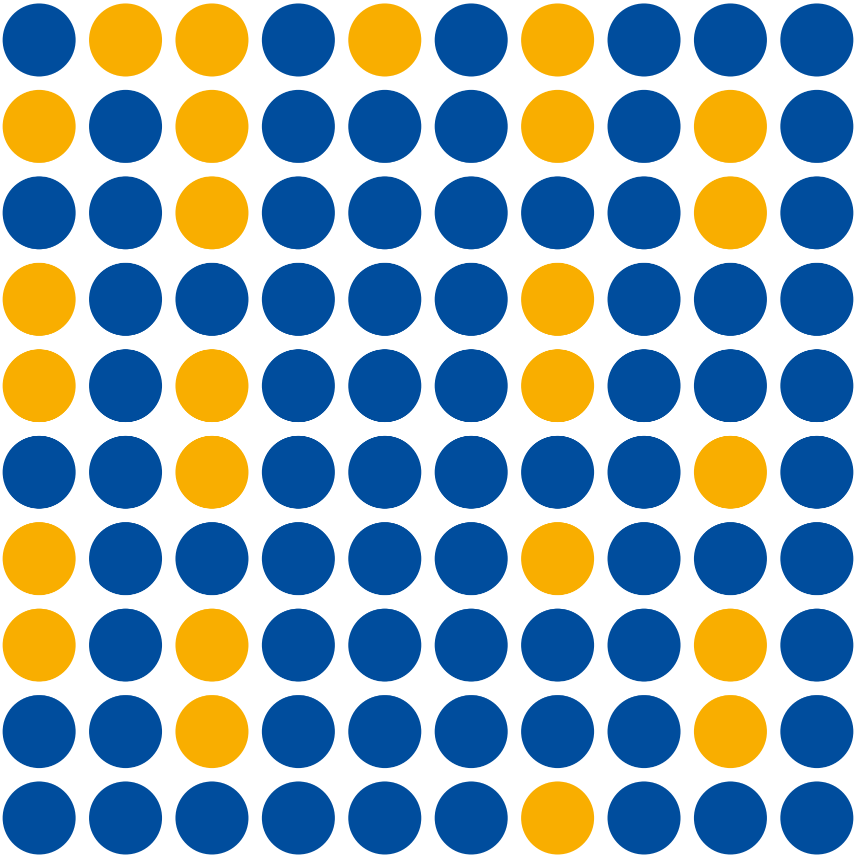
SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 2 • 2013**

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik



Susanne Spies

Ästhetische Erfahrung Mathematik

Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Ästhetische Erfahrung Mathematik

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Herausgegeben von

Ralf Krömer und Gregor Nickel

Jahrgang 1, Band 2

Susanne Spies

Ästhetische Erfahrung Mathematik

Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Susanne Spies
Universität Siegen
Department Mathematik
Walter-Flex-Str. 3
57068 Siegen

spies@mathematik.uni-siegen.de

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation zur Erlangung eines Doktors der Naturwissenschaften von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Universität Siegen angenommen.
Gutachter: Prof. Dr. Gregor Nickel und Prof. Dr. Knut Radbruch
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 2013

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Jg. 1 (2013) Bd. 2
Herausgeber: Ralf Krömer und Gregor Nickel (Universität Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2013

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die Siegener Beiträge bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von Philosophie und Geschichte der Mathematik. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

- Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren.

- Die Rolle der Mathematik in der Wissenschaftsgeschichte, aber auch die gesellschaftliche Rolle der Mathematik und deren historische Bedingtheit sollen untersucht werden.

- Ein spezieller Aspekt betrifft dabei das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf.

Unser herzlicher Dank gilt Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik sowie Kordula Lindner-Jarchow und Martin Schubert für die verlagseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer
Gregor Nickel

Geleitwort zu Band 2

Äußerungen über die Schönheit von Beweisen und Theoremen sind unter Mathematikern – über die Jahrhunderte hinweg – keine seltene Randerscheinung. Sie sind vielmehr wesentlich für die Außendarstellung, übernehmen aber auch innermathematisch eine zentrale handlungsleitende Funktion. Abgesehen von einer Vielzahl von Belegen – häufig im Kontext einer Popularisierung der Mathematik – wird dies auch von empirischen Untersuchungen zur mathematischen Praxis bestätigt. Der innermathematisch offenbar allgemein akzeptierte Gemeinplatz von der ‚schönen' Mathematik wird jedoch selten genauer ausgeführt, oder gar einer philosophischen Analyse unterzogen. So sind auch in der mathematikphilosophischen Literatur bisher allenfalls Teilaspekte des Themas behandelt worden. Dies gilt insbesondere für eine ästhetische Bewertung mathematischer Sätze und Beweise. Für die vorliegende Arbeit musste also zunächst ein äußerst heterogenes Material gesichtet und strukturiert werden, um anschließend die systematische Analyse zu leisten. Neben diesem, ihrem eigenen Anliegen füllt die Arbeit mit einem umfassenden Überblick über vorhandene Ansätze eine fühlbare Lücke in der mathematikphilosophischen Literatur und kann auch von daher Grundlage für weitere Forschungen werden.

Eine schlüssige Grundunterscheidung motiviert die Gliederung: „Mathematikästhetisches Verhalten" wird einerseits in Bezug auf den verwendeten Schönheitsbegriff und damit eher gegenstands- bzw. rezipientenbezogen analysiert (Teil I), andererseits wird die Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik und damit nach den Produzenten gestellt (Teil II). Zunächst grenzt jedoch ein einführendes Kapitel den Gegenstand der Arbeit („Muster der Mathematiker") von dem häufig behandelten, gleichwohl für die innermathematische Praxis randständigen Thema einer Bearbeitung bzw. Präsentation („Muster über Mathematik" und „Muster aus der Mathematik") bzw. Anwendung („Muster durch Mathematik") mathematischer Strukturen und Techniken im Kunstsystem ab. Die vorgeschlagene Abgrenzung ist in Bezug auf das Interesse im Bereich der Mathematikphilosophie ausgesprochen sinnvoll gewählt; sie hilft, die häufig zu beobachtende Vermischung mit Phänomenen aus dem Bereich der graphischen Darstellung oder der Anwendung mathematischer Prinzipien für die Kunst zu vermeiden. Im dritten Hauptteil wird dann einerseits ein fachdidaktischer Ausblick gegeben, andererseits wird die erarbeitete Begrifflichkeit beispielhaft an zwei „Klassikern der Mathematikästhetik" vorgeführt.

Die Kontrastierung der vorhandenen Literatur zur Ästhetik der Mathematik, die in der Regel einer ästhetischen Bewertung von Beweisen und Theoremen positiv gegenübersteht, und Ansätzen der allgemeinen philosophischen Ästhetik, die die Möglichkeiten einer Mathematikästhetik eher skeptisch beurteilen, zeigt sich dabei als ausgesprochen fruchtbar. Mit Immanuel Kants Ausführungen wird hierzu eine wegweisende Ästhetiktheorie ins Spiel gebracht, die aufgrund ihrer umfassenden Systematik und Begrifflichkeit eine vielfältige Bezugnahme ermöglicht – jeweils in Bezug auf den Schönheits- (Teil I) wie auf den Kunstbegriff (Teil II). Zudem gerät ein eher selten beachteter Aspekt der Kantischen Philosophie in den Blick. Gerade dieser Kontrast ermöglicht schließlich der Autorin eine argumentativ gut begründete, eigene Charakterisierung der Phänomene.

Es steht einer jeden Wissenschaft wohl an, ihre Reflexionsdimension(en) als *eigene* Aufgabe zu begreifen und diese gerade nicht an eine fach- und gelegentlich sogar sachfremde Wissenschaftsgeschichte bzw. -philosophie zu delegieren. Es macht die besondere Schwierigkeit und den Reiz einer solchen metawissenschaftlichen Analyse aus, dass dabei zugleich Gegenstände und Methodik der Bezugsdisziplin wie auch eine genuin geisteswissenschaftliche Hermeneutik zum Tragen kommen müssen. Besonders mit Bezug auf eine der exakten Wissenschaften wird sie also naturgemäß transdiziplinär, somit methodenplural arbeiten müssen. Insofern steht sie zwar im Kontrast zu dem in aller Regel methodenorientierten, rein disziplinären Vorgehen ihrer Bezugswissenschaft, bleibt jedoch zugleich essentiell in deren Kontext einbezogen. Die vorliegende Arbeit zeigt dies in exemplarischer Weise. Sie bietet dem mathematischen Fachwissenschaftler einen reflektierten Zugang zu zentralen Kategorien der Wertung und Selbstbeschreibung, dem Philosophen eine instruktive, nichtformale Perspektive auf das Phänomen Mathematik und dem Fachdidaktiker ein reichhaltiges Angebot für praktische Anwendungen. Es ist zu hoffen, dass sie auf vielfältige Weise zu weiteren Reflexionen über Phänomen und Funktion der Mathematikästhetik anregen wird.

Siegen im September 2013 Gregor Nickel

Für
Daniel, Emma und Justus

Vorwort

Viele Menschen haben den Entstehungsprozess dieser Arbeit begleitet. Ihnen gilt es an dieser Stelle zu danken:
Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Gregor Nickel, der all meine Wege und Irrwege mit Interesse, wertvollen Hinweisen und fruchtbaren Diskussionen begleitet hat, mir darüber hinaus aber auch die für das Entstehen neuer Ideen wohl notwendige Freiheit eingeräumt hat. Weiterhin danke ich Prof. Dr. Knut Radbruch für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens sowie den weiteren Mitgliedern der Promotionskommission Prof. Dr. Katja Lengnink und Prof. Dr. Wolfgang Hein. Ihre je verschiedenen Perspektiven auf mein Thema führten zu einem interessanten und sehr angenehmen Diskurs über die Arbeit hinaus.

Ein herzlicher Dank gilt außerdem meinen Kolleginnen und Kollegen aus der Arbeitsgruppe „Geschichte und Philosophie der Mathematik“ und der Arbeitsgruppe „Didaktik der Mathematik“ an der Universität Siegen. Sie gaben mir nicht nur die Gelegenheit, vor wohlwollendem und gleichwohl kritischem Publikum immer wieder einzelne Ergebnisse zu präsentieren und wertvolle inhaltliche wie methodische Anregungen zu bekommen. Sie sorgten auch für die manchmal nötige Ablenkung und ein freundschaftliches Arbeitsklima und ließen so nicht zuletzt die unausweichlichen Durststrecken erträglich werden.
Für die Unterstützung bei der Endredaktion und der Vorbereitung auf die Verteidigung der Arbeit danke ich insbesondere Henrike Allmendinger, Achim Klein, Martin Rathgeb, Dr. Kerstin Tiedemann und Miriam Waldrich.

Danken möchte ich auch meinen Freunden und meiner Familie, die mein Vorhaben getragen und mir meinen eigenen Weg gelassen haben und dabei stets für wohltuende Bodenhaftung sorgten.
Ohne die liebevolle und zuversichtliche Unterstützung durch meinen Mann Daniel Funken wäre diese Arbeit nicht entstanden. Er hat mich in allen Phasen der Arbeit inhaltlich, redaktionell, organisatorisch und vor allem persönlich begleitet und mir gemeinsam mit unseren Kindern Emma und Justus immer wieder den Blick für das Wesentliche und die Schönheiten außerhalb der Mathematik geöffnet. Ich danke Dir von Herzen!

Siegen im September 2013 Susanne Spies

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

> „The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be *beautiful*; the ideas like the colours or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.“ (Hardy, 1940, S. 85)

Ist es nicht bemerkenswert, dass ein Mathematiker von Rang, wie der Brite Godfrey Harold Hardy (1877–1947), der Schönheit in einer rational und rein deduktiv argumentierenden Wissenschaft einen so hohen Stellenwert einräumt? Dass Hardy nicht der Einzige seiner Zunft ist, der einen engen Zusammenhang zwischen Schönheit und Mathematik behauptet, legitimiert mathematikästhetische Betrachtungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagen werden, zeigt es doch, dass Begriffe der Ästhetik in der Mathematik nicht nur am Rande Verwendung finden. Eine Aufreihung möglichst vieler Beispiele dieser Art, wie sie die Mathematikgeschichte über alle Zeiten hinweg liefert, also ein anekdotenhafter Abriss einer Geschichte der Mathematikästhetik, wird so als Legitimationsinstrument unnötig. Auch genügt dieses eine Zitat, um eine für die Motivation der Beschäftigung mit ästhetischen Fragestellungen innerhalb der Mathematikphilosophie ausreichende Irritation zu erzeugen.

Hardy wirft mit seiner Aussage des Weiteren grundlegende Fragen auf, deren Untersuchung allerdings einer breiteren Basis an Beispielen und weitergehenden theoretischen Überlegungen bedarf:

- Was kann unter den „Mustern der Mathematiker“ („the mathematician's patterns“) verstanden werden, die im Spannungsfeld von Ästhetik und Mathematik betrachtet werden sollen? Welches also sind die Träger der mathematischen Schönheit?
- Welcher Begriff von Schönheit liegt einer solchen Aussage zugrunde? Welche Eigenschaften werden zum Maßstab der ersten Prüfung („the first test“)?
- Inwieweit ist der Vergleich des Mathematikers mit Malern oder Schriftstellern zulässig? Welche Parallelen können zwischen Mathematik und Kunst gezogen werden?

Darüber hinaus kann gefragt werden, ob es neben der Rolle eines Evaluationsinstrumentes weitere Funktionen des Ästhetischen in der mathematischen Forschung gibt und inwiefern sich die angedeutete Relevanz der Schönheit für die Mathematik empirisch bestätigen lässt. Weiter stellt sich die Frage, ob sich solche Aussagen, die auf den ästhetischen Wert der Mathematik im Allgemeinen hinweisen, an einzelnen Sätzen oder Beweisen festmachen lassen und nicht zuletzt, welche Auswirkungen die ästhetische Komponente auf das Lehren und Lernen von Mathematik hat.

Obgleich Aussagen wie die oben zitierte unter Mathematikern weit verbreitet sind, gibt es schon zu den erstgenannten grundsätzlichen Fragestellungen nur wenige systematische mathematikphilosophische Untersuchungen. So muss sich eine Arbeit zur Mathematikästhetik vorrangig mit den Grundlagen der Disziplin auseinandersetzen, bevor auf speziellere Fragen eingegangen werden kann. Als zentrale Aufgaben dieser Arbeit ergeben sich daher folgende:
Nach der Abgrenzung der Gegenstände einer ästhetischen Betrachtung der Mathematik ist die Frage nach dem verwendeten Schönheitsbegriff sowie nach dem Kunstcharakter der Mathematik zu stellen.

1.1 Kunst, Muster und Mathematik

Es gibt sehr unterschiedliche Möglichkeiten, die Bereiche Ästhetik und Mathematik in Verbindung zu bringen und damit auch eine Fülle möglicher Träger ästhetischer Eigenschaften mit Bezug zur Mathematik. Im Folgenden sollen verschiedene Gegenstandsbereiche benannt und kurz skizziert werden. In Anlehnung an die Begrifflichkeit des eingangs zitierten G.H. Hardy können verschiedene Arten von *Mustern* im Spannungsfeld von Mathematik und Kunst bzw. Mathematik und allgemeiner Ästhetik identifiziert und von abstrakten mathematischen Gegenständen, die als Träger ästhetischer Wertzuschreibungen fungieren, wie etwa Beweisen und Theoremen unterschieden werden.[1] Dabei sind es gerade ästhetische Beurteilungen dieser letztgenannten, die für die mathematische Praxis eine besondere Relevanz besitzen, bei Nichtmathematikern große Irritationen auslösen und außerdem aus mathematikphilosophischer Sicht von besonderem Interesse sind. Somit sind es gerade diese Hardyschen *„Muster der Mathematiker“*, die im Zentrum des Interesses dieser Arbeit stehen und im folgenden durch Abgrenzung spezifiziert werden.

1.1.1 Das Spannungsfeld aus Sicht der Kunsttheorie

Eine Verbindung von Ästhetik und Mathematik ist in kunsttheoretisch relevanter Weise auf zweierlei Arten denkbar: Einerseits kommt es zu künstlerischer Darstel-

[1] Die hier vorgestellte Zuordnung wurde weit weniger ausführlich bereits in Spies (2008a) angedeutet.

lung, andererseits zu technischer Verwendung der Mathematik in der Kunst(-theorie). Die Mathematik und ihre Gesetzmäßigkeiten können also zum Gegenstand der Kunst werden, so dass *„Muster über Mathematik“* entstehen. Häufig geht die Mathematik aber auch als Werkzeug der Künstler in die Kunst ein und kann demnach auch zur Analyse von Kunstwerken benutzt werden. Die so unter Rückgriff auf die Mathematik ent- und verstandene Kunst soll hier unter der Überschrift *„Muster durch Mathematik“* zusammengefasst werden.

Muster über Mathematik

„Die Mathematik“ kann auf unterschiedliche Arten zum Gegenstand der Kunst werden. Wird das Wissenschaftssystem und die darin agierenden Menschen künstlerisch in Szene gesetzt, so entstehen Werke, die von denen der „Konkreten Kunst“ zu unterscheiden sind, in denen die *Gegenstände* der Wissenschaft Mathematik zur Darstellung kommen.

Zu den Werken der erstgenannten Art zählen etwa Mathematikerportraits, wie sie bereits Walther Lietzmann in großer Zahl zusammengestellt hat (vgl. Lietzmann, 1931, S. 145ff). Aber auch die Darstellung von einzelnen Mathematikern oder bestimmten Problemen aus der mathematischen Forschung in Literatur, Film und Theater gehören dazu. Insbesondere die umfangreichen Zusammenstellungen von Michele Emmer (2005) oder von Robert Ossermann (2005) mit Blick auf Film und Theater, sowie von Knut Radbruch (1997) mit Blick auf die Literatur zeigen dabei das Spektrum der Realisationsmöglichkeiten solcher Vorhaben.[2] Die Analyse der „Muster über Mathematik“ offenbart immer wieder auch die Wechselbeziehungen der Kulturleistungen Kunst und Mathematik, so dass diese Perspektive nicht nur kunsttheoretisch, sondern auch mathematikphilosophisch fruchtbar werden kann. Durch Werke, in denen *„Muster über das soziale System Mathematik“* im Vordergrund stehen, bekommt der Zuschauer oder Leser einen, mehr oder minder, realitätsnahen Einblick in den Wissenschaftsbetrieb oder konkrete Probleme der Mathematik. Allerdings scheint die Art der Umsetzung nicht in besonderem Maße mathematikspezifisch zu sein. So ist in ähnlicher Weise auch die Inszenierung von Protagonisten anderer Wissenschaften denkbar.[3]

Anders ist dies bei Kunstwerken, in denen die im sozialen System Mathematik verhandelten Gegenstände, also mathematische Ideen und Gesetzmäßigkeiten oder auch die behandelten Objekte wie Zahlen oder geometrische Figuren, zur Darstellung kommen. Ihre Verwendung zur abstrakten Darstellung ist dabei in der Kunstgeschichte schon früh zu finden. So weist Astrid Guderian etwa „Mathematisches von der prähistorischen Zeit bis zu den Frühkulturen“ nach und findet die

[2] Vgl. hierzu auch die von Bomski und Suhr (2012) herausgegebenen Aufsätze, in denen sowohl auf die Mathematik als Gegenstand von Literatur und Film eingegangen wird als auch Wechselwirkungen aufgezeigt werden.

[3] Die Mathematik ist höchstens aufgrund ihres öffentlichen Images ein besonders schwer zu inszenierender Gegenstand.

Mathematik dabei hauptsächlich als Mittel zur Abstraktion von der realen Umwelt:

> „Dieses meist noch unbewußte Formen- und Zahlendenken hinterläßt seine Spuren in Höhlenmalereien, Kleinplastiken und Gebrauchsgegenständen, denen eines gemeinsam ist: Sie besitzen ein hohes Maß an Abstraktion in der Darstellung. Offensichtlich ist das Verlangen nach Abstraktion ein konstitutives Element des menschlichen Geistes überhaupt.“ (Guderian, 1990a, S. 264)

Ebenfalls eine lange Tradition hat die bewusstere und weniger den Abstraktionsgedanken in den Vordergrund stellende Darstellung geometrischer Formen und Modelle durch die bildende Kunst. Dies weist etwa Emmer (1993) am Beispiel der Platonischen Körper nach, für deren künstlerisches Aufgreifen es Fälle gibt, die vom zweiten Jahrhundert vor Christus über Renaissancemaler wie Albrecht Dürer (vgl. Emmer, 1993, S. 217f) bis hin zu den *Laternen Dali's* (vgl. z.B. Guderian, 1990b, S. 150) reichen.

Von solchen Beispielen zu unterscheiden sind die Werke der sogenannten *Konkreten Kunst*, durch die die „Mathematik [. . .] durch kunsteigene, aber mathematikadäquate Strukturen ins Bild“ (Guderian, 1990a, S. 273) gelangt. Dabei wendet sich die konkrete Kunst explizit von Darstellungen der realen Welt einschließlich der Abstraktion von dieser ab und inszeniert stattdessen mathematische Ideen und Gesetzmäßigkeiten.[4] Dies geschieht z.B., indem prominente Zahlen durch nicht alltägliche Zeichen dargestellt werden, wie etwa der Anfang der Primzahlreihe, dargestellt durch altjapanische Zeichen in den Bildern von Rune Mields (dargestellt und beschrieben bei Guderian, 1990b, S. 21) oder die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π als Dezimaldarstellung, in denen jede Stelle Würfelseiten gleich durch die entsprechende Anzahl von Punkten gekennzeichnet wird, in Werken von Anatolii T. Fomenko (vom Künstler selbst in (Fomenko, 1990, S. 140ff) beschrieben). Weitere Beispiele bieten etwa die nach Regeln der Kombinatorik angeordneten Farben in Werken von Richard Paul Lohse (1902–1988) (beschrieben durch den Künstler selbst in Lohse, 1990). Neben der zentralen Bedeutung mathematischer Gesetzmäßigkeiten ist die zusätzliche Beigabe von Erklärungen durch die Künstler selbst ein Kennzeichen der Konkreten Kunst. So gehören neben hauptsächlich beschreibenden Texten in Ausstellungskatalogen auch die eigenen theoretischen Arbeiten der Künstler zu den wichtigsten Referenzen über Konkrete Kunst. Beispielhaft ist dazu etwa Max Bill (1908–1994) zu nennen, der in *max bill: system mit fünf vierfarbigen zentren* ausführlich „eine anleitung [gibt], auf welche weise ein bild betrachtet werden kann das scheinbar keine entzifferbare darstellung ent-

[4] Vgl. etwa Nickel und Rottmann (2006), S. 151. Astrid Guderian betont in diesem Zusammenhang, dass durch diese „Mathematisierung von Kunst“ die Mathematik selber nicht zur Kunst wird (vgl. Guderian, 1990a, S. 273). In diesem Sinne hebt auch Marlene Lauter die auf subjektiven Entscheidungen der Künstler beruhenden Abweichungen von der für das Kunstwerk grundlegenden Gesetzmäßigkeit hervor (vgl. Lauter, 2007).

hält [sic.]“ (Bill, 1972, S. 6).[5] Eine weitere Referenz bilden außerdem die Arbeiten von Dietmar Guderian, in denen er nicht nur die Werke der Konkreten Kunst beschreibt, sondern sie auch zur zugrunde liegenden Mathematik in Beziehung setzt.[6] Auch im Rahmen der *Neuen Musik* sind Komponisten zu finden, die ähnlich der Konkreten Kunst ihre Werke auf die Mathematik beziehen und mathematische Prinzipien zur Kompositionsgrundlage werden lassen (vgl. z.B. Bauer, 2010). Ein prominentes Beispiel ist die „stochastische Musik“ von Iannis Xenakis (1922–2001). Im Umfeld dieser künstlerischen Strömungen entstehen außerdem immer wieder Texte von Mathematikern, in denen nahezu ausschließlich auf die verwendete Mathematik eingegangen wird und Abweichungen von der vorgeblichen Gesetzmäßigkeit herausgearbeitet werden oder der Versuch unternommen wird, die Werke nachzukonstruieren (vgl. z.B. Roth, 2007).[7] Dahinter steht auch die Hoffnung, über die Kunst einen alternativen Zugang zur Mathematik zu eröffnen und die (Konkrete) Kunst mathematikdidaktisch nutzbar zu machen.[8]

Muster durch Mathematik

> „Und in der Tat: Wer nur als Mathematiker an das Kunstwerk herantritt, geht arm wieder davon. Aber wer zur unerläßlichen künstlerischen Einfühlung ein mathematisch geschultes Auge mitbringt, der erkennt Reize, die anderen verborgen bleiben.“ (Lietzmann, 1931, S. 149)

So begründet Lietzmann in *Mathematik und bildende Kunst* auch im Rahmen der Kunstanalyse die Beschäftigung mit den mathematischen Techniken, die zur Entstehung von Kunstwerken verwendet wurden. Dazu zählen geometrische Prinzipien, wie die Perspektive oder die Anwendung bzw. Einhaltung bestimmter Symmetrien, aber auch die Gestaltung von Kunstwerken nach vorgegebenen Proportionen.

Die Verwendung von Techniken wie der Zentralperspektive erfährt besondere Bedeutung und Perfektion in der Malerei der Renaissance. Durch die perspektivischen Konstruktionen wird auf einer ebenen Bildfläche der Eindruck räumlicher Tiefe und damit eine besonders realistisch anmutende Abbildung der Wirklichkeit erzeugt. Dabei entstehen unterschiedliche künstlerische Techniken und gleichzeitig ein neues Gebiet der Mathematik, wie Judith Field (1997) anhand vieler Beispiele beschreibt. Die dänische Mathematikhistorikerin Kirsti Andersen weist weiterhin nach, dass die Entwicklung der mathematischen Theorie der Perspektive zwar

[5] Zu Bills Bezugnahme auf die Mathematik in seinem künstlerischen Werk vgl. Nickel und Rottmann (2006).

[6] Siehe z.B. Guderian (1990b), Guderian (2005) oder Guderian (2007).

[7] Inwiefern damit den Künstlern gerecht werden kann, bleibt m.E. fraglich, da es sich um eine andere Art des Hinsehens handelt, als dies Künstler wie Bill in ihren Beschreibungen der Werke fordern.

[8] Vgl. dazu beispielsweise die Themenhefte mathematik lehren 157 (2009): *Kunst – Kreative Zugänge zur Mathematik* und Der Mathematikunterricht 55/2 (2009): *Mathematik und Kunst.*

durch die Künstler angestoßen wurde, aber bald über das in der Kunst verwendete Maß hinaus ging. Mathematiker, die die Thematik aufgriffen, waren demnach nicht mehr an der künstlerischen oder kunsttheoretischen Anwendung interessiert[9]:

> „The forces that drove them were their interest in and enthusiasm for the theoretical aspects of perspective, and their inclination to give in to the seduction of mathematics." (Andersen, 2007, S. 721)

Die Perspektive wird als künstlerische Technik nicht nur zur besonders realitätsnahen Darstellung genutzt, sondern auch etwa um durch der Erfahrung widersprechende Zeichnungen den Betrachter zu verwirren. Ein frühes Beispiel stellt etwa die Zeichnung von William Hogarth (1697–1764) auf der Titelseite eines Buchs über mathematische Perspektive dar (vgl. Field, 1997, S. 233). Zur Perfektion treibt dieses Spiel der absurden Perspektiven der niederländische Künstler M.C. Escher (1898–1972) beispielsweise in seinem berühmten Werk *Belvedere*.

Die Symmetrie muss als „Muster durch Mathematik" zunächst nur im Sinne eines visuell erfassbaren Gestaltungsinstrumentes etwa von Mustern in der Ornamentik verstanden werden. Andere Deutungen sind aber denkbar. So ändert sich die Zielrichtung, wenn Symmetrie als inherentes Merkmal einzelner Aussagen oder ganzer Theorien verwendet wird.[10] Eine Verbindung der beiden Sichtweisen jedoch mit besonderem Gewicht auf letzterer versucht Ian Stewart (2008), der herausstellt, wie mittels der Galois-Theorie, die wiederum selbst durch Symmetrie und Harmonie überzeugt, Symmetriemuster im ersteren Sinne allgemein gefasst werden können. So ist es auch Hermann Weyl (1955) möglich, auf Beispielen aus Kunst und Natur beruhend in Vorträgen für den gebildeten Laien den allgemeinen mathematischen Symmetriebegriff zu entwickeln, womit ein weiterer Wortsinn der Symmetrie gegeben ist.

Sowohl in der Gestaltung von Werken der bildenden Kunst als auch in der Kunstanalyse spielen bzw. spielten bestimmte mathematisch fassbare Proportionen eine zentrale Rolle. Das bekannteste und sowohl kunsttheoretisch wie auch mathematisch anregendste Beispiel ist dabei die stetige Teilung bzw. das als „goldener Schnitt" bekannte Verhältnis:

> „Es gibt keine andere Proportion mit einem so unangefochtenen und allgemein respektierten Status." (van der Schoot, 2005, S. 12)

Diese Streckenteilung, die auf die „goldene Zahl" $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ hinausläuft, kann an vielen natürlichen Gegenständen entdeckt bzw. in sie hinein gelesen werden. Außerdem findet dieses Verhältnis in der Architektur und Bildhauerkunst bereits seit der Antike Anwendung und gilt als Garant für eine besondere ästhetische

[9] Insofern zählt der Komplex der Perspektive auch zu den „Mustern der Mathematiker" und gesehen als mathematische Theorie, die wiederum ästhetisch bewertet werden kann, auch zum Gegenstand dieser Arbeit.

[10] Vgl. dazu etwa die beispielhaften Ausführungen von Holger Wille (2004), S. 164ff.

Wirkung auf den Rezipienten. Aufgrund der besonderen Schönheit, die vorgeblich durch dieses Verhältnis erzeugt wird, findet die Suche danach auch in die Analyse von solchen Kunstwerken Eingang, bei denen der Goldenen Schnitt nicht explizit Gestaltungsgrundlage war.

Neben der Mathematik, die sowohl von Künstlern als Technik zur Gestaltung ihrer Werke eingesetzt als auch als Analysewerkzeug herangezogen wird, sind auch Versuche zu den „Muster durch Mathematik“ zu rechnen, mit Hilfe mathematischer Methoden die Schönheit oder den ästhetischen Wert von Kunstwerken objektivierbar zumachen. Neben den durch die phythagoreische Auffassung beeinflussten antiken und mittelalterlichen Konzeptionen[11] ist das „ästhetische Maß“ George D. Birkhoffs (1884–1944) eines der bekanntesten Beispiele dieser Art. So schlägt Birkhoff in *Aesthetic Measure* (Birkhoff, 1933) eine Formel zur Bestimmung des ästhetischen Maßes eines Kunstwerkes vor, die neben einer zahlenmäßigen Angabe des ästhetischen Wertes auch den direkten Vergleich verschiedener Werke ermöglichen soll:

> „So stellt sich fast unmittelbar die Frage, festzulegen, bis zu welchem Punkt dieses ästhetische Maß [M] nur von der Dichte der Ordnungsrelationen [O] und ihrer Beziehung zur Komplexität [C] abhängt. Und so scheint es ganz natürlich, eine Formel der Art
>
> $$M = \frac{O}{C}$$
>
> vorzuschlagen.“ (Birkhoff, zitiert nach Gunzenhäuser, 1975, S. 25)

In der Folge gibt er an, wie für unterschiedliche Kunstformen (zahlenmäßige) Werte für Ordnung und Komplexität ermittelt werden können (vgl. Gunzenhäuser, 1975, S. 30ff).[12]

Der Unterschied zwischen den „Mustern über Mathematik“ und den hier vorgestellten „Mustern durch Mathematik“ liegt im Status begründet, der der Mathematik jeweils zukommt. So sind im ersten Fall bereits in der Wissenschaft Mathematik entstandene Gegenstände ebenfalls Gegenstände für den Künstler, die dort allerdings nicht entstehen, sondern künstlerisch in Szene gesetzt werden. Die Produkte der Mathematiker werden also durch die Künstler zu „Mustern über Mathematik“. Im zweiten Fall dagegen werden (evtl. zunächst vage formulierte) mathematische Gegenstände zu Techniken des Künstlers oder des Kunsttheoretikers und bieten

[11] Da in diesem Kontext auch von der auf mathematischen Gesetzen gründenden allgemeinen Ästhetik auf die Schönheit der Mathematik selbst geschlossen wird, folgt eine ausführliche Darstellung und Einordnung solcher Theorien im Rahmen eines historischen Exkurses in Kapitel 3.

[12] Ein solcher Ansatz kann insofern zum Gegenstand dieser Arbeit werden, als dass natürlich auch das Mathematische in Birkhoffs Theorie selbst mit ästhetischen Attributen belegt sein könnte. Als reine Technik zur Analyse von Werken der bildenden Kunst jedoch stellt dies einen bemerkenswerten, jedoch für diese Arbeit nicht bedeutsamen Ansatz im Spannungsfeld von Mathematik und Kunst dar.

dadurch nicht selten die Möglichkeit, als solche wieder zum mathematischen Gegenstand zu werden.

1.1.2 Das Spannungsfeld aus Sicht der Mathematikphilosophie

Aus mathematikphilosophischer Perspektive sind weitere Möglichkeiten, mathematische und künstlerische Aspekte zusammen zu bringen, denkbar. Einerseits können die zunächst abstrakten Entitäten der Mathematik visualisiert und damit einem Kunstwerk ähnlich sinnlich rezipierbar werden. So entstehen durch bildgebende Verfahren *„Muster aus der Mathematik"*. Andererseits werden im Sprachgebrauch der Mathematiker gerade die abstrakten Gegenstände der Mathematik mit ästhetischen Kategorien belegt und damit kunstgleich behandelt. Dabei handelt es sich dann um *„Muster der Mathematiker"*, wie G.H. Hardy sie in der eingangs zitierten *A mathematician's Apology* anspricht (vgl. Hardy, 1940, S. 89).

Muster aus der Mathematik

> „Mit Hilfe der modernen Computergraphik kann ein heutiger Mathematiker manchmal eine mathematische ‚Aufführung' darbieten, ganz ähnlich wie ein Musiker ein Musikstück aufführt." (Devlin, 2002, S. 10)

In diesem Sinne beschreibt Keith Devlin beispielsweise die Visualisierungen von Fraktalmengen als „Mathematische Symphonien" (vgl. Devlin, 2002, S. 10f). Zu dieser Gruppe von Mustern gehören auch Darstellungen topologischer und geometrischer Gebilde. Dabei sind nicht nur durch Computergraphik entstandene Bilder gemeint, sondern auch Zeichnungen, wie sie bereits in den Elementen des Euklid die theoretisch verhandelten Sachverhalte verdeutlichen. Einen Schritt weiter geht Oliver Byrne (1847), der in seiner Euklid-Edition von 1847 die algebraischen Zeichen durch farbige geometrische Formen ersetzt.[13]
Gemeinsam ist diesen Beispiele, dass ihnen eine abstrakte Struktur zu Grunde liegt, welche durch die Zuordnung zu Gegenständen des zwei- oder dreidimensionalen Raumes visuell fassbar wird. So entsteht ein auf mathematischen Gegenständen beruhender sinnlich wahrnehmbarer Repräsentant, der (auch) unabhängig von den ursprünglichen Grundlagen betrachtet und evtl. nach ästhetischen Kriterien bewertet werden kann. Im Unterschied zu den oben beschriebenen „Mustern über Mathematik" besteht im Entstehungsprozess dieser Visualisierungen nicht die künstlerische Freiheit, von den durch die dargestellten Strukturen vorgegebenen

[13] Brynes Vorgehen ist dabei explizit didaktisch motiviert. Dennoch behauptet Werner Oechslin, dass Bryne damit obgleich „wider Willen" auch ein Werk der bildenden Kunst geschaffen hat (vgl. Oechslin, 2010, S. 11), so dass in diesem Sinne hier auch ein Beispiel für die „Muster durch Mathematik" vorliegt.

Regelmäßigkeiten abzuweichen. Dennoch sind die Grenzen zu den unter 1.1.1 beschriebenen Gegenständen fließend. Man denke etwa an die farbige Gestaltung von computergenerierten Graphiken ohne zwingenden mathematischen Grund.[14]

Häufig wird den „Mustern aus der Mathematik“ auch eine über die reine visuelle Erbauung hinausgehende Rolle zugeschrieben. So vermutet Keith Devlin z.B. eine Hilfestellung für den interessierten Laien und behauptet, dass „auf diese Weise [...] ein Nichtmathematiker vielleicht einen kurzen Blick auf Strukturen tun [kann], die sonst nur im Denken des Mathematikers leben.“(Devlin, 2002, S. 10). Johannes Lenhard geht einen Schritt weiter und behauptet zusätzlich eine erkenntnisführende Wirkung für den Mathematiker selbst, vor allem, wenn die den Simulationen zu Grunde liegenden theoretischen Modelle „komplex und undurchschaubar“ sind:

> „Das läuft darauf hinaus, dass die ästhetische Entfaltung der Modellresultate [durch Computersimulationen] die epistemische Opakheit der Modelle selbst aufhebt.“ (Lenhard, 2006, S. 18)

Auf diese Weise wird der Wert der sinnlichen Erkenntnis, also die *Aisthesis* im eigentlichen Wortsinn, für die Mathematik betont.[15] Einen ähnlichen Ansatz verfolgt Jonathan M. Borwein. Allerdings weist er auch darauf hin, dass Visualisierungen Zusammenhänge suggerieren können, die der theoretischen Überprüfung nicht standhalten (vgl. Borwein, 2006, S. 26f).

Muster der Mathematiker

Im Unterschied zu den bisher beschriebenen Arten von Mustern im Spannungsfeld von Mathematik und Ästhetik bzw. Kunst können die „Muster der Mathematiker“ nicht ohne Weiteres sinnlich erfasst werden, sondern müssen, wie es Devlin beschreibt, „denkend erlebt“ (Devlin, 2002, S. 6) werden.[16]
Dem folgend handelt es sich bei den „Mustern der Mathematiker“ um abstrakte Strukturen und Muster aus dem Arbeitsfeld von Mathematikern. Hardy meint damit zunächst alle Möglichkeiten solcher Strukturen, spricht dann aber nur den „schönen“ unter ihnen einen dauerhaften Platz zu. Im Zentrum des Interesse stehen hier also abstrakte mathematische Gegenstände, die als Träger ästhetischer Wertzuschreibungen fungieren.

So betrachtet etwa Hardy als Beispiele besonders schöner und damit einen dauerhaften Platz in der Welt erhaltender Muster zwei bereits zu Zeiten Euklids bekannte Beweise: Zum einen eine (der heutigen Strenge angepasste) Version des

[14] U.a. in solchen Beispielen berühren sich die Bereiche von künstlerischem und mathematischem „Kitsch“.

[15] Vgl. dazu auch die Diskussion im Rahmen der Zusammenschau von Teil I unter 5.3.

[16] Devlin spricht in diesem Zusammenhang von „Mustern der Mathematik“. Dem soll hier nicht gefolgt werden, da er wie oben angedeutet auch visuell Zugängliches unter diesen Begriff fasst und damit mehr beschreibt, als Mathematiker wie Hardy z.B. unter „the mathematician's patterns“ verstehen (vgl. Zitat S. 1).

Euklidischen Beweises zur Unendlichkeit der Primzahlmenge und außerdem einen Widerspruchsbeweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (vgl. Hardy, 1940, S.92ff). Erweitert durch mathematische Gegenstände wie die Eulersche Formel ($e^{i\pi} + 1 = 0$) kommen diese beiden Hardyschen Favoriten auch in anderen Beispielsammlungen vor, veröffentlicht unter Titeln wie *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze* (Basieux, 2003).

Offenbar sind in der mathematischen Praxis sowohl Beweise als auch mathematische Sätze bzw. Theoreme Träger ästhetischer Attribute und damit zentrale Vertreter der „Muster der Mathematiker". Die Leser des *Mathematical Intellingencer* wurden von Wells (1988) vor die Frage gestellt, welches das schönste aus einer Auswahl von 24 Theoremen sei. Freitextkommentare zu dieser Umfrage weisen darauf hin, dass die Umfrageteilnehmer in ihre Beurteilung der Theoreme auch bekannte zugehörige Beweise oder den Kontext der Sätze einbezogen (vgl. Wells, 1990, S. 38). Werden also Theoreme als Träger ästhetischer Attribute gehandelt, ist wenigstens potentiell immer auch deren Einbettung mitzudenken.[17]
Die Ergebnisse einer empirischen Umfragestudie zum Begriff „Schönheit" in der mathematischen Praxis weisen außerdem darauf hin, dass Ähnliches auch für Beweise gilt. Ästhetisch bewertet wird demnach nicht nur das, was formal zu einem Beweis dazu gehört – also alles, was in einem Lehrbuch zwischen den Worten „Beweis" und „*q.e.d.* " steht, sondern auch (und vor allem) die dahinter liegende Beweisidee sowie das einbettende „setting" des Beweises (vgl. Müller-Hill und Spies, 2011, S. 276).
Im Folgenden sollen deshalb die Begriffe Beweis und Theorem zunächst im beschriebenen Sinn liberal verstanden werden und sowohl die Beweisideen als auch der Kontext und Querverbindungen zwischen Theorem und zugehörigem Beweis jeweils mitgedacht werden.[18] Demnach können auch Bildbeweise[19], zeichnerisch dargestellte Aussagen über Zusammenhänge oder präformale Beweise zu den „Mustern der Mathematiker" gezählt werden, wenn es etwa die abstrakte Beweisidee dahinter ist, die ästhetisch bewertet wird. Zu unterscheiden ist dies aber von einer lediglich unterstützend wirkenden Visualisierung, die als solche kunstähnlich rezipiert wird.

1.1.3 Die Träger mathematischer Schönheit

Da diese Arbeit nicht primär von einem kunsttheoretischen Interesse geleitet wird, können die unter 1.1.1 vorgestellten möglichen Mustergattungen hier nicht der

[17] Hardy schließt sogar selbstverständlich die Beweise ein, wenn er von der Schönheit eines Theorems spricht (vgl. Hardy, 1940, S. 113).
[18] An Stellen, an denen eine Beschränkung auf den engeren Wortsinn nötig ist, wird dies explizit markiert.
[19] Als besonders „schönes" Beispiel führt Doris Schattschneider z.B. den Beweis zur Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel nach Polya an (vgl. Schattschneider, 2006, S. 46).

zentrale Gegenstand sein. Jedoch ist die oben vorgeschlagene Klassifizierung der Muster zwischen Mathematik und Kunst bzw. Ästhetik, wie bereits angemerkt, nicht trennscharf. So kommt es zuweilen durch die Anwendung bestimmter Techniken in der Kunst zu neuen mathematischen Erkenntnissen. Die Visualisierung mathematischer Inhalte inspiriert einerseits die künstlerische Darstellung und Umdeutung dieser Mathematik. Andererseits bietet sie in Einzelfällen aber auch eine nicht sprachliche Darstellung der „Muster der Mathematiker" oder wird gar im Sinne von „visuell zugänglichen Mustern der Mathematiker" als die „abstrakten Muster der Mathematiker" ablösender Träger mathematischer Schönheit eingestuft. Desweiteren gibt es Beispiele aus der Konkreten Kunst, in denen die künstlerische Darstellung (implizit) mathematische Gesetzmäßigkeiten erkennen lässt.[20] Obgleich Wechselwirkungen und Vergleiche wie diese interessante Perspektiven auch aus Sicht der Mathematikphilosophie eröffnen können, sollen sowohl „Muster über Mathematik" als auch „Muster durch Mathematik" hier allenfalls am Rande thematisiert werden. Dies ist insbesondere dadurch begründet, dass in diesen Fällen eben Kunstwerke (mit Mathematikbezug) und nicht Stücke der Mathematik selbst die Träger ästhetischer Eigenschaften sind.

Zu klären ist also noch, welcher der beiden mathematikphilosophisch relevanten Möglichkeiten den Gegenstand dieser Arbeit bilden soll. Dabei besteht eine Schwierigkeit darin, dass in der Literatur auch solche Einschätzungen zu finden sind, die eine Unterscheidung von „Mustern aus der Mathematik" und „Mustern der Mathematiker" als nicht möglich bzw. nicht mehr zeitgemäß erachten.[21] Werden die „Muster aus der Mathematik" nämlich als reine Darstellungsform der hinterliegenden abstrakten Ideen verstanden, so können sie auch als „*nicht sprachliche* Muster der Mathematiker" verstanden werden. Dies gilt jedoch m.E. nicht für den oben vorgestellten Fall der durch Computersimulation erzeugten Bilder einer sonst auch für Mathematiker „undurchsichtigen" Theorie. Hier ist die abgrenzende Bezeichnung „Muster aus der Mathematik" weiter angebracht, da es sich nicht um von Mathematikern erzeugte, sondern nur durch diese *interpretierte* Muster handelt.

Wie bereits dargestellt, umfasst der klassische Gegenstandsbereich ästhetischer Wertzuschreibungen in der Mathematik die „Muster der Mathematiker". So fallen in der mathematischen Wissenschaftspraxis unter die Träger mathematischer Schönheit traditionell Beweise und Theoreme im oben beschriebenen liberalen Sinn. Sie müssen somit zunächst den Kern jeder mathematikästhetischen Untersuchung bilden. Da bereits bezogen auf diesen Kern übergreifende Antworten auf die eingangs als grundlegend identifizierten Fragen nach Schönheitsbegriff und Kunstcharakter fehlen und mit der Frage nach der Sinnlichkeit und dem interpretativen Charakter der „Muster aus der Mathematik" ein weiterer Komplex grundsätzlicher Fragen eröffnet würde, soll auch aus pragmatischen Gründen hier der Gegen-

[20] Ein Beispiel für eine solche „versteckte" Aussage in einem Kunstwerk ist das Werk „Evolution" von Rune Mields, dargestellt von Grundhöfer und Rosehr (2007), in dem ein Satz über die Fibonacci-Zahl 144 enthalten ist.

[21] Vgl. etwa (Lenhard, 2006, S. 181) oder (Borwein, 2006, S. 25).

standsbereich nicht auf diese erweitert werden. Gleichzeitig werden so die zentralen Gegenstände der Mathematikphilosophie betrachtet, so dass die vorgeschlagenen mathematikästhetischen Untersuchungen einen Beitrag zu allgemeinen mathematikphilosophischen Fragen aus einer speziellen Perspektive leisten können. Im Zentrum der vorliegenden Arbeit soll somit die ästhetische Erfahrung mit den oben explizierten „Mustern der Mathematiker" stehen.

1.2 Zeugen der Mathematikästhetik

Es gibt eine Vielzahl von Mathematikern, Mathematikphilosophen und -historikern sowie Ästhetikern, die sich dem Thema Ästhetik der Mathematik bzw. dem Kunststatus der Mathematik *bezogen auf die „Muster der Mathematiker"* widmen. Eine erste Unterscheidung und Einordnung kann sich dabei zunächst an der Profession der Autoren einerseits und dem Begründungskontext mathematikästhetischer Urteile andererseits orientieren. So kann in der Terminologie Holger Willes innerhalb der wissenschaftlichen Literatur grob und keinesfalls immer trennscharf unterschieden werden in

- mathematikästhetisches Verhalten,
- mathematikästhetische Reflexion,
- Arbeiten zur allgemeinen Ästhetik mit Bezügen zur Mathematik sowie
- Arbeiten zur allgemeinen Wissenschaftsästhetik.

Im Folgenden soll durch das exemplarische Vorstellen von Vertretern jeder Gruppe[22] diese jeweils genauer charakterisiert werden, um im Anschluss auf die Funktion für den Fortgang der vorliegenden Arbeit einzugehen.

Mathematikästhetisches Verhalten

Holger Wille unterscheidet in *Was heißt Wissenschaftsästhetik* zwischen „wissenschaftsästhetischem Verhalten" und einer Wissenschaftsästhetik als Disziplin (vgl. Wille, 2004, S. 39). In diesem Sinne sind hier mit „mathematikästhetischem Verhalten" Arbeiten aus der mathematischen Praxis im Allgemeinen gemeint, in denen meist in einem Unterabschnitt auf den ästhetischen Wert der Mathematik hingewiesen wird. Es handelt sich bei den Autoren somit häufig um (ehemals) praktizierende Mathematiker, die explizit für die „interessierte Öffentlichkeit" über das Wesen ihrer Wissenschaft schreiben. Die Begründung der gefällten ästhetischen Urteile fällt dabei entsprechend knapp aus und beruht im Allgemeinen auf den eigenen subjektiven Erfahrungen der Autoren im Umgang mit den „Mustern der

[22] Die vorgestellten Arbeiten wurden in erster Linie ausgewählt, um die jeweilige Gruppe zu charakterisieren. Die Auswahl sagt somit zunächst, wenn nicht anders vermerkt, nichts über die Relevanz für die hier folgenden Untersuchungen aus und bietet auch keine vollständige Auflistung der in dieser Arbeit verwendeten Literatur.

Mathematiker". Somit entbehren solche Einschätzungen in der Regel eine theoretische Fundierung, und es kommt häufig nicht einmal zu Querverweisen auf andere Aussagen dieser Art. Jedoch werden die Ausführungen häufig an Beispielen belegt.
Zu den Arbeiten, die solches mathematikästhetisches Verhalten dokumentieren, zählen beispielsweise *Mathematik: Kunst und Wissenschaft* von Armand Borel (1981), *The mathematician* von John von Neumann (1976), die unter *Conversation with a Mathematician. Math, Art, Science and the Limits of Reason* veröffentlichten Interviews mit Gregory Chaitin (2002) oder als berühmtestes Beispiel die eingangs bereits zitierte *A mathematician's Apology* G.H. Hardys (1940). An dieser kleine Auswahl lässt sich bereits zeigen, dass der Raum, welcher den ästhetischen Betrachtungen der „Muster der Mathematiker" und vor allem der Reflexion solcher Urteile gegeben wird, stark variiert. So begnügt sich von Neumann mit kurzen Hinweisen auf die Schönheit des Zusammenspiels von Einfachem und Komplexem als Basis für die Beschreibung seines subjektiven Eindrucks von der Mathematik als Kunstform. Armand Borel dagegen widmet der Frage, inwiefern die Mathematik eine Kunst ist, große Teile seiner Ausführungen (vgl. Borel, 1981). Allerdings begründet er dies lediglich durch Beispiele, sowie subjektive Eindrücke und Erfahrungen, was auch für die aufgeführten Charakteristika schöner Mathematik gilt. Ähnliches gilt auch für Hardy (1940), der zusätzlich zu einer subjektiven Charakterisierung mathematischer Schönheit auf die Rolle solcher ästhetischer Wertzuschreibungen insbesondere als Gegenpart zur Anwendbarkeit eingeht und dies mit seinen eigenen Einstellungen zur Mathematik in Verbindung bringt. Einen wiederum anderen Charakter haben die Ausführungen Chaitins, die in Form von Gesprächsbeiträgen in Interviews vorliegen, so dass die Subjektivität und die persönliche Note auch in der Form zum Ausdruck kommt.

Wie die Bandbreite von Umfang und Charakter dieser Beispiele bereits zeigt, bilden die Mathematiker, die (schriftlich niedergelegtes) mathematikästhetisches Verhalten dokumentieren, bereits eine inhomogene Gruppe. Dies führt dazu, dass eine genaue Grenzziehung zu anderen vorgeschlagenen Gruppen nicht immer möglich ist. Auf der Grenze zu Arbeiten zur mathematikästhetischen Reflexion stehen beispielsweise die Ausführungen Henri Poincarés. Dieser gründet seine Theorie zur Psychologie des mathematischen Schaffens zwar auf eigene Erfahrungen als erfolgreicher Mathematiker, kann sie aber an ein durchaus umfängliches mathematikphilosophisches Theoriegebäude anbinden.
Die zu dieser Gruppe zu zählenden Mathematiker, die (ausnahmsweise) nicht innerhalb der Mathematik, sondern über diese schreiben, liefern eine interessante, mehr oder minder reflektierte Innenansicht der mathematischen Praxis. Damit bilden sie nicht nur die ursprüngliche Motivation, sich mit ästhetischen Wertungen in Bezug auf die Gegenstände der Mathematik zu beschäftigen, sondern bieten sich auch als erste Zeugen in dem Bestreben an, die in der Praxis verwendeten Begriffe und Kriterien näher zu charakterisieren. Besonders umfänglich und pointiert dokumentiertes mathematikästhetisches Verhalten findet sich in dem bereits

erwähnten berühmten Essay *A mathematician's Apology*, so dass G.H. Hardy zum „Kronzeugen“ dieser Arbeit zur Mathematikästhetik werden kann.

Mathematikästhetische Reflexion

Von den, dem mathematikästhetischen Verhalten zugeordneten Autoren sollen hier solche abgegrenzt werden, die vor einem mathematikphilosophischen und/oder einem der allgemeinen philosophischen Ästhetik zuzuordnenden Hintergrund das Phänomen der Ästhetik in Bezug auf die „Muster der Mathematiker“ betrachten. In diesem Sinne kann hier also von mathematikästhetischer Reflexion oder Wille folgend von *Mathematikästhetik als Theorie* (vgl. Wille, 2004, S. 39) gesprochen werden. Arbeiten dieser Art widmen sich häufig isoliert und vor je unterschiedlichem theoretischem Kontext einzelnen der eingangs aufgeworfenen Fragen, und werden so in den die jeweilige Problemstellung thematisierenden Kapiteln dieser Arbeit herangezogen:
Versuche, die Frage nach dem in der Mathematik verwendeten *Schönheitsbegriff* differenzierter und reflektierter zu beantworten, als dies durch mathematikästhetisches Verhalten geschehen kann, stellen beispielsweise die Arbeiten *Die Schönheit in der Mathematik* von Thomas Weth (2007) oder *Mathematical Beauty and the Evolution of Standards of Mathematical Proof* von James McAllister (2005) dar, wobei auch hier jeweils sehr unterschiedliche Wege der Beschreibung und Systematisierung gewählt werden. Während Weth insbesondere die emotionale Komponente mathematischer Schönheit heranzieht und ausdifferenziert, betrachtet McAllister eher global Facetten der mathematikästhetischen Beurteilung unterschiedlicher Beweistypen mit einem dezidierten Blick auf die Entwicklung der Wissenschaft.
Die theoretischen Arbeiten zum Schönheitsbegriff werden ergänzt durch solche, die sich durch empirische Untersuchungen als Reflexionsgrundlage auszeichnen, wobei auch hier Design und Ausführlichkeit der Auswertung stark differieren. So präsentiert etwa David Wells (1990) unter dem Titel *Are These the Most Beautiful?* ein Ranking schöner Stücke und einzelne Aussagen dazu als Ergebnisse einer Umfrage unter Lesern des Mathematical Intelligencer. Leone Burton (2004) dagegen geht in einer umfassenden Interviewstudie mit Hochschulmathematikern unter anderem auf die Frage nach persönlichen Erfahrungen mit der Schönheit der bearbeiteten Gegenstände ein.[23]
Der Frage nach dem *Kunstcharakter* der Mathematik gehen z.B. Thomas Tymoczko (1993) oder Caroline Jullien (2008) mit jeweils sehr unterschiedlicher Herangehensweise nach. So schließt der eine von einem Blick auf die in der mathematischen Praxis vorgenommenen Wertzuschreibungen und der Rolle der dort agierenden Personen auf Unterschiede und Parallelen von Mathematik und Kunst, während die andere die Kunsttheorie Nelson Goodmans auf die Mathematik bzw. ausgewählte Beispiele anwendet. Ergänzt werden auf einen möglichen Kunststatus

[23] Ein weiteres Beispiel stellt auch die in Müller-Hill und Spies (2011) veröffentlichte Auswertung einer Umfragestudie zum Thema dar.

fokussierte Arbeiten wie diese durch solche, die die Arbeitsweisen von Mathematikern und Künstlern in Beziehung setzen. Hier sind insbesondere *The Meaning of Pattern* von Martin Schiralli (2006) sowie die Ausführungen Henri Poincarés zur mathematischen Erfindung in *Wissenschaft und Methode* (Poincaré, 1914) zu nennen.
Das Spektrum zum Kunststatus wird abgerundet durch Arbeiten, die im Rahmen allgemeinerer mathematikphilosophischer oder -historischer Überlegungen die Mathematik einer Kunstform ähnlich behandeln. Hier sind etwa das stilgeschichtliche Vorgehen Max Benses im Rahmen seiner *Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik* zu nennen oder auch die Analyse mathematischer Texte des Mathematikhistorikers Reviel Netz (2005). Neben solchen Arbeiten, die angeschlossen an die unterschiedlichsten theoretischen Konzepte auf die grundlegenden Fragen der Mathematikästhetik zielen, beschäftigen sich einige Autoren auch mit den eingangs genannten weitergehenden Problemstellungen. Eine wichtige Referenz für solche Fragen mit verschiedenen Zielrichtungen ist Nathalie Sinclair. Sie charakterisiert beispielsweise unter dem Titel *The Aesthetic Sensibilities of Mathematicians* (Sinclair, 2006b) die *Funktionen* ästhetischer Wertzuschreibungen für die mathematische Arbeit allgemein, um daraus in einem zweiten Schritt Schlüsse für das *Lehren und Lernen* von Mathematik zu ziehen (vgl. etwa Sinclair, 2006b, 2009).
Wie diese Beispiele bereits zeigen, unterscheiden sich die hier der mathematikästhetischen Reflexion zugeordneten Autoren und Arbeiten nicht nur stark bezüglich ihrer Fragestellung und des theoretischen Kontextes, vor dem diese bearbeitet werden, sondern auch in Ausführlichkeit und Herangehensweise. So muss es naturgemäß auch zu einem breiten Spektrum der Ergebnisse kommen. Gemeinsam aber haben sie, dass nahezu immer von Beispielen als Motivation ausgegangen wird, wozu einzelne Ausschnitte des oben beschriebenen mathematikästhetischen Verhaltens sowie Hinweise auf historische Aussagen zu Schönheit und Kunststatus des Mathematischen anekdotisch ins Feld geführt werden. Insofern unterscheiden sich die hier zuzuordnenden Autoren nicht nur im Reflexionsgrad von der ersten Gruppe, sondern auch und insbesondere in ihren Untersuchungsgegenständen: Sie nehmen nicht nur eine Metaperspektive auf die „Muster der Mathematiker“ ein, sondern beziehen auch den Umgang mit diesen, also die mathematische Praxis, in ihre Überlegungen ein.
Querverbindungen untereinander sind jedoch trotz des gemeinsamen Gegenstandsbereichs und ähnlicher Problemstellungen bei Vertretern dieser Gruppe eher selten zu finden, was u.a. der Tatsache geschuldet ist, dass die mathematikästhetischen Fragestellungen zwar in den unterschiedlichsten Kontexten aufkommen und Relevanz besitzen, die Mathematikästhetik selbst jedoch keine etablierte Disziplin ist.

Bezüge zwischen allgemeiner Ästhetik und Mathematik

Von den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Arbeiten, denen es explizit um eine Metaperspektive auf die Mathematik bzw. die Wissenschaftspraxis

geht, sind Arbeiten zur philosophischen Ästhetik zu unterscheiden, in denen die Mathematik als begründetes Beispiel bzw. Gegenbeispiel in der allgemeinen Theoriebildung angeführt wird. Solche Ansätze sind deshalb besonders interessant, weil sie bereits eine Verbindung von allgemeiner philosophischer Ästhetik und Mathematik liefern und in Kombination mit oder Kontrast zu den oben beschriebenen Arbeiten diese auf eine allgemeinere Basis stellen können.
Eine solche Verbindung wird in naheliegender Weise in Ästhetiktheorien realisiert, die in pythagoreischer Tradition von einem mathematisierbaren Schönheitsbegriff ausgehen und daraus wiederum auf den ästhetischen Wert des Mathematischen selbst schließen. Diese Argumentationsrichtung kann in eine Arbeit, der es um Fragen zur Ästhetik zeitgenössischer Mathematik geht, nur am Rande einfließen, da der zugrundeliegende Schönheitsbegriff spätestens mit der Aufklärung durch subjektorientierte Ansätze abgelöst wurde. In einem historischen Exkurs zur Geschichte der Mathematikästhetik aber sind diese antiken und mittelalterlichen Positionen unumgänglich und dienen nicht zuletzt als Kontrast zu aktuellen Charakteristika mathematischer Schönheit.
Zusätzlich zur Abgrenzung gegenüber historischer Positionen besteht die Hoffnung, durch den Abgleich mit Ansätzen zur allgemeinen Ästhetik den Schönheitsbegriff der Mathematiker schärfer zu fassen. Dabei sind gerade jene Vertreter der allgemeinen Ästhetik von besonderem Interesse, die der Mathematik explizit einen genuin ästhetischen Charakter absprechen. In diesem Zusammenhang wird die Theorie des Schönen und der Kunst, wie sie Immanuel Kant in seinem Hauptwerk zur Ästhetik, der *Kritik der Urteilskraft* darlegt, eine prominente Stellung einnehmen. Kant nutzt die Mathematik bzw. den Mathematiker als Kontrast, um seine Konzeption einer im Geschmacksurteil erkannten Schönheit einerseits und des künstlerischen Genies andererseits herauszustellen. Da er sich dabei auch mit noch heute unter Mathematikern populären Begründungsmustern für die (vorgebliche) Schönheit und den Kunststatus der Mathematik auseinandersetzt, treten eine Reihe „kritischer Eigenschaften“ hervor, die gegen einen genuin ästhetischen Charakter der Mathematik angeführt werden können. So tritt die Frage in den Vordergrund, inwieweit der Schönheitsbegriff der Mathematiker einem in der allgemeinen Ästhetik verwendeten entspricht und es eröffnet sich eine interessante Perspektive auf den Mathematiker als Produzenten, den Entstehungsprozess der Mathematik und die mathematische Praxis unter dem Blickwinkel der Kreativität.

Allgemeine Wissenschaftsästhetik

Mindestens als Beispiel am Rande kommt die Mathematik in der Regel auch in Arbeiten zur allgemeinen Wissenschaftsästhetik vor. Allerdings werden dabei häufig Mathematik und Physik gleichgesetzt und gemeinsam im Kontrast zu Beispielen aus den Geisteswissenschaften vorgestellt.[24] Die Beispiele sind dabei häufig anek-

[24] Obgleich der Schönheitsbegriff der Physik Ähnlichkeiten zu dem in der Mathematik verwendeten aufweist bzw. häufig auf das Mathematische zurückgeführt wird, sind doch in beiden

dotisch vorgebrachtes mathematikästhetisches Verhalten. Neben ihrer Rolle als „Steinbruch“ möglicher Beispiele, können Arbeiten wie *Beauty and Revolution in Science* von James McAllister (1996) oder Holger Willes (2004) *Was heißt Wissenschaftsästhetik? Zur Systematik einer imaginären Disziplin des Imaginären* die grundlegenden methodischen Überlegungen leiten. So lassen sich aus den Ergebnissen bezüglich der Wissenschaftsästhetik im Allgemeinen Hinweise für den Umgang mit diesen Phänomenen bezüglich der Mathematik im Speziellen ableiten. Diese Rolle nehmen in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich die Überlegungen Willes ein, da er durch seine sehr grundlegenden Überlegungen wenig Ergebnisse inhaltlicher Art einer disziplinären Wissenschaftsästhetik vorweg nimmt. Andererseits steht er der Möglichkeit einer Mathematikästhetik explizit positiv gegenüber, so dass auch die zugrunde liegenden Konzepte von Wissenschaft und Ästhetik einen Übertrag grundsätzlich zulassen.

Die Arbeiten innerhalb jeder der vorgestellten Gruppen unterscheiden sich sowohl in der Ausführlichkeit, in der sie das Thema behandeln, als auch in ihrem Vorgehen und den daraus resultierenden Ergebnissen stark. Dies ist nicht nur den Unterschieden in der Herangehensweise, sondern insbesondere dem Facettenreichtum der Thematik geschuldet. Um das Phänomen der Verwendung ästhetischer Wertzuschreibungen für die „Muster der Mathematiker“ in seiner Breite beleuchten zu können, ist es also nötig, die verschiedenen Perspektiven möglichst umfassend einzubeziehen und in Beziehung zu setzen.
Die skizzierten Autorengruppen werden dazu außerdem jeweils durch Literatur zu den spezifischen Fragestellungen der unterschiedlichen Kapitel ergänzt. Die verwendeten Arbeiten etwa zur Kantforschung, zur historischen Dimension oder zur Mathematikdidaktik werden jeweils in den entsprechenden Kapiteln vorgestellt und eingeordnet.

Obgleich die vorgeschlagene Unterteilung, wie bereits angedeutet, grob und nicht immer eindeutig ist, kann die Zuordnung Aufschluss über die Rolle geben, die den verschiedenen Arbeiten im Rahmen der folgenden Untersuchungen zur Mathematikästhetik zukommt: Insbesondere bezogen auf die Frage nach dem verwendeten Schönheitsbegriff liefert das dokumentierte mathematikästhetische Verhalten eine wertvolle Innenansicht. So zeigen sich einerseits die Bandbreite verwendeter Charakteristika, aber auch immer wieder Gemeinsamkeiten in den Beschreibungen aus (professionell informierter) Rezipientensicht, die eine Systematisierung der angeführten Schönheitskriterien erlauben. Die vorhandenen theoriegeleiteten Positionen, also die mathematikästhetische Reflexion zur mathematischen Schönheit, können durch die verschiedenen Perspektiven zu einer Ausschärfung und facettenreichen Beschreibung dieser Systematik beitragen. Die Darstellung der dem Kunstcharakter der Mathematik grundsätzlich positiv gegenüberstehenden Arbeiten aus dem Bereich der mathematikästhetischen Reflexion ergibt zunächst einen

Disziplinen Rahmenbedingungen und Anspruch ästhetischer Wertzuschreibung deutlich zu unterscheiden. Daher sollen im Folgenden Beispiele mit Bezug zur Physik nicht berücksichtigt werden.

Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten, die Mathematik einer Kunstform ähnlich zu behandeln. So entsteht nicht nur eine Sammlung je theoretisch fundierter Indizien für den Kunststatus der Mathematik, vielmehr kommt es auch zu einer Zusammenschau von Facetten der Mathematik bzw. der mathematischen Praxis, die spezifisch unter mathematikästhetischer Perspektive zutage treten. Dies wird ergänzt durch den Blick der Produzenten schöner Mathematik, wie er in verschiedenen Arbeiten zum mathematikästhetischen Verhalten dokumentiert ist. Als Prüfstein können sowohl zum Schönheitsbegriff als auch zum Kunststatus Arbeiten aus der allgemeinen Ästhetik herangezogen werden, und schließlich werden wie beschrieben der allgemeinen Wissenschaftsästhetik Hinweise methodischer Art entnommen.

1.3 Offene Problembereiche der Mathematikästhetik

Bereits die zur Charakterisierung der Materiallage hinzugezogene Auswahl zeigt, dass es sich bei der ästhetischen Beurteilung von „Mustern der Mathematiker" um ein häufig *genanntes* Phänomen handelt. So kommt es auch in theoretischen Arbeiten mit Fokus auf der mathematischen Praxis immer wieder zur Sprache, und einzelne Aspekte werden aufgegriffen und im jeweiligen Reflexionskontext untersucht. Dennoch können die eingangs aufgeworfenen grundständigen Fragestellungen der Mathematikästhetik keineswegs als umfassend beantwortet gelten. Es lassen sich Forschungslücken benennen, die sowohl die inhaltliche wie auch die methodische Ebene berühren.

Wie beschrieben kommt es auch im Bereich mathematikästhetischer Reflexion nur selten zu Referenzen der Arbeiten untereinander. Die Autoren greifen allenfalls auf einzelne Stellen mathematikästhetischen Verhaltens zurück. Die Ergebnisse bleiben sonst aber weitgehend isoliert von den etwa aus anderen Perspektiven heraus gewonnenen Resultaten, obgleich Gemeinsamkeiten oder aufschlussreiche Kontraste durchaus Anschlussmöglichkeiten bieten würden. In der Forschung zur Ästhetik der Mathematik fehlt bislang eine systematische Zusammenschau solcher Ergebnisse, aber auch ein Überblick über die vorhandene relativ breite Basis mathematikästhetischen Verhaltens. Dieser Befund gilt sowohl bezogen auf Charakterisierungen und Einschätzungen des mathematischen Schönheitsbegriffs als auch und insbesondere mit Blick auf die Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik.

Ähnlich unbefriedigend ist die Situation bezüglich der historischen Dimension des Themenkreises. Arbeiten, die sich explizit der Geschichte der Mathematikästhetik widmen, gibt es nicht. Abgesehen von einigen wenigen Zusammenstellungen von

Beispielen mit der expliziten Zielsetzung einleitend geschichtliche Bezüge herzustellen, werden Zitate etwa antiker Autoren häufig mit Dokumenten der oben genannten Vertreter mathematikästhetischen Verhaltens unkommentiert und ungeachtet der gänzlich unterschiedlichen Voraussetzungen gemeinsam zur Motivation und Rechtfertigung der Themenstellung herangezogen. Mathematik- oder kunsthistorische Ansätze dagegen stellen zwar die jeweiligen Beispiele in ihrer Geschichtlichkeit dar, heben aber einschlägige mathematikästhetische Stellen nicht hervor oder nehmen sie gar nicht erst als solche wahr. Ein Rückbezug auf die Fragestellungen und Ergebnisse zeitgenössischer Mathematikästhetik fehlt dort naturgemäß vollständig.

Abgesehen von den oben beschriebenen Beispielen in antiker Tradition sind Arbeiten zur allgemeinen Ästhetik, in denen explizit die Mathematik als (möglicher) Gegenstand Beachtung findet, rar, und umso seltener werden solche Positionen in die mathematikästhetische Reflexion einbezogen. Dabei sind gerade jene Vertreter der allgemeinen Ästhetik besonders interessant, die der Mathematik explizit einen genuin ästhetischen Charakter absprechen, da dort potentiell kritische Punkte im mathematikästhetischen Verhalten markiert werden. In diesem Zusammenhang sollte insbesondere die Theorie des Schönen und der Kunst, wie Immanuel Kant sie in der *Kritik der Urteilskraft* darlegt und in der das Mathematische als Kontrast eine prominente Stellung einnimmt, herangezogen werden. Dieser Aspekt findet jedoch sowohl in Arbeiten unter mathematikästhetischer Perspektive als auch in der Literatur zum Kantischen Mathematikbild oder in Arbeiten zu Kants Ästhetik nur selten Beachtung, so dass hier nicht nur eine offene Frage der Mathematikästhetik, sondern auch eine Lücke der Kantforschung vorliegt.

Die Vereinzelung der Ergebnisse zu den in der mathematischen Praxis durchaus relevanten mathematikästhetischen Themen und das fehlende Bewusstsein für die historische Dimension macht sich auch in Anwendungskontexten bemerkbar. Am Beispiel der Mathematikdidaktik wird dies besonders deutlich: Die Relevanz der Ästhetik wird erkannt und führt etwa dazu, die ästhetische Erfahrungen mit der Mathematik im schulischen Mathematiklernen zu fordern und dies etwa auch in Lehrpläne aufzunehmen. Hinweise zur Umsetzung und Anbindung an weitere didaktische Fragestellungen können sich dann aber wiederum höchstens auf isolierte mathematikphilosophische Grundlagen stützen und bleiben rudimentär. So werden die Chancen einer umfassenden mathematikästhetischen Perspektive auf das Lehren und Lernen von Mathematik nicht wahrgenommen und gehen nicht in die weitere Diskussion.

1.4 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

> „Wissenschaftsästhetik hat sich als ein Versuch zu verstehen, der Wahrheit und Schönheit, Wissenschaft und Kunst, in ihren Zusammenhängen *und* Unterschieden begreifen will.“ (Wille, 2004, S. 307)

Mit dieser Forderung für eine allgemeine Wissenschaftsästhetik markiert Wille zunächst den Zielhorizont auch für eine Ästhetik der Mathematik: Es geht zum einen um die Voraussetzungen und Eigenschaften der bezüglich der „Muster der Mathematiker“ angeführten Schönheit und die Möglichkeit, überhaupt von einer solchen zu sprechen. Zum anderen aber muss das Verhältnis von Mathematik und Kunst betrachtet werden. Damit wird die grundsätzliche Relevanz der bereits eingangs als grundlegend identifzierten Fragestellungen der Mathematikästhetik in ihrer Breite bestätigt. So lange kein Konsens über mögliche Antworten besteht, muss sich eine Arbeit zur disziplinären Wissenschaftsästhetik diesen Fragekomplexen stellen. Gleichzeitig entlastet dieses Zitat Willes aber auch, indem er jedem wissenschaftsästhetischem Ansatz den Charakter eines „Versuches“ zubilligt.

In diesem Sinne versteht sich auch die vorliegende Arbeit als ein „Versuch“ zu den Grundlagen der Mathematikästhetik. Ziel ist es jedoch nicht, ein weiteres isoliertes Einzelergebnis zu einer der markierten Problemstellungen zu erarbeiten. Vielmehr wird im Folgenden der Versuch unternommen, sich dem mathematischen Schönheitsbegriff einerseits und dem Mathematik-Kunst-Vergleich andererseits auf einer breiten Grundlage bereits existierender Einzelpositionen zu nähern und dabei gleichzeitig einen Beitrag dazu zu leisten, die oben dargestellten Forschungslücken zu schließen. Im Einzelnen bedeutet diese übergreifende Zielsetzung, dass Schönheitsbegriff und Kunstvergleich zunächst getrennt durch ein systematisches Darstellen und in Beziehung Setzen der existierenden Positionen bearbeitet werden. Neben einem systematischen Überblick über die vorhandene Literatur wird dabei auch angestrebt, mit Hilfe der zu Tage tretenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede jeweils die zentralen Facetten zu benennen.
Weiterhin soll die Kantische Argumentation gegen Geschmacksurteile über Mathematisches und gegen den Geniestatus der Mathematiker ausführlich untersucht werden, um schließlich einzelne kritische Punkte der Mathematikästhetik herauszuarbeiten und im Kontrast zu diskutieren. Gemäß der beschriebenen Forschungslücken werden dabei zweierlei Ziele verfolgt. Einerseits soll durch eine ausführliche Darstellung und Diskussion ein Beitrag zur Kantforschung geleistet werden, und andererseits sollen über die Kontrastierung die Ergebnisse des vorangegangenen Literaturüberblicks ausgeschärft werden.
Ein Streifzug durch die Geschichte der Mathematikästhetik zielt weiterhin darauf ab, insbesondere das Phänomen ästhetischer Wertzuschreibungen über die Mathematik- und Ästhetikgeschichte hinweg darzustellen und einzuordnen. Dabei sind mit einem sich wandelnden Verständnis von Schönheit sehr unterschiedliche

Begründungs- und Bewertungsmuster zu identifizieren. Ziel des historischen Exkurses ist es außerdem, diese im Kontrast zu den dargestellten aktuellen Positionen an einzelnen Beispielen zu konkretisieren und damit über die häufig in der Literatur übliche Zitatesammlung zur Motivation der historischen Relevanz des Themas hinauszugehen.

Es wird somit angestrebt, mit Hilfe von vergleichenden Zusammenstellungen und Kontrastierungen die mathematikästhetische Perspektive auf eine breite Basis zu stellen und gleichzeitig weiter auszuschärfen. Dies zielt außerdem auf die exemplarische Anwendung der Ergebnisse auf ausgewählte Klassiker einerseits und die Mathematikdidaktik als verwandte Disziplin andererseits.

Bereits die eingangs benannten zentralen Fragestellungen der Mathematikästhetik weisen darauf hin, dass sich mindestens vor dem Hintergrund eines zeitgenössischen, nicht mathematisierbaren Schönheitsbegriffs die vorliegende Arbeit nicht in den „klassischen" Diskurs der Mathematikphilosophie einreihen kann. Ästhetische Werturteile über die „Muster der Mathematiker" sind vielmehr ein Phänomen, das an sich bereits außerhalb mathematikintern zu beantwortender Fragestellungen im engeren Sinne steht, dessen Relevanz für den *Umgang* mit der Mathematik aber immer wieder hervorgehoben wird. Eine Arbeit, die wie die vorliegende die grundlegenden Fragen der Mathematikästhetik zu beleuchten versucht, ist somit bereits bedingt durch die Themenstellung solchen Strömungen der Mathematikphilosophie zuzuordnen, die unter der Bezeichnung „Philosophie der mathematischen Praxis" zusammengefasst werden können.[25] Dies spiegelt sich auch in der beschriebenen Literatur, auf die sich diese Arbeit stützen will: Bei den sich mathematikästhetisch verhaltenden Autoren handelt es sich gerade um in der mathematischen Praxis agierenden Personen. Die herangezogene Literatur aus dem Bereich der mathematikästhetischen Reflexion macht sich darüber hinaus wie beschrieben häufig auch die mathematische Praxis selbst zum Gegenstand.

Das Ziel, die beiden grundlegenden Fragekomplexe der Mathematikästhetik zunächst getrennt zu betrachten, spiegelt sich im zweitgeteilten Aufbau des Hauptteils dieser Arbeit.
In Teil I – *Schönheit und Mathematik* – steht die Frage nach dem in der mathematischen Praxis verwendeten Schönheitsbegriff und damit die Sicht des Mathematikrezipienten im Vordergrund. Die mathematische Schönheit wird den beschriebenen Zielsetzungen entsprechend aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet: In einem ersten Schritt werden in Kapitel 2 vier Eigenschaftskomplexe expliziert, die aktuell als Kriterien für mathematische Schönheit gelten und in verschiedenen Kombinationen und Gewichtungen immer wieder genannt werden: Ökonomie,

[25] Hierzu zählen Arbeiten in der Tradition Imre Lakatos', wie sie etwa in Tymoczko (1998) zusammengestellt wurden, aber auch der sich von dieser Tradition explizit abgrenzende Ansatz von Mancosu u.a. (2008) oder die im Rahmen des Netzwerks PhiMSAMP diskutierten Ansätze (vgl. beispielsweise Löwe und Müller, 2010). Zu nennen ist hier auch das Vorgehen, welches David Corfield (2003) unter der Bezeichnung „Philosophy of Real Mathematics" anstrebt.

Tragweite, epistemische Transparenz sowie die emotionale Wirksamkeit. Dies geschieht auf der Grundlage umfassender Literaturanalysen, so dass dieses Kapitel gleichzeitig der Ort einer systematischen Zusammenschau von mathematikästhetischem Verhalten und den verschiedensten Arbeiten zur Reflexion des mathematischen Schönheitsbegriffs ist. Aus der Perspektive des so im ersten Hauptkapitel entstandenen Panoramas von Eigenschaftskomplexen, die den zeitgenössischen Begriff mathematischer Schönheit aufspannen, kann im folgenden *Streifzug durch die Geschichte der Mathematikästhetik* das Phänomen über die Mathematik- und Ästhetikgeschichte hinweg exemplarisch dargestellt und eingeordnet werden. Die abschließend herausgearbeiteten *Kontraste und Konstanten* streichen das Phänomen selbst als historische Konstante heraus, machen aber auch die zeitlich bedingten Unterschiede der auf die Mathematik angewendeten Schönheitsbegriffe bewusst. Die Auswahl endet mit Beispielen der Aufklärung und beschreibt somit gleichzeitig den geschichtlichen Horizont des folgenden Kapitels 4. Unter dem Titel *Mit Kant gegen die Schönheit der Mathematik* wird dort eine prominente und bezogen auf die allgemeinen Ästhetik immer noch einflussreiche Position dargestellt, die explizit dem mathematischen Schönheitsbegriff einen genuin ästhetischen Charakter abspricht. Kant geht in seinen Gegenargumentationen sowohl auf Schönheitskriterien ein, wie sie in der antiken Tradition Anwendung finden, als auch auf solche, wie sie für die aktuelle mathematische Praxis beschrieben werden. Insofern kommt diesen Ausführungen auch eine Mittlerrolle zwischen den Kapiteln 2 und 3 zu. Die im Abschluss dieses Kapitels herausgearbeiteten kritischen Punkte können dann in der den ersten Hauptteil schließenden Zusammenschau – *Eine Theorie des Schönen in der Mathematik* – die kontrastierende Analyse der Ergebnisse aus Kapitel 2 leiten.

