

# Strukturaussagen für die optimalen Ausübungsstrategien bei multiplen Stoppproblemen und Swing Optionen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
Dipl.–Math. Florian Bagus

eingereicht beim Department Mathematik  
der Naturwissenschaftlich–Technischen Fakultät  
der Universität Siegen

Siegen 2012



GUTACHTER:

Prof. Dr. Alfred Müller, Universität Siegen  
Prof. Dr. Nicole Bäuerle, Karlsruher Institut für Technologie

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG:

16. Juli 2012



# Abstract

This thesis is concerned with the following stochastic dynamic optimization problem. A decision maker, who maximizes his expected utility, is supposed to consume a given capacity under constraints in a finite time horizon. At each point of time there is an offer and the decision maker receives a reward, which depends on the value of the offer and the consumed quantity. The aim is to maximize the expected utility of the total reward. In this context multiple optimal stopping problems as well as swing options, which are important in the energy sector, are investigated.

The decision problem is considered for linear and exponential utility functions using the theory of Markov Decision Processes. For a risk-neutral decision maker with a linear utility function we give conditions for the sequence of offers that guarantee the existence of thresholds. Furthermore, we study the behaviour of the thresholds when the planning horizon tends to infinity. In the case of a risk-averse decision maker with an exponential utility function the solution is different. The boundary points of the admissible set are in general no longer optimal. Additionally, we investigate how attitude to risk affects the optimal strategy. The results are illustrated by several examples.



# Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit folgendem stochastischen dynamischen Optimierungsproblem. Ein Entscheider, der seinen erwarteten Nutzen maximiert, soll eine gegebene Kapazität unter Restriktionen über einen endlichen Zeitraum verbrauchen. Zu jedem Entscheidungszeitpunkt liegt ein Angebot vor und der Entscheider bekommt einen Gewinn in Abhängigkeit von der Höhe des Angebotes und der verbrauchten Menge. Ziel ist es, den erwarteten Nutzen des Gesamtgewinns zu maximieren. Im Rahmen dieser Problemstellung werden sowohl multiple optimale Stopp-Probleme als auch Swing Optionen, die beispielsweise in der Energiewirtschaft eine wichtige Rolle spielen, untersucht.

Das Entscheidungsproblem wird für lineare und exponentielle Nutzenfunktionen mit Hilfe der Theorie Markovscher Entscheidungsprozesse betrachtet. Für einen risikoneutralen Entscheider mit linearer Nutzenfunktion werden Bedingungen an die Folge der Angebote gefunden, so dass es Schwellenwerte gibt, die die optimale Strategie bestimmen. Zudem wird das Verhalten der Schwellenwerte betrachtet, wenn die Laufzeit gegen unendlich geht. Im Fall eines risikoaversen Entscheiders mit exponentieller Nutzenfunktion ergibt sich eine andere Struktur der Lösung. Die Randpunkte der zulässigen Menge sind z.B. nicht mehr notwendigerweise optimal. Außerdem wird untersucht, welchen Einfluss die Risikoneigung des Entscheiders auf die optimale Strategie hat. Die Resultate werden anhand von einigen Beispielen illustriert.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Kurzzusammenfassung</b>	<b>iii</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1. Markovsche Entscheidungsprozesse</b>	<b>7</b>
1.1. Risiko-Sensitivität . . . . .	7
1.2. Klassische MDPs . . . . .	8
1.3. MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion . . . . .	15
1.4. Allgemeine Politiken . . . . .	20
1.4.1. Klassische MDPs . . . . .	21
1.4.2. MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion . . . . .	22
<b>2. Modell</b>	<b>25</b>
2.1. Formulierung als MDP . . . . .	25
2.2. Wertfunktion im risikoneutralen Fall . . . . .	28
2.3. Wertfunktion im risikosensitiven Fall . . . . .	30
<b>3. Struktur der Maximisatoren im risikoneutralen Entscheidungsmodell</b>	<b>33</b>
3.1. Multiples Stoppen . . . . .	33
3.1.1. Beispiele . . . . .	43
3.2. Kontinuierlicher Aktionenraum . . . . .	48
3.2.1. Unabhängige Angebote . . . . .	48
3.2.2. Markovketten . . . . .	55
3.3. Asymptotisches Verhalten der Schwellenwerte . . . . .	56
3.3.1. Beispiele . . . . .	71

<b>4. Struktur der Maximisatoren im risikosensitiven Entscheidungsmodell</b>	<b>81</b>
4.1. Multiples Stoppen . . . . .	81
4.1.1. Unabhängige Angebote . . . . .	81
4.1.2. Markovketten . . . . .	87
4.1.3. Beispiel . . . . .	89
4.2. Kontinuierlicher Aktionenraum . . . . .	91
<b>A. Hilfsmittel</b>	<b>105</b>
A.1. Konvexe Funktionen . . . . .	105
A.2. Lipschitz-stetige Funktionen . . . . .	106
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>

# Abbildungsverzeichnis

3.1. Übergangsfunktion der Markovkette aus Beispiel 3.1.1. . . . . .	35
3.2. Schwellenwerte im risikoneutralen Modell mit $N = 30$ bei Gleichverteilung auf $(0, 100)$ . . . . .	43
3.3. Wertfunktion für $N = 30$ und $k = 2$ im risikoneutralen Modell für das Trinomialmodell mit $l = 10$ . . . . .	47
3.4. Schwellenwerte im risikoneutralen Modell mit $N = 1000$ für das Trinomialmodell mit $l = 200$ . . . . .	48
3.5. Konvergenz der Schwellenwerte im risikoneutralen Modell bei Gleichverteilung auf $(0, 100)$ und $\alpha = 0.7$ . . . . .	71
3.6. Dichte der stationären Verteilung im Trinomialmodell für $l = 10$ . . . . .	73
3.7. Verteilungsfunktion der stationären Verteilung im Trinomialmodell mit $l = 10$ . . . . .	78
3.8. Konvergenz der Schwellenwerte im Trinomialmodell mit $l = 10$ für $\alpha = 0.85$ . . . . .	79
4.1. Schwellenwerte im risikosensitiven Modell mit $N = 30$ bei Gleichverteilung auf $(0, 100)$ für $\alpha = -0.1$ . . . . .	90
4.2. Schwellenwerte im risikosensitiven Modell mit $N = 30$ bei Gleichverteilung auf $(0, 100)$ für verschiedene Werte von $\alpha$ und $k = 1$ . . . . .	91
4.3. Maximisatoren im risikosensitiven Modell für $k = 1$ bei Gleichverteilung auf $\{1, \dots, 100\}$ . . . . .	102
4.4. Wertfunktion und Sicherheitsäquivalent der Wertfunktion im risikosensitiven Modell für $k = 1$ bei Gleichverteilung auf $\{1, \dots, 100\}$ . . . . .	103



# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der positiven natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Das $n$ -fache cartesische Produkt von $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}(\Omega)$	Borelsche $\sigma$ -Algebra auf der Menge $\Omega$
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	Produkt der $\sigma$ -Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
$f^+$	Positivteil $\max\{f, 0\}$ einer messbaren numerischen Funktion
$\lambda$	Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
$\delta_x$	Einpunktmaß im Punkt $x$ .
$\mu \otimes \nu$	Produktmaß der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu$ und $\nu$
$EX$	Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion der Menge $A$
<i>u.i.v.</i>	unabhängig und identisch verteilt
<i>f.s.</i>	fast sicher



# Einleitung

Optimale Stoppprobleme finden sich in vielen Bereichen, etwa in der Ökonomie, der Spieltheorie oder der Finanzmathematik. Man kann dabei einen Prozess, der sich in der Zeit ändert, zu einem beliebigen Zeitpunkt stoppen und erhält dafür einen Gewinn. Das Kriterium, nach dem der Prozess gestoppt wird, ist typischerweise die Maximierung des erwarteten Gewinns.

Im Folgenden betrachten wir die Situation, in der man mehrere Stoppzeitpunkte auswählen darf und aus einer Folge  $X_1, \dots, X_N$  nacheinander eintreffender Angebote  $k \leq N$  Angebote auswählen soll. Entscheidungsprobleme dieser Art nennt man auch multiple optimale Stoppprobleme. Zu jedem Zeitpunkt muss sofort entschieden werden, ob ein vorliegendes Angebot angenommen wird. Ein Rückgriff auf vorherige Angebote ist nicht möglich. Falls ein Angebot angenommen wird, erhält man dafür einen Gewinn und die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten reduziert sich um eins. Ziel ist es, eine optimale Stoppregel zu finden, um den erwarteten Gesamtgewinn zu maximieren.

Viele Entscheidungsprobleme können auf diese Art formuliert werden. Wir geben zwei Beispiele an, wovon das erste ein einfaches Stoppproblem ist.

a) Arbeitsplatzwahl:

Ein Arbeitssuchender erhält an jedem von  $N$  Tagen ein Arbeitsangebot. Für jedes Angebot entstehen ihm dabei Kosten in Höhe von  $c$ , z.B. für die Bewerbungsunterlagen und die Anreise. Der Arbeitssuchende muss nun jeden Tag entscheiden, ob er das Angebot annimmt, oder die Kosten von  $c$  für ein weiteres Angebot trägt. Man nimmt dabei an, dass die Höhe der Angebote einer Wahrscheinlichkeitsverteilung folgen, die dem Arbeitssuchenden bekannt ist. Das Suchverhalten auf dem Arbeitsmarkt wurde zuerst in Stigler (1961, 1962) diskutiert. Er lässt aber einen Rückgriff auf vorherige Angebote zu. Einen Überblick über die umfangreiche Literatur zu diesem Modell bieten Lippman und McCall (1976).

b) Sequentielle Zuordnung:

Für  $N$  nacheinander anfallende Arbeiten mit unabhängig und identisch verteilten Werten  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , stehen  $k \leq N$  Personen zur Verfügung. Jede Person kann nur eine Arbeit erledigen. Es muss also entschieden werden, welche Arbeiten mit dem Ziel der Maximierung des erwarteten Gesamtgewinns angenommen werden. Derman et al. (1972) haben gezeigt, dass dieses Problem äquivalent zu folgender Verallgemeinerung ist. Jeder Person wird eine

Wahrscheinlichkeit zugeordnet, dass eine Arbeit erfolgreich bewältigt wird. Die Arbeiten sollen derart auf die Personen verteilt werden, dass der erwartete Gewinn aus den Arbeiten maximiert wird.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir zudem ein verallgemeinertes Problem. Dem Entscheider steht eine reellwertige Kapazität zur Verfügung, die über  $N$  Perioden verbraucht werden muss. Dabei gibt es eine untere und eine obere Schranke für die Menge, die zu einem Zeitpunkt eingesetzt werden darf. Der jeweilige Gewinn zu einem Zeitpunkt ist abhängig von der eingesetzten Menge und der Höhe des aktuellen Angebotes. Die Kapazität soll unter dem Ziel der Maximierung des Gesamtgewinns aufgeteilt werden.

Dieses Modell findet z.B. Anwendung in Energiemärkten und ist unter dem Namen Swing Option bekannt. Swing Optionen gibt es in vielfältigen Ausgestaltungen. Der Halter einer Swing Option hat das Recht zu bestimmten Zeitpunkten und zu einem festen Preis eine variable Menge Energie zu kaufen. Mit dieser Option wird den Anforderungen von Industriekunden Rechnung getragen. Diese können häufig ihren zukünftigen Verbrauch nicht exakt vorherbestimmen. Um das Risiko der Option aufzuteilen, gibt es Restriktionen. So gibt es zu jedem Zeitpunkt eine untere und eine obere Schranke für die gekaufte Menge Energie. Zudem gibt es Schranken für die Gesamtmenge an Energie bis zum Ende der Laufzeit. Eine Übersicht über die Eigenschaften von Energiemärkten und die dort verwendeten Derivate geben z.B. Burger et al. (2008).

In der Literatur finden sich sehr unterschiedliche Modelle von Swing Optionen. Sie werden oft auch einfach als multiple optimale Stoppprobleme eingeführt. Wir unterscheiden jedoch zwischen beiden Problemstellungen und untersuchen diese mit dem Entscheidungskriterium der Maximierung des erwarteten Nutzens des Gesamtgewinns für eine (monoton wachsende) Nutzenfunktion. Ziel ist es also, unter allen zulässigen Strategien diejenige zu finden, die den erwarteten Nutzen maximiert.

Für unsere Analyse verwenden wir zwei Typen von Nutzenfunktionen. Unter einer linearen Nutzenfunktion ist es das Ziel, den erwarteten Gesamtgewinn zu maximieren. Dies entspricht dem Fall eines risikoneutralen Entscheiders. Die realistischere Annahme ist ein risikoaverser Entscheider. Dieser zieht eine feste Zahlung einer zufälligen Zahlung mit gleichem Erwartungswert vor. Seine Risikoaversion wird durch eine konkave Nutzenfunktion widergespiegelt. Die Maximierung des erwarteten Nutzens unter einer nichtlinearen Nutzenfunktion wurde schon für viele Entscheidungsprobleme betrachtet, z.B. für einfache optimale Stoppprobleme, siehe Müller (2000) und Hall et al. (1979) oder im Ertragsmanagement, siehe Barz (2007). Multiple optimale Stoppprobleme wurden bisher noch nicht unter diesem Kriterium genauer analysiert.

Wir formulieren in den ersten beiden Kapiteln unser Modell im Fall eines risikoneutralen Entscheiders als einen Markovschen Entscheidungsprozess (kurz MDP) und im Fall eines risikoaversen Entscheiders als einen risikosensitiven MDP. Zudem



zeigen wir, dass man die Entscheidungsprobleme durch Rückwärtsinduktion lösen kann und so eine optimale Strategie erhält.

In den beiden folgenden Kapiteln beschäftigen wir uns mit der Struktur der optimalen Strategie im risikoneutralen und im risikosensitiven Modell.

Wir geben nun eine Übersicht über den Aufbau der Arbeit.

In **Kapitel 1** werden die nötigen Grundlagen für die Analyse der Modelle bereitgestellt. Nachdem wir im ersten Abschnitt zunächst den Begriff des Sicherheitsäquivalents einführen und begründen, warum wir uns nur auf die beiden oben genannten Nutzenfunktionen beschränken, geben wir im zweiten Abschnitt einen Überblick über die Theorie Markovscher Entscheidungsprozesse. Wir benutzen dabei weitgehend die Notation von Bäuerle und Rieder (2011). MDPs werden bei der Modellierung einer Vielzahl von Anwendungen in unterschiedlichen Gebieten wie Operations Research, Finance und Ökologie verwendet. Die Entwicklung der Theorie Markovscher Entscheidungsprozesse begann mit Bellman (1957). Wichtige Beiträge lieferten im Folgenden Hinderer (1970), Bertsekas und Shreve (1978) und Dynkin und Yushkevich (1979).

Im dritten Abschnitt betrachten wir risikosensitive MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion. Diese wurden von Howard und Matheson (1972) eingeführt. In der Literatur werden am häufigsten zeitlich additive Nutzenfunktionen betrachtet. Die zugehörigen MDPs sind aber formal äquivalent zu risikoneutralen MDPs, bei denen der Einstufengewinn der Nutzen des Gewinns ist. Zudem sind Nutzenfunktionen dieser Art oft unrealistisch bei Entscheidungsproblemen mit kurzer Laufzeit. In solchen Fällen wird sich der Entscheider eher für den Gesamtgewinn interessieren und den erwarteten Nutzen des Gesamtgewinns maximieren wollen. Kreps (1977a,b, 1978) untersucht risikosensitive MDPs mit allgemeiner Nutzenfunktion, allerdings nur auf abzählbaren Zustandsräumen und endlichen Aktionenräumen. Entscheidend für die Analyse von risikosensitiven MDPs auf allgemeine Zustandsräumen ist der Struktursatz von Porteus (1975). Dieser gibt Bedingungen an den Entscheidungsprozess an, unter denen die Wertiteration gilt und eine optimale Strategie existiert.

Wir werden die Theorie für MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion analog zur Einführung von risikoneutralen MDPs systematisch aufbauen. Zudem werden wir für unsere Aussagen wichtige Klassen von risikosensitiven MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion angeben, die dem Struktursatz genügen.

Im letzten Abschnitt verallgemeinern wir die bisherige Definition einer Strategie. Eine Entscheidung zu einem beliebigen Zeitpunkt war nur vom aktuellen Zustand abhängig. Wir betrachten nun allgemeine Strategien, die auch von der kompletten Vergangenheit aus Zuständen und gewählten Aktionen abhängig sein können. Im Fall von risikoneutralen MDPs wurde schon gezeigt, dass allgemeine Strategien den maximalen erwarteten Gesamtgewinn nicht verbessern (siehe z.B. Hinderer (1970) oder Bertsekas und Shreve (1978)). Bei risikosensitiven MDPs gilt dies im Allge-

meinen nicht. Wenn die Nutzenfunktion nicht separabel ist, hängt die Präferenz zu einem bestimmten Zeitpunkt von den in der Vergangenheit erzielten Gewinnen ab. Wir können jedoch zeigen, dass sich bei risikosensitiven MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion der maximale erwartete Nutzen nicht ändert, wenn man allgemeine Strategien zulässt. Dieses Ergebnis rechtfertigt, dass wir nur Entscheidungen betrachten, die vom aktuellen Zustand abhängen.

In **Kapitel 2** formulieren wir unser Modell einer Swing Option als einen risikoneutralen MDP bzw. als einen risikosensitiven MDP. Die Angebote nehmen nur positive Werte an und die Schranken für die zulässige Menge  $a$  in einem Zeitpunkt seien normalisiert, d.h.  $a$  sei  $[0, 1]$ -wertig. Diese Einschränkung ist nicht wesentlich, denn wir sind nur an der Struktur der Lösung interessiert. Wir zeigen, dass die Struktursätze unter schwachen Voraussetzungen an die Folge  $(X_i)_{i=1, \dots, N}$  gelten. In diesem Fall gilt also die Wertiteration und es gibt eine optimale Strategie. Zudem werden wir einige elementare Eigenschaften der Wertfunktion beweisen, wie Konvexität in der Höhe des Angebotes und Konkavität in der Kapazität.

In der Praxis ist es leider nicht immer einfach, die Wertfunktion einer Swing Option zu berechnen, weil häufig ein multidimensionaler Preisprozess zugrunde liegt. Es gibt verschiedene Ansätze, um zu einer Approximation durch Simulation zu gelangen. Meinshausen und Hambly (2004) und Bender (2011) approximieren z.B. die Wertfunktion mittels Regression, um eine untere Schranke zu erhalten. Diese Methode wurde schon von Longstaff und Schwartz (2001), Tsitsiklis und Van Roy (2001) und Carrière (1996) zur Bewertung von Amerikanischen Optionen benutzt. Die optimale Strategie für die Approximationen muss aber nicht der tatsächlichen optimalen Strategie entsprechen. Daher erhält man auf diese Weise eine untere Schranke für die Wertfunktion. Für eine obere Schranke nutzen sie den dualen Ansatz, bei dem über einen Raum von Martingalen minimiert wird. Durch ein approximierendes Martingal erhalten sie eine obere Schranke für die Wertfunktion. Der duale Ansatz geht auf Rogers (2002) und Haugh und Kogan (2004) zurück. Ibáñez (2004) hingegen nutzt ein anderes Verfahren, um die Wertfunktion anzunähern. Er approximiert die optimalen Ausübungsschranken und führt dann eine Monte-Carlo Simulation durch. Jaillet et al. (2004) verwenden Trinomial-Bäume, um den Wert der Swing Option zu approximieren.

In **Kapitel 3** betrachten wir das risikoneutrale Entscheidungsmodell. Das Entscheidungskriterium ist also die Maximierung des erwarteten Gewinns.

Im ersten Abschnitt untersuchen wir nicht das allgemeine Modell, sondern lassen nur zwei Entscheidungen zu. Der Entscheider hat eine gewisse Anzahl an Ausübungsrechten und bestimmt in jeder Periode, ob er ein Recht verwenden möchte, oder nicht. Nutzt er ein Recht, so ist der Wert des aktuellen Angebotes sein Gewinn. Es liegt also ein multiples optimales Stoppproblem vor. Da die Angebote nur positive Werte annehmen, ist es optimal alle Rechte bis zum Ende der Laufzeit zu

benutzen. Wir geben eine Lipschitz-Bedingung an die Markovkette  $(X_i)_{i=1,\dots,N}$  an, unter der sogenannte Schwellenwerte existieren. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist es optimal, ein Recht genau dann auszuüben, wenn das Angebot oberhalb einer Schranke liegt. Diese Schranke ist abhängig von der Periode und der noch verbliebenen Anzahl an Rechten. Wir werden zeigen, dass die Schwellenwerte monoton in den Ausübungsrechten und in der Restlaufzeit sind.

Falls die Angebote unabhängig und identisch verteilt sind, ist die Existenz von Schwellenwerten offensichtlich. Die Aussagen über die Struktur der Schwellenwerte in dieser Situation können z.B. aus den Ergebnissen von Derman et al. (1972) gefolgert werden. Für nur ein Ausübungsrecht ergibt sich ein klassisches optimales Stoppproblem. Eine Analyse der Schwellenwerte in diesem Fall findet sich z.B. in Lippman und McCall (1976).

Sind die Angebote nicht unabhängig, so hat Ibáñez (2004) eine Reihe von Bedingungen formuliert, unter denen es Schwellenwerte gibt. Jönsson et al. (2004, 2005) geben Bedingungen für die linksseite Ableitung von monoton fallenden und konvexen Gewinnfunktionen bei Amerikanischen Optionen an, so dass es unter gewissen Annahmen an den Angebotsprozess Schwellenwerte gibt. Wir verdeutlichen die Ergebnisse anhand von zwei Beispielen.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir das allgemeine Modell, d.h.  $a$  ist  $[0, 1]$ -wertig. Unter der Lipschitz-Bedingung an die Folge der Angebote zeigen wir, dass es bis auf maximal einen Zeitpunkt immer optimal ist, entweder  $a = 0$  oder  $a = 1$  zu wählen. Die optimale Strategie wird festgelegt durch die Schwellenwerte aus dem vereinfachten Modell mit nur zwei Entscheidungsmöglichkeiten.

Es ist zwar schon bekannt, dass es bei der Swing Option optimal ist, höchstens einmal  $a \in (0, 1)$  zu wählen, siehe Bardou et al. (2010). Mithilfe der Lipschitz-Bedingung erhält man aber noch zusätzlich eine einfache Struktur der optimalen Strategie durch die Existenz von Schranken. Auch Ibáñez (2004) gibt Bedingungen an die Folge  $(X_i)_{i=1,\dots,N}$  an, unter denen die optimale Strategie durch Schranken bestimmt ist. Allerdings benutzt er strengere Voraussetzungen als unsere und verzichtet auf einen Beweis.

Im dritten Abschnitt analysieren wir die optimale Strategie, falls die Laufzeit der Option gegen unendlich geht. Da die Schwellenwerte die optimale Strategie charakterisieren, untersuchen wir hierzu das asymptotische Verhalten der Schwellenwerte. Insbesondere betrachten wir die Situation, in der der Quotient aus der Anzahl an Rechten und der Laufzeit gegen  $\alpha \in (0, 1)$  konvergiert. Für den Fall unabhängig und identisch verteilter Angebote wurde dies schon von Derman et al. (1972) untersucht. Sie haben gezeigt, dass der Grenzwert das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilungsfunktion der Angebote ist. Wir können dieses Resultat auf Markovketten verallgemeinern. Zudem bestimmen wir den Grenzwert der Schwellenwerte für festes  $k \in \mathbb{N}$  und für den Fall, dass der Quotient aus der Anzahl an Rechten und der Laufzeit gegen eins konvergiert. Mithilfe von zwei Beispielen werden die Ergebnisse veranschaulicht.

In **Kapitel 4** untersuchen wir das risikosensitive Entscheidungsmodell mit exponentieller Nutzenfunktion. Der Entscheider möchte also den erwarteten Nutzen des Gesamtgewinns maximieren.

Im ersten Abschnitt beschränken wir uns, wie schon in Kapitel 3, auf den Fall eines multiplen optimalen Stoppproblems. Für unabhängig und identisch verteilte Angebote zeigen wir, dass die Schwellenwerte, wie im risikoneutralen Modell, monoton in der Anzahl der Rechte und in der Restlaufzeit sind. Anschließend untersuchen wir, wie die Risikoneigung des Entscheiders die optimale Strategie beeinflusst. Für den Fall eines einfachen optimalen Stoppproblems wurde diese Fragestellung schon von Müller (2000) und Hall et al. (1979) bearbeitet. Es stellt sich heraus, dass je größer die Risikoaversion des Entscheiders ist, desto selektiver ist er.

Wenn die Unabhängigkeitsannahme fallengelassen wird, stellt sich wieder die Frage nach der Existenz von Schwellenwerten. Zumindest für den Fall von nur einem Recht finden wir eine einfache Bedingung an die Markovkette, die Schwellenwerte garantiert. Wir illustrieren die Ergebnisse anhand eines Beispiels.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir das allgemeine Modell mit  $a \in [0, 1]$  für unabhängig und identisch verteilte Angebote. Wir zeigen, dass die optimale Entscheidung monoton in der Höhe des Angebotes und in der verfügbaren Kapazität ist. Zudem gibt es Angebote, so dass es optimal ist, die Randwerte  $a = 1$  bzw.  $a = 0$  zu wählen. Weiterhin untersuchen wir wieder die Auswirkungen von Änderungen im Grad der Risikoaversion auf die optimale Strategie und veranschaulichen die Ergebnisse des Abschnittes mit einem Beispiel.

# Kapitel 1.

## Markovsche Entscheidungsprozesse

### 1.1. Risiko-Sensitivität

Ein Entscheider, der seinen erwarteten Nutzen maximieren soll, hat eine bestimmte Risikoneigung. Wir gehen davon aus, dass höhere Auszahlungen zu einem größeren Nutzen führen, also dass seine Risikopräferenz durch eine monoton wachsende Nutzenfunktion wiedergegeben werden kann (siehe Neumann und Morgenstern, 1944). Ein wichtiges Konzept, um die Risikobereitschaft des Entscheiders einordnen zu können, ist das *Sicherheitsäquivalent*. Wenn wir annehmen, dass der Entscheider wählen kann, ob er einen festen Wert  $\bar{x}$  erhält oder die Realisation einer Zufallsvariable  $X$ , dann ist das Sicherheitsäquivalent derjenige Wert  $\bar{x}$ , so dass der Entscheider indifferent zwischen beiden Möglichkeiten ist. Für diesen Wert  $\bar{x}$  gilt dann

$$Eu(X) = u(\bar{x}).$$

Das Sicherheitsäquivalent ist also definiert durch

$$\bar{x} = u^{-1}Eu(X).$$

Wenn der Entscheider risikoavers ist, ist die Nutzenfunktion konkav und es gilt nach der Jensen-Ungleichung

$$u(EX) \geq Eu(X) = u(\bar{x}). \quad (1.1)$$

Die erwartete Auszahlung  $EX$  wird also der zufälligen Auszahlung  $X$  vorgezogen und es gilt  $\bar{x} \leq EX$ , da  $u$  monoton wachsend ist.

Wir betrachten die Situation, in der der Entscheider bereit ist, die sogenannte "Delta-Eigenschaft" zu akzeptieren. D.h., wenn wir  $X$  um  $\Delta$  erhöht wird, dass dann auch das Sicherheitsäquivalent um  $\Delta$  steigt. Es gilt also

$$u^{-1}(Eu(X + \Delta)) = \bar{x} + \Delta.$$

Für den Fall einer exponentiellen Nutzenfunktion  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$ ,  $\alpha > 0$ , eines

risikoaversen Entscheiders ist die Delta-Eigenschaft erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} u^{-1}(Eu(X + \Delta)) &= u^{-1}(Eu(X) \cdot u(\Delta)) \\ &= u^{-1}(Eu(X)) + u^{-1}(u(\Delta)) \\ &= \bar{x} + \Delta. \end{aligned}$$

Raiffa (1968) hat gezeigt, dass eine Nutzenfunktion  $u$ , die die Delta-Eigenschaft erfüllt, entweder linear oder exponentiell ist. Falls ein Entscheider eine lineare Nutzenfunktion hat, so ist er risikoneutral und es gilt Gleichheit in (1.1).

Für den Gesamtgewinn einer Folge von Zufallsvariablen bedeutet die Delta-Eigenschaft, dass das Sicherheitsäquivalent für den erwarteten Gewinn in der Zukunft unabhängig von den bisher erzielten Gewinnen ist. Das führt letztlich dazu, dass das Prinzip der Rückwärtsinduktion bei der Suche nach optimalen Entscheidungen anwendbar ist. Dies wurde schon von Howard und Matheson (1972) festgestellt.

Für allgemeine Nutzenfunktionen müsste man hierfür den Zustandsraum künstlich um den bisher erzielten Gewinn vergrößern (siehe Porteus (1975) und White (1987)). Explizite Berechnungen sind dann allerdings unmöglich. Deshalb wollen wir uns hier auf lineare und exponentielle Nutzenfunktionen beschränken, wenn wir den erwarteten Nutzen einer Folge zufälliger Gewinne betrachten.

## 1.2. Klassische MDPs

Wir betrachten zunächst den Fall einer linearen Nutzenfunktion und eines risikoneutralen Entscheiders. Da wir unser Modell als einen Markovschen Entscheidungsprozess formulieren wollen, geben wir zuerst einen Überblick über die Theorie Markovscher Entscheidungsprozesse, in deren Mittelpunkt der Struktursatz steht. Wir halten uns dabei im Wesentlichen an die Darstellung in Bäuerle und Rieder (2011).

Ein Markovscher Entscheidungsprozess ist ein Modell zur Beschreibung eines Systems, das durch sequentielle Entscheidungen gesteuert werden kann. Die Entwicklung des Systems wird als markovsch angenommen. Der Entscheider wählt zu jedem Zeitpunkt eine zulässige Aktion und anschließend ändert sich der Zustand des Systems gemäß einer stochastischen Verteilung. Für jede Aktion erzielt man abhängig vom aktuellen Zustand einen bestimmten Gewinn. Das Ziel ist es, das System so zu kontrollieren, dass der erwartete Gesamtgewinn maximal wird.

**Definition 1.2.1.** *Ein Markovscher Entscheidungsprozess (MDP) mit Planungshorizont  $N$  ist ein Tupel  $(S, A, D, Q, r, V_0)$  mit folgender Bedeutung:*

1.  $S$  und  $A$  seien beliebige nichtleere Mengen, versehen mit  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{A}$ .  $S$  wird **Zustandsraum** genannt und  $A$  **Aktionenraum**.
2.  $D \subseteq S \times A$  sei eine bzgl. der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$  messbare Teilmenge von  $S \times A$  und soll den Graphen einer messbaren Abbildung  $f: S \rightarrow A$  enthalten,

d.h.  $(s, f(s)) \in D$  für alle  $s \in S$ . Es sei  $D(s) := \{a \in A : (s, a) \in D\}$  der  $s$ -Schnitt von  $D$ .  $D(s)$  ist die Menge der in  $s$  **zulässigen Aktionen**.

3.  $Q$  ist ein Übergangskern von  $D$  nach  $S$ , d.h. für jedes  $B \in \mathcal{S}$  ist  $B \mapsto Q(s, a, B)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle  $(s, a) \in D$  und  $(s, a) \mapsto Q(s, a, B)$  ist messbar für alle  $B \in \mathcal{S}$ .
4.  $r: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine messbare Funktion und wird als **Einstufengewinnfunktion** bezeichnet.
5.  $V_0: S \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine messbare Funktion und heißt **terminale Gewinnfunktion**.

**Bemerkung 1.2.2.** Der MDP, den wir definiert haben, ist ein stationärer Entscheidungsprozess. Man kann auch einen nicht-stationären MDP definieren. Dazu wird die Menge der zulässigen Aktionen  $D_n$ , der Übergangskern  $Q_n$  und der Einstufengewinn  $r_n$  jeweils abhängig von  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  gewählt. Einen Diskontierungsfaktor  $\beta > 0$  für den Gewinn  $r$  erhält man, indem man einfach  $r_n(s, a) = \beta^n r(s, a)$ ,  $(s, a) \in D_n$ , setzt. Bei einem allgemeinen nicht-stationären MDP gelten analoge Resultate wie für die stationären MDPs, siehe Bäuerle und Rieder (2011). Man muss allerdings, wegen der Abhängigkeit von  $n$ , von der in diesem Kapitel gewählten Notation abweichen und die von Bäuerle und Rieder benutzen. Wir begnügen uns der Übersichtlichkeit halber mit der obigen Definition eines MDPs.

Die Strategie des Entscheiders besteht aus den Aktionen, die zu den einzelnen Zeitpunkten gewählt werden. Die Wahl der Aktion ist vom aktuellen Zustand und Zeitpunkt abhängig.

**Definition 1.2.3.**

- a) Eine messbare Funktion  $f: S \rightarrow A$  mit  $f(s) \in D(s)$  für alle  $s \in S$  heißt **Entscheidungsregel**.  $F$  sei die Menge aller Entscheidungsregeln.
- b) Eine Folge  $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in F^N$  bezeichnen wir als  **$N$ -stufige Politik (Strategie)**.

Wir wollen den erwarteten Gewinn einer Politik definieren und müssen dafür einen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum angeben. Wir wählen die kanonische Konstruktion mit

$$\Omega = S^{N+1}, \mathcal{F} = \bigotimes_{k=1}^{N+1} \mathcal{S}.$$

Die zufälligen Zustände  $X_0, X_1, \dots, X_n$  werden als Projektionszufallsvariablen definiert, d.h. für  $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_N) \in \Omega$  setzen wir

$$X_n(\omega) = X_n((s_0, s_1, \dots, s_n)) = s_n.$$

Zu gegebenem Startzustand  $s \in S$  und Politik  $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$  können wir mit Hilfe des Satzes von Ionescu-Tulcea (siehe Klenke, 2008, Satz 14.32) ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_s^\pi$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  konstruieren, indem wir

- i)  $P_s^\pi(X_0 \in B) = \mathbb{1}_B(s)$  und
- ii)  $P_s^\pi(X_{n+1} \in B \mid X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = P_s^\pi(X_{n+1} \in B \mid X_n) = Q(X_n, f(X_n), B)$

setzen. Dabei ist  $Q$  der Übergangskern des MDP. Für  $P_s^\pi$  und  $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{S}$  gilt dann nach dem Satz von Ionescu-Tulcea

$$\begin{aligned} & P_s^\pi(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) \\ &= \int \cdots \int \mathbb{1}_{B_1}(s_1) \cdots \mathbb{1}_{B_n}(s_n) Q(s_{n-1}, f_{n-1}(s_{n-1}), ds_n) \cdots Q(s, f_0(s), ds_1). \end{aligned}$$

Wir schreiben  $E_s^\pi$  für den Erwartungswert bzgl.  $P_s^\pi$ . Um den erwarteten Gesamtgewinn einer Politik definieren zu können, müssen wir die Existenz aller vorkommenden Erwartungswerte garantieren. Wir benötigen dazu die folgenden Annahmen.

