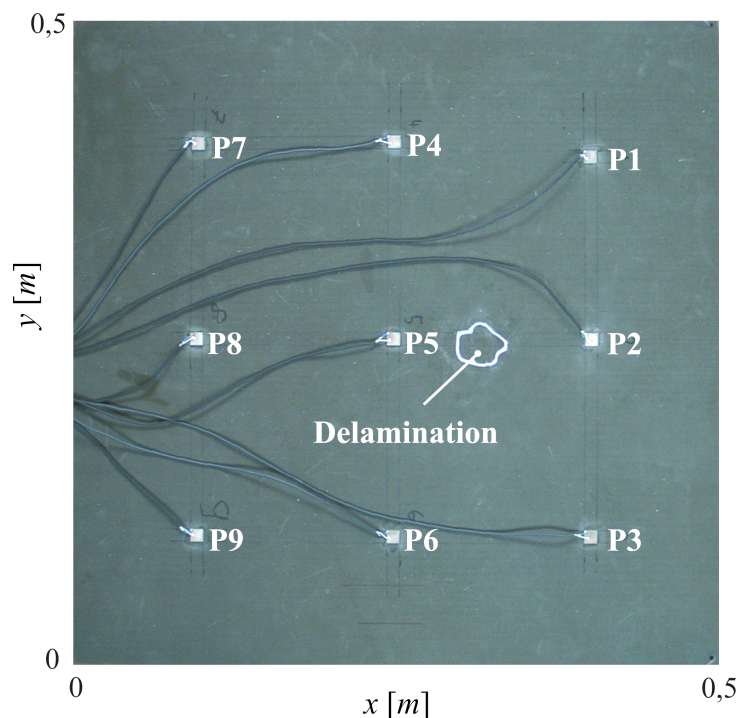


Bild 7.8: CFK-Platte mit neun quadratischen PZTs und einer Delamination.

Zunächst werden Messreihen an der ungeschädigten Platte durchgeführt, wobei als Aktuator-signal die schon bekannten Burst-Signale eingesetzt werden. Die verwendete Grundfrequenz wird dabei in Schritten von 30kHz zwischen 30kHz und 150kHz variiert. Die eingezeichnete Delamination wird erst im Anschluss eingebracht, wie weiter unten detailliert vorgestellt ist.

Bild 7.9 zeigt die gemessenen und simulierten Sensorsignale der Sensoren P4, P2 und P1 bei einer Anregung von P5 mit 60kHz . Die Vorfaktoren zur Anpassung der Amplituden werden in diesem Fall zu $\zeta_s = 0,3$ und $\zeta_A = 1$ gewählt. Im Gegensatz zur zuvor betrachteten GFK-Platte liegt hier eine deutlich geringere Anisotropie vor, wie sich an den fast identischen Wellenlaufzeiten zu Sensor P4 und P2 erkennen lässt. Die vorliegenden Unterschiede in Phasenlage und Amplitude der verschiedenen Wellenpakete könnten möglicherweise durch eine noch bessere Anpassung der Materialparameter des Modells und der Amplituden-Vorfaktoren weiter verringert werden.

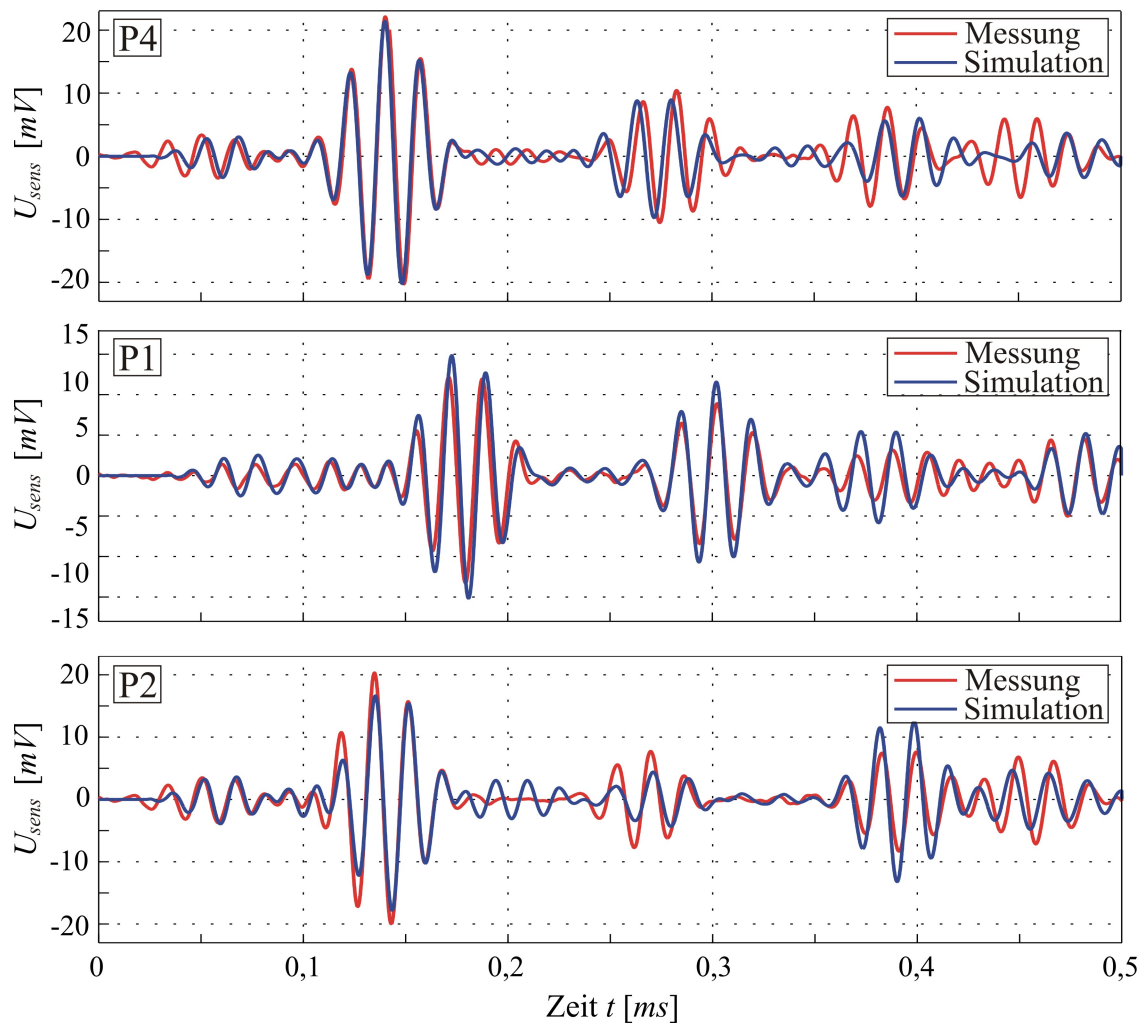


Bild 7.9: Gemessene und simulierte Sensorspannungen der Sensoren P4, P1 und P2 bei 60kHz

Nach der Aufnahme mehrerer Datensätze der ungeschädigten Platte wird die in Bild 7.8 eingezeichnete Delamination erzeugt. Dazu wird eine einfache Vorrichtung gemäß Bild 7.10 verwendet, um einen so genannten „Low-Velocity-Impact“ einzubringen. Die Fallhöhe des Bolzens beträgt 1003mm , so dass eine Energie von 15J eingebracht wird. Nach dem erstmaligen Aufschlagen auf der Platte wird der Bolzen manuell aufgefangen, um ein mehrmaliges

Auftreffen zu verhindern. Um eine Aussage über die Größe der Delamination zu ermöglichen wird ein Krautkramer Branson USD15 Ultraschallprüfgerät eingesetzt. Durch Scannen des in Frage kommenden Gebiets in der Nähe des Aufschlagpunktes des Impact-Fallgewichts kann der Bereich bestimmt werden, in dem es zur Trennung von Laminatschichten kommt. Während die delaminierte Fläche mit hoher Genauigkeit bestimmt werden kann, ist die Lage der Delamination über der Plattendicke nicht genau feststellbar. Es lässt sich jedoch aus der Ultraschallmessung der Schluss ziehen, dass die Delamination sich nicht in der Nähe der Bauteiloberfläche befindet, sondern in einem Bereich zwischen der Mitte und drei Vierteln der Plattendicke. Darüber hinaus zeigen die Ultraschallsignale, dass nicht nur genau eine Schicht delaminiert ist, sondern sich innerhalb des gekennzeichneten Bereichs Abschnitte ergeben, in denen unterschiedliche Lagen delaminiert sind. Aus einem verschwindenden Rückwandecho des Ultraschallsignals ergibt sich weiterhin, dass es im größten Teil des delaminierten Gebiets zur Ausbildung eines Spaltes zwischen den Lagen kommt.

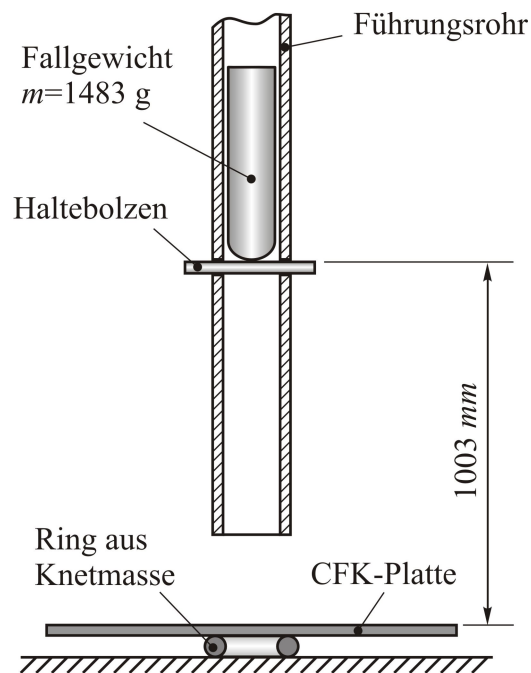


Bild 7.10: Skizze der verwendeten Vorrichtung zum Einbringen einer Delamination

Für die Simulation werden die Elemente in dem in Bild 7.8 als delaminiert gekennzeichneten Bereich gemäß der in Abschnitt 4.6.2 vorgestellten Strategie durch zwei voneinander getrennte Elementlagen modelliert. Dabei wird die möglicherweise unterschiedliche Lage der Delamination über der Dicke jedoch nicht berücksichtigt, sondern die Trennung wird konstant zwischen Lage 10 und 11 angenommen. Wegen der gemessenen Ausbildung des Spaltes wird auf Kontaktbedingungen verzichtet.

Die folgenden beiden Bilder zeigen Vergleiche zwischen gemessener und simulierter Sensorspannung des Sensors P2 bei Anregung durch Aktuator P5. Da die Schädigung auf dem direkten Pfad zwischen P5 und P2 liegt, weist dieser Datensatz die größte Veränderung auf. Für die in Bild 7.11 dargestellten Signale bei Anregung mit der Grundfrequenz 60kHz ist zu beobachten, dass die S_0 -Mode nur eine sehr geringe Veränderung durch die Delamination erfährt. Bei der A_0 -Mode ist ein signifikanter Zeitversatz, aber kaum Amplitudenunterschiede, festzustellen. Dieses Verhalten ist in sehr ähnlicher Weise sowohl bei den Messdaten (rot und schwarz dargestellt), wie auch bei den Simulationsdaten (blau und grün) zu beobachten.

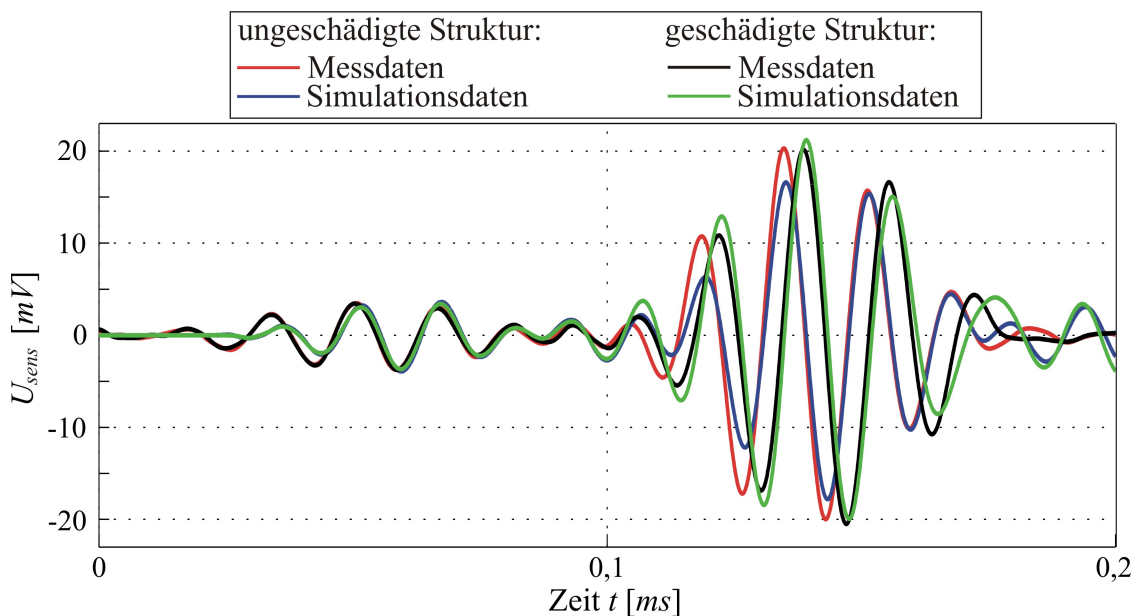


Bild 7.11: Gemessene und simulierte Sensorspannungen des Sensors P2 bei 60kHz für die ungeschädigte Platte (rot und blau) sowie nach Einbringen der Delamination (schwarz und grün)

Bild 7.12 zeigt die gleichen Datensätze, die sich bei einer Grundfrequenz des Anregungssignals von 120kHz ergeben. Die Vorfaktoren zur Anpassung der Amplituden werden in diesem Fall zu $\zeta_S = 0,3$ und $\zeta_A = 1,3$ gewählt. Im Vergleich zu Bild 7.11 ergeben sich hier etwas größere Abweichungen zwischen Simulationsmodell und Messdaten. Wie Versuche im Labor gezeigt haben, werden die erheblichen Abweichungen im Zeitbereich kleiner als $0,03\text{ms}$ durch ein elektrisches Übersprechen des Anregungssignals auf das Sensorkabel verursacht und nicht durch eine real in der Platte vorhandene Welle ausgelöst. Auch hier ist deutlich erkennbar, dass die A_0 -Mode wesentlich stärker als die S_0 -Mode durch die Schädigung beeinflusst wird. Sowohl in der Messung, wie auch in den Simulationsdaten kommt es zu einer fast vollständigen Auslöschung des Wellenpakets der A_0 -Mode im Bereich zwischen $0,12$ und $0,15\text{ms}$. Das Wellenpaket der S_0 -Mode verändert sich vergleichsweise wenig hinsichtlich der Amplitude, wobei die Simulation in diesem Fall den messbaren Einfluss überschätzt. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass die Delamination nicht, wie im Modell angenommen, vollständig

zwischen zwei Lagen stattfindet, sondern abschnittsweise auf verschiedene Schichten verteilt ist. Dadurch wird möglicherweise ein größerer Zusammenhalt der Schichten bei Bewegungen in der Ebene hervorgerufen.

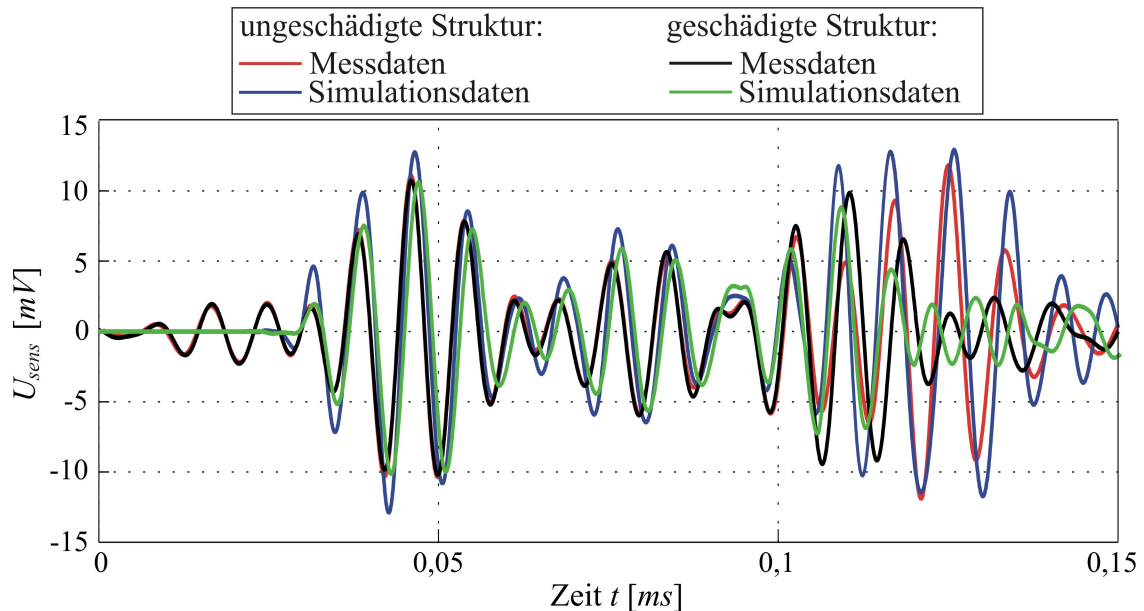


Bild 7.12: Gemessene und simulierte Sensorspannungen des Sensors P2 bei 120kHz für die ungeschädigte Platte (rot und blau) sowie nach Einbringen der Delamination (schwarz und grün)

Abschließend veranschaulicht Bild 7.13 den Einfluss der Lage der Delamination über dem Plattenquerschnitt auf das Sensor Spannungssignal. Dargestellt sind die simulierten Sensor Spannungssignale für Delaminationen identischer Fläche, die zwischen unterschiedlichen Lagen angeordnet sind. Genau in der Plattenmitte (zwischen Schicht 8 und 9) ist der Einfluss auf die S_0 -Mode gering, auf die A_0 -Mode jedoch schon sehr deutlich feststellbar.