Der zweite Hauptteil der vorliegenden Arbeit – *Mathematik als eine besondere Kunst* – ist ähnlich der Untersuchungen zur mathematischen Schönheit aufgebaut. Zunächst kommen in Kapitel 6 diejenigen Arbeiten systematisch zu Wort, die in der Mathematik eine Kunstform sehen bzw. sie kunstähnlich behandeln. Der beschriebenen Zielsetzung folgend sind dazu auch hier neben entsprechenden Zeugen aus der mathematischen Praxis Positionen zu diskutieren, die sich im Rahmen von Mathematikphilosophie und -geschichte mit dem Kunststatus der Mathematik auseinandersetzen. Die Darstellung solcher Studien gibt Strukturähnlichkeiten von Kunst und Mathematik auf verschiedenen Ebenen zu erkennen und es gelangen die unterschiedlichsten Bereiche der Mathematik, wie die Arbeitsweise der Mathematiker und das Wissenschaftssystem oder auch über den rein mathematischen Gehalt hinausweisende Eigenschaften mathematischer Texte sowie die Mathematikgeschichte, in einen spezifisch mathematikästhetischen Fokus. Durch die systematische Übersicht und Diskussion der verschiedenen Herangehensweisen wird die Frage nach dem Kunststatus der Mathematik auf eine Basis gestellt, die in Breite und Tiefe über die üblichen Begründungen mittels einzelner subjektiver Erfahrungsberichte hinausgeht. Im Kontrast zu solchen Ansätzen, die zwar auch auf Unterschiede zwischen den bildenden Künsten und der Mathematik hinweisen, aber grundsätzlich die Frage nach dem Kunststatus der Mathematik positiv beantworten, kann auch hier die Position Kants dienen. Seine Argumentation insbesondere gegen den Geniestatus der Mathematiker wird in Kapitel 7 ausführlich dargestellt. Dabei rückt einmal mehr die Frage nach dem Mathematiker als Produzenten (potentieller) Kunst in den Vordergrund. Die abschließende Zusammenschau von Teil II greift dann die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel auf und geht über das Beschreiben und Darstellen vorhandener Positionen hinaus: Zum einen werden die Kantischen Einwände dem Umgang mit der Kunstform Mathematik gegenübergestellt. Außerdem werden die sehr verschiedenen in gewisser Weise kunsttheoretischen Herangehensweisen an die Mathematik an einer allgemeinen philosophischen Ästhetik gemessen und so in Beziehung gesetzt.

Die herausgearbeiteten Ergebnisse zum Schönheitsbegriff und zum Kunststatus werden im Schlussteil III auf zweierlei Weise aufgegriffen und konkretisiert: Einerseits stellt sich die Frage, ob und inwiefern die mathematikästhetische Betrachtung auf dieser Grundlage in Disziplinen eingehen kann, die Fragen um Mathematik und ihre Praxis aufnehmen, wie dies in besonderer Weise in der Mathematikdidaktik geschieht. Es geht dabei um die Anwendung der allgemeinen Ergebnisse einerseits und andererseits um die Frage nach ihrer Bedeutung über die Mathematikästhetik hinaus. In Kapitel 9 wird dazu eine *Perspektiven für das Lehren und Lernen* eingenommen und die damit verbundenen Chancen und Möglichkeiten vor dem Hintergrund mathematikdidaktischer Forschung herausgearbeitet. Andererseits steht die ausführliche Konkretisierung der Ergebnisse an ausgewählten „Mustern der Mathematiker“ aus. Im Mittelpunkt solcher Fallstudien steht die Frage nach Möglichkeiten und Voraussetzungen, die einzelnen Charakteristika mathematischer Schönheit im konkreten Fall zu benennen und den Eigenschaften und Umständen, die ein bestimmtes „Muster der Mathematiker“ zum Kunstwerk werden lassen. Dazu werden in Kapitel 10 mit der Eulerschen Formel und zwei verschiedenen Beweisen aus dem Komplex Inkommensurabilität/Irrationalität unterschiedliche *Klassiker der Mathematikästhetik* vor dem Hintergrund der Hauptteile I und II analysiert und so an konkreten Gegenständen die Rahmenbedingungen der *Ästhetischen Erfahrung Mathematik* aufgezeigt.

Teil I

Schönheit und Mathematik

Kapitel 2

Mathematische Schönheit

> „It may be very hard to define mathematical beauty, but that is just as true of beauty of any kind [...].“ (Hardy, 1940, S. 85)

Nachdem Hardy die Relevanz der Schönheit für die Mathematik und Parallelen zur bildenden Kunst herausgestellt hat (vgl. Eingangszitat S. 1), kommt er zu der Vermutung, dass diese Parallelen auch bedeuten, dass der mathematische Schönheitsbegriff ebenso schwierig adäquat zu bestimmen ist, wie der allgemeine.[1] Die so ausgemachte Schwierigkeit führt Holger Wille folgend allzu häufig dazu, dass Kriterien für mathematische Schönheit lediglich *aufgezählt* werden, ohne diese aber zu spezifizieren – auch Hardy greift zu diesem Mittel. Eine weitere häufig gewählte Reaktion besteht darin, den Begriff der Schönheit durch einen anderen „womöglich noch rätselhafteren“ Begriff (vgl. Wille, 2004, S. 163f) zu *übersetzen*. Wille schlägt als alternatives Vorgehen einen reflektierten Umgang mit den in der Wissenschaftspraxis generierten Kriterien vor:

> „Die Aufgabe einer disziplinären Wissenschaftsästhetik liegt zumindest darin, die Kriterien, die für veritative Schönheit in Anschlag gebracht werden, so weit wie möglich zu explizieren.“ (Wille, 2004, S. 164)

Hier soll nun dieser Vorschlag für Kriterien mathematischer Schönheit umgesetzt werden. Dabei bilden die oben kritisierten Aufzählungen möglicher Eigenschaften und Begriffssubstitutionen eine wichtige Quelle für die Auswahl der zentralen Kriterien. Diese sind in der Literatur immer dort zu finden, wo „mathematikästhetisches Verhalten“ (siehe 1.2) dokumentiert ist. Aus der Zusammenschau verschiedener Ansätze zur Zusammenstellung und Verwendung der Kriterien eröffnet sich so in Kombination mit (Anfängen einer) Explikation einzelner Punkte durch „mathematikästhetisch reflektiertere“ Autoren ein differenzierter Blick auf die Schönheit der „Muster der Mathematiker“. Dies soll und kann nicht zu einem weiteren fragwürdigen Definitionsversuch des Schönheitsbegriffs führen, sondern helfen, den Begriff, wie er in der mathematischen Praxis Verwendung findet, anzunähern und

[1] Diese Einschätzung ist sowohl innerhalb der Mathematikästhetik als auch unter Vertretern der allgemeinen philosophischen Ästhetik verbreitet.

besser zu verstehen. Dazu sollen die verschiedenen Facetten einzelner Eigenschaften dargestellt und zueinander in Beziehung gesetzt werden. So kann nicht nur ein breites Spektrum an Definitionsversuchen abgebildet, sondern auch systematisch auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten hingewiesen werden. Auch können auf diese Weise an einzelnen Stellen Eigenheiten, die eine eindeutige Begriffsbestimmung unmöglich machen, aufgespürt und benannt werden.

Welche Kriterien aber werden im Rahmen mathematikästhetischen Verhaltens genannt? Der Versuch des Kronzeugen G.H. Hardy, die besondere Schönheit seiner Beispiele zu begründen, kann auch hier helfen, den Rahmen zu bestimmen:

> „In both theorems [...] there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy. The arguments take so odd and surprising a form; the weapons used seem so childishly simple when compared with the far-reaching results; but there is no escape from the conclusions. There are no complications of detail – one line of attack is enough in each case. [...] A mathematical proof should resemble a simple and clear-cut constellation, not a scattered cluster in the Milky Way.“ (Hardy, 1940, S. 113)

Bereits die bildhafte Sprache und die Länge der Ausführungen zeigen, dass es Hardy nicht leicht fällt, seinen Begriff mathematischer Schönheit zu umschreiben oder ihn gar durch einen oder mehrere Begriffe zu ersetzten. Dennoch verzichtet er, wie viele andere Autoren auch, auf ausführlichere Erklärungsversuche.
Die angeführten Eigenschaften reichen von einer *spielerischen Einfachheit weitreichender Resultate* über *klare Konstellationen*, die ohne Umschweife und überflüssige Details zu einer *unerwarteten Erkenntnis* führen bis hin zu *Gefühlen* wie Überraschung und Unausweichlichkeit. All diese Bereiche hängen eng zusammen und gehen auch und gerade in ihren Wechselwirkungen in mathematikästhetische Urteile ein. Andere Autoren nennen nur einzelne dieser Eigenschaften im Zusammenhang mit mathematischer Schönheit, setzten andere Schwerpunkte als Hardy dies tut oder heben bestimmte Beziehungen zwischen den Kriterien besonders hervor. Dennoch sollen hier Hardy folgend zunächst vier Eigenschaftskomplexe unterschieden und getrennt voneinander zugänglich gemacht werden. Ausführlich genannt und beschrieben werden die *Tragweite* oder Relevanz, die *Ökonomie*, die *epistemische Transparenz*[2] sowie die *emotionale Wirksamkeit* der „Muster der Mathematiker“. Dabei kommen neben G.H. Hardy auch weitere zeitgenössische Mathematiker und Mathematikphilosophen zu Wort und werden zu empirischen Ergebnissen wie denen der in (Müller-Hill und Spies, 2011) vorgestellten Umfragestudie in Beziehung gesetzt.

[2]Gemeint sind Eigenschaften, die häufig mit dem Begriff der Klarheit gefasst werden. Um hier aber die epistemische Relevanz als Facette der Klarheit zu unterstreichen und von anderen auch mit Klarheit bezeichneten Eigenschaften abzugrenzen, wurde der Begriff der epistemischen Transparenz gewählt (vgl. auch die inhaltliche Spezifizierung unter 2.3).

2.1 Tragweite

Im Zusammenhang mit der Schönheit eines mathematischen Gegenstandes wird häufig auf seine außerordentliche Tragweite hingewiesen. Dabei spielt auch die Anwendbarkeit außerhalb der Mathematik eine Rolle. Viel häufiger aber wird das Potential in Bezug auf einen größeren innermathematischen Zusammenhang betont. Jerry P. King bezeichnet diesen Eigenschaftskomplex als Prinzip der „maximal applicability". Dieses macht für ihn eines von zwei die mathematische Schönheit fassenden Prinzipien aus:

> „A mathematical notion[3] N satisfies the principle of maximal applicability provided that N contains properties which are widely applicable to mathematical notions other than N." (King, 1992, S. 181)

Mit dieser Formulierung „mathematischen" Stils erweckt King den Eindruck, den Eigenschaftskomplex der innermathematischen Tragweite präzise zu fassen. Auf den zweiten Blick zeigen sich aber bald unterschiedliche Möglichkeiten, diese „maximale Anwendbarkeit" zu interpretieren. Insbesondere bezogen auf die Art der über N hinaus anwendbaren Eigenschaften unterscheiden sich die Ansätze in der Literatur inhaltlich: Einerseits kann die Relevanz eines *Resultates selbst* eine Rolle bei der ästhetischen Bewertung spielen. Zum anderen aber wird ein Beweis dann als besonders schön empfunden, wenn die zugrunde liegende *Heuristik* über den aktuellen Fall hinaus Anwendungen findet. Doris Schattschneider bestätigt diese Beobachtung und nimmt folgerichtig beide Möglichkeiten in ihren Katalog der fünf nach ihrer Meinung breit geteilten Charakteristika mathematischer Schönheit auf. Sie unterscheidet inhaltlich zwischen „connections" und „paradigm". Ein Beweis ist demnach dann besonders schön, wenn er zunächst getrennte mathematische Teildisziplinen verbindet und so Licht auf eine große Umgebung wirft („connections") oder eine fruchtbare Heuristik mit weitreichender Anwendung zur Verfügung stellt („paradigm") (vgl. Schattschneider, 2006, S. 43).

Im Folgenden sollen beide Möglichkeiten der innermathematischen Tragweite getrennt von einander genauer beleuchtet werden. Anhand weiterer Autorenaussagen, die der Tragweite eine ästhetische Wirksamkeit zusprechen, können dabei beide Sichtweisen weiter ausdifferenziert werden.

2.1.1 Innermathematische Vernetzung

Armand Borel (1923–2003) macht die Tragweite im Sinne einer innermathematischen Vernetzung, d.i. der Bereich der „connections" nach Schattschneider, am

[3] Der Begriff „mathematical notion" umfasst bei King explizit alles, was möglicherweise in der Mathematik mit ästhetischen Attributen belegt wird. Er weist aber gleichzeitig ausdrücklich darauf hin, dass dabei in den meisten Fällen an Beweise oder Theoreme zu denken ist (vgl. King, 1992, S. 181f).

Beispiel der Galois-Theorie deutlich, die er für eines der „schönsten Kapitel der Mathematik" hält und bietet dabei bereits eine mögliche Differenzierung des Kriteriums an:

> „Erstens löst sie eine sehr alte und zu jener Zeit die wichtigste Frage über Gleichungen. Zweitens ist sie eine äußerst umfassende Theorie, die weit über die ursprüngliche Frage der Lösbarkeit durch Radikale hinausgeht. Drittens beruht sie auf wenigen Grundsätzen großer Eleganz und Einfachheit, die in einem neuen Rahmen, mit neuen Begriffen formuliert werden, die größte Originalität aufweisen. Viertens haben diese neuen Gesichtspunkte und Begriffe, besonders der Gruppenbegriff, neue Wege eröffnet und einen tiefen Einfluß in der ganzen Mathematik gehabt." (Borel, 1981, S. 34)

Mit der ersten genannten Eigenschaft weist Borel auf die Verbindung von Galois-Theorie und Gleichungslehre hin. Dabei zeichnet sich die besondere Tragweite der Theorie dadurch aus, dass sie die *Lösung eines wichtigen Problems* der Mathematik ermöglicht[4]. Der zweite Aspekt betont das Potential der Theorie bezogen auf weitere Gebiete der Mathematik. Über die neu geschaffenen Strukturen können eben auch *Verbindungen zwischen zunächst disparaten Teildisziplinen* deutlich werden. Die dritte der ins Feld geführten Eigenschaften fasst unterschiedliche Aspekte zusammen. Bezogen auf die hier zu beschreibende innermathematische Vernetzung steht die neue Formulierung bekannter Grundsätze im Vordergrund, welche durch die Wahl des settings restrukturiert und begrifflich besser fassbar werden. Die innermathematische Tragweite besteht also hier insbesondere in der *Einbettung von Grundsätzlichem in ein neues handhabbareres Konzept.* Dieses Potential qualifiziert Borel weiter durch die Attribute „elegant", „einfach" und „originell" und bringt damit die Ebene des subjektiven Eindrucks und zeigt so auch die Verbindung zu weiteren noch zu beschreibenden Eigenschaftskomplexen an (vgl. 2.2, 2.4 und 2.5.1). Interessant ist in diesem Zusammenhang der explizite Hinweis Borels, dass lediglich die unter drittens genannte Eigenschaft einem „echten ästhetischen Urteil" entspreche. Den weiteren „mehr irdischen Faktoren" käme dieser Charakter nicht zu, obgleich sie dennoch in das ästhetische Gesamturteil Eingang fänden (vgl. Borel, 1981, S. 34).[5]

So gehört auch die vierte genannte Nuance der innermathematischen Vernetzung Borel folgend nicht im eigentlichen Sinne zum ästhetischen Werturteil, obwohl sie auf einen in diesem Zusammenhang häufig genannten Aspekt, nämlich das *Potential für weitere mathematische Forschung* hinweist. Gleichzeitig zeigt sich hier auch der Zusammenhang zum „paradigm"-Aspekt der Tragweite, da die „Eröffnung neuer Wege" auch durch das Bereitstellen in verschiedenen Kontexten anwendbarer Heuristiken geschieht.

[4] Die dahinterstehende Frage zur Lösbarkeit von Gleichungen ist im Übrigen eines jener leicht zu formulierenden Probleme mit komplexer Lösung, auf die auch unter 2.2 eingegangen wird.

[5] Vgl. zu dieser Einschätzung auch die Ergebnisse aus Kapitel 4 und die Diskussion zur Zweckmäßigkeit in Kapitel 5.

Die Verwendung der innermathematischen Vernetzung als ästhetisches Kriterium findet weitere Zeugen, wie etwa den Mathematiker Helmut Hasse (1898–1979). Er sieht in diesem Eigenschaftskomplex ein Kriterium für die „Schönheit im Großen“ und bestätigt damit die Beispielwahl Borels. Wenn es um die ästhetische Bewertung ganzer Theorien geht, spielen für Hasse ebenfalls u.a. die gegenseitigen Beziehungen innerhalb der Theorie, die Auswirkungen für die weitere mathematische Forschung und die Verallgemeinerungsfähigkeit eine wichtige Rolle (vgl. Hasse, 1952, S. 24).
Dass solche Eigenschaften aber auch als mögliches Schönheitskriterium eines einzelnen Beweises gelten können, betont Lawrence Neff Stout. Er unterscheidet insgesamt fünf verschiedene Kriterien schöner Beweise und grenzt diese auch negativ ab, indem er Eigenschaften nennt, die nicht zur ästhetischen Bewertung gehören oder sich nicht auf Beweise, sondern speziell auf das Resultat selbst beziehen (vgl. Stout, 1999, S. 10). Die Unterscheidung zweier Möglichkeiten eines Beweises, „connections“ zu erzeugen, führt ebenfalls zu einer weiteren Differenzierung des Tragweiteaspekts :

> „A beautiful proof often makes unexpected connections between seemingly disparate parts of mathematics. A proof which suggests further development in the subject will be more pleasing than one which closes off the subject.“ (Stout, 1999, S. 10)

Der erste Aspekt unterstützt Borels zweites Argument, die Vernetzung disparater bereits bestehender Teilgebiete der Mathematik – allerdings explizit bezogen auf einen einzelnen schönen Beweis und nicht auf eine ganze Theorie. Zweitens betont Stout die Möglichkeit schöner Beweise, zukünftige Entwicklungen anzuregen und gibt so das Parallelargument zum oben dargestellten vierten Aspekt von Borel. Auch hier ist nicht klar zu entscheiden, ob es in der Hauptsache zur weiteren Entwicklung durch behandelte Inhalte kommt oder durch die weitere Verwendbarkeit einer bestimmten Heuristik. Der zweite Fall würde also wiederum auf den „paradigm“-Aspekt der Tragweite verweisen.

2.1.2 Weitreichende Heuristik

Wenn G.H. Hardy im Zusammenhang mit Schönheit und Signifikanz von Tragweite spricht, so macht er insbesondere die Verbindung „signifikanter *Ideen*“ stark, die dann wiederum mindestens die innermathematische Entwicklung voran treiben:

> „Thus a serious mathematical theorem, a theorem which connects significant ideas, is likely to lead to important advances in mathematics itself and even in another sciences.“ (Hardy, 1940, S. 89)

Eine solche Schwerpunktsetzung im Tragweitekonzept auf die zugrunde liegenden Ideen und Strukturen legen auch die Ergebnisse der bereits genannten Umfrage unter praktizierenden Mathematikern nahe. So zeigt die Auswertung, dass die

Tragweite sowohl innerhalb solcher Konzeptionen als Kriterium genannt wird, in denen der Schönheitsbegriff eher objektiv gedacht wird, als auch in solchen, die das subjektive Schönheitsempfinden stark machen (vgl. Müller-Hill und Spies, 2011, S. 277). Findet nun die dem Beweis oder der Theorie zu Grunde liegende Idee bzw. die verwendete Heuristik weitere Anwendungen in der Mathematik, so ist dies einerseits eine dem betrachteten Gegenstand anhängende Eigenschaft. Andererseits aber ist das Erleben dieses Umstandes stark von subjektiven Voraussetzungen abhängig und unter anderem auf der Intuition des Betrachters gründend. Doris Schattschneider unterstreicht diesen letzten Aspekt, wenn sie die paradigmatischen Beweisideen als unkonventionelle Methoden bezeichnet und behauptet, dass diese sich nicht wie gewöhnlich aus der logischen Argumentation ergeben, sondern vielmehr „the fruit of inspired flashes of insight“ seien (Schattschneider, 2006, S. 47).[6]

Die subjektive Komponente in der Wahrnehmung wurde wie oben beschrieben von Borel auch für den „connections“-Aspekt der Tragweite bezogen auf die Schönheit ganzer Theorien betont. Im Weiteren macht er die *Kluft zwischen Schönheitsempfinden und Schönheit als objektiver Eigenschaft* aber besonders für den „paradigm“-Aspekt deutlich. Zur Auswirkung der Tragweite einer Beweismethode beschreibt er die folgende zunächst paradox klingende Beobachtung:

> „Zum Beispiel werde ich eine Beweismethode selbstverständlich als schöner empfinden, wenn sie neue unerwartete Anwendungen findet, obwohl die Methode sich nicht geändert hat. Sie ist vielleicht wichtiger geworden, aber in sich betrachtet, nicht schöner.“ (Borel, 1981, S. 35)

Die „neue unerwartete Anwendung“ einer bekannten Heuristik sorgt demnach dafür, diese subjektiv schöner zu bewerten obgleich sich an dem Gegenstand – der Beweismethode an sich – nichts geändert hat, sie in einem objektiven Sinne also auch nicht schöner geworden sein kann. Borel markiert somit einen Unterschied zwischen der Beschaffenheit des Gegenstandes und dem subjektiven „als schöner empfinden“.[7]
Dieses Phänomen zeigt, dass als Grundlage des ästhetischen Empfindens in der Mathematik nicht nur der Einzelgegenstand isoliert gesehen wird. Im Komplex der Tragweite ist dies naturgemäß besonders stark ausgeprägt. Allerdings geht auch hier nicht nur die Verbindung zu anderen Gebieten inhaltlich ein, sondern auch die eingebrachte subjektive Verfasstheit, insbesondere wenn es um die Tragweite der grundlegenden Methoden und Strukturen geht. Dies gilt sowohl auf der Ebene der Vorkenntnisse als auch neuer Erfahrungen, die eine bekannte Methode „in einem anderen Licht“ erscheinen lassen.

[6] Vgl. dazu auch die Ausführungen Poincarés zur Rolle der „plötzlichen Inspiration“ nach Phasen unbewussten Arbeitens im Prozess des Mathematikschaffens (Poincaré, 1914, S. 44ff) sowie die Darstellung der Poincaréschen Position unter 6.1.2.

[7] Für Thomas Tymoczko erscheint an dieser Stelle der Begriff der Schönheit irreführend verwendet. Für ihn unterstützen Vernetzungen lediglich den ästhetischen Charakter eines Beweises, da sie den Blick auf den Beweis erweitern (vgl. Tymoczko, 1993, S. 75).

2.1.3 Zur Rolle der Tragweite

Verschiedene Autoren sehen die Rolle der (innermathematischen) Tragweite für die ästhetische Bewertung eines mathematischen Gegenstandes ähnlich, wie es Armand Borel oben zusammenfasst, wenn er resümiert, eine Methode sei „vielleicht wichtiger geworden, aber in sich betrachtet, nicht schöner“ (Borel, 1981, S. 35). Es wird also unterstellt, dass in das ästhetische Urteil eine weitere für den Betrachter positive *aber eigentlich artfremde Eigenschaft* eingeht.
Aus solchen Beobachtungen kann der Standpunkt erwachsen, die Tragweite sei kein ästhetische Kriterium im eigentlichen Sinne, sondern begleite das Schönheitsurteil lediglich. James McAllister z.B. sieht in empirischem Erfolg, Tragweite und Anwendbarkeit einer Theorie oder Technik gerade die *Grundlage* zur Entstehung positiver ästhetischer Werturteile über einen Gegenstand. Diesen als „aesthetic induction“ bezeichneten Prozess entwickelt er in McAllister (1996) für die Wissenschaftsästhetik im Allgemeinen. Die spätere Übertragung auf den Spezialfall Mathematik führt ihn zu folgender Vermutung:

> „This suggests that mathematicians' aesthetic preferences evolve in response to the perceived practical utility of mathematical constructs [...].“ (McAllister, 2005, S. 29)

Demnach ist die Tragweite eines „Musters der Mathematiker“ eine notwendige Bedingung für mathematische Schönheit, kann aber nicht als genuin ästhetisches Kriterium gelten.

Auch G.H. Hardy stellt eine ähnliche Verbindung von Schönheit und (innermathematischer!) Nützlichkeit bzw. Bedeutsamkeit – Hardy spricht von „seriousness“ – heraus. Er behauptet, dass die Schönheit eines Theorems von seiner Bedeutsamkeit abhängt, wobei besonders gute Mathematik sowohl schön als auch bedeutsam sein muss (vgl Hardy, 1940, S. 89f). Die Tragweite eines Theorems bzw. der grundlegenden Idee ist für Hardy insofern ebenfalls keine ästhetische Eigenschaft, sondern ein mit der Schönheit einhergehendes Charakteristikum bzw. eine Voraussetzung für diese. So muss für ihn *sowohl Tragweite als auch Schönheit* zu finden sein, um einem „Muster der Mathematiker“ einen dauerhaften Platz in der Welt zu garantieren (vgl. Hardy, 1940, S. 98).

Argumentationen wie diese müssen auch vor dem Hintergrund empirischer Ergebnisse mindestens in Erwägung gezogen werden. So zeigen die in Müller-Hill und Spies (2011) veröffentlichten Antworten eine erstaunliche Konstanz bezüglich der Nennung von Aspekten des Tragweitekriteriums als Charakteristikum schöner Mathematik – auch über grundsätzlich sehr verschiedene Antwortmuster hinweg. Dies legt zumindest nahe, dass die Tragweite nicht im direkten Zusammenhang mit dem sonstigen zu Grunde liegenden allgemeinen Schönheitsbegriff und Einstellungen bezüglich mathematischer Schönheit steht.

Eine weiteres Ergebnis der zitierten Umfragestudie, bezieht sich auf die Träger des betrachteten Eigenschaftskomplexes. So kann die Tragweite nur dann zur (ästhetischen) Eigenschaft etwa von Beweisen werden, wenn der Begriff, wie auf S. 10 auch für diese Arbeit vorgeschlagen, liberal gefasst wird, d.h. wenn der einbettende Rahmen ebenso berücksichtigt wird wie die zentralen Ideen: Häufig können gerade durch die Wahl des settings bestimmte Techniken aus entfernten Teilgebieten für die Lösung eines Problems verwendet werden und so unerwartete interdisziplinäre Verbindungen geschaffen werden. Steht dagegen im Sinne von Schattschneiders „paradigm" die weitere Anwendbarkeit der Heuristik im Vordergrund, so ist es gerade die *Beweisidee*, deren paradigmatischer Charakter die Schönheit ausmacht und die somit im verwendeten Beweisbegriff aufgehen muss.

Zusammenfassend kann für den hier betrachteten Eigenschaftskomplex zunächst festgehalten werden, dass im Allgemeinen die innermathematische Tragweite die wichtigere Rolle für die Mathematikästhetik spielt, obgleich in Einzelfällen auch auf die Anwendbarkeit z.B. in physikalischen Theorien hingewiesen wird. Diese innermathematische Tragweite kann auf unterschiedliche Arten verstanden werden – zum einen im Sinne von inhaltlichen Bezügen des betrachteten Gegenstandes, zum anderen im Sinne eines paradigmatischen Charakters der zur Anwendung kommenden Heuristik. Auch werden unterschiedliche zeitliche Dimensionen dieser Wirksamkeit gesehen. So gehört der Beitrag eines Resultates zur Lösung eines bereits in der Vergangenheit relevanten Problems zur Tragweite. Es zählt aber auch die theoriebildende Wirkung eines Beweises bzw. die verschiedene Theorien verbindende Wahl eines Beweissettings zu diesem Eigenschaftskomplex. Schließlich sind die Eröffnung eines für zukünftige Forschung relevanten Problempanoramas und die Aussicht auf die weitere Bedeutsamkeit der verwendeten Beweisidee Facetten des Tragweiteaspektes. In diesem Sinne kann eine nachträglich offenbar werdende Vernetzung oder Anwendbarkeit den subjektiven Schönheitseindruck verändern.

Obgleich oder gerade weil die Tragweite ein in den unterschiedlichsten Kontexten sehr häufig genanntes Schönheitskriterium darstellt, sind Ansätze ernst zu nehmen, die in diesem Bereich keine genuin ästhetische Eigenschaft, sondern allenfalls eine das Schönheitsempfinden unterstützende Kraft oder ein dieser vorausgehendes Merkmal sehen. Zum Status der Tragweite innerhalb der Mathematikästhetik bleibt ein Standpunkt zu beziehen.[8] Sicher ist, dass der hier aufgespannte Eigenschaftskomplex nicht nur als eigenständiges Kriterium eine Rolle spielt, sondern insbesondere vielseitige Anknüpfungspunkte zu anderen Charakteristika deutlich werden lässt. Er fungiert beispielsweise als eine Bezugsgröße im Eigenschaftskomplex der Ökonomie, der im Folgenden expliziert wird.

[8] Vgl. dazu auch die Diskussion zur Relativen Vollkommenheit ästhetisch bewerteter Mathematik unter 5.1.

2.2 Ökonomie oder relative Einfachheit

In der Auswertung einer Umfrage zur Bestimmung des schönsten Stücks Mathematik, veröffentlicht 1990 in *The Mathematical Intelligencer*, kommt David Wells zu dem Ergebnis, dass kein Kriterium häufiger mit mathematischer Schönheit assoziiert werde als eine besondere Kürze (vgl. Wells, 1990, S. 39). Kürze wird häufig auch synonym mit dem Begriff der Einfachheit verwendet. Als Zeugen für diesen Kriterienkomplex können den Ergebnissen der Umfrage von Wells (1990) z.B. Devlin (2002) [vgl. S. 9], Borel (1981) [vgl. S. 34] oder Borwein (2006) [vgl. S. 22] herangezogen werden. Auch die Ergebnisse weiterer empirischer Studien zum mathematischen Schönheitsbegriff bestätigen diesen Trend (vgl. z.B. Müller-Hill und Spies, 2011).
Kürze oder Einfachheit bedeutet dabei aber im Allgemeinen nicht, dass die Schönheit von der für einen Beweis benötigten Schrittanzahl oder einer ähnlichen messbaren Größe abhängt. Vielmehr gehen diese Eigenschaften meist relativ zu weiteren, den Gegenstand auszeichnenden Charakteristika in die ästhetische Bewertung ein. Um dem relativen Charakter der Kürze oder Einfachheit gerecht zu werden, wird häufig korrekter der Begriff der *Ökonomie* verwendet. Dieser jedoch stellt sich als ein ähnlich schillernder Eigenschaftskomplex dar wie die zuvor beschriebene Tragweite. Verschiedene Facetten der Begriffe Einfachheit/Kürze und Ökonomie sollen daher im Folgenden beleuchtet werden.

2.2.1 Minimalität

Eine Möglichkeit, die zur mathematischen Schönheit gehörende Einfachheit zu beschreiben, liegt in der *Abwesenheit von Unnötigem*. Dies kann sich einerseits auf das Fehlen eines unnötigen technischen Überbaus oder argumentativer Umwege beziehen, andererseits aber auch ganz allgemein als Minimalitätskriterium formuliert werden. Diesen zweiten Weg wählt Jerry P. King mit der Eigenschaft der „minimal completeness“[9]:

> „A mathematical notion N satisfies the principle of minimal completeness provided that N contains within itself all properties necessary to fulfil its mathematical mission, but N contains no extraneous properties.“ (King, 1992, S. 181)

Ein mathematischer Gegenstand, etwa ein Beweis, der dieses Kriterium erfüllt, enthält also ausschließlich die Eigenschaften, die nötig sind, das gesetzte mathematische(!) Ziel, also z.B. den Nachweis einer Aussage, zu erreichen. Mit diesem Versuch, ein objektivierbares Schönheitskriterium zu formulieren, schließt King

[9] Dabei stellt die „minimal completeness“ innerhalb Kings Theorie eine von zwei die mathematische Schönheit auszeichnenden Eigenschaften dar. Ergänzt wird sie durch die bereits angeführte „maximal applicability“ (vgl. S. 29).

jedoch diejenigen Komponenten einer Beweisführung aus, die etwa zum tieferen Verstehen des Sachverhaltes oder der Zusammenhänge führen würden. So bildet der Ansatz, die Schönheit durch mathematische Minimalität zu charakterisieren, einen Gegensatz zu anderen häufig ins Feld geführten Kriterien, wie etwa der epistemischen Transparenz (vgl. 2.3).

Andere Autoren versuchen ebenfalls eine Negativdefinition von Kürze bzw. Einfachheit, lassen aber mehr Spielraum. Helmut Hasse beispielsweise betont die inhaltliche „*Zielstrebigkeit*" schöner Argumente und charakterisiert diese als „Vermeidung von langatmigen, unwesentlichen Umschweifen" (Hasse, 1952, S. 24). Diese Charakterisierung ist somit ebenfalls geprägt von einer Orientierung auf das mathematische Ziel, er lässt aber offen, was dazu Wesentliches nicht fehlen darf bzw. welche „Umschweife" unwesentlich ist. So entsteht Raum für subjektive Interpretationen, die etwa auch abhängig sein können von den jeweiligen Vorerfahrungen und Kenntnissen.
Andere wiederum sehen die Schönheit gegeben durch Argumentationen, die ohne „technisches" Handwerk auskommen. Doris Schattschneider etwa spricht von einer gewissen *Sparsamkeit* schöner Argumente, die ohne unnötigen technischen Überbau direkt die zentrale Idee wirken lassen. Sie bezeichnet gerade diese Eigenschaft mit dem Begriff „Eleganz"[10] (vgl. Schattschneider, 2006, S. 43). Eine ähnliche Argumentation liegt wohl immer dann zu Grunde, wenn für eher hässliche oder nicht schöne Beweise z.B. solche Beispiele angeführt werden, die durch das Abarbeiten vieler verschiedener Fälle eine Aussage bestätigen. Dies wird häufig in Kontrast zu dem „schöneren" Vorgehen über eine indirekte Argumentationen gesetzt.

Der Versuch, ein Charakteristikum mathematischer Schönheit am Fehlen von „Unnötigem" fest zu machen, deutet auf einen Zusammenhang mit der subjektiven Zugänglichkeit des Gegenstandes hin. Bestandteile eines Beweises etwa, die inhaltlich oder strukturell das Nachvollziehen der Argumentation erschweren, stehen z.B. der Forderung entgegen, die zentrale Beweisidee müsse „auf einen Blick" erfassbar sein, um ein ästhetisches Erleben überhaupt möglich zu machen (vgl. McAllister, 2005, S. 19). Anderenfalls sind bereits die Voraussetzungen für ein weiteres häufig genanntes Kriterium, die Klarheit und die epistemische Transparenz gefährdet (vgl. 2.3).
Jonathan Borwein unterstützt ebenfalls die Sichtweise, Einfaches sei auf die subjektive Zugänglichkeit gegründet. Er begründet dies jedoch nicht durch eine Negativabgrenzung sondern direkt, indem er die Einfachheit als die Organisation von scheinbarer Komplexität oder Chaos bestimmt (vgl. Borwein, 2006, S. 22). Er greift damit eine häufig im Zusammenhang mit mathematischer Schönheit geäußerte Eigenschaft auf: das Moment der *Ordnung und der Passung.*

> „Ein Gefühl starken, persönlichen ästhetischen Vergnügens entspringt dem Phänomen, das man mit Ordnung aus dem Chaos umschreiben kann." (Davis und Hersh, 1994, S. 176)

[10] Zur Problematik der Begriffswahl vgl. 2.5.1.

Ordnung herbeizuführen und damit der Versuch eine unübersichtliche Situation überschaubar, eben subjektiv zugänglich zu machen, wird als allgemeines menschliches Bestreben beschrieben, dass sich in der Mathematik im Besonderen zeigt (vgl. Davis und Hersh, 1994, S. 176ff.).[11] Wird die ästhetisch wirksame Einfachheit auf diese Weise mit Ordnung und Passung in Verbindung gebracht, so verweist dies wiederum auf weitere, noch zu explizierende Charakteristika mathematischer Schönheit. Zunächst wird mit dem Gegensatz von Ordnung und Chaos eine Facette des Verhältnisses von Einfachheit und Komplexität umschrieben. Ordnung geht außerdem einher mit besonderer Klarheit und Durchsichtigkeit und verweist somit auf den Aspekt der epistemischen Transparenz.[12] Nicht zuletzt verweisen nicht nur Davis und Hersh auf den mit der Wahrnehmung von Ordnung verbundenen emotionalen Aspekt.[13]

Ob die Einfachheit in Relation zum Fehlen anderer Eigenschaften bereits als Ökonomie bezeichnet werden kann, wie Lawrence Neff Stout vorschlägt (vgl. Stout, 1999, S. 10), ist fraglich. Geht es dem Begriff der Ökonomie doch in der Regel eher um das Verhältnis zweier „greifbarer“ Eigenschaften des beurteilten Objektes. Die folgenden Ausführungen stellen unterschiedliche Beziehungskonstellationen vor.

2.2.2 Mittel-Resultat-Relation

Die klassische Art, den Begriff der Ökonomie im Zusammenhang mit mathematischer Schönheit zu verwenden, besteht darin, die Einfachheit der Mittel in Relation zur Tragweite des Resultates zu setzten. Für eine plastische Beschreibung dieses Zusammenhangs sei erneut auf die oben bereits zitierte Aussage Hardys hingewiesen:

> „[...] the weapons used seem so childishly simple when compared with the far-reaching results.“ (Hardy, 1940, S. 113)

Die in Anschlag gebrachten Beweismethoden etwa erscheinen dabei im Vergleich zur Tragweite der bewiesenen Aussage sehr einfach. Die Einfachheit wird quasi über die Tragweite der Resultate *subjektiv messbar*, d.h. die Qualität der Resultate erzeugt den Eindruck besonderer Kürze. In diesen Fällen kann die Tragweite in all ihren oben beschriebenen Facetten zur Bezugsgröße der Einfachheit werden.

---

[11] Der so verwendete Begriff „Ordnung“ im zeitgenössischen ästhetischen Verhalten ist somit nur bedingt mit der in den antiken Schönheitsbegriff eingehenden mathematisch beschreibbaren Ordnung gleichzusetzen (vgl. 3.1).

[12] In diesem Zusammenhang ist auch auf die Symmetrie als besondere Art von Ordnung zu verweisen, der immer wieder ein besonderer (mathematik-)ästhetischer Wert zuerkannt wird. Vgl. zum Schönheitskriterium der Symmetrie bezogen auf wissenschaftliche Theorien die ausführliche Darstellung von Holger Wille (2004), S. 164ff.

[13] Vgl. dazu beispielsweise auch den Ansatz Nathalie Sinclairs, die dem *Gefühl der Passung* („feeling of fitting“) eine zentrale Rolle im mathematikästhetischen Urteil zuschreibt (Sinclair, 2006b, S. 40ff).

Thomas Tymoczko verwendet den Begriff der Ökonomie im Spannungsfeld von Resultat und Mittel, jedoch nicht so eindeutig akzentuiert wie Hardy es tut. Er spricht von „economy, the strongest results with the least means“ (Tymoczko, 1993, S. 75). Wie sich die „stärksten Resultate“ dabei auszeichnen, ob also auch hier die Tragweite zur Bezugsgröße wird, lässt er offen. Ebenso bleibt ungeklärt, ob der Begriff der „least means“ den oben bei Hardy herausgestellten relativen und subjektiven Charakter hat, oder ob es sich um eine ermittelbare objektive Größe handeln soll.
Einen Vorschlag, sich der Qualität der Mittel tragweitenunabhängig zu nähern, macht Cyril Gardiner. Ihm folgend ist die Schwierigkeit eines Beweises über die Raffinesse der verwendeten Methoden bestimmbar. Diese „Messgröße“ bezieht er auf den mathematisch-ästhetischen Wert, er vermeidet aber explizit die Tragweite als Bezugspunkt.(Vgl. Gardiner, 1983, S. 80).

Die Ökonomie gerade in der Relation von Mittel und Resultat zu sehen, setzt voraus, Satz und Beweis bzw. allgemeine Problemstellung und Argumentationsgang gemeinsam als Träger der so ausgezeichneten mathematischen Schönheit zu sehen, jeweils inklusive des gewählten theoretischen Rahmens und der zugrunde liegenden Beweisidee. Häufig wird das Ökonomiekriterium in der beschriebenen Weise verstanden, obgleich lediglich die Rede von einem schönen Beweis oder einer schönen Aussage ist. In solchen Fällen verweist also das verwendete Kriterium darauf, dass der gesamte Satz-Beweis-Komplex beurteilt wird, ohne dass dies explizit gemacht wird. Dies zeigt weiterhin, dass insbesondere bei der Interpretation empirischer Ergebnisse oder bei Sammlungen der „Schönsten Sätze der Mathematik“ die Frage nach den eigentlich im Zentrum stehenden Trägern dieser Schönheit zu stellen ist.

2.2.3 Einfachheit in Relation zur Komplexität

Eine weitere Bezugsgröße der Einfachheit wird häufig in der Komplexität gesehen. Dabei scheint es gerade die im Erleben der Gegensätze liegende Spannung zu sein, die zu einem ästhetischen Urteil führt. Wie aber diese eigentümliche Wechselbeziehung lokalisiert ist, ist nicht einheitlich zu bestimmen, tauchen in der Literatur doch ganz verschiedenen Facetten auf.

Eine verbreitete Sichtweise betont die *generelle Relevanz* des Zusammenspiels der beiden Pole. So sieht beispielsweise David Ruelle die mathematische Schönheit als solche in der Koexistenz von Einfachem und Komplexem begründet:

> „Ich meine, die Schönheit der Mathematik liegt in der Sichtbarmachung der verborgenen Einfachheit und Komplexität, die in dem starren logischen Rahmen, den das Fach vorgibt, nebeneinander existieren.“ (Ruelle, 2010, S. 172)

Dabei hat er nicht nur einzelne Beweise oder Theoreme im Blick, sondern sieht in der Wechselbeziehung gar ein Prinzip, das die Schönheit der Mathematik als Ganzes charakterisieren kann und überdies eine Verwandtschaft der Schönheitsbegriffe innerhalb und außerhalb der Mathematik anzeigt(vgl. Ruelle, 2010, S. 172f).

Betrachtet man die Einfachheit wie oben vorgeschlagen als subjektive Zugänglichkeit eines mathematischen Sachverhaltes, so kann der Komplexität, als ihrem Gegenspieler, die Eigenschaft zugewiesen werden, in gewissem Sinne für das betrachtende Subjekt nicht adäquat zugänglich zu sein. Dafür können beispielsweise technische Schwierigkeiten verantwortlich sein, die zunächst überwunden werden müssen. Ein Stück Mathematik kann aber auch aufgrund seiner generellen strukturellen Anlage als komplex empfunden werden. Können solche Strukturen in leichter fassbare und damit einfachere Strukturen überführt werden, wird dies positiv erlebt und häufig mit Schönheit in Verbindung gebracht. In diesem Sinne sehen etwa Philip Davis und Reuben Hersh „zu einem Gewissen Grad“ die Aufgabe der Mathematik im Streben nach Ordnung in einem vorgefundenen Chaos. Gelingt dies, so entsteht ihrer Meinung nach „ein Gefühl starken, persönlichen ästhetischen Vergnügens“ (Davis und Hersh, 1994, S. 176).

Die ästhetisch wirksame Spannung von Einfachem und Komplexen wird nicht nur genutzt, um mathematisches Arbeiten im Allgemeinen zu charakterisieren, sondern auch, um einzelnen Gegenständen eine besondere Schönheit zuzuschreiben. Ausgangspunkt ist dabei häufig die Komplexität eines bestimmten mathematischen Problems. Erweist sich etwa eine Problemstellung als sehr komplex, so kann dies einerseits in dem schwer fassbaren Zusammenhang begründet sein, in dem diese steht. Das ist etwa der Fall, wenn ein Theorem in ein großes Beziehungsgeflecht eingebettet ist. Kann ein solcher Satz durch einen einfachen Beweis gezeigt werden, so löst dies ästhetische Gefühle aus.[14] Eine Problemstellung kann aber auch bedingt durch strukturelle Eigenschaften einer bestimmten Darstellungsform sehr undurchsichtig wirken. Der ästhetische Reiz entsteht nun gerade dann, wenn für solche komplex scheinenden Strukturen eine einfachere, also leichter fassbare Darstellungsform gefunden wird. Astrid Brinkmann sieht im Phänomen einfacher Lösungen zu komplexen Problemen den hauptsächlichen Wirkungsbereich der Einfach-Komplex-Relation als ästhetisches Prinzip (vgl. Brinkmann, 2006, S. 205f).

Bemerkenswert ist, dass es nicht nur die einfache Lösung eines zunächst schwer zu übersehenden Problems ist, der in der Literatur eine besondere Schönheit zugesprochen wird, sondern auch umgekehrt einfache, für jedermann verständliche

[14] Zu vermuten steht dabei, dass dies jedenfalls mitbedingt ist durch die entstehende Beziehung zu den anderen Eigenschaftskomplexen. So löst dieser Beweis zum einen ein Problem großer Tragweite (vgl. 2.1), zum anderen aber ermöglicht er vermutlich auch das Verstehen vorher als undurchsichtig erlebter Verflechtungen und erhöht somit die epistemische Transparenz (vgl. 2.3).

aber schwer oder nicht zu lösende Probleme einen ästhetischen Reiz ausmachen. John von Neumann (1903–1957) beschreibt dies so:

> „Ease in stating the problem, great difficulty in getting hold of it and in all attempts at approaching it [...].“ (von Neumann, 1976, S. 9)

Ein Paradebeispiel für diesen umgekehrten Zusammenhang stellt der *Vier-Farben-Satz* dar (vgl. z.B. Bungartz, 2003, S. 44f).

Das Verhältnis von Einfachheit und Komplexität kann aus der Literatur heraus nicht einhellig lokalisiert und gefasst werden. Einigkeit besteht allerdings in der Ansicht, dass dieser Gegensatz eine ästhetisch wirksame Spannung erzeugen kann. Wird die Einfachheit mathematischer Strukturen mit einer subjektiven Zugänglichkeit dieser Gegenstände gleichgesetzt, so beschreibt die Einfach-Komplex-Beziehung die Ökonomie als die Relation von epistemisch und emotional Fassbarem zu schwer Durchdringlichem in der Mathematik. Damit wird eine strukturelle Eigenschaft mit den weiter zu beschreibenden Eigenschaftskomplexen epistemische Transparenz (vgl. 2.3) oder emotionale Wirksamkeit (vgl. 2.4) in Verbindung gebracht.

2.2.4 Zur Rolle von Ökonomie und Einfachheit

Die Ausführungen zeigen, dass Einfachheit als häufig genannter Aspekt mathematischer Schönheit nicht das schlichte und eindeutige Kriterium ist, als das es gemeinhin gilt. Festgehalten werden kann, dass die Einschätzung, dass ein mathematischer Gegenstand besonders einfach ist, mit seiner Zugänglichkeit für das wertende Subjekt einher geht. Insofern ist die Kürze oder Einfachheit zunächst die strukturelle Bedingung für eine ganzheitliche Art subjektiver epistemischer Wahrnehmung, für das Fassen der Strukturen als Ganzes. Dem zufolge ist die Einfachheit abhängig vom Nichtvorhandensein möglicher Hindernisse der Wahrnehmung und insofern ein subjektiv geprägter Begriff.

Die Einfachheit wird, wie die Beschreibungen oben zeigen, je nach Kontext unterschiedlich eingeschätzt. So geht die umfassende subjektive Zugänglichkeit häufig in Relation zu anderen Eigenschaften in das mathematische Schönheitsurteil ein. Dabei können diese auf den Inhalt des jeweiligen Sachverhaltes bezogen werden, aber auch zu dessen strukturellen Eigenschaften in Beziehung stehen. Bezogen auf die Tragweite wird die Einfachheit etwa in einem inhaltlichen Zusammenhang gemessen. In diesem Sinne kann hier von *inhaltlicher Ökonomie* als Eigenschaft des Gegenstandes gesprochen werden. Steht andererseits die Einfachheit in Relation zu einer (vorhergehenden) Komplexität im Sinne der oben beschriebenen strukturellen Undurchdringlichkeit oder geht einher mit einer solchen, so muss entsprechend die Rede von *struktureller Ökonomie* sein.

Beiden Aspekten, sowohl der inhaltlichen als auch der strukturellen Ökonomie, wird in der Literatur zum mathematisch Schönen ein hoher Stellenwert eingeräumt. Häufig werden sie auch gemeinsam als Eigenschaften schöner Mathematik genannt. Der Einfachheit wird zudem auch als nicht relativer Eigenschaft ein prominenter Platz innerhalb der ästhetischen Bewertung mathematischer Gegenstände zugesprochen. Geht aber die subjektive Zugänglichkeit isoliert in das mathematisch-ästhetische Urteil ein, so ist dies m.E. von den beschriebenen Arten der Ökonomie zu unterscheiden und eher dem im Folgenden zu beschreibenden Eigenschaftskomplex der epistemischen Transparenz zuzuordnen.

2.3 Epistemische Transparenz

Wenn Hardy wie oben zitiert fordert, ein schöner Beweis müsse sich durch „a simple and clear-cut constellation" auszeichnen, dann betont er damit den Zusammenhang von Einfachheit und einer weiteren sehr häufig angeführten Qualität schöner Beweise: Sie überzeugen in ihrem strukturellen Aufbau durch eine besondere *Klarheit*. Gemeint ist damit eine deutlich nachvollziehbare Dramaturgie und durchschaubare Schlüsse. Es handelt sich demnach um den selben Eigenschaftskomplex, den andere Autoren mit dem Begriff der *Reinheit* (vgl. etwa (Devlin, 2002, S. 9) oder auch (Ruelle, 2007, S. 127 f.)) oder anderen visuellen Metaphern beschreiben.
Durch die Verwendung von Begriffen aus dem Bereich des Visuellen wird im Allgemeinen nicht nur eine strukturelle Eigenschaft der Gegenstände beschrieben, sondern insbesondere ein Zusammenhang zum subjektiven Verstehen herausgestellt: Das „innere Auge" hat eine unverstellte Sicht auf die zugrunde liegenden Strukturen. Im Moment, in dem sich der Nebel lichtet, kommt es zum Aha!-Effekt, der der ästhetischen Erfahrung zugehörig erlebt wird. Der Weg zu dieser besonderen Erkenntnis wird demnach häufig auch als *Enthüllung* oder *Offenlegung* eines vorher verborgenen Zusammenhangs oder einer verdeckten hinterliegenden Idee beschrieben (vgl. z.B. Schattschneider (2006) oder Davis und Hersh (1994)).
Der von Johannes Lenhard (2006) eingeführte Begriff der „epistemischen Transparenz" bleibt dabei in dieser Metaphorik und fasst außerdem den diesen Eigenschaftskomplex auszeichnenden Zusammenhang von struktureller Beschaffenheit und Verstehen.[15] Im Folgenden sollen daher Charakteristika wie Klarheit o.ä., die diesen Zusammenhang ausdrücken, unter dem Oberbegriff der epistemischen Transparenz beschrieben werden, um so auch die epistemische Relevanz des Ästhetischen in der Mathematik zu markieren.

[15] Lenhard führt den Begriff allerdings für ein seiner Meinung nach überkommenes Kriterium mathematischer Schönheit an und stellt der epistemischen Klarheit eines Widerspruchsbeweises o.ä. die erst durch bildgebende Verfahren entstehende Einsicht in Zusammenhänge dynamischer Systeme entgegen (vgl. Lenhard, 2006, S. 183f).

2.3.1 Bezug zum Verstehen

Die Spezifizierungen von Charakteristika wie Klarheit und Reinheit legen nahe, dass ein schöner Beweis nicht allein dazu führt, die Wahrheit der bewiesenen Aussage anzuerkennen, sondern vielmehr die Aussage und ihre Zusammenhänge *tiefer zu verstehen.* Er soll nicht nur zeigen, dass die Aussage logisch korrekt gefolgert wurde, sondern dies auch zwingend nahelegen, wie es z.B. Lawrence Neff Stout fordert (vgl. Stout, 1999, S. 10). Dass das individuelle Verständnis ein integraler Bestandteil ästhetischer Werturteile ist, kann auch empirisch belegt werden. So wird in der bereits zitierten Umfrage unter forschenden Mathematikern die Schönheit in den unterschiedlichsten Antwortmustern auf einen zusätzlichen Erkenntnisgewinn zurückgeführt, der über das reine Wissen um Wahrheit oder Korrektheit hinaus geht. Dabei wird der erklärende Wert schöner „Muster der Mathematiker“ hervorgehoben: Ein schöner Beweis zeigt nicht nur, dass eine Aussage wahr ist, sondern gibt auch Antworten auf die Frage nach dem „Warum“ (vgl. Müller-Hill und Spies, 2011, S. 278f). Davis und Hersh machen diese epistemische Komponente in der Behauptung plastisch, von zwei Beweisen sei derjenige der schönere, der „den Kern der Sache“ zeige und den „wirklichen Grund“ (Davis und Hersh, 1994, S. 314) aufdecke. Damit betonen sie gleichzeitig die Rolle des subjektiven Erkenntnisgewinns als ausschlaggebendes Moment, wenn die Schönheit zweier logisch gleichwertiger Argumentationen graduell unterschieden werden soll.

Darüberhinaus führen Davis und Hersh so die Klärung und das Verstehen im ästhetischen Urteil auf das Erkennen der zugrunde liegenden Ideen zurück. In diesem Sinne sieht auch Hans-Joachim Bungartz „das Schöne am Einfachen“ darin, dass die „Essenz in voller Klarheit“ erkannt werden könne (Bungartz, 2003, S. 41) und David Ruelle spricht vom Aufdecken und Erleuchten der hinterliegenden Einfachheit (vgl. Ruelle, 2007, S. 130). Aussagen wie diese zeigen, dass der Begriff der Einfachheit nicht nur im Bedeutungsumfeld der Ökonomie (siehe 2.2), sondern auch im Bereich der epistemischen Transparenz zum Tragen kommt. John von Neumann unterstreicht den Zusammenhang der beiden Eigenschaftskomplexe, wenn er mit Blick auf die Schönheit einfache grundlegende Prinzipien fordert, die einen zunächst komplizierten und undurchsichtigen Zusammenhang erklären (vgl. von Neumann, 1976, S. 9). Dies bestätigt auch Henri Poincaré mit der Behauptung, dass das ästhetische Gefühl gerade durch diejenigen Gegenstände befriedigt werde, die es erlauben, „die Dinge klar zu sehen und sowohl das Ganze wie auch zu gleicher Zeit die Details zu überblicken“ (Poincaré, 1914, S. 20). Solche Charakterisierungen unterstützen die Interpretation der Einfachheit als subjektive Zugänglichkeit und weisen auf die epistemische Relevanz der strukturellen Ökonomie hin.

Die strukturelle Einfachheit trägt also dazu bei, dass etwa ein schöner Beweis seine erklärende Wirkung entfalten kann und Antworten auf die Frage nach dem „Warum“ der zu beweisenden Aussage ermöglicht. Zu klären bleibt, ob sie dabei auch im Bereich der epistemischen Transparenz einen integralen Bestandteil des Kriteriums bildet oder eher eine notwendige Voraussetzung zur Entfaltung des aufklärenden Moments ist.

2.3.2 Zur Art des Verstehens

Im Zusammenhang mit mathematischer Schönheit wird nicht nur gefordert, *dass* mit der Rezeption ein tiefes Verstehen einhergehe. Vielmehr steht eine *bestimmte Art* des Verstehens im Zentrum des Interesses, die häufig mit dem Terminus „Aha!-Erlebnis" belegt ist. Dabei stellt sich das Wissen um das „Warum" eines mathematischen Sachverhaltes und um alle grundlegenden Strukturen, einer Enthüllung gleich, scheinbar plötzlich ein. Das (vollständige) Verstehen „von einem Moment zum nächsten" wird als tiefgreifendes emotional berührendes Erlebnis beschrieben.[16]

Eine anonyme Freitextantwort eines Mathematikers auf die Frage, was schön sein könne an einer mathematischen Theorie, beschreibt dies plastisch:

> „The architecture of the theory - as concretely realized" (Müller-Hill und Spies, 2011, S. 275)

Das Antwortmuster, dem diese Aussage in der Auswertung zugeordnet wurde, legt weiter die Interpretation nahe, dass die ästhetische Bewertung „schön" (auch) für einen alternativen Weg des Erkenntnisgewinns steht. Statt das Wissen um Wahrheit oder Korrektheit durch Nachvollziehen der einzelnen Argumentationsschritte zu erlangen, stellt es sich in der „ästhetischen Erkenntnis" gleichsam „auf einen Blick" ein. Zusätzlich offenbaren sich in diesem Erlebnis Zusammenhänge und grundlegende Ideen, die so sogar zu einem tieferen Verständnis für das „Warum" führen können. Dabei legen die Ergebnisse der Studie nahe, dass diese Erkenntnis nicht von einer vorher durchgeführten „konventionellen" Prüfung von Wahrheit oder Korrektheit abhängen.[17]

Doris Schattschneider fasst das besondere oder gar alternative Verstehen eines schönen Resultates wie folgt zusammen:

> „It offers a revelation as to *why* the statement is true, it provides an *Aha!*" (Schattschneider, 2006, S. 43, Hervorhebungen im Original)

Schattschneider bezeichnet diese Eigenschaft mit „insight", einem Innewerden der Zusammenhänge oder Begründungsmuster abseits des „normalen" Verstehens. Die

[16] Hier wird wiederum der Zusammenhang von epistemischer Transparenz und emotionaler Wirksamkeit (vgl. 2.4) deutlich.

[17] Dieses tiefe und zugleich umfassende Verstehen führt zu einem Zustand, der die vorher bestehende Undurchsichtigkeit unangemessen erscheinen lässt, also zum Gefühl der Unausweichlichkeit (siehe auch 2.4).

Relevanz dieser besondere Einsicht oder Erkenntnis gepaart mit einem Aha!-Erlebnis wird auch von anderen Autoren und vielen Mathematikern selbst betont. So berichtet Leone Burton (2004) dies als ein Ergebnis einer umfangreichen Interviewstudie im Bereich der Forschungsmathematik. Sie identifiziert dort die beschriebene Art des Verstehens mit dem Begriff der mathematischen *Intuition* und hebt damit erneut den spontanen und nicht ausschließlich bewussten Charakter dieser Erkenntnis hervor. Auch betont sie die unlösbare Vernetzung von Ästhetischem und Intuitivem, obgleich die Rolle der beiden Qualitäten eine unterschiedliche sei. So ist Burton folgend die Intuition insbesondere für den schaffenden Mathematiker bedeutsam, während sie die Wahrnehmung ästhetischer Qualitäten und damit den Rezipienten von Mathematik nicht in gleichem Maße betreffe (vgl. Burton, 2004, S. 72). Die grundlegende Relevanz des Intuitiven für die mathematische Ästhetik wird von weiteren empirischen Ergebnissen gestützt. Allerdings können die Differenzen bezogen auf die unterschiedlichen Rollen im „Kunstbetrieb“ Mathematik dabei nicht bestätigt werden. Vielmehr legen verschiedene Antwortmuster nahe, dass die Intuition gerade bei der Wahrnehmung von mathematischer Schönheit eine Rolle spielt (vgl. Müller-Hill und Spies, 2011, S. 278).[18]

Auch Jonathan M. Borwein betont für die ästhetischen Werturteile in der Mathematik die Bedeutung des Verstehens gepaart mit einer besonderen Art der Einsicht. Dabei wird gerade dieses spezielle kognitive Innewerden des Gegenstandes zum Merkmal der Unterscheidung von bloß Angenehmem und Schönem in der Mathematik[19]:

> „The mathematician's ‚aesthetic buzz‘ comes not only from simply contemplating a beautiful piece of mathematics, but, additionally, from achieving insight.“ (Borwein, 2006, S. 25)

„Insight“ und damit eine mathematisch ästhetische Erfahrung kann Borwein folgend aber nicht nur durch verstandesmäßiges Nachvollziehen gepaart mit Intuition erreicht werden. Auch graphische Darstellungen und Computeranimationen, also die „Muster aus der Mathematik“ (vgl. 1.1.2) bieten sich seiner Meinung nach als Hilfmittel auf diesem Weg an (vgl. Borwein, 2006, S. 25).[20]

2.3.3 Zur Rolle der epistemischen Transparenz

Über die Tatsache, dass die epistemische Transparenz eine nicht zu unterschätzende Rolle für das mathematische Schönheitsurteil spielt, herrscht große Einigkeit. Die Ansätze unterscheiden sich allerdings im Status dieses Eigenschaftskomplexes.

[18] Auf diesen Aspekt wird in der Untersuchung zum Kunststatus und der Rolle der Einbildungskraft (siehe Kapitel 8) ausführlicher Bezug genommen.

[19] Vgl. dazu auch die ähnlich gelagerte Unterscheidung dieser beiden Qualitäten in der Ästhetik Kants (vgl. Kapitel 4, S. 93ff).

[20] Zum Bezug von mathematischer Schönheit, wie sie hier charakterisiert wird, und der visuellen Wahrnehmung vgl. auch 5.3.

So können James McAllister folgend klassisch als schön bewertete Sätze und Beweise in einem einzigen Akt mentalen Erfassens („single act of mental apprehension") erfasst werden (vgl. McAllister, 2005, S. 19).[21] Damit wird das verstandesmäßige Erfassen des Argumentationsgangs „auf einen Blick" in gewissem Sinne zur Voraussetzung des Erlebens mathematischer Schönheit. Die subjektive Zugänglichkeit, also eine bestimmte oben beschriebenen Art von Einfachheit, ist somit dem Schönheitserleben vorangestellt. Diese ist aber nicht zu verwechseln mit dem „Aha!-Erlebnis", das neben dem generellen Verstehen auch die emotionale Komponente und eine gewisse Tiefe und Ganzheitlichkeit des Verständnisses aufweist und insofern eine Komponente des ästhetischen Urteils von eigener epistemischer Qualität darstellt.
Diesen Zusammenhang macht auch Lawrence Neff Stout deutlich, wenn er fordert: „A beautiful proof should make the result it proves immediately apparent" (Stout, 1999, S. 10), und das *Verstehen* des Beweises zur Voraussetzung dieser Eigenschaft macht[22], da es nur so zu einem „Aha!"-Erlebnis kommen könne (vgl. Stout, 1999, S. 11).

Für Hasse zeichnet sich die Schönheit der Mathematik, jedenfalls „im Kleinen", gerade durch „Klarheit und Durchsichtigkeit" aus (vgl. Hasse, 1952, S. 24). In größeren Zusammenhängen, Beweisen oder ganzen Theorien kommen Hasse zufolge zu diesem Kriterium lediglich weitere hinzu. Eine gut überschaubare und klare Struktur, mithin die subjektive Zugänglichkeit ist hier also ein integraler Bestandteil schöner Mathematik und nicht nur eine Voraussetzung für deren Wahrnehmung.

Gian-Carlo Rota (1932–1999) geht darüber hinaus, wenn er die Schönheit eines Beweises mit einer besonderen Erleuchtung („enlightment") von vorher im Dunkeln liegenden Zusammenhängen und Ideen gleichsetzt. Er fasst seine Überlegungen zur Schönheit, die sich aus der Untersuchung verschiedener Beispiele ergeben, wie folgt zusammen:

> „We acknowledge a theorem's beauty when we see how the theorem 'fits' in its place [...]. We say that a proof is beautiful when it gives away the secret of the theorem, when it leads us to perceive the inevitability of the statement being proved." (Rota, 1997, S. 132)

Diese Beschreibung bildet ab, was oben zur Rolle des Verstehens im mathematisch ästhetischen Urteil beschrieben wurde. Doch die Wahrnehmung solcher Eigenschaften führt Rota zufolge häufig dazu, fälschlicher Weise den Begriff der Schönheit zu verwenden, obwohl „enlightment" gemeint sei. So ist für ihn diese tiefe Art der Einsicht das einzige und nicht, wie in allen anderen mir bekannten Fällen, eines unter mehreren Schönheitskriterien. Als Konsequenz spricht sich Rota dafür

[21] Sehr lange Beweise, deren Richtigkeit nur durch kleinschrittiges Nachvollziehen erkannt werden kann, sind hierzu ungeeignet. Diese gelten demnach auch als eher hässlich (vgl. McAllister, 2005, S. 29).
[22] Insofern ist diese Eigenschaft für Stout vom jeweiligen Betrachter abhängig.

aus, den Begriff Schönheit durch „enlightment“ zu ersetzen. Die seiner Meinung nach „falsche“ Begriffswahl begründet Rota damit, dass „enlightment“ ein Begriff mit graduellen Abstufungen sei - der Kern der Sache kann unterschiedlich weit enthüllt werden, das Verstehen mehr oder weniger tief sein -, wogegen dies für den Begriff der Schönheit nicht gelte. Dies mache die Schönheit als Attribut für Mathematiker attraktiver (vgl. Rota, 1997, S. 132 f.). Diese Einschätzung scheint mir auf verschiedenen Ebenen zumindest problematisch. Zum einen wird durchaus auch in der Mathematik der Begriff der Schönheit mit graduellen Abstufungen verwendet. Wie sonst könnten Sätze nach dem Grad ihrer Schönheit geordnet werden (vgl. z.B. Wells, 1990) oder Mathematiker wie Lawrence Neff Stout (1999) in die Versuchung kommen, unterschiedliche Beweise derselben Aussage auf ihr ästhetisches Gewicht hin zu untersuchen? Zum anderen aber werden gerade im Bereich des mit „enlightment“ umschreibbaren Verstehens in der Praxis keine graduellen Abstufungen gemacht. Vor allem, wenn von einem Aha!-Erlebnis die Rede ist, wird m.E. eine *vollständige* Enthüllung beschrieben. Dieser Eindruck kann sich im Nachhinein als Irrtum herausstellen, aber im Moment der „Enthüllung“ scheint vorher Verdecktes nun völlig und nicht nur teilweise offenliegend. Henri Poincaré spricht in diesem Zusammenhang explizit von einem „Gefühl absoluter Gewissheit“ (Poincaré, 1914, S. 45). Des Weiteren spricht die Tatsache, dass Rota in der oben zitierten Zusammenfassung der Eigenschaften, die zum (falschen) Schönheitsurteil führen, die Unausweichlichkeit als qualifizierendes Gefühl explizit nennt, dafür, dass „enlightment“ nicht das einzige am ästhetischen Urteil beteiligte Charakteristikum ist. Mindestens muss die epistemische Transparenz noch durch eine emotionale Komponente ergänzt werden.[23]

> „[The mathematician] places great value on the aesthetic aspects of the understanding and the way that understanding is arrived at [...].“ (Halmos, 1968, S. 385)

Insgesamt zeigt sich, dass die epistemische Transparenz einen zentralen Aspekt des ästhetischen Urteils in der Mathematik darstellt, obgleich eine Substitution der mathematischen Schönheit durch diesen Eigenschaftskomplex nicht geboten ist. Den verschiedenen Ausprägungen des hier Beschriebenen könnten jedoch unterschiedliche Funktionen zukommen. So scheint ein grundsätzliches Erfassen des Argumentationsgangs gepaart mit der oben beschriebenen subjektiven Zugänglichkeit als Voraussetzung zur Wahrnehmung der epistemischen Transparenz im Sinne eines darüberhinausgehenden ganzheitlichen Verstehens oder eines Aha!-Erlebnisses zu fungieren. Damit kommt der mathematischen Schönheit ein das „einfache“ Verstehen übersteigende, spezifischer epistemischer Wert zu.

[23] Somit muss außerdem der an anderer Stelle geäußerten Einschätzung Rotas widersprochen werden, die mathematische Schönheit sei eine objektive Eigenschaft eines Stücks Mathematik, die nicht auf den subjektiven Gefühlen und Erfahrungen eines Beobachters gründe (vgl. Rota, 1997, S. 126).

2.4 Emotionale Wirksamkeit

Im Zusammenhang mit ästhetischen Werturteilen in der Mathematik wird immer wieder auch auf das emotionale Befinden der Urteilenden hingewiesen. Der Mathematiker Helmut Hasse etwa beschreibt seine Erfahrungen in diesem Zusammenhang wie folgt:

> „Hierzu möchte ich aus meiner eigenen, tiefsten Erfahrung bekennen, dass ich in der Mathematik [...] sehr viel für Herz und Seele sehe." (Hasse, 1952, S. 15)

Bekenntnisse wie dieses unterstreichen die emotionale Wirksamkeit und sprechen damit eine häufig eher vernachlässigte Bedeutung der Mathematik an. Mathematisches regt demnach nicht nur den Verstand an, sondern eben auch „Herz und Seele".
Diese grundsätzliche emotionale Komponente des Mathematiktreibens wird insbesondere in Verbindung mit ästhetischen Werturteilen angesprochen. Leone Burton etwa beobachtet bei Interviews mit praktizierenden Mathematikern Folgendes:

> „The mathematicians discussed aesthetics [...] in terms that were emotive, full of expressed feelings." (Burton, 2004, S. 63)

Wenn Mathematiker über die Schönheit ihrer Gegenstände sprechen, so verwenden sie eine emotional gefärbte Sprache. In ihren ästhetischen Werturteilen kommen die das Mathematiktreiben begleitenden Gefühle zum Ausdruck.

Neben den allgemein zu beobachtenden Zeugnissen emotionaler Betroffenheit im Umgang mit (besonders schöner) Mathematik werden auch bestimmte Gefühle ausdifferenziert und immer wieder genannt. Diese stehen selten isoliert, sondern qualifizieren vielmehr häufig die bisher beschriebenen Eigenschaftskomplexe. Besonders relevant für das mathematische Schönheitsurteil sind dabei die *Überraschung* und das *Erstaunen* sowie das Gefühl der *Unausweichlichkeit*. Diese soll im Folgenden ausführlicher dargelegt werden.

2.4.1 Überraschung und Erstaunen

David Wells berichtet aus seinen Umfrageergebnissen, dass „surprise" und „novelty" zu den am häufigsten genannten Begründungen für die Wahl eines bestimmten Resultates zum schönsten Stück der Mathematik zählen (vgl. Wells, 1990, S. 39). Dieser Befund wird durch zahlreiche Beispiele mathematikästhetischen Verhaltens bestätigt und findet so auch Eingang in viele Auflistungen einschlägiger Schönheitskriterien. Allerdings unterscheiden sich die Äußerungen sowohl in der Ausrichtung als auch im Gegenstand der Überraschung oder des Erstaunens.

Hardy etwa spricht wie bereits zitiert (siehe S. 28) von einer eigentümlichen und *erstaunlichen Form der Argumente* (vgl. Hardy, 1940, S. 113). Doris Schattschneider spezifiziert dies und nennt unerwartete Ideen und überraschende Wendungen als Kriterien besonderer Schönheit. Sie fasst dies unter dem Begriff der „Genialität" zusammen (vgl. Schattschneider, 2006, S. 43). Dabei schwingt auch die Bewunderung für den Erfinder des betrachteten Argumentes mit.[24] Dies kommt häufig in Beschreibungen von schaffenden Mathematikern dann zum Tragen, wenn das Moment des „surprising twist" als Charakteristikum einer schönen Argumentation herangezogen wird (vgl. z.B. von Neumann, 1976, S. 9).
Auch für Thomas Weht ist mit dem Gefühl, das mit dem Erkennen von „Genialem in der Mathematik" einhergeht, eine Facette des mathematischen Schönheitsbegriffs beschrieben:

> „Derartige ‚trickreiche' aber logisch korrekte Gedankengänge lesen sich für einen Interessierten wie für Andere ein logisch gut aufgebauter Kriminalroman; für den Interessierten bieten sie einfach einen Genuss und werden als ‚schön' empfunden." (Weth, 2007, S. 71)

Die Überraschung über eine unerwartete Form der Argumentation nutzt Weth dabei als eine emotionale Wirkung, um den „Begriff der mathematischen ‚Schönheit' auszudifferenzieren" (Weth, 2007, S. 68). Außerdem nennt er mit dem „Erstaunen" über zunächst nicht offensichtliche Zusammenhänge und Ergebnisse einen weiteren in den Schönheitsbegriff einfließenden Gefühlskomplex.[25] Diese *Überraschung über die innermathematische Tragweite* wird immer wieder angeführt (vgl. z.B. Stout, 1999, S. 2).

Hiervon abzugrenzen ist ein weiterer Gegenstand des Erstaunens und der Überraschung: die Einfachheit und Prägnanz eines Argumentes. Das so ausgelöste Erstaunen und Gefühl des Unerwarteten bezeichnet Weth mit „Eleganz"[26] (vgl. Weth, 2007, S. 69). Wie es die obigen Ausführungen zum Eigenschaftskomplex der Einfachheit erwarten lassen, scheint auch die emotionale Reaktion häufig durch die Einfachheit *bezogen* auf die Relevanz, also die unter 2.2 beschriebene Ökonomie ausgelöst zu werden. Dreyfus und Eisenberg beschreiben dies etwa wie folgt:

> „The conclusion of such a powerful argument tends to contain an element of surprise for anyone who did not know the argument before." (Dreyfus und Eisenberg, 1986, S. 4)

Wobei mit „powerful" gerade ökonomisch im oben beschriebenen Sinne gemeint ist.[27] Ähnlich äußern sich auch Wells (1990), Hardy (1940), Borwein (2006) oder Bungartz (2003) zur emotionalen Wirksamkeit der Ökonomie.

[24] Vgl. dazu auch die Diskussion zum Mathematiker als Genie und Künstler in Kapitel 7 und 8.
[25] Interessanter Weise spricht er nur in diesem Zusammenhang explizit von Erstaunen, wobei er in den anderen Fällen diese Gefühlslage umschreibt.
[26] Zur Problematik der Begriffswahl siehe S. 53.
[27] „An argument is powerful if it leads to a far-reaching conclusion on the basis of few elemtary assumptions" (ebd.)

Weth führt zusätzlich zum ausdifferenzierten Gefühl des Erstaunens und des Unerwarteten eine weitere Emotion ins Feld. Für ihn gibt es wie in den bildenden Künsten[28] auch „Muster der Mathematiker“, die zu einem Ergriffensein ob der Größe im Sinne der oben beschriebenen Tragweite des Resultates führen:

> „In diesen Fällen eröffnet sich die Schönheit eher in Form einer ‚Ergriffenheit‘, welche einen Luft holen, tiefer atmen, das Herz schneller schlagen lässt.“ (Weth, 2007, S. 69)

2.4.2 Unausweichlichkeit

Ein Gefühlsbereich, der vom bisher beschriebenen Komplex des Erstaunens und Überraschtseins klar abgegrenzt werden muss, ist das immer wieder von Mathematikern ins Feld geführte und mit Schönheit in Verbindung gebrachte Gefühl der Unausweichlichkeit.
Der Mathematiker Gregory Chaitin beschreibt z.B. in einem Interview eine über die anfängliche Überraschung hinausgehende Emotion:

> „After the initial surprise it [a beautiful proof] has to seem inevitable. You have to say, of course, how come I didn't see this!“ (Chaitin, 2002, S. 61)

Ein schöner Beweis enthält demnach nicht nur zunächst überraschend erscheinende Wendungen oder unerwartete Ideen, sondern vermittelt auch den Eindruck, dass das gewünschte Ziel nun unausweichlich erreicht werden *muss*. Hardy bestätigt dies. Für ihn besteht in einem schönen Beweis wie auf S. 28 zitiert „no escape from the conclusions“ und die „inevitability“ ist eines der Kennzeichen schöner „Muster der Mathematiker“ (Hardy, 1940, S. 113).[29]

Die Unausweichlichkeit ist somit eine häufig mit der epistemischen Transparenz einher gehende emotionale Wirkung schöner Mathematik. Im tiefen Verstehen oder einem Aha!-Erlebnis stellt sich gleichzeitig zum rationalen Erfassen auch das Gefühl ein, dass ein Resultat oder ein bestimmter Schluss nun unumgänglich ist.

2.4.3 Zur Rolle des Emotionalen

Schöne „Muster der Mathematiker“ lösen beim rezipierenden Subjekt eine Fülle von Emotionen aus. Diese qualifizieren häufig andere bereits beschriebene Eigenschaftskomplexe. So wird die Überraschung über die vorgefundene Tragweite oder

[28] Weth nennt hier als Beispiele prunkvolle Barockgebäude oder mit großem Orchester aufgeführte pompöse Werke.

[29] Auch andere machen das Gefühl der Unumgänglichkeit eines Resultates und seine Zielstrebigkeit für die Schönheit eines Beweises verantwortlich. (Vgl. z.B. (Hasse, 1952, S. 24), (Krull, 1930, S. 211f), (Rota, 1997, S. 132) oder (Tymoczko, 1993, S. 75).)

Ökonomie beschrieben oder die epistemische Transparenz gerade durch das Gefühl der Unausweichlichkeit markiert. Hinzu kommt die Freude über das eigene Erkenntnisvermögen und die eigenen Fähigkeiten.
Die von Thomas Weth genutzte Möglichkeit durch verschiedene Gefühle bzw. ein Gefühl bezogen auf verschiedene Eigenschaften als Träger, den Begriff der mathematischen Schönheit auszudifferenzieren, weist darauf hin, dass die emotionale Komponente von besonderer Relevanz für den ästhetischen Charakter solcher Eigenschaftskomplexe ist. So liegt die Vermutung nahe, dass erst durch die emotionale Wirksamkeit aus einer etwa epistemischen Eigenschaft (wie einfache Zugänglichkeit oder epistemische Transparenz) eine im eigentlichen Sinne ästhetische wird.[30]

Henri Poincaré geht über die rein qualifizierende Aufgabe der Gefühle für andere Eigenschaften schöner Mathematik hinaus. So beschreibt auch er in einer als emotional zu charakterisierenden Sprache eine Episode seines mathematischen Schaffens, um daraus Schlussfolgerungen über den Erfindungsprozess in der Mathematik im Allgemeinen zu ziehen (vgl. Poincaré, 1914, S. 41ff). Dabei kommt er zu dem Schluss, dass eine Sensibilität für die Schönheit der Mathematik notwendig ist, um aus der unüberschaubaren Vielfalt von Kombinationen etwa bei der Suche nach allgemeinen Strukturen die zielführende auszuwählen. Nötig ist ihm folgend ein „wahrhaft ästhetisches Gefühl“ (Poincaré, 1914, S. 48).[31] Schöne Mathematik zeichnet sich demnach nicht nur durch die Kombination bestimmter allgemeiner Eigenschaften mit bestimmten allgemeinen Gefühlen aus, sondern wird durch eine *spezifisch ästhetische Emotion* begleitet, welche es wahrzunehmen gilt.
Von einem solchen spezifisch ästhetischen Gefühl berichten auch andere. So beschreiben etwa Davis und Hersh ein „Gefühl starken, persönlichen ästhetischen Vergnügens“ (Davis und Hersh, 1994, S. 176), welches mit der Wahrnehmung mathematischer Ordnung einhergehe. Ähnliches beschreibt Jonathan Borwein und spricht vom „aesthetic buzz“ (Borwein, 2006, S. 25). Dies entspricht auch Beschreibungsversuchen des Begriffs der „ästhetischen Erfahrung“ in der allgemeinen Ästhetik.

Die zentrale Rolle des Emotionalen für die mathematikästhetische Beurteilung wird auch von empirischen Ergebnissen gestützt. So zeigen die Antworten aus einer von Astrid Brinkmann und Bharath Sriraman durchgeführten Interviewstudie mit aktiven Mathematikern eindrücklich die qualifizierende Funktion des Emotionalen. Auf die Frage etwa, was jeweils persönlich unter mathematischer Schönheit verstanden werde, ist keine Antwort zu finden, in der nicht Eigenschaften wie Einfachheit, Klarheit oder Tragweite von besonderen Gefühlen begleitet dargestellt werden (vgl. Brinkmann und Sriraman, 2009, S. 68f.).

[30] Zur Rolle des Emotionalen für ästhetische Werturteile im Allgemeinen vgl. z.B. die Ausführungen in Kapitel 4.
[31] Vgl. hierzu auch die ausführlichere Darstellung der Poincaréschen Position im Rahmen der Diskussion um den Kunstcharakter der Mathematik unter 6.1.2.