**Annahme ( $A_N$ ).** Für  $n = 0, \dots, N$  gelte

$$\delta_n(s) := \sup_{\pi \in F^n} E_s^\pi \left( \sum_{k=0}^{n-1} r^+(X_k, f_k(X_k)) + V_0^+(X_n) \right) < \infty, \quad s \in S.$$

Unter der Annahme ( $A_N$ ) können wir den erwarteten Gesamtgewinn einer Politik und das Optimierungsproblem formulieren. Für  $n = 0, 1, \dots, N$  und eine Politik  $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  sei

$$V_{n\pi}(s) = E_s^\pi \left( \sum_{k=0}^{n-1} r(X_k, f_k(X_k)) + V_0(X_n) \right), \quad s \in S,$$

der *erwartete Gesamtgewinn über  $n$  Perioden bei Start in  $s$  und Verwendung von Politik  $\pi$* . Die *Wertfunktion  $V_n$*  ist definiert als

$$V_n(s) = \sup_{\pi \in F^n} V_{n\pi}(s), \quad s \in S.$$

$V_n(s)$  ist der *maximale erwartete Gesamtgewinn über  $n$  Perioden bei Start in  $s$* . Die Funktionen  $V_{n\pi}$  und  $V_n$  sind wohldefiniert, da

$$V_{n\pi}(s) \leq V_n(s) \leq \delta_n(s) < \infty, \quad s \in S.$$

Eine Politik  $\pi \in F^N$  heißt *optimal*, falls  $V_{N\pi}(s) = V_N(s)$  für alle  $s \in S$ . Wir geben nun eine Bedingung an, unter der Annahme ( $A_N$ ) gilt.



**Definition 1.2.4.** Eine messbare Funktion  $b: S \rightarrow [0, \infty)$  heißt **Schrankenfunktion** für ein MDP, falls es eine Konstante  $c > 0$  gibt, so dass

- a)  $r^+(s, a) \leq c \cdot b(s)$  für alle  $(s, a) \in D$ .
- b)  $V_0^+(s) \leq c \cdot b(s)$  für alle  $s \in S$ .
- c)  $\int b(s') Q(s, a, ds') \leq c \cdot b(s)$  für alle  $(s, a) \in D$ .

**Bemerkung 1.2.5.** Sind  $r$  und  $V_0$  beschränkt, so ist offensichtlich  $b \equiv 1$  eine Schrankenfunktion.

Falls ein MDP eine Schrankenfunktion  $b$  hat, so ist die Existenz von  $V_{n\pi}$  und  $V_n$  für alle  $n = 0, 1, \dots, N$  gesichert. Wir definieren für  $v \in M(S) := \{v: S \rightarrow [-\infty, \infty) : v \text{ ist messbar}\}$  die gewichtete Supremumsnorm

$$\|v\|_b := \sup_{s \in S} \frac{|v(s)|}{b(s)}$$

und

$$\mathbb{B}_b := \{v \in M(S) : \|v\|_b < \infty\}.$$

Dann gilt folgendes Resultat (siehe Bäuerle und Rieder, 2011, Prop. 2.4.2).

**Satz 1.2.6.** Besitzt ein MDP eine Schrankenfunktion  $b$ , so ist  $\delta_n \in \mathbb{B}_b$  für alle  $n = 0, 1, \dots, N$  und die Annahme  $(A_N)$  gilt.

Wir definieren nun folgende Operatoren, um die rekursive Natur des Problems anschaulich darstellen zu können.

**Definition 1.2.7.**

- a) Für  $v \in M(S)$  sei

$$(Lv)(s, a) := r(s, a) + \int v(s') Q(s, a, ds'), \quad (s, a) \in D,$$

falls das Integral existiert.

- b) Für  $v \in M(S)$  und  $f \in F$  sei

$$(U_f v)(s) := (Lv)(s, f(s)), \quad s \in S.$$

- c) Für  $v \in M(S)$  sei

$$(Uv)(s) := \sup_{a \in D(s)} (Lv)(s, a), \quad s \in S.$$

**Bemerkung 1.2.8.**

- a) Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir im Folgenden die Klammer bei den Operatoren weg und schreiben  $Uv(s)$  statt  $(Uv)(s)$ . Wenn wir eine Folge von Operatoren haben, schreiben wir  $UUv(s)$  anstelle von  $(U(Uv))(s)$ . Die gleiche Konvention gilt auch für die anderen Operatoren.
- b) Es gilt  $Uv(s) = \sup_{a \in D(s)} Lv(s, a) = \sup_{f \in F} U_f v(s)$ ,  $s \in S$ .
- c)  $U_f v \in M(S)$ , aber allgemein gilt  $Uv \notin M(S)$ , da das Supremum überabzählbar vieler messbarer Funktionen nicht messbar sein muss.

Der erwartete Gewinn unter Verwendung einer Politik  $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  kann rekursiv mit Hilfe der Operatoren  $U_f$  berechnet werden (siehe Bäuerle und Rieder, 2011, Theorem 2.3.4).

**Satz 1.2.9** (Gewinniteration). *Unter der Annahme  $(A_N)$  gilt:*

- a) Für  $f \in F$  gilt

$$V_{1f} = U_f V_0.$$

- b) Für  $n \geq 2$ ,  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}) \in F^{n-1}$  gilt

$$V_{n(f, \sigma)} = U_f V_{n-1, \sigma}.$$

- c) Für  $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  gilt

$$V_{N\pi} = U_{f_0} U_{f_1} \cdots U_{f_{N-1}} V_0.$$

Eine wichtige Rolle bei der Suche nach der optimalen Strategie spielen die Maximisatoren.

**Definition 1.2.10.** Sei  $v \in M(S)$ . Eine Entscheidungsregel  $f \in F$  heißt **Maximisor** von  $v$ , falls  $Uv = U_f v$ , d.h. für jedes  $s \in S$  ist  $f(s)$  Maximumstelle von  $a \mapsto Lv(s, a)$ .

Wir wollen Voraussetzungen dafür finden, dass man in Analogie zur Gewinniteration  $V_n$  mit Hilfe des Operators  $U$  berechnen kann. Wie aus Bemerkung 1.2.8 folgt, ist es jedoch möglich, dass  $V_n$  nicht messbar ist. Dies wäre aber die minimale Voraussetzung dafür, dass man  $V_n$  durch sukzessive Anwendung des Operator  $U$  erhält. Außerdem muss es keinen Maximisor von  $V_n$  geben. Bei explizit gegebenen Problemen sind diese Eigenschaften jedoch oft leicht nachzuweisen. Wir werden deshalb zunächst annehmen, dass eine solche Struktur existiert und später zwei Fälle diskutieren, in denen eine solche Struktur gegeben ist.

**Annahme ( $SA_N$ ).** Es gebe eine Menge  $M \subseteq M(S)$  von messbaren Funktionen  $v: S \rightarrow [-\infty, \infty)$  und eine Menge  $\Delta \subset F$  von Entscheidungsregeln, so dass:

- i)  $V_0 \in M$ .
- ii) Ist  $v \in M$ , so ist  $Uv \in M$ .
- iii) Für alle  $v \in M$  existiert ein Maximisator  $f \in \Delta$ .

Der nächste Satz (siehe Bäuerle und Rieder, 2011, Theorem 2.3.8) sagt aus, dass das  $N$ -stufige Optimierungsproblem durch Rückwärtsinduktion gelöst werden kann, indem  $N$  einstufige Optimierungsprobleme gelöst werden. Der Satz ist als Struktursatz bekannt. Die rekursiven Gleichungen  $V_n = UV_{n-1}$  heißen Bellman-Gleichungen.

**Satz 1.2.11** (Struktursatz). Es gelten  $(A_N)$  und  $(SA_N)$ . Dann gilt:

- a)  $V_n \in M$  und es gilt die Wertiteration, d.h.

$$V_n = UV_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{also}$$

$$V_n(s) = \sup_{a \in D(s)} \left\{ r(s, a) + \int V_{n-1}(s') Q(s, a, ds') \right\}, \quad s \in S.$$

- b)  $V_n = U^n V_0$ .
- c) Für  $n = 0, \dots, N-1$  existiert ein Maximisator  $f_{n+1}$  von  $V_n$  mit  $f_{n+1} \in \Delta$  und die Politik  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  ist optimal für den  $N$ -stufigen MDP.

**Bemerkung 1.2.12.** Die Nummerierung der Maximisatoren richtet sich nach den Wertfunktionen  $V_n$ .  $f_n$  ist als Maximisator von  $V_{n-1}$  die Lösung des  $n$ -ten Optimierungsproblems. Für den erwarteten Gewinn unter der optimalen Politik  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  gilt dann

$$V_N(s) = V_{N\pi^*}(s) = E_s^{\pi^*} \left( \sum_{k=0}^{N-1} r(X_k, f_{N-k}(X_k)) + V_0(X_N) \right), \quad s \in S.$$

Wir kommen nun zu zwei wichtigen Klassen von MDPs, für die der Struktursatz gilt. Zuerst betrachten wir stetige MDPs (siehe Bäuerle und Rieder, 2011, Theorem 2.4.10). Für die Definition der Stetigkeit von mengenwertigen Abbildungen siehe Definition A.2.1 in Bäuerle und Rieder (2011).

**Satz 1.2.13** (Stetige MDPs).

Gegeben sei ein MDP mit Schrankenfunktion  $b$  und es gelte:

- i)  $D(s)$  ist kompakt für alle  $s \in S$  und  $s \mapsto D(s)$  ist stetig.

ii)  $(s, a) \mapsto Lv(s, a)$  ist stetig für alle stetigen  $v \in \mathbb{B}_b$ .

iii)  $s \mapsto V_0(s)$  ist stetig.

Dann gelten  $(A_N)$  und  $(SA_N)$  mit  $M := \{v \in \mathbb{B}_b : v \text{ stetig}\}$  und  $\Delta := F$ . Ist der Maximisator von  $V_n$  eindeutig, so ist er stetig.

Wir nehmen nun an, dass  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  mit der üblichen Halbordnungrelation versehen sind. Für  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$  und  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)^T \in \mathbb{R}^d$  gelte also

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i \text{ für } i = 1, \dots, d.$$

Damit lässt sich der folgende Satz über monotone MDPs formulieren (siehe Bäuerle und Rieder, 2011, Theorem 2.4.14).

**Satz 1.2.14** (Monotone MDPs).

Gegeben sei ein MDP mit Schrankenfunktion  $b$  und es gelte:

i)  $s \mapsto D(s)$  ist monoton wachsend, d.h. für  $s \leq s'$  gilt  $D(s) \subseteq D(s')$ .

ii)  $(s, a) \mapsto Lv(s, a)$  ist monoton wachsend für alle monoton wachsenden Funktionen  $v$ .

iii)  $s \mapsto V_0(s)$  ist monoton wachsend.

iv) Für alle monoton wachsenden Funktionen  $v \in \mathbb{B}_b$  existiert ein Maximisator  $f \in F$ .

Dann gelten  $(A_N)$  und  $(SA_N)$  mit  $M := \{v \in \mathbb{B}_b : v \text{ monoton wachsend}\}$  und  $\Delta := F$ .

Es gibt noch weitere Struktursätze für konvexe und konkave MDPs, die wir aber in der Arbeit nicht benötigen. Da wir uns intensiv mit der Frage nach der Monotonie der Maximisatoren beschäftigen werden, geben wir einen Satz an, der diese garantiert. Dafür brauchen wir zunächst die folgenden Definitionen.

**Definition 1.2.15.** Eine Menge  $D \subseteq S \times A$  heißt **vollständig monoton**, falls für alle  $(s', a), (s, a') \in D$  mit  $s \leq s', a \leq a'$  gilt, dass auch  $(s, a) \in D$  und  $(s', a') \in D$ .

**Definition 1.2.16.** Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  sei

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &:= (\min\{x_1, y_1\}, \dots, \min\{x_d, y_d\}) \quad \text{und} \\ \mathbf{x} \vee \mathbf{y} &:= (\max\{x_1, y_1\}, \dots, \max\{x_d, y_d\}). \end{aligned}$$

Eine Funktion heißt **supermodular**, falls

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}), \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d.$$

**Bemerkung 1.2.17.** Eine Funktion ist supermodular g.d.w.  $(x_i, x_j) \mapsto f(\mathbf{x})$  supermodular ist für alle  $i \neq j$ . Deshalb ist  $f$  supermodular g.d.w.

$$\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta f(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i, j \in \{1, \dots, d\}, i \neq j, \varepsilon, \delta > 0,$$

wobei  $\Delta_i^\varepsilon f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \varepsilon e_i) - f(\mathbf{x})$ . Man beachte, dass für  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\Delta_1^\varepsilon \Delta_2^\delta f(\mathbf{x}) = f(x_1 + \varepsilon, x_2 + \delta) - f(x_1, x_2 + \delta) - f(x_1 + \varepsilon, x_2) + f(x_1, x_2).$$

Eine supermodulare Funktion hat also wachsende Differenzen.

Als hinreichende Bedingung für die Monotonie eines Maximisators stellt sich nun die Supermodularität von  $(s, a) \mapsto Lv(s, a)$  heraus (siehe Bäuerle und Rieder, 2011, Theorem 2.4.16).

**Satz 1.2.18.** Sei  $v \in \mathbb{B}_b$  und  $D^*(s) := \{a \in D(s) : Lv(s, a) = Uv(s)\}$ . Außerdem gelte:

- i)  $D$  ist vollständig monoton.
- ii)  $Lv$  ist supermodular auf  $D$ .
- iii) Es existiert ein größter Maximisator  $f^*$  von  $Lv$ , d.h. für alle  $s \in S$  gilt: Es gibt kein  $a \in D^*(s)$  mit  $a \geq f^*(s)$ ,  $a \neq f^*(s)$ .

Dann ist  $f^*$  monoton wachsend.

Die Bedeutung von Supermodularität für die Existenz von monotonen Maximisatoren wurde von Topkis (1978) erkannt. Allgemeine Bedingungen für die Existenz von monotonen Maximisatoren für MDPs mit einem Aktionenraum, der nur aus zwei Elementen besteht, geben Altman und Stidham (1995). In Heyman und Sobel (1984), Kapitel 8, finden sich einige Beispiele zu monotonen Maximisatoren.

## 1.3. MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion

Ausgehend von einem MDP  $(S, A, D, Q, r, V_0)$  betrachten wir nun nicht mehr den erwarteten Gewinn einer Strategie, sondern den erwarteten Nutzen unter einer exponentiellen Nutzenfunktion

$$u(s) = -\exp(-\alpha s), \alpha > 0.$$

Es ist also ein risikoaverser Entscheider mit Nutzenfunktion  $u$  gegeben, der eine optimale Politik sucht, um seinen Nutzen zu maximieren. Im Folgenden wollen wir Strukturaussagen für dieses Modell herleiten, die ähnlich zu denen des risikoneutralen Modells sind. Aufgrund der Beschränktheit von  $u$  brauchen wir in diesem Modell

keine nichttriviale Schrankenfunktion damit alle auftretenden Erwartungswerte definiert sind. Sei dazu für  $n = 0, \dots, N$

$$\delta_n^u(s) := \sup_{\pi} E_s^{\pi} u \left( \sum_{k=0}^{n-1} r(X_k, f_k(X_k)) + V_0(X_n) \right), \quad s \in S.$$

Aus der Jensen-Ungleichung folgt für alle  $s \in S$

$$\begin{aligned} \delta_n^u(s) &\leq \sup_{\pi} u \left( E_s^{\pi} \left( \sum_{k=0}^{n-1} r(X_k, f_k(X_k)) + V_0(X_n) \right) \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

und damit sind alle vorkommenden Erwartungswerte endlich.

Wir definieren den erwarteten Nutzen einer Politik. Für  $n = 0, \dots, N$  und eine Politik  $\pi = (f_0, \dots, f_{n-1})$  sei

$$V_{n\pi}^u(s) := E_s^{\pi} u \left( \sum_{k=0}^{n-1} r(X_k, f_k(X_k)) + V_0(X_n) \right), \quad s \in S.$$

$V_{n\pi}^u(s)$  ist der *erwartete Nutzen über  $n$  Perioden bei Start in  $s$  und Verwendung von Politik  $\pi$* . Die *Wertfunktion  $V_n^u$*  ist definiert als

$$V_n^u(s) = \sup_{\pi \in F^N} V_{n\pi}^u(s), \quad s \in S.$$

$V_{n\pi}^u$  und  $V_n^u$  sind wohldefiniert, weil  $V_{n\pi}^u(s) \leq V_n^u(s) \leq \delta_n^u(s) \leq 0$ ,  $s \in S$ . Eine Strategie  $\pi \in F^N$  heißt *optimal*, falls  $V_{N\pi}^u(s) = V_N^u(s)$  für alle  $s \in S$ .

**Bemerkung 1.3.1.** *Wir können auch einen allgemeinen nicht-stationären MDP betrachten (siehe Bemerkung 1.2.2). Die nachfolgenden Resultate können leicht verallgemeinert werden.*

Auch in diesem Modell kann man eine Gewinniteration und Wertiteration zeigen. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir die folgenden Operatoren. Siehe Bemerkung 1.2.8 bzgl. der Schreibweise der Operatoren.

**Definition 1.3.2.**

a) Für  $v \in M(S)$  sei

$$L^u v(s, a) = -u(r(s, a)) \cdot \int v(s') Q(s, a, ds'), \quad (s, a) \in D,$$

*falls das Integral existiert.*

b) Für  $v \in M(S)$  und  $f \in F$  sei

$$U_f^u v(s) = L^u v(s, f(s)), \quad s \in S.$$

c) Für  $v \in M(S)$  sei

$$U^u v(s) = \sup_{a \in D(s)} L^u v(s, a), \quad s \in S.$$

Die Operatoren  $U_f$  können zur rekursiven Berechnung des erwarteten Nutzens einer Politik verwendet werden.

**Satz 1.3.3** (Gewinniteration).

a) Für  $f \in F$  gilt

$$V_{1f}^u = U_f^u V_0^u.$$

b) Für  $n \geq 2$ ,  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}) \in F^{n-1}$  gilt

$$V_{n(f,\sigma)}^u = U_f^u V_{n-1,\sigma}^u.$$

c) Für  $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  gilt

$$V_{N\pi}^u = U_{f_0}^u U_{f_1}^u \cdots U_{f_{N-1}}^u V_0^u.$$

*Beweis.*

a) Sei  $s \in S$ . Wegen  $V_0^u(s) = u(V_0(s))$  gilt

$$\begin{aligned} V_{1f}^u(s) &= E_s^\pi u(r(s, f(s)) + V_0(X_1)) \\ &= -u(r(s, f(s))) \cdot \int u(V_0(s_1)) Q(s, f(s), ds_1) \\ &= U_f^u V_0^u(s). \end{aligned}$$

b) Für  $n \geq 2$  sei nun  $\pi = (f, \sigma_0, \dots, \sigma_{n-2}) \in F^n$ . Dann gilt für  $s \in S$

$$\begin{aligned} V_{n\pi}^u(s) &= E_s^\pi u \left( r(s, f(s)) + \sum_{k=1}^{n-1} r(X_k, \sigma_{k-1}(X_k)) + V_0(X_n) \right) \\ &= -u(r(s, f(s))) \cdot E_s^\pi E_s^\pi \left[ u \left( \sum_{k=1}^{n-1} r(X_k, \sigma_{k-1}(X_k)) + V_0(X_n) \right) \mid X_1 \right] \\ &= -u(r(s, f(s))) \cdot \int E_{s_1}^\sigma u \left( \sum_{k=0}^{n-2} r(X_k, \sigma_k(X_k)) + V_0(X_{n-1}) \right) Q(s, f(s), ds_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -u(r(s, f(s))) \cdot \int V_{n-1, \sigma}^u(s_1) Q(s, f(s), ds_1) \\
 &= U_f^u V_{n-1, \sigma}^u(s).
 \end{aligned}$$

c) Die Behauptung folgt aus b) mittels Induktion. □

Wie im riskoneutralen Modell sind die Maximisatoren wesentlich für die Bestimmung einer optimalen Strategie.

**Definition 1.3.4.** Sei  $v \in M(S)$ . Eine Entscheidungsregel  $f \in F$  heißt **Maximisor** von  $v$  bzgl.  $u$ , falls  $U^u v = U_f^u v$ , d.h. für jedes  $s \in S$  ist  $f(s)$  Maximumstelle von  $a \mapsto L^u v(s, a)$ .

Um die Wertiteration zeigen zu können, müssen wir wieder eine gewisse Struktur voraussetzen. Damit wird sichergestellt, dass die sukzessive Anwendung von  $U^u$  möglich ist und eine optimale Politik existiert.

**Annahme  $(SA_N^u)$ .**

Es gebe eine Menge  $M \subset M(S)$  von messbaren Funktionen  $v: S \rightarrow [-\infty, \infty)$  und eine Menge  $\Delta \subset F$  von Entscheidungsregeln, so dass:

- i)  $V_0^u = u(V_0) \in M$ .
- ii) Ist  $v \in M$ , so ist  $U^u v \in M$ .
- iii) Für alle  $v \in M$  existiert ein Maximisor  $f \in \Delta$ .

Falls die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  erfüllt ist, gilt auch die Wertiteration. Der optimale erwartete Nutzen kann in diesem Fall rekursiv durch Anwendung des Operators  $U^u$  berechnet werden.

**Satz 1.3.5. (Struktursatz)**

Es gelte  $(SA_N^u)$ . Dann gilt:

- a)  $V_n^u \in M$  und es gilt die Wertiteration, d.h.

$$\begin{aligned}
 &V_n^u = U^u V_{n-1}^u, \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{also} \\
 &V_n^u(s) = \sup_{a \in D(s)} \left\{ -u(r(s, a)) \cdot \int V_{n-1}^u(s') Q(s, a, ds') \right\}, \quad s \in S.
 \end{aligned}$$

- b)  $V_n^u = (U^u)^n V_0^u$ .
- c) Für  $n = 0, \dots, N - 1$  existiert ein Maximisor  $f_{n+1}$  von  $V_n^u$  mit  $f_{n+1} \in \Delta$  und die Strategie  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  ist optimal für den  $N$ -stufigen MDP.



*Beweis.* Der Beweis ist analog zum Beweis der Wertiteration im risikoneutralen Fall. Man ersetzt einfach die Operatoren  $U_f$  und  $U$  durch  $U_f^u$  und  $U^u$  und benutzt die Gewinniteration.  $\square$

Für die beiden folgenden Klassen von MDPs gilt, wie im risikoneutralen Fall, die Wertiteration und es existiert eine optimale Strategie.

**Satz 1.3.6** (Stetige MDPs).

Gegeben sei ein MDP und es gelte:

- i)  $D(s)$  ist kompakt für alle  $s \in S$  und  $s \mapsto D(s)$  ist stetig.
- ii)  $(s, a) \mapsto L^u v(s, a)$  ist stetig für alle stetigen und beschränkten Funktionen  $v \in M(S)$ .
- iii)  $s \mapsto V_0^u(s)$  ist stetig.

Dann gilt  $(SA_N^u)$  mit  $M := \{v \in M(S) : v \text{ stetig und beschränkt}\}$  und  $\Delta := F$ . Ist der Maximisator von  $V_n^u$  eindeutig, so ist er stetig.

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zum Beweis des entsprechenden Resultats für den risikoneutralen Fall (Satz 1.2.13)  $\square$

Sei wieder  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  mit der üblichen Halbordnungsrelation durch komponentenweisen Vergleich versehen (siehe Voraussetzungen von Satz 1.2.14). Dann kann man folgenden Satz über Monotone MDPs formulieren.

**Satz 1.3.7** (Monotone MDPs).

Gegeben sei ein MDP und es gelte:

- i)  $s \mapsto D(s)$  ist monoton wachsend, d.h. für  $s \leq s'$  gilt  $D(s) \subseteq D(s')$ .
- ii)  $(s, a) \mapsto L^u v(s, a)$  ist monoton wachsend für alle monoton wachsenden Funktionen  $v \in M(S)$ .
- iii)  $s \mapsto V_0^u(s)$  ist monoton wachsend.
- iv) Für alle monoton wachsenden und beschränkten Funktionen  $v \in M(S)$  existiert ein Maximisator  $f \in F$ .

Dann gilt  $(SA_N^u)$  mit  $M := \{v \in M(S) : v \text{ monoton wachsend und beschränkt}\}$  und  $\Delta := F$ .

*Beweis.* Der Beweis ist analog zum Beweis des entsprechenden Resultats für den risikoneutralen Fall (Satz 1.2.14).  $\square$

## 1.4. Allgemeine Politiken

Man könnte annehmen, dass sich der maximale erwartete Gewinn vergrößert, wenn die Entscheidungen nicht nur auf Grundlage des aktuellen Zustands getroffen werden, sondern von der kompletten Historie aus Zuständen und getroffenen Entscheidungen abhängig sein können. Wir wollen diesen Fall genauer untersuchen und zudem auch Randomisieren zulassen. Dabei sind die Entscheidungen Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Aktionenraum. In den beiden betrachteten Modellen kann man aber den maximalen erwarteten Gesamtgewinn bzw. den maximalen erwarteten Nutzen des Gesamtgewinns in den meisten Fällen dadurch nicht verbessern. Der wesentliche Grund hierfür ist, dass der Übergangskern  $Q$  zum Zeitpunkt  $n$  nur vom Zustand  $s_n$  und der Aktion  $a_n$  abhängig ist, und nicht von der gesamten Historie.

Zunächst führen wir einen verallgemeinerten Begriff der Politik ein. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} H_0 &:= S \quad \text{und} \\ H_n &:= H_{n-1} \times A \times S. \end{aligned}$$

Ein Element  $h_n = (s_0, a_0, \dots, s_{n-1}, a_{n-1}, s_n) \in H_n$  beinhaltet also die Vergangenheit bis zum Zeitpunkt  $n$ .

**Definition 1.4.1** (Politik).

a) Ein stochastischer Kern  $\mu_k$  von  $H_k$  nach  $A$  mit der Eigenschaft

$$\mu_k(h_k, D(s_k)) = 1, \quad h_k \in H_k,$$

heißt **Entscheidungsregel** zum Zeitpunkt  $k$ . Falls  $\mu_k$  nur von  $s_k$  abhängt, heißt  $\mu_k$  **Markovsche Entscheidungsregel**.  $F_r$  sei die Menge aller Markovschen Entscheidungsregeln.

b) Eine Folge  $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$  heißt  **$N$ -stufige Politik (Strategie)**, falls  $\mu_k$  für jedes  $k$  eine Entscheidungsregel zum Zeitpunkt  $k$  ist.  $\pi$  ist eine **Markov-Politik**, falls alle  $\mu_k$  Markovsche Entscheidungsregeln sind. Dies ist gleichbedeutend mit  $\pi \in F_r^N$ .

$\pi$  ist **deterministisch**, falls  $\mu_k(h_k, da') = \delta_{a(h_k)}(da')$ ,  $h_k \in H_k$ , für alle  $k$  ein Einpunktmaß auf einem Punkt  $a(h_k) \in D(s_k)$  ist.  $\Pi$  sei die Menge aller Politiken.

Falls  $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$  eine deterministische Markov-Politik ist, dann gilt  $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$  für geeignete Entscheidungsregeln  $f_k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Die Definition erweitert also die ursprüngliche Definition einer Politik. Durch die Verwendung von allgemeineren Politiken muss auch das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_s^\pi$  angepasst werden. Nach dem Satz von Ionescu-Tulcea gibt es ein eindeutiges

Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^\pi$  auf  $H_N$ , so dass für eine messbare Funktion  $h: H_N \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int |h| dP_s^\pi < \infty$

$$\int h dP_s^\pi = \int_{S_0} \int_{A_0} \int_{S_1} \cdots \int_{A_{N-1}} \int_{S_N} h(s_0, a_0, s_1, \dots, a_{N-1}, s_N) \cdot Q(s_{N-1}, a_{N-1}, ds_N) \cdot \mu_{N-1}(h_{N-1}, da_{N-1}) \cdot \mu_0(s_0, da_0) \cdot \delta_s(ds_0)$$

gilt. Dabei sind  $S_k, A_k$  jeweils Kopien von  $S$  und  $A$ .

### 1.4.1. Klassische MDPs

Wir wollen zuerst klassische MDPs betrachten. Der erwartete Gewinn unter der Strategie  $\pi \in \Pi$  bei Start in  $s$  ist in diesem Fall gegeben durch

$$V_{N\pi}(s) = \int \left( \sum_{k=0}^{N-1} r(s_k, a_k) + V_0(s_N) \right) dP_s^\pi.$$

Die Wertfunktion wird entsprechend definiert als

$$V_N(s) = \sup_{\pi \in \Pi} V_{N\pi}(s), \quad s \in S.$$

Es ist bekannt, dass es unter den Annahmen  $(A_N)$  und  $(SA_N)$  eine optimale deterministische Markov-Politik  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1) \in F^N$  gibt, so dass

$$V_N(s) = V_{N\pi^*}(s), \quad s \in S. \tag{1.2}$$

Für einen Beweis siehe Bertsekas und Shreve (1978), Prop. 8.5, oder Hinderer (1970), Theorem 18.4. Das Resultat findet sich auch in Puterman (1994), Theorem 4.4.2. Dort werden aber nur abzählbare Zustandsräume betrachtet. Wir fassen die Aussage in folgendem Satz zusammen.

**Satz 1.4.2.** *Falls  $(A_N)$  und  $(SA_N)$  gelten, dann gilt:*

$$V_N(s) = \sup_{\pi \in F^N} V_{N\pi}(s), \quad s \in S.$$

Damit wurde für dieses Modell schon gezeigt, dass es unter der Strukturannahme  $(SA_N)$  genügt, deterministische Markovsche Entscheidungsregeln zu betrachten, da sich in diesem Fall die Wertfunktion nicht ändert, wenn man allgemeinere Politiken zulässt.

### 1.4.2. MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion

Auch bei risikosensitiven MDPs mit exponentieller Nutzenfunktion stellt sich die Frage, ob sich der Wert der Zielfunktion vergrößert, wenn man allgemeinere Politiken betrachtet. D.h. Entscheidungen dürfen von der Vergangenheit abhängen und es darf randomisiert werden. Wie zuvor wird sich herausstellen, dass dem nicht so ist, falls die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  gilt. In diesem Fall genügt es deterministische Markovsche Entscheidungsregeln zu verwenden.

Zunächst definieren wir den erwarteten Nutzen ab einem Zeitpunkt  $n$  bei Vorliegen der Historie  $h_n \in H_n$  unter Anwendung von Politik  $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$  als

$$\begin{aligned} V_{N-n,\pi}^u(h_n) &:= \int_{A_n} \int_{S_{n+1}} \cdots \int_{A_{N-1}} \int_{S_N} u \left( \sum_{k=n}^{N-1} r(s_k, a_k) + V_0(s_N) \right) \\ &\quad \cdot Q(s_{n-1}, a_{n-1}, ds_N) \cdot \mu_{N-1}(h_{N-1}, da_{N-1}) \\ &\quad \cdots Q(s_n, a_n, ds_{n+1}) \cdot \mu_n(h_n, da_n). \end{aligned}$$

Falls  $\pi$  eine Markov-Politik ist, also  $\pi \in F_r^N$ , hängt  $V_{N-n}^u$  von  $h_n$  nur über  $s_n$  ab. In diesem Fall schreiben wir  $V_{N-n,\pi}^u(s_n)$ . Bei der Definition ist noch zu beachten, dass die erste benutzte Entscheidungsregel die  $n$ -te Entscheidungsregel der Politik  $\pi$  ist. Man betrachtet also nur die Entscheidungsregeln  $(\mu_n, \dots, \mu_{N-1})$ . Dies ist anders als in den vorherigen Abschnitten, in denen nur Markovsche Entscheidungsregeln benutzt wurden.

Da die Gewinne multiplikativ sind, können wir  $V_{N-n,\pi}^u$  rekursiv berechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} V_{N-n,\pi}^u(h_n) &= \int_{A_n} -u(r(s_n, a_n)) \cdot \int_{S_{n+1}} V_{N-n-1,\pi}^u(h_n, a_n, s_{n+1}) \\ &\quad \cdot Q(s_n, a_n, ds_{n+1}) \mu_n(h_n, da_n). \end{aligned}$$

Analog zum risikoneutralen Modell mit allgemeinen Politiken definieren wir die Wertfunktion durch

$$V_N^u(s) = \sup_{\pi \in \Pi} V_{N\pi}^u(s), \quad s \in S.$$

Im Folgenden sei nun die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  erfüllt. Wir haben in Satz 1.3.5 gezeigt, dass es unter den deterministischen Markov-Strategien eine Strategie  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  gibt, so dass

$$V_{N\pi^*}^u(s) = \sup_{\pi \in F^N} V_{N\pi}^u(s), \quad s \in S.$$

Wir wollen nun zeigen, dass für die gleiche Strategie  $\pi^*$  auch

$$V_{N\pi^*}^u(s) = \sup_{\pi \in \Pi} V_{N\pi}^u(s) = V_N^u(s), \quad s \in S,$$

gilt. Die deterministische Markov-Strategie  $\pi^*$  ist also auch unter allen Politiken aus  $\Pi$  optimal.

**Satz 1.4.3.** *Falls die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  erfüllt ist, gilt*

$$V_N^u(s) = \sup_{\pi \in F^N} V_{N\pi}^u(s), \quad s \in S.$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass es eine deterministische Strategie  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  gibt mit

$$V_{N\pi^*}^u(s) = \sup_{\pi \in \Pi} V_{N\pi}^u(s), \quad s \in S.$$

Für eine beliebige Strategie  $\pi \in \Pi$  zeigen wir dazu per Induktion für alle  $n = N - 1, \dots, 0$ , dass

$$V_{N-n,\pi}^u(h_n) \leq V_{N-n,\pi^*}^u(s_n)$$

für alle  $h_n = (h_{n-1}, a_{n-1}, s_n) \in H_n$  gilt. Für  $n = N - 1$  gilt

$$\begin{aligned} V_{1\pi}^u(h_{N-1}) &= \int_{A_{N-1}} -u(r(s_{N-1}, a_{N-1})) \cdot \int_{S_N} V_0^u(s_N) \\ &\quad \cdot Q(s_{N-1}, a_{N-1}, ds_N) \mu_{N-1}(h_{N-1}, da_{N-1}) \\ &\leq \sup_{a_{N-1} \in A_{N-1}} \left\{ -u(r(s_{N-1}, a_{N-1})) \cdot \int_{S_N} V_0^u(s_N) Q(s_{N-1}, a_{N-1}, ds_N) \right\} \\ &= U^u V_0^u(s_{N-1}) = V_{1\pi^*}^u(s_{N-1}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus Satz 1.3.5 folgt.