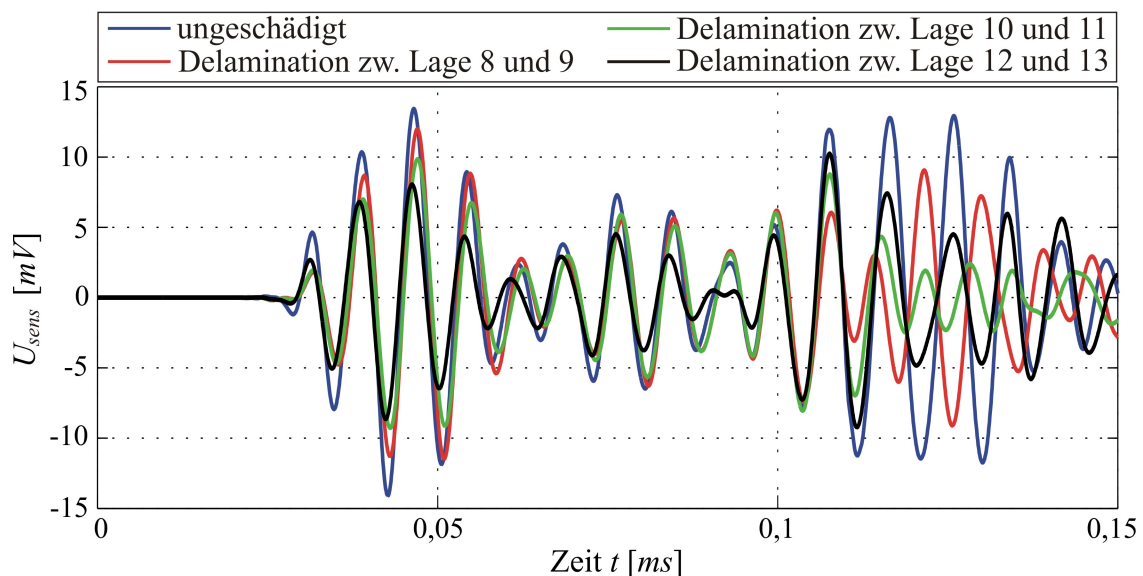


Bild 7.13: Zum Einfluss der Lage der Delamination im Plattenquerschnitt

Mit zunehmendem Abstand von der Plattenmitte nimmt der Einfluss dann zunächst zu, wie in Bild 7.13 erkennbar ist. Wird die Delamination noch weiter außen als zwischen Lage 12 und 13 angenommen nimmt der Einfluss wieder ab, was aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet ist. Während sich der Einfluss auf die S_0 -Mode hauptsächlich in einer verringerten Amplitude äußert, weist die A_0 -Mode sehr starke Abweichungen hinsichtlich Amplitude und Phasenlage auf. Als wesentliche Tatsache lässt sich festhalten, dass mit diesem Simulationsmodell die grundsätzlichen Effekte einer Delamination auf die Wellenausbreitung adäquat simuliert werden können: Sowohl der unterschiedliche Einfluss auf S_0 - und A_0 -Mode, als auch die starke Abhängigkeit von der Wellenlänge des verwendeten Signals können realitätsnah nachgebildet werden.

7.1.3 Platte unter statischer Vorlast

Zur Untersuchung des Einflusses statischer Vorlasten auf das Ausbreitungsverhalten geführter Wellen werden Versuche an einer Aluminiumplatte der Abmessungen $600\text{mm} \times 140\text{mm} \times 1,5\text{mm}$ durchgeführt, die mit 2 quadratischen PZTs der Kantenlänge 20mm und der Dicke $0,5\text{mm}$ bestückt ist. Wie in Bild 7.14 dargestellt, wird diese Platte in eine Zugprüfmaschine eingespannt, mit der eine einachsige, statische Vorspannung aufgebracht werden kann. Die verwendeten Spanneinrichtungen sind ca. 130mm breit, so dass eine möglichst gleichmäßige Spannungsverteilung innerhalb der Platte erzeugt wird.

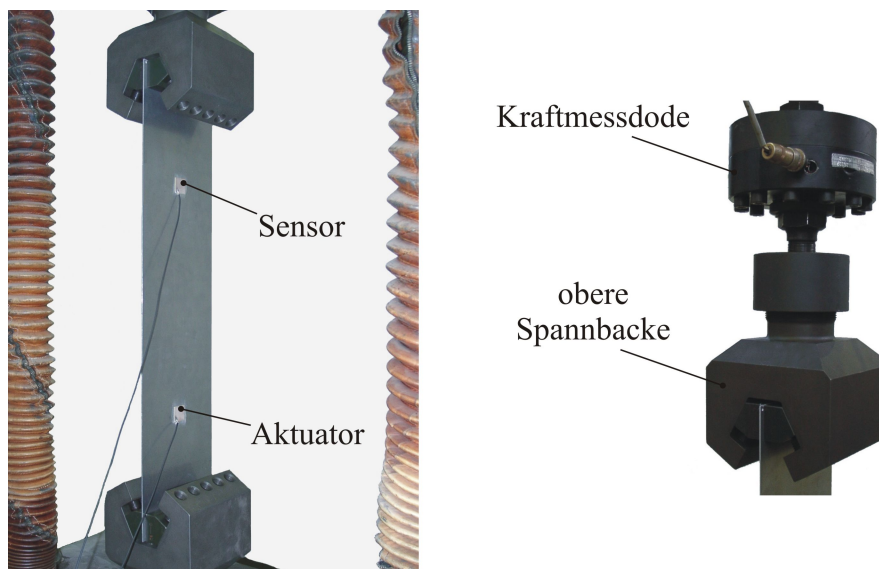


Bild 7.14: In eine Zugprüfmaschine eingespannte Aluminiumplatte mit Aktuator und Sensor (links); integrierte Kraftmessdose (rechts)

Im Modell wird eine geometrische Steifigkeitsmatrix gemäß Abschnitt 3.8 berücksichtigt. Bei der Modellierung dieser Konfiguration ist zu beachten, dass - im Gegensatz zu den in den

vorherigen Abschnitten betrachteten Beispielen mit ausschließlich freien Randbedingungen - nun der obere und untere Rand der Platte durch die Spannvorrichtungen der Zugprüfmaschine fest eingespannt ist. Aus den durchgeführten Messungen ergibt sich, dass diese Einspannung einen erheblichen Einfluss auf die Reflexionen der Wellenpakete hat, der für einen Vergleich von gemessenen und simulierten Sensorspannungen auch im Simulationsmodell berücksichtigt werden muss.

Um die Einspannung in idealer Weise zu modellieren, müssten eigentlich Spektral-Volumenelemente verwendet werden, da es sich nicht mehr um dünnwandige Bauteile handelt. Dies erfolgt im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht: Da bei den hier vorgestellten Untersuchungen ausschließlich grundsätzliche Effekte einer statischen Vorlast auf die Wellenausbreitung in dünnwandigen Strukturen näher untersucht werden sollen, ist eine möglichst genaue Modellierung der Einspannungen nicht notwendig. Es ist zu diesem Zweck ausreichend, mit Hilfe von vereinfachten Modellen das in der Messung zu beobachtende Reflexionsverhalten annähernd nachzubilden.

Es stellt sich dabei heraus, dass die Einspannung in Abhängigkeit der Grundfrequenz des Anregungssignals ein unterschiedliches Verhalten zeigt. Daher werden zwei verschiedene Modelle erstellt. Für den höheren Frequenzbereich werden die Einspannungen mit Hilfe von dickeren Plattenelementen definiert, vergl. Bild 7.15. Die Materialparameter dieser Elemente werden nicht verändert.

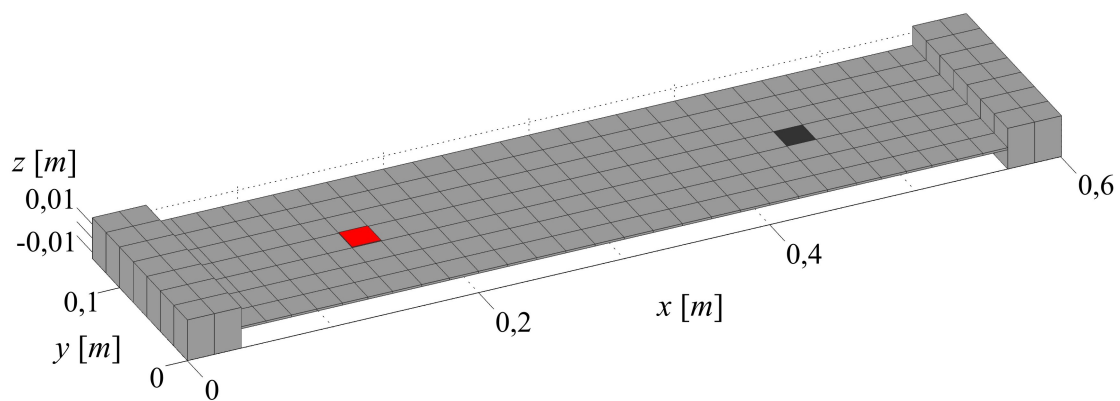


Bild 7.15: Simulationsmodell der eingespannten Platte für den höheren Frequenzbereich mit dickeren Elementen an den Einspannungen, Aktuator (rot) und Sensor (dunkelgrau)

In Bild 7.16 sind Verläufe der Sensorspannung für ein Anregungssignal mit der Grundfrequenz 100kHz gezeigt. Die Platte ist dabei einmal kraftfrei in der Zugprüfmaschine eingespannt, im anderen Fall ist eine Zugkraft von $10,2\text{kN}$ aufgebracht, die eine statische Vorspannung von $\sigma_{stat} = 50\text{N/mm}^2$ in der Platte bewirkt. Zur Generierung der Anregungssignale wird bei diesem Versuch ein Signalgenerator des Typs Agilent 33220A verwendet.

Die Amplitude des aufgetragenen Spannungssignals beträgt $10V$. Die Aufnahme der Sensorspannung erfolgt mit einem Yokogawa DL750 ScopeCorder, der mit dem Signalgenerator getriggert wird. Die Änderung der hier verwendeten Messhardware im Gegensatz zu den beiden zuvor dargestellten Anwendungsbeispielen ist allein in der jeweiligen Verfügbarkeit begründet. Ein signifikanter Einfluss auf die gezeigten Ergebnisse ist nicht gegeben.

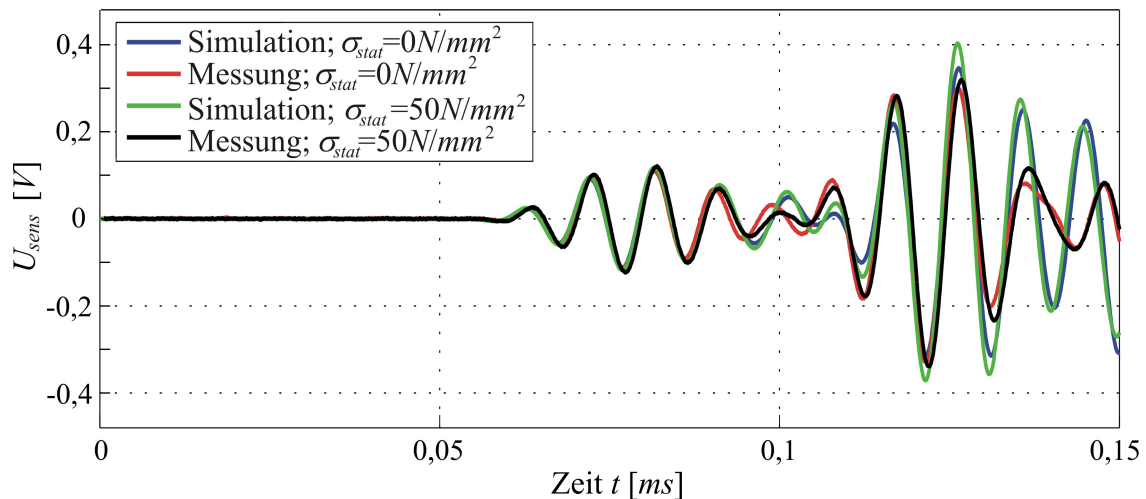


Bild 7.16: Sensorspannung bei Anregung mit 4 Schwingspielen der Grundfrequenz $100kHz$ mit und ohne statischer Vorspannung

Es ist deutlich zu erkennen, dass die aufgetragene statische Vorspannung sowohl bei der gemessenen, wie auch bei der simulierten Sensorspannung einen geringen Effekt in Bezug auf die Amplitude der Signale hat, jedoch keine nennenswerte Phasenverschiebung bewirkt. Während im ersten Wellenpaket der S_0 -Mode im Zeitbereich kleiner als $0,1ms$ auch die Amplitude völlig unverändert bleibt, zeigt das zweite Wellenpaket (entspricht der A_0 -Mode) Änderungen der Amplitude. Die ab etwa $0,13ms$ zu beobachtenden größeren Unterschiede zwischen Mess- und Simulationsdaten sind auf die nicht ideale Modellierung der Einspannungen zurückzuführen. Dennoch lässt sich klar erkennen, dass die statische Vorspannung keinen starken Effekt auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenpakete mit diesem Frequenzgehalt hat und dass die Simulation dies korrekt nachbildet.

Für Anregungssignale mit einer Grundfrequenz unterhalb von etwa $20kHz$ lässt sich der Effekt der Einspannungen besser mit dem in Bild 7.17 dargestellten Modell nachbilden. Dabei werden die eingespannten Bereiche nicht mit dickeren Elementen modelliert, sondern es werden nur die Materialdämpfungsparameter der entsprechenden Elemente (in etwas dunklerem grau am rechten und linken Ende der Platte dargestellt) erhöht.

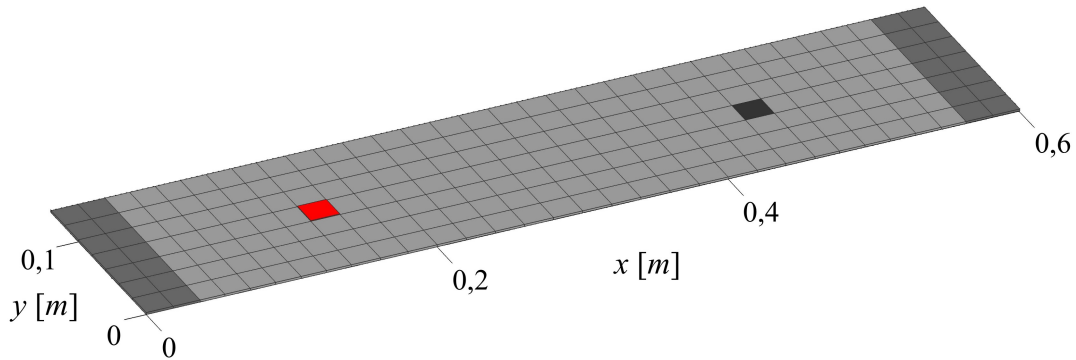


Bild 7.17: Simulationsmodell der eingespannten Platte für den niedrigen Frequenzbereich mit veränderten Dämpfungsparametern der Elemente an den Einspannungen, Aktuator (rot) und Sensor (dunkelgrau)

Bild 7.18 zeigt die gemessenen und simulierten Sensorspannungen für ein aus vier Schwingspielen bestehendes Burst-Signal der Grundfrequenz 5kHz . Auch hier wird der kraftfrei eingespannte mit dem mit $\sigma_{stat} = 50\text{N/mm}^2$ vorgespannten Fall verglichen. In diesem Frequenzbereich wird die S_0 -Mode nur sehr schwach angeregt, wie sowohl Messung als auch Simulation aufzeigen. Da sich die A_0 -Mode in diesem Frequenzbereich zudem wesentlich langsamer ausbreitet, wird ein deutlich längerer Zeitraum betrachtet.