Weitere empirische Ergebnisse zeigen außerdem, dass die emotionale Wirksamkeit anders als etwa epistemische Wirkungen unabhängig von der Überprüfung von Wahrheit oder Korrektheit gesehen werden kann (vgl. Müller-Hill und Spies, 2011, S. 277). Dies schlägt sich sowohl im mathematikästhetischen Urteil über das eigene Arbeiten als auch über das Vorgehen anderer Mathematiker nieder. So unterscheidet Wolfgang Krull (1899–1971) etwa mit Blick auf die Arbeiten seines Lehrers Felix Klein zwischen ihrem „eigentümlich fesselnden Reiz“ und ihrer manchmal mangelnden Strenge und stellt fest, “vom ästhetischen Standpunkt ist manche fehlerhafte Kleinsche Arbeit über manche fehlerfreie eines Anderen zu stellen“ (Krull, 1930, S. 212f).
Bezogen auf die eigenen Ergebnisse kann hier auch die Selbstbeobachtungen Poincarés herangezogen werden:

> „Ich sprach oben von dem Gefühle absoluter Gewißheit, das die Inspiration begleitet; [...] diese Gefühl kann oft sehr lebhaft sein und uns dennoch täuschen, und wir bemerken unsern Irrtum erst, wenn wir den Beweis festlegen wollen.“ (Poincaré, 1914, S. 45)

Poincaré folgert daraus, dass auf jede von ästhetischer Sensibilität geprägt Phase unbewussten mathematischen Arbeitens eine Phase der bewussten Überprüfung folgen muss.
Der unmittelbare Charakter des Emotionalen innerhalb mathematischer Schönheitsurteile unterstützt die Vorstellung, dass es ein spezifisch ästhetisches Gefühl geben müsse, welches mit der Wahrnehmung mathematischer Schönheit einher gehe. Zumindest aber widerspricht dies Ansätzen, die in der mathematischen Schönheit keine genuin ästhetische, sondern etwa eine Sonderform einer epistemischen Kategorie oder lediglich „quasi ästhetische„ Eigenschaften sehen wollen und dies mit fehlender emotionaler Beteiligung begründen (vgl. etwa Harré, 1958, S. 136).[32]

2.5 Begriff(e) mathematischer Schönheit

Die bisher beschriebenen Eigenschaftskomplexe berühren ganz unterschiedliche, aber dennoch miteinander verbundene Facetten mathematischer Schönheit. Die Ausführungen zeigen weiter, dass zwei Bereiche quer zu der Kategorisierung in Tragweite, Ökonomie, epistemische Transparenz und emotionale Wirksamkeit liegen. Dies ist zum einen die problematische Verwendung des Begriffs der „Eleganz“ und zum anderen der immer wieder durchschimmernde subjektive Charakter des Werturteils „schön“. Beides soll daher als Vorbereitung auf die abschließende Zusammenschau im Folgenden zusammenfassend aufgegriffen werden.

[32]Zur Rolle des Emotionalen für die Einordnung mathematischer Schönheit vgl. auch die Zusammenschau in Kapitel 5.

2.5.1 Eleganz

Wie die Ausführungen zu den einzelnen Eigenschaftskomplexen in diesem Kapitel zeigen, wird im Zusammenhang mit mathematisch-ästhetischen Bewertungen immer wieder der Begriff der „Eleganz“ verwendet. Dabei können die beiden Attribute elegant und schön in je verschiedener Beziehung zu einander stehen.

In den Ansätzen von Doris Schattschneider und Thomas Weth benennt das Elegante eine bestimmte Facette ihrer Auffassung von mathematischer Schönheit. Beschrieben wird dabei das, was andere Autoren unter einer besonderen Einfachheit im Sinne des Fehlens unnötiger Technika, also im Sinne einer erstaunlichen individuellen Zugänglichkeit fassen. Insbesondere Weth betont dabei das Moment des Erstauntseins ob dieser Einfachheit und Prägnanz.

Andere, wie etwa Henri Poincaré, verwenden den Begriff der Eleganz quasi gleichbedeutend mit dem der Schönheit. So entsprechen die von ihm angegebenen Charakteristika, die einem mathematischen Gegenstand Eleganz verleihen, denen die andere Autoren für die mathematische Schönheit ins Feld führen (vgl. Poincaré, 1914, S. 20f).[33] An anderer Stelle nennt er dann explizit Schönheit und Eleganz in einem Atemzug (vgl. Poincaré, 1914, S. 48). und macht immer wieder die mit den Eigenschaften einhergehende Zugänglichkeit stark:

> „Welchen mathematischen Gebilden legen wir nun diesen Charakter von Schönheit und Eleganz bei [...]? Offenbar denjenigen, die sich aus harmonischen Elementen zusammensetzen, so daß unser Geist ohne besondere Anstrengung das Ganze erfassen und gleichzeitig in die Einzelheiten eindringen kann.“ (Poincaré, 1914, S. 48)

Eleganz im Rahmen ästhetischer Urteile über mathematische Gegenstände betont also diejenigen Eigenschaften, die das individuelle Erfassen in besonderer Weise begünstigen. Diese Eigenschaften spielen, wie bereits oben für die Einfachheit beschrieben, mindestens die Rolle einer notwendigen Voraussetzung für das mathematische Schönheitsurteil. Andererseits zeigt dies aber auch, dass das so verwendete Attribut elegant in den Eigenschaftskomplexen Einfachheit oder epistemische Transparenz aufgehen kann. Wo dies möglich ist, sollte es m.E. auch im Sprachgebrauch markiert werden, um Verwechslungen mit Verwendungen des Begriff bezogen auf andere Träger aus dem Bereich des Mathematischen zu vermeiden.

Dies ist insbesondere deshalb geboten, da der Begriff der Eleganz häufig explizit für die Präsentation mathematischer Sachverhalte und nicht für die Gegenstände selbst verwendet wird. Dabei ist die positive ästhetische Bewertung der Präsentationsform unabhängig von den ästhetischen Qualitäten des präsentierten Gegenstandes zu sehen. Auch ein hässlicher oder unästhetischer Beweis kann demnach

[33] Ein ähnliches Vorgehen findet sich bei Ian Glynn (vgl. Glynn, 2010, S. 3f), der aber in der Hauptsache auf die Eleganz bzw. Schönheit der Naturwissenschaften eingeht.

elegant dargeboten werden. Rom Harré weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass sich Eleganz im Allgemeinen dadurch auszeichne, dass diese bewusst herbeigeführt werden muss und die so bezeichnete ästhetische Eigenschaft nicht zufällig dem Gegenstand anhänge (vgl. Harré, 1958, S. 133).

Die Untersuchungen im folgenden Kapitel legen weiterhin offen, dass bereits Immanuel Kant auf die notwendige Trennung von Eigenschaften der Darstellungsform und der Gegenstände selbst insbesondere bezogen auf die Mathematik verweist (vgl. S. 101). Gian-Carlo Rota schlägt in diesem Zusammenhang vor, die Eigenschaft der Eleganz in Bezug auf die „Muster der Mathematiker" selbst ganz auszuschließen und sie der Demonstration vorzubehalten (vgl. Rota, 1997, S. 128). Da wie beschrieben die Eleganz in Bezug auf die Gegenstände selbst, häufig synonym zu anderen Eigenschaften verwendet wird, soll im Folgenden auch aus Gründen der Eindeutigkeit der Terminologie diesem Vorschlag gefolgt werden.

2.5.2 Der subjektive Charakter

Auf den ersten Blick lassen sich die hier ausgeführten Eigenschaftskomplexe klar unterscheiden in solche, die eine objektive Beschaffenheit des betrachteten Gegenstandes explizieren und solche, die das beschreiben, was im urteilenden Subjekt durch diese Gegenstände evoziert wird. Tragweite und Ökonomie scheinen der ersten Gruppe eindeutig zugehörig, epistemische Transparenz und emotionale Wirksamkeit der zweiten. Diese klare Abgrenzung ist aus verschiedenen Gründen nicht haltbar.

So zeigen die obigen Ausführungen immer wieder Querverbindungen zwischen Eigenschaftskomplexen der beiden Gruppen. Insbesondere die in Begründungen für mathematische Schönheitsurteile nahezu immer zu beobachtenden Spezifizierung von Eigenschaften wie Tragweite oder Ökonomie durch Gefühlsexpressionen (vgl. z.B. Zitat Hardy S. 28) und die emotionale Sprache, mit der auch über die vermeintlich „objektiven" Eigenschaftskomplexe gesprochen wird, weisen auf die subjektive Komponente auch in diesen Bereichen hin.

Außerdem zeigt die hier vorgeschlagene Ausdifferenzierung für alle Eigenschaften inherente „subjektive" Momente. Dazu zählt etwa die Rolle der subjektiven Voraussetzungen im Sinne eines bestimmten notwendigen Vorwissens und der notwendigen Intuition des Betrachters im Bereich der Tragweite. Individuelle Unterschiede führen zu unterschiedlichen Beurteilungen der innermathematischen Vernetzung oder der Reichweite der Heuristik und damit zu individuell verschiedenen ästhetischen Bewertungen ein und desselben Gegenstandes.
Ähnliches ist auch im Bereich der Einfachheit zu beobachten: Die Frage, inwiefern ein mathematischer Argumentationsgang besonders gut oder schlecht kognitiv zugänglich ist, hängt von der individuellen Konstitution des Betrachters ab. Der subjektive Charakter kommt demnach insbesondere im Bereich der *strukturellen*

Ökonomie zum Tragen. Die Tatsache, dass durch das Überführen von schwer zu leichter Fassbarem, also von Komplexem zu Einfacherem, ein positives Erlebnis verbunden ist, scheint dagegen intersubjektive Gültigkeit zu haben.

Wird also die Tragweite oder die strukturelle Ökonomie eines Gegenstandes bewertet, so ist das Urteil insofern stark subjektiv geprägt, als dass die individuelle, insbesondere kognitive Verfasstheit Voraussetzung der Bewertung ist. Ursachen für von einander abweichende Urteile sind in diesen Fällen insbesondere die subjektiven Voraussetzungen in Kenntnisstand und Vorerfahrung. So entstehen individuell unterschiedliche Bewertungen, denen wohl aber kein genuin ästhetischer Grund vorausgeht, es ist also nicht „Sache des Geschmacks“. Ähnliches gilt im Falle der epistemischen Transparenz, wenn der subjektive Erkenntnisgewinn ausschlaggebend für das Schönheitsurteil wird.

Dennoch werden auch für die Mathematik Geschmacksunterschiede ebenso postuliert, wie sich wandelnde Stile (vgl. 6.2). Dies könnte darin begründet liegen, dass in das mathematische Schönheitsurteil sowohl subjektive Unterschiede im Bereich des Verstandesmäßigen als auch im Bereich des Emotionalen eingehen. Gerade durch dieses Zusammenspiel scheint sich eine individuell gefärbte, genuin ästhetische Bewertung zu ergeben. Dies bleibt in der Zusammenschau mit den Ausführungen zum Kantischen Schönheitsbegriff in Kapitel 5 näher zu beleuchten.

2.5.3 Ein facettenreicher Begriff

Der eingangs zitierten Forderung folgend, eine disziplinäre Wissenschaftsästhetik müsse die in der Praxis generierten Charakteristika des verwendeten Schönheitsbegriffs explizieren, wurden vier der zentralen Facetten mathematischer Schönheit in ihrer Breite und Tiefe dargestellt. Dabei wurde sowohl mathematikästhetisches Verhalten als auch reflektierendere Ansätze einbezogen. Somit umfassen die hier vorgeschlagenen Explikationen einerseits einen großen Teil dessen, was in der mathematischen Praxis unter dem Begriff Schönheit gehandelt wird. Zum anderen geben sie aber auch die aktuelle mathematikästhetische Diskussion bezogen auf die Schönheit der „Muster der Mathematiker“ wieder.

> „Ich kann Ihnen damit gleichzeitig klarmachen, daß der Schönheitsbegriff des Mathematikers natürlich ein ganz besonderer, eben mathematischer Schönheitsbegriff ist [. . .].“ (Krull, 1930, S. 215)

Durch die im Ansatz angelegte Breite wird der Facettenreichtum der einzelnen Eigenschaften, aber auch des Konstrukts mathematischer Schönheit selbst deutlich. Dies wird nochmals durch die Tatsache verstärkt, dass unterschiedliche Autoren je unterschiedliche Schwerpunkte auf einzelne Eigenschaftsbereiche legen oder bestimmte Querverbindungen besonders hervorheben. Dies wiederum deutet darauf hin, dass die Rede nicht von dem einen Schönheitsbegriff der Mathematiker sein kann, sondern eher eine *Vielzahl von Schönheitsbegriffen* zu denken ist. Dennoch kann ein Großteil der Ansätze zum Thema innerhalb der hier explizierten vier Eigenschaftskomplexe vollständig aufgehen. Dies spricht für die zunächst aus einem einzelnen Begründungsversuch – der Auflistung Hardys – extrahierte Wahl der relevanten Eigenschaften, auch oder gerade weil sie teilweise widerstreitende Interessen darstellen können.[34]

All die Schönheitsbegriffe können im aufgespannten Panorama also nur gefasst werden, wenn die beschriebenen Schönheitskriterien in der dargestellten Breite verstanden werden. Es muss folglich immer die Rede von *Eigenschaftskomplexen* sein, die zur mathematischen Schönheit beitragen. Auch sind die aufgezeigten Querverbindungen und die fehlende Trennschärfe zwischen diesen Eigenschaftskomplexen, aber auch innerhalb der Facetten jedes einzelnen Bereichs jeweils mitzudenken.[35]

Durch eine so angelegte Charakterisierung mathematischer Schönheit kann das Konstrukt zunächst inhaltlich zumindest teilweise und vorläufig offengelegt werden. Gleichzeitig wird aber auch die Unzulänglichkeit der verwendeten Begrifflichkeit deutlich. Weiter entsteht durch dieses Vorgehen erst die Möglichkeit, eine spezifizierte mathematikästhetische Perspektive einzunehmen und auf diese Weise sonst evtl. verborgene Bereiche der mathematischen Praxis sichtbar zu machen. Dabei muss es ein Ziel der weiteren Arbeit bleiben, das oben Beschriebene pointierter fassbar, systematisierbarer und beurteilbarer zu machen.
Eines folgt aus dem hier vorgeschlagenen Vorgehen sicher: Der eingangs zitierten Vermutung Hardys muss zugestimmt werden – „It *is* very hard to define mathematical beauty". Die ästhetischen Werturteile innerhalb der Mathematik spannen ein schillerndes, facettenreiches Feld auf. Wie für alle zentralen Begriffe der Ästhetik ist es in der Tat sehr schwierig oder gar unmöglich, eine vollständige Begriffsklärung für mathematische Schönheit zu geben.

[34] Dennoch kann naturgemäß kein Anspruch auf vollständiges inhaltliches Erfassen aller denkbarer Ansätze erhoben werden.

[35] Dies führt u.a. dazu, dass die Unterscheidung der vier Bereiche zunächst künstlich erscheinen mag. Wenn im Folgenden aber der Frage nach der Rechtfertigung gestellt wird, einen solchen Schönheitsbegriff als ästhetische Kategorie zu verstehen, so wird sich herausstellen, dass die Unterscheidung nicht nur der besseren Beschreibbarkeit geschuldet ist.

Kapitel 3

Ein Streifzug durch die Geschichte der Mathematikästhetik

Schönheitsurteile über die Mathematik scheinen eine Konstante in der abendländischen Geschichte der Mathematik mindestens seit der griechischen Antike zu sein. Dies jedenfalls legen Arbeiten nahe, die, etwa um die Beschäftigung mit Mathematikästhetik zu rechtfertigen, Aristoteles, Gauß und Hardy in einem Atemzug zitieren. In der Tat: Die Geschichte hält prominente Zeugen bereit, die die Schönheit mathematischer Gegenstände behaupten. Jedoch stellt sich angesichts des jeweils unterschiedlichen historischen Hintergrundes die Frage, inwiefern diese Aussagen vergleichbar sind, also etwa über dieselbe Art mathematischer Schönheit reden, wie sie in Kapitel 2 herausgearbeitet wurde.

Im Rahmen einer systematischen Arbeit wie der hier vorliegenden kann und soll diese Frage nicht durch den Versuch einer umfassenden, chronologischen „Geschichte der mathematischen Schönheit“ beantwortet werden. Auch erhebt die präsentierte Auswahl keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Dennoch scheint der vertiefte Blick an ausgewählten Stellen in die historische Entwicklung angebracht, um einerseits ihren Wert für die aktuelle Diskussion und ihre Beziehung zu aktuellen Begriffen mathematischer Schönheit einschätzbar zu machen. Andererseits können so Kontraste und Konstanten benannt werden, die aufzeigen, inwiefern das Ästhetische der Mathematik als historisch tradiertes Konzept gelten kann.

Im Folgenden sollen in diesem Sinne markante Beispiele ausgewählt und dargestellt werden, die den jeweiligen mathematikästhetischen Zeitgeist aufnehmen[1] bzw. ihn nachhaltig prägen[2]. Die behandelten Positionen spiegeln dabei bestimmte Argumentationslinien ihrer Zeit wider, in dem sie sich etwa auf einen typischen allgemeinen Schönheitsbegriff beziehen. Damit ist neben der Tatsache, dass überhaupt die Schönheit von Gegenständen der Mathematik behauptet wird, ein zentrales

[1] Unter diese Kategorie fällt insbesondere Proklos, der die antiken Argumentationsgänge zusammenfasst (vgl. 3.1). Aber auch Hutcheson wird sich als in gewisser Weise typischer Vertreter der beginnenden Aufklärung erweisen (vgl. 3.3).

[2] Hier sind insbesondere Augustinus und Boethius zu nennen, die die antike Tradition aufgreifen und in die christliche Philosophie des Mittelalters einbetten (vgl. 3.2).

Auswahlkriterium dadurch gegeben, dass diese Verbindung begründet wird.
Zeitlich gesehen endet die Darstellung in diesem Kapitel mit der beginnenden Aufklärung. Dies ist der Stellung des historischen Streifzugs innerhalb der Systematik dieser Arbeitet geschuldet: Die vorgestellten Beispiele entstanden vor der kritischen Diskussion mathematikästhetischer Positionen durch Immanuel Kant, wie sie im Kapitel 4 ausführlich behandelt wird. Der historische Überblick über die Geschichte der Mathematikästhetik enthält so gerade solche Positionen, die Kant in der *Kritik der Urteilskraft* aufgreift, um sich von ihnen abzugrenzen und die damit auch für das folgende Kapitel Relevanz besitzen.

Eine umfassende historische Untersuchung der ausgewählten Beispiele würde den Rahmen dieses Kapitels sprengen. Aus dem allgemeinen Interesse dieser Arbeit ergeben sich jedoch drei Fragenkomplexe, die die Untersuchung der historischen Beispiele leiten und gleichzeitig begrenzen können:
Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf dem Schönheitskonzept der mathematischen Praxis. Es ist also jeweils die Frage zu stellen, in welchem *Kontext* und vor welchem Hintergrund die Schönheit der Mathematik postuliert wird. Zentral für diese Arbeit ist weiterhin die Frage nach der Ästhetik der unter Kapitel 1 abgegrenzten „Muster der Mathematiker“. Dies führt bei der Betrachtung der Geschichte einerseits dazu, dass Ansätze, die sich explizit und eindeutig mit einem anderen Gegenstandsbereich beschäftigen, hier nur am Rande Beachtung finden. Dazu zählen auch solche Untersuchungen, die eine umgekehrte Perspektive einnehmen und etwa die historische Relevanz des Mathematischen für die Musik oder die Malerei darstellen. Andererseits müssen die ausgewählten Beispiele daraufhin untersucht werden, welche *mathematischen Gegenstände* jeweils mit ästhetischen Attributen belegt werden. Analog zur Untersuchung aktueller Aussagen unter Kapitel 2 spielt natürlich auch bei den historischen Beispielen die Frage nach der Begründung der ästhetischen Urteile, also nach den *Kriterien* mathematischer Schönheit in der jeweiligen Zeit eine zentrale Rolle.

Die Literaturgrundlage für die anstehenden Untersuchungen der historischen Beispiele bilden in der Hauptsache Arbeiten zur Mathematikgeschichte und zur Geschichte des Schönen allgemein sowie einige wenige Arbeiten, die sich explizit mit historischen Ansätzen zur Mathematikästhetik im Speziellen beschäftigen[3]. Die vielen Arbeiten, die wie oben angedeutet die historischen Aussagen undifferenziert nebeneinander nennen, dienen hier nur als Pool möglicher Beispiele.
Angesichts der sehr dünnen Literaturlage im Bereich geschichtlicher Betrachtungen zur Mathematikästhetik leisten die folgenden Untersuchungen – neben ihrem systematischen Wert im Rahmen dieser Arbeit – einen Beitrag, diese Lücke in der Literatur zu schließen und grenzen sich außerdem von jenen weitgehend unkommentierten Zitatesammlungen ab.

[3] Den einzigen ausführlicheren Versuch eines historischen Überblicks zur Mathematikästhetik liefert meines Wissens Jullien (2008), wobei ihr Fokus auf der Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik liegt. Ein weiterer sehr knapper Überblick mit Schwerpunkt auf der griechischen Antike ist zu finden bei Sinclair und Pimm (2006).

3.1 Mathematische Ästhetik – ästhetische Mathematik in der Antike

In der griechischen Antike können Interdependenzen Mathematik und Schönheit auf unterschiedlichen Ebenen festgemacht werden. Zum einen berufen sich die allgemeinen Schönheitskonzepte auf mathematische Prinzipien, d.h. die angewandten Kriterien sind rational, mathematisch beschreibbar. So wird die Kenntnis der Mathematik zur Voraussetzung für die Erkenntnis des Schönen. Zum anderen wird dieses Schönheitsideal auf die Mathematik selbst angewandt. Dabei werden etwa regelmäßige geometrische Körper oder Proportionen, aber nicht zuletzt auch die Mathematik als Ganze zum Paradebeispiel höchster Schönheit.
Dies soll im Folgenden an einigen prominenten, auch im Rahmen der Mathematikästhetik häufig zitierten Positionen der antiken Philosophie herausgearbeitet werden. Mit den Pythagoreern, Platon und Aristoteles werden dabei zunächst solche Autoren in den Blick genommen, die sich im Rahmen allgemeiner Aussagen über das Schöne auch über die Schönheit der Mathematik äußern, um dann Proklos Diadochus und seine mathematikästhetische Argumentation vor dem Hintergrund dezidiert mathematikphilosophischer Überlegungen ins Zentrum zu rücken. Indem dieser spätantike Gelehrte auf die im ersten Teil referierten Ansätze zurückgreift, können seine Äußerungen gleichzeitig als Rückschau und Zusammenfassung antiker Positionen gesehen werden.

3.1.1 Mathematisch beschreibbare Schönheit

Bereits im Denken der Pythagoreer sind mathematische und ästhetische Elemente eng miteinander verwoben. Die Grundlage bildet die Pythagoreische Vorstellung, alles Reale und für den Menschen Zugängliche bestehe aus den gleichen Elementen wie die Zahlen, wie es hier von Philolaos (ca. 470-399 v.Chr.) zusammengefasst wird:

> „Und wirklich hat alles, was erkannt wird, Zahl. Denn es ist unmöglich, daß ohne diese irgend etwas im Denken erfaßt oder erkannt wird.“ (Philolaos, zitiert nach Eco (2004) S. 62)

Aus dieser Grundannahme entsteht ein quantifizierbarer Schönheitsbegriff, der sich durch die Elemente Ordnung, Symmetrie und Harmonie auszeichnet (vgl. Most, 1992, S. 1343). Tartakievic fasst diesen für die gesamte Antike prägenden Ansatz der Pythagoreer wie folgt zusammen:

> „Sie behaupteten [...] die Harmonie sei eine quantitative, mathematische Anordnung, die von Zahl, Maß und Proportion abhänge. Diese

> These war das eigentliche pythagoreische Motiv, das aus ihrer mathematischen Philosophie hervorging und sich auf ihre akustischen Entdeckungen stützte. Es war ein Motiv ihrer Kosmologie, das sie in ihre Ästhetik übernahmen.“ (Tatarkiewicz, 1979, S. 106)

Somit wird zum einen die Schönheit der Welt mathematisch beschreibbar. Die Pythagoreer sahen in „mathematischer Regelmäßigkeit eine Garantie für Harmonie“ (ebd.), d.h. die Kriterien für Schönheit überhaupt sind mathematische. Zum anderen führt dies nach Sinclair und Pimm dazu, dass die Pythagoreer in der Mathematik selbst die höchste Schönheit sahen:

> „In fact, the Pythagoreans were overwhelmed by the aesthetic appeal of the theorems they discovered and were perennially preoccupied with the interconnectedness permeated their worldview [...].“ (Sinclair und Pimm, 2006, S. 4)

Inwiefern dies in Gänze haltbar ist, kann hier nicht geklärt werden. So wird häufig der hohe Stellenwert betont, den auch die Mathematik als solche für die Pyhtagoreer hatte. Allerdings wird dies im Allgemeinen mit der „Alles-ist-Zahl“-Vorstellung und dem Hinweis auf die Ausführungen des Aristoteles begründet. Dieser schreibt in seiner *Metaphysik*, die Pythagoreer beschäftigten sich „als erste mit der Mathematik, bauten sie weiter aus und waren, da sie sich mit ihr sehr auseinandergesetzt hatten, der Meinung, daß in ihren Prinzipien die Prinzipien der Dinge gelegen seien“ (Aristoteles, Metaphysik, 985b). Auch kann die oben beschriebene Anwendung der Mathematik zur Erkenntnis des Ästhetischen und durch den mathematischen Schönheitsbegriff als sicher angenommen werden. Eine Anwendung eines solchen Schönheitsbegriffs auf Mathematisches durch die Pythagoreer wird allerdings nur in der hier zitierten Stelle behauptet. In der Folgezeit jedoch können auch Quellen für eine solche genuin mathematikästhetische Betrachtung angegeben werden.

In der platonischen Philosophie ist beispielsweise eine direkte Verbindung zwischen Mathematik und Schönheit deutlich zu erkennen, was insbesondere im Schönheitsverständnis Platons (428/427-348/347 v.Chr.) begründet liegt. So rekuriert er zur Definition dessen, was Schönheit ist, etwa in seiner Staatsutopie *Politeia* auf seine Ideenlehre:

> „ ‚Wir sprechen doch von vielen Einzeldingen, die schön oder gut sind oder sonst von jederlei Art, und unterscheiden sie auch in unserer Rede‘– ‚Ja‘– ‚Und ebenso sprechen wir von dem Schönen und Guten an sich, und so setzen wir bei allem anderen, wo wir Einzeldinge annehmen, eine einzige Idee für jedes an und bezeichnen die Dinge nach ihrer Idee.‘– ‚So ist es! ‘– ‚Die Einzeldinge kann man sehen, aber nicht denken, die Ideen jedoch denken, aber nicht sehen.‘“ (Platon, Politeia, 507b)[4]

[4]Hier und im Folgenden werden die Schriften Platons nach der Paginierung der Stephanus-Ausgabe zitiert.

Der Begriff der Schönheit verbindet also alle schön genannten „Einzeldinge“. Damit kann nicht nur ein Kunstwerk schön sein, sondern auch ein Mensch oder die menschliche Seele. Außerdem kann die Idee des Schönen als Kriterium für Schönheit gebraucht werden: Je näher etwas der Idee kommt, desto schöner ist es. Platon hebt damit das Schöne aus der sinnlich wahrnehmbaren Erfahrung in die geistige Welt. Die Schönheit ist nicht in der Reaktion der Menschen auf diese Dinge begründet. Damit prägt Platon einen objektiven Schönheitsbegriff, der so auch mit der Auffassung der Phytagoreer vereinbar ist, da sie über die Beschreibung des Schönen durch Zahlen und Proportionen ebenfalls einen rein geistigen Maßstab setzten.
Anders als die Pythagoreer sieht Platon jedoch die Schönheit unabhängig von den schönen Gegenständen eben als eigenständige „Idee des Schönen“. Dennoch schlägt sich der objektive Charakter wiederum in Kriterien wie Ordnung, Maß und Symmetrie nieder (vgl. Most, 1992, S. 1346). So setzt er im Dialog *Philebos* eben diese Eigenschaften als Grundlage der Schönheit ganz selbstverständlich voraus:

> Denn Maß und Verhältnismäßigkeit wird uns doch überall offenbar Schönheit und Tugend.“ (Platon, Philebos, 64e)

Auch für die Erscheinungen der Umwelt ist die Nähe zur Idee des Schönen an eine gewisse Proportionalität gebunden:

> „Das schönste aller Bänder ist nun das, welches das Verbundene und sich selbst soviel wie möglich zu einem macht; das aber vermag seiner Natur nach am besten ein gegenseitiges Zahlenverhältnis zu bewirken.“ (Platon, Timaios, 31c)

Im *Philebos* lässt Platon durch Sokrates dem Dialogpartner außerdem erläutern, dass geometrische Formen diesem Ideal näher stehen als die bloß nachahmende Kunst:

> „Ich versuche also als Schönheit der Gestalten dir nicht, was wohl die meisten glauben möchten, zu erklären, etwa die der lebenden Körper oder die gewisser Gemälde; sondern ich nennen etwas gerade, sagt meine Erklärung und etwas rund, und aus diesen wiederum die Flächen und Körper, welche gedreht werden oder durch Richtschnur und Winkelmaß bestimmt, wenn du mich verstehst. Denn diese, sage ich, sind nicht in Beziehung auf etwas schön wie anderes, sondern immer an und für sich sind sie ihrer Natur nach schön und haben eine eigentümliche Lust [...].“ (Platon, Philebos, 51b f.)

Die aus der Geometrie entstandenen Gebilde sind also nicht eben deshalb schön, weil sie etwas Schönes der Natur darstellen, wie dies die Kunst tut, sondern deshalb, weil sie selbst der Idee des Schönen nahe stehen. So ist es außerdem nicht erstaunlich, dass Platon im *Timaios* die Elemente – Feuer, Luft, Wasser und Erde

– den regelmäßigen Körpern – Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Würfel – zuordnet. Interessanter ist hier die Tatsache, dass er die Wahl dieser Körper auf ihre ausgezeichnete Schönheit stützt:

> „Denn das werden wir niemandem einräumen, daß es, wenn jeder von diesen Körpern als eine eigene Gattung besteht, schönere sichtbare gebe als sie. Dahin also müssen wir streben, die durch ihre Schönheit ausgezeichneten vier Gattungen der Körper zusammenzufügen, dann können wir behaupten, daß wir ihre Natur zur Genüge erfaßten.“
> (Platon, Timaios, 53e)

Die Schönheit der Körper leitet Platon in der Folge aus der Schönheit der Dreiecke her, aus denen sich ihre Seitenflächen zusammensetzen lassen. Da sich jede Fläche in Dreiecke und jedes Dreieck in zwei rechtwinklige aufteilen lässt, muss er dazu entscheiden, welche der rechtwinkligen Dreiecke die schönsten sind, dabei kommt er leider ohne weitere Begründung – „weshalb, das erheischt eine ausführlichere Darlegung“ (Platon, Timaios, 54a) – zu folgendem Schluss:

> „Zwei Dreiecken sei denn der Vorzug zuerkannt aus welchen die Körper des Feuers und der übrigen Grundstoffe zusammengefügt sind, dem gleichschenkligen und demjenigen, in welchem stets das Quadrat der größeren Seite das dreifache des der kleineren ist.“ (Platon, Timaios, 54b)

Neben dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck zählt er also solche rechtwinkligen Dreiecke zu den schönsten, deren Hypothenuse doppelt so lang ist wie die kürzere Kathete. Sechs solcher Dreiecke setzt er zusammen und erhält so ein gleichseitiges.[5] Aus diesen zwei Arten von besonders schönen „Grunddreiecken“ (Platon, Timaios, 55a) können nun alle Seitenflächen der regulären Körper zusammengesetzt werden.[6]

Aus heutiger Sicht wendet Caroline Jullien ein, dass die ontologische Nähe der mathematischen Ideen zur Idee des Schönen nach Platon keine Aussagen über ästhetische Qualitäten der mathematischen Gegenstände an sich zuließen, sondern lediglich etwas über die Stellung der Mathematik in der platonischen Ideenwelt (vgl. Jullien, 2008, S. 23) aussagten. *Innerhalb* des platonischen Konzeptes kann diese Unterscheidung aber nicht getroffen werden. Vielmehr wird für Platon durch

---

[5] Vgl. auch vgl. auch Beschreibung und Abbildung in Brisson (1996), S. 237 bzw. 248. Interessanterweise nutzt Platon hier nicht die Möglichkeit aus nur zwei solchen Dreiecken – zusammengesetzt an der längeren Kathete – ein gleichseitiges zu erzeugen, sondern wählt eine relativ aufwändige Methode, in dem er je zwei der auserkorenen Dreiecke an der Hypothenuse zusammenstoßen lässt, um dann drei solcher Drachenvierecke so zusammen zu setzen, dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen Seiten je doppelt so lang sind, wie die längere Kathete des ursprünglichen Dreiecks (vgl. Platon, Timaios, 54d f.).

[6] Tartarkiewicz weist darauf hin, dass aufgrund der Autorität Platons diese Dreiecke auch weit über seine Zeit hinaus als Grundformen der Architektur verwendet wurden (vgl. Tatarkiewicz, 1979, S. 146).

die Beschäftigung mit dem Mathematischen gerade die Schau der Idee des Schönen ermöglicht, was Platon wiederum berechtigt, wie im obigen Zitat geschehen, davon zu sprechen, dass geometrische Formen schön *sind*.
Dies hat praktische Konsequenzen: So wird beispielsweise in Platons Idealstaat die Mathematik nicht zuletzt auf Grund ihrer Nähe zur Idee des Schönen Teil der Ausbildung von Wächtern und Philosophen (vgl. etwa Platon, Politeia, 522 ff.). Durch die Nähe der Schönheitskriterien zur Tugend folgt auch die Aufgabe schöner Dinge, zum tugendhaften Leben zu führen. Das bedeutet Platon folgend wiederum, dass die Mathematik dies besser leisten kann als die mimetische Kunst (vgl. Eco, 2004, S. 50). So erhält die Mathematik insbesondere in Form von Harmonielehre, Geometrie und Astronomie einen Platz im Bereich der ästhetischen Bildung (vgl. Spies, 2005, S. 24). Dennoch macht Julliens Einwand deutlich, dass sich die platonische Begründung für die Schönheit der Mathematik stark von bestimmten zeitgenössischen Positionen unterscheidet.[7]

Um die mathematikästhetischen Bestrebungen bereits bei den großen Denkern der Antike zu belegen, wird neben den besprochenen Äußerungen Platons häufig auch auf Aristoteles (384–322 v.Chr.) hingewiesen, und hier insbesondere auf einen Hinweis im Rahmen seiner *Metaphysik*:

> „[...] so befinden sich diejenigen im Irrtum, die behaupten, die mathematische Wissenschaft spräche nicht vom Schönen oder Guten. [...] Die hauptsächlichsten Arten des Schönen sind Ordnung, Gleichmaß und das Begrenzte; all das beweisen am meisten die mathematischen Wissenschaften.“ (Aristoteles, Metaphysik, 1078a)

Anders als bei Platon steht im Zentrum der Aristotelischen Schriften zu ästhetischen Themen die Kunsttheorie. So gilt seine *Poetik* als erste erhaltene Arbeit, die sich systematisch mit einer Kunstform befasst. Dennoch äußert er sich immer wieder auch zur Natur des Schönen und zu den Eigenschaften schöner Dinge. Hier reiht sich auch das obige Zitat ein. (Vgl. Tatarkiewicz, 1979, S. 168)
In der zitierten Stelle aus dem Kapitel über *Die Mathematik und ihre Objekte* widerspricht Aristoteles nun jenen, die den Bezug des Schönen (und des Guten) zur Mathematik verneinen.[8] Er betont dabei, dass in der Mathematik zwar das Schöne nicht explizit thematisiert würde, jedoch die der Schönheit zugrunde liegenden

[7] Dem entgegen stehen in gewissem Sinn die Vertreter der Konkreten Kunst. Hier weisen Gregor Nickel und Michael Rottmann eine der platonischen sehr nahestehende Argumentation für die direkte künstlerische Verarbeitung mathematischer Ideen ohne den Umweg über die Darstellung der realen Welt nach (vgl. Nickel und Rottmann, 2006, S. 155ff).

[8] Dies könnte einer Anmerkung des Übersetzers Franz F. Schwarz zu Folge eine Replik auf Aristipp sein, dessen Mathematikauffassung Aristoteles auch an früherer Stelle bereits ähnlich kritisiert: „Deshalb schmähten auch einige Sophisten, wie etwa Aristipp, die Mathematik; denn – so meinten sie – bei den anderen Künsten [...] sei stets die Rede davon, ob etwas besser sei oder schlechter, doch die Mathematik kümmere sich überhaupt nicht um Gutes und Schlechtes.“ (Aristoteles, Metaphysik, 996a)

Prinzipien behandelt und sogar bewiesen würden.[9] Die angeführten Eigenschaften schöner Dinge Ordnung und Gleichmaß erinnern an den durch die Pythagoreer geprägten klassischen Schönheitsbegriff. Auch folgt er der klassischen Argumentation und ordnet die Behandlung dieser Kriterien den mathematischen Wissenschaften zu. Die dritte der genannten Eigenschaften, die Begrenztheit, nimmt nach Tartarkiewicz eine Sonderstellung ein. Dieses Kriterium verweist darauf, dass schöne Dinge für die Sinne bzw. für den Geist erfassbar sein müssen:

> „Er [Aristoteles] teilte zwar die Ansicht seiner Landsleute, dass die Schönheit von der Proportion, der Ordnung und dem wohlgelungenen Gefüge abhänge, aber er fügte ein weiteres Kriterium hinzu: die Erfassbarkeit, die Möglichkeit einen schönen Gegenstand mit dem Blick oder Gedächtnis zu umfassen. Damit trug er einen subjektiven Faktor in die Betrachtung des Schönen hinein.“ (Tatarkiewicz, 1979, S. 189)

Warum Aristoteles aber auch das Begrenzte zu den Eigenschaften zählt, von denen die Mathematik in besonderer Weise handelt, ist bei dieser Deutung des Begriffs unklar.[10] Mindestens zeigt sich, dass bei Aristoteles der klassische Schluss von (rein) mathematischen Schönheitskriterien auf den ästhetischen Wert der Mathematik nicht so unmittelbar auf der Hand liegt, wie bei den Pythagoreern. Leider löst Aristoteles die Ankündigung, „deutlicher [...] darüber noch an anderer Stelle sprechen“ (Aristoteles, Metaphysik, 1078b) zu wollen, nicht ein[11].

3.1.2 Proklos – Eine Zusammenfassung der antiken Sicht

Der spätantike Philosoph Proklos (410/12 – 485) kam während seines Studiums in Alexandria, u.a. bei Olympiodorus und Heron, sowohl in ersten Kontakt mit der Philosophie des Platon und des Aristoteles als auch mit der Mathematik und Physik seiner Zeit. Diese Studien intensivierte er später als Mitglied der platonischen Akademie, deren Vorsteher er später wurde.[12] Unter seinen Lehrern Plutarch und Syrianus begann Proklos in Athen die Arbeit an Kommentaren zu philosophischen und theologischen aber auch zu mathematischen Werken seiner Vorgänger. (Vgl. Morrow, 1970, S. xxxixff)
Erhalten und viel beachtet ist darunter Proklos' Kommentar zu den *Elementen* des Euklid, in denen er sowohl mathematisches Verständnis beweist als auch Hinweise

[9] „Denn wenn sie auch das Schöne und Gute nicht nennen, doch deren Werke und Verhältnisse beweisen, so bedeutet das nicht, daß sie davon nicht sprächen.“ (Aristoteles, Metaphysik, 1078a)

[10] Eine ähnliche gefasste Eigenschaft findet sich auch, wie in Kapitel 2 beschriebenen, als Facette des Schönheitsbegriffs der Mathematiker im Kriterium der Subjektiven Zugänglichkeit wieder (vgl. 2.2.1).

[11] Mindestens ist ein solcher Hinweis nicht erhalten (vgl. die Anmerkung von Schwarz in Aristoteles, Metaphysik, S. 403).

[12] Daher auch der Namenszusatz „Diadochus“.

für seine Studenten sowie seine eigene neuplatonische/neuphytagoreische Mathematikphilosophie unterbringt:

> „Proclus was a competent mathematician but he could not regard mathematics as a self-enclosed field, without implications for the cosmic philosophy that he espoused. [...] Proclus regarded mathematics as a handmaid to philosophy.“ (Morrow, 1970, S. li)

Ein tiefgehendes Verständnis der Inhalte und Kenntnis der Rezeptionsgeschichte beweist er an vielen Stellen, an denen er das Vorgehen Euklids kritisiert und etwa eigene Beweisansätze liefert, bzw. auf vorhergehende Euklidkommentare eingeht.[13] Dabei setzt er sich u.a. intensiv mit Fragen rund um das Parallelenpostulat auseinander.

Prokolos greift außerdem antike Argumentationslinien zur Mathematikphilosophie und auch speziell zur Schönheit der Mathematik auf und liefert eine kommentierte systematische Zusammenfassung. Die folgende Argumentation findet sich im *Prolog* seines Euklid-Kommentars[14] und zieht explizit die aristotelischen Schönheitskriterien heran:

> „To those who sax these things we can reply by exhibiting the beauty of mathematics on the principles by which Aristotle attempts to persuade us. Three things, he says, are especially conductive to beauty of body or soul: order, symmetry, and definiteness. [...] These characters we find preeminently in mathematical science.“ (Proclus, Commentary, IX., 26)

Dieses Zitat steht im Kapitel IX. des ersten Teils des Prologs, das Morrow als Übersetzter mit *An Answer to the Detractors of Mathematics* überschreibt. Proklos stellt Einwänden seiner Zeitgenossen, die der Mathematik ihren Stellenwert absprechen wollen, indem sie ihre Verbindung mit dem Guten und Schönen generell verneinen, zunächst die Autorität des Aristoteles entgegen. Bezogen auf die Kriterien für Schönheit im Allgemeinen führt Proklos so die oben beschriebene antike Tradition fort. Ein als schön erkannter Gegenstand zeichnet sich durch *Ordnung, Symmetrie und klare Bestimmtheit* (vgl. Proklus, Kommentar, S. 181) aus. Diese Kriterien erfüllen die mathematischen Gegenstände in besonderer Weise und werden so auch für Proklos zu Beispielen besonderer Schönheit. Dabei ist das Mathematische *allgemein* Gegenstand der ästhetischen Betrachtung.

Anders als seine antiken Vorbilder, die diesen Zusammenhang im Kontext allgemeiner philosophischer Betrachtungen darlegen, erlaubt es der mathematikphilosophische Kontext des *Prologs*, die Schönheitsbehauptungen an Beispielen aus

[13] Verschiedene Beispielen für dieses Vorgehen des Proklos finden sich unter (Morrow, 1970, S. liff).

[14] Die Übersetzung des Euklid-Kommentars von Morrow gilt als eine der genausten, so dass im Folgenden in der Hauptsache auf diese zurückgegriffen wird. Zitate und Übertragungen ins Deutsche beziehen sich auf die von Steck herausgegebene deutsche Übersetzung von Schönberger.

der Mathematik weiter auszuführen. Als Beispiele für die besondere Ordnung der Mathematik führt Proklos den Aufbau mathematischer Argumentationen an: Es werde klar zwischen Voraussetzungen und Folgerungen unterschieden, komplexe Theoreme und Aussagen folgen aus einfachen und sind immer wieder auf diese zurückführbar. Symmetrie sieht er in der Übereinstimmung der Beweise untereinander „and in their common reference back to Nous“ (Proclus, Commentary, IX., 27). Die Bestimmtheit zeigt sich dagegen in der Mathematik durch die Unveränderlichkeit und Sicherheit mathematischer Ideen. (Vgl. Proclus, Commentary, IX., 26f) Aus diesen Einzelbetrachtungen der Schönheitscharakteristika bekräftigt er erneut den Schluss auf die Schönheit der Mathematik:

> „If, then, these are the factors especially productive of beauty, and mathematics is characterized by them, it is clear that there is beauty in it.“ (Proclus, Commentary, IX., 27)

Mit dem Postulat, die Mathematik erfülle die Aristotelischen Schönheitskriterien im Besonderen, stellt sich Proklos auch denjenigen Zeitgenossen entgegen, denen „auf die Sinnenwelt gerichtete Erfahrungswissenschaften [...] nützlicher [erscheinen] als ihre generellen Theoreme. [Für sie] sei die Erdmessung (Geodäsie) nützlicher als die Geometrie, die Arithmetik des gemeinen Volkes nützlicher als die auf (abstrakte) Lehrsätze gegründete, und die seemännische Sternkunde (Nautik) sei nützlicher als die allgemeine (Astronomie)“ (Proklus, Kommentar, S. 181).[15] Er verweist darauf, dass die Mathematik die Anwendbarkeit nicht brauche, sondern vielmehr eine Berechtigung um ihrer selbst willen habe. Statt die allgemeinen Theoreme der Mathematik aufgrund ihrer vordergründigen Nutzlosigkeit abzuwerten, sollten sie gerade deshalb besonders geschätzt werden. (Vgl. Proclus, Commentary, IX., 28f.) Den Kritikern wirft er aber nicht nur eine verdrehte Sicht auf die Wertigkeit der Mathematik vor, sondern zweifelt auch an ihrem Geschmack:

> „So those who despise mathematical knowledge are they that have no taste of the pleasures it affords.“ (Proclus, Commentary, IX., 28)

3.2 Zahl und Proportion in der christlichen Philosophie des Mittelalters

Der auf mathematisch-rationalen Kriterien beruhende antike Schönheitsbegriff hatte auch in der Folge Bestand. Dies ist insbesondere auf den Einfluss der Schriften des Augustinus (354 - 430) und des Boethius (um 480 - 525) nicht nur auf die

[15] Dies ist insbesondere deshalb interessant, weil es dem Ansatz von Mathematikern des 20. Jahrhunderts nahe kommt. So widerspricht z.B. auch Hardy niemandem, der die Anwendbarkeit, der von ihm bearbeiteten Mathematik anzweifelt und geht auf solche Zweifler nur am Rande ein, betont aber anderseits die Ästhetik und den Kunstcharakter seiner Wissenschaft (Hardy, 1940, vgl.).

mittelalterliche Ästhetik zurückzuführen. Beide können als Gelehrte an der Schwelle zum Mittelalter gesehen werden, die einerseits über eine ausreichende Bildung verfügten, um die Werke antiker Philosophen zu studieren und andererseits den christlichen Glauben angenommen hatten und somit beides in ihrer eigenen Philosophie verbinden konnten. Ihre Ausführungen waren prägend für die mittelalterliche Ästhetik und auch den mathematischen Kanon. So schreibt Tatarkiewicz in seiner *Geschichte der Ästhetik* über die Rolle des Boethius und des Augustinus:

> „[Boethius] gab das Prinzip der Hauptströmungen der antiken Ästhetik an das Mittelalter weiter. Dieses Verdienst teilt er mit Augustinus, der ebenfalls das Schöne als das Verhältnis der Teile betrachtete: während jedoch dieser das Verhältnis eher als qualitativ auffasste, vermittelte Boethius das pythagoreische Prinzip in der radikalen quantitativen mathematischen Gestalt.“ (Tatarkiewicz, 1980, S. 96)

Obgleich also sowohl Augustinus als auch später Boethius die tradierte, auf mathematischen Prinzipien beruhende Sichtweise auf das Schöne beibehielten, scheint ihnen die antike Bewunderung für die Mathematik als Wissenschaft mindestens um ihrer Schönheit Willen eher fern zu liegen. Sinclair und Pimm zitieren gar die Warnung der Christenheit vor den Mathematikern in Augustinus' *De Genesi ad Litteram*, um die nicht vorhandene mathematikästhetische Bedeutung des Mittelalters zu dokumentieren (vgl. Sinclair und Pimm, 2006, S. 4f).[16] Im Folgenden soll diese Diskrepanz vor der Frage, ob und inwiefern der Mathematik im Mittelalter ein ästhetischer Wert beigemessen wurde, beleuchtet werden. Dazu wird zunächst ausführlich Augustinus als frühmittelalterlicher Vordenker und Wegbereiter eines qualitativ-mathematischen Schönheitsbegriffs untersucht. Im Anschluss wird Boethius als Vertreter einer der antiken Auffassung noch näher stehenden eher quantitativ-mathematischen Ästhetik in den Blick genommen.[17]

3.2.1 Augustinus – Qualitativ-mathematische Schönheit

> „Er übernahm die ästhetischen Prinzipien der Alten, aber er wandelte sie um, und in dieser umgewandelten Gestalt übermachte er sie dem Mittelalter. Er ist ein Knotenpunkt in der Geschichte der Ästhetik: in ihm laufen alle Linien der alten Ästhetik zusammen, und von ihm gehen jene der mittelalterlichen aus.“ (Tatarkiewicz, 1980, S. 59)

[16] „Hence the good Christian should beware of mathematicians and all those who make empty prophecies, especially when they tell the truth, for fear of leading his soul into error by consorting with demons.“ (De Genesi ad Litteram, Buch II, 23, zitiert nach (Sinclair und Pimm, 2006, S. 5)). Ob dieser Ausspruch einen tragfähigen Einwand darstellt bleibt zu klären, insbesondere da im Mittelalter der Begriff Mathematiker – gemeint waren häufig ausschließlich die Astrologen – anders verwendet wurde.

[17] Dabei werden ihre Ausführungen zur Ästhetik nur soweit dargestellt, wie es im Rahmen dieses historischen Exkurses notwendig und möglich ist.

Die augustinische Rolle für die mittelalterliche Ästhetik kann Tartakiewicz folgend nicht hoch genug eingeschätzt werden. Er war nicht nur ein Vordenker für das frühe Mittelalter, seine weltanschaulichen und ästhetischen Gedanken sollten vielmehr lange Zeit die leitenden der westlich-christlichen Welt sein und „ein Jahrtausend die ästhetische Autorität der christlichen Ästhetik“ (Zirfas, 2009, S. 187) bilden. Als Sohn eines heidnisch-römischen Verwaltungsangestellten und einer Christin genoss er eine klassische Rhetorikausbildung aber auch die christliche Erziehung im Elternhaus, obgleich er sich selbst erst später dem Christentum anschloss. 33jährig getauft gründete er zunächst ein Kloster und wurde 395 Bischof von Hippo Regio. Er gilt als einer der Kirchenväter, und seine Gedanken hatten entsprechenden Einfluss auf das lateinisch-christliche Mittelalter. (Vgl. Zirfas, 2009, S. 188ff)

Das einzige Werk des Augustinus, das explizit die Ästhetik bzw. die Schönheit zum Gegenstand hatte (*De pulchro et apo*), ging bereits zu seinen Lebzeiten verloren. Dennoch können seine Ansichten zum Schönen und den Künsten rekonstruiert werden, da er sie auch in anderen Zusammenhängen immer wieder ausführt, obgleich lediglich seine Ausführungen zur Musik (*de musica*) einen genuin ästhetischen Gegenstand behandeln.(Vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 59)
Augustinus übernimmt von den Neuplatonikern einen objektiven Schönheitsbegriff. So stellt er in *De vera religione* „ohne Zweifel“ fest, dass die Schönheit eine Eigenschaft der Dinge sei. Sie kann nicht durch das Vergnügen des betrachtenden Subjekts begründet werden, sondern „man habe deshalb Freude an ihnen, weil sie schön seien“ (Augustinus, De vera religione XXXII, 59. Zitiert nach Tatarkiewicz (1980) S. 73). Diese Objektivität beruht auf den Zahlen und ihren Verhältnissen als Grundlage des Schönen:

> „Von hier schritt die Vernunft weiter zu den Kräften der Augen, und während sie Erde und Himmel betrachtete, fühlte sie, daß ihr nur die Schönheit gefiel, und in der Schönheit die Formen, in den Formen die Maße[18] und in den Maßen die Zahlen.“ (Augustinus, De ordine, XLII, S. 75)

Es ist also nicht der sinnliche Eindruck direkt, der gefällt, sondern die hinterliegenden ordnenden mathematischen Prinzipien. Dazu zählen nicht nur Maße und Proportionen, also Zahlverhältnisse, sondern auch im Speziellen die zahlenmäßige Gleichheit sowie durch Zahlen darstellbare Eigenschaften, wie etwa der Rhythmus. Im vierten Buch seiner Arbeit über die Ordnung weist Augustinus darüber hinaus dem vernunftmäßigen Erkennen dieser Schönheitskriterien die später zum Quadrivium zählenden Wissenschaften zu (vgl. Augustinus, De ordine, S. 73ff): Um die Schönheit des Gehörten durch die Vernunft grundzulegen, also zur Behandlung von Harmonie und Rhythmus, bedarf es der Musiklehre. Die Untersuchung der Schönheit sichtbarer „Linien und Rundungen, Gestalten und Formen“ weist er der

[18] Tatarkiewicz übersetzt hier statt „Maße“ mit „Proportionen“ (vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 74).

Geometrie zu und das Aufdecken von „Maß und Zahl als beherrschende Kräfte“ (Augustinus, De ordine, XLII, S. 75) der Himmelsbewegungen der Astronomie.[19]

Das obige Zitat verweist weiter darauf, dass zwischen der wahrnehmbaren Schönheit und der Schönheit der Seelen unterschieden werden muss, welche wiederum nur durch den Geist zu erkennen ist. Dieses geistig Schöne macht die Schönheit der Welt im eigentlichen Sinne aus. Durch sie hindurch ist die oberste Schönheit, die Schönheit Gottes zu sehen. (Vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 66f) Aus dieser Hierarchie des Schönen zieht Augustinus außerdem den Schluss, dass die Prüfung der Schönheitsprinzipien und damit das eigentliche ästhetische Urteil der Vernunft obliegen muss. Begründet wird dies beispielsweise in seinem Werk über die Musik durch die Beobachtung, dass die Sinne, abgelenkt durch einen wahrgenommenen Wohlklang, die Gleichheit zweier Silben vermuten könnten, was sich vernunftmäßig betrachtet als Täuschung herausstellt. Echtes ästhetisches Wohlgefallen darf also nur auf Urteilen der Vernunft beruhen:

> „Daraus folgt für uns die Mahnung, unser Ergötzen nicht über die sinnliche Freude zu beziehen, in der auch die Nachahmung der Gleichheit für schön gilt. Mit den Sinnen können wir die Erfüllung der Gleichheit nicht erfassen; im Gegenteil: wir erfassen wahrscheinlich nur ihre Nichterfüllung, wenn wir auch nicht leugnen können, daß selbst die Nachahmung auf ihre Art und in ihrer Ordnung schön genannt werden kann.“ (Augustinus, De musica, Buch 6, 10. Kapitel, S. 246)

Hier spiegelt sich auch im Rahmen der Ästhetik des Augustinus eine für das gesamte frühe Mittelalter und darüber hinaus[20] prägende Einstellung wieder, die wiederum zu einer speziellen Wertschätzung von Vernunft und Mathematischem führte: Basierend auf dem biblischen Wort „Aber du hast alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet“ (Weisheit 11, 21) werden die Gesetze der Arithmetik zu Wahrheiten, die vom betrachtenden Menschen unabhängig gelten. Außerdem wird ihnen eine übergeordnete Stellung im Rahmen der Vernunftprinzipien eingeräumt. So stellt Augustinus in *de ordine* fest, „daß in der Vernunft das Beste und Mächtigste die Zahlen sind oder aber, daß Vernunft und Zahl dasselbe sind“ (Augustinus, De ordine, XLVIII, S. 75) Auf diese Weise erreicht das mathematische Wissen und damit einhergehend die mathematische Bildung nicht nur bezogen auf ästhetische Werturteile einen Stellenwert. Hein weist jedoch darauf hin, dass immer nur Vernunft und Glaube gemeinsam zur Erkenntnis führen konnten. Außerdem trug diese Funktion mathematischer Gesetzmäßigkeiten zwar zu einer speziellen Wertschätzung insbesondere der Arithmetik bei, aber nicht zu weiterer mathematischer

[19] Interessant ist, dass die Unterscheidung der Wissenschaften auf den unterschiedlichen Sinnen beruht, denen die Gegenstände der jeweiligen Disziplin zugänglich sind. Deutlich wird hier, dass zwar die Vernunft allein Richter über die hinterliegenden (ästhetischen) Prinzipien sein kann, den Sinnen aber mindestens in der Auswahl und Zugänglichkeit der Objekte eine wichtige Rolle zukommt.

[20] Knut Radbruch weist an Fallbeispielen Bedeutung und Auswirkungen des Ordo-Gedankens bis ins 20. Jahrhundert nach (vgl. Radbruch, 1997, S. 218ff).

Forschung und wissenschaftlichem Fortschritt auf diesem Gebiet. Vielmehr stand die „philosophische“ Verwendung nicht zuletzt im Bereich der Zahlenmystik im Vordergrund. (Vgl. Hein, 2010, S. 32ff.)
Dies spiegelt sich auch in der augustinischen Verwendung des Mathematischen im Rahmen seiner Ästhetik wider. So ist sein Schönheitsbegriff, wie eingangs erwähnt, ein qualitativ-mathematischer. Er verweist zwar auf mathematische Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen und Begrifflichkeiten, verwendet diese jedoch zur Beschreibung eines außerhalb der eigentlichen mathematischen Theorie liegenden Phänomenbestandes und bezogen auf einen sehr weitgefassten Eigenschaftsbereich. Dies zeigt sich beispielsweise im Aufspüren des Rhythmus-Kriteriums außerhalb der akustischen Künste, wenn er vom Rhythmus des menschlichen Körpers als Schönheitsmerkmal spricht (vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 62). Eigentlich arithmetische Begriffe werden so nicht zur Quantifizierung, sondern als eine Art Metapher verwendet. Tatarkiewicz führt dies auf den Einfluss und die Stellung der Ästhetik innerhalb der augustinischen christlichen Philosophie zurück:

> „[A]ls Ästhetiker neigte er [Augustinus] zu einem mathematischen Verständnis des Schönen, aber als Christ wollte und konnte er auf eine innere Schönheit nicht verzichten.“ (Tatarkiewicz, 1980, S. 62)

Dennoch diente Augustinus die prinzipiell mögliche quantitativ-mathematische Beschreibbarkeit zur Einordnung der Künste. So stellte er insbesondere die Musik, aber auch die Architektur über Malerei und Bildhauerei, „denn mit der unvollkommenen Nachahmung der sinnlichen Wirklichkeit beschäftigt, operieren [Malerei und Bildhauerei] nicht mit der Zahl und weisen zu wenig Rhythmus auf“ (Tatarkiewicz, 1980, S. 70).

Bisher konnte gezeigt werden, dass aus der antiken Tradition heraus das Mathematische eine zentrale Rolle auch im Rahmen der augustinischen Ästhetik spielt und so, wenn auch in qualitativer Form, in die mittelalterliche Philosophie des Schönen Eingang findet. Die mathematischen, insbesondere arithmetischen Gesetzmäßigkeiten werden zum Kriterium ästhetischer Wertzuschreibungen. Für Augustinus und in seiner Tradition sind schöne Dinge in Kunst und Welt „Muster durch Mathematik“. Für die Mathematikästhetik im Sinne dieser Arbeit stellt sich jedoch die Frage, ob Mathematisches selbst auch Gegenstand ästhetischer Wertzuschreibungen wurde.
Wie bereits angedeutet wird der Mathematik als Wissenschaft kein direkter Platz in der Forschung des Augustinus eingeräumt. So steht zu erwarten, dass er auch in mathematikästhetischer Hinsicht nicht seinen antiken Vorbildern folgt und die Mathematik als solche zum Paradebeispiel des Schönen erhebt.
In *de quantitate animea* jedoch wendet er sein Konzept von Schönheit auf geometrische Formen und die ihnen eigenen mathematischen Gesetzmäßigkeiten an. Mathematisches wird also ohne den Umweg der Anwendung etwa im Rahmen der Architektur zum Gegenstand ästhetischer Werturteile; es wird die Schönheit von „Mustern der Mathematiker“ untersucht. In der Anwendung des Kriteriums

der (zahlenmäßigen) Gleichheit kommt Augustinus dabei zu einer Rangfolge unter verschiedenen einfachen geometrischen Figuren. Eco fasst das Ergebnis wie folgt zusammen:

> „Das gleichseitige Dreieck ist [...] schöner als das ungleichseitige, weil mehr Gleichheit in ihm ist; noch schöner ist das Quadrat, in dem gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüberstehen; am schönsten ist aber der Kreis, bei dem kein Winkel die kontinuierliche Gleichheit des Umfangs unterbricht.“ (Eco, 1991, S. 67)[21]

Im Rahmen einer mathematikästhetischen Untersuchung ist die beschriebene ästhetische Hierarchisierung geometrischer Figuren bereits bemerkenswert. Um dieses frühmittelalterliche mathematikästhetische Verhalten aber einordnen zu können, ist ein detaillierterer Blick auf den augustinischen Begründungszusammenhang notwendig und besonders interessant.[22]

Die Schönheit der geometrischen Figuren wird in *de quantitate animea* im Zusammenhang mit der Frage nach dem Ort der Seele und der Rolle der Vernunft in Dialogform diskutiert. Augustinus schlägt seinem (fiktiven) Dialogpartner Evodius vor „ob es nicht vorzuziehen ist zu glauben, [...] daß die Seele weder lang, noch breit, noch tief ist“ (Augustinus, De quantitate animea, S. 15). Um die Zweifel des Evodius auszuräumen, wird in der Folge das „Unkörperliche“ (Augustinus, De quantitate animea, S. 16) der Begriffe Länge, Breite und Tiefe gezeigt. Ausgehend von der klassischen Definition der Linie als breitenlose Länge wird im siebten Kapitel der Begriff der Figur als ein von Linien umschlossener Raum eingeführt, um schließlich zum unteilbaren Punkt, der weder Länge noch Breite hat, zu gelangen. Auf diesem Weg geht Augustinus auf die für die vorliegende Arbeit besonders interessante Frage ein, welche Figur „als die bessere und schönere“ (Augustinus, De quantitate animea, S. 21) erscheine. Dazu erarbeiten sich die Dialogpartner zunächst die Eigenschaften des Dreiecks, als mit der kleinstnötigen Anzahl an Linien umschlossenen Figur: In ihm ist die Anzahl der umschließenden Linien gleich der Anzahl der Innenwinkel. Außerdem sind alle Winkel dann und nur dann gleich groß, wenn die Seiten gleich lang sind. Das so beschriebene gleichseitige Dreieck stellt somit unter den Dreiecken den größten Grad an Gleichheit dar und wird den anderen vorgezogen. Ungleichheit wird in dieser Figur nun insofern identifiziert, als dass sich mit Winkel und Seite je verschiedene Elemente gegenüber liegen. Diese Gleichheit kann in einer mit vier Linien begrenzten Figur hergestellt werden. Unter allen Vierecken ist nun wieder dasjenige das schönste, dessen Seiten gleichlang und dessen Winkel gleichgroß sind. Über die Figur des Quadrats sagt Augustinus:

[21] Vgl. auch Hein (2010) S. 125 und Zirfas (2009) S. 194. Eco beruft sich außerdem auf Karel Svoboda: *L'estetique de St. Augustin et ses sources*. Paris 1927.

[22] Die folgenden Ausführungen gehen somit über die mir bekannte Sekundärliteratur, die diese Stelle im Rahmen von ästhetik- bzw. mathematikgeschichtlichen Untersuchungen anführt, hinaus.

> „Wie du siehst, herrscht in ihr sowohl die Gleichheit der Linien als auch die der Winkel. Im Gegensatz zum gleichseitigen Dreieck finden wir im Quadrat völlige Gleichförmigkeit im jeweiligen Gegenüber, denn du siehst, wie hier sich Linie der Linie und Winkel dem Winkel in Gleichheit entsprechen.“ (Augustinus, De quantitate animea, S. 25)

Ungleichheit bezüglich der konstituierenden Elemente bestehe allerdings in jeder geradlinig begrenzten Figur dort, wo zwei Linien auf einander treffen und einen Winkel bilden (Augustinus, De quantitate animea, S. 26). Weitere Gleichheiten, aber auch entscheidende Ungleichheiten innerhalb der Konstellationen gleichseitiges Dreieck und Quadrat werden an den Eigenschaften der jeweiligen Verbindungslinien vom Mittelpunkt der Figuren zu den Ecken und zu den Seitenmittelpunkten nachgewiesen:

> „Augustin: Welche sind von allen die kürzesten, und wie viele von ihnen gibt es in jeder Figur? – Evod: Ebenfalls im Quadrat vier, im Dreieck drei, es sind jene, die zur gegenüberliegenden Mitte geführt werden. – Augustin: Das scheint mir vollkommen richtig zu sein [...]. Denn hier siehst du meiner Ansicht nach eine große Gleichheit herrschen, die trotzdem nicht in allen Teilen vollkommen gewahrt ist.“ (Augustinus, De quantitate animea, S. 27)

Trotz der zahlenmäßigen Gleichheit von Seiten, Winkeln, Strecken vom Mittelpunkt zu den Ecken und Strecken vom Mittelpunkt zu den Seitenmitten und größenmäßiger Gleichheit von Seiten untereinander und Winkeln untereinander, herrscht also größenmäßige Ungleichheit zwischen den vom Mittelpunkt ausgehenden Strecken. Sowohl diese größenmäßige Ungleichheit als auch der ungleiche Wechsel von Linie zu Linie im Winkel sind im Kreis behoben, der damit auch die Figur ist, „die die höchste Gleichheit besitzt“ (Augustinus, De quantitate animea, S. 27) und damit auch die schönste unter den Figuren ist.

Die mathematischen Objekte werden also als idealisierte Gegenstände und aufgrund der in ihnen bestehenden Gesetzmäßigkeiten ästhetisch bewertet. Die Gleichmäßigkeit und Schönheit kann somit nur durch die Vernunft erkannt werden, d.h. es handelt sich um geistige Schönheit, welche über dem durch die Wahrnehmung geometrischer Konstellationen in der Natur evozierten ästhetischen Vergnügen anzusiedeln ist. Das Hauptkriterium der Gleichheit wird hier auf die unterschiedlichsten Arten, von der zahlenmäßigen über größenmäßige Gleichheit bis hin zur Gleichheit der aufeinander folgenden Elemente, verwendet. Insbesondere die letztgenannte Form der Gleichheit zeigt, dass trotz der Anwendung auf mathematisch beschriebene Objekte, der Gleichheitsbegriff sehr weitgefasst wird und eher ein qualitatives Kriterium darstellt. Wenn also Eco behauptet, in der besprochenen Passage werde „eine strenge Theorie vom Schönen als geometrischer Regelmäßigkeit entwickelt“ (Eco, 1991, S. 67), so muss dies mindestens um die Bemerkung ergänzt werden, dass selbst diese „geometrische Regelmäßigkeit“ ein eher qualitatives Merkmal ist. Außerdem ist dem entgegenzuhalten, dass hier keine ästhetische

Theorie im eigentlichen Sinne entwickelt wird. Vielmehr wird die an anderen Stellen in seinem Werk (s.o.) ausgearbeitete augustinische Auffassung vom qualitativ-mathematischen Schönheitsbegriff hier auf regelmäßige geometrische Figuren als abstrakte Gegenstände angewendet.

3.2.2 Boethius – Arithmetik als Propädeutik des Schönen

Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius lebte fast ein Jahrhundert später als Augustinus und damit bereits nach dem Fall Roms. Als Abkömmling eines vornehmen stadtrömischen Geschlechts genoss er eine ausführliche philosophische Ausbildung und bekleidete hohe politische Positionen am Hofe Theoderichs in Ravenna. Anders als Augustinus versuchte er nicht, Grundlegendes über das Schöne und die Kunst in der christlichen Weltanschauung hervorzubringen, sondern gehörte zu denjenigen Gelehrten, die mit ihren Werken das antike Wissen für die Christenheit zu bewahren versuchten. Es sind also keine tatsächlich neuen Gedanken in seinen Schriften zu finden, jedoch geht er sowohl bezogen auf Gegenstände der Ästhetik als auch der Mathematik detaillierter und qualitativer, da weitgehend ohne metaphysische Zielsetzung, ein. (Vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 95f) Er überliefert die pythagoreische Proportions- und Musiklehre in ihrer ursprünglichen Form. Seine Werke prägen außerdem den Wissens- und Bildungskanon mindestens des frühen Mittelalters, sein Einfluss auf das scholastische Denken kann „gar nicht hoch genug eingeschätzt werden“ (Eco, 1991, S. 51).
Die durch Boethius weitergegebene Auffassung vom Schönen ist insbesondere in seinen fünf Büchern über Musiktheorie (*De institutione musica*) enthalten, die die phythagoreische Harmonielehre aufgreifen und damit auch aus mathematischer Sicht interessant sind. Aus mathematikhistorischer Perspektive weiterhin interessant ist sein in Abschriften erhaltenes Werk über Arithmetik (*Institutio arithmetica*), das hauptsächlich aus der Übersetzung der Einführung in die Arithmetik des Nichomachos von Geresa entstand. Außerdem sind Zeugnisse von einer verloren gegangenen Übersetzung der Euklidschen *Elemente* bekannt.

> „Die Ästhetik des Boethius, die sich fast ausschließlich mit der Musik beschäftigte und die auch nach dem Modell der Musik gebaut war, war in ihrem Wesen mathematisch, in ihren Konsequenzen intellektualistisch (denn sie reduziert die Kunst auf deren Theorie) und metaphysisch (denn sie endigte mit der ‚Weltmusik‘).“ (Tatarkiewicz, 1980, S. 100)

Tatarkiewicz verweist in dieser Zusammenfassung auf die zentralen Themen, die in Boethius’ Werken bezüglich Schönheit und Kunst enthalten sind. Zum einen übernimmt er den mathematischen Schönheitsbegriff der Antike und wendet diesen explizit nach pythagoreischem Vorbild auf die Musik an. Dabei wird unter Musik die theoretische Harmonielehre verstanden, welche zu den mathematischen

Wissenschaften gehört, und Boethius geht in antiker Tradition davon aus, dass sich die Schönheit bestimmter Klänge nur demjenigen erschließt, der die zu Grunde liegenden Zahlenverhältnisse vernunftmäßig erschließen kann. (Vgl. Eco, 1991, S. 51) So stellt er in *De institutione musica* den Musiktheoretiker über den „knechtisch" praktisch Musizierenden:

> „Ein Musiker aber ist der, der auf dem Wege der Theorie sich die Kenntnis der Musik nicht durch knechtische Arbeit, sondern durch die Herrschaft des Denkens erworben hat [. . .]. Denn was eben auf den Verstand und das Nachdenken sich stützt, das wird im eigentlichen Sinn der Musik gerecht." (Boethius, De institutione musica, zitiert nach Tatarkiewicz, 1980, S. 105)

In der Folge betont er außerdem, dass das Urteil eines solchen Musikers „aufgrund der Theorie oder einer Beweisführung allgemeiner Art" (ebd.) erfolgen müsse, also ganz in mathematischer Manier.
Im obigen zusammenfassenden Zitat verweist Tatarkiewicz zum anderen auf den metaphysischen Charakter in Boethius' Ästhetik. So dehnt dieser seine Harmonielehre über die Instrumentalmusik hinaus auf „Menschenmusik" und „Weltmusik" aus. Erstere beschäftigt sich mit der Harmonie von menschlicher Seele und Körper. Hierzu zählt auch die Wirkung bestimmter Klangkonstellationen auf die Seele. Die Weltmusik hingegen bezeichnet die bereits bei den Phythagoräern diskutierte Harmonie des Kosmos. Sowohl Menschen- als auch Weltmusik gehorchen den selben mathematischen Gesetzmäßigkeiten wie die hörbare Instrumentalmusik, ihre Grundlage ist die Arithmetik. (Vgl. Eco, 1991, S. 52ff)

Die Mathematik spielte in der klassischen Aufteilung, Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie, für Boethius nicht nur bezüglich seines Schönheitsbegriffs eine wichtige Rolle: Das Studium der mathematischen Wissenschaften – Boethius prägte für diese den Begriff Quadrivium – galt ihm als notwendige Propädeutik der Philosophie. In diesem Sinne waren *De institutione musica* und *De institutio arithmetica* als Lehrbücher auf dem Weg zur Weisheit konzipiert. (Vgl. Hein, 2010, S. 41ff) Die Arithmetik bildet dabei den Anfang und die Grundlage der anderen drei Disziplinen. Die Gesetze der Zahl bilden also die Grundlage philosophischer wie auch ästhetischer Erkenntnis und verweisen gleichzeitig auf die Gesetzmäßigkeiten der Welt(musik) und damit auf ihren Schöpfer.
Bei aller Wertschätzung der antiken Lehre der Zahlen und ihrer Verhältnisse ist festzuhalten, dass Boethius' Ausführungen zur Arithmetik keine mathematischen Beweise enthalten und nicht wie die Euklidischen *Elemente* als geschlossene Theorie angelegt sind. Ziel ist eher, „Schönheit und Harmonie der Gesetze der Zahlen als Spiegel der kosmischen Schönheit und Harmonie" (Hein, 2010, S. 49) darzustellen: „Beweise hätten die eigentlichen Ziele dieses Werkes eher verdunkelt als erleuchtet" (ebd.).

Das aus der Antike übernommene Schönheitsideal bestimmter Proportionen und Harmonien und die darauf ausgerichtete mathematische Musiktheorie nach Pythagoras lässt im Denken Boethius' eine enge Verbindung von Mathematik und Ästhetik entstehen. Die Arithmetik bildet dabei die Grundlage ästhetischer Urteile, wird selbst aber eher implizit – etwa im Rahmen einer Hierarchisierung bestimmter Verhältnisse in der Musiktheorie – zum Gegenstand solcher Urteile. In diesem Fall werden insbesondere bestimmte Zahlverhältnisse mit ästhetischen Attributen in Verbindung gebracht, nicht aber mathematische Sätze oder gar Beweise. Hier orientiert sich Boethius nicht mehr am antiken Vorbild.

Die beschriebene Verbindung von Schönheit und Mathematik wurde auf der Grundlage der Proportionsästhetik von Boethius, aber auch in der Folge des Augustinus im gesamten Mittelalter immer wieder aufgegriffen.[23] Besonders ausgeprägt ist dies in der karolingischen Renaissance[24], aber auch bei den Gelehrten der Schule von Chartres im 12. Jhd., die die Rolle von Zahl und Verhältnis für die Architektur betonten und eine auf der Proportionsästhetik beruhende Weltsicht propagierten (vgl. Eco, 1991, S. 55ff). Generell stellt Eco die Verwurzelung der beschriebenen mathematischen Prinzipien nicht nur in der mittelalterlichen Ästhetik fest: „Zahl, Ordnung, Proportion sind sowohl ontologische als auch ethische und ästhetische Prinzipien“ (Eco, 1991, S. 60). Obgleich auch andere Aspekte im Ringen um den Schönheitsbegriff im Mittelalter wie etwa Farbe, Licht, Klarheit oder Funktionalität eine Rolle spielten und auch das Anwendungsfeld der mathematischen Verhältnisse insbesondere im späten Mittelalter stark variierte, betont Eco allgemein die Bedeutung der Proportion:

> „Die Ästhetik der proportio war tatsächlich die eigentliche Ästhetik des Mittelalters.“ (Eco, 1991, S. 64)

Auch im Rahmen der bildenden Künste war die Proportion bzw. ein mathematischen Prinzipien folgender Schönheitsbegriff leitend. Dies gilt über das Mittelalter hinaus auch für die Renaissance. Hier erreichen mit Entwicklung und Anwendung der Perspektive „die mathematischen Studien [...] den Höhepunkt“ (Eco, 2004, S. 87). Sie wird zum der Natur zu Grunde liegenden (mathematischen) Prinzip und damit gleichzeitig zum Schönheitsideal. Die perspektivische Darstellung sorgt also nicht nur für eine möglichst realistische Abbildung der Natur, sondern wurde „auch als schön und für den Betrachter angenehm angesehen“ (ebd.). In der Anwendung der Perspektive kam es somit in der Folge des antiken und mittelaterlichen mathematischen Schönheitsbegriffs vermehrt zur Anwendung der Mathematik als Werkzeug der Kunst und damit zu „Mustern durch die Mathematik“.[25]

[23] In der direkten Folge des Boethius werden Enzyklopädisten aus verschiedenen Jahrhunderten wie etwa Cassiodor (ca. 485 – 580), Isidor von Sevillia (560 – 636), Beda Venerabilis (672/673 – 735) oder Hrabanus Maurus (780 – 856) genannt (vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 100).

[24] Eine herausragende Rolle wird in dieser Zeit dem Hofgelehrten Karls des Kahlen und Boethius' Kommentator Johannes Scotus Eriugena (9.Jhd.) zugeschrieben (vgl. Tatarkiewicz, 1980, S. 208ff).

[25] Vgl. daher auch 1.1.1.

3.3 Hutcheson – Mathematik in der Ästhetik der Aufklärung

Francis Hutcheson (1694–1746) gilt als einer der Gründerväter der schottischen Aufklärung. Nach einem Studium der Philosophie, Literaturwissenschaften und Theologie in Glasgow wurde der gebürtige Ire zunächst Leiter der presbyterianischen Akademie in Dublin und ab 1729 Professor für Moralphilosphie an der Universität Glasgow. Er prägte nicht nur die Ethik des 18. Jahrhunderts, sondern auch die Ästhetik über den angelsächsischen Raum hinaus. In seiner 1725 erstmals erschienen Schrift *Inquiry into the Original of our Ideas of Beauty and Virtue in Two Treatises* führt er seine Ideen zu beiden Disziplinen aus. Auf die Ästhetik geht er im ersten der beiden Traktate *Inquiry concerning Beauty, Order, Harmony and Design* ein. Mit diesem Werk gilt Hutcheson als einer der Begründer der modernen Ästhetik. (Vgl. Sprute, 1998, S. 418f und 424)
Hutchesons *Inquiry* enthält außerdem eine besonders ausführliche Auseinandersetzung mit der Schönheit der Mathematik. Obgleich es sich bei seiner Untersuchung um die Frage nach Schönheit, Ordnung, Harmonie und Design im Allgemeinen handelt, werden immer wieder mathematische Gegenstände als Beispiele herangezogen. Den dritten Abschnitt widmet er unter der Überschrift *Of the Beauty of Theorems* schließlich explizit der Schönheit mathematischer Sätze.

Auch Referenzen in anderen Werken zu Schönheit und Ästhetik der Aufklärung zeigen, dass die Mathematik ein gängiger Gegenstand ästhetischer Urteile in dieser Zeit war. So stellt bereits Anthony Ashley-Cooper, der dritte Earl of Shaftesbury (1671–1713), auf den Hutcheson sich ausdrücklich bezieht, fest, dass es nicht nötig sei die Künste zu studieren, um herauszufinden, was die Schönheit ausmache: „Es genügt, wenn wir die allereinfachsten Formen betrachten, eine Kugel, einen Kubus, einen Würfel. [...] Warum zieht man die Kugel, den Zylinder, die Pyramide vor und verwirft und mißachtet die unregelmäßigen Figuren?“ (Earl of Shaftesbury, Die Moralisten, zitiert nach Hauskeller (1994) S. 118). Carolin Jullien weist außerdem auf einen Zeitgenossen Hutchesons, den Schweizer Philosophen Jean-Piere de Crousaz (1663–1750) hin, der in seinem 1715 erstmals erschienen *Traité sur le beau* explizit auf die Schönheit der Mathematik eingeht (vgl. Jullien, 2008, S. 42f.). Dies geschieht im Rahmen des Kapitels *De la Beauté de Sciences*, das als Anwendung seiner zuvor ausgearbeiteten allgemeinen Ästhetiktheorie konzipiert ist. Nach einem langen Abschnitt über die Schönheit der Physik hält er seine Ausführungen zur Mathematik jedoch eher knapp und verzichtet auf Beispiele mit dem Hinweis, dass solche im Überfluss bekannt seien (vgl. Crousaz, 1715, S. 101).
Jedoch scheint es nicht nur ein Gemeinplatz zu sein, mathematische Objekte aufgrund einer gewissen geometrischen Regelmäßigkeit als besonders schön zu empfinden. In seinem berühmten Traktat *Über das Schöne*, der zuerst als Artikel unter dem Stichwort „Schönheit“ in der gemeinsam mit d'Alembert herausgegebenen *Enzyclopédie* erschien, zieht Denis Diderot (1713-1784) auch die unter Mathematikern

schön genannten Gegenstände heran, um seine Theorie vom Schönen herzuleiten:

> „In der Mathematik versteht man unter einem schönen Problem ein schwer zu lösendes Problem und unter einer schönen Lösung die einfache und klare Lösung eines schwierigen und komplizierten Problems.“ (Diderot, 1989, S. 84)

Diese Beschreibung bezieht sich auf den im Rahmen mathematischer Problemlösungen verwendeten Schönheitsbegriff und mutet durchaus modern an. So erinnert er stark an den in Kapitel 2 beschriebenen Eigenschaftskomplex der Ökonomie bzw. relativen Einfachheit. Diderot schließt von hieraus auf den für seine Ästhetik zentralen Begriff der „Beziehungen“ und erteilt gleichzeitig anderen Ansätzen, wie einem auf Symmetrie und Ordnung beruhendem Schönheitsbegriff, aber auch Kriterien wie Größe oder Nützlichkeit eine Absage. (Vgl. Diderot, 1989, S. 84).
Auch die Ausführungen Immanuel Kants in seiner *Theorie der Urteilskraft*, die in den Kapiteln 4 und 7 ausführlich besprochen werden, verweisen darauf, dass Aussagen über die Schönheit und den Kunstcharakter der Mathematik ein durchaus gängiges Phänomen darstellten, an dem es sich im Rahmen einer Theorie zur allgemeinen Ästhetik abzuarbeiten galt.