Die Behauptung gelte nun für  $n$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{N-n+1,\pi}^u(h_{n-1}) &= \int_{A_{n-1}} -u(r(s_{n-1}, a_{n-1})) \cdot \int_{S_n} V_{N-n,\pi}^u(h_{n-1}, a_{n-1}, s_n) \\ &\quad \cdot Q(s_{n-1}, a_{n-1}, ds_n) \mu_{n-1}(h_{n-1}, da_{n-1}) \\ &\leq \int_{A_{n-1}} -u(r(s_{n-1}, a_{n-1})) \cdot \int_{S_n} V_{N-n,\pi^*}^u(s_n) \\ &\quad \cdot Q(s_{n-1}, a_{n-1}, ds_n) \mu_{n-1}(h_{n-1}, da_{n-1}) \\ &\leq \sup_{a_{n-1} \in A_{n-1}} \left\{ -u(r(s_{n-1}, a_{n-1})) \cdot \int_{S_n} V_{N-n,\pi^*}^u(s_n) Q(s_{n-1}, a_{n-1}, ds_n) \right\} \\ &= U^u V_{N-n,\pi^*}^u(s_{n-1}) = V_{N-n+1,\pi^*}^u(s_{n-1}). \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für  $n - 1$  und damit für alle  $n \in \{0, \dots, N - 1\}$ . Daraus folgt insbesondere

$$V_{N\pi}^u(h_0) = V_{N\pi}^u(s) \leq V_{N\pi^*}^u(s)$$

für alle  $h_0 = s \in S$ . Da  $\pi$  beliebig war, ergibt sich

$$V_N^u(s) = \sup_{\pi \in \Pi} V_{N\pi}^u(s) \leq V_{N\pi^*}^u(s)$$

und wegen  $F^N \subseteq \Pi$  folgt

$$V_N^u(s) = V_{N\pi^*}^u(s) = \sup_{\pi \in F^N} V_{N\pi}^u(s)$$

für alle  $s \in S$ . □

Falls die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  erfüllt ist, genügt es also deterministische Markovsche Politiken zu betrachten. Die Wertfunktion ändert sich in diesem Fall nicht, wenn man allgemeinere Entscheidungsregeln zulässt.

# Kapitel 2.

## Modell

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem. Gegeben ist eine Folge von Angeboten  $X_0, \dots, X_N$  modelliert durch eine homogene Markovkette  $(X_n)$  auf  $\mathbb{R}^+$ . Einem Entscheider steht eine gewisse Kapazität  $k \in [0, N + 1]$  zur Verfügung, die bis zum Zeitpunkt  $N$  verbraucht werden muss. Sofern die Beschränkung durch die Kapazität  $k$  eingehalten wird, kann zu jedem Zeitpunkt  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$  eine beliebige Menge  $a \in [0, 1]$  eingesetzt werden. Wenn der Entscheider zu einem Zeitpunkt die Menge  $a$  einsetzt, erzielt er dadurch einen Gewinn und dieser entspricht der Höhe des aktuellen Angebotes multipliziert mit der gewählten Menge, also  $a \cdot X_n$ . Zum nächsten Entscheidungszeitpunkt reduziert sich die zur Verfügung stehende Kapazität um  $a$ .

Das Ziel ist es nun, die Kapazität optimal aufzuteilen. Dabei betrachten wir zwei Entscheidungskriterien. Für einen risikoneutralen Entscheider soll der erwartete Gesamtgewinn maximiert werden und für einen risikosensitiven Entscheider der erwartete Nutzen des Gesamtgewinns unter einer exponentiellen Nutzenfunktion. Wir formulieren zunächst das Entscheidungsproblem als MDP.

### 2.1. Formulierung als MDP

Sei  $(X_n)$  eine homogene Markovkette auf  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  mit Übergangskern  $P$ . Für  $K = [0, N + 1]$  kann das obige Modell als folgender MDP mit Planungshorizont  $N$  formuliert werden:

1. Zustandsraum:  $\mathbf{S} = \mathbb{R}^+ \times K$  versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(K)$ .
2. Aktionenraum:  $A = [0, 1]$  mit  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ .
3. Menge der zulässigen Aktionen:  $D \subseteq \mathbf{S} \times A$  mit  $D(\mathbf{s}) = [0, \min\{k, 1\}]$  für alle  $\mathbf{s} = (s, k) \in \mathbf{S}$ . Also ist  $D$  eine messbare Teilmenge von  $\mathbf{S} \times A$  bzgl.  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{A}$ .
4. Einstufengewinnfunktion:  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $r(s, k, a) = a \cdot s$ .
5. Terminale Gewinnfunktion:  $V_0: \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $V_0(s, k) = \min\{k, 1\} \cdot s$ .

6. Übergangskern: Für  $(\mathbf{s}, a) \in D$  mit  $\mathbf{s} = (s, k) \in \mathbf{S}$  sei

$$Q(\mathbf{s}, a, d\mathbf{s}') = P(s, ds') \otimes \delta_{\{k-a\}}(dk'), \quad \mathbf{s}' = (s', k').$$

Dadurch ist ein Übergangskern  $Q: D \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$  von  $D$  nach  $\mathbf{S}$  definiert.

**Bemerkung 2.1.1.**

i) Sei  $M(\mathbf{S}) = \{v: [0, \infty) \times K \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ ist messbar}\}$ . Dann folgt aus der Definition des Übergangskernes  $Q$

$$\int v(\mathbf{s}') Q(\mathbf{s}, a, d\mathbf{s}') = \int v(s', k-a) P(s, ds') \quad \text{für } (\mathbf{s}, a) = (s, k, a) \in D,$$

falls die Integrale existieren.

ii) Es gilt  $D(s, k) = D(s', k)$  für alle  $s, s' \geq 0$  und  $k \in K$ . Die Menge der zulässigen Aktionen ist unabhängig vom aktuellen Angebot.

Die weitere Betrachtung des Modells ist nur sinnvoll, falls die Annahme  $(A_N)$  erfüllt ist. Wir geben eine Bedingung an die Markovkette  $(X_n)$  an, die garantiert, dass es eine Schrankenfunktion  $b$  gibt, und somit  $(A_N)$  erfüllt ist. Die Schrankenfunktion stellt die Existenz von  $V_{n\pi}$  und  $V_n$  sicher (siehe Satz 1.2.6).

**Lemma 2.1.2.** Falls  $E[X_1 | X_0 = s] \leq d + ps$  für  $d, p \geq 0$ , dann ist  $b(s, k) = 1 + s$ ,  $(s, k) \in \mathbf{S}$ , eine Schrankenfunktion für das MDP.

*Beweis.* Offensichtlich findet man Konstanten  $c_1, c_2$  und  $c_3$ , so dass

$$\begin{aligned} r(s, k, a) &= a \cdot s \leq c_1 \cdot b(s, k) \quad \text{für alle } (s, k, a) \in D. \\ V_0(s, k) &= \min\{k, 1\} \cdot s \leq c_2 \cdot b(s, k) \quad \text{für alle } (s, k) \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int b(\mathbf{s}') Q(\mathbf{s}, a, d\mathbf{s}') &= \int b(s', k-a) P(s, ds') \\ &= \int (1 + s') P(s, ds') \\ &= 1 + E[X_1 | X_0 = s] \\ &\leq 1 + d + ps \\ &\leq c_3 \cdot b(s, k) \quad \text{für alle } (s, k, a) \in D. \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit  $c = \max\{c_1, c_2, c_3\}$ . □

Seien  $(Y_n)$  u.i.v. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wir betrachten im Folgenden immer homogene Markovketten mit

$$X_n = T(X_{n-1}, Y_{N-n}),$$



wobei  $T: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine messbare Funktion und  $X_0$  unabhängig von  $(Y_n)$  ist.  $T$  bezeichnen wir als *Übergangsfunktion*. Der nachfolgende allgemeine Satz sagt insbesondere aus, dass sich jede Markovkette in dieser Form darstellen lässt.

**Satz 2.1.3.** *Es sei ein Messraum  $(S, \mathcal{B}(S))$  mit  $S \subseteq \mathbb{R}$  gegeben. Dann gilt:*

- a) *Seien  $(Y_n)$  u.i.v. Zufallsvariablen und  $f: S \times \mathbb{R} \rightarrow S$  eine beliebige messbare Funktion. Dann ist die rekursiv definierte Folge  $(X_n)$  mit  $X_0$  unabhängig von  $(Y_n)$  und  $X_{n+1} = f(X_n, Y_n)$  eine homogene Markovkette.*
- b) *Zu jedem Übergangskern  $P$  gibt es u.i.v.  $(0, 1)$ -gleichverteilte Zufallsvariablen  $(Y_n)$  und eine Funktion  $f: S \times (0, 1) \rightarrow S$ , so dass die Folge  $(X_n)$  mit  $X_0$  unabhängig von  $(Y_n)$  und  $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$  eine homogene Markovkette mit Übergangskern  $P$  ist.*
- c) *Falls  $P$  ein stochastisch monotoner Übergangskern ist, dann gibt es eine Funktion  $f: S \times (0, 1) \rightarrow S$  mit den Eigenschaften aus b), so dass*

$$s \mapsto f(s, y), \quad y \in (0, 1),$$

*monoton wachsend ist.*

*Beweis.*

- a) Aus der Definition der Folge  $(X_n)$  folgt, dass es für jedes  $i \in \mathbb{N}$  eine messbare Funktion  $g_i$  gibt, so dass  $X_i = g_i(X_0, Y_1, \dots, Y_i)$ . Aus den Voraussetzungen ergibt sich demnach, dass  $X_i$  unabhängig von  $Y_{n+1}$  für  $i = 1, \dots, n$  ist. Für alle  $B \in \mathcal{B}(S)$  und  $s_0, s_1, \dots, s_n \in S$  gilt daher

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} \in B \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0) \\ &= P(f(X_n, Y_{n+1}) \in B \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0) \\ &= P(f(s_n, Y_{n+1}) \in B) \\ &= P(X_{n+1} \in B \mid X_n = s_n). \end{aligned}$$

Also ist  $(X_n)$  eine homogene Markovkette, da  $(Y_n)$  identisch verteilt ist.

- b) Für  $s \in S$  sei  $F_s(y) = P(s, (-\infty, y])$  und

$$F_s^{-1}(t) = \inf\{y \in S : F_s(y) \geq t\}, \quad t \in (0, 1),$$

die verallgemeinerte Inverse von  $F_s$ .  $U$  sei eine auf  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariable. Dann ist  $F_s^{-1}(U)$  verteilt nach  $P(s, ds')$ . Wir setzen nun  $X_{n+1} = F_{X_n}^{-1}(Y_{n+1}) =: f(X_n, Y_{n+1})$ . Dann ist  $(X_n)$  nach a) eine homogene Markovkette mit Übergangskern  $P$ .

- c) Sei  $F_s^{-1}$  so definiert wie im Beweis von b). Falls  $P$  stochastisch monoton ist, dann gilt für  $s_1 \leq s_2$  (siehe z.B. Müller und Stoyan, 2002)

$$F_{s_1}^{-1}(t) \leq F_{s_2}^{-1}(t)$$

für alle  $t \in (0, 1)$ . Falls man also  $f$  wieder so definiert wie im Beweis von b), folgt die Behauptung.

□

## 2.2. Wertfunktion im risikoneutralen Fall

Wir bezeichnen den im ersten Abschnitt definierten MDP als *risikoneutrales Entscheidungsmodell*. Wenn wir das Modell untersuchen, setzen wir im Folgenden immer voraus, dass  $(A_N)$  und  $(SA_N)$  erfüllt sind und damit nach Satz 1.2.11 die Wertiteration gilt und es eine optimale Strategie gibt.

**Annahme.** *Wenn das risikoneutrale Modell betrachtet wird, nehmen wir an, dass  $(A_N)$  und  $(SA_N)$  gelten.*

Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Annahme und beschreibt die Struktur der Wertfunktion.

**Satz 2.2.1.** *Für das risikoneutrale Entscheidungsmodell mit Schrankenfunktion  $b$  und Übergangsfunktion  $T$  mit  $s \mapsto T(s, y)$  stetig, gilt:*

- a) *Die Wertfunktionen  $V_n$  können rekursiv berechnet werden über die Bellmann-Gleichungen*

$$V_n = UV_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad d.h.$$

$$V_n(s, k) = \sup_{a \in D(s, k)} \{s \cdot a + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - a)\}, \quad (s, k) \in \mathbf{S}.$$

- b)  $V_n = U^n V_0$ .
- c) *Für  $n = 0, \dots, N - 1$  existiert ein Maximisator  $f_{n+1}$  von  $V_n$  mit  $f_n \in \Delta$  und die Politik  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  ist optimal für den  $N$ -stufigen MDP.*
- d)  $V_n$  ist stetig für alle  $n = 0, \dots, N$ .
- e)  $V_n$  ist monoton für alle  $n = 0, \dots, N$ , falls  $s \mapsto T(s, y)$  monoton ist.
- f)  $s \mapsto V_n(s, k)$  ist konvex für alle  $n = 0, \dots, N$ , falls  $s \mapsto T(s, y)$  konvex ist.
- g)  $k \mapsto V_n(s, k)$  ist konkav für alle  $n = 0, \dots, N$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Strukturannahme ( $SA_N$ ) für  $M := \{v \in \mathbb{B}_b : v \text{ stetig}\}$  und  $\Delta = F$  erfüllt ist. Dazu überprüfen wir die Voraussetzung des Struktursatzes für stetige MDPs (Satz 1.2.13).  $D(\mathbf{s})$  ist kompakt für alle  $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$  und  $\mathbf{s} \mapsto D(\mathbf{s})$  ist stetig. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt für eine stetige Funktion  $v \in \mathbb{B}_b$ , dass

$$(s, k, a) \mapsto Lv(s, k, a) = s \cdot a + Ev(T(s, Y), k - a)$$

stetig auf  $D$  ist, da  $s \mapsto T(s, y)$  und  $v \in \mathbb{B}_b$  stetig sind. Außerdem ist  $\mathbf{s} \mapsto V_0(\mathbf{s})$  stetig und damit sind alle Voraussetzungen des Satzes 1.2.13 erfüllt. Aus Satz 1.2.11 folgen daher die Aussagen in a), b), c) und d).

Für Teil e) zeigt man analog, dass dort die Strukturannahme ( $SA_N$ ) für  $M := \{v \in \mathbb{B}_b : v \text{ monoton wachsend und stetig}\}$  erfüllt ist. Dazu benutzt man den Satz über monotone MDPs (Satz 1.2.14) und rechnet die Voraussetzungen nach. Die Existenz eines Maximisators ergibt sich dabei aus Teil d).

Für Teil f) betrachten wir für  $v \in \mathbb{B}_b$

$$s \mapsto Lv(s, k, a) = s \cdot a + Ev(T(s, Y), k - a).$$

Diese Abbildung ist konvex, falls  $s \mapsto v(s, k)$  und  $s \mapsto T(s, y)$  konvex sind. Wir wollen zeigen, dass die Strukturannahme ( $SA_N$ ) für die Mengen  $M := \{v \in \mathbb{B}_b : v \text{ stetig und konvex in } s\}$  erfüllt ist. Da  $s \mapsto V_0(s, k)$  konvex ist, bleibt zu zeigen, dass  $s \mapsto Uv(s, k)$  konvex ist. Weil das Supremum beliebig vieler konvexer Funktionen konvex ist, gilt für alle  $0 < \alpha < 1$  und  $s, s' \in S$

$$\begin{aligned} Uv(\alpha s + (1 - \alpha)s', k) &= \sup_{a \in D(\alpha s + (1 - \alpha)s', k)} Lv(\alpha s + (1 - \alpha)s', k, a) \\ &\leq \alpha \cdot \sup_{a \in D(s, k)} Lv(s, k, a) + (1 - \alpha) \cdot \sup_{a \in D(s', k)} Lv(s', k, a) \\ &= \alpha \cdot Uv(s) + (1 - \alpha) \cdot Uv(s'), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung gilt, da  $s \mapsto Lv(s, k, a)$  konvex ist und  $D(s, k)$  für alle  $s \in S$  nur von  $k$  abhängt.

Für Teil g) zeigen wir, dass die Strukturannahme für  $M := \{v \in \mathbb{B}_b : k \mapsto v(s, k) \text{ konkav}\}$  erfüllt ist. Da

$$(k, a) \mapsto Lv(s, k, a) = s \cdot a + Ev(T(s, Y), k - a)$$

konkav ist, falls  $k \mapsto v(s, k)$  für alle  $s \in S$  eine konkave Funktion ist, folgt aus Bäuerle und Rieder (2011), Prop. 2.4.18, angewandt auf den Zustandsraum  $\{s\} \times K$ , dass auch

$$k \mapsto Uv(s, k)$$

konkav ist. Da außerdem  $k \mapsto V_0(s, k) = \min\{k, 1\} \cdot s$  konkav ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Der nächste Satz sagt aus, dass bei u.i.v. Angeboten  $n \mapsto V_n(s, k)$  monoton wachsend ist.

**Satz 2.2.2.** *Falls  $(X_n)$  u.i.v. ist, gilt für alle  $n = 1, 2, \dots, N$*

$$EV_n(X, k) \geq EV_{n-1}(X, k), \quad k \in K.$$

*Beweis.* Sei  $\pi = (f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_1) \in F^{n-1}$  die optimale Politik im  $(n-1)$ -stufigen MDP und  $\sigma = (0, \pi)$ . Dann gilt für alle  $s \in S$

$$V_{n\sigma}(s, k) = EV_{n-1, \pi}(X, k) = EV_{n-1}(X, k).$$

Und daraus folgt

$$EV_n(X, k) = \sup_{\pi \in F^n} EV_{n\pi}(X, k) \geq EV_{n\sigma}(X, k) = EV_{n-1}(X, k).$$

□

## 2.3. Wertfunktion im risikosensitiven Fall

Wir wollen nun den risikosensitiven Fall untersuchen, d.h. vor dem Hintergrund des im ersten Abschnitt definierten MDP hat der Entscheider eine exponentielle Nutzenfunktion und will den erwarteten Nutzen des Gesamtgewinns maximieren (siehe Abschnitt 1.3). Den zugehörigen risikosensitiven MDP nennen wir *risikosensitives Entscheidungsmodell*. Bei der Untersuchung des Modells nehmen wir im Folgenden immer an, dass die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  erfüllt ist und damit nach Satz 1.3.5 die Wertiteration gilt und eine optimale Strategie existiert.

**Annahme.** *Wenn das risikosensitive Entscheidungsmodell betrachtet wird, nehmen wir an, dass die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  erfüllt ist.*

Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung hierfür an und beschreibt die Struktur der Wertfunktion.

**Satz 2.3.1.** *Für das risikosensitive Entscheidungsmodell und Übergangsfunktion  $T$  mit  $s \mapsto T(s, y)$  stetig, gilt:*

- a) *Die Wertfunktionen  $V_n^u$  können rekursiv berechnet werden über die Bellmann-Gleichungen*

$$V_n^u = U^u V_{n-1}^u, \quad n = 1, \dots, N, \quad d.h.$$

$$V_n^u(s, k) = \sup_{a \in D(s, k)} \{-u(r(s, k, a)) \cdot EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k - a)\}, \quad (s, k) \in \mathbf{S}.$$

- b)  $V_n^u = (U^u)^n V_0^u$ .
- c) Für  $n = 0, \dots, N - 1$  existiert ein Maximisator  $f_{n-1}$  von  $V_n$  mit  $f_n \in \Delta$  und die Politik  $\pi^* = (f_N, \dots, f_1)$  ist optimal für den  $N$ -stufigen MDP.
- d)  $V_n^u$  ist stetig für alle  $n = 0, \dots, N$ .
- e)  $V_n^u$  ist monoton für alle  $n = 0, \dots, N$ , falls  $s \mapsto T(s, y)$  zusätzlich monoton ist.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  für  $M := \{v \in M(\mathbf{S}) : v \text{ stetig und beschränkt}\}$  und  $\Delta = F$  erfüllt ist. Dazu benutzen wir den Struktursatz für stetige MDPs (Satz 1.3.6). Sei  $v \in M$ . Wir wollen zeigen, dass

$$L^u v(s, k, a) = -u(r(s, k, a)) \cdot Ev(T(s, Y), k - a)$$

stetig auf  $D$  ist. Da  $u, v$  und  $r$  stetig auf  $D$  sind und  $s \mapsto T(s, y)$  stetig ist, müssen wir nur zeigen, dass man Limes und Integral vertauschen darf. Da  $v(\mathbf{s})$  beschränkt ist, hat  $v$  eine integrierbare Majorante und man kann den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden. Da  $D(\mathbf{s})$  zusätzlich für alle  $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$  kompakt ist und  $\mathbf{s} \mapsto D(\mathbf{s})$  sowie  $V_0$  stetig sind, folgt aus dem Struktursatz für stetige MDPs, dass die Strukturannahme gilt. Damit folgen dann aus Satz 1.3.5 die Aussagen in a), b), c) und d).

Für Teil e) zeigen wir, dass in diesem Fall die Strukturannahme  $(SA_N^u)$  für  $M := \{v \in M(\mathbf{S}) : v \text{ stetig, beschränkt und monoton wachsend}\}$  erfüllt ist. Da wir schon wissen, dass  $(SA_N^u)$  für  $\widetilde{M} := \{v \in M(\mathbf{S}) : v \text{ stetig und beschränkt}\}$  gilt und  $V_0$  sowie  $\mathbf{s} \mapsto D(\mathbf{s})$  monoton wachsend sind, müssen wir nach Satz 1.3.7 lediglich zeigen, dass

$$\mathbf{s} \mapsto L^u v(\mathbf{s}, a)$$

monoton wachsend in  $\mathbf{s}$  für  $v \in M$  ist. Dies gilt aber, da  $v$  und  $s \mapsto T(s, y)$  monoton wachsend sind und  $-u(r(\mathbf{s}, a))$  monoton fallend in  $\mathbf{s}$  ist. Die Behauptung folgt wieder aus Satz 1.3.5.  $\square$

Wie im risikoneutralen Modell ist bei u.i.v. Angeboten  $n \mapsto V_n^u(s, k)$  monoton wachsend.

**Satz 2.3.2.** Falls  $(X_n)$  u.i.v. ist, gilt für alle  $n = 1, 2, \dots, N$

$$EV_n^u(X, k) \geq EV_{n-1}^u(X, k), \quad k \in K.$$

*Beweis.* Der Beweis ist analog zum Beweis des entsprechenden Resultats im risikoneutralen Fall (Satz 2.2.2).  $\square$



## Kapitel 3.

# Struktur der Maximisatoren im risikoneutralen Entscheidungsmodell

In diesem Kapitel betrachten wir das risikoneutrale Entscheidungsmodell. Wir gehen dabei insbesondere auf die Struktur der Maximisatoren ein und suchen Voraussetzungen unter denen die Maximisatoren monoton wachsend sind.

Im ersten Abschnitt behandeln wir eine vereinfachte Variante des Modells, bei der man nur zwei Entscheidungsmöglichkeiten und eine gewisse Anzahl an Ausübungsrechten hat. Entschließt sich der Entscheider zu einem Zeitpunkt ein Recht auszuüben, so erhält er den Wert des aktuellen Angebotes als Gewinn. Lehnt er das Angebot ab und setzt kein Recht ein, dann kann er von dem Recht später Gebrauch machen, um womöglich einen höheren Gewinn zu erzielen. So ergibt sich ein multiples optimales Stoppproblem. Die Aussagen in Kapitel 2 gelten natürlich auch für dieses vereinfachte Modell. Die im ersten Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse, werden im zweiten Abschnitt bei der Untersuchung des allgemeinen Modells mit Aktionsraum  $A = [0, 1]$  genutzt. Im dritten Abschnitt betrachten wir die Struktur der Maximisatoren, wenn die Laufzeit des MDP gegen unendlich geht.

### 3.1. Multiples Stoppen

Abweichend von unserem allgemeinen Modell betrachten wir zunächst ein multiples optimales Stoppproblem. Dafür setzen wir  $A = \{0, 1\}$  und  $K = \{0, \dots, N + 1\}$ . Man hat also eine gewisse Anzahl an Ausübungsrechten zur Verfügung und in jeder Periode muss entschieden werden, ob ein Recht eingesetzt wird oder nicht. Der Gewinn bei Ausübung entspricht der Höhe des Angebotes.

Sei  $(X_n)$  eine Folge von Angeboten mit Übergangsfunktion  $T$ , dann gilt für die Wertfunktion

$$V_n(s, k) = \max \{s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1), EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k)\}$$

für alle  $(s, k) \in S \times K \setminus \{0\}$  und alle  $n = 1, \dots, N$ . Für  $k = 0$  gilt  $V_n(s, 0) = 0$  für alle  $n = 0, \dots, N$ . Daher ist es in diesem Modell optimal zum Zeitpunkt  $n$  und bei  $k$  zur Verfügung stehenden Rechten auszuüben, falls

$$s \geq EV_n(T(s, Y_n), k) - EV_n(T(s, Y_n), k - 1).$$

Für die Maximisatoren  $f_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , gilt also

$$f_n(s, k) = \begin{cases} 1, & s \geq EV_n(T(s, Y_n), k) - EV_n(T(s, Y_n), k - 1) \\ 0, & s < EV_n(T(s, Y_n), k) - EV_n(T(s, Y_n), k - 1) \end{cases}$$

für alle  $(s, k) \in S \times K \setminus \{0\}$ .

Im Folgenden analysieren wir die optimale Politik bzw. die Maximisatoren in dem Entscheidungsmodell. Das Ziel ist es, Bedingungen zu finden, unter denen die Maximisatoren monoton wachsende Funktionen von  $s$  und  $k$  sind. Dies ist nicht immer der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 3.1.1.** Sei eine Markovkette  $(X_n)$  mit Übergangsfunktion

$$T(s, y) = \begin{cases} 1 + 2 \cdot (s - 2), & s > 2 \\ \max\{s - 1, 0\}, & s \leq 2 \end{cases}$$

für alle  $y \in \mathbb{R}$  gegeben. Also ist die Markovkette deterministisch und  $s \mapsto T(s, y)$  ist stetig. Daher sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 erfüllt. Weiterhin gilt

$$T(s, y) \begin{cases} > s, & s > 3 \\ \leq s, & s \leq 3. \end{cases}$$

Die Markovkette fällt also für  $s \leq 3$  und wächst für  $s > 3$ . So ist es z.B. bei  $k = 1$  und Startpunkt  $s_0 > 3$  optimal, erst zum Zeitpunkt  $N$  auszuüben. Startet die Markovkette hingegen in  $s_0 < 3$ , ist es optimal sofort auszuüben. Für die Maximisatoren  $f_n$  gilt somit

$$f_n(s, 1) = \begin{cases} 0, & s > 3 \\ 1, & s \leq 3 \end{cases}$$

für alle  $n = 1, \dots, N$ . Die Maximisatoren sind also nicht monoton wachsend in  $s$ .



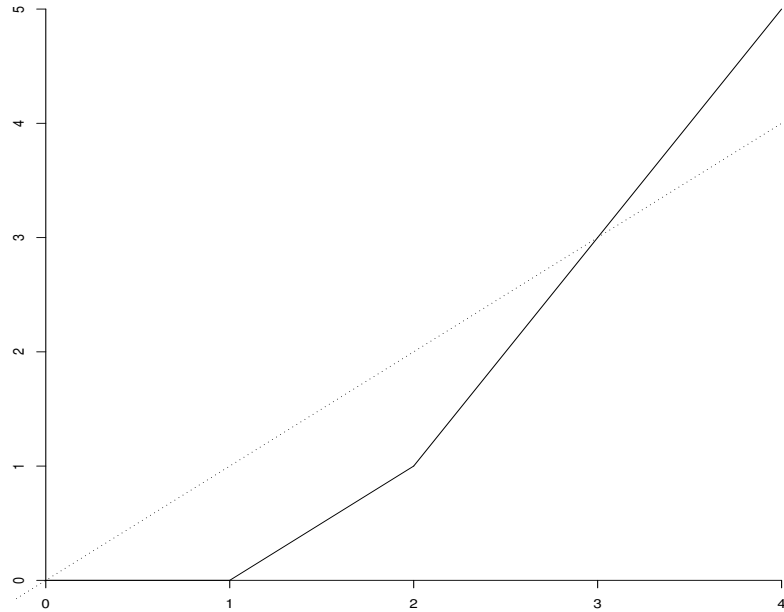


Abbildung 3.1.: Übergangsfunktion der Markovkette aus Beispiel 3.1.1.

**Definition 3.1.2.**

$$G_n(s, k) := \begin{cases} EV_n(T(s, Y_n), k) - EV_n(T(s, Y_n), k - 1), & k = 1, \dots, N + 1 \\ \infty, & k = 0. \end{cases}$$

Mit dieser Definition hat  $V_n(s, k)$  folgende einfache Gestalt.

**Lemma 3.1.3.** Für alle  $(s, k) \in S \times K \setminus \{0\}$  gilt

$$V_n(s, k) = (s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1)) \mathbf{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, k)\}} + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k) \mathbf{1}_{\{s < G_{n-1}(s, k)\}}.$$

Da die Funktion  $G_n$  eine wichtige Rolle für die Struktur der Maximisatoren spielt, werden wir sie im Folgenden genauer untersuchen.

**Lemma 3.1.4.** Für alle  $s \in S$  und  $n \in \{0, \dots, N\}$  ist

$$k \mapsto G_n(s, k)$$

monoton fallend.

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage induktiv. Für  $n = 0$  gilt für alle  $k \in \{2, \dots, N + 1\}$

$$G_0(s, k) = 0.$$

Für  $k = 1$  gilt  $G_0(s, k) = ET(s, Y_0)$ . Also ist  $k \mapsto G_0(s, k)$  monoton fallend. Die Behauptung gelte nun für  $n - 1$ . Es sei also  $G_{n-1}(s, k) \leq G_{n-1}(s, k - 1)$  für alle  $k = 1, \dots, N + 1$ . Dann folgt für  $k \in \{2, \dots, N + 1\}$  aus Lemma 3.1.3 und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} V_n(s, k) - V_n(s, k - 1) &= (s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1)) \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, k)\}} \\ &\quad + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, k)\}} \\ &\quad - \left( (s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 2)) \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, k-1)\}} \right. \\ &\quad \left. + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, k-1)\}} \right) \\ &= G_{n-1}(s, k - 1) \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, k-1)\}} \\ &\quad + s \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(s, k) \leq s < G_{n-1}(s, k-1)\}} \\ &\quad + G_{n-1}(s, k) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, k)\}}. \end{aligned}$$

Für  $k = 1$  gilt

$$\begin{aligned} V_n(s, 1) &= s \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, 1)\}} + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), 1) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, 1)\}} \\ &= G_{n-1}(s, 0) \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, 0)\}} + s \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(s, 1) \leq s < G_{n-1}(s, 0)\}} \\ &\quad + G_{n-1}(s, 1) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, 1)\}}, \end{aligned}$$

da  $G_{n-1}(s, 0) = \infty$  und  $G_{n-1}(s, 1) = EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), 1)$ . Durch Integration folgt für alle  $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} G_n(s, k) &= EV_n(T(s, Y_n), k) - EV_n(T(s, Y_n), k - 1) \\ &= E \left( G_{n-1}(T(s, Y_n), k - 1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) \geq G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1)\}} \right. \\ &\quad + T(s, Y_n) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \leq T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1)\}} \\ &\quad \left. + G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G_n(s, k + 1) &= EV_n(T(s, Y_n), k + 1) - EV_n(T(s, Y_n), k) \\ &= E \left( G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) \geq G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}} \right. \\ &\quad \left. + T(s, Y_n) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(s, k+1) \leq T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}} \right) \end{aligned}$$

$$+ G_{n-1}(T(s, Y_n), k + 1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) < G_{n-1}(s, k+1)\}}).$$

Daraus folgt durch Vertauschen der Summanden in den Erwartungswerten

$$\begin{aligned} G_n(s, k) - G_n(s, k + 1) &= E\left(G_{n-1}(T(s, Y_n), k - 1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) \geq G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1)\}} \right. \\ &\quad + T(s, Y_n) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \leq T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1)\}} \\ &\quad \left. - G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) \geq G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}}\right) \\ &+ E\left(G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}} \right. \\ &\quad - T(s, Y_n) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(T(s, Y_n), k+1) \leq T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}} \\ &\quad \left. - G_{n-1}(T(s, Y_n), k + 1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k+1)\}}\right). \end{aligned}$$

Wegen  $G_{n-1}(s', k+1) \leq G_{n-1}(s', k) \leq G_{n-1}(s', k-1)$  für alle  $s' \geq 0$  sind die Integranden in beiden Erwartungswerten größer gleich 0. Also sind auch die Erwartungswerte selbst größer gleich 0. Daher gilt

$$G_n(s, k) - G_n(s, k + 1) \geq 0$$

und es folgt, dass  $k \mapsto G_n(s, k)$  monoton fallend ist für alle  $k = 1, \dots, N + 1$ .  $\square$

**Bemerkung 3.1.5.**

- i) Man kann  $G_n(s, k)$  als den erwarteten Gewinn auffassen, der im  $n$ -stufigen Modell mit dem  $k$ -ten Recht erzielt wird, falls der vorherige Zustand  $s$  war und die optimale Strategie benutzt wird. Dabei wird zu einem Zeitpunkt  $m$  das  $k$ -te Recht benutzt, falls  $G_{m-1}(s, k) \leq s < G_{m-1}(s, k - 1)$  gilt.
- ii) Die Aussage des Satzes kann auch mit Hilfe des dualen Ansatzes bewiesen werden, siehe Meinshausen und Hambly (2004), Prop. 5.2.

Wir formulieren ein Ergebnis des vorherigen Beweises als Lemma, da wir noch darauf verweisen wollen.

**Lemma 3.1.6.** Für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$  und  $k \in K \setminus \{0\}$  gilt

$$\begin{aligned} V_n(s, k) - V_n(s, k - 1) &= G_{n-1}(s, k - 1) \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, k-1)\}} \\ &\quad + s \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(s, k) \leq s < G_{n-1}(s, k-1)\}} \\ &\quad + G_{n-1}(s, k) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, k)\}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G_n(s, k) &= E\left(G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) \geq G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1)\}} \right. \\ &\quad + T(s, Y_n) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \leq T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k-1)\}} \\ &\quad \left. + G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}}\right). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $n \mapsto G_n(s, k)$  monoton wachsend ist. Das bedeutet, dass der erwartete Zusatzgewinn durch ein zusätzliches Recht in der Anzahl der noch verbleibenden Perioden wächst.

**Lemma 3.1.7.** Für alle  $s \geq 0$  und  $k \in K$  ist

$$n \mapsto G_n(s, k)$$

monoton wachsend.