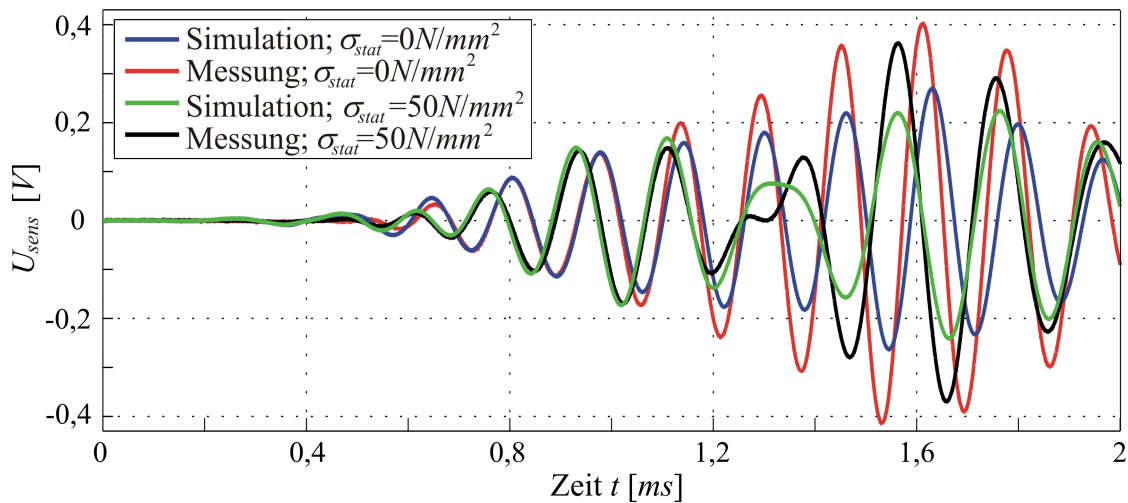


Bild 7.18: Sensorspannung bei Anregung mit 4 Schwingspielen der Grundfrequenz 5kHz mit und ohne statischer Vorspannung

Aus Bild 7.18 geht deutlich hervor, dass bei Anregungssignalen mit diesem Frequenzgehalt ein erheblicher Einfluss der Vorspannung auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der A_0 -Mode vorliegt: Die Welle kommt unter dem Einfluss der statischen Vorspannung erheblich früher am Sensor an. Auch dieses Verhalten wird durch das verwendete Simulationsmodell gut nachgebildet. Die zunehmenden Unterschiede zwischen Messung und Simulationsdaten im Zeitraum ab etwa einer Millisekunde werden auch hier durch die nicht ideale Modellierung der Einspannungen hervorgerufen.

Diese Ergebnisse stimmen qualitativ sehr gut mit Erkenntnissen von [CHEN und WILCOX 2007] überein. Sie stellen mit Hilfe eines FE-Modells fest, dass durch statische Zugkräfte bei Platten ausschließlich die A_0 -Mode beeinflusst wird und dass dies hauptsächlich unterhalb von $f \cdot h = 0,01 \text{ MHz mm}$ auftritt. Beide Effekte werden durch die hier verwendete Modellierung mit Hilfe einer geometrischen Steifigkeitsmatrix auf effiziente Weise in das Simulationsmodell einbezogen.

Im Hinblick auf ein SHM-System lässt sich aus diesen Erkenntnissen schließen, dass möglichst höhere Anregungsfrequenzen verwendet werden sollten, um diesen Effekt, der die Signalauswertung zusätzlich komplexer macht, möglichst auszuschließen.

7.2 Numerische Studien komplexerer Anwendungsfälle

In diesem Abschnitt werden komplexere Anwendungsfälle der in dieser Arbeit entwickelten Simulationsstrategie vorgestellt. Dabei werden sowohl Studien an einer komplexeren Struktur durchgeführt, wie auch ein Beispiel mit aufwändigerer Aktuatorik und Sensorik in Form eines phased arrays analysiert.

7.2.1 Verschiedene Schadensfälle eines ebenen, versteiften Panels

Wie im Verlauf der Arbeit schon erwähnt, ist eine versteifte Schale ein im Flugzeugbau sehr häufig vorkommendes Substrukturelement. Daher werden an einem Simulationsmodell einer ebenen, versteiften Schale drei exemplarische Schadensfälle detailliert im Hinblick auf ihre Auswirkungen auf das Wellenfeld und die Detektierbarkeit mit Hilfe der aufgebrachten Piezoelemente untersucht. Das Masterelementgitter des dazu verwendeten Strukturmodells ist in Bild 7.19 dargestellt. Als Parameter für Steifigkeit und Dichte werden Literaturwerte für Aluminium verwendet (in Abschnitt 5.2 angegeben), da gezielt keine aus Anisotropie resultierende Effekte betrachtet werden sollen. Die Grundplatte und die darauf senkrecht stehenden Rippen sind 2 mm dick, im Verbindungsbereich wird rechts und links der Rippen eine Dicke von 3 mm angenommen (in dunklerem grau dargestellt). Alle Dämpfungsparameter werden identisch gewählt, so dass isotropes Dämpfungsverhalten vorliegt. In den Bereichen neben den Rippen (dunkelgrau) wird eine doppelt so große Dämpfung wie in der restlichen Struktur angenommen, weil diese Verbindungsbereiche auch in der Realität eine erhöhte Dämpfung aufweisen. Diese Modellierung bildet realitätsnah die Verwendung von T-förmigen Stringern nach, die mit der Grundplatte verbunden sind. Es sind 28 Piezoelemente der Dicke $0,5 \text{ mm}$ gleichmäßig auf der Struktur verteilt, wobei die PZTs 1 bis 16 auf der Grundplatte, und 17 bis

28 auf den Stringern angebracht sind. Zur Erzeugung der Spektralelemente wird $N_{GLL} = 6$ verwendet, was zu einem Gesamtsystem von ca. 350 000 Freiheitsgraden führt.

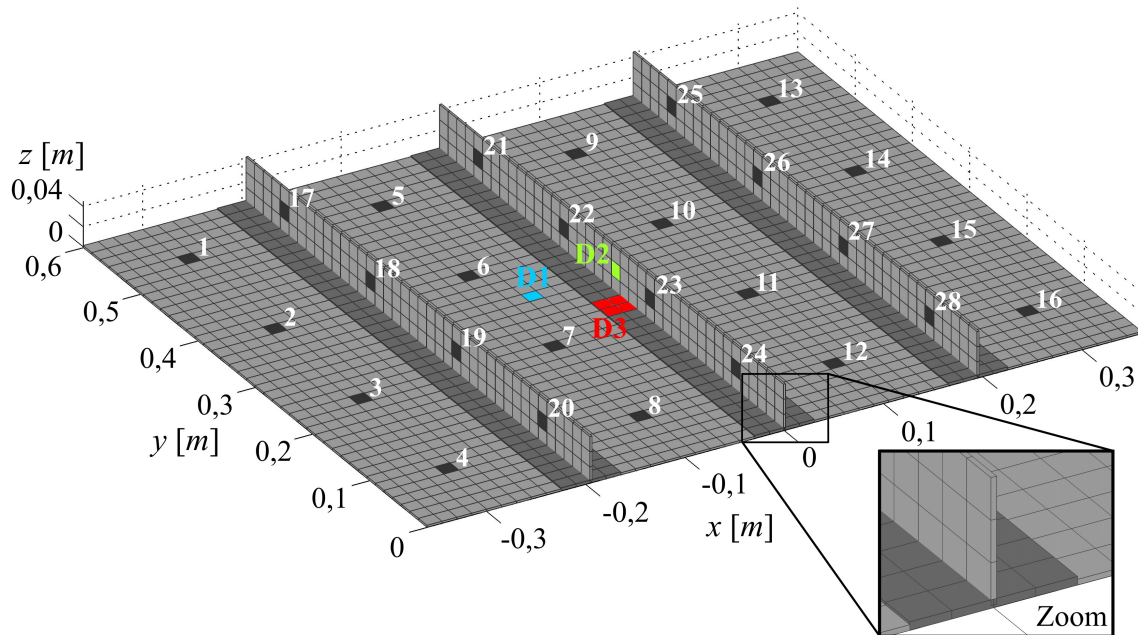


Bild 7.19: Realitätsnahes Simulationsmodell einer versteiften Schale

Die in Bild 7.19 in unterschiedlichen Farben gekennzeichneten Elemente zeigen die Positionen, an denen drei unterschiedliche Schädigungsszenarien vorliegen: In der Mitte des Querschnitts liegende Delaminationen eines Elementes in der Grundplatte (D1) und im Stringer (D2), sowie eine partielle Ablösung des mittleren Stringers von der Grundplatte (D3). Im letztgenannten Fall werden die ursprünglich 3mm dicken Elemente rechts und links der Rippe durch zwei getrennte Elementlagen modelliert (Bild 7.20). Die senkrecht stehende Rippe weist in diesem Bereich keine direkte Verbindung zur unteren, 2mm dicken Lage auf.

Mit dem so aufgebauten Modell kann eine Vielzahl von Studien durchgeführt werden, deren vollständige Darstellung im Rahmen dieser Arbeit nicht sinnvoll ist. Daher beschränkt sich die Auswertung auf ausgewählte Beispiele.

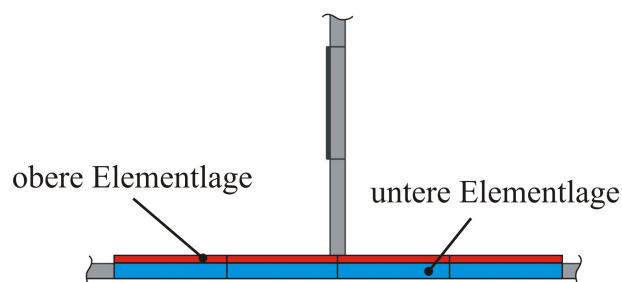


Bild 7.20: Detail der Modellierung partieller Stringer-Ablösung

Schädigung D1: Delamination innerhalb der Grundplatte

Als erster Schädigungsfall wird die Delamination innerhalb der Grundplatte untersucht. Bild 7.21 zeigt die Momentaufnahme der z -Verschiebung nach $103\mu\text{s}$ bei Anregung von P6 (rot markiert) mit einem aus vier Schwingspielen bestehenden Burst der Grundfrequenz 70kHz . Sowohl der Einfluss des delaminierten Elements auf das Wellenfeld als auch die schon in Abschnitt 5 dargestellte Isolationswirkung der Stringer ist deutlich sichtbar.

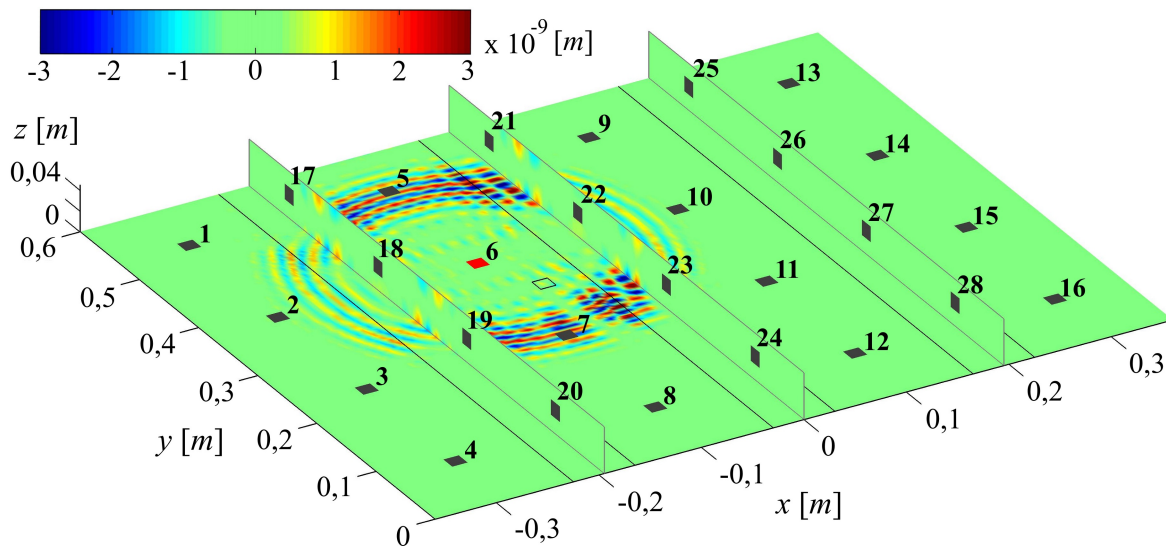


Bild 7.21: Momentaufnahme der z -Verschiebung nach $103\mu\text{s}$, Anregung an P6

Diese Isolationswirkung wird auch an den Sensorspannungssignalen deutlich. In Bild 7.22 sind fünf ausgewählte Sensorspannungssignale der ungeschädigten Struktur dargestellt. Die Sensoren P7 (grün) und P8 (magenta) zeigen die größten Amplituden, da sie wie Aktuator P6 zwischen dem linken und dem mittleren Stringer liegen.

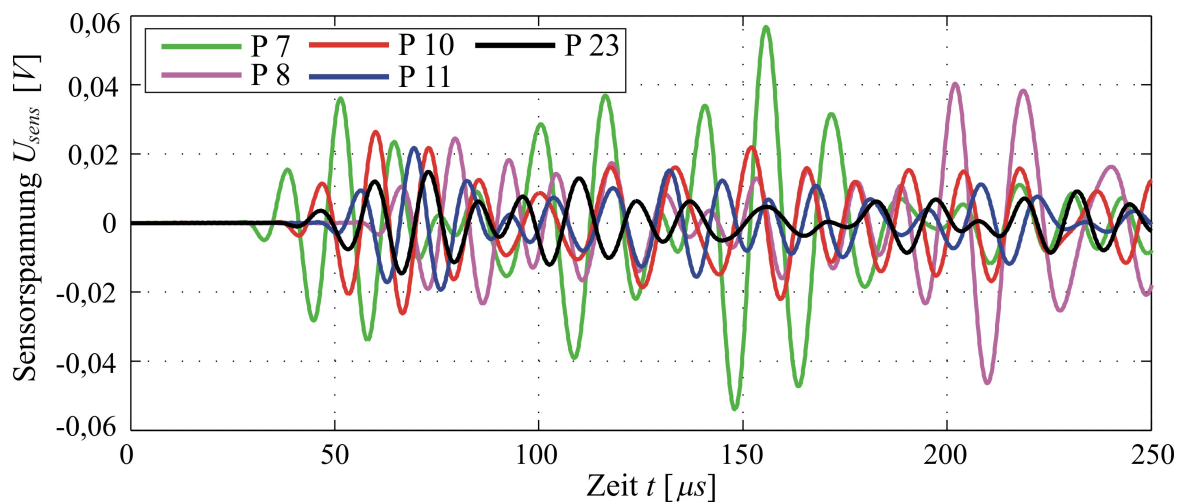


Bild 7.22: Ausgewählte Sensorspannungssignale bei Anregung von P6

Bei den Signalen von P10 (rot) und P11 (blau), die zwischen mittlerem und rechtem Stringer liegen, treten geringere Amplituden auf, was durch die Isolationswirkung der Stringer hervorgerufen wird. Auch der auf dem Stringer liegende Sensor P23 zeigt eine geringere Maximalamplitude. Bild 7.23 veranschaulicht die Differenzen der Sensorspannungen dieser fünf Sensoren im geschädigten und ungeschädigten Fall. Die erhebliche Isolationswirkung der Stringer kommt hier noch deutlicher zum Vorschein, denn die Amplituden der an P7 und P8 ermittelten Differenzen sind teils mehr als doppelt so hoch, wie diejenigen der anderen dargestellten Sensoren. Dies lässt sich dadurch begründen, dass der eingebrachte Schaden in Form einer Delamination hauptsächlich sensitiv gegenüber der A_0 -Mode ist, gerade diese Mode jedoch besonders stark isoliert wird (vergleiche auch Abschnitt 5.6). Alle weiteren Sensorsignale, die hier nicht detailliert abgebildet sind, bestätigen dieses Erkenntnis.

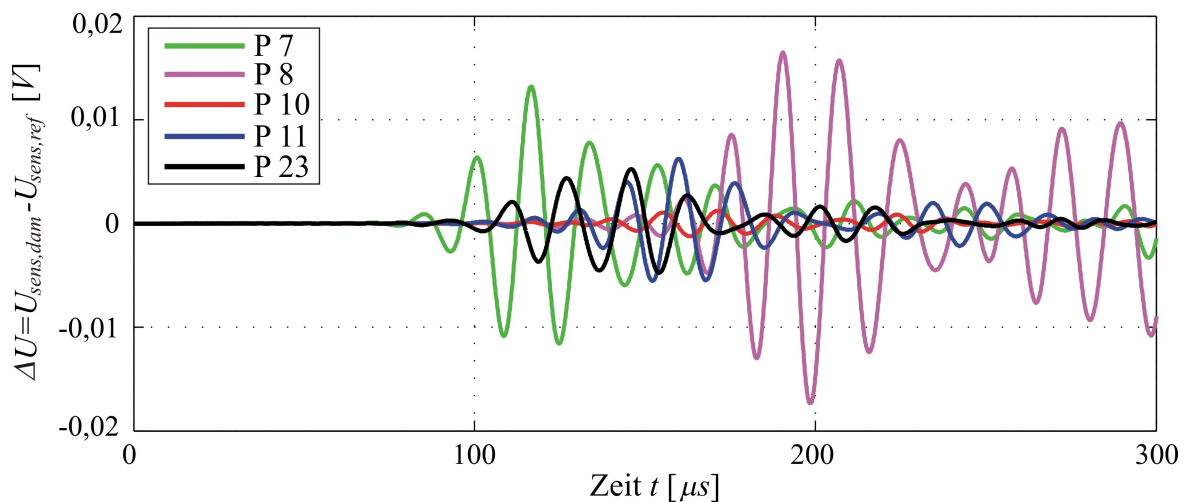


Bild 7.23: Sensorspannungsdifferenzen zwischen geschädigtem (D1) und ungeschädigtem Fall bei Anregung von P 6.

Bei der Auslegung eines SHM-Systems für eine versteifte Struktur ist dieses Verhalten bei der Entwicklung der Auswertelgorithmen zur Signalanalyse daher unbedingt zu berücksichtigen. Zu ähnlichen Schlussfolgerungen kommen auch [DIAMANTI *et al.* 2007], die wegen der Isolationswirkung vorschlagen, die Flächen zwischen den Versteifungsrippen separat voneinander auszuwerten. Zu dieser Schlussfolgerung führen auch die in [SCHULTE und FRITZEN 2008] dargestellten Untersuchungen an einer vergleichbaren Struktur.

Schädigung D2: Delamination innerhalb eines Stringers

Während die Stringer Wellen der A_0 -Mode in der Grundplatte in erheblichem Maße isolieren, wirken sie als starker Wellenleiter, wenn Wellen auf ihnen angeregt werden. Bild 7.24 stellt beispielsweise die x -Verschiebung bei Anregung von P 21 (rot markiert) dar.