3.3.1 Mathematisches als Prototyp einer allgemeinen Ästhetik

Die Schönheit ist für Hutcheson eine Idee, die in uns entsteht und von einem speziellen inneren Sinn wahrgenommen werden kann. Neben einem inneren Sinn für ethische Zusammenhänge (moral sense) konstatiert er somit auch einen inneren Sinn zur Wahrnehmung ästhetischer Eigenschaften. Die Existenz dieses Schönheitssinns ergibt sich einerseits aus der Beobachtung, dass es Menschen gibt, die zwar ebenso gut sehen oder hören wie andere, aber anders als diese kein ästhetisches Vergnügen an bestimmter Kunst oder Musik zeigen. Den guten Geschmack oder das gute Ohr, das gängig diesen Unterschied beschreibt, ist Hutcheson zufolge dann nur ein Ausdruck für die (mangelnde) Fähigkeit des Schönheitssinns. Für die Begründung, warum es sich um einen *inneren* Sinn handeln muss, zieht Hutcheson u.a. die Schönheit mathematischer Theoreme heran:

> „[I]n some affairs where our external senses are not much concerned, we discern a sort of beauty, very like, in many respects, to that observed in sensible objects, and accompanied with like pleasure. Such is that beauty perceived in theorems, or universal truths, in general causes, and in some extensive principles of action. “ (Hutcheson, Inquiry, 1, XI, S. 35)

Da das von mathematischen Sätzen ausgehende ästhetische Vergnügen der Schönheit sinnlich wahrnehmbarer Gegenstände stark ähnelt, ist es naheliegend davon auszugehen, dass beides an gleicher Stelle wahrgenommen wird. Bei diesem Sinn muss es sich um einen inneren Sinn handeln, da etwa im Bereich der Theoreme die äußeren Sinne nicht ausschlaggebend für ihr Erfassen sind. Hutcheson betont, dass dieser innere Sinneseindruck der Schönheit unabhängig vom Wissen um bestimmte Zusammenhänge und dem verstandesmäßigen Erfassen zu sehen ist und es sich damit tatsächlich um einen *Sinn* handeln muss. Mit den anderen (äußeren) Sinnen ist ihm gemein, „dass das Vergnügen nicht aus einer Erkenntnis von Grundsätzen, Verhältnissen, Ursachen oder von der Nützlichkeit des Gegenstandes entspringt" (Hutcheson 1, XII. Zitiert nach Hauskeller, 1994, S. 36), sondern notwendig und unmittelbar eintritt. Generell nehmen für Hutcheson diese Gegenstände des Verstandes eine andere Stellung im Rahmen der Ästhetik ein als dies in vom mathematischen Schönheitsbegriff der Antike inspirierten Theorien der Fall ist: Um ästhetisches Vergnügen zu verspüren, ist es nicht notwendig, sich Eigenschaften wie Proportionalität, Gleichförmigkeit oder Zweckmäßigkeit bewusst zu sein. Aber: „Similitude, proportion, analogy or equality of proportion are objects of the understanding, and must be actually known before we know the natural causes of our pleasure" (Hutcheson, Inquiry, 1, XII., S. 35). Sie spielen also eine Rolle, um diejenigen Eigenschaften zu identifizieren, die in den Gegenständen die Idee des Schönen halten.

Zur Charakterisierung ästhetisch wirksamer Objekte unterscheidet Hutcheson zunächst zwischen absoluter bzw. originärer und relativer bzw. komparativer Schönheit:

> „We therefore by absolute beauty understand only that beauty which we perceive in objects without comparison to anything external, of which the object is supposed an imitation or picture [...]. Comparative or relative beauty is that which we perceive in objects commonly considered as imitations or resemblances of something else." (Hutcheson, Inquiry, 1, XVI. S. 39)

Als Beispiele für die absolute Schönheit nennt er „works of nature, artificial forms, figures, theorems" (ebd.). Den Gegenständen der Mathematik kommt also diese Art der Schönheit zu und sie werden einmal mehr als schöne Gegenstände unter anderen genannt.

Nachdem Hutcheson in den ersten Kapitel seines Traktates zur Schönheit dargelegt hat, dass dem Menschen ein innerer Sinn für Schönheit eigen sein muss, geht er in Teil zwei darauf ein, wodurch dieser angeregt wird. Er kommt zu dem Schluss, dass sich Gegenstände, die die Idee der Schönheit evozieren, durch „Einheit in Mannigfaltigkeit" („*uniformity amidst variety*" (Hutcheson, Inquiry, 2, III., S. 40)) auszeichnen. Das Schönheitserleben entsteht also aus einem Zusammenspiel scheinbar klar getrennter Bereiche. In seinen Ausführungen zur Ästhetik macht er dies zunächst an seines Erachtens möglichst einfachen Beispielen deutlich, um so auch die Grundlage zur Betrachtung komplexerer Träger der ästhetischen Idee zu legen. Diese Gegenstände einfacher Art findet er in den regelmäßigen Figuren und Körpern der Geometrie:

> „The beauty of an equilateral triangle is less than that of the square, which is less than that of a pentagon, and this again is surpassed by the hexagon. [...] The obvious ground of this is greater variety with equal uniformity.“ (Hutcheson, Inquiry, 2, III., S. 40f)

Die Beobachtung an den regelmäßigen ebenen Figuren – zu einem ähnlichen Schluss kommt er auch bezüglich der regelmäßigen Körper – führt Hutcheson also zunächst auf einen positiven proportionalen Zusammenhang von Schönheit und Mannigfaltigkeit (Zahl der Ecken) bei fester Einheitlichkeit (regelmäßige Figur). Dabei weist er explizit darauf hin, dass diese Argumentation nicht für beliebige Eckenanzahlen zu führen ist. Nähert sich die Figur beispielsweise zu stark dem Kreis, steigt der Grad der uniformity.
Die gleiche Argumentation führt er auch für die Einheitlichkeit bei fester Mannigfaltigkeit am Beispiel regulärer Figuren:

> „The greater uniformity increases that beauty amidst equal variety in these instances: [...] a square surpasses the rhombus or lozenge, and this again the rhomboides, which is still more beautiful than the trapezium, or any figure with irregular curve sides.“ (Hutcheson, Inquiry, 2, III., S. 41)

Wenn nun beide Eigenschaften variabel sind, so kann sehr unterschiedlichen Dingen ein ähnlicher Grad an Schönheit zukommen. Auch das veranschaulicht Hutcheson an geometrischen Formen. Am Beispiel der Körper stellt er etwa fest, dass ein Ikosidodekaeder (Polyeder bestehend aus Fünf- und Dreiecken) aufgrund seiner großen Mannigfaltigkeit nahezu genauso schön sei wie einer der Platonischen Körper, der sich gerade durch eine besonders hohe Einheitlichkeit auszeichnet.[26] (Vgl. Hutcheson, Inquiry, 2,III, S. 41)

Im Rahmen der Beispiele aus der Geometrie können Einheit und Mannigfaltigkeit an zahlenmäßigen Eigenschaften der betrachteten Konstellationen festgestellt werden. Wenn er in der Folge sein Schönheitskriterium der Einheit in Mannigfaltigkeit auch für die Schönheiten der Natur nachweist, so muss er von den quantitativ bestimmbaren Eigenschaften im Rahmen der geometrischen Beispiele zu eher qualitativen Merkmalen wechseln. Interessant ist auch, dass er mit dem Doppelkriterium „uniformity admids variaty“ bezogen auf die Musik einerseits die antike Lehre von den ästhetisch besonders reizvollen Kriterien übernehmen kann – diese berühren den Schönheitssinn, da sie einen besonders einheitlichen Zusammenklang erzeugen. Andererseits kann über die größere Mannigfaltigkeit das Phänomen erklärt werden, dass Musikstücke auch und gerade dadurch überzeugen, dass sie in gewisser Weise von diesem Ideal abweichen: „[T]hey often give as great a pleasure

[26] Der Versuch, den ästhetischen Wert verschiedener Gegenstände über ein Verhältnis von Einheit und Mannigfaltigkeit zu bestimmen, erinnert an das Vorgehen Birkhoffs. Anders als Hutcheson stützt er sich jedoch nicht nur auf ein qualitatives Abwägen, sondern gibt den Quotienten von Komplexität und Ordnung zur rechnerischen Ermittlung eines ästhetischen Maßes an. (Vgl. S. 7)

as continued harmony, whether by refreshing the ear with variety, or by awakening the attention and enlivening the relish for the succeeding harmony of concords[.]" (Hutcheson, Inquiry, 2, XIII, S. 47)

Sowohl zur Entwicklung seiner Theorie des „internal sense of beauty" als auch zur Beschreibung der Objekteigenschaften, die diesen Sinn anregen, zieht Hutcheson die Schönheit mathematischer Gegenstände und Gesetzmäßigkeiten an prominenten Stellen heran. Dabei steht die Frage, *ob* solche Gegenstände überhaupt Träger der ästhetischen Ideen sein können, zu keiner Zeit zur Diskussion. Vielmehr werden etwa die geometrischen Figuren zu Prototypen ästhetisch wirksamer Gegenstände. Dies allein ist aus mathematikästhetischer Sicht bereits eine interessante historische Beobachtung. Bezogen auf den eigentlichen Gegenstandsbereich dieser Arbeit, die Ästhetik von Beweisen und Theoremen, stellt aber das dritte Kapitel seiner *Inquiry* unter der Überschrift *Of the Beauty of Theorems* eine noch aussagekräftigere Quelle dar.

3.3.2 Theoreme zwischen Einheit und Mannigfaltigkeit

Im Kapitel zur Schönheit von Theoremen wendet Hutcheson nun den erarbeiten Schönheitsbegriff auf mathematische Sätze an. Diese sind für ihn Paradebeispiele für die „Einheit in Mannigfaltigkeit":

> „And yet there is none [but the beauty of theorems] in which we shall see such an amazing variety with uniformity, and hence arises a very great pleasure distinct from prospects of any further advantage." (Hutcheson, Inquiry, 3, I., S. 48)

Anders als bei den geometrischen Figuren können hier die fraglichen Eigenschaften nicht mehr abgezählt werden wie die Kanten eines Körpers und etwa an einer eindeutig bestimmbaren Gleichartigkeit der Begrenzungsflächen festgemacht werden. Hutcheson muss vielmehr auf inhaltliche Kriterien zurückgreifen, um den Grad an Einheit bzw. Mannigfaltigkeit bestimmen zu können.

Beispiele für diese Art der höchsten Schönheit sind Allaussagen, da dort eine einzige Aussage unendlich viele Einzelwahrheiten umfasst. Als konkretes Beispiel nennt er den „Satz des Pythagoras":

> „Thus, for instance, the 47th Proposition of the first Book of Euclid's Elements contains an infinite multitude of truth concerning the infinite possible sizes of right-angled triangles, as you make the area greater or less; and in each of these sizes you may find an infinite multitude of dissimilar triangles, as you vary the proportion of the base to the perpendicular, all which infinites agree in the general theorem." (Hutcheson, Inquiry, 3, II. S. 48)

Die Schönheit des pythagoräischen Lehrsatzes liegt also gerade darin, dass seine Aussage eine Konstante darstellt für eine unendliche Vielfalt an verschieden rechtwinkligen Dreiecken. Diese können nicht nur in ihrer Größe variieren, sondern auch ganz unterschiedliche vom Verhältnis der Seiten abhängige Gestalt annehmen. Als weitere Beispiele solcher Schönheit führt Hutcheson auch Sätze der zu seiner Zeit aktuellen Mathematik an. So beeindruckt ihn etwa die Newtonsche Fluxionsrechnung, in deren Rahmen aus einer einzigen Idee eine Vielzahl an Theoremen etwa zur Tangentenberechnung hervorgingen (ebd.).
Solchen Beispielen ästhetischen Vergnügens stellt er die Unzufriedenheit gegenüber, die sich einstellt, wenn eine Vielzahl von Experimenten und Beobachtungen unter keine gemeinsame Regel gefasst werden können:

> „Now each of these trial discovers a new truth, but with no pleasure or beauty, notwithstanding the variety, till we can discover some sort of unity or reduce them to some general canon.“ (Hutcheson, Inquiry, 3., III., S. 49)

Die reine Mannigfaltigkeit an Wahrheiten führt also ohne einheitspendendes gemeinsames Prinzip nicht zur Schönheit der Aussagen.
Ebenfalls einen Überschuss an Mannigfaltigkeit und damit geringere Schönheit macht Hutcheson bei den grundlegenden Axiomen aus. Diese stellen zwar eine Aussage dar, die für eine Vielzahl an Objekten gilt, allein jedoch ist diese Einheit zu unbestimmt und die Aussage zu unpräzise, um ästhetisches Vergnügen zu erzeugen. Dies macht er am Axiom „Das Ganze ist größer als seine Teile“ und wiederum einem Beispiel aus der Geometrie deutlich: Allein die Aussage, dass ein Zylinder größer ist als eine einbeschriebene Kugel und diese wiederum größer als der einbeschriebene Zylinder sei nicht von ästhetischem Wert. Erst über die Konkretisierung der Größenverhältnisse, die diese Körper zueinander aufweisen entsteht ein schönes Theorem, das Hutcheson zum Schwärmen veranlasst: „How beautiful is the theorem, and how are we ravished with its first discovery!“ (Hutcheson, Inquiry, 3., III., S. 49)

Hutcheson macht eine weitere Gruppe weniger schöner mathematischer Sätze aus: die „einfachen“ bzw. zu offensichtlichen Aussagen. Selbst wenn sie eine gewisse Einheit in Mannigfaltigkeit aufweisen, rufen sie kein ästhetisches Vergnügen hervor, da sie nicht zum Erstaunen führen. Hier spricht Hutcheson ein Kriterium abseits von „uniformity admidts varity“ an, betont aber explizit, dass „surprise“ und „novelty“ in der Auseinandersetzung mit einem Theorem zwar die ästhetische Wirkung unterstützen können, aber keine hinreichenden Kriterien für Schönheit selbst darstellen. (Vgl. Hutcheson, Inquiry, 3., IV., S. 49f.) Ähnliches gilt für eine weitere den Schönheitssinn ansprechende Eigenschaft. So gelten Hutcheson folgend Theoreme dann als besonders schön, wenn es sich um „fundamentale Theoreme“ handelt, sie es also erlauben, dass eine Vielzahl Korollare aus ihnen abgeleitet werden können (vgl. Hutcheson, Inquiry, 3., V., S. 50).
Bemerkenswert ist, dass Hutcheson hier mit dem Gefühl des Erstaunens einer-

seits und der innermathematischen Tragweite andererseits zwei Kriterien zu seiner ästhetischen Grundeigenschaft hinzunimmt, die auch im Rahmen aktuellen mathematikästhetischen Verhaltens eine prominente Rolle spielen (vgl. 2.1 und 2.4). Hutcheson beobachtet außerdem, dass im Rahmen mathematischen Arbeitens Verallgemeinerungen, Beweise und Herleitungen häufig erbracht werden, ohne direkten Nutzen davon zu haben bzw. obwohl die Wahrheit einer Aussage bereits hinreichend gezeigt wurde. Dies führt er auf die „immediate pleasure of contemplating the beauty“ (Hutcheson, Inquiry, 3, V., S. 51) zurück. Dem Ästhetischen wird also bereits eine forschungsleitende Funktion zugesprochen.[27] Dabei betont Hutcheson die Rolle des ästhetischen Vergnügens erneut, wenn er den Studenten ans Herz legt, nicht nur auf Nützlichkeit und wissenschaftlichen Fortschritt, sondern auch auf das Vergnügen während der Beschäftigung mit neuen Theoremen bedacht zu sein (vgl. Hutcheson, Inquiry, 3., VI., S. 52f.).

3.4 Kontraste und Konstanten

Zwischen Ästhetischem und Mathematischem scheint in den vergangenen Jahrtausenden tatsächlich durchgängig eine enge Beziehung bestanden zu haben. Wie die vorangegangenen historischen Beispiele zeigen, erfährt diese Beziehung zu unterschiedlichen Zeiten aber auch sehr unterschiedliche Ausgestaltungen und Begründungen.

Die hier referierten Beispiele erstrecken sich nicht nur über einen langen Zeitraum, sondern spannen insbesondere bezüglich des Kontextes, in dem die Schönheit der Mathematik behauptet und begründet wird, einen weiten Bereich auf. Die Folie mathematikästhetischer Äußerungen im weiteren Sinne reicht bereits bei den antiken Beispielen von der Kosmologie der Pythagoreer, über Hinweise in philosophischen Abhandlungen mit den unterschiedlichsten allgemeinen Themen bei Platon und Aristoteles, bis hin zum mathematikphilosophischen Prolog des Proklosschen Euklid-Kommentars. Die mittelalterlichen Beispiele erweitern dieses Spektrum um eine theologische Abhandlung über die Seele und ein Lehrbuch über Musiktheorie. Einen wieder anderen Bereich eröffnet Hutchesons *Inquiry* als Abhandlung zur allgemeinen philosophischen Ästhetik. Dass Mathematisches in so unterschiedliche theoretische Positionen und über die Geschichte hinweg immer wieder mit ästhetischen Werturteilen belegt wird, verweist darauf, dass die Mathematik über die Jahrhunderte den Charakter eines ästhetischen „Standardbeispiels“ einnimmt. Die referierten Positionen des Aristoteles und in der Folge des Proklos zeigen jedoch

[27] Dies geschieht nicht ohne darauf hinzuweisen, dass ein übermäßiges Streben nach Schönheit, speziell nach Einheitlichkeit nicht zwangsläufig von Erfolg gekrönt sein muss. Dies gelte insbesondere auch für Aussagen außerhalb der Mathematik, wenn der Versuch unternommen wird, eine große Bandbreite von Phänomenen auf ein einziges Prinzip zurück zu führen (vgl. Hutcheson, Inquiry, 3., V., S. 51f.).

auch, dass ein solches Schönheitsurteil auch zu dieser Zeit nicht uneingeschränkte Zustimmung erfuhr. Dies werden auch die Darstellungen in den Kapiteln 4 und 7 unterstreichen, wo mit der kritischen Position Immanuel Kants eine weitere prominente und in einer allgemeinen Ästhetiktheorie verankerte Gegenstimme ausführlich diskutiert wird.

Die Kriterien, die zur Begründung herangezogen und auf die Mathematik angewendet werden, beruhen bis ins Mittelalter auf der gemeinsamen Tradition der pythagoreischen Auffassung des Schönen als Ordnung, Harmonie und Proportion. Dieser klassische Kern führt zu einem mindestens vordergründig mathematisch beschreibbaren Schönheitsbegriff. Dieser wird an den jeweiligen Kontext und die Zielsetzung angepasst, wobei die Nähe zu den eigentlich arithmetischen Begriffen variiert. Die reine Anwendung eines solchen mathematischen Schönheitsbegriffs etwa auf Kunstobjekte führt zunächst zu „Mustern durch Mathematik“. Die angeführten Beispiele aus Antike und Mittelalter zeigen jedoch, dass der Schritt zu einer Anwendung dieser Kriterien auf die Mathematik selbst offenbar naheliegend war. Die Untersuchungen Hutchesons stellen dagegen ein Beispiel dafür dar, die Schönheit der Mathematik auch über einen stärker subjektorientierten Schönheitsbegriff zu begründen und stehen insofern aktuellen Konzeptionen von Schönheit allgemein und bezogen auf die Mathematik näher, als der klassische Ansatz.[28]

Interessant ist, dass in allen besprochenen Beispielen die Ästhetik der Mathematik aus einem allgemeinen Begriff von Schönheit abgeleitet wird. Die Mathematikästhetik ist gleichsam in der allgemeinen Ästhetik verankert. In diesem Zusammenhang zeigen die Ergebnisse aus Kapitel 2, dass im Laufe der Geschichte eine Wende eingetreten ist. Während der Begriff der Schönheit im Allgemeinen und insbesondere bezogen auf Beispiele aus der Mathematik in der allgemeinen Ästhetik nicht mehr von besonderem Interesse ist, spielt er im Rahmen der mathematischen Praxis weiterhin eine wichtige Rolle. Dies muss zunächst dazu führen, den in der Mathematik verwendeten Begriff der Schönheit getrennt zu beschreiben und erst im zweiten Schritt an die philosophische Ästhetik anzubinden.

Die mathematischen Gegenstände, denen eine besondere Schönheit zugesprochen wird, variieren zwischen den betrachteten Positionen. Je nach Zeitgeist und Zielrichtung der jeweiligen Schrift sind es die Mathematik als Ganze, regelmäßige geometrische Figuren, Zahlenverhältnisse oder auch Theoreme, die mit ästhetischen Attributen belegt werden. Bemerkenswert ist, dass geometrische Figuren und insbesondere ihre Regelmäßigkeit, trotz unterschiedlicher Konzepte von Schönheit, immer wieder als besonders schön herausgestellt werden. Ein großer Bereich der

[28] Ausnahmen von der „modernen“ subjektorientierten Auffassung und Versuche, das Schöne zu mathematisieren, sind jedoch auch noch in neuerer Zeit zu finden. Beispiele sind etwa Ansätze, die dem „goldenen Verhältnis“ das Potential eines Schönheitskriteriums zuschreiben (vgl. z.B. van der Schoot, 2005) oder auch Birkhoffs „Aesthetic Meassure“ (vgl. 1.1.1). Versuche einer (rekursive) Anwendungen der so erhaltenen „Maße“ für Schönheit auf mathematische Sätze oder Beweise sind mir aber nicht bekannt.

„Muster der Mathematiker“, denen aktuell ein besonderer ästhetischer Reiz zugesprochen wird und die in dieser Arbeit im Vordergrund stehen, die Beweise oder allgemein mathematische Argumentationen, kommen in den hier vorgestellten Ansätzen nur in Proklos' Beispiel vor. Dies liegt sicher an den zur jeweiligen Zeit gängigen und zugänglichen Vorstellungen von Mathematik. Die Ausnahme Proklos lässt aber weiter vermuten, dass die Wahl von Beweisen als ästhetisch relevante Gegenstände auch vom Kontext abhängt: Die ästhetische Beurteilung von mathematischen Argumentationsgängen, setzt eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Mathematik voraus. Dies war bei dem Euklid-Kommentator Proklos der Fall, ebenso wie bei den modernen Mathematikern, die ihr mathematikästhetisches Verhalten dokumentieren.

Die behandelten Beispiele weisen somit sowohl bezogen auf den Kontext und die verwendeten ästhetischen Kriterien als auch auf die betrachteten Gegenstände große Unterschiede auf. Dennoch ist allein die Tatsache, in so unterschiedlichen historischen Zusammenhängen, immer wieder auf die begründete Meinung zu stoßen, Mathematisches sei schön, eine bemerkenswerte Konstante.

Kapitel 4

Mit Kant gegen die Schönheit der Mathematik

> „[...] so ist eine Wissenschaft, die als solche schön sein soll, ein Unding. Denn wenn man in ihr nach Gründen und Beweisen früge, so würde man durch geschmackvolle Aussprüche (Bonmots) abgefertigt.“ (*KU*, §44, S. 177)[1]

Auf ironische Weise erteilt Immanuel Kant (1724–1804) so im ersten Teil der *Kritik der Urteilskraft*, seinem Hauptwerk zur Ästhetik, der Möglichkeit einer Wissenschaftsästhetik im Allgemeinen eine Absage. Im weiteren Verlauf seiner Ausführungen geht er – mit ebenso negativem Ausgang – immer wieder auch auf Möglichkeiten ein, den Begriff der Schönheit auf die Mathematik anzuwenden. Dennoch verspricht die Untersuchung der Kantischen Position im Rahmen dieser Arbeit einen fruchtbaren Beitrag zu leisten. Zum einen liefert seine Ästhetik, wie er sie in der *Kritik der Urteilskraft* ausbreitet, einen prominenten und erprobten Bezugsrahmen für die Untersuchung des Schönen im Allgemeinen und damit auch die Sprache zur besseren Beschreibung des Phänomens in der Mathematik.[2] Zum anderen widmet Kant der Mathematik über sein gesamtes Werk hinweg große Aufmerksamkeit, insbesondere in seinen Ausführungen zur Mathematikphilosophie selbst, etwa in der *Kritik der reinen Vernunft*.

Auch bezogen auf die über die Geschichte sehr unterschiedlichen Begründungsmuster für die Schönheit der mathematischen Gegenstände nehmen die Ausführungen

[1] Hier und im Folgenden wird die *Kritik der Urteilskraft* (KU) nach der Paginierung der zweiten Auflage von 1793 zitiert. Für alle weiteren Schriften Kants wird die Zählung der Akademie Ausgabe (AA) verwendet.

[2] Zu Zeiten Kants war die Beschäftigung mit dem Schönen eine Kernfrage der Ästhetik. Dies ist heute im Allgemeinen nicht mehr so, da das Schöne z.B. nicht mehr als konstituierendes Element der Kunst angesehen wird. Dennoch spielt die Wertzuschreibung „schön“ in der Mathematik auch aktuell eine zentrale Rolle. Eine Möglichkeit, einen allgemeinen Bezugsrahmen für den zentralen Begriff der Mathematikästhetik zu erhalten, ist somit die Anleihe bei Ästhetikpositionen vergangener Zeiten, wie sie hier vorgeschlagen wird. Eine weitere Möglichkeit besteht im Abgleich mit dem heute in der allgemeinen Ästhetik zentralen Begriff der „ästhetischen Erfahrung“ und den in der mathematischen Praxis entstehenden Erfahrung mit dem Schönen, ungeachtet der unterschiedlichen Nomenklatur.

Kants eine vermittelnde Stellung ein. So hat er einerseits beobachtet, dass geometrische Gebilde auf Grund ihrer Regelmäßigkeit „schön“ genannt werden. In dem er auf diese Möglichkeit eingeht, setzt er sich mit dem Grundgedanken der unter Kapitel 3 beschriebenen antiken Position auseinander. Andererseits prüft er aber auch den Ansatz, die Schönheit mathematischer Gegenstände über eine Art Ökonomie zu begründen und widmet sich damit einem zentralen Kriterium der aktuellen Diskussion (vgl. Abschnitt 2.2). So bildet die Darstellung hier in gewisser Weise auch eine Klammer zwischen den beiden vorangegangenen Kapiteln.

Im Folgenden wird zunächst der kantische Schönheitsbegriff kurz skizziert, um seine Aussagen zur Mathematikästhetik einordnen zu können. Darauf folgend werden mit dem freien Spiel der Erkenntniskräfte und der Zweckmäßigkeit zwei zentrale Aspekte des Geschmacksurteils nach Kant herausgegriffen. Dabei werden weitgehend nur seine Ausführungen im ersten Teil der *Kritik der Urteilskraft* in Betracht gezogen. Diese sollen jeweils in dem Umfang thematisiert werden, in dem sie für das Verständnis der Einwände gegen die Schönheit der Mathematik notwendig sind. Auf dieser Grundlage folgen dann jeweils die kantischen Argumentationen gegen die Schönheit regelmäßiger Formen bzw. ökonomischer Beweise.
Obwohl dem Kantischen Mathematikbild und in noch stärkerem Maße seiner Ästhetikposition in der Kantforschung einige Aufmerksamkeit gewidmet wird, ist Literatur, die sich dezidiert mit Hinweisen zur Mathematikästhetik in Kants Werk beschäftigt, eher spärlich vorhanden. Autoren, die sich mit dem Thema beschäftigen, legen noch dazu häufig ihren Schwerpunkt auf die Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik bzw. auf den Geniestatus der „Mathematikproduzenten“[3]. Diese Ansätze werden innerhalb dieser Arbeit in Kapitel 7 besprochen. Ausführungen zur Kantischen Perspektive auf die Schönheit der Mathematik finden sich noch seltener. Meist stehen sie als Exkurs in einem größeren Zusammenhang.[4] Das folgende Kapitel wird demnach auch dazu beitragen, eine Lücke in der Kantforschung zu füllen.

Ziel des gesamten Kapitel ist jedoch auch dabei keine umfassende Kantexegese als Selbstzweck, sondern eine erste Lesung immer mit Blick auf ein genaueres Verstehen des in der mathematischen Praxis verwendeten Schönheitsbegriffs. In einer abschließenden Zusammenschau wird daher auch der Frage nachgegangen, wie die Einwände Kants für eine mathematikästhetische Diskussion fruchtbar gemacht werden können.

[3] Vgl. z.B. Winterbourne (1988), Chernyak und Kahdan (1997), Giordanetti (1995), Wenzel (2001) oder das Unterkapitel *Die epistemische Struktur der Anschauung: Kunst und Mathematik* in Koriako (1999).

[4] Vgl. dazu das Kapitel *Can there be Beauty and Genius in Mathematics?* in Wenzel (2005), den Abschnitt *Mathematik unter dem Aspekt der Zweckmäßigkeit* in Model (1987), den Abschnitt *Die formal-objektive Zweckmäßigkeit mathematischer Urteile oder warum man weder von Schönheit noch von einer Teleologie der Mathematik sprechen kann* in Wolff-Metternich (1995) oder auch das Kapitel *Die Zweckmäßigkeit in der Mathematik* in Marc-Wogau (1938). Keiner dieser Autoren behandelt das Thema dabei in einem dezidiert mathematikästhetischen Zusammenhang.

So bietet dieser Ansatz – neben der Auseinandersetzung mit einer prominenten Position *gegen* die Möglichkeit einer Mathematikästhetik und einem Beitrag zu einem wenig beachteten Feld der Kantforschung – auch einen systematischen Gewinn für die in dieser Arbeit vorgeschlagene Auseinandersetzung mit der Schönheit der Mathematik. Die kantische Position ermöglicht eine systematischen Perspektive auf das bisher vorgestellte sehr weite Feld ästhetischer Wertzuschreibungen für die „Muster der Mathematik“ und erlaubt so, dieses besser einordnen und begrifflich fassen zu können. Christian Helmut Wenzel teilt diese Hoffnung, wenn er seine Ausführungen zum Genie in der Mathematik wie folgt abschließt:

> „But the conceptual framework he provided in the third Critique [. . .] nevertheless gives a very suitable background for explaining how objects of mathematics and mathematical activities, especially with regard to their historic and creative aspects, can all be explained and given a place in the realm of beauty and genius.“ (Wenzel, 2001, S. 428)[5]

In diesem Sinne kann dem folgenden Kapitel, wie auch den Ausführungen zur Kantischen Einstellung zum Kunstcharakter der Mathematik (Kapitel 7), nicht nur ein Exkurscharakter, sondern ein systematischer Ort in den mathematikästhetischen Studien dieser Arbeit zukommen.

4.1 Der Schönheitsbegriff in der *Kritik der Urteilskraft*

Die *Analytik des Schönen* bildet den Anfang der *Kritik der ästhetischen Urteilskraft* und damit auch den Anfang Kants gesamter dritter Kritik. Im folgenden sollen die Ausführungen Kants zum Schönen zunächst kurz skizziert werden. In diesem Rahmen können dann die Stellen eingeordnet werden, an denen die Mathematik als kontrastierendes Beispiel angeführt wird.

4.1.1 Zur *Analytik des Schönen*

Im Rahmen der *Analytik des Schönen* kreist Immanuel Kant über 22 Paragraphen und einen mit *Allgemeine Anmerkungen* überschriebenen Abschlussabschnitt seinen Begriff der Schönheit von vier verschiedenen Seiten („Momenten“) aus ein.
Im ersten Moment (§§1–5) steht die Natur des Geschmacksurteils im Vordergrund. Als „Erklärung des Schönen“ folgert er aus diesen Ausführungen:

[5] Wenzel selbst kündigt an, dies in einem weiteren Artikel umzusetzen, hat die beschriebene Chance aber m.W. in seinen späteren Abhandlungen noch nicht ausführlich bzw. nur mit anderer Schwerpunktsetzung, als dies hier geschehen soll, genutzt.

> „*Geschmack* ist das Beurteilungsvermögen eines Gegenstandes einer Vorstellungsart durch ein Wohlgefallen, oder Mißfallen, *ohne alles Interesse*. Der Gegenstand eines solchen Wohlgefallen heißt *schön*." (*KU*, §5, S. 16) [Hervorhebungen im Original]

Damit wird das „interesselose Wohlgefallen" zum zentralen Kennzeichen eines Geschmacksurteils.
Im darauffolgenden Moment (§§6–9) wird das in einer solchen Einstellung gefällte Urteil „schön" näher bestimmt. Als Eigenschaft des Schönen folgt für Kant:

> „*Schön* ist das, was ohne Begriff allgemein gefällt." (KU, §9, S. 32) [Hervorhebungen im Original]

Diese Bestimmung des Schönen ergibt sich aus der zuvor zitierten Forderung, dass ein Gegenstand oder eine Vorstellungsart dann „schön" heißen soll, wenn sie einem „*interesselosen Wohlgefallen*" entspringt. Ein Geschmacksurteil – also auch das Urteil „schön" – entsteht demnach aus einem Gefühl der Lust oder Unlust, welches nicht auf bestimmten dem Verstand zugänglichen Gesetzmäßigkeiten gründet oder durch deren Erreichen motiviert ist (vgl. §5, KU). Diese dem Verstand als Erkenntnisvermögen zugänglichen Gesetzmäßigkeiten nennt Kant „Begriffe", woraus der erste Teil der zitierten Bestimmung folgt: Schönes gefällt *ohne Begriff*.
Obwohl das Urteil „schön" weder ein theoretisches noch ein praktisches *Erkenntnis*urteil ist, geht Kant von einer subjektiven Allgemeingültigkeit aus. D.h. einerseits, dass die Zustimmung aller nicht durch logische Argumente aus den dem Gegenstand zu Grunde liegenden Begriffen erzwungen werden kann, da diese keine Rolle für das Geschmacksurteil spielen dürfen. Es kann somit keine objektive Allgemeingültigkeit vorliegen. Andererseits ist es dennoch möglich, davon auszugehen, dass das subjektive ästhetische Urteil aller zum selben Schluss führen *muss* (vgl. §8, KU, S. 25f). Schönes gefällt damit *ohne Begriff allgemein*.
Diese Intersubjektivität führt Kant auf die Entstehung des Geschmacksurteils zurück. So resultiert das Gefühl der Lust, das zum ästhetischen Urteil führt, aus einem „freien [von Begriffen unabhängigen, S.Sp.] Spiel der Erkenntnisvermögen [Einbildungskraft und Verstand, S. Sp.]" (KU, §9, S. 28). Durch die Beteiligung des Verstandes wird das Urteil allgemein mitteilbar.[6]

Die hier stark gemacht Intersubjektivität des Geschmacksurteils wird im dritten Moment (§§7–17) aufgegriffen und mit „der Relation der Zwecke", die in Geschmacksurteilen eine Rolle spielen, in Verbindung gesetzt. Als Erklärung des Schönen schließt Kant aus diesen Überlegungen:

> „*Schönheit* ist Form der *Zweckmäßigkeit* eines Gegenstandes, sofern sie, *ohne Vorstellung eines Zwecks* an ihm wahrgenommen wird." (KU, §17, S. 61) [Hervorhebungen im Original]

[6] Eine eher skeptische Diskussion des Kantischen Konzepts einer subjektiven Allgemeingültigkeit ästhetischer Werturteile findet sich bei (Piecha, 2002, S. 224ff).

Auf das Kantische Konzept einer Zweckmäßigkeit ohne Zweck wird in 4.3.1 im Allgemeinen und in 4.3 mit Bezug auf die Mathematik näher eingegangen.

Im vierten und letzten Moment (§§18–22) steht die Notwendigkeit im Vordergrund, mit der ein ästhetisches Urteil gefällt wird. Damit folgt als weitere Eingrenzung des Schönheitsbegriffs:

> „*Schön* ist, was ohne Begriff als Gegenstand eines *notwendigen* Wohlgefallens erkannt wird.“ (KU, §22, S. 68)[Hervorhebungen im Original]

Dies wird aus der zwingenden Zustimmung aller zu einem Geschmacksurteil über die Idee eines „Gemeinsinns“ hergeleitet.
Wie in einem solchen allgemeingültig anmutenden und notwendig zu fällenden Urteil die Erkenntniskräfte Verstand und Einbildungskraft zusammenspielen, ohne dass der Verstand die Begriffe und die Zwecke vorgibt, wie also das „freie Spiel der Erkenntnisvermögen“ (KU, §9, S. 28) gedacht werden muss, fasst Kant in den *Allgemeinen Anmerkungen* zusammen:

> „Es wird also eine Gesetzmäßigkeit ohne Gesetz, und eine subjektive Übereinstimmung der Einbildungskraft zum Verstande, ohne eine objektive, da die Vorstellung auf einen bestimmten Begriff von einem Gegenstande bezogen wird, mit der freien Gesetzmäßigkeit des Verstandes (welche auch Zweckmäßigkeit ohne Zweck genannt worden) und mit der Eigentümlichkeit eines Geschmacksurteils allein zusammen bestehen könne.“ (KU, S. 68)

Seine Ausführungen verdeutlicht Kant an den zentralen Stellen mit Beispielen. Dabei greift er über die *Analytik des Schönen* hinweg immer wieder auch auf Mathematisches zurück. Dieses nimmt dabei, wie bereits erwähnt, immer die Funktion eines kontrastierenden Gegenbeispiels ein.

4.1.2 Mathematik als Kontrast zum Schönen

Kant bemüht im Rahmen der *Kritik der Urteilskraft* immer wieder die Mathematik als widerständigen Gegenstand, der einen Kontrast zu seinen Ausführungen z.B. zum Schönen, zum Erhabenen und der Kunst darstellt. Bezogen auf das ästhetische Schönheitsurteil sind insbesondere zwei prominente Stellen innerhalb der KU zu nennen, an denen Kant die Möglichkeit einer Schönheit des Mathematischen verneint.

Das erste dieser Gegenbeispiele befindet sich in der *Allgemeinen Anmerkung* zum Abschluss der *Analytik des Schönen* und bildet damit einen Teil der abschließenden Zusammenfassung der Ausführungen zum Geschmacksurteil „schön“. Zur Argumentation greift Kant dabei auf seine Ausführungen zum „freien Spiel der

Erkenntniskräfte“ aus dem zweiten Moment zurück. Damit stellt er in seiner Zusammenschau die zentrale Rolle dieser eigentümlichen Konstruktion für das Geschmacksurteil heraus und verneint insbesondere durch die begrifflich gegebene Regelmäßigkeit mathematischer Gegenstände deren ästhetische Bewertbarkeit. In 4.2 wird dieser Zusammenhang ausführlicher besprochen.

Das zweite hier behandelte Gegenbeispiel dagegen befindet sich – eher unerwartet – im ersten Paragraphen des zweiten Teils der Kritik, der *Analytik der teleologischen Urteilskraft*. Obwohl es somit abseits der eigentlichen Ausführungen zum Geschmacksurteil steht, greift Kant hier zur Argumentation auf seine Ausführungen zur Schönheit zurück. Insbesondere die Rolle der Zweckmäßigkeit für das ästhetische Urteil wird durch das Urteil über die Mathematik kontrastierend herausgestellt. Stark gemacht wird an dieser Stelle somit erneut die Abgrenzung der kantischen Ästhetikauffassung von vorhergehenden rationalistischen Ansätzen, wie er sie bereits in den §15 und 16 (KU) betont. Dieser Zusammenhang wird in 4.3 ausführlicher dargestellt.
Über die Zweckmäßigkeit enthält das zweite Gegenbeispiel eine zweifache Abgrenzung des Schönheitsurteils in der Mathematik; zum einen gegen das ästhetische, zum anderen aber auch gegen das teleologische Urteil.[7]

Im Folgenden sollen nun diese beiden kantischen Argumentation gegen die Möglichkeit eines Geschmacksurteils über die Gegenstände der Mathematik diskutiert und für die weitere Untersuchung fruchtbar gemacht werden. Dazu wird die Kantische Argumentationslinie sowie jeweils Reaktionen und Einschätzungen der Sekundärliteratur dazu zunächst vorgestellt. So können zentrale Eigenschaften der mathematischen Schönheit, wie Kant sie bewertet, herausgearbeitet werden.

4.2 Zwischen freiem Spiel und Langeweile

> Nun werden geometrisch-regelmäßige Gestalten, eine Zirkelfigur, ein Quadrat, ein Würfel usw., von Kritikern des Geschmacks gemeiniglich als die einfachsten und unzweifelhaftesten Beispiele der Schönheit angeführt.“ (KU, Allgemeine Anmerkung, S. 70)

An dieser Beobachtung muss sich Kant in der *Allgemeinen Anmerkung zum ersten Abschnitte der Analytik* abarbeiten, läuft sie doch seiner zuvor eingeführt Charakterisierung eines Geschmacksurteils zuwider. So ist eine solche „geometrisch-regelmäßige Gestalt“ nichts als die beste Umsetzung der zugrundeliegenden Re-

[7] Dieses zweite Beispiel findet wesentlich seltener Beachtung als das erste. So wird es auch z.B. in der ausführlichsten Diskussion zu Schönheit und Mathematik in der KU bei Christian Helmut Wenzel (2005) nicht behandelt, wohl aber in Arbeiten, deren Fokus aus unterschiedlichen Gründen auf der Zweckmäßigkeit liegt (z.B. Marc-Wogau (1938), Model (1987) oder Wolff-Metternich (1995)). Dies könnte u.a. der Stellung außerhalb der eigentlichen Abhandlung zum Schönen geschuldet sein.

gel, des zugrundeliegenden Begriffs. Gegenstände aber, die im Kantischen Sinne „schön“ heißen dürfen, gefallen wie unter 4.1.1 skizziert *ohne* Begriff dadurch, dass sie Verstand und Einbildungskraft in ein freies Spiel versetzen, welches zu einem ästhetischen Wohlgefallen führt.
Der geometrischen Regelmäßigkeit billigt Kant aber nur insofern die Möglichkeit zu, ein Wohlgefallen auszulösen, als Gegenstände mit dieser Eigenschaft zum Erfüllen bestimmter Aufgaben und Anwendung in der Praxis besonders gut geeignet sind. Dies macht er an verschiedenen Beispielen deutlich:

> „Ein Zimmer dessen Wände schiefe Winkel machen, ein Gartenplatz von solcher Art, selbst alle Verletzung der Symmetrie sowohl in der Gestalt der Tiere [...] als der Gebäude oder der Blumenstücke, mißfällt, weil es zweckwidrig ist, nicht allein praktisch in Ansehung eines bestimmten Gebrauchs dieser Dinge, sondern auch für die Beurteilung in allerlei möglicher Absicht.“ (KU, Allgemeine Anmerkung, S. 70)

Auch weist er darauf hin, dass die geometrische Regelmäßigkeit zu bestimmten Erkenntnissen beiträgt und sich etwa bei der Beurteilung von Größen oder der Bestimmung von Verhältnissen besonders eignet (vgl. KU, Allgemeine Anmerkung, S. 70). In diesen Fällen ist das Wohlgefallen allerdings „nicht unmittelbar auf dem Anblicke der Gestalt, sondern der Brauchbarkeit derselben zu allerlei möglicher Absicht“ (KU, Allgemeine Anmerkung, S. 70) gegründet. Mit dieser eher schlichten Zweckmäßigkeit kann also ein Wohlgefallen einhergehen, aber kein ästhetisches.[8]

Steht aber nicht die Brauchbarkeit und damit der Verstand im Zentrum des Urteilens, sondern die Einbildungskraft, führt die geometrische Regelmäßigkeit nicht zu Wohlgefallen, sondern zu Zwang (vgl. KU, Allgemeine Anmerkung, S. 71f) und trägt so naturgemäß nicht zur angestrebten ästhetischen Unterhaltung bei. So kommt Kant nun entgegen der oben zitierten gängigen Meinung der „Kritiker des Geschmacks“ zu einem vernichtenden Urteil:

> „Alles Steif-Regelmäßige (was der mathematischen Regelmäßigkeit nahe kommt) hat das Geschmackwidrige an sich: daß es keine lange Unterhaltung mit der Betrachtung desselben gewährt, sondern, sofern es nicht ausdrücklich das Erkenntnis, oder einen bestimmten praktischen Zweck zur Absicht hat, Langeweile macht.“ (KU, Allgemeine Anmerkung, S. 72)

Zunächst, so könnte man meinen, ist die hier vorgestellte Kantische Argumentationslinie ungefährlich für die in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden Träger

[8] Dieser Rückbezug auf die Zweckmäßigkeit ist von der Argumentation des zweiten darzustellenden kontrastierenden Beispiels zu unterscheiden. Dort wird die nicht erwartete innermathematische Zweckmäßigkeit als Schönheitskriterium diskutiert (vgl. 4.3). Wohingegen hier die Regelmäßigkeit als Schönheitskriterium im Zentrum steht, und dieser eine besondere Zweckmäßigkeit in der *Anwendung* zugesprochen wird.

mathematischer Schönheit, bezieht sie sich doch auf „geometrisch-regelmäßige Gestalten“ und damit auf die unter 1.1.2 abgegrenzten „Muster aus der Mathematik“. Eindeutig abgewiesen wird hier durch Kant also das Recht, von der Schönheit der platonischen Körper oder symmetrisch angeordneter Muster zu sprechen. Britta-Sophie von Wolff-Metternich zufolge hätte Kant mit dieser Argumentation außerdem auch computergenerierten Darstellungen etwa von Fraktalmengen o.ä. den häufig behaupteten ästhetischen Reiz absprechen müssen, da diese trotz der nach einigen Rekursionsschritten komplex erscheinenden Gebilde „durchweg auf recht einfache Grundformen zurückführbar“ (Wolff-Metternich, 1995, S. 167) seien.

Die Kantische Argumentation lässt sich aber durchaus auch allgemeiner als Gegenpostion zu den unter Kapitel 3 vorgestellten Ansätzen der antiken Tradition verstehen und somit auch gegen die Schönheit der „Muster der Mathematiker“ in einem *bestimmten* Zusammenhang von Schönheit und Mathematik anwenden: Indem Kant die mathematisierbare Ordnung als „geschmackswidrig“ erklärt, wendet er sich gegen einen mit mathematischen Regeln identifizierbaren Schönheitsbegriff, der Harmonie, Ordnung und Ebenmaß in den Mittelpunkt stellt. Kant löst sich durch die klare Abgrenzung von Schönem und Geometrisch-Regelmäßigem von solchen Traditionen und „befreit damit den Begriff der Schönheit aus seiner Verklammerung mit der rationalen, mathematisch bestimmten Form [...]“ (Wolff-Metternich, 1995, S. 163).[9]

> „Niemand wird leichtlich einen Menschen von Geschmack dazu nötig finden, um an einer Zirkelgestalt mehr Wohlgefallen, als an einem kritzlichen Umrisse, an einem gleichseitigen und gleicheckigen Viereck mehr, als an einem schiefen, ungleichseitigen, gleichsam verkrüppelten, zu finden: denn dazu gehört nur gemeiner Verstand und gar kein Geschmack.“ (KU, Allgemeine Anmerkung, S. 72)

Somit bestätigt er also die Beobachtungen, auf die etwa die in Kapitel 3 vorgestellten Autoren ihre Ästhetikkonzeptionen allgemein aber auch die mathematikästhetischen Behauptungen gründen. Jedoch will er solche rein verstandesmäßig zu treffenden Urteile vom Geschmacksurteil separiert sehen. Anders als andere Autoren der Aufklärung (vgl. 3.3) integriert er dieses offenbar gängige Urteil also explizit nicht in seine Philosophie vom Schönen.

So richtet sich der Vorwurf der „Langeweile“ aber auch gegen die in „antiker Manier“, also durch rein rational fassbare Kriterien wie Harmonie und Ordnung, begründete Schönheit von Beweisen und Sätzen. Mindestens die aus den antiken und

[9] Anzumerken ist, dass von Wolff-Metternich nicht klar zwischen der Argumentationsweise Kants in der *Allgemeinen Anmerkung* und in §62 unterscheidet und somit das hier angeführte Zitat auch mit der Argumentation über die formale Zweckmäßigkeit der Mathematik in §62 in Verbindung bringt. Wie die Darstellung unter 4.3 zeigen wird, beschäftigen sich die beiden Stellen mit unterschiedlichen Eigenschaften, an denen die Schönheit mathematischer Gegenstände festgemacht wird und behandeln so m.E. verschiedene Aspekte oder mindestens verschiedene Perspektiven auf diesen Bereich.

mittelalterlichen Konzepten hergeleitete Schönheit der „Muster der Mathematiker“ kann somit Kant folgend nicht als genuin ästhetisches Urteil gelten.

4.2.1 Die Rolle des Emotionalen

Die Abgrenzung von seinen Vorgängern in einer rationalistisch geprägten Ästhetik, wie etwa von Baumgarten, Leibniz oder Wolff, ist für Kant insgesamt ein zentrales Thema – nicht nur im Rahmen der *KU*. Ein kontrastierendes Element zu solchen Positionen ist die Rolle des Gefühls für das Geschmacksurteil. So ist der *Zeitpunkt*, zu dem die Lust im Urteil entsteht eine zentrale Frage, mithin der „Schlüssel zur Kritik des Geschmacks“ (KU, §9, S. 27): Folgt das Gefühl der Lust direkt auf die Wahrnehmung des zu beurteilenden Gegenstandes, also vor dem Wirken von Einbildungskraft und Verstand, oder wird es erst durch das freie Spiel der Erkenntniskräfte hervorgerufen? Kant entscheidet sich gegen die Unmittelbarkeit des ästhetischen Gefühls:

> „Diese bloß subjektive (ästhetische) Beurteilung des Gegenstandes, oder der Vorstellung wodurch er gegeben wird, geht nun *vor* der Lust an demselben vorher, und ist der *Grund* dieser Lust an der Harmonie der Erkenntnisvermögen.“ (KU, §9, S. 29) [Hervorhebungen S.Sp.]

Für Kant ist also das positive Gefühl im ästhetischen Urteil eine Reaktion auf die durch den schönen Gegenstand ausgelöste „Harmonie der Erkenntnisvermögen“. Dies bedeutet mit anderen Worten, dass etwas dann als schön empfunden wird, wenn es im urteilenden Subjekt die Einbildungskraft und den Verstand, ohne Begriffe anzunehmen, in ein Spiel versetzen kann, welches das Gefühl der Lust auslöst. Würde das Gefühl direkt auf die Wahrnehmung folgen, so wäre es „bloße Annehmlichkeit in der Sinnenempfindung“ und könne, so Kant, „nur Privatgültigkeit“ (KU, §9, S. 27) haben. Das Geschmacksurteil wäre dann kein allgemeines mehr. (Vgl. §9, KU, S. 27ff)
Da nun aber gerade die Begriffe in einem Geschmacksurteil keine Rolle spielen, sind es allein die ausgelösten Emotionen, durch die diese Harmonie bemerkt wird: „Jene subjektive Einheit des Verhältnisses [kann] sich nur durch Empfindung kenntlich machen.“ (KU, §9, S. 31). In §15 erinnert Kant an diese Eigenschaft und fasst noch einmal wie folgt zusammen:

> „Das Urteil heißt auch eben darum ästhetisch, weil der Bestimmungsgrund desselben kein Begriff, sondern das Gefühl (des innern Sinnes) jener Einhelligkeit im Spiele der Gemütskräfte ist, sofern sie nur empfunden werden kann.“ (KU, §15, S. 47f)

Das Geschmacksurteil kann nicht rational auf der Ebene des Verstandes gefällt werden. Eine Person kann nur *fühlen*, ob ein Gegenstand die Erkenntnisvermögen so in Einklang gebracht hat, dass er als „schön“ beurteilt werden muss. Das emotionale Erkennen ist integraler Bestandteil des ästhetischen Urteils.[10]

Die Erkenntnis mathematischer Regelmäßigkeit ist ein rationales Urteil. Es muss aber die Frage erlaubt sein, ob es sich nicht auch in gewisser Hinsicht um ein emotional vermitteltes Urteil handelt, wenn Mathematiker von der Schönheit eines Beweises sprechen. Zumindest grundsätzlich wäre ein solcher Schluss auch im Rahmen der Kantischen Theorie denkbar. So bedeutet die Notwendigkeit von Begriffslosigkeit und emotionalem Erkennen im ästhetischen Urteil für Kant nicht, dass einem solchen Urteil kein verstandesmäßiges Erfassen vorausgegangen sein darf. Dies stellt er gleich zu Beginn der *Analytik des Schönen* klar:

> „Wenn die gegebenen Vorstellungen gar rational wären, würden aber in einem Urteile lediglich auf das Subjekt (sein Gefühl) bezogen, so sind sie sofern jederzeit ästhetisch.“ (KU, §1, S. 5)

Die Möglichkeit, dass ein begriffsmäßiges Verstehen dem ästhetischen Urteil vorausgehen darf, sofern dieses nicht auf jenes bezogen wird, führt Kant selbst nicht zu einem Rückbezug auf das ästhetische Urteil über Mathematisches. Das überrascht nicht, wenn er Kriterien wie die Regelmäßigkeit untersucht. Die grundsätzliche Möglichkeit einer ästhetischen Beurteilung eines rational gegebenen Gegenstandes ist m.E. aber für die weitere Diskussion der Kantischen Theorie im Rahmen mathematikästhetischer Überlegungen eine wichtige Grundlage.

4.2.2 Der fehlende Spielraum

Christian Helmut Wenzel diskutiert das Argument zur Langeweile geometrischer Regelmäßigkeit auf einer weiteren Ebene: Durch einen Begriff gegebene geometrische Gebilde führten Wenzel folgend auch deshalb zur Langeweile, weil ihnen das unendliche Angebot an Variationen fehle, welches wiederum nötig sei, um das freie Spiel der Erkenntniskräfte in Gang zu setzen. Anders als bei durch die Sinne wahrnehmbaren Naturschönheiten sei für einen regelmäßigen geometrischen Körper z.B. nur eine endliche Menge an Regeln nötig, um ihn vollständig zu bestimmen (vgl. Wenzel, 2001, S. 421f). Mit den Worten von Britta Sophie von Wolff-Metternich fehlt den mathematischen Gegenständen eine „‚überschüssige Sinnlichkeit‘ [...], die sich dem bestimmten, begrifflich geregelten Einheitsbezug des Verstandes entzieht“ (Wolff-Metternich, 1995, S. 166f).
Bezogen auf den Bereich der Beweise begegnet Wenzel dem auf Grund der Regelhaftigkeit fehlenden Spielraum mit einer Beobachtung aus der Geschichte des

[10]Eine ausführliche Studie über den Stellenwert des Gefühls im Geschmacksurteil bei Kant findet sich bei Matthews (1997).

Mathematiktreibens: Die Mathematikgeschichte zeige, dass es keine Regel gebe, die vorschreibe, welche Regel der schaffende Mathematiker anzuwenden habe.[11]

Ob die mathematische Regelmäßigkeit zu Langeweile oder ästhetischem Wohlgefallen führt, scheint auf die Perspektive bzw. darauf anzukommen, welchem Erkenntnisvermögen im Urteil der Vorrang gegeben wird. Ist es der Verstand, der durch den zu Grunde liegenden Begriff zu seinem Urteil kommt, so handelt es sich um eine verstandesmäßige Erkenntnis und nicht um ästhetische Unterhaltung. Steht aber in der (Re)konstruktion mathematischer Gegenstände, wie dies in der mathematischen Forschung zu beobachten ist, der „Verstand im Dienste der Einbildungskraft", ist also das verstandesmäßige Erfassen der Begriffe lediglich die Bedingung der Möglichkeit einer Konstruktion und Beurteilung durch die Einbildungskraft, so ist jedenfalls eine Bedingung zum ästhetischen Wohlgefallen auch nach Kant gegeben.

4.3 Mathematik zwischen Schönheit und relativer Vollkommenheit

> „Man ist gewohnt, die erwähnten Eigenschaften, sowohl der geometrischen Gestalten, als auch wohl der Zahlen, wegen einer gewissen, aus der Einfachheit ihrer Konstruktion nicht erwarteten, Zweckmäßigkeit derselben a priori zu allerlei Erkenntnisgebrauch Schönheit zu nennen [...]. Allein es ist keine ästhetische Beurteilung, durch die wir sie zweckmäßig finden [...]. Man müßte sie eher eine relative Vollkommenheit, als eine Schönheit der mathematischen Figuren nennen." (KU, §62, S. 277f)

Wie im vorher beschriebenen Beispiel aus der *Allgemeinen Anmerkung* stellt sich Kant auch mit der hier zu besprechenden Aussage gegen eine zu seiner Zeit offenbar geläufige Meinung. Anders als oben setzt er sich aber nicht mit einer traditionellen Auffassung von Schönheit, sondern mit einer traditionellen Beurteilung der Mathematik auseinander. Dass er sich hier nicht gegen „Kritiker des Geschmacks" im Allgemeinen, also Philosophen, und ihre Überlegungen zur Ästhetik wendet, sondern über ein in der Mathematik übliches Phänomen spricht, wird noch deutlicher, wenn man über die *Kritik der Urteilskraft* hinausschaut: So argumentiert Kant in der Abhandlung *Von einem neuerdings erhobenen vornehmen Ton in der Philosophie* ebenfalls gegen „ausgedehnte Brauchbarkeit und Zweckmäßigkeit" als Eigenschaften, die dazu führen von schöner Mathematik zu sprechen und bezieht

[11] Vgl. hierzu auch den im Rahmen der Genie-Diskussion von Wenzel gezogenen Vergleich des schaffenden Mathematikers mit einem sich die Regeln der Arithmetik erschließenden Kind (siehe Wenzel (2005) sowie die Ausführungen zu Kapitel 7). Dieser Ansatz beschreibt eine Möglichkeit, mithilfe der Mathematikästhetik zur Beschreibung der mathematischen Praxis beizutragen.

sich dabei auf das erste ausführliche Werk zur Mathematikgeschichte des französischen Mathematikers Jean-Etienne Montucla.[12]
Mit den urteilenden Personenkreisen unterscheiden sich auch die Eigenschaften schön genannter Mathematik, mit denen Kant sich in §62 beschäftigt, von den unter 4.2 besprochenen. Er argumentiert hier nicht gegen das Kriterium der außerordentlichen Regelmäßigkeit, sondern gegen das Kriterium einer „aus der Einfachheit ihrer Konstruktion nicht erwarteten, Zweckmäßigkeit derselben a priori zu allerlei Erkenntnisgebrauch".[13] Dies wiederum macht einen anderen Argumentationsgang und eine Auseinandersetzung mit der Zweckmäßigkeit der Mathematik nötig.

Der Bezug zur Zweckmäßigkeit ist außerdem nicht nur eine Reaktion Kants auf ein „gewohntes" Schönheitskriterium für die Mathematik, sondern auch der Stellung des zitierten Einwandes innerhalb der dritten Kritik geschuldet. So dient die Mathematik im Übergang von der *Kritik der ästhetischen Urteilskraft* zur *Kritik der teleologischen Urteilskraft* nicht nur als kontrastierendes Element zur Schönheit, sondern auch zur Teleologie: Kant charakterisiert die Zweckmäßigkeit der Mathematik als „objektiv und intellektuell" und damit nicht ästhetisch; aber auch als „bloß formal" und damit nicht teleologisch (vgl. KU, §62, S. 274).
Warum nun kann die Mathematik auf Grund ihrer *objektiv-formalen* Zweckmäßigkeit nicht schön, sondern nur „relativ vollkommen" genannt werden?

4.3.1 Die intellektuelle Zweckmäßigkeit der Mathematik

Wie Kant an vielen Beispielen aus der Geometrie Euklids deutlich macht, bedeutet die objektive Zweckmäßigkeit eines mathematischen Gegenstandes seine „Angemessenheit" zur Lösung vielfältiger Probleme. Zu betonen ist dabei, dass die Zweckmäßigkeit nicht die Bedingung der Möglichkeit des betrachteten Gegenstandes ist, denn diese ist ja der zu Grunde liegende Begriff (KU, §62, S. 271). Außerdem begründet nicht die außermathematische Anwendbarkeit die besondere Zweckmäßigkeit, sondern eine „Zweckmäßigkeit in dem Wesen der Dinge" (KU, §62, S. 273) steht im Fokus. Dies folgert Kant aus der Beobachtung, dass der „Eifer der alten Geometer", die innermathematischen Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten ihrer Gegenstände zu erforschen, ungetrübt war, obwohl sie die Anwendbarkeit dieser Ergebnisse z.B. in der Physik noch nicht ahnen konnten (KU, §62, S. 272f).

[12] „Wenn z. B. die Geometrie einige schön genannte Eigenschaften des Zirkels (wie man im Montucla nachsehen kann) aufstellt, und nun gefragt wird: woher kommen ihm diese Eigenschaften, die eine Art von ausgedehnter Brauchbarkeit und Zweckmäßigkeit zu enthalten scheinen? so kann darauf keine andere Antwort gegeben werden als: quaerit delirus, quod non respondet Homerus." (AA VIII, S. 393) Vgl. auch den Hinweis dazu von Konrad Marc-Wogau (vgl. Marc-Wogau, 1938, S. 187).

[13] Dieses Kriterium erinnert stark daran, wie auch in aktuellen Ausführungen der Eigenschaftskomplex der Ökonomie beschrieben wird (vgl. 2.2). Eine genauere Analyse liefert die Zusammenschau der gesamten Ausführungen zum Schönheitsbegriff in Kapitel 5.

Die im Falle der Mathematik beobachtete Zweckmäßigkeit ist demnach eine intellektuell erkannte, also objektive Zweckmäßigkeit, die aber nicht notwendigerweise auf einen bestimmten Zweck gerichtet sein muss. Sie lässt sich „gleichwohl ihrer Möglichkeit nach als bloß formale (nicht reale), d.i. als Zweckmäßigkeit, ohne daß doch ein Zweck ihr zum Grunde zu legen [...] dazu nötig wäre" (KU, §62, S. 274) begreifen.
Die Vielfalt an Möglichkeiten zur Lösung bestimmter Probleme oder zur Herleitung neuer Regeln ist in dem Prinzip, welches der Konstruktion der mathematischen Gegenstände in der Vorstellung zu Grunde liegt, also nicht bereits mitgedacht.[14] Es ist nun nach Kant diese Fülle an nicht vorher bestimmter und aus der Einfachheit des zugrundeliegenden Begriffs nicht zu ersehender Zweckmäßigkeit, die eine besondere Bewunderung für diese Gegenstände auslöst (KU, §62, S. 275ff). Diese Bewunderung darf nun aber nicht mit einem ästhetischen Wohlgefallen verwechselt werden. Kant begründet dies wie folgt:

> „Es ist keine Beurteilung ohne Begriff, die eine bloße subjektive Zweckmäßigkeit im freien Spiele der Erkenntnisvermögen bemerklich macht: sondern eine intellektuelle nach Begriffen, welche eine objektive Zweckmäßigkeit, d.i. Tauglichkeit zu allerlei (ins Unendliche mannigfaltigen) Zwecken deutlich zu erkennen gibt." (KU, §62, S. 277)

Die Grundlage für das scheinbare Schönheitsurteil sieht Kant also in einer *intellektuell erkennbaren* Zweckmäßigkeit und nicht in einem nur emotional fassbaren freien Spiel der Erkenntniskräfte. Durch den formalen Charakter der Zweckmäßigkeit, also durch nicht begrifflich gegebene Zwecke, lassen sich die vorgeblich ästhetisch Urteilenden darüber hinweg täuschen, dass sie eben doch nicht von dem den Gegenstand bestimmenden Begriff (Konstruktuionsprinzip) abstrahieren, wenn sie ihre Bewunderung für die mathematischen Gegenstände auf eine „aus der Einfachheit ihrer Konstruktion nicht erwarteten Zweckmäßigkeit" gründen.

Die Grundlage der beschriebenen Kantischen Argumentation, der Mathematik eine Zweckmäßigkeit zuzuordnen, die sowohl formal als auch objektiv ist, steht zunächst in deutlichem Gegensatz zu den Kantischen Ausführungen zur Vollkommenheit in §15. Dort differenziert er seinen Begriff der Zweckmäßigkeit aus und charakterisiert die Vollkommenheit als eine bestimmte Art der Zweckmäßigkeit. Er unterscheidet zunächst zwischen subjektiver und objektiver Zweckmäßigkeit und die objektive Zweckmäßigkeit noch einmal in äußere und innere. Die Vollkommenheit wird dabei als *objektive innere Zweckmäßigkeit* gedacht (KU, §15, S. 44).[15] Anders als die subjektive Zweckmäßigkeit setzt die objektive immer einen Zweck, d.h. einen Begriff von dem, „was das Ding sein solle" (KU, §15, S. 45) voraus. Die qualitative[16]

[14] Für eine ausführliche Erläuterung des Kantischen Konzepts der mathematischen Konstruktion siehe (Koriako, 1999, S. 237ff).

[15] Demgegenüber steht die Nützlichkeit als objektive äußere Zweckmäßigkeit.

[16] Kant stellt der qualitativen Vollkommenheit auch eine quantitative zur Seite, die aber die qualitative voraussetze und „ein bloßer Größenbegriff" sei, der angebe, dass ein Gegenstand alles enthält, was den gegebenen Begriff ausmacht. Kant spricht hier von „Vollständigkeit". (KU,

Vollkommenheit zeichnet sich nun durch „die Zusammenstimmung des Mannigfaltigen in demselben zu diesem Begriffe (welcher die Regel der Verbindung desseblen an ihm gibt)“ (KU, §15, S. 45) aus. Ein Gegenstand wird also dann qualitativ vollkommen genannt, wenn er so beschaffen ist, dass die ihn ausmachenden Einzeleigenschaften alle darauf ausgerichtet sind, einen vor dem Gegenstand bestimmten Zweck zu erfüllen.
Die Schönheit dagegen ist Kant folgend durch eine *„formale subjektive Zweckmäßigkeit“* (KU, §15, S. 46) gekennzeichnet. D.h. im Gegensatz zu einer objektiven Zweckmäßigkeit ist hier kein Begriff von dem, was das Ding sein soll, vorausgesetzt, sondern lediglich die Forderung nach der „Zusammenstimmung des Mannigfaltigen zu Einem“ (KU, §15, S. 45), ohne aber einen Begriff von diesem „Einen“ zu haben. Kant spricht deshalb auch von einer *„Zweckmäßigkeit ohne Zweck“*. Hieraus ergibt sich für Kant nicht nur ein gradueller, sondern ein *spezifischer* Unterschied zwischen dem ästhetischen Urteil „schön“ und dem logischen Urteil „vollkommen“ (vgl. KU, §15, S. 47).

Zur Möglichkeit einer formalen objektiven Zweckmäßigkeit nimmt Kant in §15 wie folgt Stellung:

> „Eine formale objektive Zweckmäßigkeit aber ohne Zweck, d.i. die bloße Form einer Vollkommenheit (ohne alle Materie und Begriff von dem wozu zusammengestimmt wird, wenn es auch bloß die Idee einer Gesetzmäßigkeit überhaupt wäre) sich vorzustellen, ist ein wahrer Widerspruch.“ (KU, §15, S. 46)

Dies begründet er damit, dass bei einer formalen Zweckmäßigkeit eben von dem begrifflich gegebenen Zweck abstrahiert werde und so „nichts als die subjektive Zweckmäßigkeit der Vorstellungen im Gemüte des Anschauenden“ (KU, §15, S. 46) übrigbleibe. Ohne die Grundlage eines gegebenen Zwecks kann die Zweckmäßigkeit also nicht objektiv intellektuell erkannt und beurteilt werden. Damit verneint Kant in §15 gerade die Art der Zweckmäßigkeit, die er in §62 der Mathematik zuordnet.
Anselm Model sieht hier aber keinen Widerspruch in der Sache, sondern ein „Ungenügen des klassifikatorischen Schemas, in das Kant die Phänomene der ‚Zweckmäßigkeit‘ zu zwingen sucht“ (Model, 1987, S. 280).[17] Widerspricht Kant in §15 der Möglichkeit einer formalen objektiven Zweckmäßigkeit, so macht er dies, um die Vollkommenheit als Kriterium eines Geschmacksurteils auszuschließen. In §62 dagegen nutzt er die objektive formale Zweckmäßigkeit, um der Mathematik trotz

§15, S. 45). Die quantitative Vollständigkeit spielt in der folgenden Kantischen Argumentation keine Rolle mehr, so dass Anselm Model vermutet, Kant habe sie nur unterschieden, um Missverständnisse zu vermeiden (vgl. Model, 1987, S. 262). Konrad Marc-Wogau weist außerdem darauf hin, dass die Klassifikation des Begriffs Vollkommenheit über Kants Werk hinweg nicht konsistent bleibt (vgl. Marc-Wogau, 1938, S. 170f).

[17] Konrad Marc-Wogau dagegen versucht diesem Widerspruch dadurch zu begegnen, dass er zwischen einer „inneren Vollkommeheit“ und einer „äußeren“ unterscheidet (vgl. Marc-Wogau, 1938, S. 172).

der zu beobachtenden Zweckmäßigkeit ohne Zweck den Schönheitsstatus ab- und den einer „relativen Vollkommenheit“ zuzusprechen. Eine Umwidmung der Bedeutung kommt dabei m.E. im Ausdruck „objektive formale Zweckmäßigkeit“ dem Prädikat „objektiv“ bzw. der Rolle der Zwecke für die Existenz der Gegenstände zu. So bestimmt Kant in §15 den Zweck als dasjenige, „dessen Begriff als der Grund der Möglichkeit des Gegenstandes selbst angesehen werden kann“ (KU, §15, S. 45). Eine objektive Zweckmäßigkeit in diesem Sinne kann damit nur auf der Grundlage eines so verstandenen Zwecks, also des „Begriffs von diesem, was es für ein Ding sein solle“ (KU, §15, S. 45), gedacht werden. Bezogen auf die Mathematik ist diese Rolle des Zwecks nicht mehr haltbar. Voraussetzungen der Existenz eines mathematischen Gegenstandes ist das Konstruktionsprinzip und die a priori gegebene Vorstellung des Raums bzw. der Zeit. Ein solcher Gegenstand ist auch ohne einen begrifflich gegebenen Zweck vollständig bestimmt. Dennoch ist ein mathematischer Gegenstand zu „ins Unendliche mannigfaltige Zwecken“ brauchbar. Diese Zweckmäßigkeit kann beurteilt werden, ohne den Begriff eines bestimmten Zwecks vorauszusetzen und ist insofern Zweckmäßigkeit ohne Zweck und keine „objektive Zweckmäßigkeit“ im Sinne der Bestimmung in §15.[18] Allerdings handelt es sich auch nicht um subjektive Zweckmäßigkeit, da diese nur im Subjekt gefühlsmäßig zum Ausdruck kommen kann. Die mathematische Zweckmäßigkeit aber ist intellektuell erkennbar und insofern objektiv.
Damit stimmen auch die Charakterisierungen des Begriffs „formale“ Zweckmäßigkeit in §15 und 62 nicht ganz überein. So stellt sich Kant in §15 die formale Zweckmäßigkeit als eine Zweckmäßigkeit vor, bei der von einem Zweck abstrahiert wird und somit „nichts als die subjektive Zweckmäßigkeit der Vorstellungen im Gemüte des Anschauenden *übrigbleibt*“ (KU, §15, S. 46 [Hervorhebung S.Sp.]). Bezogen auf die Mathematik stellt Kant sich eine Zweckmäßigkeit ohne im Begriff des Gegenstandes enthaltene Zwecke vor:

> „Die mannigfaltigen Regeln, deren Einheit (aus einem Prinzip) diese Bewunderung erregt, sind insgesamt synthetisch, und folgen nicht aus einem Begriffe des Objekts.“ (KU, §62, S. 275)

Als mathematische Gegenstände sind die „mannigfaltigen Regeln“ zwar nicht analytisch aus dem gegebenen Objekt herzuleiten, sie sind aber dennoch als Begriffe gegeben.[19] Dementsprechend sind im Falle der mathematisch-formalen Zweckmäßigkeit nicht nur die „Vorstellungen im Gemüte des Anschauenden“ die beurteilba-

[18] „Die objektive Zweckmäßigkeit zu beurteilen, bedürfen wir jederzeit den Begriff eines Zwecks.“ (KU, §15, S. 45)

[19] Mathematische Urteile sind nach den Ausführungen Kants in der *Kritik der reinen Vernunft* anders als empirische Urteile als synthetische Urteile a priori zu betrachten. D.h. die Erkenntnisse sind nicht bereits im Begriff, der dem betrachteten Gegenstand zugrunde liegt, mitgedacht und insofern nicht analytisch sondern synthetisch. Außerdem geht dem Urteil keine empirische Erfahrung voraus, so dass es kein Urteil a posteriori sein kann. Für eine ausführlichere Darstellung siehe z.B. (Shabel, 2003, S. 102ff) oder (Kauferstein, 2006, S. 25ff), die die Bestimmung des mathematischen Urteils jeweils unter einem speziellen Blick auf Kants Mathematikauffassung ausführen.

ren Spuren. Eine mathematische Zweckmäßigkeit ohne Zweck ist also nicht zwingend eine subjektive.

So ist m.E. auch der Unterschied zwischen der „qualitativen Vollkommenheit“ in §15 und der „relativen Vollkommenheit“ in §62 zu deuten. Die qualitative Vollkommenheit ist nach Kant „die Zusammenstimmung des Mannigfaltingen in demselben zu diesem Begriffe [dem vorher bestimmten Zweck, S.Sp.]“ (KU, §15, S. 45). Die Zwecke eines mathematischen Gegenstandes sind nun nicht vor dem Gegenstand begrifflich bestimmt, sondern gehen erst aus der Vorstellung synthetisch hervor. Daher kann ein mathematischer Gegenstand nicht in diesem Sinne qualitativ vollkommen sein. Dennoch wird an diesen Gegenständen eine „Zweckmäßigkeit derselben a priori zu allerlei Erkenntnisgebrauch“, also eine verstandesmäßig verwertbare Zweckmäßigkeit ohne *im Begriff enthaltenen* Zweck, beobachtet (vgl. Eingangszitat). In der Beschäftigung mit der Mathematik kann so auch eine „Zusammenstimmung des Mannigfaltingen in demselben“ zu einer Vielzahl sehr unterschiedlicher „aus der Einfachheit ihrer Konstruktion nicht erwarteter“ (vgl. Eingangszitat) synthetischer Begriffe, also eine Art der Vollkommenheit, erlebt werden. Kant schlägt den Terminus „relative Vollkommenheit“ vor.

4.3.2 Gegen eine freie Schönheit der Mathematik

Gleichgültig, ob die Vollkommenheit qualitativ oder relativ zu nennen ist: Wird die Mathematik auf Grund einer intellektuell erkennbaren Zweckmäßigkeit mit dem Prädikat „schön“ belegt, so kann dies mit den in §16 eingeführten Kantischen Kategorien gesprochen keine „freie Schönheit“ („pulchritudo vaga“) sein. Diese unterscheidet er dort von der *anhängenden Schönheit* („pulchritudo adhaerens“):

> „Die erstere setzt keinen Begriff von dem voraus, was der Gegenstand sein soll; die zweite setzt einen solchen und die Vollkommenheit des Gegenstandes nach demselben voraus.“ (KU, §16, S. 48)

Damit greift Kant die vorher für ein Geschmacksurteil geforderte Begriffslosigkeit und das dadurch in Gang gesetzte freie Spiel der Erkenntniskräfte wieder auf und setzt sich mit Ansätzen auseinander, die eine Art der Vollkommenheit und die Schönheit gleich setzten. Eine solche Argumentationslinie findet Kant bei seinen Vorgängern seit Alexander Gottlieb Baumgarten in der Philosophie des Schönen häufig – Kant spricht von „namhaften Philosophen“ (KU, §15, S. 44) – und grenzt sich mit dem Ausschluss der Vollkommenheit als Voraussetzung der freien Schönheit explizit von solchen rationalistischen Tendenzen[20] ab.
Ein Schönheitsurteil also, dessen Voraussetzung die Vollkommenheit und damit

[20] Anselm Model nennt vor allem Alexander Gottlieb Baumgarten, Gottfried Willhelm Leibniz und Johann Christoph Gottsched sowie den Baumgarten-Schüler Georg Friedrich Meier, die das Schöne gleichsetzten mit einem (verworren gedachten) intellektuellen Urteil und es so mit dem Begriff der Vollkommenheit in Verbindung bringen (vgl. Model, 1987, s. 260ff).

die objektive innere Zweckmäßigkeit des beurteilten Gegenstandes ist, ist nach Kant kein genuin ästhetisches Urteil. Durch den notwendig als Begriff gegebenen Zweck ist es nicht geeignet die Erkenntniskräfte in ein *freies* Spiel zu versetzen. Es ist allenfalls ein „auf einem Begriffe gegründetes Wohlgefallen“ (KU, §16, S. 51) zu erwarten. Damit ist die anhängende Schönheit keine ästhetische Kategorie im Kantischen Sinne, und nur die freie Schönheit, die Art der Zweckmäßigkeit sowie die Rolle der Vollkommenheit werden zum Prüfstein.

Die Schönheit der Mathematik kann in diesem Sinne für Kant lediglich anhängende, also die Vollkommenheit voraussetzende Schönheit und damit keine ästhetische Kategorie im eigentlichen Sinne sein. Diese Zuordnung bestätigt Kant in §62 auch dadurch, dass er erneut wie bereits in (KU, §15, S. 46f) die Möglichkeit einer „intellektuellen Schönheit“ verneint mit dem Hinweis darauf, dass sich sonst Schönheit und intellektuelles Wohlgefallen nicht mehr spezifisch unterscheiden ließen (vgl. KU, §62, S. 278).

Innerhalb der dargestellten Argumentation in §62 geht Kant bezogen auf die Mathematik allerdings nicht erneut auf das mögliche Miteinander von Vollkommenheit und freier Schönheit ein, welches er in §16 hervorhebt: Dort weist Kant darauf hin, dass bei der Beurteilung eines Gegenstandes häufig auch der Begriff, durch den er gegeben ist und der Zweck, auf den er gerichtet ist, bekannt sind. Dies führt ihn aber in §16 keineswegs dazu, die Möglichkeit eines Geschmacksurteils über gegebene Gegenstände generell in Frage zu stellen. Vielmehr verspricht das Erkennen beider Eigenschaften, der Vollkommenheit *und* der Schönheit, einen besonderen Wert zu haben:

> „Eigentlich aber gewinnt weder die Vollkommenheit durch die Schönheit, noch die Schönheit durch die Vollkommenheit; sondern, weil es nicht vermieden werden kann, wenn wir die Vorstellung, wodurch uns ein Gegenstand gegeben wird, mit dem Objekte durch einen Begriff [...] vergleichen, die zugleich mit der Empfindung im Subjekte zusammenzuhalten, so gewinnt das gesamte Vermögen der Vorstellungskraft, wenn beide Gemütszustände zusammenstimmen.“ (KU, §16, S. 51f)

Allerdings kann das in diesem Zusammenhang gefällte Geschmacksurteil nur dann ein reines sein, wenn der Urteilende von dem bekannten Zweck „abstrahiert“. Freie Schönheit kann also nur beurteilt werden, wenn der Zweck nicht bekannt ist, oder im Urteil von ihm abgesehen wird. (vgl. KU, §16, S. 52)

4.3.3 Zur Schönheit mathematischer Demonstrationen

Für mathematikästhetische Betrachtungen bemerkenswert ist der den §62 abschließende Hinweis auf die ästhetischen Qualitäten einer Präsentation mathematischer Sachverhalte:

> „Eher würde man eine Demonstration solcher Eigenschaften, weil durch diese der Verstand, als Vermögen der Begriffe, und die Einbildungskraft, als Vermögen der Darstellung derselben, a priori sich gestärkt fühlen [...] schön nennen können.“ (KU, §62, S. 278)

Da ein mathematischer Vortrag oder die schriftliche Präsentation also gleichermaßen den Verstand und die Einbildungskraft stärken, besteht das Potential, beide in ein freies Spiel zu versetzen und damit zur Grundlage für ein genuin ästhetisches Urteil über diese *Präsentation*, nicht aber über den mathematischen Gegenstand selbst, zu werden. Denn in diesem Fall sei „wenigstens das Wohlgefallen, obgleich der Grund desselben in Begriffen liegt, subjektiv“ (KU, §62, S. 278f). Wird eine mathematische Präsentation als „elegant“ beschrieben, so beruht dies nach Kant auf einer in der Anschauung gestärkten Einbildungskraft gepaart mit der „*Präzision*, die die Vernunft hineinbringt“ (KU, §62, S. 278, Hervorhebung S.Sp.) und enthält somit die Voraussetzungen für ein ästhetisches Urteil.[21] Diese Einschätzung des ästhetischen Charakters mathematischer Demonstrationen hat sich in Kants Werk erhalten. So weist Wenzel auf die Mitschrift einer Anthropologie-Vorlesung Kants aus dem Wintersemester 1772/73 hin. Dort zieht Kant mathematische Beweise und ihre Demonstrationen als Beispiel heran, um zu zeigen, dass „schöne Vorstellungen von Gegenständen“ (AA XXV, Anthropologie Collins, S. 183) von der Schönheit der zu Grunde liegenden Gegenstände zu unterscheiden sind:

> „Wir haben schöne Vorstellungen von Gegenständen, die an sich gar keine Schönheit haben z.B. mathematische Figuren sind nicht schön, geometrische Demonstrationen können durch ihre Kürze eine Schönheit haben, wegen der Vollständigkeit, des natürlichen Lichts und leichter Faßlichkeit. Das Wohlgefallen an der Erleichterung an Beweisen macht ihre Schönheit aus. Es ist hier eine Übereinstimmung mit den subjektiven Gesetzen des Verstandes, so daß ich etwas sehr leicht einsehen kann.“ (AA XXV, Anthropologie Collins, S. 183)

Es ist also insbesondere die den Verstehensprozess auf eine Wohlgefallen auslösende Weise unterstützende Wirkung (geometrischer) Demonstrationen, die zum ästhetischen Urteil beiträgt. Darauf weisen die in Anschlag gebrachte Eigenschaft der „leichten Fasslichkeit“ und der Terminus „natürliches Licht“[22] ebenso hin, wie das beschriebene „Wohlgefallen an der Erleichterung“ der komplexen Sachverhalte. Dazu trägt die Prägnanz, gekennzeichnet durch „Kürze und Vollständigkeit“, bzw. – wie Kant es in KU, §62 nennt – die „Präzision“ der Präsentation bei.