*Beweis.* Für  $k = 0$  gilt die Aussage offensichtlich. Sei nun  $k \in K \setminus \{0\}$ . Wir zeigen induktiv  $G_n(s, k) \geq G_{n-1}(s, k)$  und benutzen die Darstellung von  $G_n$  aus Lemma 3.1.6. Für  $n = 1$  gilt

$$\begin{aligned} G_1(s, k) &= E\left(G_0(T(s, Y_1), k-1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_1) \geq G_0(T(s, Y_1), k-1)\}} \right. \\ &\quad + T(s, Y_1) \mathbb{1}_{\{G_0(T(s, Y_1), k) \leq T(s, Y_1) < G_0(T(s, Y_1), k-1)\}} \\ &\quad \left. + G_0(T(s, Y_1), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_1) < G_0(T(s, Y_1), k)\}}\right) \\ &\geq E\left(G_0(T(s, Y_1), k-1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_1) \geq G_0(T(s, Y_1), k-1)\}} \right. \\ &\quad + T(s, Y_1) \mathbb{1}_{\{G_0(T(s, Y_1), k) \leq T(s, Y_1) < G_0(T(s, Y_1), k-1)\}} \\ &\quad \left. + T(s, Y_1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_1) < G_0(T(s, Y_1), k)\}}\right) \\ &= ET(s, Y_1) \\ &\geq G_0(s, k). \end{aligned}$$

Die Aussage gelte nun für  $n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s, k) &= E\left(G_n(T(s, Y_{n+1}), k-1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_{n+1}) \geq G_n(T(s, Y_{n+1}), k-1)\}} \right. \\ &\quad + T(s, Y_{n+1}) \mathbb{1}_{\{G_n(T(s, Y_{n+1}), k) \leq T(s, Y_{n+1}) < G_n(T(s, Y_{n+1}), k-1)\}} \\ &\quad \left. + G_n(T(s, Y_{n+1}), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_{n+1}) < G_n(T(s, Y_{n+1}), k)\}}\right) \\ &\geq E\left(G_{n-1}(T(s, Y_{n+1}), k-1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_{n+1}) \geq G_{n-1}(T(s, Y_{n+1}), k-1)\}} \right. \\ &\quad \left. + T(s, Y_{n+1}) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(T(s, Y_{n+1}), k) \leq T(s, Y_{n+1}) < G_{n-1}(T(s, Y_{n+1}), k-1)\}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + G_{n-1}(T(s, Y_{n+1}), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_{n+1}) < G_{n-1}(T(s, Y_{n+1}), k)\}} \\
 & = G_n(s, k),
 \end{aligned}$$

da  $(Y_n)$  u.i.v. und  $G_n(s', k) \geq G_{n-1}(s', k)$  für alle  $s' \in S$  nach Induktionsvoraussetzung. Daher ist der Ausdruck im ersten Erwartungswert größer gleich dem Ausdruck im zweiten Erwartungswert und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

Der nächste Satz untersucht das Verhalten von  $s \mapsto G_n(s, k)$ .

**Satz 3.1.8.** *Sei  $s \mapsto T(s, y)$  monoton wachsend. Dann ist*

$$s \mapsto G_n(s, k)$$

für alle  $k \in K$  monoton wachsend.

*Beweis.* Für  $k = 0$  ist nichts zu zeigen. Sei also  $k \in K \setminus \{0\}$ . Wir beweisen die Aussage wieder induktiv. Für  $n = 0$  und  $k > 1$  ist

$$G_0(s, k) = 0$$

und für  $k = 1$  gilt  $G_0(s, k) = ET(s, Y_0)$ . Also ist  $s \mapsto G_0(s, k)$  nach Voraussetzung monoton wachsend. Die Aussage gelte nun für  $n - 1$ . Aus Lemma 3.1.6 folgt

$$\begin{aligned}
 G_n(s, k) & = EV_n(T(s, Y_n), k) - EV_n(T(s, Y_n), k - 1) \\
 & = E \left( G_{n-1}(T(s, Y_n), k - 1) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) \geq G_{n-1}(T(s, Y_n), k - 1)\}} \right. \\
 & \quad + T(s, Y_n) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \leq T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k - 1)\}} \\
 & \quad \left. + G_{n-1}(T(s, Y_n), k) \mathbb{1}_{\{T(s, Y_n) < G_{n-1}(T(s, Y_n), k)\}} \right).
 \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $s \mapsto G_{n-1}(s, k)$  monoton wachsend und nach Voraussetzung ist  $s \mapsto T(s, y)$  monoton wachsend. Eine einfache Fallunterscheidung unter Ausnutzung der Monotonie von  $k \mapsto G_{n-1}(s, k)$  zeigt, dass der Ausdruck im Erwartungswert monoton wachsend in  $s$  ist. Daher ist auch  $s \mapsto G_n(s, k)$  monoton wachsend.  $\square$

Zum Zeitpunkt  $N - n$  und bei  $k$  noch zur Verfügung stehenden Rechten ist es optimal genau dann auszuüben, wenn  $s \geq G_{n-1}(s, k)$  ist. Beide Seiten der Ungleichung sind dabei abhängig von  $s$ . Wir wollen nun Bedingungen an die Markovkette finden, die garantieren, dass es *Schwellenwerte* gibt. Das bedeutet, dass es eine von  $s$  unabhängige Schranke gibt, so dass es optimal ist auszuüben, falls  $s$  über dieser Schranke liegt und nicht auszuüben, falls  $s$  unter der Schranke liegt. Dies ist gleichbedeutend mit der Eigenschaft, dass die Maximisatoren monoton wachsend sind.

**Definition 3.1.9.** Für  $n = 1, \dots, N$  und  $k \in K$  sei

$$s_n(k) = \begin{cases} \inf\{s \geq 0 : s \geq G_{n-1}(s, k)\}, & \{s \geq 0 : s \geq G_{n-1}(s, k)\} \neq \emptyset \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir werden zeigen, dass unter der folgenden Annahme an die Markovkette  $(X_n)$  Schwellenwerte existieren. Der Schwellenwert zum Zeitpunkt  $N - n$  bei noch  $k$  Rechten ist dann  $s_n(k)$ .

**Annahme (A1).**  $(X_n)$  sei Markovkette auf  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  mit Übergangsfunktion  $T$  und es gelte

- $s \mapsto T(s, y)$  ist monoton wachsend.
- $s \mapsto ET(s, Y)$  ist  $L$ -stetig mit Konstante  $L = 1$ .

Wir haben immer vorausgesetzt, dass Annahme  $(A_N)$  erfüllt ist. Falls Annahme  $(A1)$  erfüllt ist, kann man dies leicht überprüfen.

**Satz 3.1.10.** Unter der Annahme  $(A1)$  hat der MDP eine Schrankenfunktion, falls es ein  $s \geq 0$  mit  $ET(s, Y) < \infty$  gibt.

*Beweis.* Sei  $\bar{s} \geq 0$  mit  $ET(\bar{s}, Y) < \infty$  beliebig. Aus der Lipschitz-Stetigkeit von  $s \mapsto ET(s, Y)$  folgt

$$ET(s, Y) \leq ET(\bar{s}, Y) + s$$

für alle  $s \geq \bar{s}$ . Da  $s \mapsto T(s, y)$  monoton wachsend ist, gilt außerdem

$$ET(s, Y) \leq ET(\bar{s}, Y) < \infty$$

für alle  $s \leq \bar{s}$ . Aus Lemma 2.1.2 folgt damit die Behauptung.  $\square$

Die Lipschitz-Stetigkeit von  $s \mapsto G_n(s, k)$  ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Schwellenwerten. Unter der Annahme  $(A1)$  ist diese Bedingung erfüllt.

**Satz 3.1.11.** Es gelte  $(A1)$ . Dann ist

$$s \mapsto G_n(s, k)$$

$L$ -stetig mit  $L = 1$  für alle  $k \in K$ .

*Beweis.* Für  $k = 0$  ist nicht zu zeigen. Wir führen den Beweis induktiv. Für  $n = 0$  gilt für alle  $k \in \{2, \dots, N + 1\}$

$$G_0(s, k) = 0$$

und für  $k = 1$  gilt  $G_0(s, 1) = ET(s, Y_0)$ . Also ist  $s \mapsto G_0(s, k)$  nach Voraussetzung L-stetig mit  $L = 1$ . Sei nun  $s \mapsto G_n(s, k)$  L-stetig mit  $L = 1$  für alle  $k \in K$ . Falls es ein  $s' \geq 0$  gibt mit

$$s' \geq G_n(s', k),$$

dann gilt auch für  $s \geq s'$ , dass

$$\begin{aligned} s &= s' + s - s' \geq G_n(s', k) + G_n(s, k) - G_n(s', k) \\ &= G_n(s, k). \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt demnach

$$s \geq s_{n+1}(k) \text{ g.d.w. } s \geq G_n(s, k).$$

Wegen Lemma 3.1.6 gilt daher

$$\begin{aligned} F_{n+1}(s, k) &:= V_{n+1}(s, k) - V_{n+1}(s, k-1) \\ &= \begin{cases} G_n(s, k), & s < s_{n+1}(k) \\ s, & s_{n+1}(k) \leq s < s_{n+1}(k-1) \\ G_n(s, k-1), & s_{n+1}(k-1) \leq s. \end{cases} \end{aligned}$$

$s \mapsto F_{n+1}(s, k)$  ist also L-stetig mit  $L = 1$ . Daraus folgt für  $s_2 > s_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} &|EF_{n+1}(T(s_2, Y_{n+1}), k) - EF_{n+1}(T(s_1, Y_{n+1}), k)| \\ &\leq E|T(s_2, Y_{n+1}) - T(s_1, Y_{n+1})| \\ &= E(T(s_2, Y_{n+1}) - T(s_1, Y_{n+1})) \\ &\leq s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Also ist  $s \mapsto G_{n+1}(s, k) = EF_{n+1}(T(s, Y_{n+1}), k)$  L-stetig mit  $L = 1$  für alle  $k \in K$ .  $\square$

Das nachfolgende Lemma wurde im Beweis des vorangegangenen Satzes mitbewiesen.

**Lemma 3.1.12.** *Es gelte (A1). Dann gilt für alle  $k \in K$  und  $n = 1, \dots, N$ , dass  $s_n(k)$  ein Schwellenwert ist, d.h. es gilt*

$$s \geq s_n(k) \Leftrightarrow s \geq G_{n-1}(s, k).$$

Der nächste Satz folgt direkt aus dem vorangegangenen Lemma und gibt die optimale Politik unter den gegebenen Voraussetzungen an.

**Satz 3.1.13.** *Es gelte (A1). Dann gilt für alle  $k \in K$  und  $n = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} V_n(s, k) &= \max \{s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1), EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k)\} \\ &= (s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1)) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(k)\}} \\ &\quad + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k) \mathbb{1}_{\{s < s_n(k)\}}. \end{aligned}$$

Der Maximisator  $f_n$  zum Zeitpunkt  $n$  hat also die Gestalt

$$f_n(s, k) = \begin{cases} 1, & s \geq s_n(k) \\ 0, & s < s_n(k) \end{cases}$$

mit Schwellenwert  $s_n(k)$ . Die Maximisatoren sind daher monoton wachsend in  $s$ .

*Beweis.* Die Aussagen folgen sofort aus Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.12.  $\square$

**Korollar 3.1.14.** *Falls  $(X_n)$  u.i.v. ist, dann ist Annahme (A1) erfüllt und die Maximisatoren  $f_n$  sind bestimmt durch die Schwellenwerte*

$$s_n(k) = EV_{n-1}(X, k) - EV_{n-1}(X, k - 1).$$

für alle  $k \in K$ .

*Beweis.* Für u.i.v. Zufallsvariablen ist Annahme (A1) natürlich immer erfüllt.  $s_n(k)$  hat die angegebene Gestalt, da

$$s \mapsto G_{n-1}(s, k) = EV_{n-1}(X, k) - EV_{n-1}(X, k - 1)$$

konstant ist im Fall von u.i.v. Zufallsvariablen.  $\square$

Im folgenden Satz übertragen wir nun die Ergebnisse aus der Untersuchung der Funktion  $G_n$  auf die Schwellenwerte. Falls es Schwellenwerte gibt, so sind diese monoton wachsend in  $n$  und monoton fallend in  $k$ . Das bedeutet, dass das Angebot, ab dem es optimal ist auszuüben, höher sein muss, je mehr Perioden noch verbleiben und je weniger Rechte der Entscheider noch hat.

**Satz 3.1.15.**

- a) Die Funktion  $n \mapsto s_n(k)$  ist monoton wachsend für alle  $k \in K$ .
- b) Die Funktion  $k \mapsto s_n(k)$  ist monoton fallend für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$ .

*Beweis.* Für alle  $s \geq 0$  ist  $n \mapsto G_n(s, k)$  monoton wachsend nach Lemma 3.1.7 und  $k \mapsto G_n(s, k)$  monoton fallend nach Lemma 3.1.4. Wegen  $s_n(k) := \inf\{s \geq 0 : s \geq G_n(s, k)\}$  gelten daher offensichtlich a) und b).  $\square$



### 3.1.1. Beispiele

Als Beispiel betrachten wir u.i.v. auf  $(0, 100)$  gleichverteilte Zufallsvariablen  $(X_n)$ . Nach Satz 2.2.1 gilt die Wertiteration und es gibt Maximisatoren. Zudem sind die Bedingungen für die Existenz von Schwellenwerten im Fall von u.i.v. Zufallsvariablen natürlich erfüllt (siehe Korollar 3.1.14). Die Schwellenwerte  $s_n(k)$  sind wachsend in  $n \in \{1, \dots, N\}$  und fallend in  $k \in K$  (siehe Satz 3.1.15). Wir betrachten das risikoneutrale Entscheidungsmodell mit Zeithorizont  $N = 30$ . Abbildung 3.2 zeigt  $s_{N-n}(k)$  für  $k = 1, 2, 3, 4$  als Funktion von  $n$ . Dabei ist zu beachten, dass  $s_n(k) = 0$  für  $k \geq n + 1$ , weil es zum Zeitpunkt  $N - n$  noch  $n + 1$  Möglichkeiten gibt, an denen man ein Recht einsetzen kann. Hat der Entscheider also noch  $n + 1$  oder mehr Rechte, ist es optimal jedes Angebot zu akzeptieren.

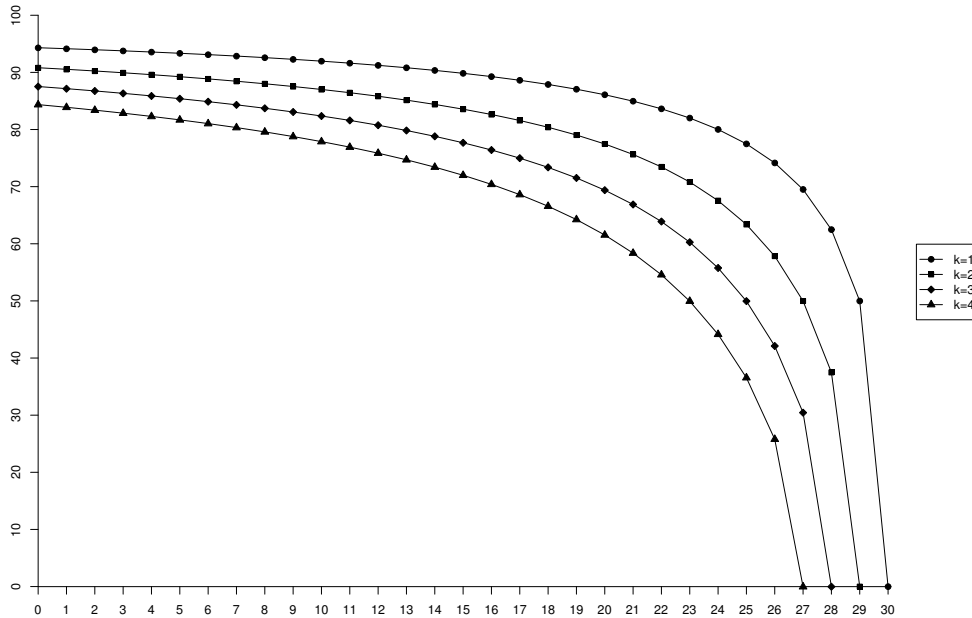


Abbildung 3.2.: Schwellenwerte im risikoneutralen Modell mit  $N = 30$  bei Gleichverteilung auf  $(0, 100)$ .

Als weiteres Beispiel betrachten wir ein Trinomialmodell. Sei  $S = \{0, \dots, l\}$ ,  $l \geq 3$  und die Übergangsmatrix  $P = (p_{ij})$  gegeben durch  
Für  $i \in S \setminus \{0, l\}$ :

$$p_{i,i+1} = \left(1 - \frac{i}{l}\right)^2, \quad p_{ii} = 2 \cdot \frac{i}{l} \cdot \left(1 - \frac{i}{l}\right), \quad p_{i,i-1} = \left(\frac{i}{l}\right)^2.$$

Für  $i \in \{0, l\}$ :

$$p_{00} = p_{10}, \quad p_{01} = 1 - p_{00}, \quad p_{ll} = p_{l-1,l}, \quad p_{l,l-1} = 1 - p_{ll}.$$

Für alle anderen  $i, j \in S$  gilt  $p_{ij} = 0$ .

Da  $S$  endlich ist, hat das MDP eine Schrankenfunktion und  $s \mapsto T(s, y)$  ist stetig für jede Übergangsfunktion  $T$ . Die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 sind also erfüllt und damit gilt die Wertiteration und es existieren Maximisatoren. Der nächste Satz zeigt, dass die Bedingungen für die Existenz von Schwellenwerte in diesem Beispiel erfüllt sind.

**Satz 3.1.16.** *Im Trinomialmodell kann die Übergangsfunktion  $T$  so gewählt werden, dass*

- a)  $s \mapsto T(s, y)$  monoton wachsend ist.
- b)  $s \mapsto ET(s, Y)$   $L$ -stetig mit  $L = 1$  ist.

Es gilt also Annahme (A1).

*Beweis.*

- a) Wir zeigen, dass die Übergangsmatrix dieser Markovkette stochastisch monoton ist. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.1.3 c).  
Sei  $i \in S \setminus \{0, l-1, l\}$ ,  $k = i + 1$ . Dann ist zu zeigen, dass

$$\sum_{j=0}^m p_{ij} \geq \sum_{j=0}^m p_{kj}, \quad m \in S.$$

$$m < i - 1 : \sum_{j=0}^m p_{ij} = \sum_{j=0}^m p_{kj} = 0.$$

$$m = i - 1 : \sum_{j=0}^{i-1} p_{ij} = p_{i,i-1} \geq \sum_{j=0}^{i-1} p_{kj} = 0.$$

$$m > i : \sum_{j=0}^m p_{ij} = 1 \geq \sum_{j=0}^m p_{kj}.$$

$$m = i : \sum_{j=0}^i p_{ij} = \left(\frac{i}{l}\right)^2 + 2 \cdot \frac{i}{l} \cdot \left(1 - \frac{i}{l}\right) \geq \left(\frac{i+1}{l}\right)^2 = \sum_{j=0}^i p_{kj}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i^2}{l^2} + 2\frac{i}{l} - \frac{2i^2}{l^2} \geq \left(\frac{i+1}{l}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2i}{l} &\geq \frac{(i+1)^2 + i^2}{l^2} \\ \Leftrightarrow l &\geq \frac{(i+1)^2 + i^2}{2i} = i + 1 + \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Und dies gilt für alle  $i \leq l - 2$  wegen  $l \geq 3$ . Sei nun  $i \in \{0, l - 1\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{00} + p_{01} &= 1 \geq p_{10} + p_{11} \quad \text{und} \\ p_{l-1, l-2} + p_{l-1, l-1} &= 1 - p_{l-1, l} = p_{l, l-1}. \end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix  $P$  ist also stochastisch monoton.

b) Für  $s \in S \setminus \{0, l\}$  gilt

$$\begin{aligned} ET(s, Y) &= (s+1) \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2 + s \cdot 2 \cdot \frac{s}{l} \cdot \left(1 - \frac{s}{l}\right) + (s-1) \cdot \left(\frac{s}{l}\right)^2 \\ &= s + \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2 - \left(\frac{s}{l}\right)^2 \\ &= s + 1 - \frac{2s}{l}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für  $s_1, s_2 \in S \setminus \{0, l\}$  mit  $s_2 > s_1$

$$\begin{aligned} ET(s_2, Y) - ET(s_1, Y) &= s_2 + 1 - \frac{2s_2}{l} - \left(s_1 + 1 - \frac{2s_1}{l}\right) \\ &= s_2 - s_1 + \frac{2s_1}{l} - \frac{2s_2}{l} \\ &\leq s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Randwerte  $s = 0$  und  $s = l$ . Dafür gilt

$$ET(0, Y) = 0 \cdot \frac{1}{l^2} + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{l^2}\right) = 1 - \frac{1}{l^2}$$

und

$$ET(l, Y) = l \cdot \frac{1}{l^2} + (l-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{l^2}\right) = l - 1 + \frac{1}{l^2}.$$

Für  $s \in S \setminus \{0, l\}$  ist

$$\frac{1}{l^2} < 2 - \frac{2s}{l}$$

und deshalb ist wegen

$$ET(s, Y) = s + 1 - \frac{2s}{l}$$

sowohl

$$ET(l, Y) - ET(s, Y) < l - s,$$

als auch

$$ET(s, Y) - ET(0, Y) < s.$$

Wegen

$$ET(l, Y) - ET(0, Y) < ET(l, Y) < l$$

gilt also für alle  $s_2, s_1 \in S$  mit  $s_2 > s_1$

$$ET(s_2, Y) - ET(s_1, Y) \leq s_2 - s_1.$$

Daher ist  $s \mapsto ET(s, Y)$  L-stetig mit  $L = 1$ .

□

Die Voraussetzungen von Satz 3.1.13 sind demnach erfüllt, d.h. für das MDP mit Übergangsmatrix  $P$  existieren zu jedem Zeitpunkt  $n \in \{1, \dots, N\}$  für alle  $k \in K$  Schwellenwerte  $s_n(k)$  mit

$$f_n(s, k) = \begin{cases} 1, & s \geq s_n(k) \\ 0, & s < s_n(k). \end{cases}$$

Die folgende Abbildung zeigt für den Fall  $l = 10$  und  $N = 30$  die Wertfunktion  $s \mapsto V_{30}(s, 2)$ , also den optimalen erwarteten Gesamtgewinn im 30-stufigen Modell bei  $k = 2$  Rechten und Startwert  $s \in S$ . Die Konvexität und Monotonie von  $s \mapsto V_n(s, k)$  wurde in Satz 2.2.1 gezeigt.

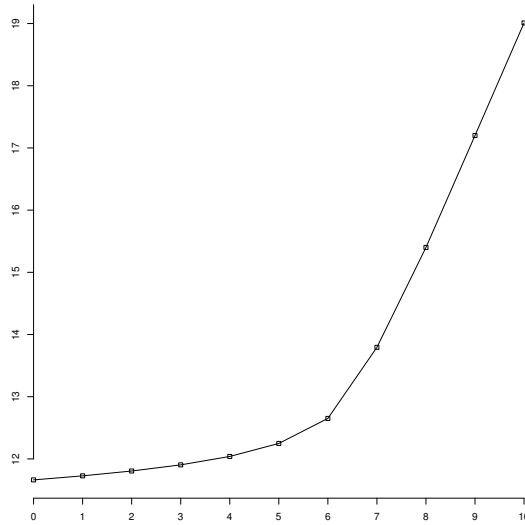


Abbildung 3.3.: Wertfunktion für  $N = 30$  und  $k = 2$  im risikoneutralen Modell für das Trinomialmodell mit  $l = 10$ .

In Abbildung 3.4 sieht man für den Fall  $l = 200$  und  $N = 1000$  die Schwellenwerte  $s_{N-n}(k)$  als Funktion von  $n$  für  $k = 1, 10, 30$ . In Satz 3.1.15 wurde gezeigt, dass  $n \mapsto s_n(k)$  monoton wachsend und  $k \mapsto s_n(k)$  monoton fallend ist. Die Schwellenwerte liegen selbst bei der langen Laufzeit in der Nähe von 100. Das liegt an dem starken Trend des Trinomialmodells zum Mittelwert. Für  $k = 30$  werden auch Werte unterhalb von 100 angenommen. So ist z.B.  $s_{30}(30) = 98$ . Das heißt, falls der Entscheider noch 30 Rechte für die letzten 31 Zeitpunkte hat, dann würde er ein Angebot von 98 akzeptieren. Auch hier gilt natürlich wieder  $s_n(k) = 0$  für  $k \geq n+1$ .

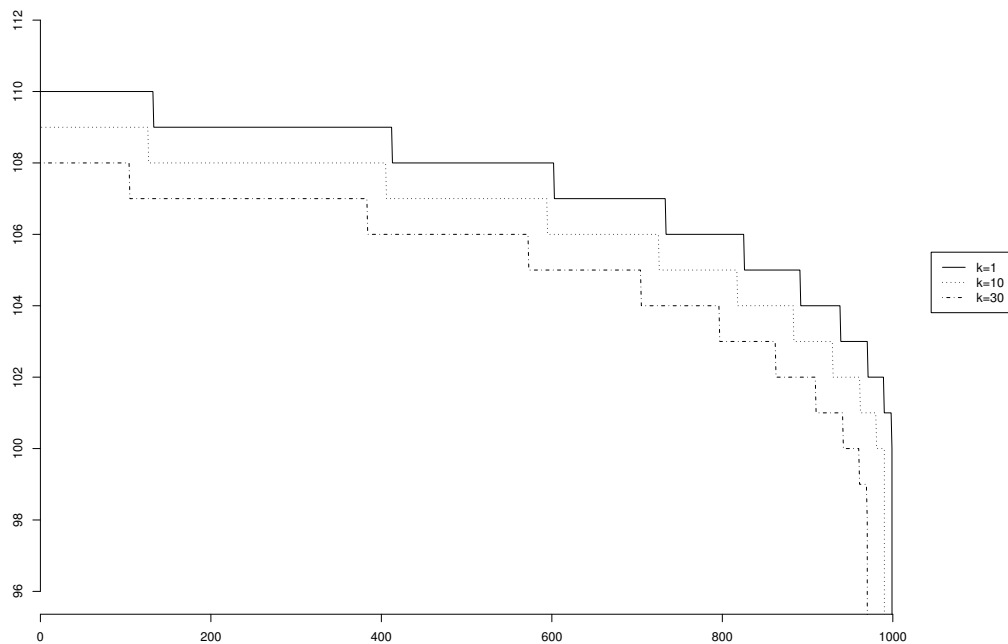


Abbildung 3.4.: Schwellenwerte im risikoneutralen Modell mit  $N = 1000$  für das Trinomialmodell mit  $l = 200$ .

## 3.2. Kontinuierlicher Aktionenraum

Wir betrachten nun das allgemeine Modell mit  $A = [0, 1]$  und  $K = [0, N + 1]$ . Dabei darf der Entscheider also zu jedem Zeitpunkt eine beliebige Menge  $a \in [0, 1]$  einsetzen, sofern die Kapazität  $k \in K$  dadurch nicht überschritten wird. Wir wollen für diesen Fall wieder eine optimale Strategie finden und nutzen dabei die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt. Um diese Ergebnisse anwenden zu können, schreiben wir im Folgenden  $k - t$  mit  $k \in \{1, \dots, N + 1\}$  und  $0 \leq t \leq 1$  für ein Element aus  $K$ . Jedes Element aus  $K$  lässt sich auf diese Weise darstellen. Bevor wir allgemeine Markovketten untersuchen, betrachten wir zunächst u.i.v. Angebote.

### 3.2.1. Unabhängige Angebote

Zunächst betrachten wir den Fall u.i.v. Zufallsvariablen  $(X_n)$ . Für den Wert des Entscheidungsproblems zum Zeitpunkt  $N - n$  bei Kapazität  $k - t$  und aktuellem

Angebot  $s$  gilt dann

$$V_n(s, k - t) = \max_{a \in D(s, k-t)} \{a \cdot s + EV_{n-1}(X, k - t - a)\}.$$

Der folgende Satz sagt aus, dass die Maximisatoren eine einfache Struktur besitzen und nur drei verschiedene Werte annehmen können. Dabei hat die optimale Politik für  $t = 0$  und  $t = 1$ , also bei Start in einer ganzzahligen Kapazität, die gleiche Gestalt wie im vereinfachten Modell im vorherigen Abschnitt. Es wird in diesem Fall zum Zeitpunkt  $n$  die Aktion  $a = 1$  gewählt, falls  $s \geq s_n(k)$  bzw.  $a = 0$ , falls  $s < s_n(k)$ . Dadurch stimmt in dieser Situation auch die Wertfunktion mit der Wertfunktion im vereinfachten Modell überein. Für  $t \in (0, 1)$  gibt es höchstens einen Zeitpunkt, an dem die Randwerte der zulässigen Aktionen nicht optimal sind. Wir nennen eine solche Strategie *bang-bang*. Die Aussage, dass die optimale Strategie bei einer Swing Option bang-bang ist, wurde schon in Bardou et al. (2010) gezeigt. Sie gilt auch unter allgemeineren Voraussetzungen an den zugrundeliegenden stochastischen Prozess und die zulässigen Aktionen. Allerdings wird dort nicht die explizite Gestalt der Maximisatoren und der Wertfunktion angegeben. Wir kommen nun zum wesentlichen Satz dieses Abschnittes.

**Satz 3.2.1.** *Für alle  $k \in \{1, \dots, N + 1\}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  und für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$  gilt*

$$V_n(s, k - t) = (\min\{k - t, 1\} \cdot s + EV_{n-1}(X, k - t - \min\{k - t, 1\})) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(k-1)\}} \quad (3.1)$$

$$+ ((1 - t) \cdot s + EV_{n-1}(X, k - 1)) \mathbb{1}_{\{s_n(k) \leq s < s_n(k-1)\}} \quad (3.2)$$

$$+ EV_{n-1}(X, k - t) \mathbb{1}_{\{s < s_n(k)\}} \quad (3.3)$$

mit Schwellenwert  $s_n(k) = EV_{n-1}(X, k) - EV_{n-1}(X, k - 1)$ .  
Der Maximisator  $f_n$  zum Zeitpunkt  $n$  hat also die Gestalt

$$f_n(s, k - t) = \begin{cases} \min\{k - t, 1\}, & s \geq s_n(k - 1) \\ 1 - t, & s_n(k) \leq s < s_n(k - 1) \\ 0, & s < s_n(k). \end{cases}$$

Die Maximisatoren sind daher monoton wachsend.

*Beweis.* Sei zunächst  $k \geq 2$ . Wir zeigen als erstes simultan, dass

$$(1 - a) \cdot s_n(k) \geq EV_{n-1}(X, k + 1 - (t + a)) - EV_{n-1}(X, k - t), \quad (3.4)$$

$$EV_{n-1}(X, k - t) - EV_{n-1}(X, k - t - a) \geq a \cdot s_n(k), \quad (3.5)$$

für  $t + a \geq 1$ :

$$(t + a - 1) \cdot s_n(k - 1) = EV_{n-1}(X, k - 1) - EV_{n-1}(X, k - t - a) \quad (3.6)$$

und für  $t + a \leq 1$ :

$$(t + a - 1) \cdot s_n(k) = EV_{n-1}(X, k - 1) - EV_{n-1}(X, k - t - a), \quad (3.7)$$

wobei Gleichheit in (3.4) für  $(t + a) \geq 1$  gilt und in (3.5) für  $(t + a) \leq 1$ . Gelten die gezeigten Ungleichungen, können wir die Darstellung von  $V_n(s, k - t)$  im Satz für  $k \geq 2$  beweisen. Sei nämlich  $s \geq s_n(k - 1)$ , dann gilt (3.1) aufgrund von (3.4) und für  $s < s_n(k)$  folgt (3.3) aus (3.5). Auf  $\{s_n(k) \leq s < s_n(k - 1)\}$  gilt wegen (3.6) und (3.7)

$$\begin{aligned} t + a \geq 1 : & (t + a - 1) \cdot s \\ & \leq (t + a - 1) \cdot s_n(k - 1) \\ & = EV_{n-1}(X, k - 1) - EV_{n-1}(X, k - t - a) \\ & \Leftrightarrow a \cdot s + EV_{n-1}(X, k - t - a) \leq (1 - t) \cdot s + EV_{n-1}(X, k - 1). \\ t + a \leq 1 : & (t + a - 1) \cdot s \\ & \leq (t + a - 1) \cdot s_n(k) \\ & = EV_{n-1}(X, k - 1) - EV_{n-1}(X, k - t - a) \\ & \Leftrightarrow a \cdot s + EV_{n-1}(X, k - t - a) \leq (1 - t) \cdot s + EV_{n-1}(X, k - 1). \end{aligned}$$

Daraus folgt (3.2).

Der Beweis erfolgt per Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  gilt überall Gleichheit. Die Behauptung gelte für  $n - 1$ . Die Darstellung von  $V_{n-1}(s, k - t)$  gilt also für alle  $k \geq 2$ . Dann folgt aus Lemma 3.1.6

$$\begin{aligned} s_n(k) = E & \left( s_{n-1}(k - 1) \mathbb{1}_{\{X \geq s_{n-1}(k-1)\}} \right. \\ & \left. + X \mathbb{1}_{\{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k-1)\}} + s_{n-1}(k) \mathbb{1}_{\{X < s_{n-1}(k)\}} \right). \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} EV_{n-1}(X, k - t) = E & \left( X + EV_{n-2}(X, k - t - 1) \mathbb{1}_{\{X \geq s_{n-1}(k-1)\}} \right. \\ & \left. + ((1 - t) \cdot X + EV_{n-2}(X, k - 1)) \mathbb{1}_{\{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k-1)\}} \right. \\ & \left. + EV_{n-2}(X, k - t) \mathbb{1}_{\{X < s_{n-1}(k)\}} \right). \end{aligned}$$



Für  $(t + a) \leq 1$  gilt weiterhin

$$\begin{aligned} EV_{n-1}(X, k + 1 - (t + a)) &= E\left(X + EV_{n-2}(X, k - t - a) \mathbf{1}_{\{X \geq s_{n-1}(k)\}} \right. \\ &\quad \left. + ((1 - t - a) \cdot X + EV_{n-2}(X, k)) \mathbf{1}_{\{s_{n-1}(k+1) \leq X < s_{n-1}(k)\}} \right. \\ &\quad \left. + EV_{n-2}(X, k + 1 - t - a) \mathbf{1}_{\{X < s_{n-1}(k+1)\}}\right) \end{aligned}$$

und für  $(t + a) \geq 1$  gilt wegen  $k + 1 - (t + a) = k - t'$  mit  $t' = (t + a) - 1 \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} EV_{n-1}(X, k + 1 - (t + a)) &= E\left(X + EV_{n-2}(X, k - t - a) \mathbf{1}_{\{X \geq s_{n-1}(k-1)\}} \right. \\ &\quad \left. + ((2 - t - a) \cdot X + EV_{n-2}(X, k - 1)) \mathbf{1}_{\{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k-1)\}} \right. \\ &\quad \left. + EV_{n-2}(X, k + 1 - t - a) \mathbf{1}_{\{X < s_{n-1}(k)\}}\right). \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst die Ungleichung (3.4).