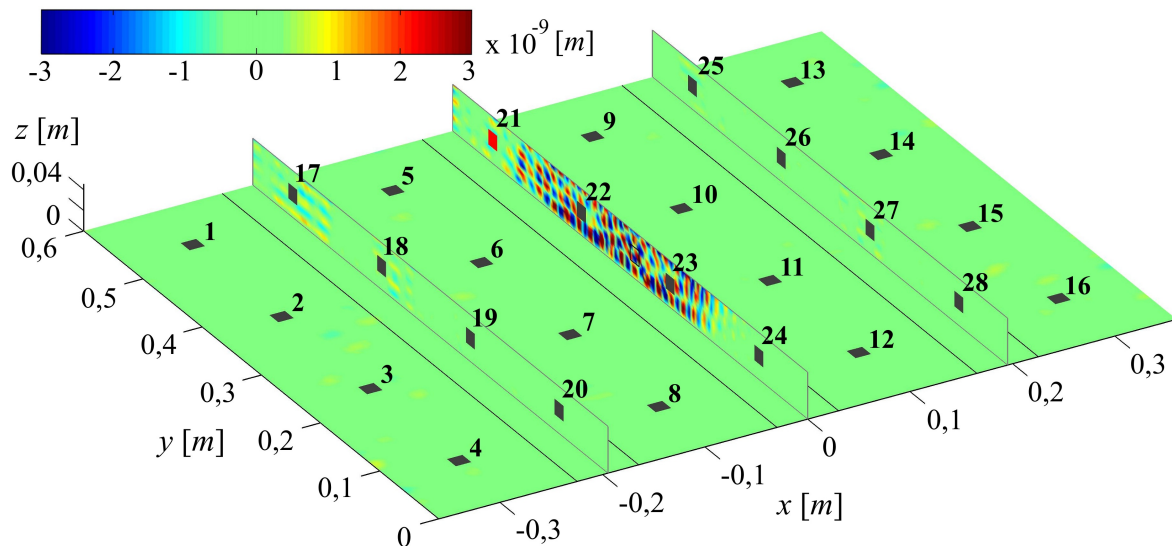


Bild 7.24: Momentaufnahme der x -Verschiebung nach $206\mu\text{s}$, Anregung an P21

Zur Überwachung einer Schädigung im Stringer bietet es sich daher an, diese Eigenschaft auszunutzen. So kann durch Anregung bei P21 und Auswertung der Sensoren P22 bis P24 (Bild 7.25) ohne komplexe Algorithmen nicht nur eine Detektion, sondern auch eine gewisse Lokalisation erreicht werden. Die höchsten Differenzen treten bei Sensor P23 auf. Auch Sensor P24 zeigt mit zeitlicher Verzögerung deutliche Abweichungen, die etwa 50% der Maximalamplitude von P23 aufweisen. Demgegenüber sind bei P22 wesentlich geringere Differenzen zu erkennen, deren Maximalamplitude nur etwa 15% von P23 beträgt. Daraus lässt sich schließen, dass die Schädigung zwischen P22 und P23 liegen muss, und die Veränderungen an P22 durch Reflexionen von der Schädigung verursacht werden.

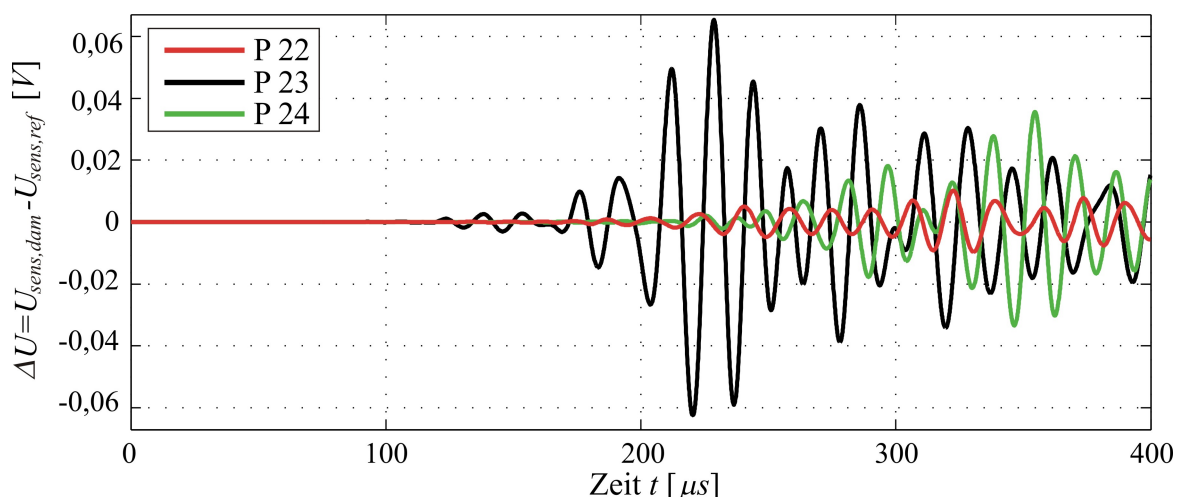


Bild 7.25: Sensoren auf dem Stringer: Spannungsdifferenzen zwischen geschädigtem und ungeschädigtem Fall (D2) bei Anregung von P21

Werden bei gleicher Anregung an P21 Sensoren auf der Grundplatte ausgewertet, so ist die Maximalamplitude der Differenzen um etwa eine Größenordnung geringer (Bild 7.26). Bei

einem identischen Rauschen auf allen Signalen ist daher das Signal-zu-Rauschen Verhältnis erheblich schlechter.

Durch die bis auf das Vorzeichen fast vollständig identischen Differenzsignale der Sensoren P7 und P8 mit einer identischen Ersteinsatzzeit lässt sich jedoch zusätzlich die Information gewinnen, dass der Schaden den gleichen Abstand zu diesen beiden Sensoren aufweisen muss.

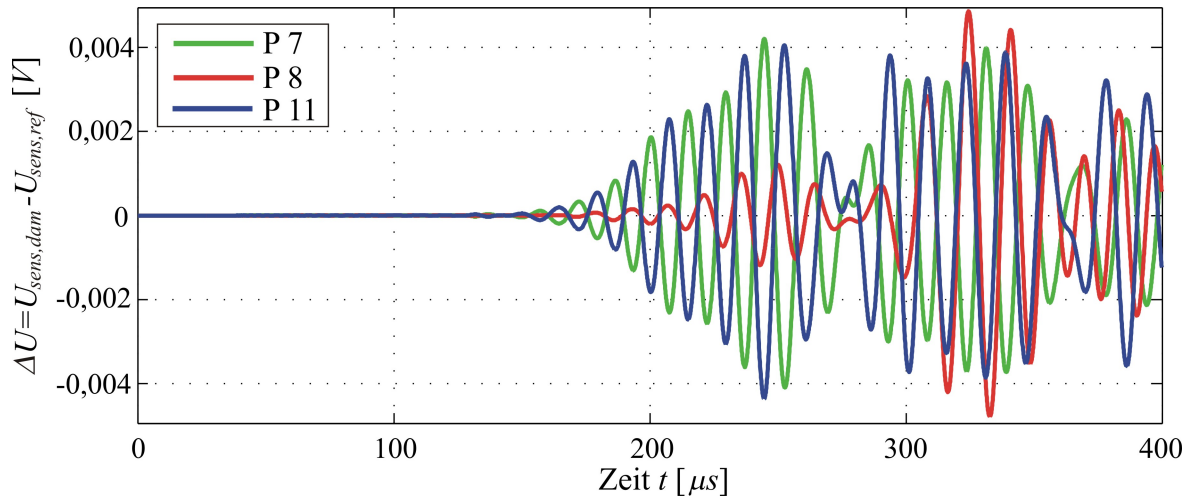


Bild 7.26: Ausgewählte Sensoren der Grundplatte: Spannungsdifferenzen zwischen geschädigtem und ungeschädigtem Fall (D2) bei Anregung von P 21 (auf dem Stringer)

Ist kein Aktuator auf dem Stringer verfügbar, so verschlechtert sich die Detektierbarkeit einer Schädigung des Stringers signifikant, Bild 7.27.

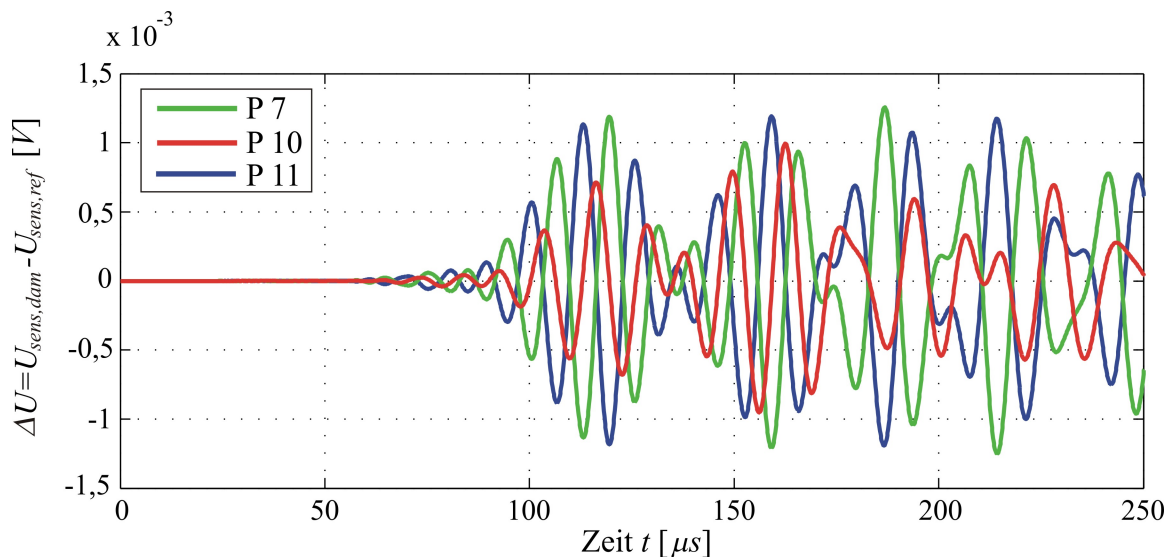


Bild 7.27: Ausgewählte Sensoren der Grundplatte: Spannungsdifferenzen zwischen geschädigtem (D2) und ungeschädigtem Fall bei Anregung von P6 (auf der Grundplatte)

Es ist erkennbar, dass die Maximalamplituden der Sensorspannungsdifferenzen bei Anregung von P6, der in der Nähe des Schadensortes auf der Grundplatte liegt, nochmals deutlich abfallen und nur noch etwa ein Drittel der Amplituden aus Bild 7.26 betragen. Im Vergleich zur Anregung P21 und Auswertung der Sensoren auf dem Stringer ist die Amplitude der Differenzsignale um etwa 95% geringer. Dadurch wird sehr deutlich, dass durch ausschließlich auf der Grundplatte applizierte Piezoelemente ein Schaden innerhalb eines Stringers erheblich schlechter detektiert werden kann. Ob eine Detektion noch möglich ist, wird in der Realität durch das Niveau des Grundrauschens der verwendeten Messtechnik festgelegt.

Schädigung D3: Partielle Ablösung eines Stringers

Abschließend wird die Schädigung D3, eine partielle Ablösung des mittleren Stringers, untersucht (vergleiche hierzu auch [SCHULTE *et al.* 2010]). Wie in Bild 7.28 dargestellt, ist an der abgelösten Stelle der im ungeschädigten Zustand zu beobachtende Isolationseffekt des Stringers lokal unterbrochen. Dadurch kann ein wesentlich größerer Anteil der A_0 -Mode an dieser Stelle unter dem gelösten Stringer durchlaufen.

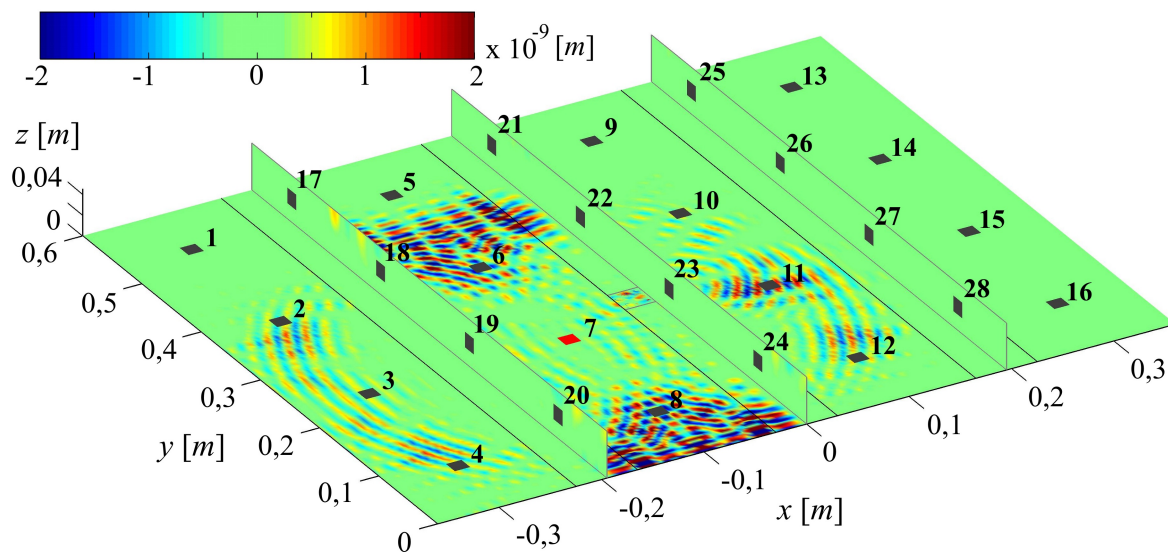


Bild 7.28: Momentaufnahme der z -Verschiebung nach $147\mu\text{s}$, Anregung an P7

Der an der abgelösten Stelle unterhalb des Stringers durchlaufende Teil der A_0 -Mode läuft hauptsächlich in Richtung des Sensors P11, wo die größten Differenzen der Sensorspannung im Vergleich zum ungeschädigten Fall auftreten (Bild 7.29). Sensor P6 weist nach P11 die zweitgrößte Veränderung auf, P10 und P23 fallen dagegen deutlich ab. Ein deutlicher Zuwachs an Information lässt sich bei dieser Schädigung erzielen, wenn nicht nur die Sensorspannungsdifferenzen betrachtet werden, sondern die Signale im ungeschädigten und geschädigten Systemzustand direkt verglichen werden, Bild 7.30.

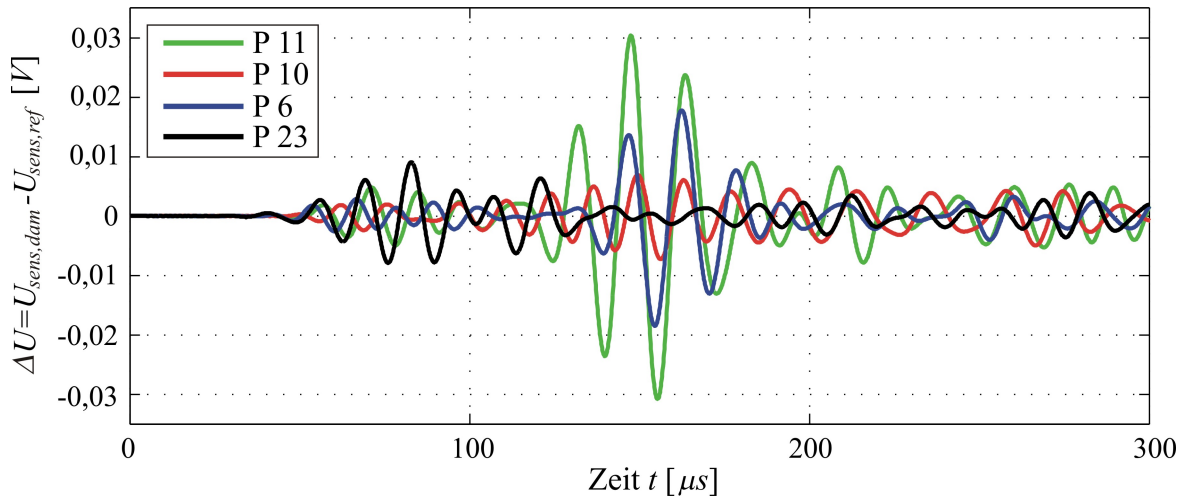


Bild 7.29: Spannungsdifferenzen zwischen geschädigtem (D3) und ungeschädigtem Fall bei Anregung von P7

Im Gegensatz zu den Differenzsignalen zeigt Bild 7.30 auch, dass ein größerer Anteil der Energie an P11 ankommt und im Gegensatz dazu an P6 geringere Amplituden auftreten.