[21] Auch heute noch wird das Attribut elegant in Bezug auf die Mathematik in der Regel bezogen auf die Präsentation derselben verwendet (vgl. Hinweise von Rota u.a. dargestellt unter 2.5.1).

[22] Hier greift Kant vermutlich auf die mindestens seit Decartes gängige Verwendung des Begriffs natürliches Licht (lumen naturale) als Metapher für eine besondere Art der unmittelbar evidenten verstandesmäßigen Erkenntnis (vgl. Ritter, J./ Gründer, K.(Hrsg.): Historisches Wörterbuch der Philosophie Bd. 5, Darmstadt, 1992. Artikel *Lumen naturale, Neuzeit*) zurück.

Christian Helmut Wenzel weist darauf hin, dass hier sowohl Elemente einer subjektiven wie auch einer objektiven Zweckmäßigkeit in Zusammenhang mit einem ästhetischen Geschmacksurteil gebracht werden und schließt daraus, dass für Kant die subjektive Zweckmäßigkeit zu diesem Zeitpunkt noch nicht notwendig mit dem ästhetischen Urteil verbunden war (vgl. Wenzel, 2001, S. 426). Vielleicht hatte Kant dort die strikte Unterscheidung zwischen den beiden Arten der Zweckmäßigkeit noch nicht vollzogen, wie Wenzel es in seinen späteren Ausführungen beschreibt (vgl. Wenzel, 2005, S. 138f). Da Kant sich aber auch in dieser Anthropologie-Vorlesung ausdrücklich nur auf die Schönheit mathematischer Demonstrationen bezieht, ist diese Einschätzung mindestens fraglich. Denn Kant geht, wie dargestellt, auch zu einem Zeitpunkt auf die Eleganz als ästhetische Kategorie ein, zu dem er die Unterscheidung von objektiver und subjektiver Zweckmäßigkeit sicher vollzogen hatte und dies in Bezug auf das ästhetische Urteil auch in §62 gerade zur Abgrenzung von der relativen Vollkommenheit herangezogen hatte.

4.4 Probiersteine für die mathematische Schönheit

Immanuel Kant benutzt in der *Kritik der Urteilskraft* die Mathematik und Versuche, ihre Schönheit zu begründen, als Kontrast, um bestimmte Eigenschaften seiner Konzeption des Geschmacksurteils herauszustellen. Dadurch werden gleichzeitig Eigenschaften bzw. Argumentationslinien markiert, die es für Kant problematisch machen, von einem ästhetischen Urteil bezogen auf die Mathematik zu sprechen. Durch ihren dezidierten Bezug zur Mathematik – wie Kant sie sieht – und zur Frage nach dem Schönen allgemein sind es diese „Nebenprodukte“, die aus mathematikästhetischer Perspektive besonders interessant sind. Im Folgenden sollen deshalb diese für eine Mathematikästhetik kritischen Punkte zusammenfassend herausgestellt und diskutiert werden.

4.4.1 Zusammenschau der Kantischen Einwände

Bezogen auf das zu beurteilende Objekt wurde in 4.3.1 und 4.3 die Relevanz der Zweckmäßigkeit herausgearbeitet. Dabei stellt sich die Frage, ob dem beurteilten Gegenstand eine subjektive oder objektive Zweckmäßigkeit anhängt. Im letzteren Fall ist zu entscheiden, in welchem Sinne dieser Terminus zu verstehen ist, wobei die Notwendigkeit des Zweckes für die Existenz des Gegenstandes eine zentrale Rolle spielt. Eine weitere charakteristische Art der Zweckmäßigkeit, die schönen Gegenständen im Allgemeinen sowie der Mathematik nach Kant zukommt, ist die formale. Auch im Falle einer solchen „Zweckmäßigkeit ohne Zweck“ sind unterschiedliche Formen möglich. So kann einerseits ein Zweck gedacht werden, der zwar im Begriff des betrachteten Gegenstandes enthalten ist, von dem aber im

vorliegenden Urteil abstrahiert wird. Andererseits ist das Fehlen des Zwecks aber auch dann denkbar, wenn ein möglicher Zweck nicht analytisch aus dem Begriff des Gegenstandes gefolgert werden kann, wie dies für die Mathematik gilt.
Neben der rein objektbezogenen Frage nach den Bedingungen der Existenz des Gegenstandes wird mit der Unterscheidung von subjektiver und objektiver Zweckmäßigkeit bereits der Blick auf den Urteilenden und die Art, wie dieser die Zweckmäßigkeit erkennt, gelenkt. So steht bezogen auf den Prozess des Urteilens das Zusammenwirken der Erkenntniskräfte des urteilenden Subjekts im Vordergrund. Dies zeigt die unter 4.2 dargestellte Kontrastierung. Hier ist die Frage zu stellen, ob der Verstand der Einbildungskraft dient und es so zu einem „freien Spiel der Erkenntniskräfte" kommt oder ob umgekehrt die Einbildungskraft einem intellektuellen Urteil vorausgeht. Da dieser Prozess aber auch abhängig vom betrachteten Gegenstand und seinen Eigenschaften ist, kann auch der zugrunde liegende Fragenkomplex nicht allein angesichts der subjektiven Gestimmtheit des Urteilenden beantwortet werden.
Dennoch ist das, was der Prozess der Beurteilung auslöst, zentral für die Frage nach dem ästhetischen Charakter eines Urteils. Insbesondere die Ausführungen unter 4.1.1 zeigen, dass nach der Beziehung von Gefühl, Wahrnehmung des Gegenstandes und Urteil zu fragen ist. Ob positive Emotionen unmittelbar auf die Wahrnehmung eines Gegenstandes folgen, durch das Spiel der Erkenntniskräfte hervorgerufen werden oder als intellektuelles Wohlgefallen einer verstandesmäßigen Erkenntnis geschuldet sind, ist dabei zentral für die Entscheidung über die Art des Urteils. In diesem Zusammenhang spricht sich Kant, wie unter 4.2.1 (S. 94) sowie 4.3.1 (S. 101) gezeigt, keineswegs grundsätzlich gegen eine Kombination intellektueller und ästhetischer Urteile aus, sondern erkennt vielmehr an, dass an vielen Stelle das eine dem anderen zwangsläufig vorausgeht, aber dennoch die Möglichkeit besteht, die Bereiche zu trennen.

Die Eigenschaften, die Kant heranzieht, um der mathematischen Schönheit den Charakter einer ästhetischen Eigenschaft abzusprechen, bewegen sich, wie diese Zusammenschau zeigt, auf unterschiedlichen Ebenen. So werden sowohl bestimmte Eigenschaften der beurteilten Objekte herangezogen als auch das urteilende Subjekt betrachtet. Auf der Ebene des Subjekts wiederum ist einerseits der Prozess des Urteilens, andererseits aber auch die Art, wie sich dieser Prozess äußert, zu beschreiben. Dabei zeigen die Darstellungen zum Schönheitsbegriff allgemein und mit Bezug zur Mathematik, dass die unterschiedlichen Ebenen innerhalb der Kantischen Theorie eng verzahnt sind. Vor diesem Hintergrund kann die folgende schlagwortartige Zusammenschau das Spannungsfeld aufspannen, in dem in der Kantischen Ästhetik Geschmacksurteile und Urteile über mathematische Gegenstände kontrastiert werden.

Um zu entscheiden, ob es sich bei einem herangezogenen (mathematischen) Beispiel um ein Geschmacksurteil handeln kann, betrachtet Kant in der *Kritik der Urteilskraft* sowohl die beurteilten Gegenstände als auch die Begründungen des

Urteilenden für sein Urteil sowie dessen emotionale Beteiligung im Spannungsfeld von

- Art und Rolle der Zweckmäßigkeit,
- Verhältnis von Einbildungskraft und Verstand sowie
- der Beteiligung des Emotionalen.

In diesem Feld verortet Kant, wie oben beschrieben, verschiedene Eigenschaften: Die *freie Schönheit* eines Gegenstandes etwa als Ergebnis eines ästhetischen Geschmacksurteils und Referenzgröße zeichnet sich im Sinne der Kantischen Theorie wie oben dargestellt als formale subjektive Zweckmäßigkeit, bei der von einem Zweck abstrahiert wird. So kann ein freies Spiel der Erkenntniskräfte angestoßen werden, das die Ursache ist für ein ästhetisches, also nicht auf einem intellektuellen Urteil gründenden, Wohlgefallens.
Die *Regelmäßigkeit* geometrischer Gestalten dagegen zeugt Kant folgend von einer objektiven Zweckmäßigkeit, bei deren Beurteilung die Erkenntniskraft im Dienst des Verstandes steht, so dass das hervorgerufene Gefühl lediglich ein intellektuelles Wohlgefallen darüber sein kann, dass der Gegenstand besonders gut mit dem in der Regelmäßigkeit enthaltenen Begriff übereinstimmt. Würde im Urteil über die Regelmäßigkeit vom Zweck abstrahiert, wäre nicht ästhetische Unterhaltung, sondern Langeweile das Ergebnis.
Eine weitere Eigenschaft, die Kant in der mathematischen Praxis beobachtet, bezeichnet er mit *relativer Vollkommenheit*. Die Grundlage eines solchen Urteils ist eine zwar formale aber objektive Zweckmäßigkeit, die sich durch eine nicht zu erwartende Vielfalt erst aus dem Begriff der betrachteten Gegenstände synthetisch zu konstruierender Zwecke auszeichnet. Diese Zwecke sind damit ihrerseits nicht für die Existenz des beurteilten Gegenstandes notwendig, so dass nicht von qualitativer Vollkommenheit die Rede ist, aber dennoch als Begriffe gegeben. Die Einbildungskraft spielt bei der Konstruktion dieser Zwecke in der Anschauung eine Rolle. Zu ihrer Erkenntnis aber ist der Verstand vorrangig, so dass Kant auch hier ein intellektuelles Wohlgefallen ausmacht, das wegen der vorausgehenden Erkenntnis der Vollkommenheit nur eine anhängende Schönheit sein kann. Demgegenüber sieht er bei der Beurteilung der *Eleganz* mathematischer Demonstrationen sowohl die Einbildungskraft als auch den Verstand beteiligt, so dass er ihr ein zwar auf Begriffen gründendes aber dennoch subjektives Wohlgefallen zuspricht.

4.4.2 Aktuelle Bezüge des Ansatzes

Durch die spezifische Unterscheidung von ästhetischem und intellektuellem Wohlgefallen bricht Kant mit der durch Baumgarten geprägten rationalistischen Ästhetik und kann so auch als Wegbereiter aktueller Ansätze gesehen werden. Auch wenn der Begriff der Schönheit aktuell keine prominente Rolle in der allgemeinen Ästhetik mehr spielt, ist der Ansatz, sowohl die Ebene des Objekts als auch die der subjektiven Einstellung im Urteilsprozess einzubeziehen, weiterhin aktuell. Gerade der für die heutige Diskussion zentrale Begriff der „ästhetischen Erfahrung“ lebt häufig in ähnlich aufgespannten Theorien.[23]

Eine explizit auf die Kantische Ästhetik zurück gehende Definition der ästhetischen Erfahrung findet sich z.B. bei Franz von Kutschera (1988). Auf die Kantische Theorie aufbauend und das „was man heute gemeinhin unter ‚ästhetischer Erfahrung‘ versteht“ (Kutschera, 1988, S. 74) integrierend, ergibt sich für Kutschera folgende Begriffsbestimmung:

> „Ästhetische Erfahrung ist eine Form äußeren Erlebens, in der die Aufmerksamkeit sich auf die sinnliche Erscheinungsweise des Gegenstandes richtet. Zu dieser zählen neben seinen optischen, akustischen, haptischen, Geruchs- und Geschmackseigenschaften auch seine expressiven Qualitäten.“ (Kutschera, 1988, S. 74)

Zunächst ist ein Bezug zu Kant nicht direkt erkennbar. Eine kurze Klärung des hier verwendeten Schlüsselbegriffes des „äußeren Erlebens“ aber lässt dies deutlich werden und wendet außerdem den Blick auf die Rolle der sinnlichen Wahrnehmung als ein weiteres in den bisherigen Ausführungen nicht beachtetes Motiv.

Kutschera unterscheidet zunächst allgemein zwischen äußeren und inneren Erfahrungen. Diese wiederum werden jeweils in die zwei Typen „Beobachten“ und „Erleben“ unterteilt. Die erste Unterscheidung ist dabei ein Differenzieren bezüglich der Art der Gegenstände (psychisch versus materiell) der Erfahrung und damit auch verbunden mit der Art des Erfassens (Innewerden versus Wahrnehmung vermittels unserer Sinne).[24] Der Begriff der äußeren Erfahrung wird explizit gleichbedeutend mit sinnlicher Wahrnehmung von äußeren realen Gegenständen verwendet.
Die zweite Unterscheidung zwischen Beobachten und Erleben dagegen bezieht sich auf das Gewicht, das emotionalen Qualitäten in der jeweiligen Erfahrung zukommt.[25] Bei einer „Beobachtung“ geht es lediglich um das Erfassen von „objektiven“ Informationen über den Gegenstand, nicht aber um die Bedeutung des Gegenstandes für den Beobachtenden oder seine emotionalen Folgen. Gefühle wie etwa Befriedigung oder Enttäuschung können eine Beobachtung begleiten, sind aber nicht integraler Bestandteil der Erfahrung. Wäre das der Fall, so würde Kutschera von „Erlebnis“ sprechen, denn „für Erleben sind emotionale Komponenten wesentlich“ (Kutschera, 1988, S. 16). Wichtig ist hier die *emotionale Bedeutung* für den Betrachtenden, also die Art und Weise, wie der Gegenstand aufgefasst wird.

[23] Vgl. dazu (Carroll, 1999, S. 156ff) oder (Reicher, 2005, S. 56ff).

[24] „Äußere Erfahrung ist Erfahrung vermittels unserer (äußeren) Sinne von Gegenständen oder Sachverhalten der Außenwelt. Innere Erfahrung besteht im Innewerden oder Innesein eigenseelischer Zustände, Vorgänge oder Akte.“ (Kutschera, 1988, S. 11) Leider spezifiziert Kutschera dabei den Begriff „eigenseelisch“ nicht. Da er aber häufig über den alltagssprachlichen Gebrauch argumentiert, kann davon ausgegangen werden, dass er damit das Gewahrwerden *psychischer* Gegenstände, also nicht-materielle und nicht-abstrakte Gegenstände meint.

[25] „Beobachtungen sind Erfahrungen, in denen emotionale Komponenten keine Rolle spielen.“ (Kutschera, 1988, S. 13)

Kutschera betont ausdrücklich, dass es sich bei diesen Polen der Unterscheidung lediglich um *Typen* der Erfahrung handelt, also viele Zwischenformen denkbar sind (vgl. Kutschera, 1988, S. 21).

Wenn ästhetische Erfahrung wie oben zitiert „äußeres Erleben“ ist, so handelt es sich Kutschera zufolge also gerade um eine sinnliche Wahrnehmung von Gegenständen der äußeren Umwelt, in der die Emotionen des Subjekts eine wesentliche Rolle spielen. Es geht also um eine *emotional gefärbte sinnliche Wahrnehmung der realen Welt.* Aus dieser Bestimmung der ästhetischen Erfahrung als „äußeres Erleben“ folgt für Kutschera ebenfalls ein vernichtendes Ergebnis in Bezug auf die Möglichkeiten einer Mathematikästhetik:

> „Theoreme und geometrische Verhältnisse, sofern sie nicht an physischen Objekten auftreten, [sind] keine Gegenstände ästhetischer Beurteilung [. . .].“
> (Kutschera, 1988, S. 88)

Franz von Kutschera begründet seine Absage an das Ästhetische der „Muster der Mathematiker“ mit dem Hinweis, es handele sich hier nicht um *äußere* Erfahrungen.[26]

Mit der Betonung der sinnlichen Wahrnehmung als Voraussetzung eines ästhetischen Urteils reiht sich Kutschera einerseits in die aktuelle Diskussion ein, andererseits greift er aber auch einen bereits bei Baumgarten bestehenden Topos auf (vgl. Reicher, 2005, S. 35). Nicht von Ungefähr entstand der Begriff Ästhetik aus dem griechischen Aisthesis – sinnliche Erkenntnis. In der Diskussion um den ästhetischen Charakter bestimmter Urteile ist demnach auch die Frage zu stellen, ob die Grundlage des Urteils ein inneres oder äußeres Erleben ist. Das oben aufgespannte Spannungsfeld, in dem mathematische Gegenstände und das Ästhetische verortet werden müssen, kann somit um ein weiteres Schlagwort erweitert werden. Entscheidend ist somit auch

- die Rolle der sinnlichen Wahrnehmung.

Auch Kant geht auf die sinnliche Wahrnehmung als Grundlage ästhetischer Urteile ein. Allerdings wird für ihn die Nichtsinnlichkeit mathematischer Gegenstände nicht zum Grund, die Möglichkeit ästhetischer Werturteile zur Mathematik zu verneinen, oder wenigstens nicht der vorrangige.

[26] Auch Kutschera hat sich ausgiebig mit der Philosophie der Mathematik auseinandergesetzt, so dass sein Einwand ähnlich ernst zu nehmen ist, wie der Kantische gegen die ästhetische Beurteilung der Mathematik. An dieser Stelle in seiner *Ästhetik* richtet sich Kutschera aber nicht gegen eine allgemeine Mathematikersicht, sondern vielmehr gegen die unter 3.3 dargestellte Position des britischen Philosophen Francis Hutcheson und dessen inneren Sinn für Ästhetisches.

4.4.3 Möglichkeiten für die Mathematikästhetik

Das Hauptinteresse Kants im Rahmen seiner Ästhetik und wohl auch der Grund, warum er sich überhaupt mit Urteilen über das Mathematische im Rahmen der *Analytik des Schönen* auseinandersetzt, ist darin zu sehen, dass durch den Kontrast bestimmte Eigenschaften eines genuin ästhetischen Urteils herausgestellt werden konnten. Durch den Abgleich einzelner Eigenschaften aber kann jeweils nur eine sichere negative Aussage über den ästhetischen Charakter der betrachteten Urteile gefällt werden. Stimmen etwa die Einschätzungen einer Eigenschaft mit allen oben über die Schönheit zusammengefassten Eigenschaften überein, so liegt es in der Natur der Sache, dass so nur über *Parallelen* zum Kantischen Geschmacksurteil entschieden werden kann. So taucht z.B. die im vierten Moment der *Analytik des Schönen* angeführte Notwendigkeit ästhetischer Urteile, nicht in einem der oben aufgespannten Fragenkomplexe auf.

Die auf Grund der Kantischen Diskussion der Mathematik innerhalb seiner Ästhetik gemeinsam mit dem Kutscheraschen Einwand entstandene Spannungsfelder bieten m.E. aber dennoch eine Möglichkeit der Anwendung, die von der aufgezeigten, der Auswahl geschuldeten Problematik nicht berührt wird: Durch die Einordnung in diesen Spannungsfeldern können Urteile über die Mathematik aus der Perspektive einer allgemeinen Ästhetik beschrieben werden. Ziel der Untersuchungen ist es dann nicht zuerst, zu entscheiden, ob und inwiefern diese oder jene Eigenschaft der Mathematik im Kantischen Sinne eine genuin ästhetische ist. Vielmehr besteht zunächst nur die Hoffnung, diese Eigenschaften begrifflich fassbar zu machen und dabei einen Blickwinkel einzunehmen, den nur die Ästhetik bietet. Diese spezielle Sicht zeichnet sich insbesondere durch die auf die Verbindung der Ebenen des Objekts und des Subjekts gerichtet Aufmerksamkeit aus. Eine weitere Besonderheit der „ästhetischen Perspektive“ ist, dass dem Emotionalen die Möglichkeit eingeräumt wird, nicht nur Beiwerk der Erkenntnis zu sein.

Die Auswahl der Probiersteine als Argumente in einer negativen Antwort auf den ästhetischen Charakter mathematischer Gegenstände bietet dabei einen speziellen Ausschnitt der ästhetischen Sicht. Dieser kann aber gerade fruchtbringend für eine Diskussion im Rahmen der Mathematikästhetik sein, da er, wie §62 der *KU* zeigt, eine u.U. entlarvende Perspektive auf mathematikästhetische Aussagen innerhalb der mathematischen Praxis erzwingt.[27]

[27] Bei einer Anwendung außerhalb der Kantischen Theorie ist allerdings auf die Besonderheiten des Kantischen Mathematikbildes und die Differenzen zur aktuellen Auffassung zu achten.

Kapitel 5

Eine Theorie des Schönen in der Mathematik

Für die Zusammenschau der Ergebnisse zur Schönheit der „Muster der Mathematiker“ sollen im Folgenden die Eckpfeiler des aus der kantischen Argumentation herausgearbeiteten Spannungsfeldes – die Rolle der Zweckmäßigkeit, Verhältnis und Funktion von Verstandeskräften und Emotionen sowie die Rolle der sinnlichen Wahrnehmung – als Prüfsteine der aktuellen Begriffe mathematischer Schönheit herangezogen werden. So können die mathematischen Schönheitskriterien im Kontrast der Kantischen Kritik betrachtet werden, und es tritt der Charakter der in Kapitel 2 systematisch dargestellten Eigenschaftskomplexe deutlicher hervor und wird begrifflich fassbar. Umgekehrt kann im Spiegel der zeitgenössischen Auffassung das von Kant kritisierte Phänomen eingegrenzt und der aktuellen mathematikästhetischen Perspektive gegenübergestellt werden. Die in Kapitel 3 skizzierten vorkantischen Positionen aus der Geschichte der Mathematikästhetik bieten dabei ein weiteres kontrastierendes Element.

5.1 Relative Vollkommenheit als Facette mathematischer Schönheit

Wenn Kant in §62 der *Kritik der Urteilskraft* das mathematikästhetische Argument der „aus der Einfachheit ihrer Konstruktion nicht erwarteten, Zweckmäßigkeit derselben a priori zu allerlei Erkenntnisgebrauch“ diskutiert, trifft er mindestens auf den ersten Blick zentrale Charakteristika mathematischer Schönheit. So spricht er sich damit gegen den genuin ästhetischen Charakter verschiedener in Kapitel 2 explizierter Eigenschaftskomplexe aus: Zum einen wird die „Einfachheit der Konstruktion“ in Relation zu weiteren Eigenschaften gestellt und so mindestens eine Facette dessen beschrieben, was oben unter der Bezeichnung Ökonomie dargestellt wurde. Des weiteren steht die Zweckmäßigkeit und damit die Tragweite des betrachteten Gegenstandes im Fokus. Nicht zuletzt verweist das Ziel „allerlei Erkenntnisgebrauch“ wiederum auf ein epistemisches Moment. Inwieweit diese aus dem ersten Eindruck entstehenden Parallelitäten auch einem konkreten Vergleich standhalten, ist im Weiteren zu klären. Angesichts der Problematik bezüglich der Interpretation der Kantischen Begrifflichkeiten, werden dazu neben den Ergebnissen aus Kapitel 4 insbesondere die in §62 der *Kritik der Urteilskraft* ausgeführten Beispiele herangezogen.

Zunächst ist in dem von Kant angeführte Argument die klassische Form der Ökonomie, die Mittel-Resultat-Relation, enthalten (vgl. 2.2.2): Ein mathematischer Gegenstand gilt dann als besonders schön, wenn er trotz einer einfachen Gestalt bzw. Konstruktion einen großen Anwendungsbereich findet. Ein Blick auf die von Kant in §62 vorgestellten Beispiele für diese Beziehung verweist aber auch auf die der Ökonomie zugeordneten Beziehung von Einfachem und Komplexem (vgl. 2.2.3). So beschreibt er etwa, wie hilfreich die Figur des Kreises für die Lösung geometrischer Konstruktionsaufgabe ist:

> „In einer so einfachen Figur, als der Zirkel ist, liegt der Grund zu einer Auflösung einer Menge von Problemen, deren jedes für sich mancherlei Zurüstung erfordern würde, und die als eine von den unendlich vielen vortrefflichen Eigenschaften dieser Figur sich gleichsam von selbst ergibt.“ (KU, §62, 272)

Die einfache Figur des Kreises wird also zur Lösung für eine Vielzahl einzeln betrachtet schwer zugänglicher Probleme. Des Weiteren hebt Kant die Eigenschaft des Kreises hervor, unendlich viele mögliche Lösungen auf einmal fassen zu können, etwa als geometrischer Ort aller rechtwinkliger Dreiecke über einer gegebenen Grundlinie. In diesem Sinne gibt Kant hier implizit ein Beispiel für das Hutchesonsche Kriterium der Einheit in Mannigfaltig (vgl. 3.3). Außerdem verweist das Beispiel auf den Zusammenhang einer vereinfachenden, zusammenfassenden Lösung komplexer oder zunächst komplex erscheinender Probleme.

Wenn Kant in diesem Zusammenhang von „Einfachheit der Konstruktion“ spricht, so ist hier eine objektive Einfachheit gemeint, in dem Sinne, dass er dabei direkt den zugrunde liegenden Begriff anspricht. So nutzt er an anderer Stelle die Umschreibung „so einfach auch ihre Erklärung ist, welche ihren Begriff bestimmt“ (KU, §62, S. 272). Dies kann zu der unter 2.2.1 beschriebenen subjektiven Zugänglichkeit beitragen, ist aber, da es um mathematische Begriffe und Konstruktionen im Kantischen Sinne geht, nicht wie diese von der Verfasstheit und den Vorerfahrungen des betrachtenden Subjekts abhängig.

Wie unter 4.3.1 ausführlich dargestellt, weist Kant der Mathematik eine objektive, aber dennoch formale Zweckmäßigkeit zu. Ein mathematischer Gegenstand kann, ohne dass dies in dem ihm zugrunde liegenden Begriff enthalten wäre, beliebig viele (innermathematische) Zwecke erfüllen. Die Kantischen Beispiele zeigen, dass diese Zwecke insbesondere in der Lösung vielfältiger Probleme durch ein einziges Prinzip – etwa dem Kreis als geometrischer Lösungsmenge – bestehen. Damit entspricht die beschriebene Zweckmäßigkeit zunächst dem Aspekt der Tragweite als

weitreichender Heuristik (vgl. 2.1.2). Die Zweckmäßigkeit des zweiten der oben dargestellten Tragweiteaspekte – der innermathematischen Vernetzung – nimmt Kant im Rahmen seiner Beispiele nicht explizit in den Blick.
Auch kann die Kantische „Tauglichkeit zur Auflösung vieler Probleme“ (KU, §62, S. 271) mit der als weitreichende Heuristik in den Schönheitsbegriff eingehenden Eigenschaft nicht vollständig identifiziert werden. Wird diese aktuelle Position doch vom *Prozess* des Erkennens aus beschrieben und etwa das Moment der Intuition in der Erkenntnis entsprechender Lösungszusammenhänge stark gemacht. Die mathematische Zweckmäßigkeit dagegen bewertet Kant vom verstandesmäßig fassbaren *Produkt* aus und kann sie so als objektiv beschreiben.[1] In diesem Sinne ist auch die Formulierung der „Zweckmäßigkeit zu allerlei Erkenntnisgebrauch“ von den mathematischen Aussagen aus zu verstehen und zielt nicht in erster Linie auf das tiefe Verstehen oder das Aha!-Erlebnis des rezipierenden Subjektes.

Die Eigenschaft mathematischer Gegenstände, die Kant in §62 lieber als „relative Vollkommenheit“ denn als Schönheit bezeichnen würde, entspricht somit dem unter 2.2 beschriebenen Eigenschaftskomplex der inhaltlichen Ökonomie soweit dieser nicht die Erfahrungen, Fähigkeiten und Befindlichkeiten des betrachtenden Subjekts einbezieht.

5.2 Einbildungskraft, Verstand und Gefühl im mathematikästhetischen Urteil

Die Kantische Einschätzung, ob ein Urteil als Geschmacksurteil gelten kann oder nicht, beruht maßgeblich auf der Rolle der beteiligten Erkenntniskräfte und der Emotionen. So sind für Kant die zu seiner Zeit gängigen Begründungen für die Schönheit der Mathematik in erster Linie auf den Verstand gegründet. Ob diese Einschätzung auch mit Blick auf die Charakteristika mathematischer Schönheit nach Kapitel 2 gilt, ist im Folgenden zu diskutieren.[2]
Das Urteil über die „relative Vollkommenheit“ und damit bestimmte Facetten der Eigenschaftskomplexe Ökonomie und Tragweite (s.o.) bedarf als Urteil über begrifflich fassbare Zweckmäßigkeiten immer der verstandesmäßigen Grundlage. Bei

[1] Hier zeichnet sich eine Diskrepanz zwischen Kantischer Einschätzung einerseits und Mathematikästhetik vor dem Hintergrund mathematischer Praxis andererseits ab, die im Zusammenhang mit der Frage nach dem Künstlercharakter des Mathematikers noch deutlicher wird (vgl. Kapitel 7 bzw. 8).

[2] Mit der *Kritik der Urteilskraft* ging, wie unter 4.2 dargestellt, ein Bruch mit rationalistischen Theorien des Schönen einher und die erstmals in den Vordergrund gestellte Rolle der Einbildungskraft für das ästhetische Urteil konnte die darauffolgenden Überlegungen zur Ästhetik maßgeblich beeinflussen. So bleibt diese Frage auch vor dem Hintergrund zeitgenössischer Ästhetiktheorien ein kritisches Moment für die Einordnung der in Kapitel 2 herausgearbeiteten Eigenschaften.

anderen der oben explizierten Eigenschaftskomplexe spielen Verstand und Einbildungskraft eine weniger offensichtliche Rolle. Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang die epistemische Transparenz (vgl. 2.3).

Wie oben ausgeführt, setzt sich auch Kant im Rahmen der *Analytik des Schönen* mit der Beobachtung auseinander, dass Geschmacksurteile über Gegenstände gefällt werden sollen, die bereits begrifflich erfasst wurden (vgl. 4.2.1). Demnach ist es auch im Rahmen der Kantischen Ästhetik grundsätzlich möglich, trotz vorhergehenden Verstehens eines Gegenstandes die Gemütskräfte in ein freies Spiel zu versetzten und so dennoch zum Schönheitsurteil zu gelangen. Für die Einordnung des mathematikästhetischen Schönheitsurteils ist diese grundsätzliche Möglichkeit von besonderer Bedeutung, gilt es hier doch als Gemeinplatz, dass der Erfahrung mathematischer Schönheit das verständige Nachvollziehen des betrachteten Gegenstands notwendig vorausgehen muss.
Eine Besonderheit der mathematischen Schönheit besteht darin, dass mit der epistemischen Transparenz ein epistemisches Moment zum integralen Bestandteil des ästhetischen Urteils wird. Die unter diesen Eigenschaftskomplex gefasste besondere Art des tiefen Verstehens hebt sich also von dem eine ästhetische Erfahrung erst ermöglichenden Wissen um die Sachverhalte ab. Vielmehr verschmilzt das plötzliche, umfassende, tiefe Verstehen in Form von Aha!-Erlebnissen mit dem mathematikästhetischen Erlebnis selbst. Dieses ist wie unter 2.3.2 ausgeführt von der Verfasstheit des rezipierenden Subjekts abhängig. Die Wahrnehmung von Klarheit und struktureller Ökonomie bedarf der Intuition und das „Aha!“ wird mindestens emotional begleitet bzw. allererst durch die Emotionen als solches wahrgenommen und so von anderen Arten des Verstehens unterschieden.
Damit wird zumindest ein Zusammenhang von Verstand und Einbildungskraft dokumentiert, der von anderer Art als das mathematisch-begriffliche Urteil ist. Die „gegebenen Vorstellungen“ von den mathematischen Gegenständen sind zwar „gar rational“, werden im Urteil aber „auf das Subjekt (sein Gefühl) bezogen“ wie es Kant zu Beginn der *Kritik der Urteilskraft* auch für „jederzeit ästhetische“ Urteile erlaubt (KU, §1, S. 5)[3].
Für die Einordnung des jeweils gefällten Urteils ist es nach Kant wie beschrieben nicht nur von besonderer Bedeutung, wie die Erkenntniskräfte zusammenspielen, sondern auch wie das jeweilige Wohlgefallen erfasst werden kann. Die Wahrnehmung der epistemischen Transparenz und damit die Unterscheidung des mathematikästhetisch wirksamen von anderen Arten des Verstehens geschieht durch die begleitenden Emotionen. Dies gilt auch für die Wahrnehmung der ästhetischen Schönheit nach Kant.

Am Beispiel der epistemischen Transparenz als stark subjektorientierter Eigenschaft, tritt die Rolle des Emotionalen naturgemäß besonders hervor. Die Ausführungen zum Eigenschaftskomplex der emotionalen Wirksamkeit unter 2.4 zeigen außerdem, dass auch die objektgebundenen Eigenschaften wie Tragweite oder der

[3] Vgl. dazu auch die Darstellung unter 4.2.1

Aspekt der Ökonomie, der als relative Vollkommenheit beschrieben werden kann, im mathematikästhetischen Urteil von qualifizierenden Gefühlen begleitet werden. Es ist gerade die „erstaunliche“ Ökonomie oder die „unerwartete“ Tragweite, die mathematikästhetisch wirksam ist.
Für die Wahrnehmung der Schönheit der „Muster der Mathematiker“ ist somit die emotionale Wirkung von zentraler Bedeutung. Dies wird von jenen Autoren bekräftigt, die angesichts schöner Mathematik sogar ein spezielles „ästhetisches Gefühl“ beschreiben. Die Rolle von Emotionen – ob spezifisch ästhetisch oder qualifizierend – in der Schönheitswahrnehmung beschreibt eine Parallele zum kantischen Geschmacksurteil, die Kant in seiner Argumentation gegen Mathematisches als ästhetische Gegenstände nicht in Betracht zieht.

Die in Kapitel 3 dargestellten, in antiker Tradition stehenden historischen Positionen lassen die subjektiv-emotionale Seite aktueller mathematikästhetischer Kriterien im Kontrast noch deutlicher hervortreten: Dort sind es rein rational fassbare Eigenschaften der Objekte, die die Schönheit eines Gegenstandes bestimmen, während in der mathematischen Praxis mindestens mit der epistemischen Transparenz und der emotionalen Wirksamkeit der subjektive Prozess des Rezipierens im Zentrum stehen. In der phytagoreeischen Ästhetik wurden zwar diesen Eigenschaften je bestimmte Wirkungen auf den Rezipienten zugesprochen, in den aktuellen Konzepten der Mathematikästhetik dagegen ist es die Wirkung selbst, die zum relevanten Kriterium wird.

Für einen allgemeinen Schönheitsbegriff und die Vorstellung vom Geschmacksurteil gelten diese Gegensätzlichkeiten auch zwischen der kantischen und der rationalistischen Ästhetik in antiker Manier. Bezogen auf die Bewertung der Mathematik bezieht sich Kant jedoch weiterhin auf rein objektive, produktorientierte Eigenschaften, die er dann wiederum als fälschliches Schönheitsurteil entlarvt. Den so entstehenden Kontrast nutzt er systematisch, um die Spezifika genuin ästhetischer Urteile deutlich zu machen.

Bei einem auf der epistemischen Transparenz, wie sie oben beschrieben wurde, fußenden mathematischen Schönheitsurteil handelt es sich also um ein (ausschließlich) emotional zu fassendes, positives Erlebnis, in dem sowohl Verstand als auch Einbildungskraft angesprochen werden. Ob diese nun tatsächlich in ein begrifflich unbestimmtes also „freies Spiel“ versetzt werden, wie Kant es sich für genuin ästhetische Urteile vorstellt, kann hier nicht abschließend beantwortet werden. Da ein grundsätzliches, rationales Erfassen der betrachteten Gegenstände dem mathematisch-ästhetischen Werturteil vorausgehen muss und auch besondere Arten des Verstehens als Facetten des mathematikästhetischen Erlebnisses beschrieben werden, handelt es sich dabei um eine „rational vermittelte“ Erfahrung. Das Spiel der Erkenntniskräfte, das zur mathematischen Schönheit führt, kann somit als emotional zugängliches, rational vermitteltes Erleben beschrieben werden.

5.3 Aisthesis der Mathematik

Als rein intellektuelle Konstrukte können die Gegenstände der Mathematik die rationalen Kriterien wie Ordnung oder Ebenmaß der antiken und mittelalterlichen Ästhetik besonders gut umsetzten und wurden daher immer wieder als Paradebeispiel auch der allgemeinen Ästhetik herangezogen. Die Grundidee von mathematischen Gegenständen als abstrakte Entitäten ist es aber gerade, die sie aus dem Aufmerksamkeitsbereich aktueller Ästhetikkonzeptionen rücken lässt. Wird Ästhetik als Aisthesis im engeren Sinne, also als Theorie der sinnlichen Erkenntnis verstanden, so wird die ästhetische Erfahrung häufig als unmittelbar auf die sinnliche Wahrnehmung folgend gedacht, was die rational vermittelte mathematikästhetische Erfahrung per se ausschließt.[4]

Durch die oben beschriebene Bindung des mathematischen Schönheitsurteils wird die Rolle der sinnlichen Wahrnehmung in diesem Urteil in der Tat schwer bestimmbar. So wird insbesondere bezogen auf die Frage, inwieweit die mathematische Schönheit eine genuin ästhetische Kategorie darstellt, eine kritische Stelle markiert.

Zunächst kann banaler Weise festgehalten werden, dass auch etwa Sätze oder Beweise in der Form ihrer Präsentation in Lehrbüchern oder Vorlesungen mit den äußeren Sinnen aufgenommen werden. Diese sinnliche Wahrnehmung geht aber in vielen Fällen bereits dem grundsätzlichen Verstehen voraus und zählt somit lediglich zu den Voraussetzungen mathematikästhetischer Erlebnisse. Der eigentliche Träger mathematischer Schönheit ist dann aber nicht der sichtbare geschriebene Beweistext, sondern etwa die dahinter liegende Beweisidee. So beschreiben auch die in Kapitel 2 explizierten Eigenschaftskomplexe nicht das Ergebnis ausschließlich sinnlicher Wahrnehmung. Es handelt sich vielmehr um die Reaktion auf ebenfalls abstrakte Beziehungen des Gegenstandes sowie die Beschreibung subjektiver, epistemischer und emotionaler Prozesse. Die so beschriebene mathematische Schönheit ist also sicher nicht unmittelbar sinnlich zugänglich.

Die historischen Positionen lösen diese Schwierigkeit bzw. umgehen sie auf unterschiedliche Weisen: Von den Denkern in Antike und Mittelalter werden häufig regelmäßige geometrisch Figuren betrachtet und zu Beispielen schöner Mathematik gekürt. Die diese Formen konstituierenden Regeln und Strukturen können an zeichnerischen Darstellungen möglicher Exemplare unmittelbar, bzw. unmittelbarer als dies für den Gehalt niedergeschriebener, mathematischer Aussagen gilt, über den Sehsinn wahrgenommen werden. So kann durch eine gewisse Einschränkung der Beispiele das auf der Grundlage rationaler Kriterien getroffene Schönheitsurteil an die sinnliche Wahrnehmung angebunden werden. Hutcheson dagegen erweitert

[4] Vgl. hierzu etwa die unter 4.4.2 skizzierte Position Kutscheras, der die Möglichkeit, von schöner Mathematik zu sprechen daher explizit verneint. Vielen anderen Konzeptionen scheint dieser Schritt so selbstverständlich, dass sie die „Muster der Mathematiker“ nicht einmal als mögliche Träger ästhetischer Eigenschaften erwähnen.

das Spektrum der Sinne. Der von ihm angenommene innere ästhetische Sinn, lässt ebenfalls eine „sinnliche“ Wahrnehmung und ästhetische Bewertung abstrakter Gegenstände, wie etwa mathematischer Theoreme zu.

Die Metaphern aus dem Bereich des Visuellen, die im Zusammenhang mit der Schönheit von Beweisen oder Theoremen häufig verwendet werden und die oben insbesondere im Eigenschaftskomplex der epistemischen Transparenz zusammengefasst wurden, erinnern immer noch an die Vorstellung Hutchesons. Es wird zwar kein physiologisch tatsächlich vorhandener innerer Sinn angenommen, jedoch beispielsweise vom „inneren Auge“ gesprochen, vor dem ein ganzer Beweis gleichsam „auf einen Blick“ erscheint. Obschon nicht direkt durch die äußeren Sinne zugänglich, wird auch das Erfassen mathematischer Schönheit der sinnlichen Wahrnehmung ästhetischer Qualitäten in anderen Bereichen ähnlich erlebt und beschrieben. Diese Metaphorik verweist außerdem auf die zentrale Rolle der Einbildungskraft für die Wahrnehmung mathematischer Schönheit.

Die Frage nach der Möglichkeit des unmittelbaren sinnlichen Zugangs führt weiterhin zu Gegenständen, die weder den oben abgegrenzten „Mustern der Mathematiker“ noch den „Mustern aus der Mathematik“ eindeutig zugeordnet werden können. In diese Grauzone fallen etwa Bildbeweise oder präformale Beweisformen sowie die zeichnerische Darstellung bestimmter Zusammenhänge etwa im Rahmen der Geometrie oder auch computergenerierte Grafiken, die mathematische Zusammenhänge sichtbar machen. Diese Beispiele teilen mit den „Mustern aus der Mathematik“ die Eigenschaft, dass hier mathematische Strukturen zu einer Darstellungsform abseits der geschriebenen oder gesprochenen Fachsprache kommen. Somit handelt es sich bei den angesprochenen Beispielen um eine besondere Art der Darstellung von „Mustern der Mathematiker“, die diese ohne den Umweg über die (formale) sprachliche Repräsentation unter Umständen leichter zugänglich und insbesondere leichter „als Ganzes“ fassbar macht.[5] Inwiefern hier bereits von einer unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung der mathematischen Schönheit gesprochen werden kann und ob hier die gleichen Schönheitscharakteristka gelten, wie sie in Kapitel 2 expliziert wurden, wäre Gegenstand einer eigenen Untersuchung. Diese weiterführenden Fragen berühren zwar auch den im Rahmen dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden Gegenstandsbereich, müssen hier jedoch als randständiges Phänomen in der theoretischen Untersuchung zunächst unbeantwortet bleiben. Anhand eines geometrischen Inkommensurabilitätsbeweises wird in Kapitel 10 die Frage nach der aisthetischen Wirkung durch ein konkretes Beispiel erneut ins Bewusstsein rücken (vgl. 10.2.3).

[5] Zur Abgrenzung vgl. die Diskussion unter 1.1.2.

5.4 Mathematische Schönheit als ästhetische Eigenschaft

Obwohl die in Kapitel 2 dargestellten zeitgenössischen Positionen zur Schönheit mathematischer Gegenstände einerseits und die *Kritik der Urteilskraft* andererseits in gänzlich unterschiedlichen Kontexten stehen, zeigt die vorangegangene Zusammenschau einen fruchtbaren Dialog. Die hervortretenden Eigenheiten der Kantische Mathematikauffassung können zum Verständnis seiner skeptischen Haltung gegenüber der Mathematikästhetik beitragen.[6] Gleichzeitig kann die mindestens in ihren Grundzügen weiterhin aktuelle Ästhetik Kants genutzt werden, um die mathematische Schönheit in der allgemeinen Ästhetik zu verorten:

Der durch die Gegenargumentation Kants auf die Rolle der (innermathematischen) Zweckmäßigkeit gelenkte Blick zeigt, dass die oben explizierten Schönheitsbegriffe der Mathematiker tatsächlich Facetten aufweisen, die als *relative Vollkommenheit* im Kantischen Sinne beschrieben werden können und damit von ästhetischen Urteilen im Sinne Kants abzugrenzen sind. Hierzu zählen insbesondere die das Subjektive ausblendenden Aspekte von Tragweite und Ökonomie. Sie dokumentieren den innermathematischen Nutzen der betrachteten Gegenstände und bieten eine Objektivierbarkeit der so begründeten „Schönheit“, disqualifizieren sich aber gleichzeitig, genuin „ästhetische“ Eigenschaften zu sein.[7]

Der Zuordnung zur relativen Vollkommenheit entziehen sich aber nicht nur die subjektbezogenen Facetten von Ökonomie und Tragweite, sondern auch der gesamte Eigenschaftskomplex der epistemischen Transparenz. Dort wird der möglichen Zweckmäßigkeit der Gegenstände keine Beachtung geschenkt. Es geht nicht um das „Wozu“, sondern um ein besonderes Erfassen des „Warum“ und das Verstehen um seiner selbst willen. Dennoch verweist der Fokus, der hier auf eine bestimmte Art des Verstehens mathematischer Zusammenhänge gelegt wird, auf ein dem mathematischen Schönheitsurteil integrales epistemisches Moment. Dies wird verstärkt durch die Notwendigkeit eines dem mathematikästhetischen Erlebnis vorausgehenden, grundsätzlichen Verstehens. Aufgrund der Notwendigkeit des Emotionalen zur Wahrnehmung der mathematischen Schönheit und auch der den Sinneswahrnehmungen ähnlich beschriebenen Unmittelbarkeit der Erfahrung ist es jedoch nicht geboten, den in der mathematischen Praxis verwendeten Schönheitsbegriff als rein epistemische Eigenschaft zu betrachten.[8]

[6] Dies tritt in Kants Position zum Künstlercharakter noch deutlicher hervor (vgl. Kapitel 7) und wird daher in der darauf folgenden Diskussion zum Kunstcharakter der Mathematik zusammenfassend diskutiert (vgl. Kapitel 8).

[7] Wie unter 4.3.2 vorgestellt, erwartet auch Kant nicht die völlige Abwesenheit des Wissens um die Vollkommenheit eines Gegenstandes, und stellt gar fest, dass „das gesamte Vermögen der Vorstellungskraft“ (KU, §16, S. 52) gewinne, wenn objektives Erkennen und subjektives Schönheitsurteil zusammenstimmen. Im eigentlichen Geschmacksurteil müsse jedoch von diesem Wissen abstrahiert werden.

[8] Vgl. dazu auch die Diskussion der Position Gian Carlo Rotas unter 2.3.3.

So geht auch die Rolle der Einbildungskraft im mathematikästhetischen Urteil über die Vorbereitung des rein begrifflichen Erfassens hinaus. Die Ergebnisse aus Kapitel 2 verweisen vielmehr auf Wechselwirkungen von Verstand und Einbildungskraft, die letztlich zur emotionalen Wirksamkeit führen. Ob dies uneingeschränkt mit dem „freien Spiel der Erkenntniskräfte“ nach Kant gleichzusetzen ist, kann hier auch aufgrund des unterschiedlichen Gewichts, was in verschiedenen der zu Rate gezogenen aktuellen Positionen auf das rationale Erfassen gelegt wird, nicht abschließend entschieden werden. Jedoch kann der subjektive, emotionale Charakter der mathematikästhetischen Erfahrung nicht deutlich genug hervorgehoben werden, grenzt dies doch jeden der oben beschriebenen Eigenschaftskomplexe von ähnlichen, auch in anderen Bereichen wirksamen Eigenschaften ab und kennzeichnet gleichzeitig die wechselseitigen Beziehung der benannten Charakteristika (vgl. auch 2.5.2).

Die mathematische Schönheit, wie sie in Kapitel 2 herausgearbeitet wurde, stellt sich also als *emotional erlebbares, rational vermitteltes subjektives Wohlgefallen* dar.[9] Ob auf diese Weise eine genuin ästhetische Erfahrung beschrieben wird, kann nicht abschließend entschieden werden – was aufgrund der Vielschichtigkeit dieses Begriffs im Übrigen auch auf andere als ästhetisch bezeichneten Erlebnisse zutrifft. Die Ausführungen haben aber gezeigt, dass die Erfahrungen, die auf dem spezifischen Zusammenspiel der beschriebenen Eigenschaften mathematischer Schönheit beruhen, keinem anderen Erfahrungsbereich ohne weiteres zugeordnet werden können. Die spezifische Untersuchung des Phänomens und damit die Disziplin der Mathematikästhetik als Theorie des (mathematisch) Schönen behält somit ihre Berechtigung und ihren speziellen Auftrag. Gleichzeitig verweist die Subjektorientierung und die eigentümliche Wechselbeziehung von Emotionen, Intuition und Rationalem in den verschiedenen Facetten der mathematischen Schönheit auf tragfähige Gemeinsamkeiten mit Beschreibungen ästhetischer Erfahrungen, ausgelöst etwa durch Objekte der bildenden Künste. So gibt es m.E. gute Gründe, die Beweisen und Theoremen zugesprochene Schönheit als ästhetische Eigenschaft im engeren Sinne anzunehmen, wobei die Besonderheit der relativen Vollkommenheit und des epistemischen Momentes als integrale Bestandteile ebenso beachtet werden müssen, wie die Entfernung zur sinnlichen Wahrnehmung.

[9] Wie unter 4.3.3 dargestellt, sieht Kant selbst die Möglichkeit zu einem solchen Wohlgefallen und damit zu ein Geschmacksurteil im Bereich der Mathematik nur im Bereich der mathematischen Darstellung, da hier „doch wenigstens das Wohlgefallen, obgleich der Grund desselben in Begriffen liegt, subjektiv ist, da die Vollkommenheit ein objektives Wohlgefallen bei sich führt“ (KU, §62, S. 278f).

Teil II

Mathematik als eine besondere Kunst

Kapitel 6

Mathematik als Kunst betrachtet

> „Hierzu möchte ich aus meiner eigenen, tiefsten Erfahrung bekennen, dass ich in der Mathematik [. . .] in immer steigendem Maße die Merkmale einer Kunst und damit sehr viel für Herz und Seele sehe.“ (Hasse, 1952, S. 15)

Mit diesem Bekenntnis eröffnet der Algebraiker Helmut Hasse in seiner Vortragsniederschrift *Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht* seine Ausführungen zum Kunstcharakter der Mathematik. Er folgert weiter, dass seines Erachtens die Mathematik mehr ist als eine reine Geisteswissenschaft. Hasse benennt Analogien zwischen Kunst und Mathematik, die die unterschiedlichsten Bereiche der beiden Disziplinen berühren: Zunächst nimmt er die Voraussetzungen des mathematischen Schaffens in den Blick und konstatiert die „Freiheit des Mathematikers zur rein künstlerischer Gestaltung“ (Hasse, 1952, S. 18). Sowohl die Arbeit von Künstlern als auch von Mathematikern sieht Hasse anders als in anderen Wissenschaften nicht durch den Bezug zur realen Welt bestimmt, so dass Raum bleibe für die freie Gestaltung. Dies führt ihn zu einer weiteren Parallele bezüglich der Art des Arbeitens in beiden Disziplinen: Der Produktionsprozess könne jeweils als ein dem Ziel der Schönheit und des „harmonischen Zusammenklangs in sich und mit bereits Bekanntem“ verpflichtetes „Intuitives Schaffen“ (Hasse, 1952, S. 19) beschrieben werden. Ein Mathematiker sehe wie der Künstler zuerst das Gesamtwerk vor seinem inneren Auge bevor er die so „erschaute Wahrheit“ etwa eines Beweises nach logischen Regeln ausführen und niederschreiben könne. Als weitere Gemeinsamkeit sieht Hasse in beiden Disziplinen die Schönheit auf unterschiedlichen Ebenen, „im Kleinen“ und „im Großen“ verwirklicht.[1] Dies führt ihn einerseits dazu, die Begründer mathematischer Theorien mit großen Künstlern in einem Atemzug zu nennen. Konkret stellt er fest, dass „Mathematiker dieser Art, wie etwa Leibniz, der Schöpfer der Differential- und Integralrechnung [. . .] mit den Schöpfern monumentaler Kunstwerke, einem Beethoven, Goethe, Michelangelo, zu vergleichen“ (Hasse, 1952, S. 25) seien. Andererseits attestiert er diesen großen mathematischen Schöpfungen einen „dynamischen, mitreißenden Charakter“ (Hasse, 1952, S. 25) als

[1] Vgl. dazu auch die ausführliche Darstellung in Kapitel 2.

wesentliches Merkmal. Aus der Sicht der Rezipienten kommt er so zur Vergleichbarkeit von mathematischem Beweis und Drama. Dies leitet Hasse schließlich zu einer Analogie bezüglich des Umgangs mit den Werken in Mathematik und Kunst. Er unterstellt jedem Mathematiker, den „unwiderstehlichen Drang“ seine schönen Produkte anderen mitzuteilen, was diesen wiederum dazu veranlasst, die zunächst nur intuitiv schwelende Schönheit in eine mitteilbare „Form vollendeter Schönheit“ zu gießen (Hasse, 1952, S. 26).[2] Hasse stellt fest, dass ähnlich zu anderen Disziplinen der Kunst auch in der Mathematik „der schönste Gedanke durch eine häßliche äußere Form entstellt werden“ (Hasse, 1952, S. 26) könne, was wiederum die Interpreten der Kunstform Mathematik in die Pflicht nimmt:

> „Weil es zum innersten Wesen der Mathematik gehört, daß sie mitgeteilt werden will, und weil sie zudem eine so exklusive, schwer zugängliche Kunst ist, ist es in meinen Augen die Pflicht jedes Mathematikers, daß er sein Bestes dazu tut, anderen das Tor zum Verständnis zu öffnen.“ (Hasse, 1952, S. 27)

Mit den hier skizzierten Analogien von Mathematik und Kunst stellen die Ausführungen Hasses einen der umfassensten Überblicke zur Thematik dar. So behauptet er nicht nur den Kunstcharakter der Mathematik, sondern untermauert diese Behauptung, in dem er Parallelen auf den verschiedensten Ebenen andeutet. Gleichzeitig ist der Vortrag *Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht* aber auch paradigmatisch für die Literatur zu diesem Bereich der Mathematikästhetik: Erstens wird der auf einem intuitiven Kunstbegriff gründende Vergleich von Mathematik und Kunst herangezogen, um den Charakter der Mathematik zu fassen. Dabei eröffnet häufig die Frage, inwiefern die Mathematik zu den Künsten oder den Wissenschaften zu zählen ist, die Erörterungen. Zweitens sind es, wie im Bereich der Charakteristika mathematischer Schönheit (vgl. Kapitel 2), insbesondere aktive Mathematiker, die so ihr Betätigungsfeld beschreiben, wobei nicht nur die bloße Behauptung zu beobachten ist, dass der Mathematik der Kunststatus gebührt. Vielmehr werden ihr auch Gemeinsamkeiten mit den unterschiedlichsten Künsten zugesprochen. So werden Parallelen zur Musik ebenso postuliert wie zu den bildenden Künsten oder der Dichtung. Wenn Mathematiker ihre subjektive Sicht der Mathematik beschreiben, nehmen sie drittens naturgemäß wenig Bezug aufeinander.
Doch auch weniger essayistische Arbeiten nutzen die Einlassungen anderer häufig nur dazu, eine Beschäftigung mit dem Thema überhaupt zu rechtfertigen, um sich dann der eigenen Theorie zuzuwenden. Allenfalls werden Bezüge zu ähnlich

[2] Hasse sieht zusätzlich im in der modernen Mathematik immer verfolgten Streben nach Formalisierung gleichzeitig eine „Tragik des Mathematikers“ begründet, in der die Gefahr liege, dass so der eigentlich schöne Inhalt von einem zuviel an Formalität übermannt werden könne (vgl. Hasse, 1952, S. 27ff). Diese Einschätzung teilen auch andere Zeitgenossen Hasses. So kann etwa Krull folgend die Frage der Darstellung für den „mathematischen Ästhetiker“ ebenso zum „qualvollen Problem“ werden, wie das finden neuer Theoreme (vgl. Krull, 1930, S. 214f). Zur Diskrepanz der ästhetischen Bewertung von Darstellung und Inhalt vgl. die Ausführungen zur Eleganz unter 2.5.1.

argumentierenden Ansätzen oder der allgemeinen Kunsttheorie hergestellt. Eine Zusammenschau der einen Kunstcharakter der Mathematik behauptenden und beschreibenden Literatur steht bisher noch aus. Die folgenden Ausführungen sollen helfen diese Lücke zu schließen. Daher kommen hier zunächst nur Ansätze zu Wort, die der Möglichkeit eines Vergleiches zwischen dem Bereich des Künstlerischen und der Mathematik grundsätzlich positiv gegenüber stehen. Von besonderem Interesse ist damit nicht mehr die Tatsache, *dass* die Mathematik mit verschiedenen Kunstformen verglichen wird, sondern *wie* diese Parallelen begründet werden und welche Facetten im Mittelpunkt stehen. Dabei sind sowohl die Begründungsmuster als auch die Bezugsrahmen so verschieden, dass aus systematischer Sicht zunächst nur die Grundaussage (Kunst und Mathematik sind prinzipiell vergleichbar) eine Gemeinsamkeit darstellt.

Die Ausführungen Hasses unterscheiden sich insofern von vielen anderen, dass er wie beschrieben die unterschiedlichsten Parallelen zwischen Kunst und Mathematik ausmacht und damit eine Vielzahl von Facetten benennt, die im Zentrum von ausführlicheren mathematikästhetischen Betrachtungen einzelner Aspekte stehen. Vergleiche von mathematischen und künstlerischen Produkten führen nicht nur zu allgemeinen Aussagen über den Kunststatus, sondern auch dazu, der Mathematik bestimmte kunstspezifische Eigenschaften wie etwa Moden und Stile in ihrer Entwicklung zu zuschreiben. Auch das Wissenschaftssystem wird mit den institutionellen Formen der Kunst verglichen und beispielsweise die Frage nach Kritikern und Publikum in beiden Disziplinen diskutiert. Insbesondere steht immer wieder die Arbeitsweise des schaffenden Mathematikers im Fokus und wird durch den Vergleich mit dem Künstler charakterisiert. Durch Parallelisierung mit der Kunst können außerdem Eigenschaften von Mathematik aufgezeigt werden, die in anderen Vergleichen – etwa mit den Geistes- oder Naturwissenschaften – nicht oder nur am Rande zur Sprache kämen. Der konkreten Frage, ob die Mathematik eine Kunstform darstellt, tritt so vor allem durch die jeweilige Begründung eine spezifische Beschreibung der mathematischen Praxis, ihrer Produkte und der beteiligten Personen zur Seite. Neben einem systematischen Interesse aus Sicht der Mathematikästhetik, lohnt sich damit auch aus allgemein mathematikphilosophischer Sicht eine ausführlichere Auseinandersetzung mit solchen Mathematik-Kunst-Vergleichen.

Die Diversität möglicher Herangehensweisen spiegeln die folgenden Unterkapitel. Zur systematischen Einordnung dient jeweils ein bestimmter Komplex von Gemeinsamkeiten von Mathematik und Kunst, der als Begründungsmuster für die Kunstbehauptung herangezogen wird.
Dabei wurden jeweils die Positionen einzelner Autoren ausgewählt und skizzenhaft dargestellt, um einen vertieften Einblick in die verschiedenen Facetten von Kunst-Mathematik-Vergleichen zu erhalten. Dennoch können und sollen die ausgewählten Theorien nicht in Gänze wiedergegeben werden. Ziel muss es aber sein, zu klären, welche Mathematikbeschreibung durch den Bezugsrahmen der jeweiligen Parallelisierung entsteht und welche Aspekte speziell der mathematikästhe-

tischen Sicht geschuldet sind. Auch wenn aus Gründen der Tiefe die möglichen Perspektiven auch hier zunächst isoliert dargestellt werden, soll der Facettenreichtum, den Hasse aufspannt immer im Hintergrund stehen – auch und insbesondere wenn abschließend die Möglichkeiten und Grenzen einer Theorie der Kunstform Mathematik diskutiert werden.

6.1 Kreativität und Freiheit – Mathematisches und Künstlerisches Schaffen

Eine der prominentesten Parallelen von Mathematik und Kunst und damit auch eine häufig bemühte Begründung für den Kunstcharakter der Mathematik ist die Arbeitsweise der jeweils beteiligten Personen. So stellt etwa Armand Borel in seinem Vortrag *Mathematik: Kunst und Wissenschaft* fest, dass das „Gefühl einer Kunst“ noch stärker wird, „wenn man daran denkt, wie der Forscher arbeitet und fortschreitet“ (Borel, 1981, S. 20). Durch solche Äußerungen wird also der Kunststatus der Mathematik durch den Künstlercharakter des Mathematikers bestimmt. Dabei wird das mathematische Schaffen aus verschiedenen Perspektiven betrachtet und beschrieben. Einerseits wird von einem externen Standpunkt die Arbeit des Mathematikers und des Künstlers in den Blick genommen und so Aussagen über „den Mathematiker“ mit denen über „den Künstler“ im Allgemeinen verglichen. Da es sich wie bereits beschrieben bei den Autoren solcher Aussagen häufig um (aktive oder ehemals aktive) Mathematiker handelt, ist diese Perspektive nicht mit einer ethnologischen Herangehensweise an den Mathematiker quasi als „unbekanntes Wesen“ zu verwechseln. Die Beschreibungen sind somit häufig die Verallgemeinerung der eigenen Erfahrungen in der mathematischen Wissenschaftspraxis. Andererseits wird aber auch der individuelle Schaffensprozess von Mathematikern direkt aus ihrer persönlichen Erfahrung heraus beschrieben, also ein interner Standpunkt eingenommen. Beiden Ansätzen gemein ist somit, dass sie auf „Expertenwissen“ aus dem Bereich der Mathematik zurückgreifen können und dieses mit einem eher landläufigen Begriff von der Arbeit eines Produzenten schöner Kunst vergleichen.[3]

6.1.1 „Maker of Patterns“

> „A Mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. [. . .] A painter makes patterns with shapes and colours, a poet with words. [. . .] A mathematician, on the other hand, has no material to

[3] Eine Ausnahme stellt Martin Schiralli dar, der an der Schnittstelle von Ästhetik und Erkenntnistheorie arbeitete (s.u.).

> work with but ideas, and so his patterns are likely to last longer, since ideas wear less with time than words.“ (Hardy, 1940, S. 84f)

So wie in diesem prominenten Zitat aus *A mathematician's Apology* vergleichen viele die Arbeit des Mathematikers mit der von bildenden Künstlern, Dichtern oder Komponisten. Hardy führt dies auf eine Gemeinsamkeit in der Struktur ihrer Produkte zurück: Sowohl der Mathematiker als auch der Künstler produzieren Muster – jener aus Farbe auf Leinwand bzw. Worten, dieser aus Ideen. Dahinter steckt die Annahme eines vergleichbaren Schaffensprozesses, der in beiden Disziplinen durch das Hervorbringen *innovativer* bzw. origineller Muster geprägt ist, die einzig aus dem menschlichen Geist heraus entstehen. Sowohl die Arbeit der Künstler wie auch der Mathematiker beruht demnach auf Freiheit und Kreativität im Umgang mit den jeweiligen „Materialien“.

Martin Schiralli differenziert das, was Hardy oben unter dem Hervorbringen von Mustern allgemein zusammenfasst, weiter aus. Auf diese Weise stellt er Parallelen der jeweiligen Arbeitsweise von Mathematikern und Künstlern bezüglich unterschiedlicher Aspekte des Schaffensprozesses heraus:

> „Mathematicians often: *wonder* at the patterns discerned in experience; *analyse* patterns – noticing, noting, associating patterns and elements of patterns; *represent* patterns, i.e. describe them in formal terms; *manipulate* patterns; *create* novel or original symbolic patterns; *imagine* the possibilities of patterns; *connect* pattern possibilities, i.e. analyse classify and theorise patterns, thereby creating larger, more comprehensive patterns.
> Mathematicians also: *demonstrate*, i.e. prove (or describe) the necessity (or nature) of patterned relationships using other patterns, viz. the patterns of logical operations.
> In so doing, mathematicians: *compute*, i.e. perform operations on patterned relationships using other patterns, viz. arithmetical, algebraic and so forth.
> Finally, mathematicians: *appreciate* the historical and contemporary achievements of other mathematicians; *evaluate* the achievements of other mathematicians.“ (Schiralli, 2006, S. 110f, Hervorhebungen im Original)

Nahezu alle der hier beschriebenen Handlungen im Umgang mit den „Mustern der Mathematiker“ identifiziert Schiralli in der Folge auch im künstlerischen Schaffen. Einen Hauptunterschied sieht er aber darin, dass die Muster der Künstler auf die sinnliche Wahrnehmung bezogen sind bzw. von dieser ausgehen. So wundere sich der Künstler gerade über durch die sinnliche Erfahrung gegebene Strukturen. Wo der Mathematiker „seine“ Muster in einer formalen Form darstellt, nutzt der Künstler Sinneseindrücke. Trotzdem erkennt Schiralli bezüglich der Grundstrukturen inhaltliche Gemeinsamkeiten und greift den traditionellen Topos der

Manipulation von Raum und Zeit auf, der in beiden Disziplinen zu finden sei (vgl. Schiralli, 2006, S. 112).

Das Beweisen oder genaue Beschreiben sowie der rechnerische Umgang mit den Mustern sieht Schiralli in der Kunst naturgemäß nicht direkt gegeben. Andererseits beschreibt er selbst, wie oben zitiert, gerade diese Aktionen als die Performance der Mathematiker. Er verweist außerdem auf eine ähnliche Handlung im Umgang mit den Mustern der Kunst, wenn er beschreibt, dass Künstler oder Kunstwissenschaftler „attempt to understand the nature and possibilities of patterned relationships using other patterns, viz. those of logical operations“ (Schiralli, 2006, S. 111).
Im Rahmen der Kunst findet Schiralli mit der Entwicklung stilistischer Begrifflichkeiten und Zuordnungen unter verschiedenen Aspekten aus dem Bereich des Ästhetischen eine zusätzliche Tätigkeit vor, die er der Mathematik nicht zuordnet. Nimmt man die unter 6.2 dargestellten Ansätze aber ernst, so ist auch diese Art des Umgangs mit Mustern keineswegs ausschließlich in der Kunst zu finden. Die oben zitierte Liste müsste demnach auch für die Mathematik um die stilistische Einordnung der Muster ergänzt werden.
Bezüglich des folgenden Unterkapitels mindestens bemerkenswert ist außerdem die Tatsache, dass Schiralli einerseits nur von Mathematikern spricht, andererseits für den Bereich der Kunst immer Künstler *und* Kunstwissenschaftler nennt. Hier gibt er also einen Hinweis auf die institutionelle Trennung von Produktion und Kritik der Kunst im Gegensatz zur Mathematik. Bestimmte der beschriebenen Tätigkeiten müssen dem Künstler, andere dem Kunstwissenschaftler zugeschrieben werden – wobei Schiralli selbst diese Differenzierung hier nicht vornimmt. Dies ist innerhalb der Mathematik nicht eindeutig möglich (vgl. 6.4).

Ausgehend von der Behauptung Hardys, dass sowohl Mathematiker als auch Künstler als „maker of patterns“ beschrieben werden können, stellt Schiralli also eine differenzierte Beschreibung des Umgangs mit den jeweiligen Mustern zur Verfügung, um so die Gemeinsamkeiten der beiden Disziplinen noch stärker zu machen:

> „If mathematics may productively be viewed as the creative exploration and formal representation of pattern possibilities, art may equally and symmetrically be viewed as the creative exploration and sensory representation of pattern possibilities.“ (Schiralli, 2006, S. 124)

Die daraus gleichsam zwangsweise resultierende Frage, ob man angesichts dieser Parallelen überhaupt von unterschiedlichen Disziplinen sprechen könne, also nach dem Kunststatus der Mathematik, bleibt allerdings offen.
Quasi als Nebenprodukt der mathematikästhetischen Überlegungen gelingt Schiralli über den Vergleich von mathematischem und künstlerischem Tun eine differenzierte Darstellung der Arbeit des Mathematikers (und auch des Künstlers) im Allgemeinen. Dabei nimmt er eher die Perspektive des Beobachters als die des Beteiligten ein. So steht das oftmals als kreativer Akt beschriebene und zum Künstlervergleich herangezogene Hervorbringen neuer Theoreme und Beweise nicht im Vordergrund seiner Analyse. Dieser Aspekt wird im Folgenden herausgestellt.

6.1.2 „Ein wahrhaft ästhetisches Gefühl“

Arbeiten zur Kreativität in den Wissenschaften im Allgemeinen und in der Mathematik im Besonderen sind häufig zu finden.[4] Eher selten wird dabei der Vergleich mit der Kunst nicht nur gezogen, sondern auch ausführlicher begründet. Eine zentrale Referenz für Auseinandersetzungen mit dem mathematischen Schaffen stellt Henri Poincaré und insbesondere seine Sammlung *Wissenschaft und Methode* (vgl. Poincaré, 1914) dar. Ein Blick in die Literatur zum Thema zeigt, dass die Einschätzung Jacques Hadamards im Vorwort von *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* nicht an Aktualität verloren hat:

> „This study, like everything which could be written on mathematical invention, was first inspired by Henri Poincaré's famous lecture before the Société de Psychologie in Paris.“ (Hadamard, 1945, S. vii)

Da sich viele Autoren auf Poincaré berufen, um den Künstlerstatus des Mathematikers zu begründen, seine für die Mathematikästhetik interessanten Aussagen aber selten ausführlicher beleuchtet werden[5], soll dies im Folgenden geschehen. Dabei wird sich später zeigen, dass seine Darstellungen auch oder gerade im Kontrast zur Kantischen Position für die Diskussion um die Künstleranalogie eine fruchtbare Spannung entstehen lassen (vgl. Kapitel 8).

Henri Poincaré beginnt seine Ausführungen über *Die Mathematische Erfindung* mit der Feststellung, dass die „Entwicklungsgeschichte der mathematischen Erfindung [...] ein Problem [sei], das den Psychologen das lebhafteste Interesse“ (Poincaré, 1914, S. 35) einflößen könne. Diesem „Problem“ begegnet er in der Folge durch die Reflexion eigener Erfahrungen als schaffender Mathematiker, aus denen er dann wiederum Rückschlüsse auf die mathematische Erfindung im Allgemeinen zieht. Hier soll seine umfassende Theorie nun insbesondere mit Blick auf die Verbindung zur Ästhetik der Mathematik wiedergegeben und diskutiert werden.[6]

Poincaré beschreibt den Prozess der mathematischen Erfindung als einen Wechsel von bewusster und unbewusster Arbeit. In einer ersten bewussten Phase macht sich der Mathematiker das zu lösende Problem zu eigen und beginnt ein zunächst erfolglos anmutendes Ringen um die Lösung. Durch diese Periode wird die „Maschine der unbewußten Arbeit in Schwung gebracht“ (Poincaré, 1914, S. 45), so dass in einer nun folgenden Phase, in der sich das bewusste Ich etwas völlig anderem zuwendet, das unbewusste oder „sublime Ich“, wie Poincaré es nennt, weiter auf die Lösung hinarbeiten kann. In einem meist unerwarteten Moment erscheint

[4] Siehe dazu auch die Literaturauflistung und Hinweise bei Brinkmann und Sriraman (2009).

[5] Eine Ausnahme stellt Corline Jullien (2008) dar.

[6] Eine der prominentesten ausführlichen Darstellungen des Poincaréschen Ansatzes liefert Jacques Hadamard (1945). Er diskutiert in *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* insbesondere Poincarés Aussagen zur Rolle von Unbewusstem und Bewusstem und zieht dazu weitere zentrale Werke zu den psychologischen Grundlagen des mathematischen Schaffens sowie Ergebnisse einer empirischen Studie und weitere Erfahrungsberichte heran.

diese dann dem Mathematiker als „plötzliche Erleuchtung" (Poincaré, 1914, S. 44). Dieses Ergebnis unbewussten Arbeitens muss dann wiederum bewusst aufgegriffen werden: „Man muß die Resultate dieser Inspiration ausarbeiten, aus ihnen die unmittelbaren Folgerungen ableiten, sie ordnen, die Beweise redigieren und vor allem sie prüfen." (Poincaré, 1914, S. 45)
Auf das Wechselspiel von unbewusster und bewusster Arbeit und insbesondere das plötzliche Zutagetreten der Ergebnisse des unbewussten Prozesses verweisen Berichte von Mathematikern immer wieder (vgl. z.B. Littlewood, 1986, S. 190ff). So zitiert etwa Bartel Leendert van der Waerden in seiner Antrittsrede *Einfall und Überlegung in der Mathematik*[7] Carl Friedrich Gauss, der das Erlebnis, wie er zur Lösung eines lange schwelendes Problems gelangt ist, in einem Brief als Blitzeinschlag beschreibt. Allerdings hält Gauss selbst diesen Geistesblitz für göttliche Eingebung und nicht für das Ergebnis der eigenen (unbewussten) Tätigkeit und sieht sich selbst außerstande den Weg von den Vorarbeiten zur Lösung zu beschreiben (vgl. van der Waerden, 1953, S. 121). Hierin gerade sieht van der Waerden, der in seinen Ausführung auch von eigenen Erlebnissen dieser Art berichtet (vgl. van der Waerden, 1953, S. 127f), die Stärke Poincarés:

> „Diese Fähigkeit Poincarés, das eigene unbewusste Denken bewusst zu beobachten, steht ziemlich vereinzelt da. Andere Wissenschaftler haben wohl blitzartige Einfälle, wissen aber nicht, wie sie zustande kommen." (van der Waerden, 1953, S. 122)

Für die Mathematikästhetik von besonderer Bedeutung ist die Beschreibung Poincarés dessen, was in der Phase unbewussten Arbeitens geschieht. Dort wird ihm folgend die eigentliche mathematische Erfindung hervorgebracht. In diesem Prozess muss aus der Vielzahl möglicher Ansätze der erfolgreiche ausgewählt werden. Poincaré betont, dass es sich dabei nicht um einen mechanischen oder gar prinzipiell maschinell ausführbaren Prozess handeln könne:

> „Die Regeln, nach denen eine solche Auswahl getroffen werden muß, sind ungemein fein und subtil, und es ist fast unmöglich, sie in genauer Fassung wiederzugeben: sie lassen sich mehr fühlen als formulieren [...]." (Poincaré, 1914, S. 46)

Hier spielt nun das „Gefühl für die mathematische Schönheit" und damit ein „wahrhaft ästhetisches Gefühl" (Poincaré, 1914, S. 48) die zentrale Rolle. Das unbewusste Ich wählt demnach nach ästhetischen Kriterien diejenigen Möglichkeiten aus, welche „nützlich und schön zugleich" (Poincaré, 1914, S. 49) seien.[8] Dabei kommt es insbesondere auf eine harmonische Ordnung und Einfachheit an, die ästhetische

[7] Hier spiegelt sich das Zusammenwirken von unbewusster (Einfall) und bewusster Arbeit (Überlegung) bereits im Titel.

[8] Seymor Papert vermutet hier eine dritte Instanz zwischen Unbewusstem und Bewusstem: „its Job is to scan the changing kaleidoscope of unconscious patterns allowing only those which satisfy its aesthetic criteria to pass through the portal between the minds" (Papert, 1988, S. 110).

Emotionen hervorruft und gleichzeitig eine tiefe Erkenntnis liefert, mithin das Kriterium der epistemischen Transparenz erfüllt.[9] Auch van der Waerden beschreibt sowohl die Schönheit als auch die Evidenz der unbewusst hervorgebrachten mathematischen Einfälle, steht aber der Haltung Poincarés skeptisch gegenüber, dass beides miteinander einher gehe:

> „Schöne, symmetrische, elegante Vorstellungskombinationen haben mehr Chancen, die Richtigen zu sein; sie werden auch leichter aufgefunden, weil sie uns besser gefallen, aber das Gefühl der Sicherheit, das einen Einfall so oft begleitet, hat eine andere Quelle." (van der Waerden, 1953, S. 129)

Diese Quelle findet van der Waerden in der zuvor stattgefundenen bewussten Überlegung und dem unbewussten Abgleich der gefundenen Lösung mit den bewusst erarbeiteten Anforderungen an die gesuchten Lösung. Damit betont er den Wert der bewussten Vorarbeit und greift die Vorstellung wieder auf, dass bei ausreichender Überlegung „nur ein ganz kleiner Einfall" (van der Waerden, 1953, S. 124) genüge. Warum aber gleichzeitig die schönen Kombinationen mit höherer Wahrscheinlichkeit auch richtig und brauchbar sind, darauf geht er nicht ein, sondern betont im Weiteren wiederholt, dass das Gefühl für Schönheit und das Gefühl der Sicherheit, das richtige Ergebnis gefunden zu haben, zwei unabhängige „Richtlinien" der unbewussten Arbeit seien (vgl. van der Waerden, 1953, S. 129).[10]
Jacques Hadamard übernimmt die These Poincarés und weist dem Sinn für mathematische Schönheit ebenfalls eine unerlässliche Rolle im Prozess mathematischen Schaffens zu. Er zieht aus der Analyse der Poincaréschen Argumentation folgendes Fazit und fasst sie damit gleichzeitig treffend zusammen:

> „We have reached the double conclusion:
> that invention is choice
> that this choice is imperatively governed by the sense of beauty."
> (Hadamard, 1945, S. 31)

Eine Voraussetzung für die Wahl auf der Grundlage des ästhetischen Gefühls sieht Poincaré explizit in der *Freiheit*, die nur im unbewussten Prozess gegeben ist. Das unbewusste Ich ist nicht der Disziplin fester Regeln unterworfen, sondern kann angesichts der bestehenden Vielfalt seiner ästhetischen Intuition folgen (vgl. Poincaré, 1914, S. 52).

[9] Zur ausführlicheren Darstellung und Einordnung des Poincaréschen Begriffs von mathematischer Schönheit vgl. 2.3 und 2.4. Zum Zusammenhang von Schönheit und Nützlichkeit bei Poincaré und den daraus resultierenden Verbindungen von Mathematikästhetik und der Anwendung der Mathematik innerhalb der Naturwissenschaften siehe Jullien (2008) S. 57-67.

[10] Die unterschiedlichen Urteile zum Zusammenhang von ästhetischen und epistemischen Eigenschaften verweisen hier erneut auf die Diskussion über die Rolle von subjektiver Zugänglichkeit und epistemischer Transparenz als Voraussetzung für das ästhetische Erleben einerseits oder als Bestandteil des mathematischen Schönheitsbegriffs andererseits (vgl. insbesondere 2.3.3).