Sei  $(t + a) \geq 1$ :

Für die Differenz der Erwartungswerte auf der rechten Seite berechnen wir die Differenz auf den folgenden Mengen

$$\begin{aligned} \{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k - 1)\} : & \\ & (2 - t - a) \cdot X + EV_{n-2}(X, k - 1) \\ & \quad - (1 - t) \cdot X - EV_{n-2}(X, k - 1) \\ & = (1 - a) \cdot X. \\ \{X \geq s_{n-1}(k - 1)\} : & \\ & EV_{n-2}(X, k - t - a) - EV_{n-2}(X, k - t - 1) \\ & = (1 - a) \cdot s_{n-1}(k - 1) \quad \text{nach IV.} \\ \{X < s_{n-1}(k)\} : & \\ & EV_{n-2}(X, k + 1 - t - a) - EV_{n-2}(X, k - t) \\ & = (1 - a) \cdot s_{n-1}(k) \quad \text{nach IV.} \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit Gleichheit, indem wir  $s_n(k)$  auch auf diesen Mengen betrachten.

Sei nun  $(t + a) \leq 1$ :

Wir betrachten wie oben die Differenz der Erwartungswerte auf der rechten Seite und nutzen die IV. Es genügt die folgenden Mengen zu betrachten.

$$\begin{aligned}
 \{X \geq s_{n-1}(k-1)\} : & \\
 & EV_{n-2}(k-t-a) - EV_{n-2}(k-1-t) \\
 & \leq (1-a)s_{n-1}(k-1). \\
 \{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k-1)\} : & \\
 & X + EV_{n-2}(k-t-a) \\
 & \quad - (1-t) \cdot X - EV_{n-2}(X, k-1) \\
 & = tX + EV_{n-2}(X, k-t-a) \\
 & \quad - EV_{n-2}(X, k-1) \\
 & \leq t \cdot X + (1-t-a) \cdot s_{n-1}(k) \\
 & \leq t \cdot X + (1-t-a) \cdot X = (1-a) \cdot X. \\
 \{s_{n-1}(k+1) \leq X < s_{n-1}(k)\} : & \\
 & (1-t-a) \cdot X + EV_{n-2}(X, k) \\
 & \quad - EV_{n-2}(X, k-t) \\
 & \leq (1-t-a) \cdot X + t \cdot s_{n-1}(k) \\
 & \leq (1-a) \cdot s_{n-1}(k). \\
 \{X < s_{n-1}(k+1)\} : & \\
 & EV_{n-2}(X, k+1-t-a) \\
 & \quad - EV_{n-2}(X, k-t) \\
 & \leq s_{n-1}(k) \cdot (1-a).
 \end{aligned}$$

Es folgt also insgesamt die Behauptung, indem wir auch  $s_n(k)$  auf diesen Mengen betrachten.

Nun zeigen wir (3.5). Dazu überprüfen wir die Differenz der Erwartungswerte auf der linken Seite, nutzen die Induktionsvoraussetzung und vergleichen das Ergebnis mit der rechten Seite.

Sei  $(t+a) \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
 \{X \geq s_{n-1}(k-1)\} : & \\
 & EV_{n-2}(X, k-1-t) - EV_{n-2}(X, k-1-t-a) \\
 & = a \cdot s_{n-1}(k-1) \quad \text{nach IV.} \\
 \{X < s_{n-1}(k)\} : & \\
 & EV_{n-2}(X, k-t) - EV_{n-2}(X, k-t-a) \\
 & = a \cdot s_{n-1}(k) \quad \text{nach IV.} \\
 \{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k-1)\} : & \\
 & (1-t) \cdot X + EV_{n-2}(X, k-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (1 - t - a) \cdot X - EV_{n-2}(X, k - 1) \\ & = a \cdot X. \end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit Gleichheit.

Sei nun  $(t + a) \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \{X \geq s_{n-1}(k - 2)\} : \\ & EV_{n-2}(X, k - 1 - t) - EV_{n-2}(X, k - 1 - t - a) \\ & \geq a \cdot s_{n-1}(k - 1) \quad \text{nach IV.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{s_{n-1}(k - 1) \leq X < s_{n-1}(k - 2)\} : \\ & X + EV_{n-2}(X, k - 1 - t) \\ & \quad - (2 - t - a) \cdot X - EV_{n-2}(X, k - 2) \\ & \geq (t + a - 1) \cdot X + (1 - t) \cdot s_{n-1}(k - 1) \\ & \geq (t + a - 1) \cdot s_{n-1}(k - 1) \\ & \quad + (1 - t) \cdot s_{n-1}(k - 1) \\ & = a \cdot s_{n-1}(k - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{s_{n-1}(k) \leq X < s_{n-1}(k - 1)\} : \\ & (1 - t)X + EV_{n-2}(X, k - 1) \\ & \quad - EV_{n-2}(X, k - t - a) \\ & \geq (1 - t) \cdot X + (t + a - 1) \cdot s_{n-1}(k - 1) \\ & \geq (1 - t) \cdot X + (t + a - 1) \cdot X \\ & = a \cdot X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{X < s_{n-1}(k)\} : \\ & EV_{n-2}(X, k - t) - EV_{n-2}(X, k - t - a) \\ & \geq a \cdot s_{n-1}(k) \quad \text{nach IV.} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Abschließend zeigen wir noch (3.6) und (3.7). Dabei folgt (3.7) aus (3.4) multipliziert mit  $-1$ , wenn man in (3.4)  $t = 1$  wählt und  $a' = t + a$  setzt. (3.6) folgt direkt aus (3.5), wenn man in (3.5)  $t = 0$  wählt und  $a' = t + a - 1$  setzt.  $V_n(s, k - t)$  hat also für  $k \geq 2$  die behauptete Darstellung.

Kommen wir nun zum Fall  $k = 1$ . Wir wollen also zeigen:

$$V_n(s, 1 - t) = (1 - t) \cdot s \mathbb{1}_{\{s_n(1) \leq s\}} + EV_{n-1}(X, 1 - t) \mathbb{1}_{\{s < s_n(1)\}}.$$

Dazu beweisen wir, dass für alle  $0 \leq a \leq 1 - t$  gilt:

$$(1 - t - a) \cdot s_n(1) \geq EV_{n-1}(X, 1 - t - a) \quad \text{und}$$

$$EV_{n-1}(X, 1-t) - EV_{n-1}(X, 1-t-a) \geq a \cdot s_n(1).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt direkt die Behauptung. Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist offensichtlich mit Gleichheit erfüllt. Seien die Ungleichungen und damit die Behauptung richtig für  $n - 1$ . Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} (1-t-a) \cdot s_n(1) &\geq EV_{n-1}(X, 1-t-a) \\ \Leftrightarrow (1-t-a) \cdot E\left(X \mathbb{1}_{\{X \geq s_{n-1}(1)\}} + EV_{n-2}(X, 1) \mathbb{1}_{\{X < s_{n-1}(1)\}}\right) \\ &\geq E\left((1-t-a) \cdot X \mathbb{1}_{\{X \geq s_{n-1}(1)\}} + EV_{n-2}(X, 1-t-a) \mathbb{1}_{\{X < s_{n-1}(1)\}}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} EV_{n-1}(X, 1-t) - EV_{n-1}(X, 1-t-a) &\geq a \cdot s_n(1) \\ \Leftrightarrow E\left(a \cdot X \mathbb{1}_{\{X \geq s_{n-1}(1)\}} \right. \\ &\quad \left. + (EV_{n-2}(X, 1-t) - EV_{n-2}(X, 1-t-a)) \mathbb{1}_{\{X < s_{n-1}(1)\}}\right) \\ &\geq a \cdot E\left(X \mathbb{1}_{\{X \geq s_{n-1}(1)\}} + EV_{n-2}(X, 1) \mathbb{1}_{\{X < s_{n-1}(1)\}}\right). \end{aligned}$$

Also sind die Ungleichungen richtig für  $n$ , da  $s_{n-1}(1) = EV_{n-2}(X, 1)$  und damit folgt die Behauptung des Satzes für  $k = 1$ .  $\square$

**Bemerkung 3.2.2.** Da in (3.4) und (3.5) Gleichheit für  $t + a = 1$  gilt, ist  $V_n(s, k)$  stetig in  $s$ . Dies wurde schon in Satz 2.2.1 gezeigt.

Aus dem Beweis von Satz 3.2.1 folgt die Linearität von  $t \mapsto EV_n(X, k-t)$ .

**Korollar 3.2.3.** Für  $n \in \{1, \dots, N\}$  gilt für  $k \in \{1, \dots, N\}$  und  $0 \leq t \leq 1$

$$EV_n(X, k-t) = (1-t)EV_n(X, k) + tEV_n(X, k-1).$$

*Beweis.* Aus Gleichung (3.5) für  $a = 1-t$  folgt

$$EV_{n-1}(X, k-t) - EV_{n-1}(X, k-1) = (1-t)\left(EV_{n-1}(X, k) - EV_{n-1}(X, k-1)\right).$$

Dies ist äquivalent zu der Behauptung.  $\square$

Sei nun wieder  $k \in K = [0, N+1]$ . Mit den Resultaten dieses Abschnittes kann die Struktur von  $k \mapsto V_n(s, k)$  im Fall von u.i.v. Zufallsvariablen  $(X_n)$  noch etwas präziser angegeben werden als in Satz 2.2.1. Wir können nun beweisen, dass die Wertfunktion nicht nur konkav in der zweiten Komponente ist (siehe Satz 2.2.1), sondern dass  $t \mapsto V_n(s, k-t)$  sogar linear ist für alle  $k \in \{1, \dots, N+1\}$ . Diese Aussage findet sich auch in Bardou et al. (2010).

**Satz 3.2.4.** Für alle  $n = 1, \dots, N$  und für jedes  $s \geq 0$  gilt:

$$k \mapsto V_n(s, k)$$

ist stetig, konkav und stückweise linear auf allen Intervallen der Form  $[l - 1, l]$ ,  $l \in \{1, \dots, N + 1\}$ .

*Beweis.* In Satz 2.2.1 wurde gezeigt, dass  $k \mapsto V_n(s, k)$  für festes  $s \geq 0$  stetig und konkav ist. Aus Korollar 3.2.3 folgt, dass  $k \mapsto EV_n(X, k)$  auf allen Intervallen der Form  $[l - 1, l]$ ,  $l \in \{1, \dots, N + 1\}$  linear ist. Aus der Darstellung von  $V_n$  aus Satz 3.2.1 folgt daher, dass für jedes  $s \in S$  auch  $k \mapsto V_n(s, k)$  auf allen Intervallen der Form  $[l - 1, l]$ ,  $l \in \{1, \dots, N + 1\}$  linear ist.  $\square$

### 3.2.2. Markovketten

Sei nun eine Markovkette  $(X_n)$  mit Übergangsfunktion  $T$  gegeben. Wir werden zeigen, dass auch im Fall eines kontinuierlichen Aktionsraumes  $A = [0, 1]$  die Annahme (A1), siehe Seite 40, hinreichend für die Monotonie der Maximisatoren ist. Dabei werden wir auf die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes über u.i.v. Zufallsvariablen  $(X_n)$  zurückgreifen. Zunächst ergibt sich direkt folgender Satz.

**Satz 3.2.5.** Für alle  $k \in \{1, \dots, N + 1\}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  und für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$  gilt

$$\begin{aligned} & V_n(s, k - t) \\ &= \max_{a \in D(s, k-t)} \{a \cdot s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - t - a)\} \\ &= (\min\{k - t, 1\} \cdot s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - t - \min\{k - t, 1\})) \mathbb{1}_{\{s \geq G_{n-1}(s, k-1)\}} \\ &\quad + ((1 - t) \cdot s + EV_{n-1}(T(s, Y_n), k - 1)) \mathbb{1}_{\{G_{n-1}(s, k) \leq s < G_{n-1}(s, k-1)\}} \\ &\quad + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - t) \mathbb{1}_{\{s < G_{n-1}(s, k)\}}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis wird genauso geführt wie der Beweis von Satz 3.2.1. Statt  $X$  und  $s_n(k)$  betrachtet man nun  $T(s, Y)$  und  $G_{n-1}(s, k)$  (siehe Definition 3.1.2) und die Ungleichungen werden für alle  $s \geq 0$  gezeigt.  $\square$

Allgemein müssen also für jedes Angebot  $s$  die zugehörigen Werte  $G_{n-1}(s, k)$  und  $G_{n-1}(s, k - 1)$  überprüft werden, um die optimale Entscheidung zu finden. Gilt aber die Annahme (A1), so gibt es Schwellenwerte im vereinfachten Modell mit  $A = \{0, 1\}$ . Durch diese Schwellenwerte erhalten wir wie im Fall von u.i.v. Angeboten zu jedem Zeitpunkt und für jede zur Verfügung stehende Kapazität eine Zerlegung von  $[0, \infty)$  in drei Intervalle. Um die optimale Entscheidung zu bestimmen, muss man das Angebot  $s$  nur noch einem dieser Intervalle zuordnen.

**Satz 3.2.6.** *Es gelte (A1). Dann gilt für alle  $k \in \{1, \dots, N + 1\}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  und  $n = 1, \dots, N$*

$$\begin{aligned} V_n(s, k - t) &= \max_{0 \leq a \leq 1} \{a \cdot s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - t - a)\} \\ &= (\min\{k - t, 1\} \cdot s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - t - \min\{k - t, 1\})) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(k-1)\}} \\ &\quad + ((1 - t) \cdot s + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - 1)) \mathbb{1}_{\{s_n(k) \leq s < s_n(k-1)\}} \\ &\quad + EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k - t) \mathbb{1}_{\{s < s_n(k)\}}, \end{aligned}$$

wobei  $s_n(k) := \inf\{s : s \geq G_{n-1}(s, k)\}$  ein Schwellenwert ist.  
Der Maximisator  $f_n$  zum Zeitpunkt  $n$  hat also die Gestalt

$$f_n(s, k - t) = \begin{cases} \min\{k - t, 1\}, & s \geq s_n(k - 1) \\ 1 - t, & s_n(k) \leq s < s_n(k - 1) \\ 0, & s < s_n(k). \end{cases}$$

Die Maximisatoren sind monoton wachsend in  $s$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt direkt aus der L-Stetigkeit von  $s \mapsto G_n(s, k)$  mit  $L = 1$  (siehe Satz 3.1.11) und Satz 3.2.5.  $\square$

Sei nun  $k \in K = [0, N + 1]$ . Dann lässt sich mit den gleichen Argumenten wie bei u.i.v. Angeboten die stückweise Linearität der Wertfunktion  $k \mapsto V_n(s, k)$  zeigen. Es gilt also folgender Satz.

**Satz 3.2.7.** *Für alle  $n = 1, \dots, N$  und jedes  $s \geq 0$  gilt:*

$$k \mapsto V_n(s, k)$$

*ist stückweise linear auf allen Intervallen der Form  $[l - 1, l]$ ,  $l \in \{1, \dots, N + 1\}$ .*

*Beweis.* Aus dem Beweis von Satz 3.2.5 ergibt sich die stückweise Linearität von  $k \mapsto EV_{n-1}(T(s, Y_{n-1}), k)$  (siehe auch Korollar 3.2.3) und damit die stückweise Linearität von  $k \mapsto V_n(s, k)$ .  $\square$

### 3.3. Asymptotisches Verhalten der Schwellenwerte

In diesem Abschnitt wollen wir das asymptotische Verhalten der Schwellenwerte untersuchen. Da die Schwellenwerte im risikoneutralen Entscheidungsmodell die optimale Strategie bestimmen, erhalten wir damit Aussagen über die optimale Strategie, wenn die Laufzeit  $N$  des MDP gegen unendlich geht. Wir interessieren uns zunächst für den Fall, dass  $k = [N\alpha]$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$  und betrachten  $s_N([N\alpha])$  für  $N \rightarrow \infty$ .

Die Anzahl der Rechte ist also monoton wachsend in der Laufzeit  $N$  und der Quotient aus der Anzahl an Rechten und der Laufzeit konvergiert für  $N \rightarrow \infty$  gegen  $\alpha$ . Für u.i.v. Angebote  $(X_n)$  mit absolutstetiger Verteilungsfunktion  $F$  haben Albright und Derman (1972) gezeigt, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = F^{-1}(1 - \alpha).$$

Die Schwellenwerte konvergieren also gegen das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilung der Angebote. Dies ist intuitiv klar, denn

$$P(X > F^{-1}(1 - \alpha)) = \alpha$$

und  $\alpha$  entspricht asymptotisch gerade dem Verhältnis aus der Anzahl an Rechten und der Anzahl von Entscheidungszeitpunkten. Wir wollen das Resultat auf Markovketten verallgemeinern. Dafür benötigen wir aber nicht nur die Existenz von Schwellenwerten, die ja nicht garantiert ist, sondern auch noch ein “stabiles” Verhalten der Markovkette im Sinne von Rekurrenz und einer stationären Verteilung. Wir geben zunächst die benötigten Grundlagen über Markovketten auf allgemeinen Zustandsräumen an. Dabei orientieren wir uns an der Notation von Meyn und Tweedie (1993).

In allgemeinen Zustandsräumen können wir die Wahrscheinlichkeit  $P_s(\tau_A < \infty)$  bestimmen, eine Menge  $A \in \mathcal{B}(S)$  von einem Zustand  $s$  aus dem Zustandsraum  $S$  zu erreichen, um herauszufinden, ob die Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit jemals erreicht wird. Generell kann man aber nicht sagen, ob ein einzelner Zustand  $s \in S$  erreicht wird. Sei  $(X_n)$  z.B. ein Random Walk auf  $\mathbb{R}$  mit  $\lambda$ -stetigen Zuwächsen. Dann wird kein Zustand  $t \in \mathbb{R}$  mit positiver Wahrscheinlichkeit exakt angenommen, d.h.  $\inf\{n \geq 1 : X_n = t\} = \infty$   $P_s$ -f.s. für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ . Deshalb kann man das Konzept der Irreduzibilität auf abzählbaren Zustandsräumen nicht direkt auf allgemeine Zustandsräume übertragen. Hierfür benötigt man folgende Definition.

**Definition 3.3.1.**  $(X_n)$  heißt  $\varphi$ -irreduzibel, falls es ein Maß  $\varphi$  auf  $\mathcal{B}(S)$  gibt, so dass für jeden Zustand  $s \in S$  gilt:

$$\varphi(A) > 0 \Rightarrow P_s(\tau_A < \infty) > 0.$$

Der nachfolgende Satz (vgl. Meyn und Tweedie, 1993, Theoreme 4.0.1, 4.2.2) sagt aus, dass es ein Irreduzibilitätsmaß  $\psi$  gibt, so dass nicht nur  $\psi(A) > 0$  bedeutet, dass die Menge  $A$  von allen  $s \in S$  erreichbar ist, sondern dass auch  $\psi(A) = 0$  bedeutet, dass die Menge  $A$  von den “meisten” (gemessen nach  $\psi$ ) Startpunkten aus mit Wahrscheinlichkeit 1 gemieden wird. Zudem kann man  $\psi$ -Nullmengen vernachlässigen und sich auf eine absorbierende Menge von “guten” Punkten beschränken. Das Maß  $\psi$  ist also ein ähnliches Konzept wie die normale Irreduzibilität auf abzählbaren Zustandsräumen.

**Satz 3.3.2.** Sei  $(X_n)$   $\varphi$ -irreduzibel. Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\psi$  mit den Eigenschaften:

- i)  $(X_n)$  ist  $\psi$ -irreduzibel.
- ii) Falls  $\psi(A) = 0$ , dann gilt auch  $\psi(\{s : P_s(\tau_A < \infty) > 0\}) = 0$ .
- iii) Falls  $\psi(A^c) = 0$ , dann gilt  $A = A_0 \cup N$ , wobei  $\psi(N) = 0$  und die Menge  $A_0$  ist absorbierend, d.h.

$$P(s, A_0) = 1, \quad s \in A_0.$$

- iv) Für jedes andere Maß  $\varphi'$  gilt, die Kette ist  $\varphi'$ -irreduzibel g.d.w.  $\varphi' \ll \psi$ , d.h.  $\varphi'$  ist absolutstetig bzgl.  $\psi$ .

**Definition 3.3.3.**  $(X_n)$  heißt  $\psi$ -irreduzibel, falls die Markovkette  $\varphi$ -irreduzibel ist für ein Maß  $\varphi$  und das Maß  $\psi$  ein maximales Irreduzibilitätsmaß ist, also ein Maß mit den Eigenschaften aus dem vorangegangenen Satz ist.

**Definition 3.3.4.**  $\mathcal{B}^+(S) := \{A \in \mathcal{B}(S) : \psi(A) > 0\}$

Wir führen nun den Begriff der Harris-Rekurrenz ein. Rekurrenz lässt sich zwar noch allgemeiner definieren, tatsächlich unterscheidet sich eine rekurrente Markovkette von einer Harris-rekurrenten aber nur auf einer  $\psi$ -Nullmenge. Auf abzählbaren Zustandsräumen sind rekurrente Markovketten sogar automatisch auch Harris-rekurrent. Daher beschränken wir uns hier auf die Harris-Rekurrenz.

**Definition 3.3.5.**

- a)  $A \in \mathcal{B}(S)$  heißt **Harris-rekurrent**, falls

$$P_s(N_A = \infty) = 1 \quad \text{für alle } s \in A,$$

wobei  $N_A$  die Anzahl der Besuche der Markovkette in  $A$  ist.

- b)  $(X_n)$  heißt **Harris-Kette**, falls  $(X_n)$   $\psi$ -irreduzibel ist und jede Menge in  $\mathcal{B}^+(S)$  Harris-rekurrent ist. Falls  $(X_n)$  Harris-Kette, dann gilt  $P_s(N_B = \infty) = 1$  für alle  $s \in S$  und jedes  $B \in \mathcal{B}^+(S)$ .
- c)  $(X_n)$  heißt **positive Harriskette**, falls  $(X_n)$  eine Harriskette ist, die eine stationäre Verteilung  $\pi$  besitzt.

Wir geben ein Beispiel für eine positive Harriskette (siehe Meyn und Tweedie, 1993, Prop. 11.4.2) an.



**Beispiel 3.3.6** (lineares Modell, AR(1)).

Sei

$$X_{n+1} = \alpha X_n + W_{n+1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

mit  $(W_n)$  u.i.v. Zufallsvariablen auf  $\mathbb{R}$ , die überall positive Dichte haben und einer beliebigen Startverteilung von  $X_0$ . Dann ist  $(X_n)$  eine positive Harriskette, falls  $E(|W|) < \infty$  und  $|\alpha| < 1$ .

Der nächste Satz charakterisiert die stationäre Verteilung einer Harriskette auf allgemeinen Zustandsräumen (vgl. Meyn und Tweedie, 1993, Theorem 10.4.9).

**Satz 3.3.7.** Sei  $(X_n)$  positive Harriskette mit stationärer Verteilung  $\pi$ . Dann gilt für alle  $A \in \mathcal{B}^+(S)$  und  $B \in \mathcal{B}(S)$

$$\pi(B) = \int_A E_x \left( \sum_{k=1}^{\tau_A} \mathbb{1}_B(X_k) \right) \pi(dx)$$

und

$$\pi \approx \psi,$$

d.h.  $\pi$  und  $\psi$  sind äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße.

**Definition 3.3.8.** Für jede Startverteilung  $\mu$  auf  $(S, \mathcal{B}(S))$  sei  $P_\mu$  das nach Ionescu-Tulcea eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}(S)^{\mathbb{N}_0})$ , so dass  $(X_n)$  unter  $P_\mu$  eine Markovkette mit Übergangskern  $P$  und Startverteilung  $\mu$  ist. Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $B \in \mathcal{B}(S)$  gilt

$$P_\mu(X_n \in B) = \int P_s(X_n \in B) \mu(ds).$$

$E_\mu$  bezeichne den Erwartungswert bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P_\mu$ .

Für positive Harrisketten gilt das starke Gesetz der großen Zahlen (vgl. Meyn und Tweedie, 1993, Theorem 17.0.1).

**Satz 3.3.9.** Sei  $(X_n)$  eine positive Harriskette mit stationärer Verteilung  $\pi$ . Dann gilt für jede Funktion  $g$  auf  $S$  mit  $\int |g(x)| \pi(dx) < \infty$  das starke Gesetz der großen Zahlen, d.h. für jede Startverteilung  $\mu$  gilt  $P_\mu$ -f.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(X_k) = \int g(x) \pi(dx).$$

Wir kommen nun zu unserem MDP zurück und betrachten als Folge der Angebote  $(X_n)$  positive Harrisketten auf  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ . Dabei sei  $T$  wieder die Übergangsfunktion von  $(X_n)$ . Zudem sei die folgende Annahme erfüllt.

**Annahme (A2).** Es gelte Annahme (A1), siehe Seite 40, für eine positive Harriskette  $(X_n)$  auf  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  mit stationärer Verteilung  $\pi$  und

$$\int_0^\infty x \pi(dx) < \infty.$$

Annahme (A1) wird benötigt, denn sie garantiert die Existenz von Schwellenwerten. Wir geben ein Beispiel für eine positive Harriskette an, die Annahme (A2) erfüllt (siehe Meyn und Tweedie, 1993, Prop. 11.4.1 und Prop. 14.4.1).

**Beispiel 3.3.10** (Random Walk auf  $\mathbb{R}^+$ ).

Sei

$$X_{n+1} = (X_n + W_{n+1})^+$$

mit  $(W_n)$  u.i.v. Zufallsvariablen auf  $\mathbb{R}$  und einer beliebigen Startverteilung von  $X_0$ . Falls  $E(W) < 0$ , dann ist  $(X_n)$  eine positive Harriskette mit stationärer Verteilung  $\pi$ . Mit der Übergangsfunktion  $T: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $(s, y) \mapsto (s + y)^+$  gilt Annahme (A1). Falls zusätzlich das  $(k + 1)$ -te Moment von  $W$  existiert, dann hat  $\pi$  endliches  $k$ -tes Moment. Wenn  $E(W^2) < \infty$ , dann gilt also

$$\int_0^\infty x \pi(dx) < \infty$$

und damit auch Annahme (A2).

Unter der Annahme (A2) gilt folgendes Lemma.

**Lemma 3.3.11.** Es gelte (A2). Für  $0 < \alpha < 1$  und  $N \in \mathbb{N}$  seien

$$U([N\alpha]) := \min \left\{ n : \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \in B\}} = [N\alpha] \right\}$$

der  $[N\alpha]$ -te Besuch der Menge  $B = (c, \infty)$ ,  $c \geq 0$  und

$$M([N\alpha]) := \min(U([N\alpha]), N).$$

Falls  $\pi(B) > \alpha$ , dann gilt für alle  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^{M([N\alpha])} X_k \mathbb{1}_{\{X_k \in B\}} \right) = \frac{\alpha}{\pi(B)} \int_B x \pi(dx).$$

*Beweis.* Für ein beliebiges  $\alpha \in (0, 1)$  sei  $c$  so gewählt, dass  $\pi(B) > \alpha$ . Für jedes

$d \geq 0$  gilt zunächst

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) > N\}} \right) \\ &= \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) > N\}} + X_k \mathbf{1}_{\{X_k \leq d\}} \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) > N\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \right) + d \cdot P_s(U([N\alpha]) > N). \end{aligned}$$

Aus Annahme (A1) folgt die stochastische Monotonie des Übergangskernes und damit insbesondere

$$\frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \right) \leq \frac{1}{N} E_t \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \right)$$

für  $s \leq t$ , da die Funktion  $x \mapsto x \mathbf{1}_{(d, \infty)}(x)$  monoton wachsend ist. Sei

$$\pi_s = \frac{\pi(\cdot \cap [s, \infty))}{\pi([s, \infty))},$$

dann gilt für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \right) &\leq \frac{1}{N} E_{\pi_s} \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{N \cdot \pi([s, \infty))} E_{\pi} \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k > d\}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi([s, \infty))} E_{\pi}(X_0 \mathbf{1}_{\{X_0 > d\}}) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes  $d = d(s) \geq 0$  und jedes  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) > N\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi([s, \infty))} E_{\pi}(X_0 \mathbf{1}_{\{X_0 > d\}}) + d \cdot P_s(U([N\alpha]) > N) \\ &< \varepsilon + d \cdot P_s(U([N\alpha]) > N). \end{aligned}$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen und  $\pi(B) > \alpha$  folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_s(U([N\alpha]) > N) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} < [N\alpha] \right) = 0$$

für alle  $s \geq 0$ . Insgesamt gilt also

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) > N\}} \right) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) > N\}} \right) = 0$$

für alle  $s > 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$ .

Seien nun  $\tau_n(B)$  die sukzessiven Eintrittszeitpunkte in die Menge  $B$  und  $X_n^B := X_{\tau_n(B)}$  für  $n \geq 1$  der Prozess auf  $B$ . Da  $(X_n^B)$  eine Harriskette mit stationärer Verteilung

$$\pi_B = \frac{\pi(\cdot \cap B)}{\pi(B)}$$

bildet (siehe z.B. Alsmeyer, 1991, Satz 8.3.7), folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k^B = \int x \pi_B(dx) = \frac{1}{\pi(B)} \int_B x \pi(dx) \quad P_s\text{-f.s.}$$

für alle  $s \geq 0$ . Also gilt auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^{U([N\alpha])} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \right) &= \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^{[N\alpha]} X_k^B \right) \\ &= \frac{[N\alpha]}{N} \cdot \frac{1}{[N\alpha]} E_s \left( \sum_{k=1}^{[N\alpha]} X_k^B \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(B)} \int_B x \pi(dx). \end{aligned}$$

Aus  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_s(U([N\alpha]) \leq N) = 1$  folgt wegen dominierter Konvergenz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_s \left( \sum_{k=1}^{U([N\alpha])} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \mathbf{1}_{\{U([N\alpha]) \leq N\}} \right) = E_s \left( \sum_{k=1}^{U([N\alpha])} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \right)$$

und damit die Behauptung, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^{M(\lfloor N\alpha \rfloor)} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \right) &= \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^{U(\lfloor N\alpha \rfloor)} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \mathbf{1}_{\{U(\lfloor N\alpha \rfloor) \leq N\}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}} \mathbf{1}_{\{U(\lfloor N\alpha \rfloor) > N\}} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(B)} \int_B x \pi(dx) \end{aligned}$$

für alle  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$ . □

In den nächsten beiden Lemmata zeigen wir, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) = \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx), \quad (3.8)$$

für alle  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$ , falls  $F_\pi$  die Verteilungsfunktion von  $\pi$  ist. Damit können wir dann die gewünschte asymptotische Aussage für die Schwellenwerte beweisen.

Zunächst betrachten wir eine nicht optimale Strategie und erhalten eine untere Schranke für die linke Seite der Gleichung (3.8).

**Lemma 3.3.12.** *Es gelte (A2). Dann gilt für alle  $0 < \alpha < 1$  und  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \geq \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx),$$

wobei  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil von  $F_\pi$  ist.

*Beweis.* Für festes  $\alpha \in (0, 1)$  sei  $c = F_\pi^{-1}(1 - \alpha - \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $B = (c, \infty)$ . Sei  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1})$  folgende stationäre Strategie im  $(N - 1)$ -stufigen Modell: Falls das Angebot größer als  $c$  ist, übt man solange aus, bis nur noch genauso viele Rechte übrig sind wie verbleibende Perioden. Danach nimmt man jedes Angebot. Nach Definition der optimalen Strategie gilt dann für den zufälligen Gewinn  $G_{N-1, \sigma}$  dieser Strategie, dass

$$E_s(G_{N-1, \sigma}) = EV_{N-1, \sigma}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \leq EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]). \quad (3.9)$$

Sei nun

$$G_{N-1, c} = \sum_{k=1}^{M(\lfloor N\alpha \rfloor)} X_k \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}}.$$

Dann ist  $G_{N-1,c}$  der zufällige Gewinn der nicht zulässigen Strategie, bei der nur Angebote oberhalb von  $c$ , unabhängig von der aktuellen Periode, angenommen werden. Es kann also passieren, dass nicht alle Rechte benutzt werden. Sei nun  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$ . In Lemma 3.3.11 wurde gezeigt, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_s G_{N-1,c} = \frac{\alpha}{\pi(B)} \int_B x F_\pi(dx).$$

Sei  $T_N = \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{X_k \in B\}}$  die Anzahl der Besuche der Menge  $B$  bis zum Zeitpunkt  $N$ . Dann gilt

$$G_{N-1,\sigma} = G_{N-1,c}$$

auf  $\{U([N\alpha]) \leq N\}$ , da in diesem Fall auch bei der Strategie  $\sigma$  nur bei Werten oberhalb von  $c$  ausgeübt wird. Auf  $\{U([N\alpha]) > N\}$  gilt  $[N\alpha] - T_N > 0$ . Es werden also  $([N\alpha] - T_N)$  Angebote, die alle unterhalb von  $c$  liegen, bei der Strategie  $\sigma$  zusätzlich zu den  $T_N$  Angeboten oberhalb von  $c$  angenommen. Auf dieser Menge gilt also

$$\begin{aligned} G_{N-1,\sigma} - G_{N-1,c} &\leq ([N\alpha] - T_N) \cdot c \\ &\leq [N\alpha] \cdot c. \end{aligned}$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} (E_s G_{N-1,\sigma} - E_s G_{N-1,c}) \\ &\leq \frac{1}{N} [N\alpha] \cdot c \cdot P_s(U([N\alpha]) > N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und daher gilt wegen (3.9)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon} \cdot \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha-\varepsilon)}^\infty x F_\pi(dx) &\leq \frac{\alpha}{\pi(B)} \cdot \int_B x F_\pi(dx) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} EV_{N-1,\sigma}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, ergibt sich die Behauptung als Grenzwert für  $\varepsilon \downarrow 0$ . □

Um eine obere Schranke für die linke Seite der Gleichung (3.8) zu bekommen, vergleichen wir die optimale Strategie mit einer nicht zulässigen Strategie, nämlich der Strategie, die besten  $[N\alpha]$  Angebote zu nehmen.