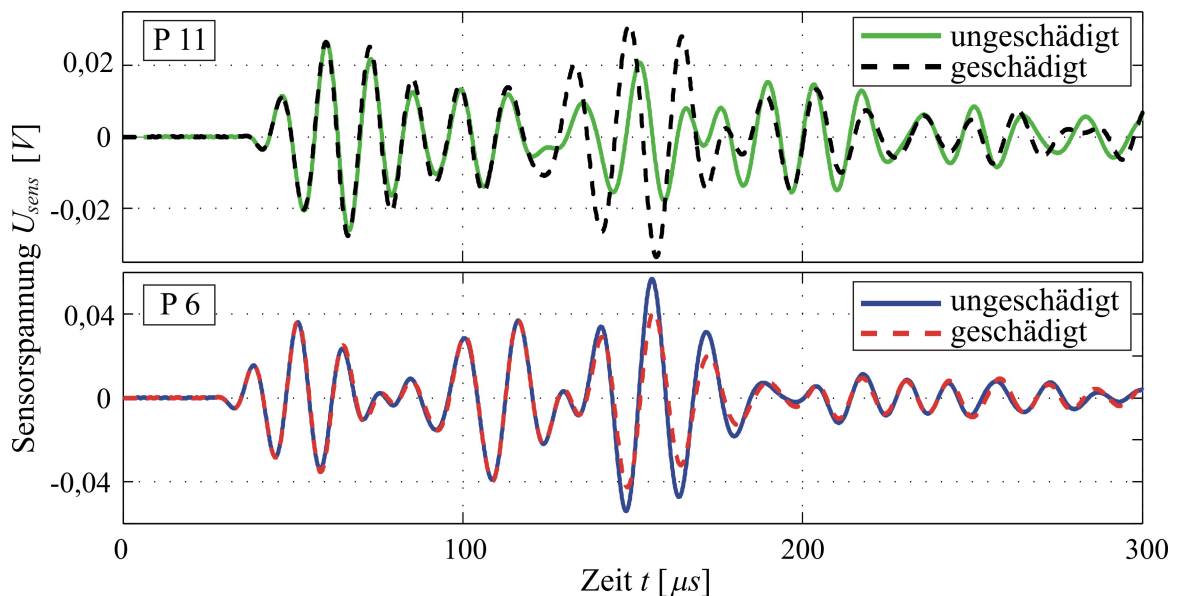


Bild 7.30: Vergleich der Sensorspannungen im ungeschädigten und geschädigten Systemzustand (D3) für die Sensoren P11 (oben) und P6 (unten)

Zur gezielten Analyse von Stringer-Ablösungen ist daher zu empfehlen, ein Verfahren zu verwenden, das nicht allein auf Differenzsignalen basiert, sondern in das auch die Energie der Signale eingeht.

Alternativ zur Anregung eines Piezoelements auf der Grundplatte wird auch für diesen Fall die Anregung eines Elements auf dem Stringer betrachtet. Bei Anregung von P21 ergeben sich die in Bild 7.31 dargestellten Spannungsdifferenzen an den verbleibenden drei Sensoren auf diesem Stringer. Die Maximalamplituden weisen die gleiche Größenordnung auf, wie sie

sich auch für die Kombination aus Aktuator P6 und Sensor P11 ergeben haben (Bild 7.30). Die Maximalamplitude an Sensor P23 ist jedoch 50% geringer als bei identischer Anregung im Schädigungsfall D2, vergleiche Bild 7.25.

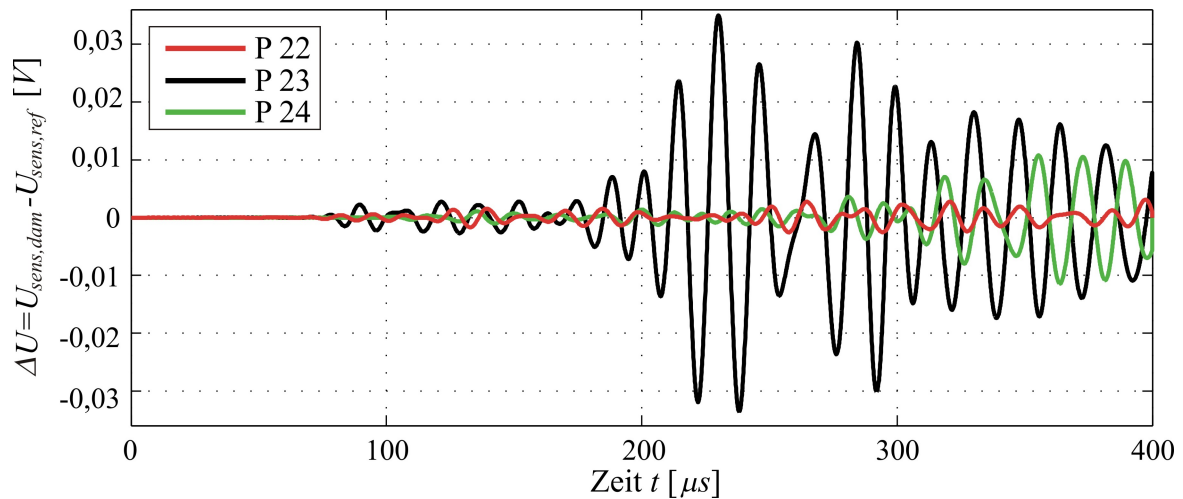


Bild 7.31: Sensoren auf dem Stringer: Differenzen der Spannungen im geschädigten (D3) und ungeschädigten Fall bei Anregung von P21 (auf dem Stringer)

Bei Anregung von P21 und Auswertung von Sensoren auf der Grundplatte ergeben sich signifikant geringere Maximalamplituden, Bild 7.32. Aus diesen Studien lässt sich schlussfolgern, dass eine partielle Stringerablösung sowohl durch Aktuator und Sensorik auf dem entsprechenden Stringer, wie auch durch Verwendung von Piezoelementen ausschließlich auf der Grundplatte detektiert werden kann. Eine Kombination von Anregung auf dem Stringer und Auswertung von Sensoren auf der Grundplatte liefert demgegenüber deutlich geringere Signaldifferenzen und ist daher nicht zu empfehlen.

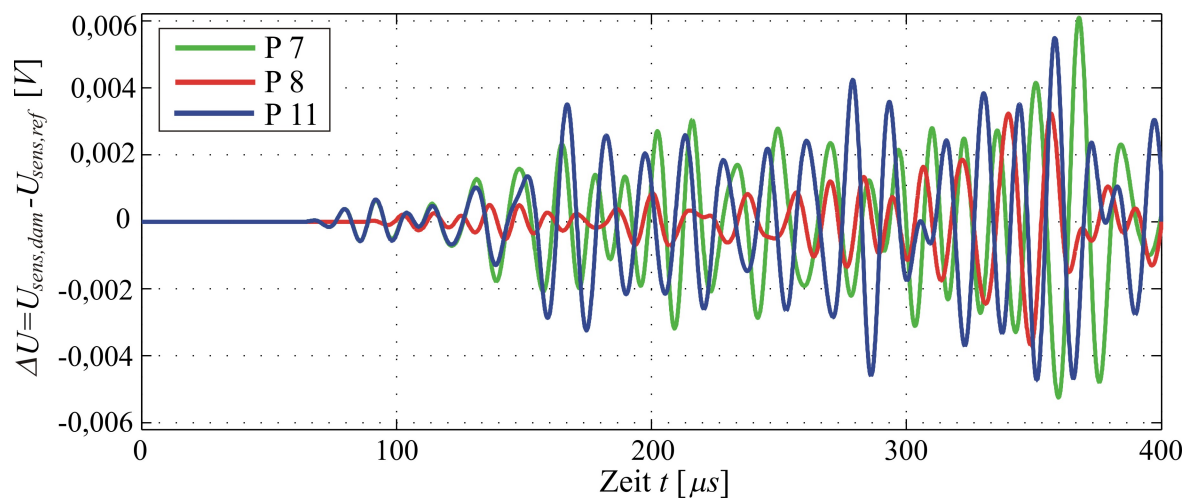


Bild 7.32: Ausgewählte Sensoren der Grundplatte: Spannungsdifferenzen im geschädigten und ungeschädigten Fall (D3) bei Anregung von P21

Anhand dieses Simulationsbeispiels einer realitätsnah modellierten Struktur in Verbindung mit typischen Schadensfällen wird aufgezeigt, dass sich mit Hilfe dieses Simulationswerkzeugs schon vor dem realen Aufbau eines SHM-Systems wesentliche Erkenntnisse über optimierte Strategien zur Detektion und Lokalisation unterschiedlicher Schädigungen erzielen lassen. Dazu können grundsätzlich auch bestehende Erkenntnisse über häufige Schadensfälle oder kritische Stellen einer Struktur, die besonders überwachungsbedürftig sind, in die entsprechenden Simulationen einfließen.

Die entsprechenden Sensorspannungssignale können weiterhin als Ausgangsbasis verwendet werden, um unterschiedliche weiterführende Detektions-, Lokalisations-, oder Klassifikationsalgorithmen zu testen oder für konkrete Anwendungsfälle gezielt Signalanalyseverfahren zu entwerfen. Eine derartige Anwendung für anisotrope Strukturen, wo mit Hilfe dieses Simulationswerkzeugs die entsprechende Datenbasis generiert wird, ist in [MOLL *et al.* 2010] dargestellt.

7.2.2 Modellierung eines Phased Array-Systems

Zur Überwachung einfacher Plattenstrukturen wird von verschiedenen Forschungsgruppen derzeit an der Weiterentwicklung der so genannten Phased Array-Technik gearbeitet, die in Abschnitt 1.1 kurz vorgestellt worden ist. Durch eine phasenverschobene Anregung von mehreren, nahe beieinander positionierten Aktuatoren kann eine Vorzugsrichtung gewählt werden, in die Wellen mit höherer Amplitude emittiert werden. In Analogie zur Radartechnik wird diese Vorzugsrichtung mit Keule bezeichnet. Nach der Einführung des Konzepts durch [GIURGIUTIU und BAO 2002] im Kontext von SHM auf Basis von Lamb-Wellen haben sich verschiedene Arbeitsgruppen mit dieser Technik befasst. Die Arbeitsgruppe um Ostachowicz entwickelte beispielsweise verschiedene Formen des Arrays, die zu einer verbesserten Schadensdiagnose führen sollen [MALINOWSKI *et al.* 2007]. [YAN und ROSE 2007] setzen sich mit der Anwendung von Phased Arrays für anisotrope Werkstoffe auseinander und stellen zusätzliche Schwierigkeiten bei der gezielten Anregung der Keule fest.

Ein großer Vorteil der Phased Array-Technik ist die konzentrierte Anordnung von Piezoelementen an einem Ort, was die Applikation auf dem Bauteil und die Kabelführung wesentlich vereinfacht.

Sehr detaillierte Untersuchungen zu verschiedenen Einflussgrößen auf die Wellenpakete, die von den Aktuatoren ausgesendet werden, stellt [YU 2006] vor. Für eine lineare Anordnung von Piezo-Aktuatoren gemäß der beispielhaften Skizze in Bild 7.33 identifiziert er als wesent-

liche Parameter den Abstand der einzelnen Aktuatoren d_{pa} und die Gesamtlänge des Arrays D_{pa} . ϕ_s kennzeichnet den von der x -Achse aus gemessenen Winkel der Keule.

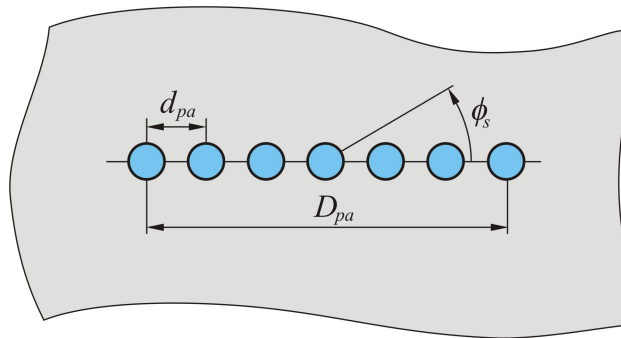


Bild 7.33: Prinzipskizze eines linearen Phased Array-Systems

Für den Abstand der verwendeten Aktuatoren d_{pa} im Verhältnis zur Wellenlänge der angeregten Wellen findet er ein Optimum von

$$\frac{d_{pa}}{\lambda} = 0,5. \quad (7.1)$$

Bei größeren Werten kommt es zur Ausbildung von starken Wellenpaketen nicht nur in die gewünschte, sondern auch in andere Richtungen. Bei Unterschreiten dieses Wertes nimmt die Breite der Keule zu, so dass die Direktionalität abnimmt. Zur Verbesserung der Direktionalität trägt außerdem eine Erhöhung der Anzahl der verwendeten Aktuatoren bzw. eine Vergrößerung der Gesamtlänge D_{pa} bei. In Kapitel 7 von [YU 2006] sind verschiedene Studien zu dieser Thematik dargestellt.

Durch diese Zusammenhänge wird deutlich, dass auch Phased Array-Systeme für die Anwendung an einer gegebenen Struktur gezielt ausgelegt werden müssen. Dazu kann die in dieser Arbeit vorgestellte Simulationsmethodik einen Beitrag leisten, denn ähnlich wie Systeme mit verteilten Sensoren lassen sich auch derartige Phased Array-Systeme auf effiziente Weise simulieren, wie an folgendem Beispiel einer 2mm dicken Aluminiumplatte dargestellt ist. Für diese Simulation werden 9 runde Piezoelemente des Durchmessers 10mm und der Dicke $0,5\text{mm}$ verwendet, die direkt nebeneinander ohne Zwischenraum positioniert sind, woraus sich auch $d_{pa} = 10\text{mm}$ ergibt. Die Richtung der Keule lässt sich allgemein durch eine um ΔT_j verzögerte Anregung des j -ten gegenüber des ersten Aktuators gemäß

$$\Delta T_j = \frac{j \cdot d_{pa} \cdot \cos(\phi_s)}{c_p} \quad (7.2)$$

einstellen, wobei c_p die Phasengeschwindigkeit bezeichnet, vergleiche auch [MALINOWSKI *et al.* 2007]. Aus Gleichung (7.2) wird deutlich, dass die gezielte Anregung von Wellen in eine Richtung nur für eine Wellenmode (A_0 - oder S_0 -Mode) gleichzeitig funktioniert, weil die Phasengeschwindigkeit dieser Moden stark unterschiedlich ist. Für das hier gezeigte Beispiel wird die A_0 -Mode ausgewählt. Bild 7.34 zeigt eine Momentaufnahme der z -Verschiebung des Systems nach $230\mu\text{s}$. Die Zeitverzögerung der Anregung ist derart gewählt, dass sich ein Winkel von $\phi_s = 55^\circ$ einstellt. Dadurch läuft ein Wellenpaket genau in Richtung des eingezeichneten Risses.

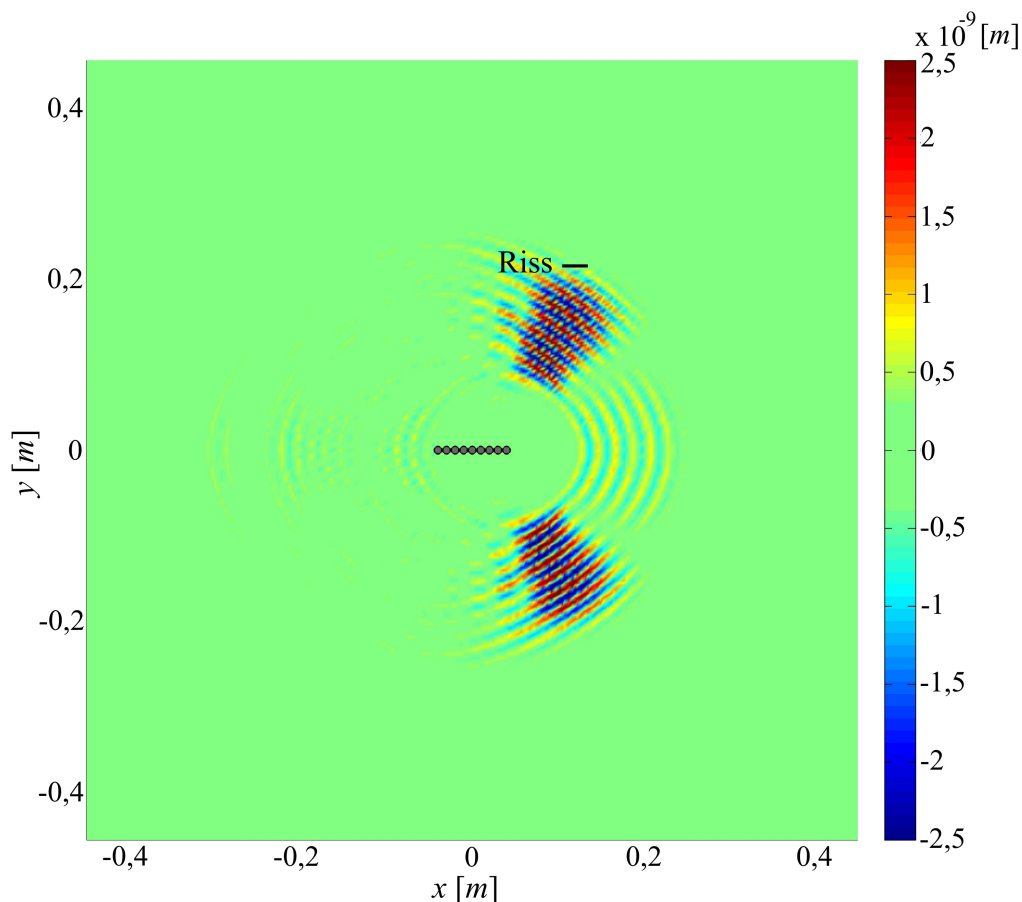


Bild 7.34: Momentaufnahme der z -Verschiebung nach $230\mu\text{s}$ bei zeitversetzter Anregung der Piezoaktuatoren mit einem Signal der Grundfrequenz 40kHz

Wie man deutlich erkennen kann führt eine lineare Anordnung der Piezoelemente immer zur Ausbildung von zwei Keulen in gegenüberliegende Richtungen. Mit Hilfe des zugehörigen Dispersionsdiagramms (hier nicht dargestellt) und Gleichung (2.2) ergibt sich für die verwendete Anregungsfrequenz von 40kHz eine Wellenlänge der A_0 -Mode von ca. 21mm . Bild 7.34 verdeutlicht, dass keine weiteren stark ausgeprägten Wellenpakete in andere Richtungen existieren, da durch diese Wellenlänge die Bedingung (7.1) eingehalten wird. Die starke Interaktion mit dem Riss wird in Bild 7.35 deutlich, wo die Momentaufnahme der z -Verschiebung

nach $380\mu\text{s}$ dargestellt ist. Am Riss entstehen zusätzliche Wellenpakete, die teilweise in Richtung der Piezoelemente zurücklaufen.