Hier wird also die Arbeit des Mathematikers als Wechselspiel zwischen bewusster disziplinierter Anwendung bekannter Regeln einerseits und dem nicht unter eine Regel fassbaren, freien und intuitivem Streben nach mathematischer Schönheit beschrieben. Letzterem kommt dabei die „Hauptrolle" im Prozess des Mathematikschaffens zu (vgl. Poincaré, 1914, S. 46). Die mathematische Erfindung kommt damit insbesondere durch die zentrale Rolle ästhetischer Kriterien dem künstlerischen Schaffensprozess sehr nah, was Poincaré an anderer Stelle in der Sammlung *Wissenschaft und Methode* zum expliziten Vergleich von Mathematikern und Künstlern veranlasst:

> „Die Suche nach dieser eigentümlichen Schönheit [. . .] bringt uns dazu, diejenigen Tatsachen zu wählen, welche am geeignetesten dazu sind, diese Harmonien zu vervollständigen, so wie der Künstler unter den eigenartigen Gesichtszügen seines Modells diejenigen auswählt, welche das Porträt vervollständigen und ihm Leben und Charakter verleihen." (Poincaré, 1914, S. 13)

Auch erinnert die Poincarésche Vorstellung an die Arbeit des Künstlerischen Genies wie sie etwa Immanuel Kant beschreibt.[11] Dies wird dadurch unterstrichen, dass Poincaré die Fähigkeit zu solchem mathematischen Schaffen als Gabe beschreibt:

> „Nicht jeder kann offenbar diese Intuition, dieses Gefühl für mathematische Ordnung besitzen, welches uns verborgene Relationen und Harmonien erraten läßt." (Poincaré, 1914, S. 39)

Wem die nötige ästhetische Intuition nicht gegeben ist, der kann bestenfalls mathematische Schlüsse Schritt für Schritt nachvollziehen und damit die Mathematik verstehen und anwenden. Allerdings sind diese Menschen „außerstande selbst etwas zu schaffen". Nur diejenigen, die diese Gabe haben, können „schöpferisch tätig sein" (Poincaré, 1914, S. 39).[12]

6.1.3 Der Mathematiker als Künstler

Die beiden hier vorgestellten Ansätze stellen jeweils Möglichkeiten dar, vermittels der Arbeitsweise Mathematiker mit Künstlern zu vergleichen und können damit

[11] Vgl. Kapitel 7 und den Vergleich der beiden Ansätze unter 8.1. Hadamard zitiert in diesem Zusammenhang außerdem Paul Valéry, und stellt heraus, dass dieser die Arbeit des Künstlers ganz ähnlich der Ausführungen Poincarés über den Mathematiker beschreibt. Auch der Dichter führt das künstlerische Schaffen auf einen Auswahlprozess zurück, wobei das Genie gerade in der Wahl zum Ausdruck komme. (Vgl. Hadamard, 1945, S. 30)

[12] Gerade ein solches dem künstlerischen Genie ähnliches Talent spricht Kant den Mathematikern explizit ab. Die beiden Positionen stellen somit eine für die Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik zentralen Gegensatz dar. Dies wird in der Zusammenschau dieses Teils (Kapitel 8) daher erneut diskutiert.

stellvertretend auch für andere Autoren gesehen werden. Wie diese beiden ausführlichen Arbeiten zeigen, kann bei einem solchen Vergleich der Fokus bereits auf unterschiedlichen Ebenen der Betrachtung liegen.

Einerseits wird von einer eher entfernten Warte aus der Umgang von Mathematikern und Künstlern mit ihren Gegenständen beschrieben. Dabei macht die Annahme, dass es sich in beiden Disziplinen um den kreativen Umgang mit Mustern und deren innovative Produktion handelt, das Beschriebene anschaulich und greifbar. Für die Beschreibung methodischer Gemeinsamkeiten von Mathematik und Kunst ist diese Annahme aber nicht unbedingt notwendig, wie etwa Johanna Heitzers Ansatz zeigt:

> „Die Ausübung beider Disziplinen [führt] auf zentrale methodische Gegensatzpaare: Anschaulichkeit und Strenge, Konkretisierung und Abstraktion, Einzelfall und Verallgemeinerung, kühner Entwurf und detaillierte Ausführung sind konträre Aspekte, mit denen und mit deren fruchtbarer Diskrepanz sich sowohl Künstler als auch Mathematiker auseinanderzusetzen haben.“ (Heitzer, 2007, S. 65)

Dabei zeigt Heitzer außerdem, dass diese allgemeine Reflexionsebene auch am konkreten Gegenstand Bestand haben kann. So führt sie diese Spannungsfelder am Beispiel der Spirale, als sowohl für die Kunst als auch für die Mathematik prominentem Gegenstand, weiter aus.

Um aufgrund solcher allgemeinen Charakteristika mathematischen und künstlerischen Arbeitens Aussagen über den Künstlerstatus der Mathematiker treffen zu können oder auch allererst die Aussagekraft der Parallelen zu bewerten, ist zunächst die Frage von Bedeutung, inwiefern dieses Handlungsrepertoir nur das von Künstlern und Mathematikern auszeichnet oder ob auch andere kunstferne Disziplinen unter diese Beschreibung fallen können. Dabei spielen einerseits gerade die vorgeschlagenen Kombinationen eine Rolle. Eine zentrale Stellung bei der Beantwortung kommt andererseits insbesondere der von Schiralli mit „*create* novel or original symbolic patterns“ benannten Handlung zu.[13] Dies kann durch Aussagen unterstützt werden, die die Fantasie als zentrale Fähigkeit des Mathematikers markieren. So betont der Mathematiker Wolfgang Krull „in aller Schärfe“, dass eine besondere „mathematische Fantasie“ den künftigen Forscher vor dem begabten Durchschnitt der Mathematikstudierenden auszeichne und diese der künstlerischen Fantasie sehr nahe stehe (vgl. Krull, 1930, S. 208). Die Beschreibung des Mathematikers als Schöpfer innovativer und origineller Muster ist somit für die Mathematikästhetik von besonderer Bedeutung.

[13] Eine Annäherung an diese Frage bedürfte einer ausführlicheren Analyse etwa auf der Basis des von Schiralli vorgeschlagenen Handlungsrepertoirs. Dies würde aber den Rahmen dieser Ausführungen sprengen und kann daher hier nicht geleistet werden, obgleich mit der Antwort auch Aussagen über die mathematikästhetische Relevanz solcher Ansätze überhaupt verbunden wäre.

Die Frage nach der mathematikästhetischen Relevanz beantwortet Poincaré explizit mit dem Verweis auf das an der mathematischen Erfindung notwendig beteiligte *ästhetische* Gefühl. Dies wird verstärkt durch die Einschätzung, dabei handele es sich um ein angeborenes Talent, also die Parallele zum künstlerischen Genie. Bei solchen aus der Introspektive des Mathematikers entstandenen Theorien, wird also nicht nur eine für die Psychologie interessante Beschreibung eines schwer fassbaren Phänomens geben, sondern auch der Künstlercharakter des Mathematikers auf genuin ästhetische Argumentationen gegründet.

6.2 Stile in Mathematik- und Kunstgeschichte

> „It is well known that the style in which mathematical proofs are written has undergone considerable fluctuations. [...] On the other hand, in other respects there has been remarkable constancy." (von Neumann, 1976, S. 4)

Diese Beobachtung führt John von Neumann an, während er der Frage nachgeht, ob die Arbeit des Mathematikers der eines empirischen Wissenschaftler gleicht. Sein beiläufiger Hinweis darauf, dass er nicht der einzige sei, der davon ausgeht, dass das mathematische Denken verschiedenen Stilen unterliege, sondern dass es sich vielmehr um eine allseits bekannte Tatsache handele, kann durch einen Blick in die Literatur bestätigt werden. So wird nicht nur in Arbeiten zum Kunstcharakter der Mathematik darauf hingewiesen, dass das mathematische Arbeiten, die Art der (schriftlichen) Kommunikation, die verwendeten Beweismethoden oder auch die zentralen Forschungsgegenstände und der Umgang mit ihnen Veränderungen im Laufe der Mathematikgeschichte unterliegen:

> „In fact, I believe that mathematical thought patterns also change with time and that these in turn affect aesthetic criteria – not only in terms of what counts as an interesting problem, but also what methods the mathematician can use to approach these problems, as well as how a mathematician judges their solutions." (Borwein, 2006, S. 23)

Jonathan Borweins Überzeugung kann stellvertretend für viele mathematikphilosophische Ansätze gesehen werden.[14] Dabei weist er neben der generellen Veränderung der „Denkmuster" in der Mathematik auch auf Wechselwirkungen mit den Kriterien mathematischer Schönheit hin. Die Möglichkeit solcher Stile beruht für Borwein, wie auch für viele andere, auf der Grundannahme der Mathematik als Kulturleistung.

John von Neumann geht in *The Mathematician* über das reine Postulieren verschiedener mathematischer Stile hinaus. Die stilistische Veränderung gemeinsam

[14] Vgl. stellvertretend Ruelle (2007), McAllister (2005) oder Borwein (2006).

mit der Beobachtung ästhetischer Werturteile im mathematischen Arbeitsprozess führen ihn zu dem Ergebnis, dass die Mathematik als Kunst und weniger als empirische Wissenschaft zu sehen sei (vgl. von Neumann, 1976, S. 9). Den diagnostizierten Kunststatus der Mathematik nutzt er z.B. um auf eine Gefahr für die Entwicklung der Mathematik hinzuweisen, sollte sich diese zu weit von realen Problemstellungen entfernen:

> It becomes [...] more and more l'art pour l'art. [...] At the inception the style is usually classical; when it shows signs of becoming baroque, then the danger signal is up.“ (von Neumann, 1976, S. 9)

Hier werden nicht nur Stile im mathematischen Denken identifiziert und daraus Schlüsse auf den Kunstcharakter der Mathematik gezogen. Überdies kommt es zur Charakterisierung und Wertung der Mathematik mittels aus der Kunstgeschichte bekannter Epochenbezeichnungen.

Während es von Neumann innerhalb seines Essays zu technisch erscheint, Beispiele etwa für „barocke“ Mathematik zu geben (vgl. von Neumann, 1976, S. 9), machen es sich andere Autoren gerade zur Aufgabe, diese direkte Parallele zu explizieren. Im Folgenden sollen nun zunächst drei solcher Stilgeschichten der Mathematik umrissen werden, die sich sowohl in der Herangehensweise als auch in ihren Ergebnissen unterscheiden. Gerade diese Unterschiede bieten dann die Grundlage eine Diskussion der Möglichkeiten solcher Ansätze insbesondere bezogen auf die Frage nach dem Kunststatus der Mathematik.

6.2.1 Mathematischer Barock und weitere Stilvergleiche

In seiner Vortragsniederschrift zur *Stilkunde des Raumbegriffs* geht Karl Heinrich Hofmann der These nach, „daß auch die Mathematik in ihrem geschichtlichen Werden durch Stile gezeichnet ist, die sich mit dem Ablauf der Zeiten wandeln“ (Hofmann, 1982, S. 171). Mit Fokus auf der jeweiligen Raumauffassung betrachtet er Beispiele aus der Kunst- und Mathematikgeschichte und schließt daraus auf Gemeinsamkeiten in der Entwicklung beider Disziplinen. Diese führen ihn schließlich dazu, innerhalb der Mathematikgeschichte nicht nur überhaupt von Stilen zu sprechen, sondern diese auch mit den entsprechenden Bezeichnungen aus dem Bereich der Kunstgeschichte zu versehen:
Dem klassischen Stil der antiken griechischen Künstler und Architekten entspricht demnach die Raumauffassung der in den Elementen des Euklid zusammengetragenen Geometrie, die sich Hofmann folgend wesentlich durch die Elemente Gerade, rechter Winkel, Parallelität, Symmetrie und Rhythmus auszeichnet:

> „Die Antithese der Vertikalen gegen die Horizontale, des Lastens gegen das Stützen und die rhythmische Symmetrie der Säulenreihung ist die in Stein verewigte Raumauffassung der Griechen.“ (Hofmann, 1982, S. 177)

Für die Renaissance beschreibt Hofmann zunächst die umgekehrte Richtung und geht auf die Verwendung euklidischer Kenntnisse für die perspektivische Darstellung des dreidimensionalen Raums in der Zeichenebene ein. Für die Darstellung und mathematische Beschreibung der Raumauffassung der Renaissancekünstler bedarf es demnach lediglich der klassischen Mathematik Euklids. Die Renaissancekünstler schafften es mit Hilfe dieser mathematischen Grundkenntnisse Dreidimensionales auf die Zeichenebene zu bringen und hoben somit nach Hofmann „die künstlerischen Raumvorstellung [...] auf eine neue Stufe des Bewusstseins" (Hofmann, 1982, S. 181). Damit stellt die Renaissancekunst ein Beispiel für ein Hofmann folgend „sich immer aufs neue wiederholendes" historisches Phänomen dar:

> „Als selbstständiger Ausdruck menschlicher Kreativität stellt die Mathematik geistiges Rüstzeug bereit, das zu gegebener Zeit und unter passenden Umständen in unvorhergesehener und auch unbeabsichtigter Weise genützt und angewendet wird." (Hofmann, 1982, S. 181)

In diesem Sinne entsteht die Raumauffassung der Renaissance als „Muster durch Mathematik". Auf die Entwicklungen, die durch die zunächst künstlerische Fragestellung auch innerhalb der Mathematik angestoßen wurden, geht Hofmann hier nicht weiter ein.
Die für die Mathematikästhetik interessantere Zuordnung von Merkmalen der Kunstepoche zu einer „Renaissance der Mathematik" macht Hofmann nun nicht mehr strikt am Raumbegriff fest. Vielmehr wählt er Indikatoren, die das jeweilige System und Arbeitsweisen beschreiben, wie etwa die Häufung und gegenseitige Beeinflussung durch große Vertreter der Kunst bzw. der Mathematik. So findet er die Entsprechung für das in der Renaissancekunst von Italien ausgehende „kollektive Genie" (Hofmann, 1982, S. 182) des 15. und 16. Jahrhunderts in der Mathematikgeschichte erst viel später:

> „Was Massaccio im Jahre 1423 in der Brancaccikapelle für den künstlerischen Ausdruck in der Malerei leistet und damit die Renaissance der Künste eingleitet hatte, vollbrachte Kepler für die Mathematik [...] im Jahre 1609 in der ‚Astronomia Nova'." (Hofmann, 1982, S. 184)

Die „Hochrenaissance in der Mathematik" datiert Hofmann somit in das 17. und beginnende 18. Jahrhundert, gekennzeichnet durch die Entstehung der analytischen Geometrie und modernen Analysis (vgl. Hofmann, 1982, S. 185). Dieser Epoche lässt er dann auch in der Mathematik einen dem künstlerischen Barock korrespondierenden Stil folgen. Der „Barock der Mathematik" wird dem 19. und frühen 20. Jahrhundert zugeordnet und mit Namen wie Gauß, Klein oder Poincaré in Verbindung gebracht. Kennzeichnendes Element ist die „Neigung zur Synthese und zur Systematisierung vorhandenen mathematischen Einzelwissens" (Hofmann, 1982, S. 189) aber auch die Ablösung der euklidischen Raumvorstellung durch die Topologie, mit der „die mathematische Theorie des Raumes nach zweitausend Jahren eine von Grund auf neue Gestalt" (Hofmann, 1982, S. 188) erhält.

Interessanter Weise handelt es sich bei der von Hofmann vorgeschlagenen Zuordnung von Stilen der Kunstgeschichte zu den Entwicklungen der Mathematik nur um inhaltliche, nicht aber um zeitliche Parallelen. So kommt er abschließend zu zwei – sich in Teilen widersprechenden – Thesen zur Stilgeschichte in Mathematik und Kunst:

> „Im Ansatz einer Stilkunde des Raumbegriffs und der Raumvorstellung in der Mathematik- und Kunstgeschichte erscheinen Anhaltspunkte für die Annahme, daß einer Kulturepoche eine letztlich einheitliche Raumkonzeption eigen ist, die sowohl in der bildenden Kunst und Architektur als auch in der mathematischen Raumtheorie zu vergleichbaren Stilmerkmalen führt.“ (Hofmann, 1982, S. 189)

Zunächst begründet er die inhaltlichen Gemeinsamkeiten und ähnlichen Stilmerkmale der Kulturleistungen Mathematik und Kunst also über die Prägung durch die selbe Kulturepoche. Wie die angeführten Beispiele zeigen, treten die herausgearbeiteten inhaltlich und organisatorisch vergleichbaren Muster in Kunst und Mathematik aber keineswegs zeitgleich auf, was Hofmann zu einer weiteren Verallgemeinerung veranlasst:

> „Die Artikulation des Raumbegriffs einer Stilepoche eilt im Bereich der bildenden Künste der Artikulation des entsprechenden Raumbegriffes in der Mathematik voraus, in der Regel um anderthalb bis zwei Jahrhunderte, mit einer der allgemeinen Beschleunigung des Geschichtsablaufs entsprechenden abnehmenden Tendenz dieser Phasenverschiebung.“ (Hofmann, 1982, S. 189)

Auf die Frage, warum die stilbildenden Prägungen einer Kulturepoche im Falle der Mathematik erst wirksam werden, wenn sich die sie umgebenden übrigen kulturellen Hervorbringungen bereits in einer nächsten Stilepoche befinden, geht Hofmann nicht ein.[15]

Auch Max Bense (1910–1990) geht ausführlich auf verschiedene Stile innerhalb der Mathematikgeschichte ein und widmet der „Stilgeschichte“ sogar ein ausführliches Unterkapitel innerhalb des ersten Teils der *Geistesgeschichte der Mathematik*. Die Identifikation verschiedener Stilepochen der Mathematik und ihre Parallelisierung mit Entwicklungen der Kunstgeschichte führt ihn jedoch nicht dazu, von der Mathematik als Kunst zu sprechen. Für ihn ist Mathematik „reine Wissenschaft, nichts anderes“ (Bense, 1946, S. 119) und ein Schluss auf ihren Kunstcharakter hält er explizit für nicht zulässig. Sein Ansatz soll hier dennoch besprochen werden, da er neben der Behauptung von Stilen der Mathematik allgemein auch zu einer Zuordnung zu den Stilepochen der Kunst kommt, die sich grundlegend von der oben beschriebenen Hofmannschen Einteilung unterscheidet.

[15] Als Ausblick stellt er sich ausgehend von der zweiten These die Frage, ob und wie sich der nicht mehr klar zu definierende „Stil“ der auf den Barock folgenden modernen Kunstformen in der aktuellen Mathematik niederschlägt (vgl. Hofmann, 1982, S. 190f).

> „[Die] Proportion liegt dem Stil der Renaissance und der Klassik als das stilbildende generalisierte mathematische Formelement zugrunde. Und das nennen wir das euklidisch Element der Renaissance und der Klassik." (Bense, 1946, S. 132)

Aus der Beobachtung, dass zur Beschreibung der Kunst bis zur Renaissance allein die Mathematik der euklidischen *Elemente* genügt, kommt Bense zur Parallelisierung dieses Kunststils mit der griechischen Mathematik und zu dem Schluss, dass „Euklids Bemühungen um eine geometrische Theorie gewisser Verhältnisgleichungen als klassische Mathematik" (Bense, 1946, S. 132) beschrieben werden könne.[16] Diese Zuordnung überdauert Bense folgend einen langen Zeitraum bis zur aufkommenden Differential- und Integralrechnung. Hier gelte nun, dass die Kunst im Barock nur mit Hilfe der mathematischen Errungenschaften ihrer Zeit beschreibbar sei:

> „Man hat gesagt, daß so, wie die Formen der Renaissance noch nach dem Verfahren der klassischen Geometrie des Euklid bestimmbar sind, die geschwungenen Linien des Barock nur mit Hilfe des infinitesimalen Kalküls zu errechnen seien." (Bense, 1946, S. 125)

Die durch Newton und Leibniz angestoßene neue Epoche der Mathematik fällt Bense folgend nicht nur zeitlich und in der Anwendbarkeit der mathematischen Erkenntnisse auf die Produkte der Kunst dieser Zeit mit dem künstlerischen Barock zusammen. Vielmehr erkennt er hier die *Folge* als wiederum gemeinsames stilbildendes Element. Er findet sie in der formalen Mathematisierung der Leibnizschen „mathesis universalis", wie auch als Grundlage der Mathematik im engeren Sinne (Infinitesimalkalkül, Folgen als Interpretation einer stetigen Funktion, Potenzreihen usw.) der Barockzeit:

> „Der barocke Stil in der Mathematik, wie überhaupt der Stil des barockalen Geistes, entwickelt sich stets aus der Folge: sie erscheint als Kurve wie auch als genaues axiomatisch-deduktives System. [. . .] Die Mathematik im Zeitalter der Mathesis universalis und der Infinitesimalrechnung offenbart den mathematischen Barockstil." (Bense, 1946, S. 127)

Zum mathematischen Barock zählt Bense auch die Weiterentwicklung in Analysis und Funktionentheorie sowie die „Lehre von den Irrationalen" nach Weierstraß, Dedekind und Cantor, aber auch Hilberts Arbeiten zur Grundlegung der Mathematik (vgl. Bense, 1946, S. 127f).[17] Dem stellt er den Intuitionismus nach Kronecker und

[16] Auf die Anwendung der griechischen Mathematik durch die Künstler der Renaissance und damit auf Fragen nach „Mustern durch Mathematik" (vgl. 1.1.1) geht Bense ausführlicher in der später erschienen Fortsetzung *Geistesgeschichte der Mathematik II* (Bense, 1949, S. 304–315) ein.

[17] Für eine genaue Zuordnung von mathematischen und künstlerischen Leistungen des barocken Stils siehe auch das Kapitel *Mathematik und Kunst im Zeitalter des Barock* (Bense, 1949, S. 316ff).

Brouwer gegenüber, in dem „ein romantischer Zug“ (Bense, 1946, S. 126) liege. Aus dem Gewicht, das in dieser mathematischen Richtung Lösungskonstruktionen eingeräumt wird, schließt Bense hier eine „partikulare Auffassung“ von Mathematik (Bense, 1946, S. 128), die nicht auf ein allgemeines mathematisches System, sondern auf die Untersuchung einzelner Probleme ausgerichtet sei. Dies identifiziert er mit der individualistischen Herangehensweise der Kunst und Lyrik der Romantik. Die mathematische Romantik zeichnet sich somit durch Problemdenken statt des barocken Systemdenkens aus und wird von Bense als „Gegenbewegung“ (Bense, 1946, S. 130) zum mathematischen Barock verstanden.

Anders als Hofmann kommt Bense also nicht nur zu einer inhaltlichen, sondern auch zu einer zeitlichen Parallelität künstlerischer und mathematischer Stile. Gemeinsam ist beiden, dass sie sowohl übergreifende inhaltliche Konzepte, wie den Raumbegriff oder die Folge, als auch systematische Beobachtungen heranziehen und sie als in beiden Disziplinen zu findende stilbildende Elemente identifizieren.

Bemerkenswert ist, dass Bense abgesehen von der beschriebenen Stilgeschichte in Parallelität zur Kunst weitere Möglichkeiten sieht, Stile in der Mathematik auszumachen. So weist er etwa auf die von Felix Klein in seinen Vorlesungen zur *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* herausgearbeiteten unterschiedlichen Entwicklungsreihen hin und fasst zusammen, dass Klein damit, obgleich er keinen expliziten Kunstvergleich anstrebe, im Prinzip auch eine Art Stilgeschichte vorlege (vgl. Bense, 1946, S. 132ff). Auch diesen Ansatz führt Bense aber schließlich auf seine eigene kunstähnliche Stilzuordnung zurück oder zieht mindestens Querverweise zu dieser. Er stellt beispielsweise fest, dass in Kleins „Entwicklungsreihe B“ „alle Merkmale der Barockmathematik vorhanden sind“, da dort der Funktionsbegriff eine zentrale Rolle spiele und dieser sich wiederum auf die Folge als stilbildendes Element des Barock zurückführen lasse (vgl. Bense, 1946, S. 134).[18]

Sowohl Hofmann als auch Bense folgern an verschiedenen Stellen aus den zur Beschreibung der Kunst einer bestimmten Epoche notwendigen mathematischen Werkzeugen auf den Stil dieser Mathematik. Dies ist insofern problematisch, als die Produkte der Kunst als gegeben angesehen werden. Mit Blick auf ihre Beschreibung mit mathematischen Mitteln sind daher höchstens Aussagen über die Stilzugehörigkeit des jeweiligen Kunstwerks möglich.
Eine Beschreibung der beteiligten Mathematik oder gar die Zuordnung zu einem mathematischen Stil kann auf dieser Grundlage dagegen nicht geleistet werden.

[18] Eine genaue Analyse der Kleinschen Perspektive auf die Mathematikgeschichte in der Entwicklungsreihenzuordnung sowie der Einschätzung Benses findet sich in Allmendinger und Spies (2013). Als weiteres von der Kunst zunächst unabhängiges stilbildendes Moment markiert Bense in den Teilen III und IV seiner *Stilgeschichte der Mathematik* den „Gegensatz zwischen Problemdenken und Systemdenken“ (Bense, 1946, S. 134) innerhalb der Mathematikgeschichte. Damit macht er quer zur chronologischen Geschichtsschreibung liegende stilbildende Element aus und diskutiert diese ausführlich. Da dabei zunächst keine Parallelen zur Ästhetik bzw. Kunsttheorie gezogen werden, soll auf eine ausführliche Besprechung dieser aus mathematikhistorischer Sicht sicher interessanten Beobachtungen hier verzichtet werden.

Dies würde voraussetzen, die jeweiligen mathematischen Mittel mittels ihrer eigenen Anwendung zu beschreiben.

Bense spitzt den Zusammenhang von mathematischer und künstlerischer Entwicklung am Ende des zweiten Teils seiner *Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik* weiter zu und kommt zu dem Ergebnis, dass prinzipiell jeder stilistische Wandel in der europäischen Kunstgeschichte verbunden sei mit „der Einführung mathematischer Methoden und Theoreme, auf die die formalen Elemente jenes Stils mehr oder weniger einheitlich und vollständig zurückgeführt werden können" (Bense, 1949, S. 423). Diesen Zusammenhang in der Geschichte der beiden Disziplinen interpretiert Bense nicht nur als Niederschlag einer immanenten Verbindung zwischen „gesellschaftlichen, ökonomischen und politischen Prozessen einerseits und intellektuellen, geistigen Vorgängen andererseits" (ebd.), sondern schließt daraus auch auf eine allgemeine Gesetzmäßigkeit, die er das „Theorem von der ursprünglichen Einheit ästhetischer und mathematischer Kategorien" (ebd.) nennt und damit auf die Grundlage zur Entwicklung seiner eigenen ästhetischen Theoriebildung[19]:

> „Es handelt sich um eine Ästhetik der reinen künstlerischen Formen, und das Hauptunternehmen dieser Ästhetik besteht darin, diese reinen künstlerischen Formen auf mathematische Formen zurückzuführen." (Bense, 1949, S. 423)

Auch François Le Lionnais überträgt Stilbezeichnungen und -charakteristika auf die Mathematik. Zentral ist für ihn dabei die Unterscheidung zwischen klassischem und romantischem Stil, jeweils differenziert nach den betrachteten Gegenständen – Theoreme einerseits und Methoden andererseits. Mittels der Stilzugehörigkeit versucht Le Lionnais somit verschiedene Ausprägungen mathematischer Schönheit zu charakterisieren.
Die „klassische Schönheit" von Theoremen oder größeren Zusammenhängen charakterisiert er wie folgt:

> „We say that a mathematical proposition has classic beauty when we are impressed by its austerity or its mastery over diversity, and even more so when it combines these two characteristics in a harmoniously arranged structure." (Le Lionnais, 2004, S. 124)

Somit macht Le Lionnais den klassischen Stil an bestimmten Charakteristika mathematischer Schönheit fest. Konkret wählt er Kriterien, die den oben beschriebenen Eigenschaftskomplexen der Ökonomie (vgl. 2.2), aber auch der epistemischen Transparenz (vgl. 2.3) zuzuschreiben sind, die die klassische Mathematik kennzeichnen:

[19] Aus den hier skizzierten Grundlagen entwickelt Bense später die Theorie, die unter der Bezeichnung informationstheoretische Ästhetik bekannt wird.

> „It seems to us that a method earns the epithet of classic when it permits the attainment of powerful effects by moderate means. [...] Equally classic are the methods which cast a new light on previously known facts, bringing together and unifying discoveries formerly considered disparate.“ (Le Lionnais, 2004, S. 136f)

Hieraus folgert er, dass der indirekte Beweis nicht zu den klassischen Methoden zu zählen ist. Dies ist mindestens bemerkenswert, da gerade der Widerspruchsbeweis häufig als das Standardbeispiel für ein ökonomisches Vorgehen angeführt wird. Dabei spielt sicher die der klassischen Mathematik zugeordnete Kombination von Eigenschaften eine entscheidende Rolle, wenn Le Lionnais etwa den indirekten Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ explizit dem romantischen Stil zuordnet[20] und folgert:

> „From the pedagogical point of view romanticism (in method of proof) is very often synonymous with difficulty.“ (Le Lionnais, 2004, S. 141)

So bilden Resultate, die der mathematischen Romantik zuzuordnen sind, einen klaren Kontrast zum klassischen Stil und sind gekennzeichnet durch eine spezielle Art der emotionalen Wirksamkeit. Die stilbildende Gefühlswelt beschreibt Le Lionnais als „glorification of violent emotion, nonconformism and eccentricity“ (Le Lionnais, 2004, S. 130). Hierzu zählt er die häufig mit mathematischer Schönheit in Verbindung gebrachten Gefühle (vgl. 2.4) des Erstaunens und der unerwarteten Wendungen (vgl. Le Lionnais, 2004, S. 130ff) sowie den Eindruck eines „Mysterium“, der etwa durch die Verwendung von „Tricks“ in einer Beweisführung entstehen kann (vgl. Le Lionnais, 2004, S. 141ff).
Anders als Hofmann oder Bense unternimmt Le Lionnais nicht den Versuch die von ihm identifizierten Stile einer bestimmten zeitlichen Epoche oder mathematischen Schule zuzuordnen. Vielmehr führt er Beispiele über die gesamte Mathematikgeschichte hinweg an.[21] Eine Parallelisierung zur Kunst besteht lediglich in der Bezeichnung der Stile und in ihrer Charakterisierung, bei der er jeweils Anleihen etwa in Dichtung und Literatur von Klassik bzw. Romantik macht. Über diese Verbindung versucht er, die Zuordnung der jeweils gewählten mathematischen Beispiele zu veranschaulichen. Diese Zuordnung wird umso deutlicher, als er im Gegensatz zu den beiden oben beschriebenen Ansätzen ausschließlich (mathematik)ästhetische Kriterien zur Identifikation heranzieht. Die Stilfrage wird hier eindeutig eine Frage der (Mathematik-)Ästhetik.

---

[20] Für die Diskussion dieses Beispiels siehe Kapitel 10 sowie Spies (2012) mit besonderem Blick auf die (mangelnde) epistemische Tansparenz und die didaktischen Implikationen.

[21] Insofern ähnelt sein Vorgehen der Strukturierung der Mathematikgeschichte, wie sie Felix Klein im *Zwischenstück* seiner *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Klein, 1908, S. 82ff) vorschlägt (vgl. Allmendinger und Spies, 2013).

6.2.2 Grenzen und Möglichkeiten der Stilfrage

Die drei besprochenen Beispiele zeigen zunächst, dass die Vorstellung etwa einer barocken oder klassischen Mathematik nicht eine Redensart von Mathematikern wie etwa dem oben zitierten John von Neumann bleiben muss. Es ist möglich, gewisse Stile im Verlaufe der Mathematikgeschichte zu identifizieren und diese auch den aus den Künsten bekannten Stilen zuzuordnen. Solche Ansätze zur Stilfrage der Mathematik zeigen somit eine explizite Parallelisierung mathematischer und künstlerischer Arbeit. Auch wenn damit, wie im Fall Benses, ausdrücklich nicht der Kunstcharakter nachgewiesen werden soll, wird die Mathematik doch mindestens als Kunstform behandelt. Dies wiederum rechtfertigt einerseits die Betrachtung solcher Ansätze innerhalb der Mathematikästhetik, und führt andererseits zu der Frage nach dem Gewinn für das Nachdenken über Mathematik allgemein.
Die Beispiele zeigen aber auch eindrücklich, dass sowohl die Identifikation bestimmter Strömungen als auch die Zuordnung zur Kunst einer gewissen Beliebigkeit zu unterliegen scheint. Hier soll und kann nun kein weiterer Versuch unternommen werden, die „richtige“ Zuordnung zu finden. Vielmehr wird mit Blick auf einen möglichen Kunstcharakter der Mathematik der Frage nach Voraussetzungen, Möglichkeiten und Grenzen der Rede über mathematische Stile nachgegangen.

Die deutlichen Differenzen bezogen auf die Identifikation bestimmter künstlerischer Stilrichtungen in der Mathematik zeigen zunächst, dass die Parallelität nicht für jedermann offensichtlich und eindeutig zu erkennen ist. Die zum Vergleich herangezogenen stilbildenden Elemente spielen somit eine zentrale Rolle. Zunächst müssen also Gemeinsamkeiten von Kunst und Mathematik herausgearbeitet werden, die die Identifikation eines Stils in beiden Disziplinen erlauben.[22] Wie die oben beschriebenen Beispiele zeigen, können diese bereits sehr unterschiedlicher Natur sein. Sie reichen von ähnlichen sozialen Gefügen, wie etwa der Häufung besonders ausgezeichneter beteiligter Personen, über gemeinsame Grundvorstellungen – beispielsweise des Raumbegriffs – bis zur Umsetzung gemeinsamer inhaltlicher Prinzipien.
All diese möglichen Ebenen der Gemeinsamkeit, die es erlauben von Kunst und Mathematik gleichen Stils zu sprechen, haben Herbert Mehrtens folgend ihre Berechtigung und müssten in einer Schau auf die Mathematikgeschichte vor diesem Aspekt beachtet werden:

> „Es ginge darum [...] den Kontext der Produktion der Mathematiker und Künstler sehr weit zu fassen und sehr dicht zu beschreiben, um sich an all das anzunähern, was den kulturellen Zusammenhang ausmacht.“ (Mehrtens, 1990, S. 546)

[22] Dass ein solches gemeinsames „Imaginäres“ existiert, schließt Herbert Mehrtens aus der „sozialen Wirklichkeit“, also aus der Tatsache, dass stilistische Vergleiche von Kunst und Mathematik angestellt werden (vgl. Mehrtens, 1990, S. 539).

Was dies bedeuten würde, zeigt bereits die von Mehrtens angebotene Skizze möglicher Themen bezogen auf die künstlerische und mathematische Moderne (vgl. Mehrtens, 1990, Kap. 7). Dabei wird deutlich, dass die oben dargestellten Ansätze jeweils nur Teilaspekte eines solchen Programms einlösen. Ihnen fehlt mindestens die geforderte Breite, da je „nur“ einzelne stilbildende Eigenschaften herangezogen werden.
Mehrtens zeigt außerdem, dass selbst bezogen auf ein bestimmtes Merkmal die Beschreibung keineswegs zu eindeutigen Ergebnissen kommen muss. Dies verdeutlicht er an dem beiden Disziplinen gemeinsamen Umgang mit Raum und Fläche: Die Geschichte von „Geometrie und Kunst“ könne einerseits als gemeinsamer „Erkenntnisweg“ dargestellt werden. Andererseits kann die Entwicklung aber auch „asymmetrisch“ beschrieben werden, in dem der wissenschaftlichen Erkenntnis der Vorrang gegeben wird (vgl. Mehrtens, 1990, S. 549f).
Dieses Beispiel zeigt außerdem, dass die Diskussion von Stilen sich mindestens bezogen auf die Mathematik nicht ausschließlich auf genuin ästhetische Eigenschaften – etwa im Sinne der in Kapitel 2 herausgearbeiteten Kriterien mathematischer Schönheit – stützt. Ähnlich der Zuordnung zu bestimmten Stilepochen durch die Kunsttheorie, werden bezogen auf die Mathematik auch bestimmte zentrale Inhalte oder institutionelle Besonderheiten als stilbildend erkannt. In jedem Fall jedoch werden Merkmale herausgearbeitet, die *außerhalb* der engen wissenschaftlichen Systematik liegen und außerdem Parallelen im Bereich des Künstlerischen erkennen lassen. Es handelt sich also mindestens um kunstähnliche bzw. kunstspezifischen Eigenschaften.[23]

Die Identifikation von Stilen arbeitet naturgemäß mit mathematikhistorischen Phänomenen. Mit Hilfe mehr oder weniger explizit ausgezeichneter stilbildender Elemente wird eine spezielle Art der „Ordnung“ in die historischen Beobachtungen gebracht, bestimmte Strömungen werden aufgedeckt und Entwicklungen begrifflich fassbar. Ähnlich dem Vorgehen in der Kunstgeschichte erlauben Ansätze zur Stilgeschichte der Mathematik die Zusammenfassung und Beschreibung von Phänomenen innerhalb der Mathematikgeschichte vor dem Hintergrund bestimmter ästhetischer bzw. kunstähnlicher Eigenschaften. Dabei enthält die Zuordnung zu einem bestimmten Stil immer auch ein wertendes Moment. So stellt etwa der Mathematikhistoriker David Rowe über die Göttinger Mathematikszene zu Beginn des 20. Jahrhunderts nicht ohne Bewunderung fest:

> „Tastes differed, but style mattered, and mathematical creativity found various forms of personal expression.“ (Rowe, 2002, S. 64)

Schon die Beobachtung, dass die Stilfrage eine Rolle für die mathematische Praxis der von ihm beschriebenen historischen Periode spielt, lässt Rowe nicht nur auf den Kunstcharakter dieser Mathematik schließen, sondern auch auf eine besondere Wertigkeit.

[23] Wird die philosophische Ästhetik als Kunsttheorie aufgefasst, sind auch dies genuin ästhetische Eigenschaften.

Die Mathematikästhetik wird im Feld der Mathematikgeschichte auf zweifache Weises wirksam. Einerseits werden ästhetische Werturteile als Erklärung für bestimmte Entwicklungsschritte im Laufe der Mathematikgeschichte herangezogen. Insbesondere diejenigen wissenschaftstheoretischen Ansätze, die von regelmäßigen revolutionären Umwälzungen ausgehen, sehen den Erfolg neuer Ideen oder Denkansätze in deren ästhetischen Qualitäten begründet.[24] Aber auch im Kleinen, innerhalb der Entscheidungsprozesse während des mathematischen Schaffens, wird das Ästhetische als eine nicht unbedeutende Motivation von Autoren mathematischer Texte angesehen. Die Identifikation lässt damit Antworten auf die Frage nach dem „Warum" einer bestimmten Art der Textgestaltung zu. So kann etwa auch der Drang nach etwas ästhetisch Neuem zu einer bestimmten Art zu schreiben und damit zu einem Stilwechsel führen. Reviel Netz spricht in *The ludic proof* etwa von „the inflation of style" als einem in der Mathematikgeschichte häufig zu beobachtenden Phänomen:

> „What was at first striking an original becomes banal and automated so that a new, even more radical departure is required merely in order to capture the original sense of surprise. Thus a style, during its period of growth, tends to become more pronounced – until it is finally discarded." (Netz, 2009, S. 107)

Andererseits hält Holger Wille fest, dass „Ästhetisierungsprozesse [...] in gewisser Hinsicht Formen einer Distanzierung gegenüber den Gegenständen, mit denen man es zu tun hat" sind und sich daraus ein eigener Wert der „ästhetischen Historisierung wissenschaftlicher Erkenntnisse" (Wille, 2004, S. 252) ergebe. Zur Identifikation bestimmter Stile wird zwangsweise eine Metaperspektive auf die Mathematikgeschichte eingenommen, und die mathematikhistorischen Phänomene werden mit Hilfe ästhetischer, also nicht in der Wissenschaftssystematik begründeter Eigenschaften beschrieben, bewertete und klassifiziert.[25] Dabei können stilbildende Element eine vermittelnde Rolle zwischen behandelten Gegenständen und den handelnden Personen einnehmen und auf den vorangegangenen Denkakt verweisen.[26]

[24] Ein Klassiker ist hier etwa Kuhn (1978), der ästhetischen Argumenten gerade für die Entwicklung der Mathematik eine besondere Relevanz beimisst (S. 166f). Dies wird aufgegriffen und weiterentwickelt etwa in McAllister (1996) (Kap. 8) und Feyerabend (1983) (Kap. 18). Wille schließt aus der Beobachtung solcher Ansätze, dass die Wissenschaftsästhetik in Zeiten des Umbruchs eine Aufwertung erfährt: „Anomalien, Krisen und Revolutionen scheinen Phänomene zu sein, die einen Diskurs über die Schönheit des Wahren begünstigen, werden in ihnen doch auch gerade [...] diejenigen empirischen Prüfungsverfahren fraglich, die bislang als so verlässlich galten." (Wille, 2004, S. 251)

[25] Insofern bietet die Behandlung der Stilfrage eine Möglichkeit eines „wissenschaftsexternen" Blicks auf die Mathematikgeschichte, der sich nicht auf eine reine Institutionengeschichte beschränkt (vgl. Epple, 2000, Kap. 5). Max Bense plädiert in diesem Zusammenhang für eine explizite Unterscheidung der Geistesgeschichte, zu der er die Stilgeschichte zählt, vom eigentlichen Geschäft der „Forschungsgeschichte" (vgl. Bense, 1946, S. 109ff).

[26] Vgl. dazu etwa Granger (1968), S. 16 oder die Ergebnisse der Netzschen Textanalyse (vgl. 6.3.2).

Wie der Ansatz von Le Lionnais zeigt, kann die Zuordnung von Stilen aber auch unabhängig von zeitlichen Zusammenhängen sein und damit eine quer zu einer chronologischen Darstellung stehende Systematik bieten. Die Identifikation solcher wiederkehrender Muster kann wiederum dazu beitragen, aktuelle Entwicklungen oder den Umgang mit einem bestimmten Stoffgebiet zuzuordnen und auch aus mathematikästhetischer Perspektive zu beurteilen.
Dass ein Stil eine wiederkehrende Kategorie darstellen kann, widerspricht zunächst der Verwendung des Begriffs im Rahmen der Kunstgeschichte. In allgemeineren Zusammenhängen (individuelle Stile, Denk-Stil, Lebens-Stile (vgl. Müller, 1992)) ist es jedoch üblich, Stile als quer zur historischen Entwicklung liegendes Unterscheidungsmerkmal zu verwenden.[27] Ein solches Vorgehen etwa im Rahmen einer Philosophie des Stils bedarf einerseits einer allgemeinen Charakterisierung des Begriffs, in der andererseits die zur Identifikation eines Stils einzunehmende Perspektive genau festlegt ist. Ein Beispiel dieser Art liefert Gilles-Gaston Granger (1968) unter dem Titel *Essai d'une Philosophie du Style*. Er charakterisiert den Stil als eine Integration des Individuellen im Umgang mit dem bearbeiteten Gegenstand und somit als ein Phänomen, das jeder menschlichen Praxis eigen ist (vgl. Granger, 1968, S. 8). Dieses Vorgehen ist im Rahmen von Mathematikphilosophie und -geschichte von besonderem Interesse, da ihm Fallstudien aus der Mathematik als erste Beispiele dienen. Dabei beschreibt er einerseits die Arbeitsweise einzelner Persönlichkeiten und ihren Umgang mit bestimmten Problemen als stilbildend, zeigt aber andererseits am Beispiel der komplexen Zahlen auch auf, wie diese auf sich stilistisch unterscheidende Weise eingeführt werden können (vgl. Granger, 1968, S. 20f). Obgleich Granger der Stilfrage eine bedeutende Rolle für die interne Entwicklung der Mathematik einerseits und ihre Beziehung zur Welt der konkreten Objekte andererseits zuspricht (Granger, 1968, S. 21), schließt er an diese Analysen keinen Mathematik-Kunst-Vergleich an[28], so dass eine ausführliche Diskussion des Ansatzes im hier diskutierten Zusammenhang nicht weiter führt.

Aus den jeweiligen Begründungen dafür, dass die Frage nach Stilen der Mathematik überhaupt angemessen ist, lässt sich eine erste Voraussetzung für eine solche mathematikästhetische Betrachtungsweise der Geschichte ablesen: Die Mathematik, ihre Produkte und Arbeitsweisen müssen als *zeitlich bedingte Kulturleistung* aufgefasst werden. Nur wenn von historischen Veränderungen ausgegangen wird, die über die bloße Vermehrung mathematischer Resultate hinausgehen, ist es überhaupt denkbar, Stile in der zugrunde liegenden Denkweise auszumachen. Um des weiteren einen Abgleich mit den Stilen der Kunst vorzunehmen, müssen außerdem Wechselwirkungen mit der die Mathematik umgebenden Kultur vorausgesetzt werden. So sieht Bense in der Parallelisierung von mathematischen und künstlerischen

[27] Die von Le Lionnais verwendeten Bezeichnungen aus der Kunstgeschichte werden bei einer Stilanalyse in diesem Sinn im Allgemeinen nicht benutzt.

[28] Abgesehen von der Feststellung, dass die Möglichkeit zur stilistischen Variation in mathematischen Texten auf ein kreatives Handeln der Mathematiker verweist (vgl. z.B. Granger, 1968, S. 104). Dies schließt an die unter 6.3.2 diskutierte Position Reviel Netz' an.

Stilen auch die Chance zu einer „kritische[n] und reflektierte[n] Spiegelung der mathematischen Wissenschaften an der menschlichen Gesellschaft und ihrer Kultur“ (Bense, 1946, S. 109). Reviel Netz geht noch einen Schritt weiter und behauptet, mindestens für die von ihm ausschließlich betrachtete griechische Antike, dass das Ästhetische der Mathematik dieser Zeit nur vor dem Hintergrund der entsprechenden Ästhetik verstanden werden könne. Dies begründet er damit, dass ein Mathematiker seine ästhetisch motivierte Auswahl immer mit Blick auf die Vorlieben eines möglichen Publikums treffe, welches wiederum aus Menschen eines bestimmten kulturellen Hintergrundes bestehe[29] (vgl. Netz, 2009, S. 16).
Aus der Identifikation von mathematischen und künstlerischen Stilen wird nicht nur auf Einflüsse der Künste auf die Mathematik, sondern auch auf echte Wechselwirkungen geschlossen:

> „Veränderungen auf dem Gebiet der Künste und der Wissenschaften finden vielfach nicht unabhängig voneinander statt, sondern weisen oftmals Interdependenzen und Parallelitäten auf.“ (Wille, 2004, S. 254)

Aus dieser Beobachtung der Kunst- und Mathematikgeschichte begründet sich für Holger Wille die Relevanz der Stilfrage für die disziplinäre Wissenschaftsästhetik im Allgemeinen. Wie die oben vorgestellten Ansätze zeigen, wird eine solche Grundannahme für die Mathematikästhetik genutzt und gemeinsame Stilrichtungen wie etwa der künstlerische und mathematische Barock identifiziert. Reviel Netz folgert aus der Analyse von mathematischen Texten griechischer Autoren und Werken der alexandrinischen Poetik sogar eine „Konvergenz“ von wissenschaftlichem und künstlerischem Stil dieser Zeit (vgl. Netz, 2009, S. 227).[30] So verstanden kann das stilgeschichtliche Vorgehen als Aspekt einer Kulturgeschichte der Mathematik im Sinne der Radbruchschen Unterscheidung typischer Forschungsrichtungen der Mathematikgeschichte (vgl. Radbruch, 1989, S. 118ff) mit spezifisch mathematikästhetischer Perspektive beschrieben werden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Identifikation bestimmter Strömungen innerhalb der Mathematik und die daraus resultierende Parallelisierung zur Kunst nicht unproblematisch sind. Insbesondere die Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik kann auf diese Weise sicher nicht umfassend beantwortet werden. Dennoch ist die häufig in Betracht gezogene Möglichkeit, Parallelen zwischen Kunst und Mathematik zu ziehen und gemeinsame stilbildende

[29] Das heißt für ihn nicht, dass ein Stück Mathematik nur zur ästhetischen Erbauung des Publikums entstünde. Netz ist aber davon überzeugt, dass ein mathematischer Text immer auch eine ästhetische Funktion übernimmt: „Even if Archimedes' decisions, in making his choice of presentation, were not primarily about aesthetics (I believe they were), they still could not fail to have aesthetic consequences.“ (Netz, 2009, S. 15)

[30] In Bezug auf die Beziehungen von Kunst und Mathematik in anderen Epochen kann Netz keine so detaillierten Untersuchungen aufweisen. Seiner Vermutung, die beiden Bereiche befänden sich heutzutage in so unterschiedlichen kulturellen Sphären, dass von einer gemeinsamen Grundlage der Ästhetik nicht auszugehen sein könne (vgl. Netz, 2009, S. 228) widersprechen aber bereits die oben vorgestellten Ansätze sowie die Skizzen von Mehrtens für die Moderne.

Eigenschaften auszumachen ein Indiz dafür, von der Kunstform Mathematik zu sprechen. Die Aussagekraft dieses Anhaltspunktes ist dabei abhängig von der Breite und der Tiefe der ausgezeichneten stilbildenden Elemente, und es ist die Frage zu stellen, inwiefern sich diese *exklusiv* auf Mathematik und Kunst beziehen. Wären die Merkmale zu allgemein und könnten zugleich auf alle Kulturleistungen einer bestimmten Zeit Anwendung finden, wäre dies zwar kulturhistorisch aufschlussreich, ließe aber keine Aussagen über die Ähnlichkeit der Mathematik zur Kunst zu. Festzuhalten ist weiterhin, dass zur Identifikation bestimmter Stile nicht nur die Produkte der Mathematik sondern auch ihre Praxis, also die Denk- und Arbeitsweisen der Mathematiker sowie die sozialen und kulturellen Wechselwirkungen einbezogen werden müssen. Unabhängig von den Fragen um den Kunststatus eröffnet die Zuordnung von Stilen nach (mathematik-)ästhetischen Merkmalen damit einen umfassenden und gleichzeitig speziellen Blick auf die Mathematikgeschichte und zeigt ein Feld auf, in dem der ästhetische Blick auf Mathematik in besonderer Weise wirksam wird. Auch als nicht selten anzutreffende Metaperspektive auf die Geschichte des Faches, ist das Phänomen mathematischer Stile somit durchaus beachtenswert.

6.3 Der mathematische Text als Kunstwerk

> „Der [...] Vergleich, zwischen schöpferisch gestaltender Mathematik und Dramatik, ist mir aber als solcher aus dem Herzen gesprochen. Bringt er doch gerade das zum Ausdruck, was in meinen Augen ein sehr wesentlicher Zug wirklich großer mathematischer Schöpfungen ist, nämlich ihren dynamischen, mitreißenden Charakter.“ (Hasse, 1952, S. 25)

So bestätigt Helmut Hasse die Einschätzung eines Mathematikerkollegen, ein Beweis könne ein „großes Drama in drei Akten“ sein. Er teilt damit die nicht selten geäußerte Auffassung eines Stücks Mathematik als Drama, Erzählung oder Gedicht und verweist gleichzeitig auf eine zentrale Begründung für diesen Vergleich: Eine mathematische Argumentation ist mehr als eine Abfolge logisch korrekter Schlüsse. Vielmehr kann sie durch ihren Aufbau eine Beziehung zwischen Leser und Inhalt entstehen lassen und so etwa den Wahrheitsnachweis eines bestimmten Theorems gleichsam zur Erzählung werden lassen. Dabei ist es insbesondere das Zusammenspiel von formaler Struktur und Inhalt, an denen die literarischen Eigenschaften und damit auch die ästhetischen Qualitäten festgemacht werden können.

Der Mathematiker Felix Klein teilt diese Sicht auf die Mathematik und schwärmt in seinen berühmten Vorlesungen *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* von den Werken seiner französischen Mathematikerkollegen:

> „Die Werke von Monge, oder um ein neueres Buch zu nennen, der ‚Traité d'analyse' von Picard lesen sich geradezu wie ein gut geschriebener spannender Roman." (Klein, 1908, S. 91)

Im Gegensatz zum Gliederungsschema in euklidischer Tradition erkennt er hier eine „neue Kunstform der mathematischen Darstellung" (Klein, 1908, S. 91). Der klassischen Definition-Satz-Beweis-Struktur mathematischer Sätze sieht er eine „künstlerisch gegliederte Deduktion" (ebd.) gegenüber. Es ist demnach die Struktur, von der die mathematisch-literarischen Qualitäten abhängen und die dafür sorgt, dass aus einem schlichten Wahrheitsnachweis ein „spannender Roman" wird. Klein spricht daher auch von unterschiedlichen „Stilen der mathematischen Darstellung" (ebd.).[31]

Die im Folgenden skizzierten Ansätze nehmen den Vergleich mathematischer Texte mit Werken der Literatur ernst und deuten diese Analogie weiter aus. Dabei liegt einerseits das Hauptaugenmerk auf der inhaltlichen Spannung und dem Moment der erzählten mathematischen Geschichte und andererseits auf den verwendeten strukturellen Elementen im Vergleich von Beweis und Erzählung oder Gedicht.

6.3.1 Mathematik als Roman

Robert S. D. Thomas arbeitet in seinem Essay *Mathematics and Narrative* gemeinsame Elemente von Mathematik und Romanen bzw. historischen Erzählungen heraus. In Texten beider Genres erkennt er eine ähnlich beschreibbare Dramaturgie: Zu Beginn werden jeweils die zentralen Charaktere vorgestellt und zu einander in Beziehung gesetzt. Aus diesen Beziehungen entwickelt sich eine Handlung an deren Ende wieder ein Beziehungsgeflecht beschrieben wird (vgl. Thomas, 2002, S. 44). Dies begründet Thomas' Annahme, nicht die Personen oder mathematischen Objekte selbst, sondern vielmehr ihre Beziehungen stünden im Vordergrund allen (mathematischen) Interesses. Durch diese besondere Perspektive auf die Beziehungen kommt Thomas zu dem Schluss, dass der Vergleich von Mathematik und Erzählung tiefer und weitreichender sei, als Analogien zur Musik oder Poesie (vgl. Thomas, 2002, S. 46).

Eine weitere wichtige Analogie stellt Thomas im Umgang mit den dargebotenen Handlungen heraus:

> „We somehow grasp a proof as a whole, as we somehow grasp a story as a whole." (Thomas, 2002, S. 45)

In beiden Fällen spielt die Vorstellungsgabe und Intuition der Leser eine zentrale Rolle. Nur mit Hilfe der Fantasie wird die Geschichte einerseits und der Beweis andererseits lebendig oder gar Realität, wie Thomas vermutet (vgl. Thomas, 2002,

[31] Es handelt sich also um ästhetische Bewertungen, wie sie im Zusammenhang mit dem Eigenschaftskomplex der Eleganz unter 2.5.1 beschrieben sind.

S. 44f).[32] Der Aufbau der Texte spiele dabei eine unterstützende Rolle, wenn etwa durch Lemmata die lineare Struktur der Argumentation einer Rückblende gleich unterbrochen werde. Auf diese Weise erzeugen Thomas folgend mathematische Texte eine ähnliche Wirkung wie etwa ein Roman – eine Tatsache, die jeder sofort nachvollziehen könne:

> „There is an analogue in proof of dramatic tension, but I need not spell out how it works: its elegant release is instantly recognizable.“ (Thomas, 2002, S. 45)

Um die Frage nach Art und Entstehung dieser Spannung innerhalb eines mathematischen Textes befriedigender zu beantworten, bedarf es einer genaueren Analyse des Handlungsstrangs, also dem Textteil, in welchem sich das Beziehungsgeflecht ändert. Auch hier kann die Analogie zur Literatur hilfreich sein, wie die Ausführungen von Apostolos Doxiadis zeigen.[33]

Doxiadis nimmt in *Euclid's Poetics: An examination of the similarity between narrative and proof* ebenfalls die Struktur des Inhaltes in den Blick und erkennt „strong structural analogies between making narratives and proving mathematical theorems“ (Doxiadis, 2005, S. 175). Um diese Ähnlichkeiten zu zeigen, wählt er nicht den direkten Vergleich der beiden Strukturen, sondern einen Umweg über die „spatial analogy“, der Möglichkeit der metaphorischen Darstellung als Weg mit Start- und Zielpunkt.[34] Er zeigt zunächst auf, dass die Struktur einer Erzählung immer einem bestimmten Muster folgt: Für einen Helden entwickelt sich aus einer bestimmten Situation heraus ein Ziel und beschrieben wird dann der Weg des Helden zum Ziel. Dort angelangt, sind verschiedene Ausgänge denkbar. Die Geschichte kann so in Form einer Landkarte visualisiert werden und genügt somit der „spatial analogie“ (vgl. Doxiadis, 2005, S. 176f). Auch der Beweis eines Theorems folgt nach Doxiadis diesem Schema: Ein Mathematiker möchte eine bestimmte Behauptung beweisen und versucht wie ein Hund, der eine Spürung aufnimmt, (oder ein Held auf der Suche nach dem heiligen Gral) dieses Ziel zu erreichen. Auch dabei sind verschiedenen Ausgänge denkbar und die Arbeit des Mathematikers kann nachträglich als Weg mit Höhen und Tiefen dargestellt werden (vgl. Doxiadis, 2005, S.179ff).
Ein Problem entsteht bei dieser Argumentation m.E. durch eine Vermischung unterschiedlicher Ebenen. So wird die von einem Autor erschaffene Reise eines fiktiven Romanhelden, auf der einen Seite, mit der Arbeit des realen Mathematikers (Autors) an seinem Werk, auf der anderen Seite, verglichen. Diese Analogie zeigt

[32] Vgl. dazu auch die Diskussion zur Einfachheit als Kriterium für mathematische Schönheit unter 2.2 und 2.3.

[33] Die Mathematik-Literatur-Analogie Doxiadis' wurde bereits in Spies (2008b) diskutiert.

[34] Er verweist explizit auf das mathematische Vorgehen, die Isomorphie zweier Gegenständen („F“) über den Nachweis von Isomorphiebeziehungen („F_1 und F_2“) zu einem dritten zu zeigen (vgl. Doxiadis, 2005, S. 175f) und verleiht so einer eigentlich nichtmathematischen Argumentation einen mathematischen Anstrich.

aber zunächst lediglich, dass die Geschichte der Mathematik Stoff für Romanerzählungen bietet.[35] Ein Ausweg bestünde darin, in beiden Fällen die Sicht eines Lesers zu beschreiben, also auf die oben beschriebene Perspektive von Robert Thomas zurückzugreifen. Dass dies auch mit der von Doxiadis gewählten Metaphorik denkbar wäre, zeigen Berichte, in denen das Nachvollziehen eines Beweises als Lesen eines Abenteuers beschrieben wird. Ein Unterschied besteht dabei darin, dass in der Mathematik der Autor eines Beweises gleichzeitig der Held ist und der Leser den Weg des Helden (allerdings meist ohne Irrwege) real nacherfahren muss, um das Ziel zu erkennen.[36] Während Thomas aus dem Vergleich von Erzählung und Beweis aus der Leserperspektive auf die Rolle der Beziehungen zwischen den betrachteten mathematischen Gegenstände schließt, lässt der Doxiadische Ansatz Aussagen über die Beziehung des Rezipienten zum Gegenstand zu.
Für das Nachdenken über die mathematische Praxis bieten Doxiadis' Vergleiche des mathematischen Schaffens mit den Erlebnissen von Romanhelden außerdem eine interessante, wenn auch nicht völlig neue Perspektive. So schwingt die „spatial analogie“ in der Mathematikgeschichtsschreibung häufig mit, was sich etwa in der Verwendung der gängigen Metapher vom „Irrweg“ spiegelt. Zusätzlich bietet aber insbesondere die Zusammenstellung möglicher Ausgänge mathematischen Arbeitens, die Doxiadis aus den Ausgängen von Romanerzählungen erhält (vgl. Doxiadis, 2005, S. 181), ein facettenreiches Schema, in dem sich viele Einzelfälle der Mathematikgeschichte wiederfinden.

Wie die hier beschriebenen Ansätze von Thomas und Doxiadis zeigen, eröffnet der Vergleich mit der erzählender Literatur auf der inhaltlichen Ebene einen speziellen Blick sowohl auf die mathematischen Produkte als auch die mathematische Praxis. So ergänzen sie die unter 6.1 beschriebenen Ansätze zum mathematischen Produktionsprozess und zum Künstlercharakter des Mathematikers. Insbesondere bietet dabei die Literaturwissenschaft eine mögliche Sprache zur Beschreibung der inhaltlichen Grundanlagen mathematischer Texte außerhalb der Mathematik selbst.

6.3.2 Mathematik als Poesie

Ein bestimmter (persönlicher) Stil etwa in der bildenden Kunst kann in der Regel durch eine genaue Analyse der Kunstwerke bestimmt werden. Dies gibt nicht nur Aufschluss über die Verwendung der künstlerischen Mittel, sondern lässt die Kunstkritik auch Aussagen über den ästhetischen Wert der jeweils betrachteten Kunstobjekte machen. Ähnliche Analysen finden sich auch bezogen auf die Text-Gattung Mathematik. Im Vordergrund solcher Untersuchungen, bei denen bei-

[35] Evtl. ist es gerade das, was Doxiadis als Autor von *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* hauptsächlich interessiert. Explizit verfolgt er jedoch das oben vorgestellte Ziel.
[36] Vgl. etwa Poincaré, 1914 (S. 39): „[...] selbst dann, wenn ich nicht stark genug bin, selbständig zu schaffen, so finde ich doch selbst den Beweis von neuem, während ich ihn wiederhole.“

spielsweise Werkzeuge der allgemeinen Kunsttheorie Verwendung finden können, stehen formale, in gewisser Weise objektivierbare Qualitäten des jeweiligen Textes. Der niedergeschriebene mathematische Beweis oder die mathematische Theorie, wie sie in einem Buch festgehalten ist, wird dabei wie ein Kunstwerk behandelt und somit zum zentralen Gegenstand der mathematikästhetischen Diskussion.

Ein ausführliches und tiefgehendes Beispiel für ein solches Vorgehen bietet Reviel Netz' *The Aesthetics of Mathematics: A Study*. Dort untersucht er die Frage nach der mathematischen Schönheit und der Rolle des Ästhetischen in der Mathematik insbesondere an niedergeschriebenen Zeugnissen der antiken griechischen Mathematik. Anders als Thomas oder Doxiadis steht dabei die narrative Struktur der mathematischen „Erzählungen" im Vordergrund, so dass Netz mögliche inhaltliche Analogien von Mathematik und Literatur durch solche, die insbesondere Form und Aufbau betreffen, ergänzen kann. Dabei betrachtet er sowohl die großen Bögen ganzer Theorien oder Lehrbücher als auch kleinschrittig den Aufbau einzelner Beweise.

Aus dieser genauen, nah am Text arbeitende Betrachtungsweise kann er zunächst den Beleg für eine Voraussetzung der mathematikästhetischen Untersuchung überhaupt gewinnen:

> „The mathematical kernel of an argument – whatever we take this to be – only very weakly underdetermines the form it may take. The mathematician makes decisions for the form, decisions that are mathematically undetermined (in a traditional, narrow sense of mathematics) and therefore may well be dominated by the aesthetic function." (Netz, 2005, S. 257)

Aufbau und Struktur jeweils mathematisch korrekter und zielführender Argumentationen können sehr unterschiedlichen Dramaturgien gehorchen. Eine bestimmte Form entsteht daher nicht ausschließlich aus beweistechnischer Notwendigkeit, sondern ist Netz folgend den ästhetischen Vorlieben des Verfassers geschuldet. Netz nennt dies auch „the dialectic of freedom and necessity" und unterstellt, dass bereits diese Spannung den menschlichen Sinn für Schönheit anspreche (Netz, 2005, S. 281). Diese Unterbestimmtheit der Form ermöglicht nicht nur Entscheidungen auf der Basis ästhetischer Beweggründe. Die Wahl einer bestimmten Argumentationsstruktur kann etwa auch pädagogisch-didaktischen Erwägungen geschuldet sein. Netz benennt hier somit eine nur notwendige, wohl aber zentrale Bedingung dafür, mathematisch Texte als Produkte künstlerischen Schaffens zu interpretieren.

Reviel Netz erkennt die ästhetische Dimension in der Mathematik auf verschiedenen Ebenen. Erstens kann eine mathematische Geschichte auf unterschiedliche Art erzählt werden. Der Leser wird dabei je nach Aufbau in verschiedener Weise angesprochen und „mitgenommen". So betrachtet Netz vergleichend den Aufbau von Archimedes' *Kugel und Zylinder* und *Buch I* der Euklidischen *Elemente*. Dabei arbeitet er zwei gänzlich verschiedene Typen mathematischer Erzählstruktur heraus (vgl. Netz, 2005, S. 256ff) und vergleicht dies mit Anlage und Struktur von Romanen (vgl. Netz, 2005, S. 259). Indem er ein weiteres Werk des Archimedes heranzieht, identifiziert er außerdem gemeinsame, für diesen Autor charakteristische Merkmale, die ihm erlauben von einem „archimedischen Stil“ zu sprechen. Die Analogie zur Literatur geht aber Netz folgend nicht soweit, auch den mathematischen Texten, die aus der Kunsttheorie bekannten Stilbezeichnungen zu zuweisen:

> „I certainly wouldn't like to suggest that, say, Euclid was a ‚realist‘ whereas Archimedes was a ‚romantic‘ etc.“ (Netz, 2005, S. 259)

Auch wenn Netz folgend die Identifikation mit Stilen der Kunstgeschichte nicht geboten ist, so können doch auf der Grundlage ästhetischer Erwägungen die Euklidischen und Archimedischen Texte klar unterschieden und somit unterschiedlichen Stilen zugeordnet werden. Eine solche Zuordnung findet sich bereits bei Felix Klein (1908), der Euklids *Elemente* seiner „Entwicklungsreihe A“ zuordnet, während er in einer Schrift Archimedes' die „durchaus modern anmutende Weise“ der „Entwicklungsreihe B“ erkennt (Klein, 1908, S. 86f). Wenn auch diese Zuordnung Kleins auf einer eher intuitiven Einschätzung beruht, stützt sie die von Netz angeführte Unterscheidung und zeigt außerdem, dass die Zuordnung der gesamten griechischen Antike zu einem gemeinsamen mathematischen Stil, wie sie Max Bense oder Karl Heinrich Hofmann vorschlagen (vgl. 6.2), mindestens fraglich wird.

Zweitens sieht Netz die Möglichkeit im Aufbau mathematischer Texte Metrik und Rhythmus festzustellen und somit eine Analogie zur Poesie zu ziehen. Um die „mathematical prosody“ zu bestimmen betrachtet er beispielsweise das Wechselspiel von deskriptiven und narrativen Sequenzen eines Beweises, von Konstruktion und logischem Beweisgang in der griechischen Geometrie (vgl. Netz, 2005, S. 262f). Auch hier sind Reihenfolge und Länge der Passagen nicht durch innermathematische Notwendigkeit vorgegeben und lassen so dem Mathematiker „künstlerische Freiheit“, also Raum für Entscheidungen auf der Basis ästhetischer Kriterien.
Durch die Abfolge von Behauptung und wenn-dann-Argumenten sieht Netz insbesondere eine Analogie zur Struktur von Gedichten, da auf diese Weise Zeilen und Strophen eines mathematischen Beweises ausgezeichnet seien. Dabei unterscheiden sich die entstehenden „Reimschemata“ verschiedener Beweise wiederum stark voneinander. Dies hat einerseits Auswirkungen auf den Verstehensprozess des Lesers und verursacht andererseits jeweils spezifische ästhetische Wirkungen:

> „Following a proof as it unfolds, you are carried along it; the structure of this intellectual motion has significance in both cognitive and aesthetic terms.“ (Netz, 2005, S. 268)

Interessanter Weises sieht er hier die ästhetische Wirkung der Beweisstruktur bereits im Prozess des schritt- bzw. zeilenweise Rezipierens, steht also im Kontrast zu jenen Autoren, die fordern, ein Stück Mathematik müsse zunächst als Ganzes gefasst werden können, um seine Schönheit zu erkennen.[37] Insbesondere unterstellt er ähnlich der Poesie auch in der Mathematik die unmittelbare Wahrnehmbarkeit der "mathematical prosody". Das heißt, dass er das Rezipieren eines mathematischen Beweises als einfaches Lesen, bei dem zeitgleich Struktur und Inhalt aufgenommen werden, aufzufassen scheint. Dass die mathematische Rezeption häufig gleichsam als „Nacherfinden" beschrieben wird (s.o.), bezieht er nicht mit ein. Jedoch betont er, dass die ästhetischen Qualitäten des mathematischen Textes nur dann wahrnehmbar werden, wenn der Text in die jeweilige (mathematische) Sprache des Lesers übersetzt ist. So bedürfe es etwa der Darstellung in moderner Schreibweise, damit ein heutiger Leser die Schönheit eines antiken Beweises erkennen könne:

> „The rhythm of a mathematical proof, for instance, can only be perceived when the proof is perceived as a flowing sequence, i.e. translated to your own mathematical language." (Netz, 2005, S. 284)

Dies mache gleichzeitig den größten Unterschied von Mathematik und anderen Kunstformen aus dem Bereich der Literatur aus, obgleich auch der mathematische Text aus Worten bestehe. Netz begründet diese Eigenart der Mathematik damit, dass dort die ästhetisch relevanten Eigenschaften mehr im Bereich des Logischen als im Bereich der verwendeten Sprache angesiedelt seien. Dies spreche aber keineswegs dagegen, die Mathematik als eine Kunstform zu betrachten.(Vgl. Netz, 2005, S. 284f)

Vor dem Hintergrund der in Kapitel 2 herausgearbeiteten Schönheitskriterien ist es außerdem bemerkenswert, dass Netz explizit kognitive und ästhetische Wirkungen unterscheidet, zeigen doch die oben vorgestellten Ergebnisse, dass das Moment des Verstehens als epistemische Transparenz einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag zur mathematisch-ästhetischen Erfahrung leistet. In der Zusammenfassung seines Aufsatzes wiederholt Netz diese Unterscheidung und konkretisiert sie auf interessante Weise. Er weist darauf hin, dass die ästhetischen Eigenschaften nicht den epistemischen subsumiert werden dürfen, was ihn u.a. zur Unabhängigkeit der Mathematikästhetik innerhalb der Philosophie der Mathematik führt (vgl. Netz, 2005, S. 287). Diese Überzeugung zieht der Mathematikhistoriker Netz insbesondere aus Analyse und Vergleich antiker Arbeiten, in denen er immer wieder rein ästhetische Beweggründe für einen bestimmten Aufbau oder ein bestimmtes Vorgehen lokalisiert:

> „For our writing of the history of mathematics, than, the aesthetic is a category we need in order to be able to state the full range of possible motivations of authors in their writings: as simple as that." (Netz, 2005, S. 288)

[37] Vgl. dazu etwa McAllister (2005) und die Diskussion zur subjektiven Zugänglichkeit schöner Mathematik unter 2.2.1.

In dem Netz hier das Ästhetische als relevante Kraft für die Genese der Mathematik ausweist, widerspricht er Ansätzen, die mathematische Schönheit als rein epistemisches Kriterium anzusehen. Das heißt aber nicht, dass keine Interdependezen von ästhetischen und anderen Eigenschaften zu erkennen wären. Vielmehr hebt Netz auch hervor, dass etwa die narrative Struktur, die er in Euklids Texten herausgearbeitet hat, auch und vielleicht vor allem eine pädagogische Funktion erfüllt, in dem sie es dem Leser erleichtert, dem Argumentationsgang zu folgen.[38] Auf den Einfluss einer solchen epistemischen Transparenz *als* ästhetisches Kriterium geht Netz aber nicht ein.
In Netz (2009) dehnt er das Konzept der verschiedenen Beweggründe weiter aus und weist in der von ihm betrachteten Periode um 300 v.Chr. unter der Bezeichnung „ludic“, „survey“ bzw. „pedagogic“ drei verschiedene mathematische Stile aus (vgl. Netz, 2009, S. 108). Der spielerische Stil ist dabei derjenige, der am ehesten die in Kapitel 2 zur mathematischen Schönheit herausgearbeiteten Kriterien erfüllt:

> „The ludic is a treatise of the ideal type discussed above: a work based on obtaining results in surprising, intricate waxs, where the author brings out his own voice in rich, modulated ways, and where the textual surface is often made deliberately opaque by, say, long passages of calculation. The fundamental narrative structure usually leads to some striking results towards the end of the treatise, and the ludic structure is predicated upon the readers expectations regarding the route leading to the conclusion – expectations that are deliberately sustained so as to be subverted later.“ (Netz, 2009, S. 108)

Die auf der Grundlage einer genauen Analyse der Produkte identifizierten Stile setzt Netz außerdem mit der antiken griechischen Literatur in Beziehung. Er wählt somit einen Blick auf die Mathematik dieser Zeit unter Einbeziehung der Mathematikästhetik, wie er unter 6.2.2 beschrieben ist.

Die zunächst isolierte Betrachtung der Produkte, wie sie in gedruckter Form die Mathematik repräsentieren, bietet nicht nur die Grundlage für die Frage nach der mathematischen Schönheit, sondern eröffnet auch unabhängig von den Umständen ihrer Entstehung Hinweise auf deren Kunstwerkcharakter. Insbesondere sind sie als Ergebnisse literarischer Produktion betrachtet Zeugnisse eines künstlerischen Schaffensprozesses, was sich etwa an den von Netz herausgearbeiteten Merkmalen individueller Stile und der Wirkung der so genutzten Gestaltungsfreiheit auf die Rezipienten zeigt. Die genaue Analyse mathematischer Texte als literarische

[38] Das Gefühl, dass Euklid nicht hauptsächlich durch positive ästhetische Gründe bei der Formulierung seiner *Elemente* geleitet wurde teilen auch andere. So führt etwa Hasse das Werk als ein Beispiel dafür an, wie durch perfektionierte Formalisierung die ursprüngliche Schönheit verloren geht: „In diesem Euklidischen Endzustand hat das Werk dann völlig die Fähigkeit verloren, andere zu erbauen [...]. Es gilt hier wie in der Kunst: Manches ist vielleicht gerade deshalb schön weil es noch nicht den zwar vollendeten, aber kalten Zustand klassischer Schönheit erreicht hat.“ (Hasse, 1952, S. 29)

Werke, bietet somit eine nicht zu vernachlässigende Ergänzung zur Identifikation bestimmter Stilepochen innerhalb der Mathematikgeschichte. Sowohl die Ausführungen zur Stilgeschichte unter 6.2 als auch die Untersuchungen zum Künstlerstatus des Mathematikers zeigen jedoch auch, dass vor dem Hintergrund der Frage nach dem Kunststatus der Mathematik eine ausschließliche Betrachtung der „Werke“ viele Facetten der Kunstform Mathematik außer Acht lassen würde. Dies bestätigt auch der folgende Vergleich von Mathematik- und Kunstwelt.

6.4 Das mathematische Wissenschaftssystem und die Kunstwelt

Klassische Kunsttheorien bestimmen vermittels bestimmter Eigenschaften der betrachteten Objekte, ob diese als Kunstwerke gelten oder nicht. Daneben stehen Versuche, den Kunstwerkcharakter nicht an intrinsischen Charakteristika festzumachen, sondern den Kontext eines potentiellen Kunstwerks als bestimmendes Moment heranzuziehen.[39] Ob ein Stück Mathematik als Kunst betrachtet werden kann, hängt in einem solchen Rahmen auch vom Bewusstsein der schaffenden Mathematiker aber auch von der Frage, wer sich aus welchen Gründen mit diesem beschäftigt, also der Frage nach Publikum und Kritikern ab. Insbesondere letztere führt dazu, neben der Psychologie der Produzenten auch weitere Bereiche mathematischer Praxis einzubeziehen und aus mathematikästhetischer Perspektive zu betrachten. Insofern kann über die Anwendung solcher Kunsttheorien der Untersuchungsgegenstand der Mathematikästhetik vom Individuum des schaffenden Mathematikers, wie er in 6.1 im Vordergrund stand, und dessen Produkten (vgl. 6.3) auf das Wissenschaftssystem als soziales Gefüge ausgeweitet werden.

6.4.1 Von der Kunst- zur Mathematikwelt

Einen wichtigen, aber nicht unumstrittenen Ansatz, den Begriff der Kunst allgemein zu fassen, stellt die Institutionstheorie nach Arthur Coleman Danto dar. Weiterentwickelt von George Dickie spricht sie den Kunstwerken immanente Eigenschaften ab, und kann sich somit auch zur Kunstdefinition nicht auf solche Objekteigenschaften stützten. Stattdessen wird der Blick auf das System der „Kunstwelt“ („Artworld“) gerichtet:

> „A work of art is an artifact of a kind created to be presented to an artworld public.“ (Dickie, 1997, S. 92)

[39] Zur allgemeinen Beschreibung solcher Ansätze siehe Reicher (2005) (S. 154ff) oder Carroll (1999) (S. 205ff).

Unter einem Künstler versteht Dickie dabei eine Person, die die Kenntnisse und Fähigkeiten besitzt ein solches Kunstwerk zu schaffen, während sich das Publikum wiederum dadurch auszeichnet, dass es in der Lage ist, die ihm präsentierten Werke zu verstehen. Die „artworld“ umfasst dabei eine Vielzahl von „artworld systems“, die jeweils aus präsentierenden Künstlern einer bestimmten Richtung (Maler, Bildhauer usw.) und deren Publikum bestehen (vgl. Dickie, 1997, S. 91f).[40]
Innerhalb der Institutionstheorie wird also gerade das als Kunstwerk bestimmt, was von der Kunstwelt diesen Status verliehen bekommt. Dabei setzt sich die Kunstwelt mindestens aus Künstlern und einem Publikum zusammen, umfasst in der Regel aber auch Kunstkritiker usw.

In *The Art of Mathematics* nutzt Jerry P. King nun Dickies institutionstheoretische Argumentation, um den Kunststatus der Mathematik nachzuweisen. King macht eine starke Strukturähnlichkeit zwischen Mathematik und Kunstwelt aus, und hält damit Dickies Definition der Artworld wie folgt wörtlich auf die Mathematik übertragbar:

> „1. A mathematician is a person who participates with understanding in the making of a work of mathematics.
> 2. A work of mathematics is an artifact of a kind created to be presented to a mathworld public.
> 3. A public is a set of persons the members of which are prepared in some degree to understand an object which is presented to them.
> 4. The mathworld is the totality of all mathworld systems.
> 5. A mathworld system is a framework for the presentation of a work of mathematics by a mathematician to a mathworld public.“
>
> (King, 1992, S. 168)

King nutzt hier also die oben skizzierten Dickieschen Begriffsbestimmungen (vgl. Dickie, 1997, S. 92) und ersetzt jeweils lediglich die Worte aus dem Bereich der Kunst durch die entsprechenden aus dem Bereich der Mathematik. Die Mathematik bzw. die „Mathewelt“ könne somit als Teilmenge in die Kunstwelt eingebettet werden bzw. bilde ein „artworld system“ (vgl. King, 1992, S. 172). Angewendet auf eines der „Muster der Mathematiker“, etwa den unter 10.2 diskutierten Widerspruchsbeweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, ergibt sich so eine eindeutige Aussage über dessen Kunststatus: Der Beweis ist als Artefakt von einem Mathematiker für die Präsentation vor dem Mathewelt-Publikum erschaffen worden. Dieses Publikum versteht die ihnen präsentierten Zeichen als mathematischen Beweis, dafür dass die Quadratwurzel aus 2 eine irrationale Zahl ist. Demnach ist er Teil dieser Mathewelt, also Teil einer Untermenge der Kunstwelt und damit ein Kunstwerk.