**Lemma 3.3.13.** *Es gelte (A2) und zusätzlich sei  $F_\pi$  stetig. Dann gilt für alle  $0 < \alpha < 1$  und  $s \geq 0$*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \leq \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx)$$

*Beweis.* Sei  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(N)}$  die Ordnungsstatistik von  $X_1, \dots, X_N$ . Dann gilt offensichtlich

$$EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \leq E_s \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} \right), \quad (3.10)$$

denn es gibt keine bessere Auszahlung als die höchsten  $[N\alpha]$  Angebote. Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=1}^N X_k \mathbb{1}_{\{X_k > F_\pi^{-1}(1-\alpha)\}} \right) = \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx).$$

Wir zeigen nun, dass dies auch für  $E_s \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} \right)$  gilt. Sei  $T_N = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{X_k > F_\pi^{-1}(1-\alpha)\}}$  die Anzahl der Besuche bis zur Zeit  $N$  in der Menge  $(F_\pi^{-1}(1-\alpha), \infty)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & E_s \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} - \sum_{k=1}^N X_k \mathbb{1}_{\{X_k > F_\pi^{-1}(1-\alpha)\}} \right) \\ &= \int_{\{T_N \leq [N\alpha]\}} \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} - \sum_{k=1}^N X_k \mathbb{1}_{\{X_k > F_\pi^{-1}(1-\alpha)\}} \right) dP_s \\ &+ \int_{\{T_N > [N\alpha]\}} \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} - \sum_{k=1}^N X_k \mathbb{1}_{\{X_k > F_\pi^{-1}(1-\alpha)\}} \right) dP_s \\ &= \int_{\{T_N \leq [N\alpha]\}} \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^{N-T_N} X_{(k)} dP_s - \int_{\{T_N > [N\alpha]\}} \sum_{k=N-T_N+1}^{N-[N\alpha]} X_{(k)} dP_s \\ &\leq F_\pi^{-1}(1-\alpha) \cdot \left( \int_{\{T_N \leq [N\alpha]\}} [N\alpha] - T_N dP_s - \int_{\{T_N > [N\alpha]\}} T_N - [N\alpha] dP_s \right) \\ &= F_\pi^{-1}(1-\alpha) \cdot E_s([N\alpha] - T_N), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung daraus folgt, dass die Terme des ersten Integrals alle kleiner als  $F_\pi^{-1}(1-\alpha)$  und die Terme des zweiten Integrals alle größer als  $F_\pi^{-1}(1-\alpha)$  sind.

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_s \left( \frac{T_N}{N} \right) = \alpha$$

und deshalb gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} - \sum_{k=1}^N X_k \mathbb{1}_{\{X_k > F_\pi^{-1}(1-\alpha)\}} \right) \\ & \leq F_\pi^{-1}(1-\alpha) \cdot E_s \left( \frac{[N\alpha]}{N} - \frac{T_N}{N} \right) \\ & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_s \left( \sum_{k=N-[N\alpha]+1}^N X_{(k)} \right) = \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx).$$

Damit folgt aus (3.10)

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) \leq \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx).$$

□

Nachdem wir nun die Gleichung (3.8) gezeigt haben, können wir den wesentlichen Satz dieses Abschnittes beweisen.

**Satz 3.3.14.** *Unter den Annahmen der beiden vorangegangenen Lemmata gilt für alle Stetigkeitspunkte von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1-\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = F_\pi^{-1}(1-\alpha).$$

*Beweis.* Sei  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$  und  $\alpha \in (0, 1)$  ein Stetigkeitspunkt der Funktion  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1-\alpha)$ . Aus der Definition von  $G_{N-1}(s, k)$  folgt sofort folgende Darstellung von  $EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha])$  als Teleskopsumme

$$EV_{N-1}(T(s, Y_{N-1}), [N\alpha]) = \sum_{k=1}^{[N\alpha]} G_{N-1}(s, k).$$



Wir haben also bisher gezeigt, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{[N\alpha]} G_{N-1}(s, k) = \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx)$$

gilt. Sei nun  $0 < \alpha < \alpha' < 1$  und  $N$  so groß, dass  $[N\alpha'] \geq [N\alpha] + 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=[N\alpha]+1}^{[N\alpha']} G_{N-1}(s, k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{[N\alpha']} G_{N-1}(s, k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{[N\alpha]} G_{N-1}(s, k) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha')}^{\infty} x F_\pi(dx) - \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} x F_\pi(dx) \\ &= \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha')}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} x F_\pi(dx). \end{aligned}$$

Da  $G_{N-1}(s, k)$  monoton fallend in  $k$  ist, gilt

$$\frac{1}{N} ([N\alpha'] - [N\alpha]) G_{N-1}(s, [N\alpha]) \geq \frac{1}{N} \sum_{k=[N\alpha]+1}^{[N\alpha']} G_{N-1}(s, k).$$

Es folgt

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} G_{N-1}(s, [N\alpha]) \geq \frac{1}{\alpha' - \alpha} \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha')}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} x F_\pi(dx)$$

und wegen der Stetigkeit von  $F_\pi$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha' - \alpha} \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha')}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} x F_\pi(dx) &\geq F_\pi^{-1}(1 - \alpha') \cdot \frac{1}{\alpha' - \alpha} \cdot \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha')}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} F_\pi(dx) \\ &= F_\pi^{-1}(1 - \alpha'). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  in  $\alpha$  folgt

$$\lim_{\alpha' \downarrow \alpha} \frac{1}{\alpha' - \alpha} \int_{F_\pi^{-1}(1-\alpha')}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} x F_\pi(dx) \geq \lim_{\alpha' \downarrow \alpha} F_\pi^{-1}(1 - \alpha') = F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$$

und daraus ergibt sich insgesamt

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} G_{N-1}(s, [N\alpha]) \geq F_\pi^{-1}(1 - \alpha).$$

Sei nun  $0 < \alpha' < \alpha < 1$ . Dann folgt für  $N$  groß genug, so dass  $[N\alpha] \geq [N\alpha'] + 1$

$$\frac{1}{N}([N\alpha] - [N\alpha'])G_{N-1}(s, [N\alpha]) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=[N\alpha']+1}^{[N\alpha]} G_{N-1}(s, k).$$

Eine ähnliche Rechnung wie zuvor ergibt

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} G_{N-1}(s, [N\alpha]) \leq F_{\pi}^{-1}(1 - \alpha)$$

und damit folgt

$$F_{\pi}^{-1}(1 - \alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_{N-1}(s, [N\alpha])$$

für alle  $s \geq 0$  mit  $\pi([s, \infty)) > 0$ . Wegen

$$s_N([N\alpha]) = \inf\{s \geq 0 : s \geq G_{N-1}(s, [N\alpha])\},$$

folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = F_{\pi}^{-1}(1 - \alpha),$$

da  $\pi([s, \infty)) > 0$  für alle  $s \leq F_{\pi}^{-1}(1 - \alpha)$ . □

Man kann für u.i.v. Angebote  $(X_n)$  leicht zeigen, dass für festes  $k \in \mathbb{N}$

$$s_N(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{ess sup } P^X,$$

wobei  $P^X$  die Verteilung der Angebote ist (siehe z.B. Pronzato (2001), Theorem 2). Wir zeigen nun, dass die entsprechende Aussage auch allgemeiner für Markovketten gilt, die den Voraussetzungen dieses Abschnittes genügen. An die Stelle von  $P^X$  tritt dann die stationäre Verteilung  $\pi$ .

**Satz 3.3.15.** *Sei  $(X_n)$  eine Harriskette, die (A2) erfüllt und die Verteilungsfunktion  $F_{\pi}$  sei stetig. Dann gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(k) = \text{ess sup } \pi = \sup\{x : 1 - F_{\pi}(x) > 0\}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(k) \geq \text{ess sup } \pi.$$

Für festes  $k \in \mathbb{N}$  und zu jedem  $\alpha \in (0, 1)$  mit  $\alpha$  Stetigkeitspunkt von  $\alpha \mapsto F_{\pi}^{-1}(1 - \alpha)$  gibt es ein  $N(\alpha)$ , so dass

$$[N\alpha] \geq k$$

für alle  $N \geq N(\alpha)$ . Da  $s_N(k)$  monoton fallend in  $k$  ist, folgt aus dem letzten Satz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(k) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = F_\pi^{-1}(1 - \alpha).$$

Daraus folgt die Behauptung aus dem Grenzwert  $\alpha \rightarrow 0$ , denn es gibt eine Folge  $(\alpha_n)$  von Stetigkeitspunkten mit  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

Für die andere Richtung zeigen wir, dass es eine absorbierende Menge  $C$  gibt, mit

$$P_s(X_1 > \text{ess sup } \pi) = 0 \quad \text{für alle } s \in C.$$

Weil  $\pi$  und  $\psi$  äquivalente Maße sind (siehe Satz 3.3.7), folgt aus  $\pi((\text{ess sup } \pi, \infty)) = 0$ , dass

$$\psi((\text{ess sup } \pi, \infty)) = 0.$$

Aufgrund der Eigenschaften von  $\psi$  (siehe Satz 3.3.2) ergibt sich daraus

$$\psi(\{s : P_s(\tau_{(\text{ess sup } \pi, \infty)} < \infty) > 0\}) = 0$$

und damit auch

$$\psi(\{s : P_s(X_1 > \text{ess sup } \pi) > 0\}) = 0.$$

Daraus folgt weiter aus Satz 3.3.2, dass es eine absorbierende Menge  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$  mit der gesuchten Eigenschaft gibt. Wir haben also gezeigt, dass

$$\sup\{x \geq 0 : P_s(X_1 > x) > 0\} \leq \text{ess sup } \pi$$

für alle  $s \in C$ . Daraus folgt für  $s \in C$

$$\begin{aligned} G_0(s, k) &\leq ET(s, Y_0) < \sup\{x \geq 0 : P_s(X_1 > x) > 0\} \\ &\leq \text{ess sup } \pi. \end{aligned}$$

Sei nun  $G_{N-1}(s, k) < \text{ess sup } \pi$  für alle  $s \in C$ , dann gilt

$$\begin{aligned} G_N(s, k) &= EV_N(T(s, Y_N), k) - EV_N(T(s, Y_N), k - 1) \\ &\leq E \max\left\{T(s, Y_N) + EV_{N-1}\left(T(T(s, Y_N), Y_{N-1}), k - 1\right), \right. \\ &\quad \left. EV_{N-1}\left(T(T(s, Y_N), Y_{N-1}), k\right)\right\} \\ &\quad - EV_{N-1}\left(T(T(s, Y_N), Y_{N-1}), k - 1\right) \\ &= E \max\{T(s, Y_N), G_{N-1}(T(s, Y_N), k)\} \\ &\stackrel{(*)}{<} E \max\{T(s, Y_N), \text{ess sup } \pi\} \\ &= \text{ess sup } \pi, \end{aligned}$$

wobei (\*) gilt, da  $C$  absorbierend ist. Also gilt wegen  $\pi(C) = 1$  für alle  $N \in \mathbb{N}$

$$\{s \in C : s \geq G_{N-1}(s, k)\} \neq \emptyset$$

und daher

$$\begin{aligned} s_N(k) &= \inf\{s \geq 0 : s \geq G_{N-1}(s, k)\} \\ &\leq \inf\{s \in C : s \geq G_{N-1}(s, k)\} \\ &\leq \text{ess sup } \pi. \end{aligned}$$

□

Wir geben eine weitere Aussage über das asymptotische Verhalten der Schwellenwerte an, die auch aus Satz 3.3.14 gefolgert werden kann. Der Satz sagt aus, dass wenn der Quotient aus der Anzahl an Rechten und der Laufzeit gegen eins geht, dann konvergieren die Schwellenwerte gegen das Infimum der stationären Verteilung.

**Satz 3.3.16.** *Unter den Annahmen des letzten Satzes gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(N - k) = \inf\{x : F_\pi(x) > 0\} =: m.$$

*Beweis.* Sei  $k \in \mathbb{N}$  beliebig. Zu jedem  $0 < \alpha < 1$  gibt es ein  $N(\alpha)$ , so dass

$$[N\alpha] < N - k$$

für alle  $N \geq N(\alpha)$ . Weil  $k \mapsto s_N(k)$  monoton fallend ist, gilt somit

$$s_N(N - k) \leq s_N([N\alpha])$$

für alle  $N \geq N(\alpha)$ . Aus Satz 3.3.14 folgt damit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(N - k) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$$

für alle  $\alpha \in (0, 1)$ , die eine Stetigkeitsstelle von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  sind. Wegen

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} F_\pi^{-1}(1 - \alpha) = m$$

ergibt sich insgesamt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(N - k) \leq m.$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{[m, \infty)}(X_i) = \pi([m, \infty)) = 1 \quad P_s\text{-f.s.}$$

für alle  $s \geq 0$ . Daher gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_s \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{[m, \infty)}(X_i) \geq N - k \right) = 1$$

für alle  $s \geq 0$  und somit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(N - k) \geq m$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . □

### 3.3.1. Beispiele

Wir betrachten als Beispiel u.i.v. Zufallsvariablen  $(X_n)$ , die gleichverteilt auf  $(0, 100)$  sind. In diesem Fall sind natürlich sämtliche Voraussetzungen erfüllt. Satz 3.3.14 sagt aus, dass dann  $s_N([N\alpha])$  gegen das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Gleichverteilung auf  $(0, 100)$  konvergiert, es gilt also

$$s_N([N\alpha]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 100 \cdot (1 - \alpha)$$

für alle  $0 < \alpha < 1$ . Die nachfolgende Abbildung zeigt  $s_N([N\alpha])$  für  $N = 1, \dots, 100$  und  $\alpha = 0.7$ .

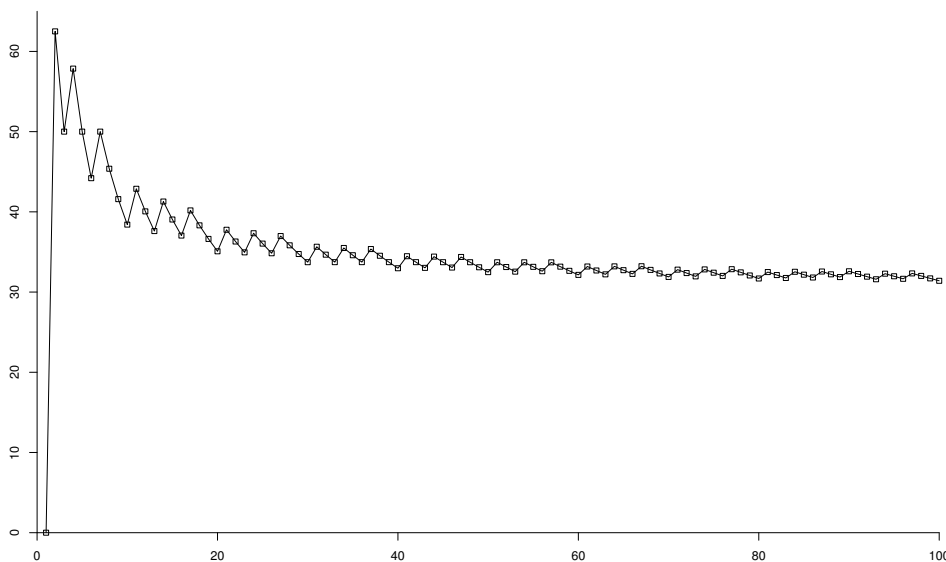


Abbildung 3.5.: Konvergenz der Schwellenwerte im risikoneutralen Modell bei Gleichverteilung auf  $(0, 100)$  und  $\alpha = 0.7$ .

Als Beispiel für eine nicht u.i.v. Folge  $(X_n)$  betrachten wir das Trinomialmodell (siehe Abschnitt 3.1.1). Wir müssen überprüfen, ob Annahme (A2) gilt (siehe Seite 60). Da der Zustandsraum im Trinomialmodell endlich ist, gibt es eine stationäre Verteilung  $\pi$  mit  $E_\pi(X_0) < \infty$ . Wegen Satz 3.1.16 ist die Annahme (A<sub>1</sub>) erfüllt und deshalb gilt insgesamt Annahme (A2).

Um den Grenzwert der Schwellenwerte für  $N \rightarrow \infty$  angeben zu können, benötigen wir die stationäre Verteilung  $\pi$  der Harriskette.

**Satz 3.3.17.** *Sei ein Maß  $\nu$  auf  $S = \{0, \dots, l\}$  gegeben mit  $\nu(0) = 1$  und*

$$\nu(i) = \prod_{k=1}^i \frac{p_{k-1,k}}{p_{k,k-1}}, \quad i \geq 1.$$

*Dann ist  $\nu$  ein invariantes Maß für die Übergangsmatrix  $P = (p_{ij})$  im Trinomialmodell.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\nu$  sogar reversibel ist. Für  $i \in \{0, \dots, l-1\}$  gilt

$$\begin{aligned} \nu(i+1) \cdot p_{i+1,i} &= \prod_{k=1}^{i+1} \frac{p_{k-1,k}}{p_{k,k-1}} \cdot p_{i+1,i} \\ &= \prod_{k=1}^i \frac{p_{k-1,k}}{p_{k,k-1}} \cdot p_{i,i+1} \\ &= \nu(i) \cdot p_{i,i+1}. \end{aligned}$$

Wegen  $p_{ik} = 0$  für  $|k - i| > 1$  folgt daraus schon, dass  $\nu$  reversibel und damit insbesondere invariant ist.  $\square$

Die eindeutige stationäre Verteilung  $\pi = (\pi(0), \dots, \pi(l))$  für  $P$  auf  $S$  ist dann gegeben durch

$$\pi(i) = \frac{\nu(i)}{\nu(S)}, \quad i = 0, \dots, l.$$

Die folgende Abbildung zeigt  $\pi$  für  $l = 10$ , also  $S = \{0, \dots, 10\}$ .

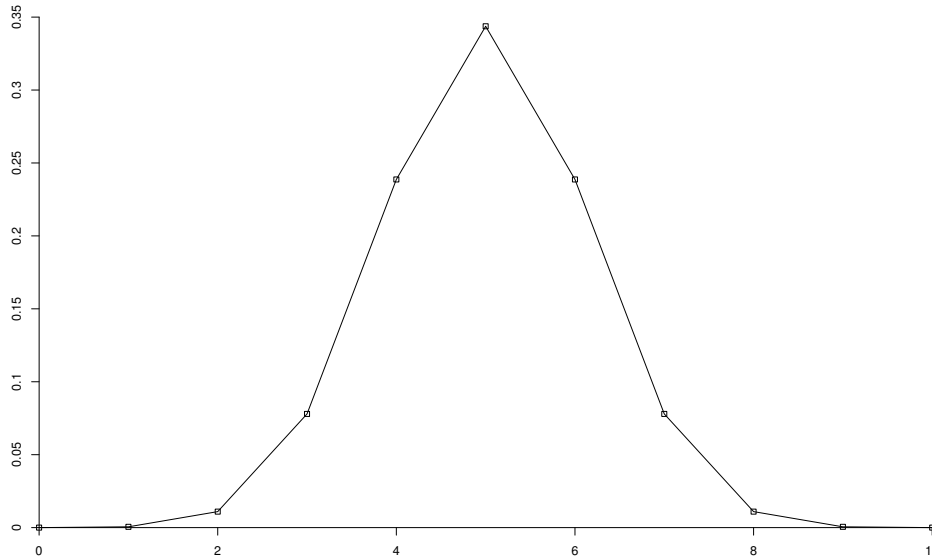


Abbildung 3.6.: Dichte der stationären Verteilung im Trinomialmodell für  $l = 10$ .

Da die Verteilungsfunktion in diesem Beispiel nicht stetig ist, lassen sich die Ergebnisse des Abschnittes nicht direkt anwenden. Es wird sich aber herausstellen, dass  $N \mapsto s_N([N\alpha])$  auch hier für alle Stetigkeitsstellen von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  gegen das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilung im Trinomialmodell konvergiert.

Wir betrachten zunächst allgemeine Markovketten mit Werten in  $S \subseteq \mathbb{Z}$ , die die Annahme (A2) erfüllen. Sei

$$M := \sup\{x : \pi(x) > 0\} \quad \text{und} \\ m := \inf\{x : \pi(x) > 0\}.$$

Mithilfe des Beweises von Satz 3.3.14 können wir asymptotische Schranken für  $s_N([N\alpha])$  angeben.

**Satz 3.3.18.** *( $X_n$ ) sei eine Markovkette mit Zustandsraum  $S \subseteq \mathbb{Z}$  für die (A2) gilt. Für alle  $\alpha \in (0, 1)$  sei*

$$c(\alpha) := F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \cdot \left( \alpha - \pi((F_\pi^{-1}(1 - \alpha), \infty)) \right).$$

Dann gilt:

- a) Sei  $\alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \geq m + 1$  gegeben. Dann gilt für alle  $\alpha' > \alpha$  mit

$F_\pi^{-1}(1 - \alpha') + 1 \leq F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  und alle  $s \in S$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} G_{N-1}(s, [N\alpha]) \geq \frac{1}{\alpha' - \alpha} \left( \sum_{k=F_\pi^{-1}(1-\alpha')+1}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} k \pi(k) - c(\alpha) \right) =: b_l(\alpha').$$

b) Sei  $\alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \leq M - 1$  gegeben. Dann gilt für alle  $\alpha' < \alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha') \geq F_\pi^{-1}(1 - \alpha) + 1$  und alle  $s \in S$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} G_{N-1}(s, [N\alpha]) \leq \frac{1}{\alpha - \alpha'} \left( \sum_{k=F_\pi^{-1}(1-\alpha)+1}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha')} k \pi(k) + c(\alpha) \right) =: b_u(\alpha').$$

*Beweis.* Folgt aus den Beweisen der Lemmata 3.3.12 und 3.3.13 und Satz 3.3.14 ohne die Stetigkeitsannahme an die Verteilungsfunktion.  $\square$

Aus der Definition von  $s_n(k)$  (siehe Definition 3.1.9) folgt direkt

**Korollar 3.3.19.** Sei  $\alpha \in (0, 1)$  jeweils der Schranke entsprechend (siehe Satz 3.3.18). Dann gilt für alle  $\alpha' > \alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha') + 1 \leq F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) \geq b_l(\alpha')$$

und für alle  $\alpha' < \alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha') \geq F_\pi^{-1}(1 - \alpha) + 1$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) \leq b_u(\alpha').$$

**Bemerkung 3.3.20.**  $m$  ist natürlich immer eine untere Schranke und  $M$  eine obere Schranke (siehe auch Beweise von Satz 3.3.15 und Satz 3.3.16). Damit sind auch die Fälle  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) = m$  und  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) = M$  erklärt.

Abhängig von den gewählten  $\alpha'$  erhalten wir also ein Intervall, in dem sich  $s_N([N\alpha])$  asymptotisch befindet. Bei der Suche nach einem möglichst kleinen Intervall, ist es zunächst einmal offensichtlich, dass nur diejenigen  $\alpha'$  untersucht werden müssen, für die  $F_\pi(F_\pi^{-1}(1 - \alpha')) = 1 - \alpha'$  gilt, denn der Faktor vor der Klammer in  $b_l(\alpha')$  und  $b_u(\alpha')$  ist monoton in  $\alpha'$ . Wir werden zeigen, dass es genügt, diejenigen  $\alpha'$  zu betrachten, so dass die Summen in einen einzelnen Summanden zerfallen. Dafür nehmen wir o.B.d.A. an, dass für  $x \in S$  mit  $m < x < M$  auch  $(x + 1) \in S$  und  $(x - 1) \in S$  ist. Für  $\alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \leq M - 1$  sei

$$\alpha_u := \min \{ \alpha' \in [0, 1] : F_\pi^{-1}(1 - \alpha') = F_\pi^{-1}(1 - \alpha) + 1 \}$$



und für  $\alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \geq m + 1$  sei

$$\alpha_l := \min \{ \alpha' \in [0, 1] : F_\pi^{-1}(1 - \alpha') + 1 = F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \}.$$

Wir wollen die dazugehörigen Schranken ausrechnen.

**Satz 3.3.21.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.3.18 gilt:*

a) Für  $0 < \alpha < 1$  mit  $x := F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \leq M - 1$  ist

$$b_u(\alpha_u) \leq x + 1$$

mit “=” g.d.w.  $\alpha = 1 - F_\pi(x)$ .

b) Für  $0 < \alpha < 1$  mit  $x := F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \geq m + 1$  ist

$$b_l(\alpha_l) = x.$$

*Beweis.*

a) Wir zeigen zunächst die obere Schranke. Für  $\alpha$  benutzen wir die Darstellung

$$\alpha = (1 - F_\pi(x + 1)) + h, \quad h \geq \pi(x + 1).$$

Dann gilt  $\alpha_u = 1 - F_\pi(x + 1)$  und  $c(\alpha) = x \cdot (\alpha - (1 - F_\pi(x)))$ . Es folgt

$$\begin{aligned} b_u(\alpha_u) &= \frac{1}{\alpha - \alpha_u} \cdot \left( \sum_{k=F_\pi^{-1}(1-\alpha)+1}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha_u)} k \pi(k) + c(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left( (x + 1) \cdot \pi(x + 1) + x \cdot (h + F_\pi(x) - F_\pi(x + 1)) \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left( (x + 1) \cdot \pi(x + 1) + x \cdot (h - \pi(x + 1)) \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot (\pi(x + 1) + x \cdot h) \\ &= x + \frac{\pi(x + 1)}{h} \\ &\leq x + 1, \end{aligned}$$

wobei “=” gilt g.d.w.  $h = \pi(x + 1)$ , also falls  $\alpha = 1 - F_\pi(x)$ .

b) Für die untere Schranke stellen wir  $\alpha$  dar durch

$$\alpha = (1 - F_\pi(x - 1)) - h, \quad 0 < h \leq \pi(x).$$

Dann gilt  $\alpha_l = 1 - F_\pi(x - 1)$  und  $c(\alpha) = x \cdot (\alpha - (1 - F_\pi(x)))$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} b_l(\alpha_l) &= \frac{1}{\alpha_l - \alpha} \cdot \left( \sum_{k=F_\pi^{-1}(1-\alpha_l)+1}^{F_\pi^{-1}(1-\alpha)} k \pi(k) - c(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left( x \cdot \pi(x) - x \cdot (F_\pi(x) - F_\pi(x-1) - h) \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left( x \cdot \pi(x) - x \cdot (\pi(x) - h) \right) \\ &= x. \end{aligned}$$

□

Falls  $\alpha \neq 1 - F_\pi(x)$ , wissen wir damit, dass  $s_N([N\alpha])$  konvergiert. Für  $\alpha = 1 - F_\pi(x)$  stellt sich noch die Frage, ob man die obere Schranke verbessern kann, wenn man  $b_u(\alpha')$  für einen Wert  $\alpha' < \alpha_u$  betrachtet. In diesem Fall gilt  $c(\alpha) = 0$  und man kann leicht nachrechnen, dass dann die gewichtete Summe  $b_u(\alpha')$  monoton fallend in  $[0, \alpha_u]$  ist.

**Lemma 3.3.22.** *Für alle  $\alpha$  mit  $F_\pi^{-1}(1 - \alpha) \leq M - 1$  und  $c(\alpha) = 0$  ist*

$$\alpha' \mapsto b_u(\alpha')$$

*monoton fallend in  $[0, \alpha_u]$ .*

*Beweis.* Wir müssen wieder nur die  $\alpha' \in [0, \alpha_u]$  betrachten, so dass  $F_\pi(F_\pi^{-1}(1-\alpha')) = 1 - \alpha'$ . Sei wieder  $x = F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$ . Dann gilt  $\alpha_u = 1 - F_\pi(x + 1)$  und wegen  $c(\alpha) = 0$  ist

$$\pi(x + 1) = \alpha - \alpha_u.$$

Für

$$\alpha' = 1 - F_\pi(x + 2)$$

ergibt sich wegen  $\alpha' < \alpha_u$  und  $\pi(x + 2) = \alpha_u - \alpha'$

$$\begin{aligned} b_u(\alpha') - b_u(\alpha_u) &= \\ &= \frac{1}{\alpha - \alpha'} \cdot \left( (x + 1) \cdot \pi(x + 1) + (x + 2) \cdot \pi(x + 2) \right) - \frac{1}{\alpha - \alpha_u} \cdot (x + 1) \cdot \pi(x + 1) \\ &= \frac{1}{\alpha - \alpha'} \cdot \left( (x + 1) \cdot (\alpha - \alpha_u) + (x + 2) \cdot (\alpha_u - \alpha') \right) - \frac{1}{\alpha - \alpha_u} \cdot (x + 1) \cdot (\alpha - \alpha_u) \\ &= \frac{\alpha_u - \alpha'}{\alpha - \alpha'} > 0. \end{aligned}$$

Analog zeigt man  $b_u(\alpha_2) > b_u(\alpha_1)$  für alle  $\alpha_2 < \alpha_1$  mit  $\alpha_2, \alpha_1 \in [0, \alpha_u]$ . □

Die beste obere Schranke an einer Sprungstelle von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  erhält man demnach für den Wert  $\alpha_u$ . Zusammenfassend lässt sich folgendes Resultat formulieren.

**Satz 3.3.23.** *Sei  $(X_n)$  eine Markovkette mit Werten in  $S \subseteq \mathbb{Z}$ , die Annahme (A2) erfüllt. Dann gilt für alle Stetigkeitsstellen von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$*

$$s_N([N\alpha]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F_\pi^{-1}(1 - \alpha).$$

Und falls  $\alpha$  Sprungstelle von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  ist, gilt

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$$

und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} s_N([N\alpha]) = \min\{F_\pi^{-1}(1 - \alpha) + 1, M\}.$$

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.3.18, Satz 3.3.21, Lemma 3.3.22 und Bemerkung 3.3.20. □

Wir wollen nun die Aussagen an dem Beispiel des Trinomialmodells mit  $l = 10$  veranschaulichen. Die stationäre Verteilung  $\pi$  haben wir schon berechnet. Die folgende Abbildung zeigt die zugehörige Verteilungsfunktion  $F_\pi$ .

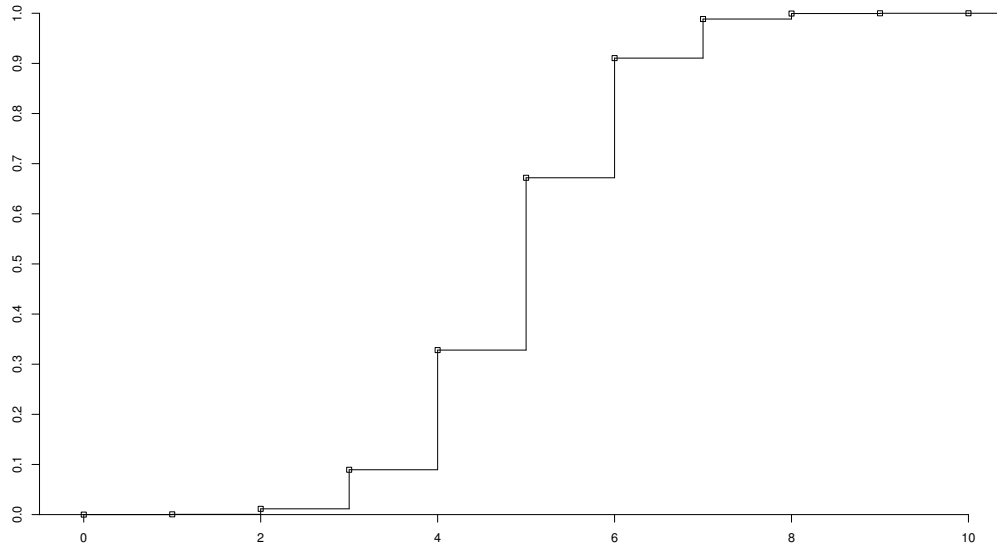


Abbildung 3.7.: Verteilungsfunktion der stationären Verteilung im Trinomialmodell mit  $l = 10$ .

Wir wissen, dass  $s_N([N\alpha])$  für Stetigkeitspunkte von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  konvergiert. Als Beispiel wählen wir

$$\alpha = 0.85, \quad 1 - \alpha = 0.15, \quad F_\pi^{-1}(1 - \alpha) = 4, \quad F_\pi(4) = 0.33.$$

$\alpha = 0.85$  ist ein Stetigkeitspunkt von  $\alpha \mapsto F_\pi^{-1}(1 - \alpha)$  und damit konvergieren die Schwellenwerte asymptotisch gegen 4. Wir berechnen in diesem Beispiel auch  $\alpha_u$  und  $\alpha_l$ . Es ergibt sich

$$\alpha_u = 1 - F_\pi(5) = 0.33, \quad \alpha_l = 1 - F_\pi(3) = 0.91$$

und daher gilt

$$b_u(\alpha_u) = 4 + \frac{\pi(5)}{0.85 - \alpha_u} = 4.66.$$

Wegen  $b_l(\alpha_l) = 4$  lässt sich auch hieraus folgern, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N([N \cdot 0.85]) = 4 = F_\pi^{-1}(0.15).$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt nun  $s_N(N\alpha)$  für  $N = 1, \dots, 200$  und  $\alpha = 0.85$  im Trinomialmodell mit  $l = 10$ .

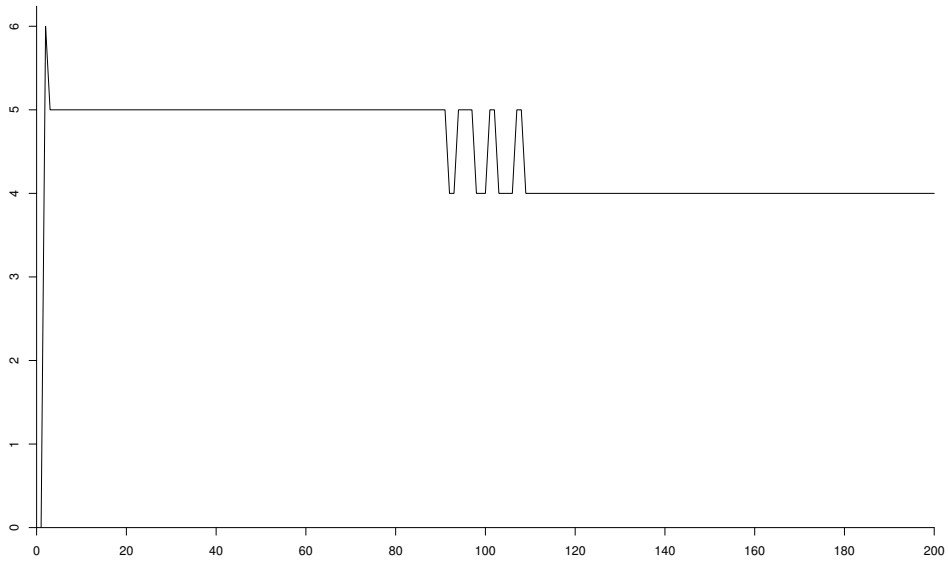


Abbildung 3.8.: Konvergenz der Schwellenwerte im Trinomialmodell mit  $l = 10$  für  $\alpha = 0.85$ .