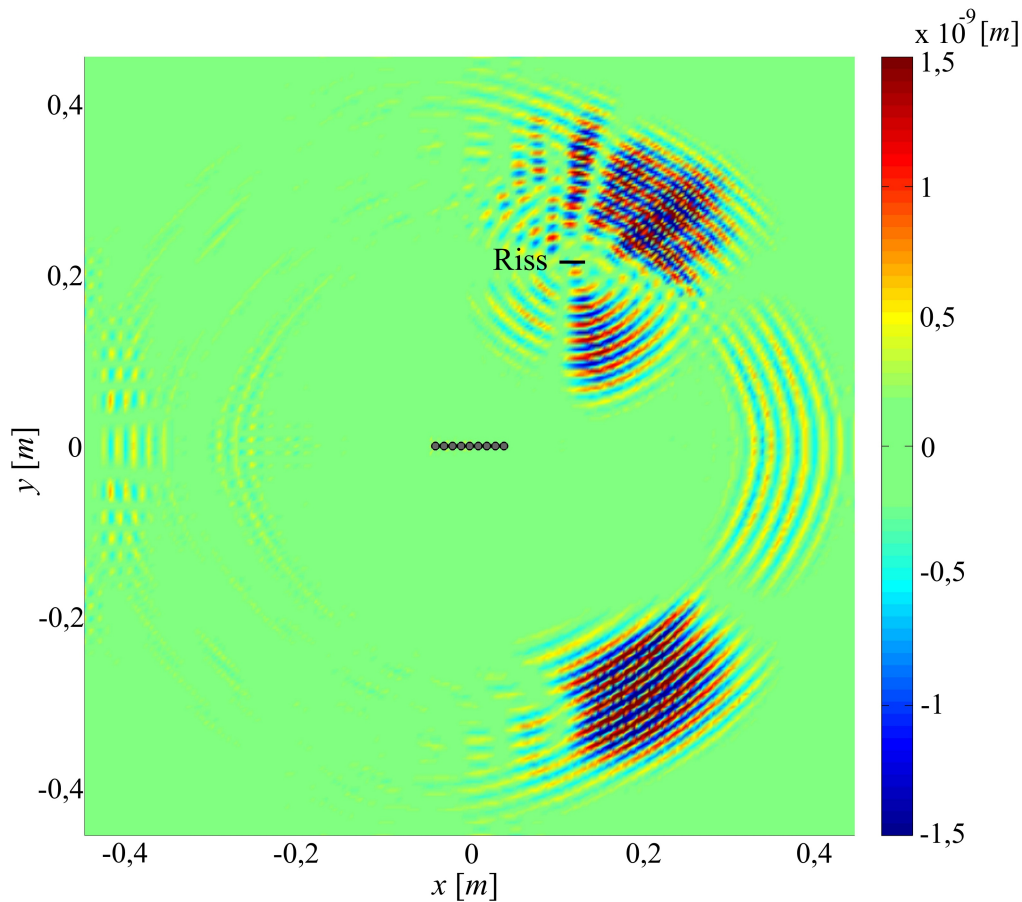


Bild 7.35: Momentaufnahme der z -Verschiebung nach $380\mu\text{s}$ bei zeitversetzter Anregung der Piezoaktuatoren mit einem Signal der Grundfrequenz 40kHz

Indem diese Piezoelemente nicht nur als Aktuatoren, sondern auch als Sensoren verwendet werden, können diese zusätzlichen Wellen erfasst werden. Mit Hilfe der Wellenlaufzeit ist somit nicht nur eine Detektion sondern auch eine Lokalisation der Schädigung möglich: Während durch die Richtung der Keule der Winkel festgelegt wird, lässt sich die Wellenlaufzeit in den radialen Abstand umrechnen. Im Gegensatz zu Verfahren auf Basis verteilter Sensoren, wo die Schädigungsdiagnose häufig mittels Differenzsignalen geschieht, können hier direkte Signale verwendet werden, was einen Vorteil dieser Technik darstellt. Dazu wird ausgenutzt, dass mit Hilfe der Wellengeschwindigkeit der früheste Zeitpunkt berechnet werden kann, an dem die an den Bauteilgrenzen reflektierten Wellen wieder an den Sensoren ankommen. Jedes vor dieser Zeit ankommende Wellenpaket muss von einer zusätzlichen Reflexion stammen, die von der durch die Schädigung hervorgerufenen Diskontinuität ausgeht.

Bei detaillierter Analyse der Amplituden der vom Riss ausgehenden Wellenpakete wird jedoch auch ein bedeutender Nachteil dieser Systematik deutlich: Die in Richtung der Piezoe-

lemente zurücklaufenden Wellen weisen eine etwa 80% geringere Amplitude auf als das Wellenpaket, das am Riss nach dem Prinzip „Ausfallswinkel gleich Einfallswinkel“ reflektiert wird und daher nicht zurück zu den Piezoelementen läuft. Bei einer sehr ungünstigen Orientierung des Risses in Bezug zum Phased Array ist es daher möglich, dass keinerlei Reflexionen zurücklaufen und daher ein Schaden nicht gefunden werden kann. Dieser Extremfall ist in Bild 7.36 dargestellt, wo ein Riss genau parallel zur Ausbreitungsrichtung des Wellenpakets orientiert ist. Die Aktuatoren werden hier gleichzeitig angeregt, so dass sich ein Winkel von $\phi_s = 90^\circ$ ergibt.

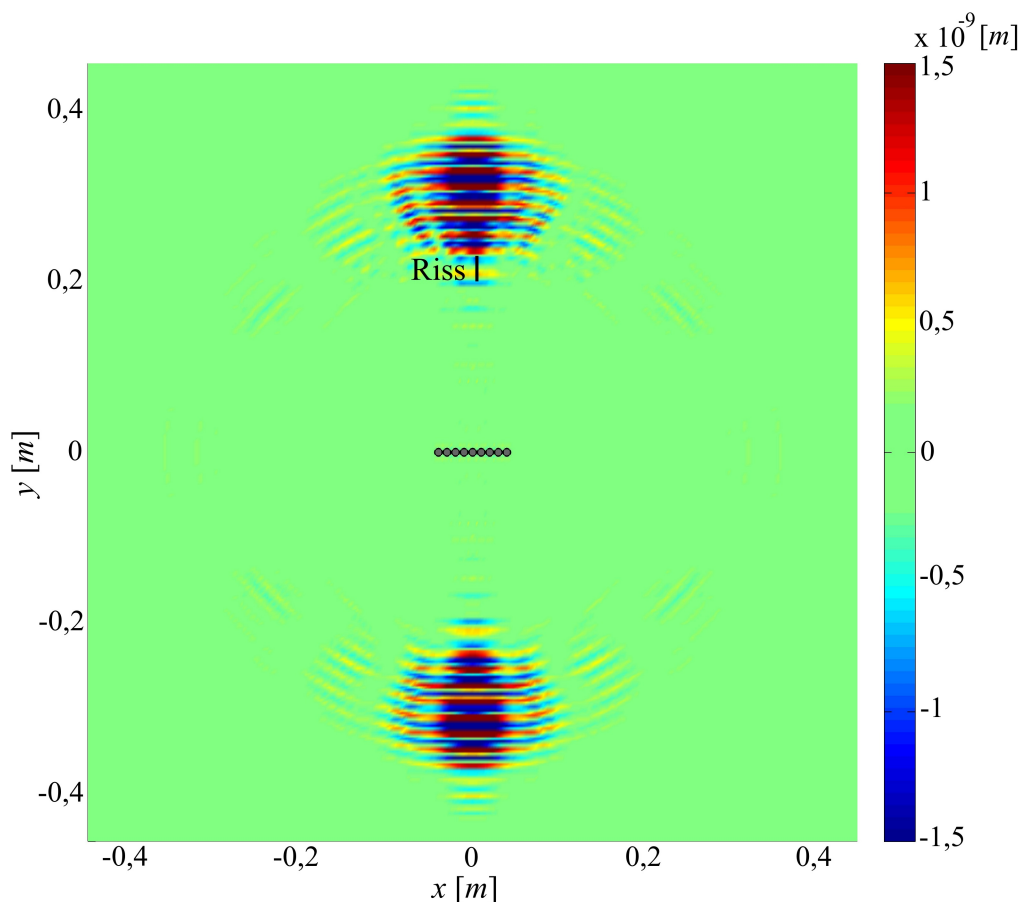


Bild 7.36: Momentaufnahme der z-Verschiebung nach $290\mu\text{s}$ bei gleichzeitiger Anregung der Piezoaktuatoren mit einem Signal der Grundfrequenz 40kHz

Bei der gezeigten Momentaufnahme ist das ausgesendete Wellenpaket gerade vollständig am Riss vorbeigelaufen. Wie schon in Abschnitt 5.7.4 gezeigt wurde, kommt es im Fall eines parallel zum Riss laufenden Wellenpakets nicht zu signifikanten Interaktionen, so dass keine zusätzlichen Wellenpakete entstehen. Dieser Riss ist daher mit diesem Phased Array nicht detektierbar.

Durch die Verwendung eines verteilten Netzes von Aktuatoren und Sensoren kann dieser Fall ausgeschlossen werden, da Wellenpakete von Aktuatoren an unterschiedlichen Orten ausge-

sendet werden. Dadurch laufen Wellenpakete aus verschiedenen Richtungen auf einen Riss zu, so dass die notwendige Interaktion sichergestellt werden kann. Dieser Nachteil von Phased Array-Systemen sollte bei der Abwägung zwischen einem SHM-System auf Basis verteilter Piezoelemente und einem Phased Array-System in den Entscheidungsprozess einfließen. Möglicherweise bieten sich in diesem Zusammenhang auch Mischformen an, bei denen mehrere kleine Arrays über die Struktur verteilt werden, so dass die Vorteile der Phased Array Technik mit denen eines verteilten Netzes kombiniert werden können.

Ebenso wie bei den in Kapitel 5 vorgestellten numerischen Studien und dem im vorherigen Abschnitt behandelten realitätsnahen Anwendungsbeispiel auf Basis eines verteilten Sensornetzes kann das in dieser Arbeit vorgestellte Simulationswerkzeug grundsätzlich auch zur Simulation von SHM-Systemen auf Basis des Phased Array-Prinzips eingesetzt werden. Die Simulation kann auch in diesem Fall einen Beitrag zum Verständnis der bei der Wellenausbreitung ablaufenden Phänomene liefern. Darüber hinaus können auch hier die Simulationsdaten für die Entwicklung weiterführender Algorithmen zur Detektion, Lokalisation und Klassifikation eingesetzt werden.

8 Zusammenfassung und Diskussion

Innerhalb der letzten zwei Jahrzehnte sind eine Vielzahl unterschiedlicher Structural Health Monitoring (SHM)-Systeme für dünnwandige Strukturen auf Basis von Lamb-Wellen entwickelt und im Labor demonstriert worden. Es existieren bisher jedoch nur sehr wenige Beispiele für den gelungenen Transfer dieser Entwicklungen in eine seriennahe Anwendung an realen Strukturen. Als einer der wesentlichen Hinderungsgründe ist die Komplexität der Technologie in Verbindung mit der sehr zeit- und kostenintensiven Anpassung und Optimierung eines SHM-Systems für komplexe Strukturen identifiziert worden. Während in anderen Bereichen - beispielsweise in der Strukturauslegung - heutzutage ein großer Anteil der Entwicklung virtuell mit Hilfe von geeigneten Simulationsprogrammen durchgeführt wird, ist dieser Trend bei der Entwicklung wellenbasierter SHM-Systeme nicht sehr ausgeprägt. Nach Ansicht des Verfassers liegt dies vor allem an der Tatsache, dass sich kommerziell verfügbare FE-Programme nicht ideal zur Simulation hochfrequenter Wellenausbreitungsvorgänge eignen: Auf Grund der kurzen Wellenlängen ist einerseits ein sehr dichtes Knotengitter nötig (mindestens etwa 15 Knoten pro Wellenlänge, vergl. [SERIANI und PRIOLO 1994]), andererseits führen konventionelle finite Elemente in der Regel zu voll besetzten Elementmassenmatrizen, so dass ein rechenzeitaufwändiges Lösungsverfahren verwendet werden muss. Dadurch lässt sich die Ausbreitung hochfrequenter Wellen auch in Strukturbereichen moderater Größe nur mit Hilfe von Großrechneranlagen bzw. Clustern simulieren.

Gegenstand der vorliegenden Dissertation war es daher, ein Simulationswerkzeug zu entwickeln, mit dem Lamb-Wellen-basierte SHM-Systeme effizienter simuliert werden können. Ein derartiges Werkzeug eröffnet die Möglichkeit, eine Vielzahl von Studien im Rahmen der Entwicklung von SHM-Systemen virtuell durchzuführen, ohne das entsprechende System real aufbauen zu müssen. Dadurch wird die Grundlage geschaffen, wellenbasierte SHM-Systeme effizienter und kostengünstiger auf virtueller Basis zu entwickeln und somit den Technologietransfer vom Labor zu realen Strukturen zu beschleunigen.

In Kapitel 3 wurde dazu die Formulierung eines Spektralelements für flache Schalen auf Basis der Reissner / Mindlin Kinematik detailliert vorgestellt. Das Element weist drei unabhängige Verschiebungsfreiheitsgrade und zwei unabhängige Rotationsfreiheitsgrade um die lokale x - und y -Achse auf. Die Elementknoten werden unter Verwendung der Nullstellen der Lobatto-Polynome definiert. Aus der gleichzeitigen Verwendung der Elementknoten als Integrationspunkte für die numerische Integration der Elementmatrizen resultiert eine optimal konzentrierte Massenmatrix. Im Fall von symmetrischen Laminaten liegt zudem keine Kopp-

lung der Trägheit von Membran- und Plattenanteilen vor, so dass sich vollständig diagonale Massenmatrizen ergeben. Für eine realitätsnahe Simulation insbesondere von Faserverbundwerkstoffen ist auch die Berücksichtigung von Dämpfung unerlässlich. In Abschnitt 3.7 wurde daher eine Methode entwickelt, die es erlaubt, eine richtungsabhängige Dämpfung unter Erhaltung der numerischen Effizienz in die Simulation zu integrieren. Um auch den Einfluss statischer Vorlasten auf die Wellenausbreitung analysieren zu können, wurde in Abschnitt 3.8 dargestellt, wie dieser Effekt in Form einer geometrischen Steifigkeitsmatrix bei der Elementformulierung berücksichtigt wird.

Neben der Elementformulierung ist für die vollständige Simulation eines wellenbasierten SHM-Systems eine Reihe von weiteren Aspekten zu betrachten, mit denen sich Kapitel 4 befasst. Zunächst wurde in Abschnitt 4.1 eine Methode vorgestellt, um die notwendigen Knotengitter für die Spektralelemente auf effiziente Weise zu erstellen. Die Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) Spektralknoten werden dazu in ein Knotengitter aus so genannten Master-elementen eingebettet, das mit Hilfe eines kommerziell verfügbaren Preprozessors unter Verwendung von Schalenelementen mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen erzeugt wird. Dies erleichtert dem zukünftigen Anwender die Generierung komplexer Simulationsmodelle. Die beiden folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit dem Zusammenbau des Gesamtsystems und der Berücksichtigung von Randbedingungen.

In Abschnitt 4.4 wurde im Detail dargestellt, wie die Beiträge der piezoelektrischen Aktuatoren und Sensoren in das Gesamtsystem integriert werden. Dabei wird sowohl auf die lokalen Beiträge zu den Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrizen, als auch auf die elektromechanische Kopplung eingegangen. Da die vorliegenden Systeme schon eine große Anzahl an Freiheitsgraden aufweisen, werden keine zusätzlichen elektrischen Freiheitsgrade implementiert: Mit Hilfe von Aktuatorgleichungen wird die angelegte elektrische Spannung in äquivalente Linienlasten an den Elementkanten umgerechnet, die als externe Kräfte auf das System wirken. Für die Sensor-Anwendung gilt die Annahme, dass kein externes elektrisches Feld angelegt wird. Somit lassen sich mechanische Dehnungen in elektrische Ladungen und die daraus resultierenden elektrischen Spannungen umrechnen. Dieses Vorgehen erlaubt die Berücksichtigung von Aktuatorik und Sensorik ohne Einbußen bei der Effizienz des Verfahrens. Das resultierende Gleichungssystem des Gesamtsystems wird unter Verwendung der zentralen Differenzenmethode gelöst, die im Falle von diagonalen Massen- und Dämpfungsmatrizen äußerst effizient ist, weil keine Matrix-Zerlegung durchzuführen ist. Für die große Mehrheit der in der Praxis eingesetzten Lamine ist diese Annahme zutreffend, da sie symmetrisch aufgebaut sind.