[40] Dickie ist die Zirkularität dieser Definition bewusst. Er betont jedoch, dass sie dennoch Aussagekraft habe, da über die beschriebenen Abhängigkeiten auch die verwendeten Begriffe weiter präzisiert würden. (Vgl. Dickie, 1997, S. 92f)

6.4.2 Kritiker und Publikum

Trotz der postulierten Strukturähnlichkeit – King spricht in mathematischer Manier von „Isomorphie“ – zwischen den Systemen um Mathematik und Kunst, macht er „signifikante“ (King, 1992, S. 173) Differenzen aus. So seien Kritiker innerhalb der Mathematik nicht zu finden, obwohl die die Mathewelt aufspannenden Sätze grundsätzlich deren Vorhandensein ebenso zuließen wie in der Kunstwelt:

> „[The] artworld system includes a plenitude of people whose profession is that of criticism; the mathworld system includes none.“ (King, 1992, S. 173)

Dabei bezieht er sich stellvertretend für alle schaffenden Mathematiker auf die Aussagen G.H. Hardys, der zu Beginn seiner *Apology* feststellt, dass es eine „melancholische Erfahrung“ für einen Mathematiker sei, über Mathematik zu schreiben und die kritische Beurteilung im Allgemeinen für die Aufgabe von „second-rate minds“ hält (Hardy, 1940, S. 61).[41] Demzufolge ist es die vornehmste Aufgabe eines Mathematikers, Mathematik zu schaffen. Dass Mathematiker auch die Produkte anderer etwa im Rahmen von Review-Verfahren beurteilen, ist für King dabei nicht vergleichbar mit der Rolle professioneller Kunstkritiker. Es unterstreiche lediglich den Unterschied, bedeute es doch, dass die Kritiker immer selbst aus der Szene der schaffenden Mathematiker stammen. Insbesondere fehlen King zufolge Kritiker, die durch ihre Beurteilung die Werke der schaffenden Mathematiker der Öffentlichkeit zugänglich machen und meinungsbildend wirken. (Vgl. King, 1992, S. 173f)

Aus dem Fehlen externer Kritiker folgt für King wiederum, dass es auch quasi kein Publikum außerhalb der Mathematikerszene selbst gebe:

> „Outside of the mathematicians themselves as creating artists, it consists mainly of those relatively few persons with true mathematical understanding: mainly some of those who use mathematics and some of those who teach mathematics. But not all, even, of these.“ (King, 1992, S. 175)

Die Rezipienten mathematischer Werke sind demnach in der Regel selbst schaffende Mathematiker, was der Tatsache geschuldet sei, dass das „mathworld public“ das Präsentierte wirklich verstehen müsse. King nutzt also hier eine Beobachtung, die insbesondere im Rahmen der Diskussion um den mathematischen Schönheitsbegriff immer wieder geäußert wird (vgl. Kapitel 3)[42]: Das inhaltliche Verständnis

[41] Auf die Tatsache, dass Hardy hier aus der Perspektive eines schaffenden Mathematikers über die Zunft der Kritiker schreibt und in der abwertenden Haltung explizit Parallelen zu der Haltung von Künstlern gegenüber Kunstkritikern zieht („Statesmen despise publicists, painters despise art-critics [...]“ (Hardy, 1940, S. 61)), geht King nicht ein.

[42] Es handelt sich quasi um einen mathematikästhetischen Gemeinplatz, der aber insbesondere mit Blick auf die mathematikdidaktische Anwendung von großer Bedeutung ist (vgl. Kapitel 9).

ist notwendig für die Erkenntnis des ästhetischen Wertes eines Stücks Mathematik und grenzt somit den Kreis möglicher Rezipienten der Kunstform Mathematik ein. Dass ein solcher Zusammenhang auch im Rahmen anderer Künste besteht, folgt für King breits aus der Tatsache, dass Dickie in seiner Charakterisierung der Artworld ebenfalls fordert, dass das Publikum in spezieller Weise darauf vorbereitet sein muss, die ihm präsentierte Kunst zu verstehen (s.o.). Auf diesen Umstand verweisen auch andere Argumentationen für den Kunststatus der Mathematik (vgl. etwa Borel, 1981).
King lässt bei seiner Argumentation die vielen populärwissenschaftlichen Arbeiten außer Acht, in denen schaffende Mathematiker nicht selten mit dem Hinweis auf Schönheit und Kunstähnlichkeit versuchen, einem breiten Publikum ausgewählte Stücke der Mathematik näher zu bringen.[43] Mit Hilfe solcher Ansätze wird aber das potentielle Publikum über die Mathematiker selbst hinaus erweitert. Außerdem präsentieren sich so die jeweiligen Autoren als Interpreten „mathematischer Evergreens".[44]
Aus der Tatsache, dass man nicht zwingend ein schaffender Mathematiker sein muss, um die Werke dieser zu verstehen, folgt, dass King hier lediglich einen quantitativen nicht aber einen qualitativen Unterschied von Kunst und Mathematik beschreibt.

Auch Thomas Tymoczko kommt in seinem Essay *Value Judgements in Mathematics: Can we Treat Mathematics as an Art?* zu dem Schluss, dass das Vorhandensein von Kritikern bzw. eines zur Kritik fähigen Publikums eine zentrale Rolle zur Beantwortung seiner Hauptfrage spielt. Dazu bezieht er sich zwar nicht wie King explizit auf einen institutionstheoretischen Ansatz als kunsttheoretische Grundlage, legt aber die Annahme zu Grunde, dass „artists, products and audience" (Tymoczko, 1993, S. 71) notwendig vorhanden sein müssen, wenn von einer Kunstform die Rede sein soll. Der Borelschen Argumentation folgend scheint es auch ihm zunächst so, als würden im Falle der Mathematik Künstler und Publikum der selben Personengruppe, den Mathematikern, entstammen. Eine solche Konstellation findet er bei keiner anderen Kunstform und sieht so darin eine zentrale Forderung, soll der Kunststaus der Mathematik positiv entschieden werden:

> „If aesthetics criticism is to get off the ground in mathematics, there must be some independence between artists and critics." (Tymoczko, 1993, S. 71)

Aus der Beobachtung, dass auch in verschiedenen anerkannten Künsten vom Publikum bestimmte Fähigkeiten mindestens zur Performance der Gegenstände erwartet werden, zieht Tymoczko den Schluss, dass der Mathematiker nicht aus-

[43] Vgl. stellvertretend Basieux (2003), Devlin (2002) oder auch Hardy (1940). Dies ist besonders irritierend, da King selbst in *The Art of mathematics* mit dem Anspruch auftritt, Mathematik für den gebildeten Laien zugänglich zu machen.

[44] Naturgemäß kann auf diese Weise nicht die aktuellste Forschungsmathematik präsentiert werden. Die Autoren sehen darin aber meist kein Problem, und wählen etwa Beweise aus Euklids Elementen, um den ästhetischen Wert herauszustellen.

schließlich mit dem Künstler identifiziert werden könne. Vielmehr müsse der typische professionelle Mathematiker als sensibler Leser und Kritiker gesehen und von der Untermenge der „inventive artists in mathematics“ unterschieden werden (vgl. Tymoczko, 1993, S. 72). Dies gehe einher mit der Unterscheidung zweier Typen küntlerischen Tuns innerhalb der Mathematik: „One was the composition of proofs, and one was the presentation/performance of proofs.“ (Tymoczko, 1993, S. 73) Tymczko plädiert demnach für die Unterscheidung zwischen Komponisten und Interpreten von Mathematik.

Der Vorschlag, eine zur Musik parallele Zuordnung der beteiligten Personen auch in der Mathematik zu wählen, scheint auf den ersten Blick naheliegend. Auf den zweiten Blick wirft er aber auch Fragen auf: So sind die Interpreten im Bezugssystem der Musik weder mit den Musikkritikern noch mit dem Publikum gleichzusetzen. Wenn also ein schaffender Mathematiker dem Komponisten entspricht und der diese Werke präsentierende Mathematiker dem Interpreten, besteht die Frage nach den Kritikern weiter – insbesondere, da Tymoczko nicht auf die Funktion der Mathematiker als Reviewer o.ä. eingeht. Auch ist es zumindest bemerkenswert, dass die Möglichkeit, ein Publikum außerhalb der Gruppe der professionellen Mathematiker zu finden, auch von ihm nicht erwogen wird.

Auf der Grundlage einer instituitonstheoretischen Bestimmung dessen, was Kunst ausmacht, stellen gerade die Rezipienten der Mathematik offenbar eine entscheidende Größe dar. Dabei ist es der mathematikästhetische Gemeinplatz, dass zur ästhetischen Bewertung das inhaltliche Verständnis notwendig vorausgesetzt werden muss, der zu Problemen führt: Meist wird solches Verständnis nur oder hauptsächlich innerhalb der mathematischen Institute vermutet. Die professionellen Mathematiker bekommen aber innerhalb des Kunstsystems Mathematik bereits den Status der Künstler zugeschrieben, was dann wiederum dazu führt, dass das potentielle Publikum und die potentiellen Kritiker aus der Gruppe der Künstler stammen. Dazu kommt, dass sich die schaffenden Mathematiker selbst eher nicht als Kritiker oder Publikum sehen würden.
Dieses Problem rührt m. E. daher, dass im Bereich der Künste zwischen der Kunstkritik als universitärer Disziplin und dem künstlerischen Produzieren klar unterschieden wird, während im Bereich der Mathematik die Produktion den Kernbereich im Wissenschaftssystem darstellt. Der Künstler arbeitet in der Regel außerhalb der Hochschulen und versteht sich zu Recht nicht als Kritiker. Außerdem wird diese Kunst von einer mehr oder weniger breiten nichtprofessionellen Öffentlichkeit rezipiert. Dies auf die Mathematik zu übertragen, kann zum einen Tymoczko folgend bedeuten, innerhalb der professionellen Mathematiker unterschiedliche Funktionen zu unterscheiden: Der schaffende Mathematiker als Komponist, der lehrende Mathematiker als Interpret und nicht zuletzt der ein Stück Mathematik besprechende Mathematiker als Kritiker. Zum anderen sollte aber nicht vergessen werden, dass durchaus ein Publikum außerhalb der Gruppe der schaffenden Mathematiker zu finden ist. Dazu zählen mindestens die Studierenden, an die die Darbietung der Interpreten gerichtet ist. Denkbar sind hier aber auch die Leser

von populärwissenschaftlicher Literatur, deren Ziel darin besteht dem gebildeten Laien die Mathematik und ihre Schönheiten näher zu bringen und ihnen so auch den Kunstcharakter vor Augen führt.

6.4.3 Ziele der Produzenten

Die fehlenden Kritiker machen nicht den einzigen und auch nicht den entscheidenden Unterschied zwischen Kings Mathworld und Dickies Artworld aus. Ein zentrales Hindernis, durch die Strukturähnlichkeit der beiden Systeme auf den Kunstcharakter der Mathematik zu schließen, liegt m.E. vielmehr im Bewusstsein der Produzenten.

Generell kann dem Dickieschen Konzept zur Charakterisierung von Kunst vorgeworfen werden, dass es so allgemein ist, dass es nicht nur die Mathematik umfasst sondern auch Systeme, über deren Kunststatus eindeutig negativ entschieden wird. Das bedeutet nicht, dass die hier von King auf die Mathematik übertragenen Eigenschaften keine gute Charakterisierung dieser böten, nur erlauben sie keine Aussagen über den Kunstcharakter der Mathematik. Dieses Problem des institutionstheoretischen Ansatzes im Allgemeinen und der Kingschen Folgerung daraus illustriert auch Thomas Tymoczko in seiner Besprechung von *The Art of mathematics*:

> „[...] Dickie's definition, even if it characterizes art and even if, according to King, it characterizes mathematics, also characterizes mortuary science." (Tymoczko, 1995, S. 125)

Hier soll diese generelle Kritik zunächst nicht weiter diskutiert werden. Für die mathematikästhetische Frage nach dem Künstlercharakter des schaffenden Mathematikers ist m.E. der Blick auf den Übergang von Mathematik- zur Kunstwelt an einer bestimmten Stelle einträglicher. So übersieht King, dass sich Dickie folgend ein Künstler nicht allein dadurch auszeichnet, dass er sein Handwerk versteht („An artist is a person who participates with understanding in the making of a work of art."), was leicht auf den Mathematiker, aber ebenso auf Akteure in vielen weiteren Bereichen (Handwerke oder auch schulischer Unterricht) übertragbar ist. Zusätzlich dazu ist aber nach Dickie dem Künstler die Erkenntnis eigen, dass das, was er produziert, als Kunst präsentiert wird:

> „[A] general aspect characteristic of all artists, namely, the awareness that what is created for presentation is art [...]." (Dickie, 1997, S. 89)

Bezogen auf das Publikum folgert Dickie daraus „a general aspect charakteristic of all publics, namely the awareness that what is presented to it is art" (Dickie, 1997, S. 90). Würden an dieser Stelle ebenfalls die Worte „art" und „mathematics" ausgetauscht, wie King es bei den übrigen definierenden Sätzen vorschlägt, ergäbe sich die sicher richtige Aussage, dass ein Mathematiker weiß, dass seine Produkte

Mathematik sind und er sie als solche präsentiert. Diese Einsicht wäre allenfalls ein weiteres Indiz für die Strukturähnlichkeit von „Mathworld“ und „Artworld“. Um nun aber von dieser Ähnlichkeit der Systeme auf den Kunststatus der Mathematik schließen zu können, dürfte der Begriff „art“ an dieser Stelle gerade nicht ausgetauscht werden.
Damit also die Mathematik als „artsystem“ im Dickieschen Sinne gesehen werden könnte, müsste man davon ausgehen, dass Mathematiker in der Rolle des Künstlers das Ziel vor Augen haben, Kunstwerke zu schaffen, die später als solche präsentiert werden sollen und dass Mathematiker in der Rolle des Publikums anerkennen, dass das, was sie beispielsweise in einem Artikel einer Fachzeitschrift lesen, die Präsentation eines Kunstwerks ist.
Beides setzt bereits voraus, dass man die „Muster der Mathematiker“ als Kunstwerke auffassen kann, so dass mittels der institutionstheoretischen Herangehensweise schlechterdings keine Entscheidung über den Kunststatus der Mathematik getroffen werden kann; selbst wenn man versuchen würde, nur die Stücke der Mathematik, die „schön“ genannt werden, als Elemente der Artworld zu betrachten[45].
Durch die notwendige Korrektur der Kingschen Argumentation geht also ihre Aussagekraft bezüglich des Kunststatus der Mathematik verloren. Die durch King aufgezeigten Strukturähnlichkeiten zwischen der Kunst in ihrer Umgebung und der Mathematik in ihrer Umgebung klären die Frage, ob die Gegenstände der Mathematik als Kunstwerke aufgefasst werden können, nicht. Dennoch muss auf Grund dieser Erkenntnis die Möglichkeit einer Identifikation von Kunst und Mathematik nicht verworfen werden. Vielmehr liegt durch die aufgezeigte Strukturähnlichkeit in beiden Systemen zumindest ein weiteres Indiz für die Annahme kunstähnlicher Eigenschaften der Mathematik vor.

Aus mathematikästhetischer Sicht interessante Verweise bieten Antworten auf die durch den Kingschen Fehler aufgeworfene Frage, ob die schönen Gegenstände der Mathematik in der Interaktion von Mathworld-Künstlern und -Publikum als solche behandelt werden. Auch wenn viele Mathematiker für den Kunststatus ihrer Produkte plädieren, ist das allgemeine Bewusstsein dafür natürlich keineswegs unumstritten. Jacques Hadamard bezeichnet es in seiner Arbeit *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* sogar als großen Fehler davon auszugehen, dass Mathematiker eine bestimmte Lösung oder Entdeckung allererst anstreben, um ein Publikum auf sich aufmerksam zu machen (vgl. Hadamard, 1945, S. 133). Anders sieht dies der eingangs zitierte Helmut Hasse:

> „Ein echter Mathematiker, der etwas schönes gefunden hat, spürt in sich den unwiderstehlichen Drang, diese seine Entdeckung anderen mitzuteilen. Für die eigene Erbauung genügt in den meisten Fällen schon die rohe, intuitiv erschaute Form und der unbehauene Beweis. Für die

[45] Der Übertrag von Artworld zu Mathworld könnte dann wie folgt geschehen: A work of beautiful mathematics is an artifact of a kind created to be presented to a mathworld public and to be realized as beautiful.

> Mitteilung an andere aber muß, ebenso wie in der Kunst, das Werk erst in eine Form vollendeter Schönheit gegossen werden.“ (Hasse, 1952, S. 26)

Der komponierende Mathematiker wird also erst durch den Drang zur Präsentation seines Werks dazu veranlasst, das Stück Mathematik aufzuschreiben und damit dessen Schönheit in eine zugängliche Form zu bringen. Ein mathematisches Produkt wird demnach (auch) mit dem Ziel veröffentlicht, einem Publikum die Erfahrung der mathematischen Schönheit zu ermöglichen. Gleichzeitig können Kunstdefinitionen herangezogen werden, die einem Gegenstand gerade dann als Kunstwerk erkennen, wenn er mit der Intention belegt ist, ästhetische Erfahrungen auszulösen.[46] Setzt man nun also etwa den Standpunkt Hasses voraus und geht weiter davon aus, dass die mathematische Schönheit eine genuin ästhetische Erfahrung ermöglicht, so kann die Mathematik als „ästhetische Kommunikation“ (vgl. Reicher, 2005, S. 164) beschrieben werden und genügt damit gerade diesen „kommunikationstheoretischen“ bzw. „ästhetischen“ Kunstdefinition.

6.5 Der Mathematik-Kunst-Vergleich

Den in diesem Kapitel diskutierten Ansätzen ist zunächst gemein, dass sie Parallelen zwischen Kunst und Mathematik ausmachen und diese begründen. Gleichzeitig zeigen sich vielfältige Möglichkeiten, dieses Ziel zu verfolgen und damit auch verschiedenste Folgerungen, die sich aus der Annahme solcher Parallelen ergeben. Die Gründe, Folgen und Chancen dieser Diversität sollen im folgenden skizziert werden.

Wenn im Bereich der Mathematik Ähnlichkeiten mit der Kunst beschrieben und aufgegriffen werden sollen, so muss mindestens implizit ein Begriff davon vorausgesetzt werden, was jeweils unter Kunst (und auch unter Mathematik) verstanden werden soll. Wie die hier beschriebenen Ansätze zeigen, wird selten der zugrunde liegende Kunstbegriff expliziert oder gar Bezug auf eine spezielle Kunsttheorie genommen. Dies verwundert insofern nicht, als dass auch in der allgemeinen Philosophie der Kunst kein Konsens über eine Definition besteht. D.h. es existiert keine einheitliche Charakterisierung des Kunstbegriffs, und es besteht die Möglichkeit, dass eine solche nicht möglich ist. Die oben zitierten Mathematiker oder Mathematikphilosophen, die der Frage nach dem Kunststatus ihrer Disziplin nachgehen oder sie als Kunstform behandeln, begegnen diesem Problem meist auf pragmatische Weise und betrachten Eigenschaften, die im allgemeinen Sprachgebrauch

[46] Maria Reicher fasst z.B. auf diese Weise Kunst als eine spezielle Form der Kommunikation auf. Ihre „kommunikationstheoretische Definition der Kunst“ lautet konkret: „x ist ein Kunstwerk genau dann, wenn x von einem Sender (Produzenten) als Medium einer ästhetischen Erfahrung intendiert ist.“ (Reicher, 2005, S. 164) Noel Carroll spricht in diesem Zusammenhang von „aesthetic definitions of art“, da explizit die Intention des Ästhetischen in den Kunstbegriff einbezogen wird (vgl. Carroll, 1999, S. 160ff).

dem zugeschrieben wird, was unbestritten zur Kunst zählt. In den hier besprochenen Positionen zeigt sich somit meist ein eher als konservativ zu beschreibender Kunstbegriff. Außerdem werden jeweils nur einzelne Facetten zum Vergleich herangezogen: die Arbeitsweise des Künstlers, das Phänomen unterschiedlicher Stile, strukturelle Eigenschaften von Kunstwerken (einer bestimmten Gattung) oder die Beziehung von Produzenten und Rezipienten. Die aus solchen punktuellen Betrachtungen hervorgehenden Aussagen über den allgemeinen Kunststatus der Mathematik sind naturgemäß leicht kritisierbar.[47] Für die Frage inwiefern Mathematik als Kunst betrachtet werden kann oder nicht sind sie m.E. aber dennoch von großem Belang, tragen sie doch in der Zusammenschau und durch die Kontrastierung mit Gegenargumenten in ihrer Gesamtheit zu einem umfassenden Blick bei (vgl. dazu Kapitel 8).

Der Abgleich der Mathematik mit einzelnen Eigenschaften der Künste ist aber nicht nur für die zentrale Frage der Mathematikästhetik nach dem Kunststatus von Bedeutung. Das Vorgehen führt ebenfalls dazu, dass jeweils eine bestimmte Facette der Mathematik herausgegriffen und aus der speziellen Perspektive der Kunstästhetik beschrieben wird. Wie die obigen Ausführungen zeigen, gelangen dabei die unterschiedlichsten Bereiche der Mathematik in den spezifisch mathematikästhetischen Fokus. Es werden sowohl Aussagen über die Arbeitsweise des Mathematikers im Allgemeinen sowie den individuellen Prozess der mathematischen Erfindung getroffen, als auch die mathematische Praxis im weiteren Sinne mit Blick auf das Wissenschaftssystem untersucht. Auch können mit Hilfe der mathematikästhetischen Perspektive Eigenschaften mathematischer Texte identifiziert werden, die über den rein mathematischen Gehalt und die logische Struktur hinausweisen. Dies wiederum führt dazu, dass mit Hilfe eines ästhetikspezifischen Blicks auf die Mathematikgeschichte Gemeinsamkeiten und Motivationen abseits der inhaltlichen Genese ausgezeichnet werden können.

Aus Sicht der Mathematikästhetik zeigen die oben ausgeführten Ansätze verschiedene Funktionen des Ästhetischen bezüglich der Mathematik und der Philosophie der Mathematik: Sie reichen vom Auswahlkriterium bei der mathematischen Erfindung über die verbindende Eigenschaft innerhalb der Kommunikation von Komponist, Interpret, Kritiker und Publikum bis hin zum stilbildenden Element mathematischer Texte und mathematischen Handelns. Bemerkenswert dabei ist, dass die ästhetischen Eigenschaften immer neben anderen in die Untersuchung eingehen, dabei aber häufig als zentral beschrieben werden und in „gängigen“ Beschreibungen jener Gegenstände häufig keine Beachtung finden. Mit Bezug auf die oft im Hintergrund stehende Frage, ob Mathematik als Kunst oder Wissenschaft zu behandeln sei, erklärt sich so, warum häufig beide Alternativen angebracht und attraktiv erscheinen und nicht immer eine abschließende Entscheidung getroffen werden kann:

[47] Wie die Diskussion über die Anwendung des institutiontheoretischen Ansatzes unter 6.4 zeigt, gilt dies aber auch wenn der zu Grunde gelegte Kunstbegriff zwar explizit gegeben, aber zu weit angelegt ist.

> „Ich hoffe, daß ich wenigstens den Eindruck hervorgerufen habe, daß Mathematik eine äußerst komplexe Schöpfung ist, die so viele wesentliche gemeinsame Züge mit Kunst, experimentellen und theoretischen Naturwissenschaften aufweist, daß sie als alle drei zugleich betrachtet, und deswegen auch von allen drei unterschieden werden muß." (Borel, 1981, S. 36)

Unabhängig davon, ob die Schlussfolgerung Armand Borels geteilt wird, bestätigt die hier versuchte Zusammenschau mindestens den beschriebenen Eindruck. Insbesondere verweisen die sehr unterschiedlichen Herangehensweisen auf die Komplexität der Mathematik allgemein und die Notwendigkeit der ästhetischen Perspektive, um ein umfassendes Bild zu erhalten.

Zunächst kann der Eindruck entstehen, dass für die beschriebenen Effekte zwar ein mathematikästhetischer Blick aber nicht zwingend der Kunstvergleich nötig ist. Die kunstspezifische Behandlung von mathematischer Praxis, Texten und Mathematikgeschichte leitet aber einerseits allererst den Blick auf einen bestimmten aus mathematikästhetischer Sicht interessanten Bereich und bietet andererseits eine bereits vorhandene Sprache zur Beschreibung der so fokussierten Phänomene. Hierin liegt m.E. der besondere Gewinn des Mathematik-Kunst-Vergleichs für die Mathematikästhetik aber auch für die allgemeine Frage nach der Natur der Mathematik im weitesten Sinne.

Kapitel 7

Mit Kant gegen den Kunstcharakter der Mathematik

> „Es gibt weder eine Wissenschaft des Schönen, sondern nur Kritik, noch schöne Wissenschaft, sondern nur schöne Kunst." (KU, §44, S. 176)

Immanuel Kant sieht einen spezifischen Unterschied zwischen Wissenschaft und Kunst, also auch zwischen Mathematik und Kunst. Dabei bezieht er sich auf die zu betrachtenden Produkte und insbesondere auf die am Entstehungsprozess beteiligten Personen und spricht so in der *Kritik der Urteilskraft* nicht nur der Mathematik den Kunstcharakter, sondern auch den Mathematikern den Geniestatus ab.

In der dritten *Kritik* wird die Theorie des Schönen und des Geschmacks zunächst völlig unabhängig von einer Theorie der Kunst entfaltet, und erst im nächsten Schritt das Naturschöne vom Kunstschönen unterschieden. Dennoch beruht die Kantische Argumentation gegen die Behauptung, die Wissenschaft der schönen Kunst zuzurechnen nicht allein darauf, dass die Gegenstände der Wissenschaft sich einem genuin ästhetischen Urteil entziehen. Vielmehr geht Kant mit seiner Gegenargumentation über die in Kapitel 4 beschriebenen Einwände hinaus. Die zentralen Kontraste bilden dabei der Kantische *Geniebegriff* und seine Vorstellung einer *ästhetischen Idee*: Dem Genie in der Kunst setzt Kant den Mathematiker als „großen Kopf" entgegen, und der ästhetischen Idee stellt er Vernunftideen und Verstandesbegriffe gegenüber, wobei die Unterschiede insbesondere in der Rolle der Einbildungskraft liegen. So greift er zentrale „Problemstellen" aus der Diskussion um die Schönheit der Mathematik, die Regelmäßigkeit mathematischer Gegenstände und das Verhältnis von Verstand und Einbildungskraft im Geschmacksurteil wieder auf und deutet diese in Bezug auf seine Auffassung von Kunst bzw. dem künstlerischen Genie aus. Außerdem stellt er sich mit dieser auf der Rolle der Einbildungskraft beruhenden Kontrastierung auch gängigen Auffassungen zur Ästhetik des Mathematischen und dem Künstlerstatus des Mathematikers seiner

Zeit entgegen.[1] So schreibt der Mathematiker und Zeitgenosse Kants Jean Lerond D'Alembert (1717–1783) in der berühmten *Einleitung zur Enzyklopädie*:

> „Die Vorstellungskraft arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger stark als in einem schaffenden Dichter. [. . .] Vielleicht gebührt Archimedes mit größerer Berechtigung als allen großen Männern des Altertums der Platz neben Homer.“ (D'Alembert, 1751, S. 93ff)

Im Folgenden wird zunächst allgemein auf den Begriff der Kunst und des Künstlers eingegangen, wie Kant sie im ersten Teil der *Kritik der Urteilskraft* einführt. Nach einer Skizze seiner Position und Verortung innerhalb der dritten *Kritik* werden die Zusammenhänge genauer beleuchtet, die die Einwände gegen den Kunststatus der Mathematik tragen. Diese Einwände können dann im nächsten Abschnitt ausführlich dargestellt und diskutiert werden.

Neben den Ausführungen Kants werden dabei auch einige wenige Sekundärquellen zur Diskussion herangezogen. Die Literaturgrundlage zur Mathematik innerhalb der Kantischen Kunsttheorie ist eher dünn, und die wenigen Ansätze nehmen das Verhältnis nicht umfassend in den Blick, sondern beschäftigen sich jeweils nur mit einzelnen der im folgenden aufgegriffenen Aspekte. Dies ist u.a. der Tatsache geschuldet, dass in der Regel nicht explizit die Mathematikästhetik im Zentrum der Betrachtungen steht. Bezogen auf den Geniestatus des Mathematikers werden insbesondere Giordanetti (1995) zur Werkgeschichte des Geniebegriffs bei Kant und Wenzel (2001) sowie Wenzel (2005) u.a. zur Negativbewertung des Wissenschaftlers im Rahmen der *KU* zu Wort kommen, während Winterbourne (1988), Koriako (1999) (§14) und Chernyak und Kahdan (1997) eher den Kunstwerkcharakter mathematischer Gegenstände in den Blick nehmen. Insbesondere den letztgenannten Ansätzen geht es primär nicht darum, die Frage nach einem Kunststatus der Mathematik zu klären, sondern vielmehr werksystematische Aussagen zu begründen. Während sich Winterbourne (1988) mit der Stellung der dritten *Kritik* in Kants Gesamtwerk befasst, gehen Chernyak und Kahdan (1997) der Frage nach, ob Kants Mathematikauffassung angesichts der Weiterentwicklungen in der Mathematik haltbar wäre und beziehen sich dabei insbesondere auf die *Kritik der reinen Vernunft*.[2]

Inwieweit die Kantische Position als eine dem Kunstcharakter der Mathematik negativ gegenüberstehende Sichtweise für die mathematikästhetische Diskussion fruchtbar gemacht werden kann, soll abschließend diskutiert werden.

[1] Für weitere Beispiele vgl. auch die Analyse unter 3.3.

[2] Vorgeblich eine Auseinandersetzung mit der Ästhetik der Mathematik vor dem Hintergrund der Kantischen Theorie verspricht Meike Aissen-Crewett: *Mathematik ist reine Dichtung. Kants Ästhetisierung der Mathematik.* Potsdam, 2000. Da es sich hierbei allerdings um eine – nicht gekennzeichnete und unkommentierte – wörtliche Übersetzung von Winterbourne (1988) und Chernyak und Kahdan (1997) handelt, wird dies keinen weiteren Eingang in diese Arbeit finden.

7.1 Die Kunstauffassung in der *Kritik der Urteilskraft*

Als Folgerung aus der Theorie über die ästhetischen Urteile behandelt Kant die Kunst nach den Ausführungen zum Schönen und zum Erhabenen als ein Gebiet im Abschnitt *Deduktion der ästhetischen Urteile*. Dabei gelangt er über verschiedene Stufen der Begriffsabgrenzung schließlich zum Begriff der „schönen Kunst" und greift dabei auch auf das Mathematische als Kontrast zurück.

7.1.1 Die Abgrenzung der schönen Kunst

In §43 nimmt Kant zunächst auf der allgemeinsten Ebene die „Kunst überhaupt" (KU, §43, S. 173) in den Blick. Dabei greift er übliche Verwendungen des Wortes Kunst in verschiedenen Zusammenhängen auf: Zunächst grenzt Kant die Hervorbringungen der Natur klar von der Kunst ab mit der Begründung, dass ein Kunstwerk „Hervorbringung durch Freiheit, d.i. durch eine Willkür, die ihren Handlungen Vernunft zum Grunde legt" (KU, §43, S. 174) voraussetzt.[3]

Wird Kunst als „Geschicklichkeit des Menschen" (KU, §43, S. 175) aufgefasst, so ist diese von der Wissenschaft, als theoretischem Vermögen abzugrenzen. Dabei will Kant unter Kunst nur die Fähigkeiten verstanden wissen, die nicht allein durch das Wissen-wie entstehen. So bahnt sich hier bereits die Unterscheidung zwischen dem Künstler als Genie und dem Wissenschaftler als „großem Kopf" an.[4] Unter diesen Geschicklichkeiten unterscheidet Kant dann als drittes die „freie Kunst" von der „Lohnkunst", also die Kunst vom Handwerk.[5] Der Unterschied beruht im Wesentlichen auf dem Zweck, zu welchem das Geschick eingesetzt wird. Das Handwerk gilt zunächst als generell unangenehme oder beschwerliche Tätigkeit und wird für den Ausübenden erst durch die erwartete Wirkung, etwa eine Entlohnung, verlockend, während der freie Künstler einer Beschäftigung nachgeht, die „für sich selbst angenehm" ist. In diesem Sinne stellt er hier die freie Kunst als „Spiel" dem Handwerk als „Arbeit, d.i. [als] Beschäftigung, die für sich selbst unangenehm [...] und nur durch ihre Wirkung anlockend ist" (KU, §43, S. 175) gegenüber. Kant betont aber, dass auch hinter der freien Kunst notwendig Arbeit stehe, so dass es lediglich anmute, als sei sie „nur ein Spiel" (vgl. KU, §43, S. 175f). Dieser Gedanke

---

[3] Diese Unterscheidung gilt natürlich nur, wenn man etwa die instinktmäßig „handelnden" Tiere als Urheber von Natur betrachtet. Bezogen auf den göttlichen Schöpfer ist auf dieser Grundlage erst recht von Kunst zu sprechen. (Vgl. KU, §43, S. 174)

[4] Vgl. ausführlicher 7.2.

[5] Der Begriff freie Kunst wird dabei explizit anders verwendet, als in der Bezeichnung „Sieben freie Künste": „Ob auch unter den sogenannten sieben freien Künsten nicht einige, die den Wissenschaften beizuzählen, manche auch, die mit Handwerken zu vergleichen sind, aufgeführt worden sein möchten: davon will ich hier nicht reden." (KU, §43, S. 176)

wird immer wieder aufgegriffen und insbesondere mit Blick auf die Vorbereitung des Künstlers vertieft.

Ab §44 stellt Kant dann seine Auffassung von der „schönen Kunst“ im Speziellen dar. Auch hier nutzt er wieder die Abgrenzung des zu bestimmenden Begriffs von anderen denkbaren: Kant unterscheidet die „mechanische“ von der „ästhetischen“ Kunst und innerhalb der letzteren wiederum zwischen „angenehmer“ Kunst – hierunter fällt für Kant beispielsweise Dekoration oder auch Musik, die der bloßen Unterhaltung bei Tisch dient (KU, §44, S. 178) – und „schöner Kunst“. Die schöne Kunst ist damit nicht mechanisch, also nicht allein auf die Umsetzung einer aus der Erkenntnis gegebenen Regel gerichtet, sondern auf das Gefühl der Lust. Diese Emotionen dürfen aber nicht, wie im Falle der angenehmen Kunst, unmittelbar und ausschließlich durch Sinneseindrücke evoziert werden:

> „So ist ästhetische Kunst, als schöne Kunst, eine solche, die die reflektierende Urteilskraft und nicht die Sinnenempfindungen zum Richtmaße hat.“ (KU, §44, S. 179)

Bemerkenswert ist, dass er auch hier wieder die Wissenschaft als Kontrast heranzieht. Er wendet sich, wie eingangs in diesem Kapitel zitiert, sowohl gegen eine Wissenschaft des Schönen als auch gegen schöne Wissenschaft, was er mit der ironischen Bemerkung, dass in einer solchen „Bonmots“ an die Stelle von Beweisen und Begründungen treten müssten, begründet. Dass aber dennoch häufig von schöner Wissenschaft die Rede ist, führt Kant auf eine „Wortverwechselung“ (KU, §44, S. 177) zurück, welche aus der Tatsache resultiere, dass viele wissenschaftliche Disziplinen die Grundlage und Voraussetzung für die eigentlichen Künste darstellten (vgl. KU, §44, S. 176f). Dazu gehören die klassische Bildung der Aufklärung, also Kenntnis alter Sprachen, Belesenheit, Kenntnis der Geschichte und der Altertümer im Speziellen (vgl. KU, §44, S. 177). Die heute zu den Naturwissenschaften gezählten Disziplinen und die Mathematik zählt er dabei nicht auf, obgleich auch zu seiner Zeit bereits mathematische Kenntnisse etwa in der Malerei die Technik der Künstler bestimmte (vgl. 1.1.1). Die „Wortverwechselung“ im Falle der schönen Mathematik weist er hier also noch nicht nach.

Die bisher ausgeführten Gedanken greift Kant in den Paragraphen 51 bis 53 wieder auf, um die verschiedenen Disziplinen der schönen Kunst zu unterscheiden und nach ihrem ästhetischen Wert zu ordnen. Dabei räumt er der Dichtkunst die höchste Stellung ein (vgl. KU, §53, S. 215ff).

7.1.2 Mathematik als Kontrast zur schönen Kunst

Auch im Rahmen der Begriffsbestimmung und zur näheren Charakterisierung der schönen Kunst zieht Kant immer wieder die Mathematik als Kontrast heran. Dabei greift er einerseits auf bereits in Kapitel 4 diskutierte Argumente gegen ein

echtes Geschmacksurteil über die Gegenstände der Mathematik zurück. Andererseits entstehen aber durch die Fokussierung auf die schöne Kunst auch Argumente, die speziell gegen den Kunstcharakter der Mathematik sprechen. So widmet sich Kant unter der Voraussetzung „Schöne Kunst ist Kunst des Genies“ (KU, §46, S. 181) über die Paragraphen 46 - 50 dem Künstler und dem Entstehungsprozess schöner Kunstwerke und nimmt dabei explizit den Mathematiker kontrastierend in den Blick. Zentral ist hier die Frage nach der Regelhaftigkeit und der daraus resultierenden Lehr- und Lernbarkeit von Kunst und Mathematik.
Der zweite Abschnitt des ersten Teils der *Kritik der Urteilskraft* trägt den Titel *Die Dialektik der ästhetischen Urteilskraft* und umfasst die Paragraphen 55 bis 60. Hier greift Kant sein Konzept der *ästhetischen Idee* auf und führt es weiter aus. In der Abgrenzung zu „Vernunftideen“ und „Verstandesbegriffen“ wird dabei das Mathematische erneut zum Kontrast (vgl. KU, §57, Anmerkung I, S. 239ff). Indem er das Genie dort „durch das Vermögen ästhetischer Ideen“ (KU, §57, Anmerkung I, S.242) charakterisiert, zeichnet Kant den Künstler und im Folgenden auch dessen Produkte mit Hilfe dieser Ideen aus. Auch entstehen so Verbindungen zur Frage nach dem Geniestatus des Mathematikers.
Die beiden hier skizzierten Argumentationsstränge Kants gegen den Kunststatus der Mathematik werden im folgenden getrennt aufgegriffen und ausführlich diskutiert.

7.2 Keine Genies, sondern große Köpfe

> „Genie ist das Talent (Naturgabe), welches der Kunst die Regel gibt.“
> (KU, §46, S. 181)

Jedes Kunstwerk bedarf als künstliches Produkt einer Regel als Grundlage seiner Herstellung. Das ästhetische Urteil darf aber nicht auf einer begrifflich fassbaren Regelmäßigkeit beruhen[6], woraus Kant folgert, dass „die schöne Kunst sich selbst nicht die Regel ausdenken [kann], nach der sie ihre Produkte zustande bringen soll“ (KU, §46, S. 181f). Die dennoch zur Produktion notwendige Regel erfährt die Kunst nun gleichsam durch die Hintertür durch das naturgegebene Talent des schaffenden Subjekts. So wird ausgehend von seiner berühmten Begriffsbestimmung das Genie für die Entstehung schöner Kunst notwendig.

Daraus leitet Kant weiter in §46 vier zentrale Eigenschaften des Genies ab: Die erste Eigenschaft ist die „Originalität“. Außerdem müssen die Produkte des Genies „exemplarischen“ Charakter haben, d.h. sie müssen anderen einen Maßstab zur Beurteilung liefern. Andererseits darf drittens das Genie selbst sich der Regel, nach der es ein Produkt hervor gebracht hat, nicht bewusst sein. Als vierte Eigenschaft führt Kant die Exklusivität des Bezugs von Genie und Kunst an, indem er explizit

[6] Vgl. zum Geschmacksurteil nach Kant auch 4.1.

betont, „daß die Natur durch das Genie nicht der Wissenschaft, sondern der Kunst die Regel vorschreibt“ (KU, §46, S. 183).[7] Mit dieser letzten Eigenschaft schließt er also ausgehend von seiner Geniedefinition explizit aus, den Wissenschaftler im Allgemeinen und damit auch den Mathematiker in diesem Sinne als Genie zu verstehen. Doch auch zur Illustration der übrigen Charakteristika zieht Kant den Mathematiker als Gegenbeispiel heran, von dem er das Genie abgrenzt. Dabei ist es insbesondere die Lehr- und Lernbarkeit sowie der Prozess der Entstehung, in denen Kunst und Mathematik unterschieden werden.

7.2.1 Zur Lernbarkeit von Kunst und Mathematik

Aus der zweiten der genannten Eigenschaften, dem exemplarischen Charakter der Produkte eines Genies, schließt Kant in §47, dass das Hervorbringen schöner Kunst nicht (systematisch) lehr- und also auch nicht lernbar ist (vgl. KU, §47, S. 183f). Einem Menschen, dem von der Natur das Talent zur Kunst gegeben ist und der sich dessen bewusst ist, genügt ein anderes Kunstwerk als Modell, um *Ähnliches* hervorzubringen (vgl. KU, §47, S. 185).

Um die Exemplarik so nutzen und umsetzten zu können, bedarf es aber abgesehen von Talent weiterer Voraussetzungen: Erst gewisse mechanische, durch Regeln bestimmte und auf Zwecke gerichtete Kunstfertigkeiten bieten die Grundlage für die Originalität des Genies. Diese handwerklichen Grundlagen der Kunst sind explizierbar und damit in Gänze lernbar. Die Regel, die erst durch das Genie der Kunst gegeben wird, kann dagegen nicht versprachlicht werden. Sie kann nur aus dem Produkt eines Genies „abstrahiert“ werden und in einem anderen mit ähnlichem Talent ausgestatteten Menschen die Umsetzung ähnlicher Regeln evozieren:

> „Die Muster der schönen Kunst sind daher die einzigen Leitungsmittel, diese auf die Nachkommenschaft zu bringen: welches durch bloße Beschreibung nicht geschehen könnte.“ (KU, §47, S. 185)

Kant will dabei diese „Nachfolge“ von der „Nachahmung“ unterschieden wissen. Erstere ist nur denjenigen möglich, die selbst mit Genie ausgestattet sind. Nachahmung dagegen ist das Produkt einer „methodische[n] Unterweisung nach Regeln, soweit man sie aus jenen Geistesprodukten und ihrer Eigentümlichkeit hat ziehen können“ für die nicht mit Genie begabten „guten Köpfen“ (KU, §49, S. 200f).

[7]Wie Piero Giordanetti darstellt, tauchen im Kantischen Werk diese Eigenschaften, insbesondere die Betonung des Genies als „Erfinder“, häufig im Zusammenhang mit dem Geniebegriff auf. Anders als in §46 wurden diese Eigenschaften jedoch in früheren Arbeiten häufig zur Begriffs*bestimmung* genutzt. Die oben zitierte Definition („Genie ist das Talent, welches der Kunst die Regel gibt.“) aus der in der *Kritik der Urteilskraft* diese Eigenschaften als Charakterisierungen des Genies erst *gefolgert* werden, wird von Kant erst kurz vor der Entstehung der dritten *Kritik* eingeführt. Dies ist Giordanetti folgend darauf zurück zuführen, dass Kant erst zu dieser Zeit eine klare Unterscheidung zwischen Mathematiker und künstlerischem Genie sieht. (Vgl. Giordanetti, 1995, S. 429f)

In diesem Sinne bedeutet Lernen für Kant Nachahmung, und das Hervorbringen schöner Kunst ist gerade nicht lernbar.

Wie dennoch die Vorbereitung angehender Künstler gestaltet werden kann, darauf geht Kant im Anhang des ersten Teils der *Kritik der Urteilskraft* ein. Dort stellt er zunächst zusammenfassend fest, dass eine der Kunst vorausgehende „Methodenlehre" nicht möglich wäre[8], da das „Urteil des Geschmacks nicht durch Prinzipien bestimmbar" (KU, §60, S. 261) sei, um dann das Meister-Schüler-Verhältnis in der Kunst näher zu beschreiben:

> „Es gibt also für die schöne Kunst nur eine Manier (modus), nicht Lehrart (methodus). Der Meister muß es vormachen, was und wie es der Schüler zustande bringen soll; und die allgemeinen Regeln, worunter er zuletzt sein Verfahren bringt, können eher dienen, die Hauptmomente desselben gelegentlich in Erinnerung zu bringen, als sie ihm vorzuschreiben." (KU, §60, S. 261)

Ein angehender Künstler schärft zudem Kant folgend an den „Mustern der schönen Kunst" seinen Geschmack. Dies ist nötig, um in der Folge die eigenen Werke beurteilen und nachbessern zu können (vgl. KU, §48, S. 190f). Daraus und aus der in §59 begründeten These, dass das „Schöne das Symbol des Sittlich-Guten" sei (KU, §59, S. 258) folgert Kant später wiederum, dass die „Propädeutik zu aller schönen Kunst [...] nicht in Vorschriften, sondern in der Kultur der Gemütskräfte durch diejenigen Vorkenntnisse [...], welche man humaniora nennt" (KU, §60, S. 262) liege. Um also den Geschmack eines angehenden Künstlers zu schulen und zu sensibilisieren, steht zunächst die „Entwicklung sittlicher Ideen und die Kultur des moralischen Gefühls" (KU, §60, S. 264) an.[9]

Der Geschmack des Künstlers ist, anders als die Gabe des Genies, nicht notwendig für die Hervorbringung schöner Kunst (vgl. §48) jedoch, wie Kant in §50 betont, sehr hilfreich. So bezeichnet er zum einen den Geschmack als „die Disziplin (oder Zucht) des Genies" (KU, §50, S. 203), der dem überschwänglichen Genie einen Rahmen setzt. Zum anderen versichert die Prüfung durch den Geschmack auf Grund der Intersubjektivität der Geschmacksurteile (vgl. 4.1.1) dem Künstler die Zustimmung seines Publikums. Daher räumt Kant mit Blick auf die Produkte dem Geschmack einen gewissen Vorzug vor dem künstlerischen Talent ein (vgl. KU, §50, S. 203). Somit legt Kant auch besonderen Wert auf die Schulung des Geschmacks bei der Vorbereitung angehender Künstler.

[8] „Methodenlehre" wird hier in der Bedeutung verwendet, wie in den ersten beiden *Kritiken*, die je in Elementar- und Methodenlehre gegliedert sind. So grenzt Kant hier den Bereich der Kunst und des Geschmacksurteils erneut explizit von den Wissenschaften ab: „Die Einteilung einer Kritik in Elementarlehre und Methodenlehre, welche vor der Wissenschaft vorhergeht, läßt sich auf die Geschmackskritik nicht anwenden." (KU, §60, S. 261)

[9] Auf ein Zusammenwirken von ethischer und ästhetischer Bildung wird häufig hingewiesen. Insbesondere wird die Möglichkeit gesehen, durch die Beschäftigung mit der Kunst zur moralischen Erziehung beizutragen (vgl. Spies, 2005). Kant dagegen nutzt hier die Verbindung in entgegengesetzter Richtung und lässt die Moral Mittel der Künstlerbildung werden.

Für den Wissenschaftler gilt nun im Gegensatz zur Kunst, dass seine Tätigkeit prinzipiell lernbar sei. Indem er gerade Isaac Newton als Beispiel anführt, macht Kant dabei auch für die führenden Köpfe der Wissenschaft keine Ausnahme. Vielmehr stellt er sie explizit den Künstlern, hier den Poeten, gegenüber:

> „So kann man alles, was Newton in seinem unsterblichen Werke der Prinzipien der Naturphilosophie, so ein großer Kopf auch erforderlich war, dergleichen zu erfinden, vorgetragen hat, gar wohl lernen; aber man kann nicht geistreich dichten lernen [...]" (KU, §47, S. 183f)

Obwohl Kant also die Leistungen Newtons durchaus anerkennt und ihn zu den „großen Köpfen" zählt, sieht er die dazu notwendigen Voraussetzungen nicht in einem angeborenen Talent begründet. Diese Einschätzung beruht auf den begriffsmäßig gegebenen Regeln wissenschaftlicher Erkenntnis und der daraus folgenden Vorstellung, in der Wissenschaft könne jeder Schritt, der zur Hervorbringung ihrer Gegenstände notwendig ist, später expliziert werden. Das sei sogar „ganz anschaulich und zur Nachfolge bestimmt" (KU, §47, S. 184) möglich.[10] Dabei erkennt Kant durchaus graduelle Unterschiede der Gelehrsamkeit unter den Wissenschaftlern an, will diese aber spezifisch vom Genie des Künstlers unterschieden wissen:

> „Im Wissenschaftlichen also ist der größte Erfinder vom mühseligsten Nachahmer und Lehrlinge nur dem Grade nach, dagegen von dem, welchen die Natur für die schöne Kunst begabt hat, spezifisch unterschieden." (KU, §47, S. 184)

Kant betont explizit, dass mit dieser Unterscheidung „keine Herabsetzung" der Fähigkeiten des Wissenschaftlers einher gehe. Durch die Möglichkeit nämlich, von vorangegangenen großen Köpfen zu lernen, werde der wissenschaftliche Fortschritt gesichert, während die Kunst sich mit jedem Künstler neu erfinden müsse. (Vgl. KU, §47, S. 184ff)

Auf die Lernbarkeit in den Wissenschaften, bei der die Urteilskraft eine entscheidende Rolle spielt, geht Kant auch in der *Kritik der reinen Vernunft* ein.[11] Dort heißt es im zweiten Buch unter der Überschrift *Von der transzendentalen Urteilskraft überhaupt*:

> „[So] zeigt sich, daß zwar der Verstand einer Belehrung und Ausrüstung durch Regeln fähig, Urteilskraft aber ein besonderes Talent sei, welches gar nicht belehrt, sondern nur geübt sein will." (KrV, B 172)

Ein Mensch kann demnach zwar alle Regeln einer Wissenschaft lernen und es in dieser auch zu einer gewissen Meisterschaft bringen, die korrekte Anwendung

[10] Diese Einschätzung hat sich im Laufe des Kantischen Werks erst entwickelt und ist mit Blick auf die mathematische Praxis mindestens problematisch, wie die folgenden Ausführungen im Besonderen und die zusammenfassende Diskussion aller Ansätze zum Kunstcharakter in Kapitel 8 zeigen.

[11] Vgl. auch Winterbourne (1988) S. 268f.

aber ist nicht lehrbar. So bedarf es der von Kant als „Mutterwitz“ bezeichneten Gabe, um im konkreten Fall entscheiden zu können, ob ein Gegenstand unter die bekannte Regel fällt oder nicht. Das Fehlen dieses Talentes ist Kant folgend häufig zu beobachten und stellt einen „nie zu bessernden Mangel“ (KrV, B 173) dar. In der Regel wird versucht, diesen Mangel durch eine große Anzahl von Beispielen auszugleichen, die Kant daher als den “Gängelwagen der Urteilskraft“ (KrV, B 174) bezeichnet. (Vgl. KrV, B 172ff) Bezogen auf die Wissenschaften sind also zwar alle Regeln lernbar, und es besteht die Möglichkeit über das Nachvollziehen von Beispielen ihre Anwendung anzubahnen, die zum produktiven Umgang mit diesen Regeln und Beispielen notwendige Urteilskraft selbst aber ist – wie die Gabe des Künstlers – ein angeborenes Talent. Diese Überzeugung aus der *Kritik der reinen Vernunft* greift er jedoch in der *Kritik der Urteilskraft*, wie oben gezeigt, nicht mehr auf bzw. verneint die Notwendigkeit eines besonderen Talentes für die Ausübung der Wissenschaften sogar.[12]

7.2.2 Methodenerfinden vs. regelmäßige Produkte

Eine explizite Absage an den Geniestatus des Wissenschaftlers und des Mathematikers im Besonderen und eine klare Abgrenzung vom Künstler, wie er sie im Rahmen der *KU* ausspricht, entwickelt sich erst in Kants kritischer Phase. So weist Piero Giordanetti in einer Reflexion aus der Zeit um 1772 eine „Gleichsetzung zwischen Kunst und Wissenschaft“ (Giordanetti, 1995, S. 410) bezüglich des Geniegedankens nach. Auch eine in den anthropologischen Schriften der 1770er Jahre vorgenommene Unterscheidung zwischen dem Erfinden neuer mathematischer Methoden, das notwendig des Genies bedarf, und den durch Fleiß erlernbaren bestehenden Inhalten der Mathematik gibt Kant später auf (vgl. Giordanetti, 1995, S. 411f). So sieht er schließlich in §47 der *Kritik der Urteilskraft* keinen spezifischen Unterschied zwischen der Arbeit des Mathematikers und dem, „was durch Fleiß vermittels Nachahmung erworben werden kann“ (KU, §47, S. 183) und begründet dies damit, dass auch die Hervorbringung neuer mathematischer Theorien „auf dem natürlichen Wege des Forschens und Nachdenkens nach Regeln“ liege (KU, §47, S. 183). Mathematischer Fortschritt entsteht durch direktes Erschließen neuer Regeln aus bereits bestehenden bekannten (lernbaren) Regeln, während der Künstler die Regel jeweils ganz neu setzen muss. Der kritische Kant schließt also von den (begrifflich explizierten) Produkten der Mathematiker auf deren Entstehungsprozess. Dabei berücksichtigt er ein mögliches kreatives Moment mathematischer Forschung nicht mehr bzw. verneint es sogar. Er argumentiert dabei nach folgendem Muster: Wenn in einem mathematischen Beweis jeder Schritt begrifflich nachvollzogen werden kann und auf den nächsten folgend schließlich zum Erfolg führt, dann waren auch für den Mathematiker, der den Beweis notiert hat, die notwendigen Schritte jeweils eindeutig ersichtlich. Um- und Irrwege, die

[12] Zur Diskussion dieser Sichtweise insbesondere im Kontrast zu Poincaré vgl. auch Kapitel 8.

Auswahl aus einer unendlichen Anzahl möglicher Schritte, der Weg von der Beweisidee zum aufgeschriebenen Endprodukt und all dies wird dabei nicht beachtet bzw. als unbedeutend eingeschätzt. Dies ist umso erstaunlicher, als solche Facetten des „Methodenerfindens", wie skizziert, in den früheren Überlegungen für Kant noch den Geniestatus des Mathematikers rechtfertigten.

Ähnlich der kantischen Einschätzung in den vorkritischen Arbeiten sehen auch Zeitgenossen Kants die Regelmäßigkeit der mathematischen Produkte und den Künstlerstatus des Mathematikers nicht als Gegensatz. So schreibt etwa Novalis (Friedrich Freiherr von Hardenberg 1772–1801):

> „Die Mathematik ist ächte Wissenschaft – weil sie gemachte Kenntnisse enthält – Produkte geistiger Selbstthätigkeit – weil sie methodisch genialisiert. Sie ist Kunst, weil sie genialisches Verfahren in Regeln gebracht hat – weil sie lehrt Genie zu seyn – weil sie die Natur durch Vernunft ersetzt." (zitiert nach Radbruch, 2009, S. 18)

Zu dieser Einschätzung kann Novalis kommen, da er Knut Radbruch folgend zu den mathematischen Gegenstände eine der kantischen ähnliche Haltung einnimmt, darüber hinaus aber „einen wesentlich umfassenderen Horizont intellektueller Produktivität zugrunde [legt], der nicht nur für die Gegenstände der Mathematik, sonder für die gesamte Mathematik als Rahmen fungiert, und zwar für ihre Konzeption, Intention, Architektur und Dramaturgie" (Radbruch, 2009, S. 18f). Novalis kann somit durch die Integration der Tätigkeit im Umgang mit den Gegenständen der Mathematik und der Wirkung auf die beteiligten Personen die reine Produktperspektive erweitern und so die Mathematik sowohl begründet den Wissenschaften als auch der Kunst zuordnen sowie ein mathematisches Genie annehmen.[13]

Christian Helmut Wenzel diskutiert in diesem Zusammenhang insbesondere ein Zitat aus *Reflexion 922*. Dort beschäftigt sich Kant ebenfalls mit den Eigenschaften des künstlerischen Genies in Abgrenzung etwa zum regelhaften „Mechanismus" in den Wissenschaften. Ähnlich der Ausführungen in der *Kritik der Urteilskraft* hält er in dieser Notiz aus den späten 1770er Jahren fest, dass die „Freyheit des talents von der Leitung und dem Zwange der Regeln [. . .] in einigen schönen Künsten nothwendig" (Refl. 922, AA XV, S. 409) sei. Dem fügt Kant später die von Wenzel diskutierte Stelle hinzu, dass die Mathematik „an sich selbst lauter Regel" (Refl. 922, AA XV, S. 410) sei. Wenzel widerspricht mit dem Hinweis darauf, dass es keine Regel gebe, die die Wahl der Regeln vorschreibe. Vielmehr scheine es erst im Nachhinein, *als ob* der gewählte auch der einzig notwendige Weg sei. Für Wenzel folgt daraus, dass es in der Mathematik nicht den von Kant postulierten „natürlichen Weg des Forschens und Nachdenkens" (s.o.) gebe und dass ein Mathematiker daher auch nicht jeden Schritt der mathematischen Erfindung nachvollziehbar machen könne (vgl. Wenzel, 2005, S. 135f):

[13] Radbruch stellt darüber hinaus fest, dass Novalis „mit dieser originellen Idee in den Jahren der Frühromantik übrigens nicht allein" (Radbruch, 2009, S. 19) stehe.

> „The steps are ‚intuitive' in the sense that we can reproduce them, that they do not violate other mathematical rules, that they make sense, and that they are part of a theory that works as far as we can see at the time and within a certain framework. The steps are intuitive in this sense, but not in an absolute sense, as if no other steps were possible." (Wenzel, 2005, S. 136)

So kommt Wenzel zu dem Schluss, dass zwischen „mathematics" und „doing mathematics" eine Unterscheidung zu machen sei. Darin sieht er gerade eine Parallele zur Dichtung, wo ebenfalls ein Unterschied zwischen Lesen und Dichten bestehe (vgl. Wenzel, 2005, S. 134f).[14] Damit favorisiert Wenzel die Argumentation aus Kants früheren Werken, Mathematiker und Künstler aufgrund des Methodenerfindens in der Mathematik bezüglich ihres Geniestatus' gleich zusetzen. Ob daraus auch Parallelen zwischen den Rezipienten von Kunst (Dichtung) und Mathematik zu ziehen sind, mithin es also doch zu einem genuin ästhetischen Urteil über Mathematik kommen kann, bleibt zu klären.

Wenzels Argumentation kann durch den Vergleich von Mathematik und den kantischen Ausführungen zur Musik m.E. deutlich gestützt werden. So weist Kant mit Blick auf die Musik der mathematisch gegebenen Regel der Produkte eine zentrale aber dennoch untergeordnete Rolle zu: Da im Falle der Musik nicht die Sprache das formgebende Element sein könne, sondern die zugrunde liegende ästhetische Idee allein durch die Tonfolge, Harmonie und Rhythmus transportiert werde, welche wiederum mathematisch beschreibbar sind, werde die mathematische Form zur notwendigen Voraussetzung der musikalischen Wirkung. Dabei ist es auch diese mathematische Regelhaftigkeit, auf der nach Kant die Allgemeingültigkeit des musikalischen Geschmacksurteils beruht. Gleichwohl macht Kant unmissverständlich klar, dass die Mathematik „an dem Reiz und der Gemütsbewegung, welche die Musik hervorbringt [...] nicht den mindesten Anteil„ (KU, §53, S. 220) hat.[15] Obgleich also ein Musikstück wie ein Mathematischer Beweis in Gänze mathematisch beschreibbar ist, evoziert es beim Rezipienten einen ästhetischen Genuss und macht eine ästhetische Idee erkennbar. Auch spricht Kant dem Komponisten nicht den Geniestatus ab, obwohl seine Produkte mittels mathematischer Regeln begrifflich fassbar sind. Hier schließt er also nicht wie im Fall der Mathematik vom

[14] Dabei weist Wenzel darauf hin, dass in der historischen Entwicklung ein Stück Mathematik einmal Methode und einmal Gegenstand sein kann und damit einerseits dem Bereich „mathematics itself" und andererseits dem Bereich „doing mathematics" zuzuordnen ist (vgl. Wenzel, 2005, S. 134f). Vgl. dazu auch den methodologischen Vorschlag Moritz Epples, in mathematikhistorischen Untersuchungen insbesondere das „mathematische Handeln" in den Blick zu nehmen, und sich diesem über die Unterscheidung von „epistemischen Gegenständen" und „epistemischen Techniken" zu nähern (Epple, 2000, S. 149f).

[15] Die Werke der Tonkunst beschreibt Kant hier also als „Muster durch Mathematik" (vgl. 1.1.1), würde man aber von der regelgebenden Funktion der Mathematik auf ihren Kunstcharakter oder einen eigenen ästhetischen Wert schließen, käme das wohl einer der in §44 beschriebenen Wortverwechselungen (vgl. Darstellung S. 166) gleich.

begrifflich vollständig gegebenen Produkt auf die Lernbarkeit des Produktionsprozesses.

Im Rahmen der Geniediskussion in der *Kritik der Urteilskraft* kann Kant somit den Mathematiker nur als Kontrast zum künstlerischen Genie heranziehen, weil die begrifflich fassbare Regelmäßigkeit der jeweiligen Produkte den Ausgangspunkt bildet. So zu argumentieren ist, wie die kantischen Ausführungen zur Musik zeigen nicht zwingend geboten. Wird nun der Entstehungsprozess mathematischer Produkte einbezogen, so ist diese Gegenargumentation nicht mehr haltbar.[16] Dann muss der Schluss zulässig sein, dass die veröffentlichten Produkte der Mathematiker nur scheinen, *als ob* sie in ihrer deduktiven Ordnung schon immer in der Welt bestanden hätten und jeder Schritt notwendig auf den nächsten folgen müsse. Obwohl die Entstehung etwa eines Beweises oder einer Theorie eine Geschichte hat und im Allgemeinen nicht „geradlinig“ verläuft, wenn etwa vom zu Beweisenden „rückwärts“ auf Bekanntes gearbeitet wird, werden diese Spuren im notierten Endprodukt verwischt.[17] Dass Kant diesen Als-ob-Charakter der Mathematik nicht aufgreift ist mindestens bemerkenswert, da er ein ganz ähnliches Konstrukt für die schöne Kunst ausmacht. So beschreibt er in §45 das Verhältnis der schönen Kunst zur Natur und kommt zu folgender Charakterisierung:

> „Schöne Kunst ist eine Kunst, sofern sie zugleich Natur zu sein scheint.“ (KU, §45, S. 179)

Obgleich ein Kunstwerk einer Zweckmäßigkeit unterliegt und es nach bestimmten vorher gesetzten Regeln entstanden ist, muss es diese „Spuren verwischen“ und erscheinen, *als ob* es ein Naturprodukt wäre. Als Natur erscheint ein Kunstwerk gerade dann, wenn „zwar alle Pünktlichkeit in der Übereinkunft mit Regeln [...] angetroffen wird; aber ohne Peinlichkeit [...], ohne eine Spur zu zeigen, daß die Regel dem Künstler vor Augen geschwebt“ (KU, §45, S. 180) habe.[18]

7.3 Über die Anschauung hinaus

7.3.1 Ästhetische Idee vs. Verstandesbegriff

In §49 wendet sich Kant zunächst vom Künstler ab und einer Eigenschaft schöner Kunstwerke zu, welche Geschmacksurteile über diese erst möglich macht: Ein

[16] Wie bereits der Hinweis auf das von Kant geforderte Talent zur Urteilskraft zeigt, gilt diese Annahme nicht nur bezogen auf die Aussagen anderer Mathematiker oder aktueller Mathematikphilosophen, sondern auch mit Blick auf Kants eigene Theorie von der mathematischen Konstruktion.

[17] Vgl. auch die Vergleiche der Schaffensprozesse in Kunst und Mathematik unter 6.1 und die Diskussion in Kapitel 8.

[18] In der Mathematik ist es also gerade umgekehrt: Der mathematische Aufschrieb weist nur „Peinlichkeit“, also Genauigkeit und Regelmäßigkeit auf, ohne eine Spur zu zeigen, dass die Regel dem Mathematiker nicht zu jeder Zeit vor Augen schwebte.

Kunstwerk muss Kant folgend „Geist“ haben, d.h. ihm muss ein die Gemütskräfte belebendes Element eigen sein (vgl. KU, §49, S. 192). Solcher „Geist“ wird einem Produkt der schönen Kunst gerade dann zugeschrieben, wenn in ihm *ästhetische Ideen* zur Darstellung kommen. Wie der Geniebegriff der zentrale Punkt in Bezug auf die Produzenten schöner Kunst ist, so spielt der Begriff der ästhetischen Idee damit eine zentrale Rolle für die Bewertung ihrer Produkte.

> „Unter einer ästhetischen Idee aber verstehe ich diejenige Vorstellung der Einbildungskraft, die viel zu denken veranlaßt, ohne daß ihr doch irgendein bestimmter Gedanke, d.i. Begriff, adäquat sein kann, die folglich keine Sprache völlig erreicht und verständlich machen kann.“ (KU, §49, S. 192f)

Als Anschauung, die nicht in Gänze begrifflich gefasst werden kann, ist die ästhetische Idee Kant folgend das „Gegenstück“ zur Vernunftidee als einem „Begriff [. . .], dem keine Anschauung (Vorstellung der Einbildungskraft) adäquat sein kann“ (KU, §49, S. 193), da es sich hierbei um transzendente Begriffe handelt (vgl. KU, §57, S. 239).[19] In beiden Fällen geht es um „Vorstellungen“, die nach Kant explizit niemals zur Erkenntnis werden können (vgl. KU, §57, S. 240). Damit unterscheidet sich sowohl die ästhetische als auch die Vernunftidee nach Kant von den für die Mathematik zentralen „Verstandesbegriffen“. Für diese gilt, dass „der ihnen korrespondierende Gegenstand [. . .] jederzeit in der Anschauung (reinen oder empirischen) gegeben werden können“ (KU, §57, S. 240) muss.

Darius Koriako sieht in der Kantischen Bestimmung der ästhetischen Idee dennoch Parallelen zu dessen Mathematikverständnis: So ist Kunst und Mathematik gemeinsam, dass die zu Grunde liegenden Begriffe in der Anschauung gegeben sind, dass „sie nicht durch Allgemeinbegriffe re-präsentieren, sondern durch das Beispiel das Gemeinte sinnlich faßbar präsentieren“ (Koriako, 1999, S. 157). Außerdem stellt Koriako heraus, dass sowohl mathematische als auch ästhetische Urteile bei Kant auf den Grundformen Raum und Zeit beruhen. Die Urteilsgrundlage ist also in beiden Bereichen für alle Subjekte gleich gegeben, so dass jeweils mindestens von einer allgemeinen Zustimmung zum Einzelurteil ausgegangen werden kann, Urteile in Kunst und Mathematik also den selben „Gültigkeitsmodus“ aufweisen (vgl. Koriako, 1999, S. 165).[20] In beiden Bereichen sieht Koriako somit eine ähnliche „epistemische Struktur der Anschauung“ (Koriako, 1999, S. 154) und hält zusammenfassend fest:

[19] Vgl. dazu etwa die Ausführungen zum mathematischen Umgang mit dem Unendlichen im Rahmen der *Kritik der reinen Vernunft* (B536ff).

[20] Koriako zitiert dazu *Reflexion 672*: „Das was am Gegenstande gefält und was wir als eine Eigenschaft desselben ansehen, muß in dem bestehen, was vor jedermann gilt. Nun Gelten die Verhältnisse des Raumes und der Zeit vor jederman, welche Empfindungen man auch haben mag. Demnach ist in allen Erscheinungen die Form allgemein gültig; was also der Regel der Coordination in Raum und Zeit gemäß ist, daß gefält nothwendig jederman und ist schön.“ (Zitiert nach Koriako, 1999, S. 165)

> „Dies aber: die gegenständliche Orientierung plus Verallgemeinerbarkeit ist das übereinstimmende Merkmal der mathematischen und der ästhetischen Erkenntnis." (Koriako, 1999, S. 159)

Koriako macht durch die vergleichende Untersuchung des Kantischen Mathematikkonzeptes auf der einen und seiner Kunstauffassung auf der anderen Seite interessante Ähnlichkeiten sichtbar, die Kant selbst so jedoch nicht gesehen oder wenigstens nicht expliziert hat. Für Kant bildet die Mathematik mindestens im Rahmen der *dritten Kritik* ausdrücklich den Kontrast zur Kunst, wobei er endlich auch die Möglichkeit „ästhetischer Erkenntnis", mit dem Hinweis darauf, dass die Regeln der Kunst nicht begrifflich gegeben sind, ausdrücklich ausschließt (s.o.). Daher ist es m.E. zu weit gegriffen, wenn Koriako resümiert, dass sich „für Kant" Mathematik und Kunst in ihren „epistemischen Strukturen" vereinigen (vgl. Koriako, 1999, S. 166).

7.3.2 Die Rolle der Einbildungskraft in Kunst und Mathematik

Zentral für Kants Konzept der ästhetischen Idee ist die Rolle der Einbildungskraft. Insbesondere kommt die Fähigkeit dieses Vermögens zum Tragen, über einen bestimmten Begriff hinaus zu gehen und den Blick auf ein in diesem Begriff nicht enthaltenes Feld zu führen. In diesem Sinne wird die Einbildungskraft „schöpferisch" tätig, indem sie „den Begriff auf unbegrenzte Art ästhetisch erweitert" (KU, §49, S. 194). Folgt man der oben zitierten Begriffsbestimmung („Unter einer ästhetischen Idee aber verstehe ich diejenige Vorstellung der Einbildungskraft, die viel zu denken veranlaßt, ohne daß ihr doch irgendein bestimmter Gedanke, d.i. Begriff, adäquat sein kann [...]"), so ist damit nicht nur eine Bereicherung auf der emotionalen Ebenen gemeint. Vielmehr wird der Verstand angestoßen, in eine Vielzahl unterschiedlicher Richtungen zu denken und frei zu arbeiten, ohne dass diese Möglichkeiten als Begriffe für den Verstand greifbar werden könnten. Auf diese Weise evoziert die ästhetische Idee hinter einem Kunstwerk beim Rezipienten das unter 4.1.1 ausführlich beschriebene freie Spiel der Erkenntniskräfte und stellt damit eine Voraussetzung für ein Geschmacksurteil dar.

Diese Funktion der Einbildungskraft in der Kunst greift Anthony T. Winterbourne auf und stellt sie der Rolle dieses Vermögens in Kants Konzept mathematischer Konstruktion gegenüber. So weist er über verschiedene Analogien „deep connections between Kant's views on the nature of imagination in art, and the doctrine of the Schematism from the Critique of Pure Reason" (Winterbourne, 1988, S. 266) nach, die Kant selbst aber nicht aufgezeigt hat: Winterbourne sieht dabei sowohl in der Entstehung der Kunst als auch in der mathematischen Konstruktion einen kreativen Prozess unter maßgeblicher Beteiligung der produktiven Einbildungskraft. Dabei werde in beiden Bereichen die Einbildungskraft genutzt, um durch den Einzelfall etwas Allgemeines auszudrücken; im Falle der Kunst die ästhetische

Idee, im Bereich der Mathematik der Verstandesbegriff (vgl. Winterbourne, 1988, S. 267). Bezogen auf die mathematischen Konstruktionen wirkt die Einbildungskraft nach Kant durch die Erzeugung von Schemata als nur in der Vorstellung existierender Zwischeninstanzen von Verstandesbegriffen und sinnlich wahrnehmbaren Bildern dieser Begriffe (vgl. KrV, B177ff).[21] Hieraus ergibt sich für Winterbourne nun folgende Parallele zur Kunst:

> „Just as the productive imagination of the geometrician produces that which expresses a concept and serves as a schema for the production of particular images (empirical intuitions), so the artistic genius produces that which expresses an Idea and serves as an exemplar for the production of particular works of art." (Winterbourne, 1988, S. 275)

Dies wiederum führt für Winterbourne zur „signifikantesten Analogie" der beiden Gebiete: Sowohl in der Kunst als auch in der Mathematik werden Anschauungen von Objekten erzeugt, die an sich nicht sinnlich wahrnehmbar aber dennoch Produkte menschlichen Handelns sind, von Begriffen in der Mathematik und Ideen innerhalb der Kunst. Wie das vorstehende Zitat zeigt, ist das in beiden Bereichen maßgebliche Vermögen für Winterbourne die produktive Einbildungskraft, was ihn weiter darauf schließen lässt, dass auch für den kritischen Kant die Stücke der Mathematik, den Kunstwerken gleich, Produkte kreativer Prozesse sein müssen (vgl. Winterbourne, 1988, S. 275f).

Das aber würde bedeuten, dass der Kantische Schluss, dass zur mathematischen Konstruktion kein Genie erforderlich ist, nicht zulässig wäre ohne im Rahmen der dritten *Kritik* der ersten zu widersprechen. Es ist also die Frage zu klären, ob die von Winterbourne herausgearbeitete Analogie einen impliziten Standpunktwechsel Kants bezüglich seiner Mathematikauffassung anzeigt. Ein Schlüssel zu diesem Problem könnte in der innerhalb der *Kritik der reinen Vernunft* vorgenommenen Unterscheidung zwischen produktiver und reiner Einbildungskraft liegen:

> „Das Bild ist ein Produkt des empirischen Vermögens der produktiven Einbildungskraft, das Schema sinnlicher Begriffe (als der Figuren im Raume) ein Produkt und gleichsam ein Monogramm der reinen Einbildungskraft a priori [...]" (KrV, B181)

Zur Erzeugung mathematischer Schemata ist also die „reine Einbildungskraft a priori" notwendig. Dies geschieht vor aller Anschauung auf der Grundlage der Verstandesbegriffe. Die produktive Einbildungskraft kommt erst zum Tragen, wenn auf der Grundlage der nur in der Vorstellung existenten Schemata Bilder entstehen.[22] Innerhalb der Kunst fungiert nun aber ein Kunstwerk nach Kant gleichzeitig als Produkt eines Künstlers und als Modell für folgende Genies. Winterbournes

[21] Zur Funktion der Schemata innerhalb der mathematischen Konstruktion, wie Kant es in der *Kritik der reinen Vernunft* ausführt, siehe auch Shabel (2003) S. 109ff.

[22] Zur Funktionsweise der produktiven Einbildungskraft im Rahmen des Kantischen Konzepts der mathematischen Konstruktion siehe Young (1992), insbesondere S. 172f.

Parallele aufgreifend müsste demnach ein und dasselbe Kunstwerk je nach Situation sowohl dem Schema als auch dem Bild entsprechen. In beiden Fällen ist das Kunstwerk aber eine *empirisch gegebene* Präsentation einer ästhetischen Idee, so dass jeweils das Vermögen der produktiven Einbildungskraft – hier des erschaffenden Künstlers, dort des vom Einzelfall abstrahierenden „Schülers“ – zum Zuge kommt.
Die Einbildungskraft spielt also sowohl innerhalb des mathematischen wie auch des künstlerischen Schaffens für Kant die zentrale Rolle. Bei mathematischen Konstruktionen kommt es allerdings zu einem Zusammenspiel von reiner und produktiver Einbildungskraft, während es im Bereich der Kunst nur um die produktive Einbildungskraft geht. Im ersten Fall werden außerhalb der Anschauung existierende Verstandesbegriffe umgesetzt, im zweiten werden die Regeln aus der Anschauung entnommen. Dies führt auch dazu, dass im Rahmen der Mathematik ein Übergang von der reinen zur empirischen Anschauung vollzogen wird, während sich die Präsentationen innerhalb der Kunst nur im Empirischen bewegen. So wird es vor dem Hintergrund der Kantischen Unterscheidung wenigstens fraglich, im Falle mathematischer Konstruktion von „kreativen Prozessen“ zu sprechen.

Auf die besondere Rolle der reinen Einbildungskraft a priori bezogen auf die Mathematik weisen auch Leon Chernyak und David Kazhdan hin. Sie schließen hieraus auf einen speziellen Stand, der der mathematischen Kreativität in Kants kritischer Philosophie zukomme und sie vom philosophischen Denken abgrenzbar mache (vgl. Chernyak und Kahdan, 1997, S. 215f). Ihr Ansatz räumt dabei der Sprache im Zusammenwirken von Einbildungskraft und Verstand einen zentralen Platz ein, der sie schließlich auch Parallelen zwischen Mathematik und Kunst insbesondere der Dichtung ziehen lässt. Diese sehen Chernyak und Kazhdan auch bei Kant im *Opus postumum* (vgl. Chernyak und Kahdan, 1997, S. 221f), wo er innerhalb seiner Überlegungen zum Verhältnis von Mathematik, Philosophie und Naturwissenschaften anmerkt, dass „Mathematuk [sic.] reine Dichtung“ sei, und sie sich daher „subjektiv“ mit der Poesie vereinigen lasse (Opus postumum, AA XXII, S. 490).[23]

Mit den unterschiedlichen Funktionen der Einbildungskraft sind nach Kant auch dem Verstand in Kunst und Mathematik verschiedene Möglichkeiten gegeben:

> „[...] so erreicht bei einer ästhetischen Idee der Verstand, durch seine Begriffe, nicht die ganze innere Anschauung der Einbildungskraft, welche sie mit einer gegebenen Vorstellung verbindet.“ (KU, §57 Anmerkung I, S. 242)

[23] An dieser Stelle äußert sich Kant nicht weiter zu dieser möglichen Vereinigung. Eine Interpretation wäre sicher interessant, würde aber über die hier im Zentrum stehenden Untersuchungen zu Kants Ausführungen innerhalb der *Kritik der Urteilskraft* weit hinausführen. Daher wird auch auf die sprachphilosophische Argumentationslinie von Chernyak und Kazhdan hier nicht weiter eingegangen.

Daher können die einem Kunstwerk zugrunde liegenden Ideen und seine Schönheit nur im freien Spiel von Einbildungskraft *und* Verstand erfahren, nicht aber wie bei einem Stück Mathematik allein auf verstandesmäßig erfassbare Begriffe zurückgeführt werden (vgl. 4.1.1). Diese Überzeugung Kants könnte auch eine Erklärung dafür liefern, dass er keinen Vergleich zwischen Mathematik und Musik zieht und sie ob ihres Kunststatus unterschiedlich bewertet, obwohl die Produkte hier wie dort mathematisch fassbar sind. So regt die Musik insbesondere die Gefühlswelt an und lässt darüber die ästhetische Idee nach dem „Gesetze der Assoziation" (KU, §53, S. 219) aus einem „zusammenhängenden Ganzen einer unnennbaren Gedankenfülle" (KU, §53, S. 220) erkennbar werden. Obgleich also ihre Produkte auf mathematischen Formen beruhen, ist die Wirkung eines Musikstücks „unennbar" also nicht verstandesmäßig fassbar.[24] Der Mathematik dagegen gesteht Kant keine emotionale Wirksamkeit zu, die über den Verstand hinaus geht.
Dies korrespondiert mit der oben beschriebenen Auffassung Kants, dass das Umsetzen von Verstandesbegriffen in empirische Anschauungen in der Mathematik lehr- und lernbar ist, für die empirische Präsentation der ästhetischen Ideen aber ein besonderes Talent, also Genie erforderlich ist (vgl. 7.2). So wird im Abschnitt *Die Dialektik der ästhetischen Urteilskraft* das Konzept der ästhetischen Idee mit dem vorher entwickelten Geniegedanken in Verbindung gebracht: Für Kant kann das Genie auch als „das Vermögen ästhetischer Ideen" (KU, §57 Anmerkung I, S. 242) bestimmt werden. In den Produkten des Genies gibt „die Natur (des Subjekts), nicht ein überlegter Zweck, der Kunst [...] die Regel" (ebd.).

7.4 Probiersteine für den Kunstcharakter der Mathematik

Auch innerhalb seiner Ausführungen zur Kunst nutzt Kant wie dargestellt an zentralen Stellen das Mathematische als Kontrast, um insbesondere seine Konzepte des künstlerischen Genies und der ästhetischen Idee zu konkretisieren. Somit erhalten hier der Mathematiker und seine Produkte einen prominenten Platz innerhalb einer wegweisenden Theorie der schönen Kunst, und die in Kapitel 4 dargestellte Einschätzung Kants zu den Rezipientenurteilen über das „Schöne" in der Mathematik wird durch den Blick auf die Produzenten erweitert.

[24] Das Primat des Emotionalen führt Kant aber auch zu einer Abwertung der Musik gegenüber anderen Künsten, jedenfalls bezüglich der Hoffnung, mittels der Kunst zu einer Kultivierung der Rezipienten beizutragen: „Die bildenden Künste gehen ihr also in diesem Betracht weit vor; denn indem sie die Einbildungskraft in ein freies und doch zugleich dem Verstande angemessenes Spiel versetzten, so treiben sie zugleich ein Geschäft indem sie ein Produkt zustande bringen, welches den Verstandesbegriffen zu einem dauerhaften und für sich selbst sich empfehlenden Vehikel dient, die Vereinigung der selben mit der Sinnlichkeit und so gleichsam die Urbanität der oberen Erkenntniskräfte zu befördern." (KU, §53, S. 221)

Für die Mathematikästhetik kann Kants explizite Abgrenzung darüber hinaus für mögliche Unzulänglichkeiten sensibilisieren, wenn der Mathematiker als Künstler dargestellt und der Mathematik ein Kunstcharakter zugesprochen wird. So können auf der Grundlage der Kantischen Gegenargumentation neuralgische Punkte für die Untersuchung zum Kunststatus der Mathematik markiert werden. Dabei sind diese Punkte natürlich zunächst Kants Kunstauffassung und seinem speziellen Mathematikbild geschuldet. Auch die Relevanz der im Folgenden geschilderten Themengebiete und Fragen bezogen etwa auf die in Kapitel 6 dargestellten Befürworter des Kunstcharakters der Mathematik muss daher variieren und hängt wiederum von dem jeweils als Referenz herangezogenen Kunst- und Mathematikverständnis ab. Dennoch scheinen m.E. die hier aus Kants Absage an den Kunststatus der Mathematik extrahierten Themengebiete zumindest geeignet, die verschiedenen Begründungsansätze zum Kunstcharakter der Mathematik vergleichend einzuordnen und aus einer definierten Perspektive zu hinterfragen.