## Kapitel 4.

# Struktur der Maximisatoren im risikosensitiven Entscheidungsmodell

In diesem Kapitel untersuchen wir das risikosensitive Entscheidungsmodell. Der Entscheider hat also eine exponentielle Nutzenfunktion

$$u(s) = -\exp(-\alpha s), \quad \alpha > 0,$$

und möchte den erwarteten Nutzen des Gesamtgewinns maximieren. Insbesondere analysieren wir erneut die Struktur der Maximisatoren. Wir gehen in der gleichen Reihenfolge wie im vorherigen Kapitel vor. Im ersten Abschnitt betrachten wir wieder ein multiples optimales Stoppproblem. Im zweiten Abschnitt untersuchen wir das allgemeine Optimierungsproblem.

### 4.1. Multiples Stoppen

Zunächst betrachten wir wieder die Vereinfachung des Modells, aus der sich ein multiples optimales Stoppproblem ergibt. Es sei also  $A = \{0, 1\}$  und  $K = \{0, \dots, N+1\}$ . Dabei untersuchen wir zuerst den Fall von u.i.v. Angeboten. Dieser Fall wurde für ein Ausübungsrecht, also  $k = 1$ , schon in Müller (2000) und Hall et al. (1979) betrachtet. Wir wollen ähnliche Resultate für mehrere Ausübungsrechte zeigen. Im Anschluss betrachten wir allgemeine Markovketten.

#### 4.1.1. Unabhängige Angebote

Im Folgenden betrachten wir u.i.v. Angebote  $X_0, \dots, X_N$ . Aus Satz 2.3.1 folgern wir, dass für alle  $(s, k) \in \mathbb{R}^+ \times K \setminus \{0\}$

$$V_0^u(s, k) = u(s)$$

und

$$V_n^u(s, k) = \max\{\exp(-\alpha s) \cdot EV_{n-1}^u(X, k-1), EV_{n-1}^u(X, k)\}, \quad n = 1, \dots, N,$$

gilt. Für  $k = 0$  gilt  $V_n^u(s, 0) = -1$  für alle  $n = 0, \dots, N$ . Daher ist es in diesem Modell optimal ein Recht zum Zeitpunkt  $n$  auszuüben, falls

$$s \geq s_n(u, k) := \begin{cases} u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k)) - u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k-1)), & k \in K \setminus \{0\} \\ \infty, & k = 0. \end{cases}$$

Dabei ist

$$u^{-1}(s) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \log(-s), \quad -1 \leq s < 0.$$

$s_n(u, k)$  ist also der Wert, bei dem der Entscheider indifferent ist zwischen den Entscheidungen ein Recht einzusetzen und nachfolgend nur noch  $k-1$  zu haben oder nicht auszuüben und dafür in den letzten Perioden weiterhin  $k$  Rechte zu haben. Beide Entscheidungen haben den gleichen erwarteten Nutzen. Für die Maximisatoren  $f_n^u$ ,  $n = 1, \dots, N$ , gilt dementsprechend

$$f_n^u(s, k) = \begin{cases} 1, & s \geq s_n(u, k) \\ 0, & s < s_n(u, k). \end{cases}$$

Damit erhalten wir die folgende einfache Darstellung für  $V_n^u$ :

$$V_n^u(s, k) = \exp(-\alpha s) \cdot EV_{n-1}^u(X, k-1) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(u, k)\}} + EV_{n-1}^u(X, k) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k)\}}.$$

Wir gehen nun auf die Struktur der Maximisatoren ein. Dazu müssen wir offensichtlich die Schwellenwerte  $s_n(u, k)$  betrachten. Im Folgenden sei

$$W_n^u(k) := \frac{EV_n^u(X, k)}{EV_n^u(X, k-1)}, \quad k \geq 1.$$

Der nächste Satz sagt aus, dass je mehr Rechte der Entscheider zur Verfügung hat, desto weniger selektiv ist er.

**Satz 4.1.1.** *Die Funktion  $k \mapsto s_n(u, k)$  ist monoton fallend für alle  $n = 1, \dots, N$ .*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage induktiv. Für  $n = 1$  erhalten wir

$$s_1(u, 1) = -\frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha X)) \geq 0$$



und für  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} s_1(u, k) &= -\frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha X \min\{k, 1\})) + \frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha X \min\{k-1, 1\})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für  $n = 1$ . Es gelte nun für ein  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  und jedes  $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} s_n(u, k) &\geq s_n(u, k+1) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} \log(W_{n-1}^u(k)) &\geq -\frac{1}{\alpha} \log(W_{n-1}^u(k+1)) \\ \Leftrightarrow \log(W_{n-1}^u(k)) &\leq \log(W_{n-1}^u(k+1)) \\ \Leftrightarrow W_{n-1}^u(k) &\leq W_{n-1}^u(k+1). \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes  $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \frac{V_n^u(s, k+1)}{V_n^u(s, k)} &= \frac{EV_{n-1}^u(X, k)}{EV_{n-1}^u(X, k-1)} \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(u, k) \geq s_n(u, k+1)\}} \\ &\quad + e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k) > s \geq s_n(u, k+1)\}} \\ &\quad + \frac{EV_{n-1}^u(X, k+1)}{EV_{n-1}^u(X, k)} \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k+1) \leq s_n(u, k)\}} \\ &= W_{n-1}^u(X, k) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(u, k)\}} + e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k) > s \geq s_n(u, k+1)\}} \\ &\quad + W_{n-1}^u(X, k+1) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k+1)\}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{V_n^u(s, k+1)}{V_n^u(s, k)} - \frac{V_n^u(s, k)}{V_n^u(s, k-1)} &= W_{n-1}^u(X, k) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(u, k)\}} + e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k) > s \geq s_n(u, k+1)\}} \\ &\quad + W_{n-1}^u(X, k+1) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k+1)\}} - W_{n-1}^u(X, k-1) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(u, k-1)\}} \\ &\quad - e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k-1) > s \geq s_n(u, k)\}} - W_{n-1}^u(X, k) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k)\}}. \end{aligned}$$

Da  $s \leq s_n(u, k) \Leftrightarrow e^{-\alpha s} \geq W_{n-1}^u(k)$  und  $W_{n-1}^u(X, k+1) \geq W_{n-1}^u(X, k)$  gilt

$$\begin{aligned} e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k) > s \geq s_n(u, k+1)\}} + W_{n-1}^u(X, k+1) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k+1)\}} \\ - W_{n-1}^u(X, k) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k)\}} \geq 0. \end{aligned}$$

Und wegen  $s \geq s_n(u, k) \Leftrightarrow e^{-\alpha s} \leq W_{n-1}^u(k)$  und  $W_{n-1}^u(k) \geq W_{n-1}^u(k-1)$  gilt

$$W_{n-1}^u(k) \mathbb{1}_{\{s > s_n(u, k)\}} - W_{n-1}^u(k-1) \mathbb{1}_{\{s > s_n(u, k-1)\}}$$

$$- e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k-1) > s > s_n(u, k)\}} \geq 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{V_n^u(s, k+1)}{V_n^u(s, k)} - \frac{V_n^u(s, k)}{V_n^u(s, k-1)} \geq 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass  $k \mapsto -V_n^u(s, k)$  log-konvex ist. Aus Lemma A.1.3 folgt, dass auch  $k \mapsto E(-V_n^u(X, k))$  log-konvex ist. Also gilt für jedes  $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \frac{E(-V_n^u(X, k))}{E(-V_n^u(X, k-1))} &\leq \frac{E(-V_n^u(X, k+1))}{E(-V_n^u(X, k))} \\ \Leftrightarrow W_n^u(k) &\leq W_n^u(k+1) \\ \Leftrightarrow s_{n+1}(u, k) &\geq s_{n+1}(u, k+1). \end{aligned}$$

Damit folgt  $k \mapsto s_{n+1}(u, k)$  ist monoton fallend und die Behauptung gilt für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$ .  $\square$

Mithilfe dieses Satzes können wir nun zeigen, dass je mehr Angebote noch verfügbar sind, desto selektiver ist der Entscheider.

**Satz 4.1.2.** *Die Funktion  $n \mapsto s_n(u, k)$  ist monoton wachsend für jedes  $k \in K$ .*

*Beweis.* Für  $k = 0$  ist nichts zu zeigen. Wir zeigen für alle  $n = 1, \dots, N-1$  und  $k = 1, \dots, N+1$

$$s_{n+1}(u, k) \geq s_n(u, k),$$

wobei wir benutzen, dass dies äquivalent ist zu

$$W_n^u(k) \leq W_{n-1}^u(k).$$

Sei  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Wegen  $EV_n^u(X, 1) \geq EV_{n-1}^u(X, 1)$  (siehe Satz 2.3.2) gilt auch

$$u^{-1}(EV_n^u(X, 1)) \geq u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, 1)),$$

da  $u^{-1}$  monoton wachsend ist. Daher gilt  $s_{n+1}(u, 1) \geq s_n(u, 1)$ . Sei nun  $k \in \{0, \dots, N\}$ . Aus dem Beweis von Satz 4.1.1 entnehmen wir

$$\begin{aligned} &\frac{V_n^u(s, k+1)}{V_n^u(s, k)} \\ &= W_{n-1}^u(k+1) \mathbb{1}_{\{s < s_n(u, k+1)\}} + e^{-\alpha s} \mathbb{1}_{\{s_n(u, k) > s \geq s_n(u, k+1)\}} \\ &\quad + W_{n-1}^u(k) \mathbb{1}_{\{s \geq s_n(u, k)\}}. \end{aligned}$$

Aus Satz 4.1.1 folgt  $W_{n-1}^u(k) \leq W_{n-1}^u(k+1)$ . Wegen

$$s \geq s_n(u, k+1) \Leftrightarrow e^{-\alpha s} \leq W_{n-1}^u(k+1)$$

gilt daher

$$\frac{V_n^u(s, k+1)}{V_n^u(s, k)} \leq W_{n-1}^u(k+1).$$

Es gilt also

$$V_n^u(s, k+1) \geq W_{n-1}^u(k+1) \cdot V_n^u(s, k).$$

Durch Integration erhalten wir

$$EV_n^u(X, k+1) \geq W_{n-1}^u(k+1) \cdot EV_n^u(X, k)$$

und damit

$$W_n^u(k+1) \leq W_{n-1}^u(k+1)$$

bzw.

$$s_{n+1}(u, k+1) \geq s_n(u, k+1).$$

Es folgt die Behauptung für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$ . □

Auch der nächste Satz hat eine intuitive Aussage. Der Entscheider ist in der Situation, dass er ab einem Zeitpunkt  $n$  nur noch ein Angebot ablehnen muss. Dabei gilt, je mehr Perioden noch verbleiben, desto weniger selektiv ist er.

**Satz 4.1.3.** *Es gilt*

$$s_N(u, N) \leq s_{N-1}(u, N-1) \leq \dots \leq s_2(u, 2) \leq s_1(u, 1).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass für alle  $n = 1, \dots, N-1$

$$s_{n+1}(u, n+1) \leq s_n(u, n)$$

gilt. Wenn man zum Zeitpunkt  $N-n$  noch  $n+1$  Rechte hat, ist es optimal zu jedem Zeitpunkt auszuüben. Daher gilt insbesondere

$$EV_n^u(X, n+1) = E \exp(-\alpha X) \cdot EV_{n-1}^u(X, n).$$

Für  $k \leq n$  gilt offensichtlich

$$EV_n^u(X, k) \geq E \exp(-\alpha X) \cdot EV_{n-1}^u(X, k-1).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} -\alpha \cdot s_{n+1}(u, n+1) &= \log \left( \frac{EV_n^u(X, n+1)}{EV_n^u(X, n)} \right) \\ &\geq \log \left( \frac{E \exp(-\alpha X) \cdot EV_{n-1}^u(X, n)}{E \exp(-\alpha X) \cdot EV_{n-1}^u(X, n-1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \log \left( \frac{EV_{n-1}^u(X, n)}{EV_{n-1}^u(X, n-1)} \right) \\
 &= -\alpha \cdot s_n(u, n)
 \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.  $\square$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Schwellenwerte bei einer Änderung des Parameters  $\alpha > 0$  in der exponentiellen Nutzenfunktion verhalten. Für eine zweimal differenzierbare Nutzenfunktion  $u$  haben Arrow (1965) und Pratt (1964) ein Maß für die Risikoaversion eingeführt. Dabei betrachten sie die Funktion

$$r_u(s) := -\frac{u''(s)}{u'(s)}.$$

Die Funktion  $r_u$  misst die Konkavität von  $u$ , die durch  $u'$  normalisiert wird, um eine Invarianz gegenüber linearen Transformationen von  $u$  zu erhalten. Eine Funktion  $v$  wird als risikoaverser als  $u$  definiert, wenn

$$r_v(s) \geq r_u(s)$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt. Man kann zeigen, dass das genau dann gilt, wenn es eine monoton wachsende konkave Funktion  $g$  gibt, so dass  $v(s) = g(u(s))$ . Bezogen auf die exponentielle Nutzenfunktion ergibt sich aus dem Kriterium, dass  $v(s) = -\exp(-\beta s)$  risikoaverser als  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$  ist, genau dann wenn  $\beta > \alpha$  gilt.

Wir nehmen an, zwei Entscheider haben eine exponentielle Nutzenfunktion mit verschiedenen Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ , und haben jeweils ein Ausübungsrecht. Der nachfolgende Satz zeigt das intuitive Resultat, dass dann der risikoaverse Entscheider, d.h. der Entscheider mit der risikoaverseren Nutzenfunktion, weniger selektiv ist.

**Satz 4.1.4.** *Sei  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$  und  $v(s) = -\exp(-\beta s)$  mit  $\beta > \alpha > 0$ . Dann gilt*

$$s_n(u, 1) \geq s_n(v, 1).$$

*Beweis.* Wir können  $v$  darstellen als  $v = g \circ u$  mit  $g(s) = -|s|^{\frac{\beta}{\alpha}}$ . Dann ist  $g$  eine konkave Funktion, die auf  $(-\infty, 0)$  monoton wachsend ist und damit ist  $v$  nach der Definition von Arrow und Pratt risikoaverser als  $u$ . Aus der Jensen-Ungleichung folgt weiter

$$\begin{aligned}
 s_n(v, 1) &= v^{-1}(EV_{n-1}^v(X, 1)) \\
 &= u^{-1} \circ g^{-1}(EV_{n-1}^{g \circ u}(X, 1)) \\
 &\leq u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, 1)) \\
 &= s_n(u, 1).
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.1.5.** Für allgemeine Nutzenfunktionen wurde das Resultat schon in Müller (2000) und Hall et al. (1979) bewiesen.

Für das Verhalten der Schwellenwerte  $s_n(u, k)$  für  $\alpha$  gegen  $-\infty$  können wir ein Resultat von Müller (2000) auf den Fall mehrerer Ausübungsrechte erweitern.

**Satz 4.1.6.** Sei  $m := \inf\{x : P(X \leq x) > 0\}$ . Dann gilt für  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} s_n(u, k) = m$$

für alle  $k = 1, \dots, n$  und alle  $n = 1, \dots, N$ .

*Beweis.* Sei  $n \in \{1, \dots, N\}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Es gilt offensichtlich  $s_n(u, k) \geq m$ . Also folgt mit Satz 4.1.1 und 4.1.2

$$m \leq s_n(u, k) \leq s_N(u, 1).$$

Weiterhin gilt (siehe Müller (2000), Theorem 4.3)

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} s_N(u, 1) = m.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} s_n(u, k) = m$$

und da  $n, k$  beliebig war, ergibt sich die Behauptung. □

## 4.1.2. Markovketten

Wir lassen nun die Annahme der Unabhängigkeit fallen und betrachten wieder Markovketten  $(X_n)$  mit einer Übergangsfunktion  $T$ . Wir können die Wertfunktion für  $(s, k) \in \mathbb{R}^+ \times K \setminus \{0\}$  schreiben als

$$V_0^u(s, k) = u(s)$$

und

$$V_n^u(s, k) = \max \left\{ \exp(-\alpha s) \cdot EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k-1), EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k) \right\}$$

für  $n \in 1, \dots, N$ . Für  $k = 0$  gilt  $V_n^u(s, 0) = -1$ . Die Maximisatoren  $f_n^u$ ,  $n = 1, \dots, N$ , haben daher folgende Gestalt:

$$f_n^u(s, k) = \begin{cases} 1, & s \geq u^{-1}(EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k)) - u^{-1}(EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k-1)) \\ 0, & s < u^{-1}(EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k)) - u^{-1}(EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k-1)) \end{cases}$$

für alle  $(s, k) \in \mathbb{R}^+ \times K \setminus \{0\}$ .

Wie im risikoneutralen Modell stellt sich die Frage unter welchen Bedingungen an die Markovkette sichergestellt werden kann, dass es Schwellenwerte gibt. Offensichtlich gibt es Schwellenwerte, falls

$$s \mapsto u^{-1}(EV_n^u(T(s, Y_n), k)) - u^{-1}(EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), k-1))$$

L-stetig mit  $L = 1$  ist. Falls  $s \mapsto T(s, y)$  L-stetig mit  $L = 1$  ist, können wir diese Eigenschaft zumindest für den Fall  $k = 1$  nachweisen. Sei

$$s_n(u, 1) := \inf \{s : s \geq u^{-1}(EV_n^u(T(s, Y_n), 1))\}$$

diejenige Größe, die als Schwellenwert überhaupt nur in Frage kommt. Damit können wir dann folgenden Satz beweisen.

**Satz 4.1.7.** *Falls  $s \mapsto T(s, y)$  monoton wachsend und L-stetig mit  $L = 1$  ist, ist  $s_n(u, 1)$  ein Schwellenwert, d.h. es gilt*

$$f_n^u(s, 1) = \begin{cases} 1, & s \geq s_n(u, 1) \\ 0, & s < s_n(u, 1) \end{cases}$$

für alle  $n = 1, \dots, N$ .

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass

$$s \mapsto u^{-1}(EV_n^u(T(s, Y_n), 1))$$

L-stetig mit  $L = 1$  ist für alle  $n = 0, \dots, N - 1$ . Der Beweis wird induktiv geführt. Sei also  $n = 0$ . Für  $s_2 \geq s_1$  gilt wegen  $T(s_2, y) \leq T(s_1, y) + (s_2 - s_1)$

$$\begin{aligned} u^{-1}(EV_0^u(T(s_2, Y_0), 1)) &= -\frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha T(s_2, Y_0))) \\ &\leq -\frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha(T(s_1, Y_0) + (s_2 - s_1)))) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha(T(s_1, Y_0)))) + (s_2 - s_1) \\ &= u^{-1}(EV_0^u(T(s_1, Y_0), 1)) + (s_2 - s_1). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für  $n = 0$ . Die Behauptung gelte nun für  $n - 1$ . Dann ist

$$s \mapsto u^{-1}(V_n^u(s, 1)) = \max\{s, u^{-1}(EV_{n-1}^u(T(s, Y_{n-1}), 1))\}$$

L-stetig mit  $L = 1$ , da die Funktion das Maximum zweier L-stetiger Funktionen mit  $L = 1$  ist (siehe A.2.2). Sei  $\rho(X) := u^{-1}Eu(X)$ , dann folgt aus der Monotonie von

$u$  und  $u^{-1}$ , dass für  $X \leq Y$  P-f.s.

$$\rho(X) \leq \rho(Y)$$

und für  $X + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

gilt. Aus der L-Stetigkeit von  $s \mapsto u^{-1}(V_n^u(s, 1))$  folgt damit

$$\begin{aligned} \rho\left(u^{-1}(V_n^u(T(s_2, Y_n), 1))\right) &\leq \rho\left(u^{-1}(V_n^u(T(s_1, Y_n), 1)) + (s_2 - s_1)\right) \\ &= \rho\left(u^{-1}(V_n^u(T(s_1, Y_n), 1))\right) + (s_2 - s_1) \end{aligned}$$

und deshalb gilt

$$u^{-1}(EV_n^u(T(s_2, Y_n), 1)) - u^{-1}(EV_n^u(T(s_1, Y_n), 1)) \leq s_2 - s_1,$$

d.h.  $s \mapsto u^{-1}(EV_n^u(T(s, Y_n), 1))$  ist L-stetig mit  $L = 1$ . Aus der Definition von  $s_n(u, 1)$  folgt dann die Behauptung des Satzes.  $\square$

### 4.1.3. Beispiel

Als Beispiel betrachten wir u.i.v. auf  $(0, 100)$  gleichverteilte Zufallsvariablen  $(X_n)$ . Die Bedingungen für die Existenz von Schwellenwerten sind im Fall von u.i.v. Zufallsvariablen natürlich erfüllt. Die Schwellenwerte  $s_n(u, k)$  sind wachsend in  $n \in \{1, \dots, N\}$  (siehe Satz 4.1.2) und fallend in  $k \in \{0, \dots, N + 1\}$  (siehe Satz 4.1.1). Zudem gilt noch, dass  $s_n(u, 1) \geq s_n(v, 1)$ , falls  $v$  risikoaverser als  $u$  ist (siehe Satz 4.1.4) und  $s_n(u, k) \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow -\infty$  (siehe Satz 4.1.6). Wir betrachten das risikosensitive Entscheidungsmodell mit Zeithorizont  $N = 30$ . Die folgende Abbildung zeigt  $s_{N-n}(u, k)$  für  $\alpha = -0.1$  und  $k = 1, 2, 3, 4$  als Funktion von  $n$ .

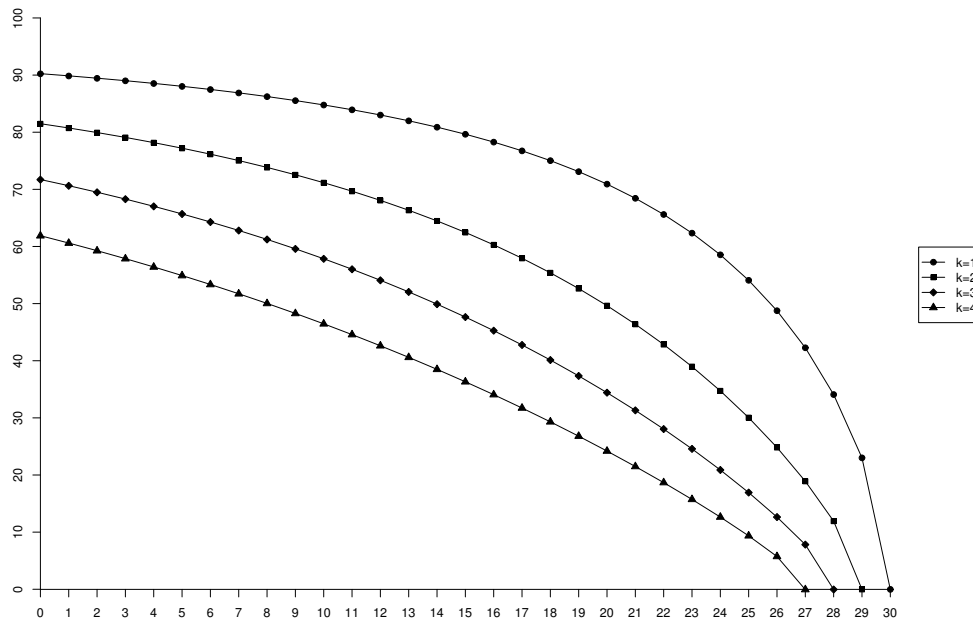


Abbildung 4.1.: Schwellenwerte im risikosensitiven Modell mit  $N = 30$  bei Gleichverteilung auf  $(0, 100)$  für  $\alpha = -0.1$ .

Wenn wir die Werte mit denen aus dem risikoneutralen Modell vergleichen, erkennt man, dass die Schwellenwerte im risikosensitiven Fall unter denen im risikoneutralen Fall liegen. So akzeptiert der risikoneutrale Entscheider z.B. bei einem Recht,  $k = 1$ , in der ersten Periode,  $n = 0$ , Angebote die oberhalb von 94.33 liegen, während der Schwellenwert im risikosensitiven Modell mit  $\alpha = -0.1$  bei 90.27 liegt.

Abbildung 4.2 zeigt  $s_{N-n}(u, 1)$  als Funktion von  $n$  für verschiedene Parameter  $\alpha$ . Dabei wird deutlich, dass ein Parameter von  $\alpha = -1$  eine so hohe Risikoaversion bedeutet, dass sogar bei einer Laufzeit von 30 Perioden zum Zeitpunkt  $n = 0$  ein Wert von 44.03 akzeptiert wird, also ein Wert unterhalb des Erwartungswertes von  $X$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 31 Angebote unterhalb von 50 liegen, beträgt aber nur  $4.66 \cdot 10^{-10}$ .



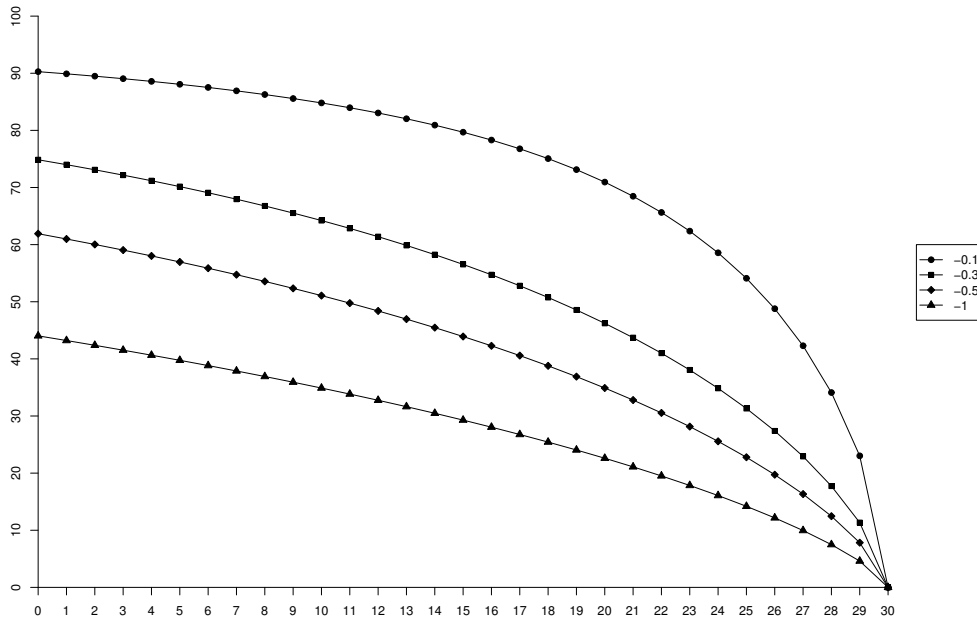


Abbildung 4.2.: Schwellenwerte im risikosensitiven Modell mit  $N = 30$  bei Gleichverteilung auf  $(0, 100)$  für verschiedene Werte von  $\alpha$  und  $k = 1$ .

## 4.2. Kontinuierlicher Aktionenraum

Wir betrachten nun das allgemeine Modell für u.i.v. Angebote mit einer Kapazität  $k \in K = [0, N + 1]$  und Aktionenraum  $A = [0, 1]$ . Dabei darf der risikosensitive Entscheider mit Nutzenfunktion  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$ ,  $\alpha > 0$ , zu jedem Zeitpunkt eine beliebige Menge  $a \in [0, 1]$  einsetzen, sofern die Kapazität  $k \in K$  dadurch nicht überschritten wird. Ziel ist es wieder, die Struktur der Maximisatoren anzugeben.

Wir schreiben zunächst die Wertiteration für diese Situation auf. Es gilt für alle  $(s, k) \in \mathbf{S}$

$$V_0^u(s, k) = u(s \min\{k, 1\})$$

und

$$V_n^u(s, k) = \max_{a \in D(s, k)} \{ \exp(-\alpha sa) \cdot EV_{n-1}^u(X, k - a) \}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Da  $u^{-1}$  monoton wachsend ist, ist dies äquivalent zu

$$u^{-1}(V_n^u(s, k)) = \max_{a \in D(s, k)} \{sa + u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k - a))\}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Der nachfolgende Satz gibt wichtige Eigenschaften des Sicherheitsäquivalents der Wertfunktionen an. Diese werden wir im Folgenden immer wieder benötigen.

**Satz 4.2.1.** *Für alle  $n = 0, \dots, N$  ist*

$$u^{-1}(V_n^u(s, k))$$

- a) *konvex in  $s$ ,*
- b) *stetig und monoton wachsend in  $(s, k)$ ,*
- c) *konkav in  $k$ .*

*Beweis.* a) Wir zeigen zunächst, dass  $u^{-1}(V_n^u(s, k))$  konvex in  $s$  ist. Es gilt

$$u^{-1}(V_0^u(s, k)) = -\frac{1}{\alpha} \log(-V_0^u(s, k)) = s \cdot \min\{k, 1\}.$$

Also gilt die Aussage für  $n = 0$ . Für  $n = 1, \dots, N$  gilt

$$u^{-1}(V_n^u(s, k)) = -\frac{1}{\alpha} \log(-V_n^u(s, k)) = \max_{a \in D(s, k)} \left\{ sa - \frac{1}{\alpha} \log(-EV_{n-1}^u(X, k - a)) \right\}.$$

Da  $D(s, k)$  unabhängig von  $s \geq 0$  ist und das Maximum konvexer Funktionen konvex ist, folgt die Behauptung.

b) Die Aussage folgt direkt aus der Monotonie und Stetigkeit von  $V_n^u$  (siehe Satz 2.3.1), da  $u^{-1}$  monoton wachsend und stetig ist.

c) Da  $u^{-1}(V_0^u(s, k)) = s \cdot \min\{k, 1\}$  konkav in  $k$  ist, ist der Induktionsanfang erfüllt. Weil  $\log(-V_0^u(s, k))$  konvex in  $k$  ist, ist nach Lemma A.1.3 auch  $\log(-EV_0^u(X, k))$  konvex in  $k$  und damit ist  $k \mapsto u^{-1}(EV_0^u(X, k))$  konkav. Also folgt, dass

$$(k, a) \mapsto u^{-1}(LV_0^u(s, k, a)) = sa - \frac{1}{\alpha} \log(-EV_0^u(X, k - a))$$

konkav ist, weil die Summe konkaver Funktionen konkav ist. Aus Prop. 2.4.18 in Bäuerle und Rieder (2011) angewandt auf den Zustandsraum  $\{s\} \times K$  folgt, dass dann auch

$$k \mapsto \max_{a \in D(s, k)} u^{-1}(LV_0^u(s, k, a))$$

konkav ist. Wegen

$$u^{-1}(V_1^u(s, k)) = \max_{a \in D(s, k)} u^{-1}(LV_0^u(s, k, a))$$

folgt die Behauptung für  $n = 1$  und per Induktion mit den gleichen Argumenten für alle  $n = 1, \dots, N$ .  $\square$

Mithilfe dieses Satzes können wir zeigen, dass auch die Wertfunktion selbst konkav in  $k$  ist.

**Korollar 4.2.2.** *Für alle  $n = 0, \dots, N$  ist*

$$k \mapsto V_n^u(s, k)$$

*konkav.*

*Beweis.* Aus Satz 4.2.1 c) folgt, dass  $k \mapsto \log(-V_n^u(s, k))$  konvex ist. Da  $\exp$  eine monoton wachsende und konvexe Funktion ist, folgt hieraus (siehe auch A.1.1), dass  $k \mapsto -V_n^u(s, k)$  konvex ist. Also ist

$$k \mapsto V_n^u(s, k)$$

konkav.  $\square$

Aus dem Beweis von Satz 4.2.1 folgt weiterhin unmittelbar

**Korollar 4.2.3.** *Für alle  $n = 0, \dots, N$  ist*

$$k \mapsto u^{-1}(EV_n^u(X, k))$$

*stetig, konkav und monoton wachsend.*

Die Existenz von Maximisatoren in diesem Modell haben wir schon gezeigt (siehe Satz 2.3.1).  $f_n$  ist Maximisator von  $V_n^u$ , falls  $f_n(s, k)$  Maximumstelle von

$$a \mapsto LV_{n-1}^u(s, k, a) = \exp(-\alpha sa) \cdot EV_{n-1}^u(X, k - a)$$

ist. Da  $u^{-1}$  monoton wachsend ist, ist  $f_n$  damit auch Maximumstelle von

$$a \mapsto u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, a)) = sa + u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k - a)).$$

Bei der Untersuchung der Struktur der Maximisatoren werden wir häufig diese Tatsache benutzen. Die zweite Funktion ist aufgrund der Additivität leichter zu handhaben.

Die Struktur der Maximisatoren im risikosensitiven Modell ist im Allgemeinen nicht so einfach wie die im risikoneutralen Modell. Dort können die Maximisatoren für festes  $k \in K$  nur drei verschiedene Werte annehmen. Zudem konnten wir zeigen, dass es bis auf maximal einen Zeitpunkt optimal ist, die Randwerte  $a = 0$  und  $a = 1$  zu wählen. Der Grund für diese einfache Struktur ist die stückweise Linearität der Wertfunktion in  $k$  im risikoneutralen Modell. Dies ist im risikosensitiven Fall

offensichtlich nicht erfüllt. Entscheidend für die Gestalt der Maximisatoren ist hier das Sicherheitsäquivalent

$$\varphi_{n-1}: K \rightarrow (0, \infty), k \mapsto u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k)) = -\frac{1}{\alpha} \log(-EV_{n-1}^u(X, k))$$

des erwarteten Nutzens unter der optimalen Strategie, wenn noch  $n$  Entscheidungszeitpunkte verbleiben. Da  $u$  aber gerade nicht linear ist, ist das Sicherheitsäquivalent auch nicht linear. Trotzdem gibt es Schwellenwerte, so dass die Randwerte der zulässigen Aktionenmenge optimal sind. Zudem sind die Maximisatoren monoton in der Höhe des Angebotes  $s$  und der Kapazität  $k$ . Je höher das Angebot und je größer die Kapazität, desto mehr sollte verbraucht werden. Diese intuitiven Aussagen werden im nächsten Satz gezeigt.

**Satz 4.2.4.**

a) Sei  $f_n$  ein Maximisator von  $V_{n-1}^u$ . Dann ist

$$(s, k) \mapsto f_n(s, k)$$

monoton wachsend für alle  $n = 1, \dots, N$ .

b) Für jedes  $n = 1, \dots, N$  und  $k \in (0, n + 1)$  gibt es eine Schranke  $s_{n,0}(k) > 0$ , so dass

$$f_n(s, k) = 0 \Leftrightarrow s \leq s_{n,0}(k).$$

Die Funktion  $k \mapsto s_{n,0}(k)$  ist monoton fallend.

c) Falls die Zufallsvariablen  $(X_n)$  integrierbar sind, dann gibt es für jedes  $n = 1, \dots, N$  und  $k \in (0, N + 1]$  eine Schranke  $s_{n,1}(k) < \infty$ , so dass

$$f_n(s, k) = \min\{k, 1\} \Leftrightarrow s \geq s_{n,1}(k).$$

Die Funktion  $k \mapsto s_{n,1}(k)$  ist monoton fallend.