Einer der wichtigsten Aspekte von wellenbasierten SHM-Systemen ist die Interaktion der Wellen mit Schädigungen und die sich daraus ergebenden Möglichkeiten zur Schadensdiagnose. Abschnitt 4.6 veranschaulicht daher die Modellierung von typischen Schädigungen: Delaminationen und Rissen. Eine Delamination wird dabei durch eine Aufteilung in obere und untere Elementlage modelliert, wobei konforme Knotengitter verwendet werden. Darüber hinaus wird die von [CARPENTER *et al.* 1991] vorgestellte „Forward increment Lagrange multiplier method“ implementiert, mit der Kontaktbedingungen zwischen den delaminierten Schichten formuliert werden können, ohne die numerische Effizienz der Lösung erheblich zu reduzieren.

Mit Hilfe dieses Simulationswerkzeugs wurden in Kapitel 5 verschiedene, grundlegende, numerische Studien durchgeführt. Untersuchungen zur notwendigen räumlichen Diskretisierung (Abschnitt 5.2) zeigen, dass die Spektralelemente eine bessere Approximationsgenauigkeit gegenüber konventionellen finiten Elementen aufweisen. Ab $N_{GLL} = 6$ Knoten pro Elementkante ist ein Wert von etwa 7 Knoten pro minimale Wellenlänge ausreichend, bei größeren Werten für N_{GLL} sind sogar Werte von etwa 5,5 Knoten pro Wellenlänge ausreichend. Gegenüber den von [SERIANI und PRIOLO 1994] propagierten Werten von etwa 15 Knoten pro Wellenlänge bei Elementen niedriger Ansatzordnung lässt sich somit die Anzahl der benötigten Freiheitsgrade für ein System erheblich reduzieren, ohne Genauigkeit zu verlieren. Die aus dem zentralen Differenzenverfahren resultierende bedingte numerische Stabilität im Hinblick auf die zeitliche Diskretisierung wurde in Abschnitt 5.3 analysiert. Eine falsche Lösung, die aus einer zu groß gewählten Zeitschrittweite resultiert, ist sehr leicht von einer korrekten Lösung zu unterscheiden, weil die generalisierten Knotenverschiebungen schnell über alle Grenzen wachsen. Daher besteht nicht die Gefahr, eine instabile Lösung als vermeintlich richtige Lösung anzusehen.

Wesentliche grundlegende Studien zum Ausbreitungsverhalten von Wellen in dünnwandigen Strukturen wurden in den darauf folgenden Abschnitten vorgestellt. Es wurde demonstriert, dass mit der gewählten Dämpfungsformulierung eine richtungsabhängige Dämpfung erzielt werden kann, wie sie typisch für stark anisotrope Lamine ist, wo in Matrixrichtung in der Regel eine deutlich höhere Dämpfung als in Faserrichtung vorliegt. In Abschnitt 5.5 erfolgte eine detaillierte Analyse unterschiedlicher Modelle für die Beiträge der Piezoelemente zu den Systemmatrizen. Da durch einseitig auf eine flache Schale applizierte Piezoelemente lokal die Symmetrie gestört wird, resultiert an dieser Stelle eine Kopplung zwischen Membran- und Plattenfreiheitsgraden. Diese Kopplung tritt sowohl in der Steifigkeits-, wie auch in der Massenmatrix und gegebenenfalls der Dämpfungsmatrix auf. Diese zusätzlichen Terme führen

dazu, dass die Massenmatrix an diesen Positionen nicht mehr vollständig diagonal ist, was zu einem höheren numerischen Aufwand bei der Systemlösung führt. Eine Reihe von Studien zeigt den Einfluss der Vernachlässigung der Koppelterme von Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix für unterschiedliche geometrische Parameter der Piezoelemente. Die Studien erlauben die allgemeine Schlussfolgerung, dass bei Piezoelementen, die eine ähnliche oder sogar größere Dicke im Vergleich zur untersuchten Struktur haben, eine korrekte Modellierung zu empfehlen ist, da sonst erhebliche Abweichungen in Amplitude und Phasenlage der resultierenden Sensorspannungen auftreten. Bei PZTs, die dünner als etwa ein Viertel der Strukturdicke sind, liefert auch die Vernachlässigung der Koppelterme in Massen- und Dämpfungsmatrix nur geringe Abweichungen zur korrekten Lösung, so dass für eine möglichst effiziente Rechnung diese Terme entfallen können.

Da versteifte Strukturen im Luftfahrtbereich ein typisches Substrukturelement darstellen, wurden wesentliche grundlegende Phänomene der Wellenausbreitung in derartigen Strukturen in Abschnitt 5.6 betrachtet. Neben einer erheblichen „Isolationswirkung“ der Versteifungsrippen zeigen sich auch starke Modenkonversionseffekte, die bei einer Auslegung von SHM-Systemen für derartige Strukturen berücksichtigt werden sollten.

In Abschnitt 5.7 wurde die Interaktion unterschiedlicher Schädigungsmodelle mit sich ausbreitenden Wellen analysiert. Während eine Schädigung in der Literatur teils sehr stark vereinfacht als eine lokale Veränderung des Elastizitäts- oder Schubmoduls nachgebildet wird, zeigen die durchgeführten Studien, dass durch diese starke Vereinfachung verschiedene Aspekte wie Modenkonversion oder richtungsabhängige Interaktionen nicht nachgebildet werden können. Durch die in Abschnitt 4.6 vorgestellten Schädigungsmodelle lassen sich diese Effekte jedoch in das Modell integrieren. Ein detaillierter Vergleich des Einflusses von Kontaktbedingungen innerhalb einer Delamination, mit denen eine Durchdringung der getrennten Elementlagen unterbunden wird, erlaubt außerdem die Aussage, dass die Kontaktbedingungen auf das lokale Verschiebungsfeld im Bereich der Delamination einen erheblichen Einfluss haben, die Rückwirkungen auf die ungeschädigten Strukturbereiche jedoch verhältnismäßig gering sind.

Um das hier entwickelte Simulationswerkzeug nicht nur für grundlegende Studien sondern auch für die Entwicklung von SHM-Systemen für konkrete Strukturen einsetzen zu können, wurde in Kapitel 6 eine Strategie entwickelt, wie die Materialparameter eines Modells an reale Messdaten angepasst werden können. Dazu werden aus den Bewegungsgleichungen der verwendeten Theorie nach Reissner / Mindlin die Dispersionskurven analytisch hergeleitet.

Somit ist es möglich, die Geschwindigkeiten der verschiedenen Wellenmoden in Abhängigkeit der Materialparameter zu berechnen. Ausgehend von nominellen Materialparametern, die aus technischen Datenblättern entnommen werden, lässt sich so für die Anpassung eines Modells an reale Messdaten sehr schnell ein großer Parameterraum analysieren, ohne vollständige Spektralelementmodelle aufbauen und lösen zu müssen. Durch die Verwendung der identischen Bewegungsgleichungen, die auch für die Elementformulierung eingesetzt wurden, ergeben sich keine systematischen Fehler. Die vorgestellte Methode eignet sich insbesondere zur Anpassung von Parametern von anisotropen Laminaten, für die die nominellen Parameter häufig großen Toleranzen unterliegen.

Aus der Analyse der resultierenden Dispersionskurven ergeben sich zudem wesentliche Erkenntnisse über die Grenzen der Modellierung auf Basis der verwendeten Theorie: Im Gegensatz zur dispersiven S_0 -Mode weist die Longitudinalmode keine Dispersion auf. Bis zu einem Wert von etwa $f \cdot h = 0,7 \text{ MHz mm}$ ist dennoch eine gute Näherung der Wellengeschwindigkeit der S_0 -Mode durch die Longitudinalmode gegeben, da die S_0 -Mode unterhalb dieses Bereichs nur eine geringe Dispersion aufweist. Die Dispersionskurve der A_0 -Mode wird durch die Biegemode auch über diesen Wert hinaus noch gut approximiert. Die Simulation von wellenbasierten SHM-Systemen die oberhalb dieses Bereichs arbeiten führt - durch die verwendete Schalentheorie - insbesondere bei der S_0 -Mode jedoch zu zunehmenden Abweichungen. In diesem Fall muss daher auf eine Modellierung mit Hilfe von Volumenelementen zurückgegriffen werden, die zu wesentlich größeren Rechenmodellen führt.

Kapitel 7 stellt abschließend verschiedene Anwendungsbeispiele der entwickelten Modellierungsstrategie vor. Zur Verifikation des vorgestellten Modells wurden dazu in Abschnitt 7.1 Vergleiche mit drei experimentellen Untersuchungen durchgeführt. Am Beispiel einer unidirektionalen Glasfaserplatte wurde demonstriert, dass die Simulation in der Lage ist, sowohl richtungsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeiten, als auch richtungsabhängige Dämpfung realitätsnah nachzubilden. Die Anpassung der Materialparameter wurde dabei mit dem in Kapitel 6 vorgestellten Verfahren durchgeführt. Es wurde deutlich, dass die Anisotropie sich wesentlich stärker auf die Wellengeschwindigkeiten der S_0 -Mode gegenüber denen der A_0 -Mode auswirkt.

Da es sich um eine einlagige, verwobene Platte handelt, können an diesem Beispiel keine Delaminationen entstehen. Daher wurde in einer mehrlagigen CFK-Platte der Einfluss einer Delamination auf die gemessenen Sensorspannungen untersucht. Nach der Anpassung des Simulationsmodells an die Messdaten der ungeschädigten Struktur wurde ein Impact-Schaden

in die Platte eingebracht. Diese Schädigung wurde ebenfalls gemäß der in Abschnitt 4.6 vorgestellten Strategie durch zwei voneinander getrennte Elementlagen im Modell berücksichtigt. Mit dem Simulationsmodell lassen sich die grundsätzlichen Effekte einer Delamination auf die Wellenausbreitung adäquat simulieren: Sowohl der unterschiedliche Einfluss auf S_0 - und A_0 -Mode, als auch die starke Abhängigkeit von der Wellenlänge des verwendeten Signals kann realitätsnah nachgebildet werden. Die A_0 -Mode weist generell eine deutlich höhere Sensitivität auf die Delamination auf, so dass für die Diagnose von Delaminationen die Verwendung dieser Mode gegenüber der S_0 -Mode zu empfehlen ist. Vergleichsrechnungen an Modellen mit Delaminationen zwischen unterschiedlichen Schichten zeigen zudem den Einfluss des Delaminationsortes über dem Plattenquerschnitt.

Der Einfluss statischer Vorlasten auf die Wellenausbreitung wurde an einer kleinen Aluminiumplatte demonstriert, die in eine Zugprüfmaschine eingespannt ist. Während sich bei höheren Frequenzen nur sehr geringe Unterschiede zwischen vorgespanntem und unbelastetem Zustand ergeben, treten bei Frequenzen unterhalb von etwa 20kHz deutliche Veränderungen der Wellengeschwindigkeit der A_0 -Mode auf. Dieses Verhalten wird gut durch die in das Modell implementierte geometrische Steifigkeitsmatrix approximiert. Aus dieser Untersuchung lässt sich der Schluss ziehen, dass zur Überwachung von Bereichen, in denen signifikant unterschiedliche statische Lasten auftreten, Wellen mit höheren Frequenzen verwendet werden sollten. Im Umkehrschluss könnte die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit bei niedriger Anregungsfrequenz unter Umständen gezielt zur Messung statischer Lasten verwendet werden. Dazu wären jedoch noch weitere Untersuchungen durchzuführen, vergleiche dazu beispielsweise [ROHRBACH 1989].

Anhand zweier Simulationsbeispiele wurden abschließend Einsatzmöglichkeiten des entwickelten Simulationswerkzeugs an komplexeren Anwendungsbeispielen demonstriert. Dazu wurde einerseits ein durch T-förmige Stringer versteiftes Panel betrachtet, bei dem unterschiedliche Schädigungsfälle analysiert wurden. Mit Hilfe der Simulation lassen sich eine Reihe von wesentlichen Erkenntnissen über die optimierte Positionierung von Aktuatoren und Sensoren zur Diagnose unterschiedlicher Schäden erzielen: Wegen der starken Isolationswirkung der Stringer ist zur Diagnose der Grundplatte zu empfehlen, für jedes Feld zwischen zwei Stringern die dort vorhandene Sensorik zu nutzen. Delaminationen innerhalb eines Stringers lassen sich demgegenüber allein mit Hilfe von PZTs auf der Grundplatte wesentlich schlechter erkennen. Stattdessen ist die Anregung eines PZTs auf dem Stringer anzuraten. Eine partielle Stringerablösung ist sowohl durch Aktuator und Sensorik auf dem entsprechenden Stringer, wie auch durch Verwendung von Piezoelementen ausschließlich auf der Grund-

platte nachweisbar. Eine Kombination von Anregung auf dem Stringer und Auswertung von Sensoren auf der Grundplatte liefert demgegenüber deutlich geringere Signaldifferenzen und ist daher nicht sinnvoll. Grundsätzlich können auf Simulationsbasis die Diagnosemöglichkeiten einer Vielzahl möglicher Schädigungsszenarien analysiert werden, ohne dass das SHM-System schon real aufgebaut werden muss. Die simulierten Daten, beispielsweise Sensorspannungen, können verwendet werden, um neue Auswertalgorithmen zu entwerfen oder bestehende Verfahren weiterzuentwickeln.

Das zweite Simulationsbeispiel demonstriert die Simulation der so genannten Phased Array-Technik. Durch gezielte zeitversetzte Anregung eines Feldes von mehreren, nahe beieinander positionierten Piezoelementen lässt sich damit eine Vorzugsrichtung einstellen, in der sich Wellen mit hoher Amplitude ausbreiten. Neben der Demonstration der grundsätzlichen Eignung zur Simulation dieses Verfahrens wurde gezielt ein Anwendungsfall betrachtet, bei dem ein Riss nicht diagnostiziert werden kann. Der Riss ist genau parallel zur Ausbreitungsrichtung der Wellen orientiert, weshalb keine signifikante Interaktion stattfindet. Diese Tatsache ist eine prinzipielle Schwachstelle der Phased Array-Technik, da Wellen nur von einem Ort ausgesendet werden. Nach Ansicht des Verfassers sind daher Systeme mit verteilten Aktuatoren und Sensoren grundsätzlich zu bevorzugen, weil dort eine Schädigung mit Wellen aus unterschiedlichen Richtungen interagieren kann.

Im Rahmen der zukünftigen Weiterentwicklung von SHM-Systemen vom Laborstadium hin zur Anwendung an realen Strukturen kann auf der Basis der in dieser Arbeit entwickelten Simulationsstrategie ein Teil dieses zeit- und kostenintensiven Prozesses virtuell durchgeführt werden. Ein Simulationswerkzeug, das genau auf die spezifischen Erfordernisse der Simulation hochfrequenter Wellenausbreitungsvorgänge zugeschnitten ist, bildet dazu eine wesentliche Voraussetzung.

9 Literatur

- Adams, D. E., 2007: Health monitoring of structural materials and components: methods with applications. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK.
- Altenbach, H.; Altenbach, J. und Kissing, W., 2004: Mechanics of Composite Structural Elements. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Angelidis, N.; Khemiri, N. und Irving, P. E., 2005: Experimental and finite element study of the electrical potential technique for damage detection in CFRP laminates. *Smart Materials and Structures*, **14**, S. 147-154.
- Auld, B. A., 1990: Acoustic Fields and Waves in Solids. Krieger, Malabar.
- Bagley, R. L. und Torvik, P. J., 1985: Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, **23**, S. 918-925.
- Balageas, D.; Fritzen, C. P. und Guemes, A., 2006: Structural Health Monitoring. Hermes Science Publishing, London, UK.
- Banks, H. T.; Smith, R. C. und Wang, Y., 1997: Smart material structures: modeling, estimation, and control. John Wiley & Son Ltd, Chichester, UK.
- Bathe, K. J., 2002: Finite-Elemente-Methoden. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Bathe, K. J. und Ho, L. W., 1981: A simple and effective element for analysis of general shell structures. *Computers and Structures*, **13**, S. 673-681.
- Beskos, G. V. und Narayanan, G., 1983: Dynamic response of frameworks by numerical Laplace transform. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **37**, S. 289-307.
- Bohle, K., 2005: Sensitivitätsbasierte Methoden zur modellgestützten Schadendiagnose mit Modaldaten. Shaker, Aachen.
- Boller, C., 2001: Ways and Options for Aircraft Structural Health Monitoring. *Smart Materials and Structures*, **10**, S. 432-440.
- Borg, R.; Nilsson, L. und Simonsson, K., 2001: Simulation of delamination in fiber composites with a discrete cohesive failure model. *Composites Science and Technology*, **61**, S. 667-677.
- Borg, R.; Nilsson, L. und Simonsson, K., 2002: Modeling of delamination using a discretized cohesive zone and damage formulation. *Composites Science and Technology*, **62**, S. 1299-1314.
- Budelmann, H.; Hariri, K.; Jacob, A. F.; Janssen, B.; Schneider, G. und Wichmann, H. J., 2001: Detection and Localization of Fractures in Tendons by Means of Electromagnetic Resonance Measurement. *Proceedings of the 3rd International Workshop on Structural Health Monitoring*, Stanford, CA. S. 1333-1342.

- Calomfirescu, M., 2008: Lamb Waves for Structural Health Monitoring. Dissertation, Fachbereich Produktionstechnik, Universität Bremen, Bremen.
- Carpenter, N. J.; Taylor, R. L. und Katona, M. G., 1991: Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**, S. 103-128.
- Casselman, B., 2005: Mathematical Illustrations: A Manual of Geometry and Postscript. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Castaigns, M. und Hosten, B., 1994: Delta operator technique to improve the Thomson–Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **95**, S. 1931.
- Chakraborty, A. und Gopalakrishnan, S., 2006: A spectral finite element model for wave propagation analysis in laminated composite plate. *Journal of Vibration and Acoustics*, **128**, S. 477.
- Chang, F. K., 1995: Built-in damage diagnostics for composite structures. *Proceedings of the 10th International Conference on Composite Structures (ICCM-10)*, Canada.
- Chang, F. K., 1998: Manufacturing and design of built-in diagnostics for composite structures. *Proceedings of the 52nd Meeting of the Society for Machinery Failure Prevention Technology*, Virginia Beach, VA.
- Chen, F. und Wilcox, P. D., 2007: The effect of load on guided wave propagation. *Ultrasonics*, **47**, S. 111-122.
- Clough, R. W., 1960: The finite element method in plane stress analysis. *Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, PA. S. 345-379.
- Cremer, L. und Heckl, M., 1996: Körperschall. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Dauksher, W. und Emery, A. F., 2000: The solution of elastostatic and elastodynamic problems with Chebyshev spectral finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**, S. 217-233.
- Diamanti, K.; Soutis, C. und Hodgkinson, J. M., 2007: Piezoelectric transducer arrangement for the inspection of large composite structures. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, **38**, S. 1121-1130.
- Doebling, S. W.; Farrar, C. R. und Prime, M. B., 1998: A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, **30**, S. 91-105.
- Doyle, J. F., 1987: Experimentally determining the contact force during the transverse impact of an orthotropic plate. *Journal of Sound and Vibration*, **118**, S. 441-448.
- Doyle, J. F., 1997: Wave propagation in structures. 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg New York.

- Dzhaferov, I., 2009: Impact detection, localization and reconstruction based on the passive sensing methodology for homogenous plate, with GUI development for future educational exposition. Studienarbeit, Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik, Universität Siegen.
- Eckstein, B.; Fritzen, C. P. und Bach, M., 2008: Advancements in Self-Diagnosis of Bonded Piezoelectric Transducers. *Proceedings of the 4th European Workshop on Structural Health Monitoring*, Cracow, Poland. S. 425-432.
- Ellis, E. M., 1987: IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI. *IEEE Standard 176-1987*.
- Finn, S. R. und Springer, G. S., 1993: Delaminations in composite plates under transverse static or impact loads - A model. *Composite Structures*, **23**, S. 177-190.
- Frey, F., 1989: Shell finite elements with six degrees of freedom per node. *Analytical and computational models of shells*, *ASME*, **3**, S. 291-316.
- Friswell, M. I. und Mottershead, J. E., 1995: Finite element model updating in structural dynamics. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Galerkin, B. G., 1915: Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates. *Vestn. Inzh. Tech*, **19**, S. 908.
- Giurgiutiu, V., 2005: Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **16**, S. 291.
- Giurgiutiu, V., 2007: Structural Health Monitoring. Academic Press, Burlington, MA.
- Giurgiutiu, V. und Bao, J., 2002: Embedded Ultrasonic Structural Radar for the Nondestructive Evaluation of Thin-Wall Structures. *Proceedings of the 2002 ASME International Mechanical Engineering Congress*, New Orleans, LA. S. 17-22.
- Gopalakrishnan, S.; Chakraborty, A. und Mahapatra, D. R., 2007: Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Gorman, D. J., 1999: Accurate free vibration analysis of point supported Mindlin plates by the superposition method. *Journal of Sound and Vibration*, **219**, S. 265-277.
- Gorman, D. J., 2005: Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries. *Journal of Sound and Vibration*, **285**, S. 941-966.
- Hering, E.; Martin, R. und Stohrer, M., 2004: Physik für Ingenieure. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Herszberg, I.; Bannister, M.; Buderath, M.; Li, M.; Saenz, E.; Whittingham, B. und Zhou, Z., 2008: Application of SHM Systems to a Composite Aircraft Structure - A TATEM Usecase. *Proceedings of the 4th European Workshop on Structural Health Monitoring*, Cracow, Poland.

- Hinton, E.; Rock, T. und Zienkiewicz, O. C., 1976: A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **4**, S. 245-249.
- Holford, K. M., 2009: Acoustic Emission in Structural Health Monitoring. *Key Engineering Materials*, **413-414**, S. 15-28.
- Huang, H.; Pamphile, T. und Derriso, M., 2008: The effect of actuator bending on Lamb wave displacement fields generated by a piezoelectric patch. *Smart Materials and Structures*, **17**, S. 055012.
- Hughes, T. J. R., 1987: The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Jennewein, D., 1999: Beitrag zur Verfahrensoptimierung bei der modellgestützten Schadensdiagnose an passiven und aktiven elastomechanischen Strukturen. (Band 276), VDI Verlag, Düsseldorf, Reihe 11.
- Kawai, H., 1969: The piezoelectricity of poly (vinylidene fluoride). *Japanese Journal of Applied Physics*, **8**, S. 975.
- Kirchhoff, G., 1850: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, **40**, S. 51-88.
- Knopoff, L., 1964: A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, S. 431.
- Koloušek, V., 1941: Anwendung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen und des Reziprozitätssatzes in der Stabwerksdynamik. *Archive of Applied Mechanics*, **12**, S. 363-370.
- Komatitsch, D.; Martin, R.; Tromp, J.; Taylor, M. A. und Wingate, B. A., 2001: Wave propagation in 2-D elastic media using a spectral element method with triangles and quadrangles. *Journal of Computational Acoustics*, **9**, S. 703-718.
- Komatitsch, D. und Tromp, J., 2001: Modeling of seismic wave propagation at the scale of the Earth on a large Beowulf. *Proceedings of the ACM/IEEE Conference on Supercomputing (auf CD-ROM)*. S. 33-42.
- Komatitsch, D.; Tsuboi, S.; Ji, C. und Tromp, J., 2003: A 14.6 billion degrees of freedom, 5 teraflops, 2.5 terabyte earthquake simulation on the Earth Simulator. *Proceedings of the ACM/IEEE Conference on Supercomputing*.
- Komatitsch, D. und Vilotte, J. P., 1998: The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **88**, S. 368-392.
- Kraemer, P. und Fritzen, C. P., 2007: Concept for Structural Damage Identification of Offshore Wind Energy Plants. *Proceedings of the 6th International Workshop on Structural Health Monitoring*, Stanford, CA.

- Krawczuk, M.; Ostachowicz, W. und Zak, A., 1997: Dynamics of cracked composite material structures. *Computational Mechanics*, **20**, S. 79-83.
- Krueger, R. und Minguet, P. J., 2007: Analysis of composite skin–stiffener debond specimens using a shell/3D modeling technique. *Composite Structures*, **81**, S. 41-59.
- Kudela, P. und Ostachowicz, W., 2009: A Multilayer Delaminated Composite Beam and Plate Elements: Reflections of Lamb Waves at Delamination. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **16**, S. 174-187.
- Kudela, P.; Zak, A.; Krawczuk, M. und Ostachowicz, W., 2007: Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, **302**, S. 728-745.
- Kulla, P. H., 1997: High precision finite elements. *Finite Elements in Analysis & Design*, **26**, S. 97-114.
- Kullaa, J., 2009: Eliminating Environmental or Operational Influences in Structural Health Monitoring using the Missing Data Analysis. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **20**, S. 1381-1390.
- Kumar, A.; Srivastava, A.; Goel, N.; Narashimhan, V. und Nayak, A., 2009: An approach to structural health assessment and management technology. *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology*, Gippsland, Australia. S. 1-6.
- Lamb, H., 1917: On waves in an elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, **93**, S. 114-128.
- Lammering, R. und Mesecke-Rischmann, S., 2003: Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Materials and Structures*, **12**, S. 904-913.
- Lemistre, M. B.; Osmont, D. L. und Balageas, D. L., 2000: Active health system based on wavelet transform analysis of diffracted Lamb waves. *Proceedings of the SPIE*, Glasgow, UK. S. 194.
- Levy, M., 1899: Sur L'équilibre Elastique D'une Plaque Rectangulaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **129**, S. 535–539.
- Li, H. N.; Li, D. S. und Song, G. B., 2004: Recent applications of fiber optic sensors to health monitoring in civil engineering. *Engineering Structures*, **26**, S. 1647-1657.
- Liang, C.; Sun, F. und Rogers, C. A., 1996: Electro-mechanical impedance modeling of active material systems. *Smart Materials and Structures*, **5**, S. 171-186.
- Livingston, T.; Beliveau, J. G. und Huston, D. R., 1995: Estimation of axial load in prismatic members using flexural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, **179**, S. 899-908.

- Lowe, M. J. S.; Cawley, P.; Kao, J. Y. und Diligent, O., 2002: The low frequency reflection characteristics of the fundamental antisymmetric Lamb wave a from a rectangular notch in a plate. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **112**, S. 2612.
- Malinowski, P.; Wandowski, T.; Trendafilova, I. und Ostachowicz, W. M., 2007: Multi-phased array for damage localisation. *Key Engineering Materials*, **347**, S. 77-82.
- Mankins, J. C., 1995: Technology readiness levels. *White Paper*, **6**.
- Measures, R. M., 2001: Structural monitoring with fiber optic technology. Academic Press San Diego, CA.
- Mengelkamp, G., 2006: Entwicklung einer intelligenten Struktur - Eine Kombination globaler und lokaler Verfahren zur Schadensdiagnose. Dissertation, Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik, Universität Siegen.
- Mindlin, R. D., 1951: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, **18**, S. 31-38.
- Moll, J.; Schulte, R. T. und Fritzen, C. P., 2009: Damage Localization in Anisotropic Plates Using an Active Guided Wave Structural Health Monitoring System". *Proceedings of the 7th International Workshop on Structural Health Monitoring* Stanford, CA. S. 815-822.
- Moll, J.; Schulte, R. T.; Hartmann, B.; Fritzen, C. P. und Nelles, O., 2010: Multi-site damage localization in anisotropic plate-like structures using an active guided wave structural health monitoring system. *Smart Material Structures*, **19**, S. 5022.
- Ousset, Y. und Roudolff, F., 1997: Numerical analysis of delamination in multilayered composite plates. *Computational Mechanics*, **20**, S. 122-126.
- Park, J. und Chang, F. K., 2003: Built-in Detection of Impact Damage in Multi-Layered Thick Composite Structures. *Proceedings of the 4th International Workshop on Structural Health Monitoring*, Stanford, CA, USA. S. 1391-1398.
- Patera, A. T., 1984: A spectral element method for fluid dynamics- laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, **54**, S. 468-488.
- Peairs, D. M., 2006: High Frequency Modeling and Experimental Analysis for Implementation of Impedance-based Structural Health Monitoring. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.
- Peairs, D. M.; Park, G. und Inman, D. J., 2004: Improving Accessibility of the Impedance-Based Structural Health Monitoring Method. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **15**, S. 129.
- Peng, H.; Meng, G. und Li, F., 2009: Modelling of wave propagation in plate structures using three-dimensional spectral element method for damage detection. *Journal of Sound and Vibration*, **320**, S. 942-954.

- Pozrikidis, C., 2005: Introduction to finite and spectral element methods using MATLAB. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Priolo, E.; Carcione, J. M. und Seriani, G., 1994: Numerical simulation of interface waves by high order spectral modeling techniques. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **95**, S. 681.
- Radaj, D. und Vormwald, M., 2007: Ermüdungsfestigkeit: Grundlagen für Ingenieure. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Reddy, J. N., 2004: Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC, Boca Raton, FL.
- Reissner, E., 1945: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, **12**, S. 1.69-1.77.
- Ricles, J. M. und Kosmatka, J. B., 1992: Damage detection in elastic structures using vibratory residual forces and weighted sensitivity. *AIAA journal*, **30**, S. 2310-2316.
- Ritz, W., 1909: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, **1909**, S. 1-61.
- Roche, C. H. und Accorsi, M. L., 1998: A new finite element for global modeling of delaminations in laminated beams. *Finite Elements in Analysis & Design*, **31**, S. 165-177.
- Rohrbach, C., 1989: Handbuch für experimentelle Spannungsanalyse. VDI, Düsseldorf.
- Rose, J. L., 1999: Ultrasonic Waves in Solid Media. Cambridge University Press, Cambridge.
- Royer, D. und Dieulesaint, E., 2000: Elastic Waves in Solids: Free and guided propagation. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Rytter, A., 1993: Vibrational based inspection of civil engineering structures. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University.
- Schmidt, A. und Gaul, L., 2002: Implementation von Stoffgesetzen mit fraktionalen Ableitungen in die Finite Elemente Methode. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **83**, S. 26-37.
- Schmidt, H. J.; Telgkamp, J. und Schmidt-Brandecker, B., 2004: Application of structural health monitoring to improve efficiency of aircraft structure. *Proceedings of the 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, München.
- Schulte, R. T. und Fritzen, C. P., 2008: Spectral element modelling of wave propagation in stringer stiffened structures. *Proceedings of the 4th European Workshop on Structural Health Monitoring*, Krakau, Polen. S. 507-514.
- Schulte, R. T.; Fritzen, C. P. und Moll, J., 2010: Spectral element modelling of wave propagation in isotropic and anisotropic shell-structures including different types of damage. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **9**.

- Schulte, R. T.; Xing, K. und Fritzen, C. P., 2009: Spectral element modelling of wave propagation and impedance based SHM systems. *Key Engineering Materials*, **413 - 414**, S. 683-690.
- Schwarz, H. R., 1991: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart.
- Seriani, G., 1998: 3-D large-scale wave propagation modeling by spectral element method on Cray T3E multiprocessor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **164**, S. 235-247.
- Seriani, G. und Priolo, E., 1994: Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite elements in analysis and design*, **16**, S. 337-348.
- Seydel, R. und Chang, F. K., 2001: Impact identification of stiffened composite panels: I. System development. *Smart Materials and Structures*, **10**, S. 354-369.
- Sirohi, J. und Chopra, I., 2000: Fundamental understanding of piezoelectric strain sensors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **11**, S. 246-257.
- Smith, G. D., 1985: Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford University Press, New York.
- Sprague, M. A. und Geers, T. L., 2008: Legendre spectral finite elements for structural dynamics analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **24**.
- Staszewski, W. J.; Lee, B. C.; Mallet, L. und Scarpa, F., 2004: Structural Health Monitoring using laser scanning vibrometry: I. Lamb wave sensing. *Smart Materials and Structures*, **13**, S. 251-260.
- Sun, C. T. und Whitney, J. M., 1973: Theories for the dynamic response of laminated plates. *AIAA J*, **11**, S. 178-183.
- Suresh, S., 2003: Fatigue of Materials. Cambridge University Press, Cambridge.
- Teughels, A.; Maeck, J. und De Roeck, G., 2002: Damage assessment by FE model updating using damage functions. *Computers and Structures*, **80**, S. 1869-1879.
- Thomas, D.; Welter, J. und Giurgiutiu, V., 2004: Corrosion damage detection with piezoelectric wafer active sensors. *Proceedings of the SPIE*, San Diego, CA.
- Thomson, W. T., 1950: Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, **21**, S. 89.
- Todoroki, A.; Tanaka, Y. und Shimamura, Y., 2002: Delamination monitoring of graphite/epoxy laminated composite plate of electric resistance change method. *Composites science and technology*, **62**, S. 1151-1160.
- Tzou, H. S., 1993: Piezoelectric shells. Kluwer Academic Publ.
- Tzou, H. S. und Ye, R., 1996: Analysis of piezoelectric structures with laminated piezoelectric triangle shell elements. *AIAA journal*, **34**, S. 110-115.

- VDI-Richtlinien, 2006: 2014, Part 3 - Development of FRP components (fibre-reinforced plastics) Analysis. Beuth, Berlin.
- Wagner, W., 1985: Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite-Elemente-Berechnungen von Durchschlag- und Kontaktproblemen. Dissertation, Universität Hannover, Hannover.
- Wang, L. und Yuan, F. G., 2007: Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments. *Composites Science and Technology*, **67**, S. 1370-1384.
- Wilcox, P. D.; Lowe, M. J. S. und Cawley, P., 2001: Mode and transducer selection for long range Lamb wave inspection. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **12**, S. 553-565.
- Wimmer, G.; Schuecker, C. und Pettermann, H. E., 2006: Numerical simulation of delamination onset and growth in laminated composites. *The e-Journal of Nondestructive Testing*, **11**.
- Wissmann, J. und Sarnes, K. D., 2007: Finite Elemente in der Strukturmechanik. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Worden, K. und Dulieu-Barton, J. M., 2004: An overview of intelligent fault detection in systems and structures. *Structural Health Monitoring*, **3**, S. 85.
- Worden, K. und Staszewski, W. J., 2008: Impact location and quantification on a composite panel using neural networks and a genetic algorithm. *Strain*, **36**, S. 61-68.
- Wu, H. Y. T. und Springer, G. S., 1988: Impact induced stresses, strains, and delaminations in composite plates. *Journal of Composite Materials*, **22**, S. 533.
- Yan, F. und Rose, J. L., 2007: Guided wave phased array beam steering in composite plates. *Proceedings of the SPIE*. S. 65320G.
- Yu, L., 2006: In-situ structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensor guided-wave phased arrays. Dissertation, University of South Carolina.
- Zheng, S. und Sun, C. T., 1995: A double-plate finite-element model for the impact-induced delamination problem. *Composites Science and Technology*, **53**, S. 111-118.
- Zhu, Y. und Zacharia, T., 1996: A new one-point quadrature, quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **136**, S. 165-203.
- Zienkiewicz, O. C. und Taylor, R. L., 1989: The Finite Element Method, 4th ed., Vol. 1: Basic formulation and linear problems. McGraw-Hill, London, UK.
- Zienkiewicz, O. C. und Taylor, R. L., 2005: The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-Heinemann, Burlington, MA.

Zrahia, U. und Bar-Yoseph, P., 1995: Plate spectral elements based upon Reissner-Mindlin theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, S. 1341-1360.