*Beweis.* a) Wir zeigen zunächst, dass

$$s \mapsto f_n(s, k)$$

für festes  $k \in K$  monoton wachsend ist. Da  $f_n$  Maximisator von  $V_{n-1}^u$  ist, ist  $f_n(s, k)$  Maximumstelle von

$$a \mapsto u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, a)) = sa + \varphi_{n-1}(k - a).$$

Daher gilt für  $s \geq 0$  beliebig und alle  $a \in D(s, k)$

$$s \cdot f_n(s, k) + \varphi_{n-1}(k - f_n(s, k)) \geq sa + \varphi_{n-1}(k - a). \quad (4.1)$$

Sei nun  $s_1 \geq s$ . Dann gilt für alle  $a \in [0, f_n(s, k)]$

$$\begin{aligned} s_1 \cdot (f_n(s, k) - a) + \varphi_{n-1}(k - f_n(s, k)) &\geq s \cdot (f_n(s, k) - a) + \varphi_{n-1}(k - f_n(s, k)) \\ &\stackrel{(4.1)}{\geq} \varphi_{n-1}(k - a). \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$u^{-1}(LV_{n-1}^u(s_1, k, f_n(s, k))) \geq u^{-1}(LV_{n-1}^u(s_1, k, a))$$

für alle  $a \in [0, f_n(s, k)]$ . Daher gilt  $f_n(s_1, k) \in [f_n(s, k), 1]$  bzw.  $f_n(s_1, k) \geq f_n(s, k)$ . Da  $s$  beliebig war, ist  $f_n(s, k)$  monoton wachsend in  $s$ .

Sei nun  $s \geq 0$  fest. Wir zeigen, dass

$$k \mapsto f_n(s, k)$$

monoton wachsend ist. Für ein festes  $k \in K$  sei  $k_1 \geq k$ . Dann gilt für alle  $a < f_n(s, k)$

$$\begin{aligned} u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, f_n(s, k))) &\geq u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, a)) \\ \Leftrightarrow s \cdot (f_n(s, k) - a) &\geq \varphi_{n-1}(k - a) - \varphi_{n-1}(k - f_n(s, k)) \\ \Leftrightarrow s &\geq (\varphi_{n-1}(k - a) - \varphi_{n-1}(k - f_n(s, k))) \cdot \frac{1}{f_n(s, k) - a} \end{aligned}$$

Da  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  nach Korollar 4.2.3 konkav ist, gilt deshalb auch

$$s \geq (\varphi_{n-1}(k_1 - a) - \varphi_{n-1}(k_1 - f_n(s, k))) \cdot \frac{1}{f_n(s, k) - a}$$

für alle  $a < f_n(s, k)$ . Daher gilt

$$u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k_1, f_n(s, k))) \geq u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k_1, a))$$

für alle  $a < f_n(s, k)$  und es folgt  $f_n(s, k_1) \geq f_n(s, k)$ .

b) Sei  $k \in (0, n + 1)$ . Dann gilt für alle  $a \in D(s, k) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, 0)) &\geq u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, a)) \\ \Leftrightarrow \varphi_{n-1}(k) &\geq sa + \varphi_{n-1}(k - a) \\ \Leftrightarrow s &\leq (\varphi_{n-1}(k) - \varphi_{n-1}(k - a)) \cdot \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite wegen der Konkavität von  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  monoton wachsend in  $a$

ist, gilt also  $f_n(s, k) = 0$  g.d.w.

$$s \leq s_{n,0}(k) := \lim_{a \downarrow 0} (\varphi_{n-1}(k) - \varphi_{n-1}(k-a)) \cdot \frac{1}{a} = D^- \varphi_{n-1}(k).$$

Der Limes des Differenzenquotienten existiert wegen der Konkavität in  $k$ . Es gilt  $s_{n,0}(k) > 0$ , da  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  streng monoton wachsend auf  $(0, n+1)$  ist. Aus  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  konkav folgt, dass  $k \mapsto s_{n,0}(k)$  monoton fallend ist.

c) Sei zunächst  $k \in (1, N+1]$ . Dann gilt für alle  $a \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, 1)) &\geq u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, a)) \\ \Leftrightarrow s &\geq (\varphi_{n-1}(k-a) - \varphi_{n-1}(k-1)) \cdot \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

Da  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  konkav ist, gilt also  $f_n(s, k) = 1$  g.d.w.

$$s \geq \lim_{a \uparrow 1} (\varphi_{n-1}(k-a) - \varphi_{n-1}(k-1)) \cdot \frac{1}{1-a} = D^+ \varphi_{n-1}(k-1).$$

Der Limes des Differenzenquotienten existiert für alle  $k > 1$  wegen der Konkavität in  $k$ . Für  $k \leq 1$  gilt für  $a \in [0, k)$

$$\begin{aligned} u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, k)) &\geq u^{-1}(LV_{n-1}^u(s, k, a)) \\ \Leftrightarrow s &\geq \frac{\varphi_{n-1}(k-a)}{k-a}. \end{aligned}$$

Da  $u^{-1}$  konvex und monoton wachsend, gilt nach Korollar 3.2.3

$$\frac{\varphi_{n-1}(k-a)}{k-a} = \frac{u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k-a))}{k-a} \leq \frac{EV_{n-1}(X, k-a)}{k-a} = \frac{c \cdot (k-a)}{k-a} = c$$

mit  $c = EV_{n-1}(X, 1) < \infty$ . Wir können auf das risikoneutrale Modell zurückgreifen, da  $X$  integrierbar ist. Da der Quotient monoton wachsend in  $a$  ist, existiert also in diesem Fall der Grenzwert für  $a \uparrow k$  und es gilt  $f_n(s, k) = k$  g.d.w.

$$s \geq \lim_{a \uparrow k} \frac{\varphi_{n-1}(k-a)}{k-a} = D^+ \varphi_{n-1}(0).$$

Sei nun für  $k \in (0, N+1]$

$$s_{n,1}(k) := \lim_{a \uparrow \min\{k, 1\}} (\varphi_{n-1}(k-a) - \varphi_{n-1}(k - \min\{k, 1\})) \cdot \frac{1}{\min\{k, 1\} - a}.$$

Dann gilt  $f_n(s, k) = \min\{k, 1\}$  g.d.w.  $s \geq s_{n,1}(k)$  und  $k \mapsto s_{n,1}(k)$  ist monoton fallend, da  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  konkav ist.  $\square$

**Bemerkung 4.2.5.**

- a) Für  $0 < k \leq 1$  gilt  $s_{n,1}(k) = D^+ \varphi_{n-1}(0)$ . Damit ist diese Schranke unabhängig von  $k$ . D.h. das Angebot, ab dem es optimal ist, die zur Verfügung stehende Kapazität komplett zu verbrauchen, ist für alle  $0 < k \leq 1$  gleich hoch.
- b) Aus dem Beweis folgt

$$s_{n,1}(k) \leq D^+ \varphi_{n-1}(0) \leq EV_{n-1}(X, 1) = s_n(1), \quad k \in (0, N + 1],$$

Dabei ist  $s_n(1)$  der Schwellenwert im risikoneutralen Modell, ab dem es optimal ist, bei  $0 < k \leq 1$  die maximal mögliche Menge zu verbrauchen (siehe Satz 3.2.1). Der Schwellenwert im risikosensitiven Modell ist für diese Kapazitäten also niedriger als für die gleiche Kapazität im risikoneutralen Modell.

- c) Aus der Konkavität von  $k \mapsto \varphi_{n-1}(k)$  folgt sofort für alle  $k \in (0, n + 1)$

$$s_{n,1}(k) \geq s_n(u, [k]) \text{ und } s_n(u, [k]) \geq s_{n,0}(k),$$

wobei  $s_n(u, [k])$  der Schwellenwert im risikosensitiven Entscheidungsmodell mit  $A = \{0, 1\}$  bei  $[k]$  Rechten ist. Für eine ganzzahlige Kapazität ergibt sich daraus ein Unterschied zum risikoneutralen Modell, wo die optimale Strategie unabhängig von der Wahl des Aktionenraumes war.

- d) Hadar und Seo (1988, 1990) beschäftigen sich mit der Frage, wie sich die Zusammensetzung eines Portfolios von unabhängigen Kapitalanlagen ändert, wenn die Verteilung einer Anlage geändert wird. Sie unterstellen dabei eine risikoaversen Entscheider, der den erwartete Nutzen des Portfolioertrages maximieren möchte. Unter anderem beweisen sie in Theorem 8 in Hadar und Seo (1990) für die Maximumstelle von

$$a_i \mapsto Eu(a_i X_i + (1 - a_i)Y)$$

mit  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$ , dass

$a_2 \geq a_1$  für jedes  $X_2 \geq_{st} X_1$  g.d.w.  $s \mapsto s \cdot \exp(-\alpha s)$  monoton wachsend ist.

Dabei sind  $X_i, Y$  unabhängige Zufallsvariablen auf  $[0, B]$ . Die Bedingung ist also erfüllt, g.d.w.

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{B}.$$

Wenn  $X_1, X_2$  deterministisch sind, so entspricht die Situation unserem Modell für  $N = 1$  und  $k = 1$ . Wir haben in diesem Zusammenhang in Teil a) des Satzes gezeigt, dass

$$a_2 \geq a_1 \text{ für jedes } s_2 \geq s_1$$

bei jeder Wahl von  $\alpha > 0$  gilt.

Mit Hilfe des Satzes ergibt sich ein offensichtlicher Unterschied zum risikoneutralen Modell. In Satz 2.2.1 haben wir gezeigt, dass die Wertfunktionen in diesem Fall konvex in  $s$  sind. Dies gilt im risikosensitiven Fall nicht mehr. Falls  $n \geq 1$ , ist  $s \mapsto V_n^u(s, k)$  weder konvex noch konkav.

**Korollar 4.2.6.** Für  $n = 1, \dots, N$  ist

$$s \mapsto V_n^u(s, k)$$

weder konvex noch konkav für alle  $k \in (0, n + 1)$ .

*Beweis.* Die Aussage folgt sofort aus Satz 4.2.4, denn  $s \mapsto V_n^u(s, k)$  ist monoton wachsend und auf  $[0, s_{n,0}(k)]$  gilt, dass

$$\begin{aligned} V_n^u(s, k) &= \sup_{a \in D(s, k)} \{ \exp(-\alpha s a) \cdot EV_{n-1}^u(X, k - a) \} \\ &= EV_{n-1}^u(X, k) \end{aligned}$$

konstant ist. Auf  $[s_{n,1}(k), \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} V_n^u(s, k) &= \sup_{a \in D(s, k)} \{ \exp(-\alpha s a) \cdot EV_{n-1}^u(X, k - a) \} \\ &= \exp(-\alpha s \min\{k, 1\}) \cdot EV_{n-1}^u(X, k - \min\{k, 1\}), \end{aligned}$$

d.h.  $s \mapsto V_n^u(s, k)$  ist dort konkav. □

Für  $k \leq 1$  ist  $s_{n,1}(k)$  unabhängig von  $k$ . Im Fall  $n = 1$  zeigen wir, dass es in dieser Situation, unabhängig vom Grad der Risikoaversion  $\alpha$ , optimal ist, die zum Zeitpunkt  $N - 1$  zur Verfügung stehende Kapazität komplett zu nutzen, falls  $s \geq E(X)$ . Diese Schranke ergab sich auch schon im risikoneutralen Modell. Dort ist sie aber gleichzeitig auch die Schranke, unterhalb derer der Entscheider  $a = 0$  wählen sollte. Die optimale Strategie ist bang-bang. Diese Strategie ist im risikosensitiven Fall nicht optimal.

**Lemma 4.2.7.** Sei  $X$  integrierbar. Dann gilt für alle  $0 < k \leq 1$

$$s_{1,1}(k) = E(X) \quad \text{und} \quad s_{1,0}(k) = \frac{E(\exp(-\alpha k X) X)}{E(\exp(-\alpha k X))}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} s_{1,1}(k) &= \lim_{a \uparrow \min\{k, 1\}} (\varphi_0(k - a) - \varphi_0(k - \min\{k, 1\})) \cdot \frac{1}{\min\{k, 1\} - a} \\ &= \lim_{a \uparrow k} -\frac{1}{\alpha} \log(E \exp(-\alpha(k - a)X)) \cdot \frac{1}{k - a}. \end{aligned}$$



Mit dem Satz von L'Hospital und dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} s_{1,1}(k) &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{a \uparrow k} \frac{\frac{d}{da} \log(E \exp(-\alpha(k-a)X))}{-1} \\ &= \frac{-\alpha}{-\alpha} \lim_{a \uparrow k} \frac{E(\exp(-\alpha(k-a)X)X)}{E(\exp(-\alpha(k-a)X))} \\ &= E(X). \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten zeigt man

$$\begin{aligned} s_{1,0}(k) &= \lim_{a \downarrow 0} (\varphi_0(k) - \varphi_0(k-a)) \cdot \frac{1}{a} \\ &= \lim_{a \downarrow 0} \frac{\alpha E(\exp(-\alpha(k-a)X)X)}{\alpha E(\exp(-\alpha(k-a)X))} \\ &= \frac{E(\exp(-\alpha k X)X)}{E(\exp(-\alpha k X))}. \end{aligned}$$

□

Damit können wir folgendes Korollar formulieren.

**Korollar 4.2.8.** *Falls  $X$  nicht integrierbar ist, dann gilt für  $0 < k \leq 1$  und  $s \geq 0$*

$$f_1(s, k) < k.$$

*Beweis.* Die Aussage folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 4.2.7. □

Wir wollen auch hier wieder untersuchen, welche Auswirkungen der Grad der Risikoaversion des Entscheiders auf die optimale Strategie hat. Um die Maximisatoren bzgl. verschiedener Nutzenfunktionen unterscheiden zu können, schreiben wir nun  $f_n^u(s, k)$  für die Maximisatoren bzgl.  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$ . Genauso verfahren wir beim Sicherheitsäquivalent und schreiben  $\varphi_{n-1}^u(k)$  für das Sicherheitsäquivalent des erwarteten Nutzen unter der optimalen Strategie bei noch  $n$  verbleibenden Entscheidungszeitpunkten und verfügbarer Kapazität  $k$ .

Wir zeigen zunächst, dass die rechtsseitige Ableitung von  $\varphi_0^u(k)$  monoton fallend in  $\alpha$  ist.

**Lemma 4.2.9.** *Sei  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$  und  $v(s) = -\exp(-\beta s)$  für  $0 < \alpha \leq \beta$ , d.h.  $v$  sei risikoaverser als  $u$ . Dann gilt für alle  $k \in K \setminus \{0\}$*

$$D^+ \varphi_0^u(k) \geq D^+ \varphi_0^v(k).$$

*Beweis.* Für  $k \geq 1$  gilt Gleichheit, da dann die beiden Funktionen konstant sind. Für  $k < 1$  sei  $\phi(k) = \frac{\beta}{\alpha}k$ . Dann gilt

$$EV_0^v(X, k) = -E \exp(-\beta Xk) = -E \exp\left(-\alpha \frac{\beta}{\alpha} Xk\right) = EV_0^u(X, \phi(k)).$$

Daraus folgt mit der Kettenregel und der Konkavität von  $k \mapsto u^{-1}(EV_0^u(X, k))$

$$\begin{aligned} D^+ \varphi_0^v(k) &= D^+ v^{-1}(EV_0^u(X, \phi(k))) \\ &= D^+ v^{-1}(EV_0^u(X, \cdot))(\phi(k)) \cdot \frac{\beta}{\alpha} \\ &= D^+ u^{-1}(EV_0^u(X, \cdot))(\phi(k)) \\ &\leq D^+ u^{-1}(EV_0^u(X, \cdot))(k) \\ &= D^+ \varphi_0^u(k). \end{aligned}$$

□

Damit können wir zeigen, dass es für den risikoaverseren von zwei Entscheidern im risikosensitiven Entscheidungsmodell optimal ist, bei der letzten Entscheidung, also der Entscheidung zum Zeitpunkt  $N - 1$ , für jedes Angebot  $s$  und jede noch verfügbare Kapazität  $k$  mindestens die gleiche Menge einzusetzen wie der weniger risikoaverse Entscheider. Weiterhin ist  $s_{n,1}(k)$  für  $0 < k \leq 1$  monoton fallend in  $\alpha$ . D.h. je risikoaverser der Entscheider ist, desto niedriger ist das Angebot, ab dem die Restmenge vollständig verbraucht werden sollte. Wir haben bisher nur gezeigt, dass dies für  $n = 1$  gilt, denn  $s_{1,1}(k)$ , also der Wert, ab dem es zum Zeitpunkt  $N - 1$  optimal ist alles noch zur Verfügung stehende zu verbrauchen, ist unabhängig von  $\alpha$ .

**Satz 4.2.10.** Sei  $u(s) = -\exp(-\alpha s)$  und  $v(s) = -\exp(-\beta s)$  für  $0 < \alpha \leq \beta$ . Dann gilt

a)  $f_1^v(s, k) \geq f_1^u(s, k)$ , für alle  $(s, k) \in \mathbf{S}$ .

b) Für  $0 < k \leq 1$  gilt:

$$f_n^u(s, k) = k \Rightarrow f_n^v(s, k) = k$$

für alle  $n = 1, \dots, N$ .

*Beweis.* a) Sei  $(s, k) \in \mathbf{S}$ . Für alle  $a \in D(s, k)$  gilt

$$u^{-1}(LV_0^u(s, k, f_1^u(s, k))) \geq u^{-1}(LV_0^u(s, k, a)).$$

Dies ist äquivalent zu

$$s \geq (\varphi_0^u(k - a) - \varphi_0^u(k - f_1^u(s, k))) \cdot \frac{1}{f_1^u(s, k) - a}$$

für alle  $a < f_1^u(s, k)$ . Da  $D^+\varphi_0^u(k) \geq D^+\varphi_0^v(k)$  für alle  $k$ , gilt deshalb auch

$$s \geq (\varphi_0^v(k - a) - \varphi_0^v(k - f_1^u(s, k))) \cdot \frac{1}{f_1^u(s, k) - a}$$

$$\Leftrightarrow u^{-1}(LV_0^v(s, k, f_1^u(s, k))) \geq u^{-1}(LV_0^v(s, k, a))$$

für alle  $a < f_1^u(s, k)$ . Da  $(s, k) \in \mathbf{S}$  beliebig war, folgt daraus  $f_1^v(s, k) \geq f_1^u(s, k)$  für alle  $(s, k) \in \mathbf{S}$ .

b) Sei  $k \in (0, 1]$ . Aus  $f_n^u(s, k) = k$  folgt für alle  $a \in [0, k)$

$$sk \geq sa + u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k - a)) \Leftrightarrow s \geq \frac{u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k - a))}{k - a}.$$

Wir wissen, dass  $v = g \circ u$  für eine monoton wachsende konkave Funktion  $g$ . Dann gilt für alle  $a \in [0, k)$  wegen der Jensen-Ungleichung

$$v^{-1}(EV_{n-1}^v(X, k - a)) = u^{-1} \circ g^{-1}(EV_{n-1}^{g \circ u}(X, k - a))$$

$$\leq u^{-1}(EV_{n-1}^u(X, k - a)).$$

Also gilt auch

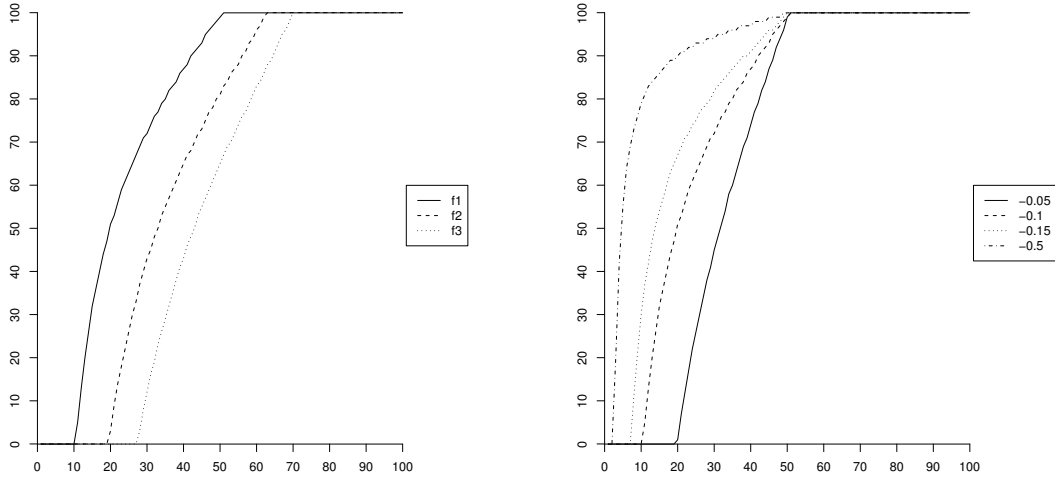
$$s \geq \frac{v^{-1}(EV_{n-1}^v(X, k - a))}{k - a}$$

für alle  $a \in [0, k)$  und damit folgt  $f_n^v(s, k) = k$ . □

### Beispiel

Wir betrachten u.i.v. diskrete Zufallsvariablen  $(X_n)$ , die gleichverteilt sind auf  $S = \{1, \dots, 100\}$ . Nach Satz 2.3.1 gibt es Maximisatoren  $f_n(s, k)$  und die sind monoton wachsend in  $s$  und  $k$ . Zudem wissen wir, dass die Maximisatoren die Werte 0 und 1 annehmen (siehe Satz 4.2.4). In Satz 4.2.10 wurde bewiesen, dass  $f_1^u(s, k) \geq f_1^v(s, k)$  für alle  $(s, k) \in \mathbf{S}$  gilt. Die nachfolgende Abbildung illustriert diese Resultate.

Abbildung 4.3 zeigt  $f_1(s, 1)$ ,  $f_2(s, 1)$  und  $f_3(s, 1)$  für  $\alpha = -0.1$  und daneben  $f_1^u(s, 1)$  für verschiedene Werte von  $\alpha$ .

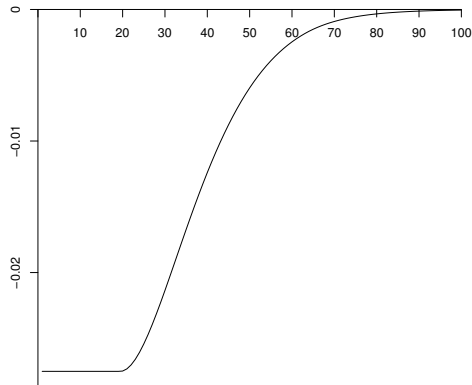


(a) Maximisatoren für  $\alpha = -0.1$ .

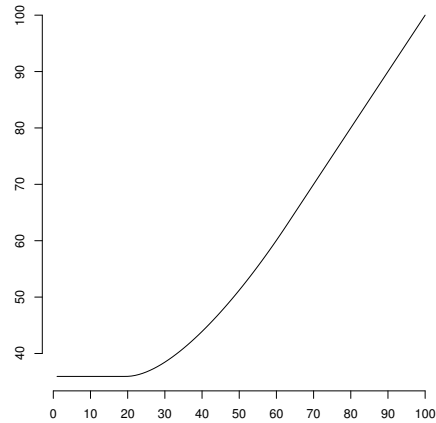
(b)  $f_1$  für verschiedene Werte von  $\alpha$ .

Abbildung 4.3.: Maximisatoren im risikosensitiven Modell für  $k = 1$  bei Gleichverteilung auf  $\{1, \dots, 100\}$ .

Außerdem haben wir in Korollar 4.2.6 gezeigt, dass  $s \mapsto V_n^u(s, k)$  weder konvex noch konkav ist für alle  $k \in (0, n + 1)$ . Die Funktion  $s \mapsto u^{-1}(V_n^u(s, k))$  ist aber konvex für alle  $k \in K$  (siehe Satz 4.2.1). Die nächste Abbildung zeigt  $V_2^u(s, 1)$  und  $u^{-1}(V_2^u(s, 1))$  für  $\alpha = -0.1$ .



(a) Wertfunktion für  $\alpha = -0.1$



(b) Sicherheitsäquivalent für  $\alpha = -0.1$

Abbildung 4.4.: Wertfunktion und Sicherheitsäquivalent der Wertfunktion im risikosensitiven Modell für  $k = 1$  bei Gleichverteilung auf  $\{1, \dots, 100\}$ .



# Anhang A.

## Hilfsmittel

### A.1. Konvexe Funktionen

Der folgende Satz fasst die benötigten elementaren Aussagen über konvexe Funktionen zusammen. Man kann sie z.B. in Roberts und Varberg (1973) finden.

**Satz A.1.1.** *Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, dann gilt:*

a) *Für  $x, y, z \in \mathbb{R}$  mit  $x < y < z$  gilt*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{y - z}$$

b) *In jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  existiert die rechtsseitige Ableitung*

$$D^+ f(x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

*und die linksseitige Ableitung*

$$D^- f(x) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

*und  $D^+ f$  und  $D^- f$  sind monoton wachsend.*

c) *Ist  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende konvexe Funktion, dann ist die Funktion*

$$h \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

*konvex.*

d) *Das Supremum beliebig vieler konvexer Funktionen ist wieder konvex, falls es existiert.*

e) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein beliebiger Maßraum und  $g$  eine Funktion auf  $\Omega \times \mathbb{R}$ , so dass  $g(\cdot, x)$   $\mu$ -integrierbar ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $g(\omega, \cdot)$  konvex für  $\mu$ -fast-alle  $\omega \in \Omega$ . Dann ist auch

$$x \rightarrow \int g(\omega, x) \mu(d\omega)$$

konvex.

**Definition A.1.2.** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **log-konvex**, falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und alle  $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(x)^\alpha \cdot f(y)^{1-\alpha}$$

gilt. Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt also **log-konvex** ist, falls  $\log f$  konvex ist.

Der folgende Satz von Artin kann auch einfach mittels der Hölderungleichung bewiesen werden (siehe Marshall und Olkin, 1979, Kapitel 16, D.4.). Er sagt aus, dass log-Konvexität unter Integration erhalten bleibt.

**Satz A.1.3.** (Artin, 1931) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein beliebiger Maßraum und sei  $f$  eine Funktion auf  $\mathbb{R} \times \Omega$ , so dass  $f(\cdot, \omega)$  log-konvex für  $\mu$ -fast-alle  $\omega \in \Omega$  und  $f(x, \cdot)$   $\mu$ -integrierbar für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dann ist auch

$$g(x) = \int f(x, \omega) \mu(d\omega)$$

log-konvex.

*Beweis.* Sei  $\alpha > 0, \beta > 0$  mit  $\alpha + \beta = 1$ . Dann gilt für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= \int f(\alpha x + \beta y, \omega) \mu(d\omega) \leq \int f^\alpha(x, \omega) \cdot f^\beta(y, \omega) \mu(d\omega) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int f(x, \omega) \mu(d\omega) \right)^\alpha \cdot \left( \int f(y, \omega) \mu(d\omega) \right)^\beta \\ &= g(x)^\alpha \cdot g(y)^\beta. \end{aligned}$$

□

## A.2. Lipschitz-stetige Funktionen

**Definition A.2.1.** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Lipschitz-stetig** ( $L$ -stetig) mit Konstante  $L$ , falls

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .



Neben der Definition von Lipschitz-Stetigkeit benötigen wir nur folgendes Lemma, das direkt aus der Dreiecksungleichung folgt.

**Lemma A.2.2.** *Das Maximum zweier  $L$ -stetiger Funktionen mit gleicher Konstante  $L$  ist wieder  $L$ -stetig mit Konstante  $L$ .*



# Literaturverzeichnis

- ALBRIGHT, C. und DERMAN, C. (1972) Asymptotic Optimal Policies for the Stochastic Sequential Assignment Problem. *Management Science* **19**, 46–51.
- ALSMEYER, G. (1991) *Erneuerungstheorie: Analyse stochastischer Regenerationsschemata*. Teubner Skripten zur mathematischen Stochastik. B.G. Teubner.
- ALTMAN, E. und STIDHAM, S. (1995) Optimality of monotonic policies for two-action Markovian decision processes, with applications to control of queues with delayed information. *Queueing Syst.* **21**, 267–291.
- ARROW, K. (1965) *Aspects of the theory of risk-bearing*. Yrjö Jahnsson lectures. Yrjö Jahnssonin Säätiö. Neu aufgelegt in Arrow (1971).
- ARROW, K. (1971) *Essays in the theory of risk-bearing*. Markham economics series. Markham Pub. Co.
- ARTIN, E. (1931) *Einführung in die Theorie der Gamma-funktion*. Hamburger mathematische Einzelschriften. B.G. Teubner.
- BARDOU, O., BOUTHEMY, S., und PAGÈS, G. (2010) When are swing options bang-bang? *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **13**, 867–899.
- BARZ, C. (2007) *Risk-Averse Capacity Control in Revenue Management*, Band 597 von *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer.
- BÄUERLE, N. und RIEDER, U. (2011) *Markov Decision Processes with Applications to Finance*. Universitext Series. Springer.
- BELLMAN, R. (1957) *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- BENDER, C. (2011) Dual pricing of multi-exercise options under volume constraints. *Finance and Stochastics* **15**, 1–26.
- BERTSEKAS, D. und SHREVE, S. (1978) *Stochastic optimal control: the discrete time case*. Mathematics in science and engineering. Academic Press.
- BURGER, M., GRAEBER, B., und SCHINDLMAYR, G. (2008) *Managing energy risk: an integrated view on power and other energy markets*. Wiley finance series. John Wiley & Sons.

- CARRIÈRE, J. F. (1996) Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance: Mathematics and Economics* **19**, 19–30.
- DERMAN, C., LIEBERMAN, G., und ROSS, S. (1972) A Sequential Stochastic Assignment Problem. *Management Science* **18**, 349–355.
- DYNKIN, E. und YUSHKEVICH, A. (1979) *Controlled Markov processes*. Springer.
- HADAR, J. und SEO, T. (1988) Asset Proportions in Optimal Portfolios. *Review of Economic Studies* **55**, 459–68.
- HADAR, J. und SEO, T. (1990) The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolios. *International Economic Review* **31**, 721–36.
- HALL, J. A., LIPPMAN, S. A., und MCCALL, J. J. (1979) Expected Utility maximising Job Search. In LIPPMAN, S. A. und MCCALL, J. J. (eds.), *Studies in the Economics of Search*, Kapitel 7, 133–156. North-Holland.
- HAUGH, M. B. und KOGAN, L. (2004) Pricing American Options: A Duality Approach. *Operations Research* **52**, 258–270.
- HEYMAN, D. und SOBEL, M. (1984) *Stochastic Models in Operations Research: Stochastic optimization*. McGraw-Hill series in quantitative methods for management. McGraw-Hill.
- HINDERER, K. (1970) *Foundations of non-stationary dynamic programming with discrete time parameter*. Lecture notes in operations research and mathematical systems. Springer-Verlag.
- HOWARD, R. und MATHESON, J. (1972) Risk-Sensitive Markov Decision Processes. *Management Science* **18**, 356–369.
- IBÁÑEZ, A. (2004) Valuation by Simulation of Contingent Claims with Multiple Early Exercise Opportunities. *Mathematical Finance* **14**, 223–248.
- JAILLET, P., RONN, E. I., und TOMPAIDIS, S. (2004) Valuation of Commodity-Based Swing Options. *Management Science* **50**, 909–921.
- JÖNSSON, H., KUKUSH, A., und SILVESTROV, D. (2004) Threshold structure of optimal stopping strategies for American type options. I. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **71**, 93–103.
- JÖNSSON, H., KUKUSH, A., und SILVESTROV, D. (2005) Threshold structure of optimal stopping strategies for American type options. II. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **72**, 47–58.

- KLENKE, A. (2008) *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer.
- KREPS, D. M. (1977a) Decision Problems with Expected Utility Criteria, I: Upper and Lower Convergent Utility. *Mathematics of Operations Research* **2**, 45–53.
- KREPS, D. M. (1977b) Decision Problems with Expected Utility Criteria, II: Stationarity. *Mathematics of Operations Research* **2**, 266–274.
- KREPS, D. M. (1978) Sequential Decision Problems with Expected Utility Criteria, III: Upper and Lower Transience. *SIAM Journal on Control and Optimization* **16**, 420–429.
- LIPPMAN, S. A. und MCCALL, J. J. (1976) The Economics of Job Search: A Survey: Part I and II. *Economic Inquiry* **14**, 155–189 und 347–368.
- LONGSTAFF, F. A. und SCHWARTZ, E. S. (2001) Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies* **14**, 113–147.
- MARSHALL, A. und OLKIN, I. (1979) *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press.
- MEINSHAUSEN, N. und HAMBLY, B. M. (2004) Monte Carlo Methods for the Valuation of Multiple Exercise Options. Working paper. *Mathematical Finance* **14**, 557–583.
- MEYN, S. und TWEEDIE, R. L. (1993) *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag, London.
- MÜLLER, A. (2000) Expected utility maximization of optimal stopping problems. *European Journal of Operational Research* **122**, 101–114.
- MÜLLER, A. und STOYAN, D. (2002) *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley series in probability and statistics. Wiley.
- NEUMANN, J. und MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press.
- PORTEUS, E. (1975) On the Optimality of Structured Policies in Countable Stage Decision Processes. *Management Science* **22**, 148–157.
- PRATT, J. W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica* **32**, 122–136.
- PRONZATO, L. (2001) Optimal and Asymptotically Optimal Decision Rules for Sequential Screening and Resource Allocation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**, 687–697.

- PUTERMAN, M. L. (1994) *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1st edition.
- RAIFFA, H. (1968) *Decision Analysis – Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- ROBERTS, A. und VARBERG, D. (1973) *Convex functions*. Pure and applied mathematics. Academic Press.
- ROGERS, L. C. G. (2002) Monte Carlo valuation of American options. *Mathematical Finance* **12**, 271–286.
- STIGLER, G. J. (1961) The Economics of Information. *Journal of Political Economy* **69**, 213–225.
- STIGLER, G. J. (1962) Information in the Labor Market. *Journal of Political Economy* **70**, 94–105.
- TOPKIS, D. M. (1978) Minimizing a submodular function on a lattice. *Operations Research* **26**, 305–321.
- TSITSIKLIS, J. N. und VAN ROY, B. (2001) Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options. *IEEE Transactions on Neural Networks* **12**, 694–703.
- WHITE, D. J. (1987) Utility, probabilistic constraints, mean and variance of discounted rewards in Markov decision processes. *OR Spectrum* **9**, 13–22.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Alfred Müller herzlich für die Möglichkeit, diese Arbeit an der Universität Siegen anfertigen zu können, und für zahlreiche Ratschläge und wertvolle Diskussionen bedanken.

Außerdem bedanke ich mich bei Frau Prof. Dr. Nicole Bäuerle für die Übernahme des Korreferats.