Wie unter 7.2 dargestellt, spricht Kant den Mathematikern das für einen echten Künstler notwendige angeborene Genie ab, indem er auf die Regelhaftigkeit ihrer Produkte verweist. In einem Beweis etwa folgt jeder Schritt logisch korrekt und kann (im Nachhinein) expliziert werden. Die niedergeschriebenen oder in einem Vortrag präsentierten Schlüsse können andere entsprechend gebildete Personen daher nachvollziehen. Die dazu nötigen Grundlagen können in einem systematischen Lehrgang etwa im Rahmen des Mathematikstudiums weitergegeben werden. Daraus folgert Kant, dass auch das Mathematiktreiben prinzipiell lehr- und lernbar ist, und mathematische Innovationen ebenso wie das Nachvollziehen mathematischer Texte keines besonderen angeborenen Talentes bedürfen (vgl. auch 7.2.1).
In der Diskussion um den Kunstcharakter von Mathematik ist zum einen also zu klären, ob und inwiefern das Hervorbringen eines schönen Stücks Mathematik gelernt werden kann. Damit einher geht zum anderen die Frage nach den Voraussetzungen, die ein schaffender Mathematiker notwendig erfüllen muss. Es sind also insbesondere die *persönlichen Bedingungen der Produzenten* und der *Entstehungsprozess* in den Blick zu nehmen. Die Produkte allein geben hier wenig Aufschluss.

Um einen angehenden Künstler anzuleiten, müssen einerseits gewisse handwerkliche und technische Grundfertigkeiten geschult werden und andererseits bedarf es der Werke anderer als Modell. Das künstlerische Genie ist nun in der Lage, in diesen Modellen die zugrunde liegenden Prinzipien zu sehen und diese in eigenen Werken kreativ umzusetzen. Der Mathematiker muss dagegen die Regeln nicht aus einzelnen Beispielen abstrahieren, sie können ihm explizit gelehrt werden (vgl. 7.2.1).
Der Rolle von Beispielen für die Entstehung neuer Werke muss also besonderes Augenmerk geschenkt werden. Diese bildet ein Spannungsfeld mit der Rolle des systematisch lehrbaren Wissens innerhalb der Mathematik. Es stellt sich dabei die Frage nach dem *Wert bestehender Stücke der Mathematik bzw. des weitergegebenen Wissens* für das mathematische Schaffen.

Wie unter 7.1 dargestellt darf Kant folgend ein Gegenstand, um als Kunstwerk angesehen zu werden, nicht nur angenehm für die Sinne sein, sondern muss vielmehr etwas den Verstand Anregendes bereit halten. Ein Kunstwerk muss, wie Kant es ausdrückt, „Geist“ haben, mithin also eine „ästhetische Idee“ transportieren (vgl. 7.3.1). Ein Kunstwerk steht demnach nicht für sich, sondern trägt ein mentales Konstrukt, das nur in der Kunst ausgedrückt werden kann aber über das konkrete Werk hinaus weist. So regt einerseits ein echtes Kunstwerk beim Rezipienten das „freie Spiel der Gemütskräfte“ an (vgl. 4.1.1). Andererseits gilt, wie unter 7.3.2 diskutiert die Umsetzung einer abstrakten Idee in einem Kunstwerk als kreativer Akt eines Genies.
Mit Blick auf die Produkte der Mathematiker ist also zu klären, inwiefern sie etwas transportieren, das im konkret gegebenen Text nicht explizit enthalten ist bzw. ob das konkret gegebene mathematische *Produkt nur der Ausdruck* für etwas darüber hinaus weisendes ist. Die Aufmerksamkeit muss damit auf der Rolle der Einbildungskraft liegen. Damit einher geht bezogen auf die Entstehung dieser Gegenstände die Frage, inwieweit dabei von einem *kreativen Prozess* die Rede sein kann. Bezogen auf die Rezeption solcher Gegenstände ist entscheidend, ob im Nachvollziehen die hinterliegende Idee rein verstandesmäßig zu erfassen ist.

Insgesamt zeigen insbesondere die Untersuchung zur Kantischen Unterscheidung von Genie und großem Kopf, dass eine Entscheidung über den Künstlercharakter des Mathematikers davon abhängt, ob nur die Produkte oder auch ihr Entstehungsprozess in den Blick genommen werden (vgl. 7.2). Die unter 7.3.2 dargestellten Ergebnisse zur Rolle der Einbildungskraft und dem Verhältnis von konkretem Kunstwerk und ästhetischer Idee weisen darüber hinaus darauf hin, dass ein weiteres entscheidendes Moment darin besteht, wie eng der Begriff der Produkte gefasst wird. Die Entscheidung darüber, was im Begriff des Kunstwerks mitgedacht wird, gibt damit den Antworten aller hier abschließend zusammengefassten Fragen die Richtung vor und ist somit insbesondere auch für die Mathematikästhetik von Bedeutung.

Kapitel 8

Eine Theorie der Kunstform Mathematik

Soll die Mathematikästhetik als Subdisziplin einer Theorie der Kunst aufgefasst und betrieben werden, so ist eine Voraussetzung unabdingbar: Der betrachtete Gegenstand muss eine Kunstform sein oder mindestens begründet als solche behandelt werden dürfen. In Kapitel 6 wurde eine Vielzahl von Ansätzen vorgestellt und diskutiert, die diese Voraussetzung grundsätzlich bejahen und daraus interessante und fruchtbringende Schlüsse ziehen und ausführen. Mit der Position Immanuel Kants dagegen wurde eine in einer ausführlichen Kunsttheorie verankerte Argumentation gegen die Möglichkeit, die Mathematik als Kunst und insbesondere den Mathematiker als Künstler zu betrachten, vorgestellt. Im Folgenden werden nun die zum Ende von Kapitel 7 herausgearbeiteten neuralgischen Punkte der Gegenargumentation aufgegriffen und mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 6 erneut diskutiert. In einem zweiten Schritt wird dann die Frage nach dem Kunstcharakter der Mathematik vor dem Hintergrund der bisherigen Ergebnisse erneut gestellt und ein Antwortversuch gewagt.

8.1 Diskussion der Kantischen Gegenargumente

Zu den in Kapitel 7 herausgearbeiteten Punkten, an denen sich die Kantische Gegenargumentation insbesondere entspinnt, zählt zum einen der schaffende Mathematiker und die mathematische Praxis (vgl. 7.4): Im Fokus stehen hier die persönlichen Bedingungen der Produzenten, wie sie sich in den Produkten einerseits und im Entstehungsprozess der Mathematik andererseits niederschlagen. Eine entscheidende Rolle spielen dabei die Möglichkeiten, der Lehr- und Lernbarkeit des mathematischen Schaffens. Zum anderen stehen die Produkte im Zentrum des Interesses und die Frage, ob und inwiefern sie einen über den eigentlichen Inhalt hinausgehenden ästhetischen Gehalt erkennen lassen. Sowohl auf die Einwände Kants gegen den Geniestatus des Mathematikers, als auch seine Argumente gegen den Kunstwerkcharakter mathematischer Produkte soll hier nun skizzenhaft mit Ansätzen und Ergebnissen aus Kapitel 6 geantwortet werden.

Zum mathematischen Genie

Kant gesteht den Mathematikern höchstens den Status „großer Köpfe“ zu, die sich vom „mühseligsten Nachahmer und Lehrlinge“ nur graduell unterscheiden. Das mathematische Schaffen ist demzufolge prinzipiell lernbar und steht somit im Gegensatz zum angeborenen Talent des künstlerischen Genies. (Vgl. 7.2.1) Dem stehen die unter 6.1 dargestellten Ansätze zur Arbeitsweise des schaffenden Mathematikers grundsätzlich entgegen: Stellvertretend kann hier Henri Poincaré angeführt werden, für den es als „selbstverständlich“ gilt, dass „nicht jeder zu neuen Entdeckungen befähigt ist“ (Poincaré, 1914, S. 36), und nur relativ wenige Menschen seien mit der für die mathematische Erfindung nötigen ästhetischen Intuition begabt. Dabei bestehe ein prinzipieller Unterschied zwischen jenen, die „über eine ungewöhnliche Gedächtnisstärke und über eine große Konzentrationskraft“ verfügen und damit in der Lage sind, durch Auswendiglernen Mathematik zu verstehen und anzuwenden, und jenen, die außerdem schöpferisch tätig werden können (Poincaré, 1914, S. 39).
Das Hauptargument Kants gegen den Geniecharakter des Mathematikers entsteht aus der Beobachtung, dass eine mathematische Argumentation im Nachhinein Schritt für Schritt dargelegt und nachvollzogen werden kann, wodurch prinzipiell jeder in die Lage versetzt werden könne, selbst Mathematik hervorzubringen. Dem kann erneut die Meinung Poincarés entgegengesetzt werden, der in *Die mathematischen Definitionen und der Unterricht* den Unterschied zwischen der logischen Prüfung bereits vorliegender Mathematik und der mathematischen Erfindung neuer „Muster der Mathematiker“ deutlich herausstreicht:

> „Die Logik lehrt uns erkennen, ob eine Kombination korrekt ist; aber wozu nützt das, wenn wir nicht die *Kunst* besitzen, zwischen allen möglichen Kombinationen die richtige zu wählen. Die Logik lehrt uns, daß wir auf diesem oder jenem Wege sicher keinen Hindernissen begegnen werden, sie sagt uns nicht, welcher Weg zum Ziele führt. Um dahin zu gelangen, muß man das Ziel von weitem sehen, und die Intuition ist eben die Fähigkeit, welche uns das Sehen lehrt. Ohne Sie würde es dem Mathematiker ergehen wie dem Schriftsteller, der in der Grammatik vollkommen bewandert ist, aber keine Ideen hat.“ (Poincaré, 1914, S. 116, Hervorhebung S.Sp.)

Mit dieser Einschätzung unterstreicht Poincaré den unter 7.2.2 bereits dargestellten Einwand Wenzels gegen die Kantische Argumentation: Die logischen Regeln der Mathematik können begrifflich eindeutig expliziert werden, sie geben aber nicht vor, wie sie zu verwenden sind. Letzteres bedarf der Kreativität und der ästhetischen Intuition[1] – ganz ähnlich der Arbeit des von Kant beschriebenen künstlerischen Genies.

Mathematikästhetische Ideen

Kant folgend sind Kunstwerke Träger ästhetischer Ideen, die es möglich machen, ohne begrifflich gegeben zu sein, Verstand und Einbildungskraft anzuregen und in ein für Geschmacksurteile notwendiges „freies Spiel“ zu versetzen. Einem Kunstwerk wird so ein über den konkret fassbaren Gegenstand hinaus weisender ästhetischer Gehalt zugesprochen.(Vgl. 7.3.1) Wenn im mathematische Schönheitsbegriff genuin ästhetische Elemente identifiziert werden können, die zum Gegenstand gehörig beschrieben werden, so müssen auch in der Mathematik solche ästhetischen Ideen eine Rolle spielen.[2] Die Ergebnisse aus Kapitel 6 liefern weitere Indizien, die insbesondere den Umgang mit den mathematisch-ästhetischen Ideen beschreiben: Grundsätzlich zeigen u.a. die oben vorgestellten Analysen Reviel Netz' (vgl. 149), dass auch das mathematische Kunstwerk also das niedergeschriebene Produkt nicht vollständig logisch determiniert ist und somit Spielräume für die ästhetische Gestaltung bestehen. Dass diese „künstlerische Freiheit“ genutzt wird, um ästhetische Ideen in den mathematischen Hervorbringungen zu realisieren, zeigen nicht nur seine Untersuchungen antiker Beispiele: All die auf ästhetischen Einschätzungen gründenden Urteile des Mathematikwelt-Publikums verweisen auf die Umsetzung. Insbesondere die Möglichkeit, die Mathematik als „ästhetische Kommunikation“ zu sehen (vgl. 6.4.3) muss darauf zurück greifen. Dass Positionen wie die unter 6.3.1 vorgestellten das Nachvollziehen mathematischer Texte mit (ästhetischen) Literaturerlebnissen vergleichen, ist außerdem ein Beleg dafür, dass deren ästhetischer Gehalt nicht (allein) dem gelungenen Vortrag, geschuldet ist.[3] Auch die Identifikation mathematischer Stile auf der Grundlage genuin ästhetischer Eigenschaften (vgl. 6.2) ist nur denkbar, wenn die betrachteten „Muster der Mathematiker“ sich durch Eigenschaften auszeichnen, die über den „rein“ mathematischen Gehalt hinausweisen.
Für Kant spielt sowohl zur Wahrnehmung als auch zur Umsetzung ästhetischer Ideen die (produktive) Einbildungskraft eine besondere Rolle. Auch in seiner Mathematikkonzeption nimmt die Einbildungskraft einen zentralen Platz ein, jedoch mit einer von der Kunst klar unterschiedenen Funktion (vgl. 7.3.2). Diese Unterscheidung wird nicht von allen Autoren geteilt, so dass gerade Konzepte der Einbildungskraft genutzt werden, um den Mathematik-Kunst-Vergleich zu begründen. Dazu zählen u.a. jene, die unter 6.1 dem Künstler Kreativität und phantasievolles Handeln unterstellen. Die große Bedeutung der Einbildungskraft, die für die Mathematik aus der Abstraktheit ihrer Gegenstände erwächst aufgreifend schließt

[1] Vgl. dazu auch die Darstellungen zum mathematischen Schaffensprozess unter 6.1.
[2] Siehe dazu auch die Zusammenschau zur mathematischen Schönheit in Kapitel 5.
[3] Dem mathematischen *Vortrag* gesteht auch Kant gewisse ästhetische Eigenschaften zu (vgl. 4.3.3).

Holger Wille schließlich sogar auf einen „wissenschaftsästhetischen Sonderstatus des Mathematischen“ (Wille, 2004, S. 212):

> „Es gibt in der reinen Mathematik wohl keinen Bereich, in dem die Frage, ob die Wahrheit mathematischen Wissens durch ästhetische Gesichtspunkte konstituiert wird, als illegitim verworfen werden könnte. [...] Die Mathematik wäre als ein wissenschaftsästhetisches Forschungsfeld damit geradezu prädestiniert.“ (Wille, 2004, S. 209)

Sowohl dem Kantischen Einwand gegen das mathematische Genie als auch seinem Einwand gegen mathematischer Produkte eigener ästhetischer Ideen können also Argumente entgegen gesetzt werden. Diese können zwar die Kantische Argumentation gegen den Kunstcharakter der Mathematik nicht vollends entkräftet – dazu unterscheiden sich Voraussetzungen, Ziel und Hintergrund der in Kapitel 6 dargestellten Positionen zu stark von Kants Theorie – jedoch relativieren sie die Einwände soweit, dass ein weiteres Nachdenken über den Kunstcharakter des Mathematischen vor dem Hintergrund eines eher weit gefassten Mathematikverständnisses möglich bleibt.

8.2 Der Kunstcharakter der Mathematik

Es ist naheliegend die Frage, ob ein Beweis als Kunstwerk oder sein Produzent als Künstler gelten kann, anhand bereits existierender Kunstdefinitionen zu diskutieren. Eine solche Herangehensweise birgt jedoch Probleme verschiedener Art: Erstens zeigt sich eine generelle Schwierigkeit, den Begriff der Kunst zu fassen darin, dass innerhalb der allgemeinen Kunsttheorie kein Konsens über eine gültige Definition besteht. Es wird nicht einmal mit Sicherheit davon ausgegangen, dass eine solche überhaupt existieren kann.[4] Die bestehenden Begriffsbestimmungen werden entweder als zu weit, wie etwa die oben vorgestellte Institutionstheorie, oder als zu eng kritisiert, d.h. sie enthalten nicht alles, was allgemein zum Begriff der Kunst zählt bzw. beziehen sich nur auf eine bestimmte Zeit oder einen bestimmten Kulturkreis (vgl. etwa Davies, 2001). Zweitens führt eine Prüfung verschiedener Kunstdefinitionen bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf die Mathematik lediglich zu vagen Anhaltspunkten bezüglich der Ausgangsfrage und auf ein weites Feld darüber hinausweisender Fragen.[5] Die Auswahl eines bestimmten Kunstbegriffs, an dem dann die Mathematik gemessen wird, führt, wie der abschließende Überblick über Kapitel 6 zeigt, drittens zu einer zu stark eingegrenzten Sicht auf die Mathematik. So wird in der Regel lediglich ein Aspekt aus dem Bereich der

[4] Diese skeptische Haltung vertritt etwa Weitz (2002).

[5] Das Feld zu klärender Voraussetzungen reicht von der Frage nach genuin ästhetischen Eigenschaften der Mathematik, über den ontologischen Status mathematischer Gegenstände bis zu den Bedingungen ästhetischer Erfahrungen im Bereich des Mathematischen (vgl. Spies, 2008b). Ein insbesondere über das Konzept der Familienähnlichkeit argumentierender Ansatz ist außerdem bei Reiner (1994) zu finden.

Mathematik herausgegriffen und mit der entsprechenden Facette der Kunst verglichen.

Denis Dutton begegnet dem ersten der genannten Probleme nicht mit dem Versuch einer weiteren Kunstdefinition, sondern mit einer Liste universeller Eigenschaften, die sich aus der Analyse gängiger Kunstbegriffe ergeben. Dabei zieht er sowohl historische Kunstverständnisse als auch die Ergebnisse der Ethnoästhetik mit ein. Duttons sieben „Universal features of art" bieten explizit keine Auflistung hinreichender und notwendiger Kriterien, jedoch ist er der Überzeugung, dass kein kulturelles Phänomen vorstellbar sei, das diesen Eigenschaften genüge und nicht als Kunst gelten könne (Dutton, 2001, S. 210). Im Folgenden soll daher der Frage nachgegangen werden, inwiefern sich die Mathematik im vorgeschlagenen System der „Aesthetic Universals" wiederfindet. Die dritte der oben aufgezeigten Schwierigkeiten ernst nehmend soll hier den in Kapitel 6 vorgestellten Ansätzen keine weitere Einzelposition zur Seite gestellt werden. Vielmehr werden die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel gemeinsam mit der vorgeschlagenen Kontrastierung an den Kantischen Gegenargumenten die Grundlage bilden und als Referenz dienen. Auf diese Weise entsteht einerseits eine systematische Zusammenschau der bisher diskutierten Ergebnisse und andererseits verspricht dies ein möglichst umfassendes Bild der potentiellen Kunstform Mathematik:

„Expertise or virtuosity"

Als erste universelle Eigenschaft beobachtet Dutton, dass die Kunstproduzenten spezielle Voraussetzung erfüllen müssen. Dazu zählt er neben grundlegendem technischen Können auch, dass es Personen gibt, die sich durch ein besonderes künstlerisches Talent auszeichnen und dafür bewundert werden (vgl. Dutton, 2001, S. 210). Bezogen auf die Mathematik zielt diese erste Eigenschaft bereits auf einen der kritischen Punkte, nämlich auf die kontrovers diskutierte Frage nach dem Geniestatus des Mathematikers. Zunächst kann festgehalten werden, dass auch Immanuel Kant den Mathematikern keineswegs die Möglichkeit einer technischen Virtuosität auf ihrem Gebiet abspricht, sondern vielmehr die Fähigkeiten der „Großen Köpfe" anerkennt. Wie die Ausführungen unter 7.2 und die Diskussion unter 8.1 nahelegen, muss diesen großen Köpfen außerdem nur dann ein besonderes künstlerisches Talent und damit der Geniestatus abgesprochen werden, wenn von ihren Produkten auf einen vorbestimmbaren Entstehungsprozess geschlossen wird. Da hier ein umfassendes Bild der mathematischen Kunst gezeichnet werden soll, muss, wie unter 8.1 geschehen, diese Kantische Perspektive durch solche Argumentationen ergänzt werden, die zunächst die Arbeitsweise des Mathematikers in den Blick nehmen. Auf dieser Grundlage zeichnet sich ein schaffender Mathematiker durch mehr aus als eine außergewöhnliche fachliche Expertise. Ihm wird eine (auf ästhetischer Intuition gründende) spezielle Begabung zugeschrieben.[6]

[6] Vgl. 8.1 auf der Grundlage von 6.1.

„Non-utilitarian pleasure“

Mit der zweiten universellen Eigenschaft nimmt Dutton die Wirkung des Kunstwerks auf den Rezipienten in den Blick:

> „Aspects of the embodiment, however, give pleasure in experience aside from these practical or informational/communicative considerations.“ (Dutton, 2001, S. 210)

Ein als Kunstwerk geltender Gegenstand darf nützlich sein, aber und vor allem muss er beim Rezipienten ein davon unabhängiges Vergnügen auslösen können und somit das Potential besitzen, nur um seiner selbst willen zu gefallen. Solches, den Kantischen Terminus aufgreifend, „interesseloses Wohlgefallens“ will Dutton als „ästhetisches Vergnügen“ bezeichnen, wenn der betrachtete Gegenstand ein Kunstwerk ist (vgl. Dutton, 2001, S. 210). Bezogen auf die Mathematik könnte hier zunächst auf die gängig Unterscheidung von reiner und angewandter Mathematik Bezug genommen werden. Diese verweist jedoch nur darauf, dass reine Mathematik nicht betrieben wird, um außermathematischen Anwendungen zu genügen. Die Frage nach dem Status der innermathematischen Nützlichkeit korrespondiert dagegen mit der Diskussion, ob einem Stück Mathematik ein über seine mathematische Aussage hinausgehender Gehalt zugeschrieben werden kann, da es nur so ein von Nützlichkeitserwägungen unabhängiges Vergnügen bereiten kann. Dass diese Voraussetzung für „non-utilitarian pleasure“ nicht so abwegig ist, wie Kants Argumentation es zunächst vermuten lässt, zeigen die oben skizzierten Antworten (vgl. S. 185ff). Darüber hinaus bietet die Untersuchung des mathematischen Schönheitsbegriffs viele Beispiele dafür, dass die mathematisch-ästhetischen Ideen tatsächlich ein Vergnügen am einzelnen Stück Mathematik um seiner selbst willen auslösen können und auch im mathematisch-ästhetischen Urteil die Zweckmäßigkeit zwar eine Rolle spielt, letztlich aber nicht die ausschlaggebende Eigenschaft ist (vgl. 5).

„Style“

Ein erkennbarer Stil stellt Dutton folgend eine zentrale Eigenschaft von Kunstwerken dar. Die stilistischen Eigenheiten dürfen dabei sehr unterschiedlicher Natur und Grundlage sein. Zum Stil eines Werks zählen sowohl durch religiöse Traditionen oder andere kulturelle Konstanten bedingte formale oder kompositorische Eigenheiten als auch Zeugnisse der individuellen Kreativität des Produzenten. Entsprechend beobachtet Dutton in der Entwicklungsgeschichte einer Kunstform sowohl langsame als auch plötzliche Stilwechsel. Obgleich solche Stile in nahezu allen kurlturellen Hervorbringungen denkbar sind, bilden sie eine in der Kunst immer auszumachende universelle Eigenschaft. Daraus folgt für Dutton “it is crucially but not uniquely important to art“ (Dutton, 2001, S. 211). Die Ausführungen unter 6.2 belegen eindeutig, dass auch bezogen auf die Mathematik verschiedene Stile identifizierbar sind. Diese werden, wie von Dutton beschrieben, einerseits kulturellen

Einflüssen zugeschrieben, was den Vergleich zu Stilepochen der Kunstgeschichte erlaubt. Andererseits sind aber auch in Form und Aufbau mathematischer Texte Elemente erkennbar, die auf den individuellen Stil des produzierenden Mathematikers verweisen (vgl. 6.3.2). Bemerkenswert ist dabei weiter, dass einige der identifizierten stilbildenden Eigenschaften mit den in Kapitel 2 herausgearbeiteten Charakteristika mathematischer Schönheit korrespondieren, so dass es sich bei einem solchen Stil der Mathematik mindestens um eine genuin mathematikästhetische Kategorie handelt. Zudem konnte die Relevanz mathematischer Stile insbesondere für mathematikhistorische Betrachtungen dargestellt werden. (Vgl. 6.2.2)

„Criticism“

Als vierte universelle Kunsteigenschaft stellt Dutton die Existenz einer Sprache heraus, mit deren Hilfe einzelne Werke beurteilt, eingeordnet und kritisiert werden können. Die kritische Instanz muss nicht notwendiger Weise in einem eigenen Wissenschaftszweig bestehen, wie es für die bildenden Künste in westlichen Kulturkreisen üblich ist. Die Kritik kann auch auf weniger elaborierter Ebene etwa durch das Publikum oder auch durch die Künstler untereinander auftreten. (Vgl. Dutton, 2001, S. 211) Auch die „Muster der Mathematiker“ werden systematisch einschlägigen Bewertungen unterzogen. Stellvertretend kann hier an die oben zitierte Beschreibung des mathematischen Arbeitens durch Martin Schiralli erinnert werden, in der er parallel zum Künstler bzw. Kunstwissenschaftler dem Mathematiker zuschreibt, die Leistungen anderer zu evaluieren (vgl. S. 125). Dabei wird eine solche Bewertung nicht nur von der Frage geleitet, ob das gesteckte innermathematische Ziel korrekt erreicht wird. Vielmehr sind es Eigenschaften, wie die in Kapitel 2 zusammengestellten mathematikästhetischen Charakteristika, die die mathematische Kritik begleiten. Nicht zuletzt wird dem Ästhetischen bezogen auf die Mathematik eine evaluative Funktion zugesprochen (vgl. z.B. Sinclair, 2006a). Dem Mathematiker als Kritiker steht somit nicht nur grundsätzlich ein zur mathematisch-inhaltlichen Beurteilungen nötiges Vokabular zur Verfügung, sondern er nutzt auch aus dem Bereich der Kunstkritik bekannte Begriffe. Die Kritik im Bereich der Mathematik kann somit sogar als eine (mathematik-)ästhetische beschrieben werden.[7] Argumente, die im Fehlen (professioneller) Kritiker einen den Kunststatus in Frage stellenden Mangel der Mathematik sehen (vgl. 6.4.2), greifen hier nicht, da Dutton die Kritik explizit nicht an einen exklusiven von den Produzenten verschiedenen Personenkreis bindet.

[7] Da Dutton selbst bestätigt, dass „[t]he development of a critical vocabulary and discourse, including criteria for excellence, mediocrity, competence/incompetence, and for failure, [...] intrinsic to almost all human activities outside of art“ (Dutton, 2001, S. 211) ist, rückt durch diese Beobachtung die Mathematik etwas näher an die Künste.

„Imitation“

Dutton beschreibt mit seiner fünften universellen Kunsteigenschaft das Phänomen, dass mit Hilfe von Kunstwerken häufig Erfahrungen der Realität repräsentiert oder imitiert werden (vgl. Dutton, 2001, S. 211). Mindestens bezogen auf die reine Mathematik liegt eine solche Imitation oder Repräsentation außermathematischer Wirklichkeit nicht auf der Hand. Martin Schiralli beschreibt jedoch als eine Handlungsweise der Mathematiker auch die Repräsentation und meint damit vorrangig die Formalisierung innermathematischer Muster („[They] *represent* patterns, i.e. describe them in formal terms“ (vgl. 125)).[8]
„Imitation“ kann im Bereich des Mathematischen nur randständig verortet werden. Jedoch sieht Dutton mit abstrakter Malerei und Musik auch Ausnahmen aus dem Bereich der „anerkannten Künste“, die dieser Eigenschaft nicht gerecht werden.

„Special focus“

Mit der sechsten Eigenschaft weist Dutton darauf hin, dass sich künstlerische Darstellungsformen häufig vom Alltäglichen abheben und zu einem „special and dramatic focus of experience“ (Dutton, 2001, S. 211) führen.[9] Dazu zählen u.a. ritualisierte, formalisierte Darbietung, die das (Kunst)Erlebnis insbesondere auf emotionaler Ebene intensivieren. (Vgl. Dutton, 2001, S. 211f) Bezogen auf die „Muster der Mathematiker“ ist ein spezieller Fokus zunächst allein durch die Tatsache erfüllt, dass sie abgesehen von der Anwendung nicht im Alltäglichen rezipiert wird, sondern hauptsächlich in ritualisierten Formen wie Vorlesungen, Schulunterricht o.ä. zur Aufführung kommt. Dem gegenüber steht jedoch die Tatsache, dass das mathematikästhetische Erleben nicht an eine solche Darbietung gebunden ist, sondern sich häufig erst in der individuellen nicht zu institutionalisierenden Auseinandersetzung mit dem Gegenstand einstellt. Somit verweist der „special focus“ hier auf die Unterscheidung der mathematikästhetischen Kategorien Schönheit und Eleganz: Während ein Rezipient bezüglich eines Beweises unabhängig von der Darstellungsform zum Urteil schön kommen kann, beschreibt das Attribut „elegant“

[8] An dieser Stelle könnten zwar die in den Naturwissenschaften allenthalben zu findenden mathematischen Beschreibungen bzw. Repräsentationen der beobachtbaren Welt oder auch das mathematisch Modellieren in die Diskussion einbezogen werden. Die Mathematik kommt in diesen Fällen jedoch hauptsächlich als Werkzeug zum tragen und wird auf Grund ihrer Nützlichkeit, nicht aber um ihrer selbst willen geschätzt. Solche Anwendungen würden damit nicht nur den durch die hier als Grundlage dienenden Untersuchungen der vorangegangen Kapitel gesteckten Rahmen verlassen, sondern auch einen Widerspruch zur zweiten universellen Eigenschaft bedeuten.

[9] Dutton entlehnt diese Eigenschaft dem von Ellen Dissanayake hervorgehobenen ethnoästhetischen Universalie des „making special“. Diese identifiziert Sinclair wiederum als die Notwendigkeit, in der Erfahrungswelt Dinge als beachtens- und schmückenswert zu identfizieren. Dies wiederum erkennt sie bezogen auf die das Lehren und Lernen von Mathematik als Mittel zur Vermeidung von Monotonie oder Chaos. Wie genau sich ein solches „making special“ im Mathematikunterricht auszeichnet und welche Rolle der emotionalen Ebenen dabei zukommt, markiert Sinclair als offene Fragen. (Vgl. Sinclair, 2009, S. 53)

gerade die Art der Präsentation (vgl. 2.5.1) und ggf. den „special focus“, der somit die mathematikästhetische Erfahrung intensivieren kann, für diese aber nicht notwendig ist.

„imaginative experience“

Mit dem letzten Punkt der „aesthetic universals“ greift Dutton einen auch in der Diskussion um den Kunststatus der Mathematik immer wieder zur Sprache kommenden Eigenschaftskomplex auf. Er beschreibt die Kunst sowohl für den Künstler als auch für sein Publikum als imaginative Erfahrung (Dutton, 2001, S. 212). Damit wird die Notwendigkeit von Phantasie und Kreativität für die künstlerische Produktivität sowie die Rolle der Einbildungskraft bei der Rezeption betont. Bezogen auf die Mathematik wurde dieser Punkt und unter dem Eindruck der Kantischen Einwände unter 8.1 ausführlich diskutiert. An dieser Stelle kann nochmals betont werden, dass der mathematische Schaffensprozess unter 6.1 insbesondere durch die Darstellung der individuellen mathematischen Erfindung als „imaginative experience“ par excellence beschrieben wird. In der Diskussion um die Rolle von Einbildungskraft in der Mathematik und die (mathematik)ästhetischen Ideen konnte außerdem eine Vielzahl von Zeugnissen für imaginative Erfahrungen aus Kapitel 6 als Antwort auf die skeptische Haltung Kants angeführt werden (vgl. S. 185).

Der Abgleich von Duttons Universalien mit den im Zusammenhang mit der Kunstfrage zur Sprache gebrachten Aussagen über die Mathematik der beiden vorangegangenen Kapitel zeigt, dass die Mathematik als eine kulturelle Praxis aufgefasst werden kann, der mehr oder weniger umfassend jede der Eigenschaften zukommt und damit Dutton folgend „art in some sense“ (Dutton, 2001, S. 210) ist. Die zunächst auf Intuition und subjektiver Erfahrung gründende Annahme vieler mit Mathematik Vertrauter, über eine Kunstform zu sprechen, steht nicht zuletzt durch die Bündelung der Einzelindizien damit auf einer breiteren Grundlage. Der Vergleich von Kunst und Mathematik kann somit nicht länger als Ausdruck der Eitelkeiten bestimmter Mathematiker, „Selbststilisierung der Mathematik“ (Heintz, 2000, S. 145) oder Rechtfertigungsversuch abseits der Anwendung abgetan werden.
Gleichzeitig verstärkt die Passung von Mathematik und Duttons künstlerischen Universalien einen bereits in Kapitel 6 entstehenden Eindruck: Die Kunstnähe der Mathematik in ihrer vollen Ausprägung kann nur erkannt werden, wenn sowohl die mathematische Praxis als auch ihre Hervorbringungen einbezogen werden und damit ein relativ breites Mathematikverständnis zu Grunde liegt. Die Kantische Position unterstreicht dies und liefert ein Beispiel dafür, dass der Kunst-Mathematik-Vergleich begründet abwegig erscheinen kann, wenn bestimmte Aspekte der Mathematik und insbesondere der mathematischen Praxis ausgeblendet werden.

Obgleich eine Entscheidung über den Kunststatus der Mathematik naturgemäß nicht abschließend möglich ist, existieren hinreichend viele Indizien, um mindestens situationsabhängig den Kunstcharakter der Mathematik anzunehmen, ohne in den Verdacht genereller Falschaussage geraten zu müssen. M.E. ist somit ein pragmatischer Umgang geboten: Die Mathematik kann und sollte, wo dies nützlich erscheint, als kunstähnliche Disziplin behandelt werden, und somit eine Mathematikästhetik als Theorie der Kunstform Mathematik möglich machen. Eine so verstandene mathematikästhetische Perspektive erweitert den Blick auf andere Interessensgebiet der Mathematikphilosophie und trägt zur adäquaten Beschreibung der unterschiedlichen Ebenen mathematischer Praxis bei.

Teil III

Anwendung und Konkretisierung

Kapitel 9

Ästhetische Perspektiven für das Lehren und Lernen von Mathematik

> „Es muss unter allen Umständen vermieden werden, dass Menschen das Gymnasium verlassen, ohne auch nur einen Zipfel der ergreifenden Schönheit der Mathematik gesehen und miterlebt zu haben.“ (Barth, 2005, S. 76)

Die Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht muss Armin P. Barth folgend „eine der ersten Forderungen an guten Unterricht“ (Barth 2005, S. 76) sein. Vor dem Hintergrund der bisherigen Ausführungen verwundert diese Forderung zunächst nicht: Es liegt nahe, dass auch für den schulischen Mathematikunterricht die Schönheit als Eigenschaft der zugrunde liegenden Wissenschaft, die von vielen Mathematikern als zentral beschrieben wird und einen umfassenden Blick auf den Gegenstand ermöglicht, von besonderem Interesse ist. Dies wird außerdem durch die Tatsache verstärkt, dass die Mathematik aus guten Gründen als Kunstform behandelt werden kann. Der Mathematikästhetik einen wichtigen Platz im Rahmen „guten“ Mathematikunterrichts einzuräumen, ist somit eine naheliegende Folgerung mathematikästhetischer Beobachtungen, deren konkrete Umsetzung geboten ist. So fordert auch der Lehrplan Mathematik für die Sekundarstufe II in Nordrhein-Westfalen unter der Überschrift „Förderung langfristiger Einstellungen“ u.a.:

> „Sie [die Schülerinnen und Schüler] sollen für die Mathematik positiv motiviert werden, sollen die Leistungsfähigkeit und Schönheit der Mathematik erfahren.“ (Lehrplan Mathematik Sek. II NRW, 1999, S. 38)

Ein Blick in den Lehrplan, der über diese sehr allgemein formulierten Forderung hinaus geht, zeigt aber, dass es nicht zur Konkretisierung für die Praxis kommt. Es finden sich weder Hinweise darauf, wie diese „langfristige Einstellung“ im Unterricht vorbereitet werden kann, noch werden Verbindungen zu anderen Themen und Zielen des Lehrplans, wie sie sich etwa durch den Kunstcharakter der Mathematik ergeben, gezogen. Die Schönheit der Mathematik wird mithin lediglich als Leerformel verwendet und formuliert zunächst nur ein hehres Ziel, das es im Folgenden in Bezug zu setzen gilt.[1]

Ein ähnliches Bild liefert ein Blick auf die mathematikdidaktische Forschung. Wenn Schönheit und Mathematisches zusammengebracht und für den Unterricht fruchtbar gemacht werden sollen, sind visuelle Erfahrungen mit regelmäßigen geometrischen Formen, Spiralen oder bestimmten Proportionen häufig genannte Beispiele. Solche Ansätze werden von der Hoffnung getragen, durch diese Verbindung einerseits die Schülermotivation zu stärken und andererseits durch den visuellen Eindruck Erkenntnisse über die zugrunde liegende Mathematik zu erhalten und zum kreativen Denken anzuregen. Die Untersuchung mathematischer Grundlagen der bildenden Kunst verspricht zusätzlich, den Mathematikunterricht durch einen zunächst nicht offensichtlichen Anwendungsbereich der Mathematik zu bereichern. Das inhaltliche Spektrum kann in diesem Bereich nahezu alle mathematischen Teildisziplinen und Jahrgangsstufen abdecken. Darüber hinaus bietet sich für die praktische Umsetzung der Computereinsatz an.[2]
Die Forderung, das Erleben der Schönheit innermathematischer Strukturen und Argumentationsgänge wie etwa der Schönheit von Beweisen oder Theoremen auch im Bereich didaktischer Überlegungen zu berücksichtigen, wird zwar im Rahmen von Arbeiten zur Ästhetik der Mathematik z.B. von Seymour Papert (1988) oder Jerry P. King (1992) erhoben und meist aus der Relevanz des Schönen für die mathematische Wissenschaftspraxis hergeleitet. Im Rahmen genuin mathematikdidaktischer Literatur wird solches Ansinnen dagegen selten aufgegriffen und diskutiert.[3] Damit kann die Literaturlage bezogen auf die in dieser Arbeit im Zentrum des Interesses stehenden „Muster der Mathematiker“ auch aus didaktischer Perspektive als eher dürftig beschrieben werden. Dabei ist diesem Gegenstandsbereich m.E. gerade im Zusammenhang mit der oben zitierten Lehrplanforderung auch mit Blick auf den Mathematikunterricht besonderes Augenmerk zu schenken, markiert er doch nicht nur einen Zusammenhang von Mathematik und Schönheit, sondern stellt die Schönheit der Mathematik selbst ins Zentrum!

[1] Diese und die folgenden Überlegungen zu den didaktischen Perspektiven der Mathematikästhetik entstanden als Erweiterung von Spies (2011) und Spies (2012).

[2] Eine Sammlung möglicher Anknüpfungspunkte des Mathematikunterrichts an die bildende Kunst von der Jahrgangsstufe 5 bis 13 bietet das Themenheft mathematik lehren 157 (2009). Zur Anwendung von Kunstwerken zur Förderung des Entdeckens allgemeiner mathematischer Prinzipien siehe außerdem Beckmann (2009). Konkrete Unterrichtsvorschläge zur Nutzbarmachung von Kunstwerken für den Mathematikunterricht im Übergang von Primar- zur Sekundarstufe geben z.B. Maak (2006) oder Rademakers (2009) und Siller und Siller (2007) besprechen Unterrichtsbeispiele zur Nutzung des Mathematischen in der Musik. Eine Möglichkeit des Computereinsatzes zur Rekonstruktion konkreter Kunst beschreibt Roth (2007). Darüber hinaus beschreibt Gerstberger (2009) Theaterstücke über die Mathematik als methodisches Mittel im Mathematikunterricht.

[3] Ausnahmen bilden die Arbeiten von Astrid Brinkmann (z.B. Brinkmann (2006)) und Nathalie Sinclair Sinclair (2006b, 2009) sowie Barth (2005) und Dreyfus und Eisenberg (1986).

Das Lehrplanzitat enthält nicht nur die Aufforderung, eine mathematikästhetische Perspektive auf Prozesse des Lehrens und Lernens einzunehmen, sondern verweist zudem auf konkrete Untersuchungsbereiche: So wird die Schönheit der Mathematik als eine Möglichkeit genannt, die Schülerinnen und Schüler positiv zu motivieren. Daraus ergibt sich die Frage nach der *individuellen Bedeutung* des Ästhetischen für die Mathematiklernenden auch über einen anfänglichen Anreiz hinaus. Wenn der mathematischen Schönheit weiterhin zugebilligt wird, einen Beitrag zu den „langfristigen Einstellungen“, also mithin zum Aufbau des durch die Schule vermittelten *Mathematikbildes* leisten zu können, so liegt die Frage nach der Legitimation durch die Mathematikästhetik nahe. Um zur positiven affektiven Einstellung und zu einem tragfähigen Bild von Mathematik beizutragen, sollen Schülerinnen und Schüler den ästhetischen Reiz der Mathematik „erfahren“. Dies führt zu Fragen bezüglich der konkreten Umsetzbarkeit in der *Unterrichtspraxis*. Dabei gesellen sich zu den allgemeinen Fragen nach dem Schönheitsbegriff oder Beispielen für die „Muster der Mathematiker“ in der Schulmathematik auch die Frage nach notwendigen Voraussetzungen bei Schülern und Lehrern sowie Anforderungen an Lernsituationen, in denen mathematikästhetische Erfahrung gelingen können. Schließlich muss sich ein für die allgemeinbildende Schule formuliertes Ziel immer auch der Diskussion um den *Beitrag zum Bildungswert* des Faches stellen. Die Forderung nach ästhetischen Erfahrungen mit der Mathematik impliziert dabei zweierlei: Zum einen stellt sich die Frage, inwieweit eine ästhetische Dimension im Mathematikunterricht zur Positionierung des Faches innerhalb der Allgemeinbildungsdiskussion beitragen kann. Zum anderen liegt die Frage nach den Möglichkeiten, mittels Mathematik einen Beitrag zur ästhetischen Bildung zu leisten, nahe.

Solche mathematikdidaktischen Fragen können nur befriedigend beantwortet werden, wenn sie auf ausführliche Vorarbeiten der Mathematikästhetik zurückgreifen können. Wenn also im Folgenden auf die hier explizierten Problembereiche auf der Grundlage der Ergebnisse dieser Arbeit zum Schönheitsbegriff und zum Kunststatus der Mathematik eingegangen wird, so handelt es sich nicht nur um eine mögliche Anwendung dieser Resultate aus dem Bereich der Mathematikästhetik als Konsequenz systematischer Überlegungen. Vielmehr soll auch ein Beitrag geleistet werden, relevante Fragen bezüglich des Lehrens und Lernens von Mathematik zu beantworten.[4]

9.1 Individuelle Bedeutung für die Lernenden

Im folgenden sollen mögliche Folgen der Integration mathematikästhetischer Elemente in den Unterricht für den einzelnen Schüler skizziert werden. Diese reichen

[4]Der Stellung in der Systematik dieser nicht in erster Linie philosophischen Arbeit ist es aber wiederum geschuldet, dass Antworten skizzenhaft bleiben müssen und insbesondere bezüglich konkreter Beispiele unterichtspraktischer Umsetzungen hauptsächlich der weitere Forschungsbedarf markiert werden kann.

von Auswirkungen auf die emotionale Verfasstheit in der Auseinandersetzung mit der Mathematik über einen Beitrag zu einem langfristig tragfähigen Mathematikbild bis hin zu zentralen Impulsen für den individuellen Problemlöseprozess.

9.1.1 Mathematikimmanente Motivation

Die zahlreichen im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Zeugnisse mathematikästhetischen Verhaltens unterstreichen, dass die Schönheit in der Mathematik ein positiv konnotiertes Werturteil darstellt. Die Rolle, die die emotionale Wirksamkeit im mathematischen Schönheitsbegriff spielt (vgl. 2.4), zeigt weiterhin, dass dieses Urteil über ein schönes Stück Mathematik insbesondere von *positiven Emotionen getragen* wird. Die Aussicht auf ein mathematisch-ästhetisches Erlebnis kann somit für den Einzelnen ein Motiv zur Beschäftigung mit Mathematischem abseits von Überlegungen zur späteren Brauchbarkeit oder dem kurzfristigen Erfolg durch Kalkülbeherrschen werden.
So findet Nathalie Sinclair den motivationalen Charakter des Ästhetischen, den sie im Bereich der Forschungsmathematik identifiziert hat, auch in Schülerbeobachtungen bestätigt. Sie beschreibt Beispiele, in denen das Ästhetische eines Problems die Schüler zur Beschäftigung über den Unterricht hinaus motivierte, ebenso wie Beobachtungen, in denen bestimmte Aufgaben oder Probleme gerade auf Grund ihres ästhetischen Reizes angegangen werden (vgl. Sinclair, 2006b, S. 69ff). So berichtet sie über einen Schüler, der im Rahmen eines Projektkurses den Vier-Farben-Satz kennengelernt hatte und nun mit der Stichhaltigkeit des computerbasierten Beweises haderte. Die Motivation des Schülers, sich über eine lange Zeit mit dem Problem auseinandersetzte und immer wieder selbst Gegenbeispiele zu kreieren, führt sie auf verschiedenen Faktoren mit ästhetischer Dimension zurück:

> „Tim was attracted to the misleadingly simple nature of the problem, to the sensory appeal of making and looking at the maps, and to the way in which the problem connected with his own experiences.“ (Sinclair, 2006b, S. 72)

Mindestens die Einfachheit der Problemstellung in Relation zur Komplexität der Lösung, aber auch die Bedeutung des Problems über die konkrete Situation hinaus können auch im Rahmen der in Kapitel 2 herausgearbeiteten Charakteristika verortet werden und somit auch hier als Beispiel für motivational wirksame, mathematisch-ästhetische Eigenschaften gelten.

Die ästhetisch wirksame Verbindung von Einfachheit mit anderen Kriterien im Eigenschaftskomplex der Ökonomie macht die im mathematischen Schönheitsurteil beteiligten Eigenschaften relativ bestimmbar: So kann auch das subjektive Erschließen eines nicht ohne Mühe zugänglichen Argumentationsgangs als individuell lohnenswerte Anstrengung empfunden werden, wenn dies in Relation zur Tragweite des bewiesenen Resultates „gemessen“ und im Unterricht transparent

wird. Diese Perspektive geht über Einfachheit im Sinne von kalkülorientierter Beherrschbarkeit hinaus, die lediglich einen gewissen (Noten-) Erfolg verspricht und auf Grund dessen für die Schülerinnen und Schüler positiv konnotiert ist.
Astrid Brinkmann weist in einer empirischen Studie unter Schülern verschiedener Altersstufen allerdings nach, dass im Bereich schulischen Mathematiklernens diese an externen Erfolgsindikatoren gemessene Einfachheit mit dem Begriff der Schönheit in Verbindung gebracht wird. Tragweite dagegen gehe nur als außermathematische Anwendbarkeit in das Werturteil, das Schüler mit „Schönheit" bezeichnen, ein:

> „Das ästhetische Empfinden von Schüler/innen ist stark geknüpft an ihr Interesse, das Vorhandensein eines Realitätsbezugs (bei älteren Schüler/innen) aber auch an ein Gefühl von Sicherheit und Erfolg." (vgl. Brinkmann, 2006, S. 212)

Der Vergleich mit den in Kapitel 2 herausgearbeiteten Charakteristika mathematischer Schönheit, wie sie in der mathematischen Praxis Verwendung finden, mahnt hier allerdings zur Vorsicht. So zeigt sich dort, dass auch innerhalb der Mathematik nicht jede Annehmlichkeit eine mathematisch-ästhetische Kategorie ist. Bei aller subjektiven Färbung ist es m.E. somit nicht zulässig, die ästhetischen Werturteile in schulischer und wissenschaftlicher Praxis mit unterschiedlichem Maß zu messen.[5] Auch wenn bestimmte Eigenschaften im Rahmen der Schülerbefragung mehrheitlich dem Urteil „schön" zugeordnet wurden, so muss wenigstens die Frage gestellt werden, ob es sich dabei tatsächlich um die Beschreibung einer „ästhetischen Empfindung" handelt oder ob hier die Schönheit als Sammelbegriff positiv konnotierter Eigenschaften wie Interesse, Realitätsbezug oder unterrichtlicher Erfolg verwendet wird. Für eine solche Deutung spricht auch Brinkmanns Befund, dass die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe „mehrheitlich [angaben], niemals eine wirklich schöne mathematische Aufgabe kennen gelernt zu haben" (Brinkmann, 2006, S. 210). Dies deutet m.E. insbesondere auf ein fehlendes Bewusstsein der Lernenden für die Möglichkeiten und die Bedeutung genuin ästhetischer Werturteile im Rahmen der (Schul-)Mathematik hin. Ergebnisse wie das von Brinkmann können somit nur bedingt direkt für die Unterrichtspraxis nutzbar gemacht werden. Sie betonen aber die Notwendigkeit expliziter Thematisierung möglicher Schönheitskriterien der mathematischen Wissenschaftspraxis für einen Unterricht, in dem die Schönheit der Mathematik erfahren werden soll.

[5] Brinkmann plädiert abschließend dafür, den bei den Schülern festgestellten „Schönheitsbegriff" zu bedienen, um im Mathematikunterricht die Schönheit erfahrbar zu machen: „Wollen wir mathematische Schönheit für Schüler/innen erfahrbar machen, so sollten wir im Unterricht vermehrt Aufgaben präsentieren, die das Interesse der Lernenden stärker berücksichtigen und möglichst auch realistische Anwendungsbezüge aufzeigen. [...] Wichtig ist allerdings ein Bewusstsein der Lehrenden über das mathematische Leistungsvermögen ihrer Schüler/innen, da diese eher dann Schönheit empfinden können, wenn sie gefordert, aber nicht überfordert werden." (Brinkmann, 2006, S. 212)

Mathematische Schönheit motiviert also nicht nur den Mathematiker zur fortgesetzten Beschäftigung mit bestimmten Gegenständen, sondern könnte ähnliche Wirkungen auch im Mathematikunterricht entfalten. Der aufgrund (erwarteter) ästhetischer Erfahrungen ausgelöste Anreiz stellt ein Beispiel einer intrinsischen Motivation für die Mathematik dar, welche wiederum durch mathematikimmanente Eigenschaften evoziert wird.[6] Die Hoffnung des Lehrplans, durch die Beschäftigung mit dem Schönen eine langfristig wirksame, positive affektive Beziehung zur Mathematik aufzubauen, scheint daher durchaus berechtigt.

Der in den mathematischen Schönheitsbegriff eingehende Eigenschaftskomplex der epistemischen Transparenz verweist auf eine weitere Möglichkeit einer von externen Faktoren unabhängigen Motivation: Dem in das ästhetische Urteil eingehenden Verstehen ist keine extrinsische Zielsetzung notwendig voran gestellt. Aus Sicht der (Mathematik-)Ästhetik ist vielmehr der Luxus des Verstehens um seiner selbst willen erlaubt und förderlich. Dies korrespondiert mit der Forderung, ein guter Mathematikunterricht müsse über bloß syntaktisches Wissen und Können hinausgehen. Auch das tiefe Verstehen im Umgang mit schöner Mathematik integriert die Durchdringung auf semantischer Ebene, bereichert diesen Aspekt aber noch durch das Moment des Aha!-Erlebnisses (vgl. 2.3.2). Gerade dieses als plötzliche Klarheit beschriebene Verstehen kann dabei einen prägenden Eindruck hinterlassen und somit ebenfalls eine „langfristige positive Beziehung“ zur Mathematik mitgestalten. Wenn auch insbesondere der Kantische Einwand gegen ästhetische Erfahrungen mit der Mathematik u.a. die Möglichkeit einer Motivation ohne Rücksicht auf bestimmte Zwecksetzungen in Frage stellt (vgl. 4.3), spielt diese doch gerade für den unterrichtlichen Wert der Mathematikästhetik eine zentrale Rolle. Dass die Annahme dieser Möglichkeit gerechtfertigt ist, kann auch zusammenfassend die Diskussion um den Kunststatus bestätigen (vgl. S. 188f): Schöne Stücke der Mathematik ermöglichen „Non-utilitarian pleasure“ und erfüllen damit nicht nur eine von Duttons universalen Eigenschaften, sondern versprechen einen besonderen Wert insbesondere motivationaler Art für den Mathematikunterricht und darüber hinaus für die individuelle Beziehung zur Mathematik.

9.1.2 Ein Beitrag zum mathematischen Weltbild

Ein Ziel des Mathematikunterrichts muss darin bestehen, ein stimmiges Bild der Mathematik, ihrer Grundlagen, zentraler Ideen und Werturteile erlebbar zu machen. Dazu trägt die Orientierung des Mathematikunterrichts an der aktuellen Wissenschaftspraxis ebenso bei wie die Orientierung an der Genese des Faches.

Der Streifzug durch die Geschichte der Beziehung von Mathematik und Schönheit (Kapitel 3) zeigt, dass die ästhetische Komponente entwicklungsgeschichtlich

[6] Dies gilt jedenfalls dann, wenn die in dieser Arbeit herausgearbeiteten Eigenschaftskomplexe mathematischer Schönheit zu Grunde gelegt werden.

gesehen Teil der Mathematik ist, wie auch die allgemeine Ästhetik häufig Bezug auf Mathematisches nimmt. So ist das Mathematische in den antiken Schriften das Paradebeispiel für besondere Schönheit und nimmt etwa in der rationalistischen Ästhetik der Aufklärung eine prominente Stellung innerhalb der allgemeinen Kunsttheorie ein. In diesem Sinne kann die mathematikästhetische Erfahrung etwa an schon seit der Antike bekannten und als ästhetisch relevant behandelten Beispielen, wie dem im folgenden Kapitel ausführlich besprochenen Beispielkomplex um Irrationalität und Inkommensurabilität (vgl. 10.2) dazu beitragen, „exemplarische Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Zivilisation“ (Lehrplan Mathematik Sek. II NRW, 1999, S. 6) zu erhalten und somit eine weitere Forderung des Lehrplans zu erfüllen.

Auch der besondere mathematikästhetische Blick auf die Mathematikgeschichte durch die Identifizierung unterschiedlicher Stile kann m.E. das individuelle Mathematikbild nachhaltig verändern: Einerseits verweist eine solche Perspektive auf die Möglichkeit der hinter der Mathematik stehenden Menschen, ihren Produkten eine „persönliche Note“ zu verleihen. Ein Bewusstsein für derlei ästhetische Einflussmöglichkeiten im Entstehungsprozess nimmt auch den Gegenständen der Schulmathematik den Eindruck schon immer da gewesener, einzig logischen Zwängen unterstehender Produkte und betont den Prozesscharakter und insbesondere das menschliche Moment der Mathematik. Ein Bewusstsein für verschiedene stilistische Möglichkeiten könnte beispielsweise durch die (mathematikästhetische) Reflexion verschiedener Zugänge zu zentralen mathematischen Konzepten, wie etwa dem Ableitungsbegriff im Rahmen der Analysis[7], geschaffen werden. Die Beziehungen von Stilen in Mathematik und Kunst können andererseits die Mathematik in besonderer Weise als Kulturleistung beschreiben und in einen kulturellen Zusammenhang stellen. Zusätzlich zu den Chancen, die eine Integration der Mathematikgeschichte im Unterricht über das Anekdotenhafte hinaus bereithält, hat das exemplarische Aufzeigen möglicher stilistischer Entwicklungen das Potential, neuartige Einblicke in Wert und Genese der Kulturleistung Mathematik zu eröffnen.[8]

Ein bewusster Blick auf die Schönheit der behandelten Gegenstände muss, wie die Zusammenstellung in Kapitel 2 zeigt, neben möglicher emotionaler Wirkungen auch deren *Tragweite* deutlich werden lassen. Dies wiederum führt auf die inner- und außermathematischen Beziehungen, in denen ein Stück Mathematik steht, ebenso wie auf die Rolle innerhalb der Mathematikgeschichte. Beides vermittelt Schülerinnen und Schülern einen Eindruck von der Relevanz des konkreten

[7] Eine ausführliche Diskussion der Unterschiede der Ableitungsinterpretation als lokaler Änderungsrate einerseits und lokaler Linearisierung andererseits und der jeweiligen didaktischen Implikationen wird ausgeführt von Danckwerts und Vogel (2006). Ein Aufgreifen der Eigenschaften vor dem Hintergrund der Stilfrage wäre sicher aufschlussreich.

[8] Zu den Problemen der unterrichtlichen Implementierung der Mathematikgeschichte im Allgemeinen kommt dabei zwar noch die Schwierigkeit, dass es keine eindeutige oder wenigstens breit geteilte Stilzuordnung in der Mathematik gibt. Jedoch verspricht m.E. bereits das exemplarische Aufzeigen möglicher stilbildender Elemente eine fruchtbringende Akzentuierung.

Beispiels auf verschiedenen Ebenen und ein Gefühl für die Wechselwirkungen im Rahmen der Mathematik. Speziell die Identifikation einer mathematischen Herangehensweise als „weitreichende Heuristik“ mit dem ästhetischen Wert der betrachteten Methode trägt zu einem gültigen Bild von Mathematik bei und verweist gleichzeitig auf die Bedeutung ihrer Beherrschung im Rahmen der allgemeinen Problemlösekompetenz.

9.1.3 Kreativität und Reflexion im Problemlöseprozess

Neben der nicht zu unterschätzenden Stärkung der generellen Einstellung gegenüber dem Fach durch die mathematikimmanente Motivation und den Beitrag zu einem adäquaten Wissenschaftsbild kann das Bewusstsein für das Ästhetische auch ganz konkret zur individuellen Problemlösekompetenz beitragen. Nathalie Sinclair etwa betont in diesem Zusammenhang den „Sinn für Ordnung", den sie auch bei Mathematikern beobachtet hat und der erfolgreichen Problemlösern eigen sein müsse:

> „[...] students might have more success in problem solving – and here I refer to truly problematic problems – if they could engage their ‚sense of order‘.“ (Sinclair, 2006a, S. 66)

Damit überträgt sie neben der motivationalen auch die „generative“ Funktion des Ästhetischen aus dem Bereich der mathematischen Wissenschaftspraxis auf die Schule und unterstellt Ähnlichkeiten zwischen der Tätigkeit von echte Probleme lösenden Schülern einerseits und produktiven Mathematikern andererseits. Weiter vermutet Sinclair, dass diese besondere Sensibilität explizit geschult werden müsse: „And perhaps this ‚sense of order‘ is something that must be explicitly evoked, developed, and nurtured.“ (Sinclair, 2006a, S. 66)
Die Rolle, die hier einem ästhetischen Vermögen in Bezug auf die Problemlösefähigkeiten von Schülern zugesprochen wird, erinnert stark an die unter 6.1 dargestellten Positionen zum künstlerähnlichen Verhalten schaffender Mathematiker. Damit ergeben sich mit Blick auf die Mathematikdidaktik verschiedene Folgerungen: Zum einen verweist der Vergleich erfolgreicher Problemlöser in der Schule mit dem mathematischen Künstler auf die Notwendigkeit eines angeborenen Talentes, das es in der Schule herauszubilden gilt. Ob dies ähnlich der von Kant vorgeschlagenen Künstlerschulung etwa am Beispiel großer Meister und ihrer Werke, wie etwa der in Kapitel 10 vorgestellten Beispiele (vgl. 7.2.1) gelingen kann, bleibt zu untersuchen. Mithin schließt sich diese Sichtweise an die mathematikdidaktische Kreativitätsdiskussion an. Andererseits ist dies auch ein in gewisser Weise ernüchternder Befund, verweist doch diese produzentenzentrierte Sicht zunächst nur auf die Möglichkeit besonders begabter Schüler, ihren Sinn für das Ästhetische im Problemlöseprozess fruchtbar werden zu lassen.

Im Rahmen des schulischen Problemlösens spielt das Ästhetische aber nicht nur eine Rolle, wenn es darum geht, erfolgreich kreative Lösungen zu finden. Vielmehr sollte mathematisch-ästhetischen Werturteilen insbesondere in Bezug auf vorhandene Argumentationsgänge ein besonderes Gewicht zukommen. So gehört etwa ein exemplarisches Benennen der beteiligten Emotionen wie auch die Reflexion der weiteren zur mathematischen Schönheit beitragenden Eigenschaftskomplexe zur (nachträglichen) Bewertung eines vorliegenden Lösungsweges. Auch hier handelt es sich um eine Tätigkeit, die Mathematiker und Künstler bzw. Kritiker und Publikum beider Disziplinen im Umgang mit den jeweiligen Gegenständen gleichermaßen auszeichnet.[9] Sinclair folgend trägt somit die Berücksichtigung der von ihr in der mathematischen Praxis identifizierten „evaluativen“ Funktion des Ästhetischen dazu bei, dass Schüler handeln wie die Mathematiker selbst, was wiederum ein Ziel des Mathematikunterrichts sein solle (vgl. Sinclair, 2006a, S. 66).
Vor dem Hintergrund des Polyaschen Problemlöseplans bekommt das Ästhetische somit auch und insbesondere im Rahmen der „Rückschau“ (vgl. Pólya, 1949, S. 28f) seinen Platz – unabhängig von der Frage nach einem besonderen produktiv-kreativen Talent. Dennoch bedarf gerade das über die Frage nach korrektem Schließen hinausgehende Urteil einer Sensibilisierung für die ästhetischen Eigenschaften der Mathematik. Insofern trägt die Integration mathematikästhetischer Urteile in die Evaluation von Lösungswegen nicht nur zu einer umfassenderen individuellen Einschätzung dieser bei, sondern ist für die Vorbereitung einer kundigen Rezeption mathematischer Kunstwerke besonders geeignet.
Andersherum können Emotionen, wie sie im Rahmen mathematikästhetischer Erfahrungen entstehen, auch dazu beitragen, dass die „Rückschau“ auf den positiv erlebten Prozess zum Bedürfnis wird. Gerald Goldin beschreibt diesen Effekt als Folge der das Aha!-Erlebnis begleitenden Emotionen (vgl. Goldin, 2000, S. 216f):

> „The problem solver's imagistic representations may have been drastically recontstructed, with new insights resulting. A formal expression may have been greatly simplified, through an elegant algebraic technique. A far-reaching structural relationship with another problem may have been detected.“ (Goldin, 2000, S. 216)

Der aktive Umgang mit schönen Problemen und diesen begleitende Emotionen führen somit nicht nur dazu, verschiedene der oben beschriebenen Charakteristika mathematischer Schönheit aufzudecken, sondern zu einer Reflexion über die eigene Vorgehensweise und damit potentiell zur Steigerung der generellen Problemlösekompetenz. Der emotionalen Wirksamkeit schöner Mathematik kommt somit eine Bedeutung zu, die weit über die motivationale Rolle hinaus geht.

[9] Vgl. dazu insbesondere die unter 6.1.1 diskutierte Gegenüberstellung Schirallis sowie die Hinweise zur Rolle von Kritikern und Publikum im Rahmen der Mathematik unter 6.4.2.

9.2 Möglichkeiten der unterrichtspraktischen Umsetzung

Angesichts der bisher beschriebenen Hoffnungen, die in die Integration der Mathematikästhetik in den Unterricht gelegt werden dürfen, liegt die Frage nach Voraussetzungen und Möglichkeiten der praktischen Umsetzung nahe. Aus den Ergebnissen zum mathematischen Schönheitsbegriff und dem Kunstcharakter der Mathematik können Hinweise für die Auswahl möglicher Inhalte und unterstützender Methoden gezogen werden, sowie bestimmte, die Schülerinnen und Schüler betreffende Voraussetzungen formuliert werden. Diese werden im Folgenden zunächst skizziert. Da die Integration mathematikästhetischer Elemente in den Unterricht in hohem Maß vom auf Erfahrungen fußenden Bewusstsein der Lehrerinnen und Lehrer für das Ästhetische der Mathematik abhängt, werden außerdem solche Voraussetzungen und die damit verbundenen Forderungen an die Lehrerbildung näher beleuchtet.

9.2.1 Übung, Anleitung und Gewöhnung

Wie bei allem Kunstschönen bedarf auch das Erkennen der mathematischen Schönheit der Übung, Anleitung und Gewöhnung. Eigenschaften wie Tragweite und Ökonomie (vgl. 2.1 und 2.2) müssen an Beispielen instruktiv aufgezeigt werden und bedürfen zusätzlicher Informationen über das konkrete Problem hinaus. Dies gilt auch für den Kunstcharakter der Mathematik. Was im jeweiligen Umfeld als Kunst gilt, beruht letztlich immer auch auf sozialer Übereinkunft und muss als solche am Vorbild gelernt werden. Armin Barth fasst dies innerhalb einer Sammlung von seiner Meinung nach schönen Stücken der Mathematik wie folgt zusammen:

> „Einige der in diesem Abschnitt erwähnten Sätze sind am Gymnasium Standard, aber es ist natürlich wesentlich, dass man ihre Schönheit ‚zelebriert', dass man das Schülerauge schult, die Schönheit daran auch zu sehen." (Barth, 2005, S. 71)

Um der mathematischen Schönheit im Unterricht einen Platz zu geben, muss somit nicht unbedingt über den gängigen Schulstoff hinausgegangen werden, was nicht zuletzt die unter 10.2 Beispiele belegen.[10] Vielmehr gilt es, im bereits bestehenden Kanon Kunstwerke zu identifizieren und als solche zu behandeln.

Eigenschaften wie epistemische Transparenz oder emotionale Wirksamkeit dagegen können sicher nicht im klassischen Sinne gelehrt werden, sondern bedürfen insbesondere des eigenständigen erforschenden Umgangs mit den Gegenständen.

[10] Dies bestätigt auch die Tatsache, dass die von Mathematikern in Ausführungen zur mathematischen Schönheit ins Spiel gebrachten Beispiele selten mehr als die Kenntnisse zur Mittelstufenmathematik voraussetzen.

Nathalie Sinclair weist in diesem Zusammenhang bereits auf empirische Erfahrungen hin, nach denen auch Mittelstufenschüler ästhetische Kriterien der Bewertung verwenden, wenn ihnen entsprechende „inquiry opportunities in rich environments“ zur Verfügung stehen (Sinclair, 2009, S. 49). Und Brinkmann und Sriraman betonen im Zusammenhang mit der Reflexionsfähigkeit im Problemlöseprozess die Notwendigkeit offener Aufgabentypen und des entdeckenden Lernens:

> [I]ndependent thinking can be cultivated by offering students the opportunity to explore problem situations without any explicit instruction.“ (Brinkmann und Sriraman, 2009, S. 63)

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Lerngelegenheiten geschaffen werden müssen, in denen die Schönheitscharakteristika erlernt *und* erfahren werden können.

Gegenstand von Demonstration und Erfahrung können dabei nicht nur Beweise im engeren Sinne, sondern allgemeiner auch mathematisches Argumentieren und Begründen – einschließlich präformal-inhaltlicher Beweise – sowie das Lösen von Problemen und die Reflexion dieser Prozesse sein (vgl. Dreyfus und Eisenberg, 1986, S. 4f). Die hauptsächlich auf der Analyse der Produkte beruhende Kantische Gegenargumentation (vgl. 7.2.2) lässt dabei vermuten, dass die ästhetischen Qualitäten der Mathematik insbesondere durch eine Betonung ihres Prozesscharakters hervortreten können. Insgesamt steht für die unterrichtliche Praxis außer Frage, dass ein *Sprechen über das Ästhetische* der behandelten mathematischen Gegenstände eine entscheidende Rolle spielt.

Die emotionale Wirksamkeit ist sicher die zentrale Eigenschaft schöner Mathematik, sowohl bezogen auf die aktuelle Motivation wie auch auf den Aufbau einer langfristigen positiven Haltung zur Mathematik. Gleichzeitig ist sie aber auch besonders stark von der subjektiven Verfassung abhängig und kann somit weder durch die Wahl der Beispiele noch durch geplante Unterrichtsarrangements erzwungen, sondern höchstens angebahnt und unterstützt werden. Die Tatsache, dass im mathematikästhetischen Werturteil Gefühle häufig genutzt werden, um andere Charakteristika zu qualifizieren zeigt jedoch, dass die beteiligten Emotionen nicht unabhängig vom betrachteten Gegenstand zu sehen sind. So kann etwa die häufig im Zusammenhang mit dem Widerspruchsbeweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ beschriebene Unausweichlichkeit (vgl. 10.2) nicht ohne das aktive Nachvollziehen und Zueigenmachen der Argumentation empfunden werden.[11] Das bedeutet zunächst, dass das Emotionale als wichtige Komponente ästhetischer Erfahrung durch die Wahl passender Beispiele unterstützt werden kann. Dabei können etwa authentische Hinweise auf eine *erstaunliche* Tragweite o.ä. durch die Lehrerinnen und Lehrer dazu beitragen, die emotionale Seite bewusst zu machen.

[11] Zur emotionalen Wirksamkeit dieses Beispiels siehe auch 10.2, S. 240f.

9.2.2 Voraussetzungen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler

Häufig wird der Mathematikästhetik im schulischen Kontext kaum eine Chance eingeräumt und dies mit der Notwenigkeit einer besonderen mathematischen Begabung begründet, die bei Schülern nur in seltenen Fällen zu finden sei. Dazu ist zunächst festzustellen, dass dieses Argument häufig nicht nur bezogen auf ästhetische Werturteile angeführt wird, sondern das öffentliche Bild von Mathematik generell prägt. So stellt Heinrich Winter mit Blick auf die allgemeine Wertschätzung des Faches folgendes fest:

> „Ihr intellektueller Anspruch wird als etwas gedeutet, was nur Spezialbegabungen zugänglich ist und also für die breite Masse von Natur aus uninteressant sein muss. Es ist eine Art höheres Schachspiel, schön und spannend für dafür eigens begabte Menschen." (Winter, 1995, S. 44)

Insofern nimmt die mathematikästhetische Perspektive keine Sonderstellung ein. Jedoch scheint das Misstrauen bezogen auf das Ästhetische besonders ausgeprägt, so dass der Fokus auf die mathematische Schönheit im schulischen Mathematikunterricht für ein besonders „elitäres" Ansinnen, wie Sinclair es beschreibt (Sinclair, 2009, S. 45), gehalten wird.

Gründe für diese Einschätzung sind vielfältig und ergeben sich insbesondere aus verschiedenen Facetten der in Kapitel 6 dargestellten Diskussion um den Kunstcharakter der Mathematik. Neben einer grundsätzlichen Aversion gegenüber der Mathematik, die generell positive Werturteile fernliegend erscheinen lässt, wird als ein weiterer Grund das häufig herausgestellte Fehlen von Kritikern und Publikum (vgl. 6.4.2) genannt. Es fehle generell eine Instanz, die den Wert der Mathematik reflektiere und ihre Ergebnisse und Fragestellungen in den Mathematikunterricht integriere (Sinclair und Pimm, 2010, S. 9). Aus Sicht der Schüler formuliert: Sie brauchen Lehrer, die den ästhetischen Wert der behandelten Gegenstände aufzeigen, diskutieren und authentisch vermitteln können. Dabei geht es m.E. nicht darum einen intuitiven Schönheitsbegriff der Schüler zu bedienen, wie dies verschiedentlich als Ausweg vorgeschlagen wird[12], sondern vielmehr die Schülerinnen und Schüler an den Schönheitsbegriff der mathematischen Wissenschaftspraxis heranzuführen.

Ein weiterer Grund nimmt seinen Ursprung im Geniecharakter der Mathematikproduzenten. Aus der Beobachtung, dass sich produktive Mathematiker durch eine künstlerähnliche Begabung auszeichnen, die unter anderem mit einem mathematisch-ästhetischen Gefühl einhergeht (vgl. 6.1 bzw. 8.1), wird der Schluss gezogen, dass auch die Wahrnehmung ästhetischer Eigenschaften der Mathematik einer solchen Begabung bedürfe. Dies bedeutet nicht nur bezogen auf die Frage nach der

[12] Vgl. etwa die oben bereits diskutierten Schlüsse von Brinkmann aus der empirischen Erhebung von Schülervorstellungen zur „Schönheit" im Rahmen der Mathematik (Brinkmann, 2006, S. 212) oder die Hinweise auf verschiedene Untersuchungen mit ähnlichem Ergebnis in (Sinclair und Pimm, 2010, S. 11f).

Kultivierbarkeit mathematischer Kreativität einen Rückzug der didaktischen Diskussion mit Verweis auf einige wenige Begabte. Vielmehr wird auch die Möglichkeit zur Rezeption schöner Mathematik nur diesen Wenigen zugeschrieben, woran die Umsetzung mathematikästhetischer Überlegungen im Unterricht im Allgemein scheitern müsste. Eine solche Argumentation muss nicht nur auf der Grundlage der vorangegangenen Untersuchungen zum Schönheitsbegriff (vgl. Kapitel 2) entschieden zurückgewiesen werden, würde sie doch bedeuten, dass eine ästhetische Erfahrung mit der Mathematik notwendig produktive mathematische Kreativität voraussetzt. Brinkmann und Sriraman zeigen außerdem an Beispielen, dass dies sowohl Beobachtungen der mathematischen Wissenschaftspraxis als auch der Unterrichtspraxis widerspricht (vgl. Brinkmann und Sriraman, 2009, S. 65).

Hier wird daher ein Versuch unternommen, Voraussetzung der Schülerinnen und Schüler nur mit Blick auf das *Rezipieren* schöner Mathematik zu skizzieren: In weiten Teilen handelt es sich bei den in mathematische Schönheitsurteile einfließenden Eigenschaftskomplexen um relativ zu bestimmende Eigenschaften. Dies wird etwa deutlich, wenn in das Kriterium der Ökonomie die Einfachheit als „subjektive Zugänglichkeit“ eingeht (vgl. 2.2.1). Je nach persönlichen Vorerfahrungen und kognitiver Leistungsfähigkeit des Einzelnen können verschiedene Argumente also als besonders einfach empfunden werden. In das Urteil der Ökonomie geht wie beschrieben weiter die Bedeutsamkeit des betrachteten Gegenstandes mit ein, welche an der Einfachheit gemessen wird. Um dies zu beurteilen, bedarf es neben der subjektiven Zugänglichkeit auch eines gewissen Vorwissens etwa um die Tragweite eines Argumentes. Insbesondere der Eigenschaftskomplex der epistemischen Transparenz (vgl. 2.3) verweist auf eine häufig angeführte und auch für den schulischen Kontext nicht zu unterschätzende Voraussetzung: Die besondere Klarheit oder ein Aha!-Erlebnis kann nur erfahren werden, wenn der betrachtete Gegenstand generell inhaltlich durchdrungen wurde. Mathematisch-ästhetisches Erleben setzt bei den Schülerinnen und Schülern die grundsätzliche kognitive und motivationale Möglichkeit zum allgemeinen Verständnis voraus. Obgleich die Möglichkeit zu Aha!-Erlebnissen an herausfordernden Problemen als ein Prinzip zur Förderung der mathematischen Kreativität für besonders Begabte beschrieben wird (vgl. Brinkmann und Sriraman, 2009, S. 62), sind solche Erfahrungen auch für diejenigen, die nicht zu den angehenden mathematischen Genies zu zählen sind, möglich, sind doch die allgemeinen Beschreibungen zur epistemischen Transparenz nicht auf Probleme mit einem bestimmten Schwierigkeitsgrad o.ä. beschränkt. Die Wirkung des tiefen Verstehens ist aber sicher davon abhängig, ob das Erschließen des betrachteten Problems als *subjektiv herausfordernd* empfunden wurde. Auch die emotionale Wirksamkeit (vgl. 2.4) schöner Mathematik ist nicht von vorne herein an bestimmte Inhalte oder ein bestimmtes „Verständnisniveau“ gebunden, bedarf jedoch einer gewissen Offenheit gegenüber positiven Gefühlen im Mathematikunterricht.

Die Rezeption mathematischer Schönheiten bedarf also nicht zwingend einer besonderen Begabung, wie sie für den produzierenden Mathematiker beschrieben wird. Auch ist sie nicht an ein bestimmtes Niveau von Komplexität oder Vorwissen gebunden, so dass mathematisch-ästhetische Erfahrungen, wie sie aus der Wissenschaftspraxis bekannt sind, prinzipiell in jeder Schulstufe möglich sind. Dies soll aber nicht über die Voraussetzung hinwegtäuschen, dass die Gegenstände, an denen die mathematische Schönheit erfahren werden kann, zuallererst inhaltlich durchdrungen sein müssen und ein Wissen um ihren Kontext aufgebaut werden muss.

9.2.3 Voraussetzungen auf Seiten der Lehrenden

> „Als Lehrer bin ich die Linse, durch die der Schüler die Mathematik sieht, sie stellt sich ihm so dar, wie ich sie ihm zeige. Allein dieser Gedanke regt uns Lehrende dazu an, [...] dem Schüler ein möglichst genaues, vielschichtiges und anregend schönes Bild der Mathematik zu entwerfen.“ (Barth, 2005, S. 69)

Armin P. Barth mahnt die besondere Verantwortung an, die aus der weitgehenden Konzentration des Mathematiklernens auf den schulischen Unterricht auch bezüglich der mathematikästhetischen Bildung auf den Lehrerinnen und Lehrern lastet. Die oben herausgestellte Rolle, die die mathematische Schönheit und ein Bewusstsein für den Kunstcharakter der Mathematik für die individuelle Haltung der Schülerinnen und Schüler sowie ihre Fähigkeiten im Umgang mit Mathematik spielt, fordert eine Beschäftigung mit den Erfordernissen auf Seiten der Lehrpersonen aus mathematikästhetischer Perspektive. Auf der Grundlage der vorangegangenen Überlegungen zur unterrichtlichen Ausgestaltung und den Ergebnissen dieser Arbeit sollen hier solche Voraussetzungen skizziert werden. Die Integration mathematikästhetischer Fragen in den Unterricht setzt auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer Erfahrungen verschiedener Art voraus, die über die erste Forderung nach einem grundsätzlichen Bewusstsein für die Relevanz des Ästhetischen im Rahmen der Mathematik sowie ihren Kunstcharakter hinausgehen.

Mit Blick auf die Ergebnisse aus Teil I zum mathematischen Schönheitsbegriff können die Anforderungen konkretisiert werden: Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen mindestens eine Ahnung von der Tragweite der unterrichteten Gegenstände haben. Dazu sind sowohl Einblicke in deren (innermathematische) Anwendungen als auch in die Entwicklungsgeschichte notwendig, um wie es Armin Barth fordert „ein möglichst genaues, vielschichtiges und anregend schönes Bild der Mathematik“ im Unterricht für die Schülerinnen und Schüler „entwerfen“ können (Barth, 2005, S. 69). Sie sollten auch in der Lage sein, authentisch die emotionale Wirksamkeit zu vermitteln. Dazu zählt insbesondere auch die emotional gefärbte Qualifikation anderer Eigenschaften, wie die Betonung *erstaunlicher* Ökonomie oder *unerwarteter* Tragweite eines Beispiels. Weiter muss eine Lehrperson das Moment des tiefen Verstehens oder des Aha!-Erlebnisses aus eigener Erfahrung kennen und diese epistemische Transparenz als ästhetisches Kriterium einordnen können.

Die Ergebnisse zum Kunststatus der Mathematik aus Teil II verweisen darüber hinaus darauf, dass zum Erleben solcher epistemischen Transparenz auch die Erfahrung gehört, dass sich das besondere Verstehen häufig erst nach längerer eingehender Beschäftigung mit einem schönen Gegenstand einstellt und über das erste Erfassen etwa eines Argumentationsgangs hinaus geht. Dies gilt nicht nur im Rahmen des produktiven Umgangs mit Mathematik, wie er etwa von Poincaré und anderen beschrieben wird (vgl. 6.1). Ein solch forschender Umgang ist auch und insbesondere für die Rezeption mathematischer Kunst notwendig. Dies muss den Mathematiklehrerinnen und -lehrern insbesondere mit Blick auf die methodische Ausgestaltung des Unterrichts bewusst sein. Sollen im Mathematikunterricht auch Stile innerhalb der Mathematik(-geschichte) ausgewiesen und die damit verbundenen Erfahrungsmöglichkeiten genutzt werden, setzt das bei den Lehrpersonen zunächst generell das Wissen um diese Möglichkeit und verschiedenen Beispiele voraus. Neben Kenntnissen zur Geschichte des Faches zeigen die unter 6.3 beschriebenen Ansätze zum mathematischen Text als Kunstwerk, dass auch hier wiederum Erfahrungen durch die vertiefte Analyse mit einzelnen Beispielen hilfreich ist, ein Gespür für die stilbildenden Elemente zu erhalten.[13]

Bereits diese kurze Skizze zeigt, dass auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer ein spezielles Bewusstsein für das mathematisch Schöne und den Kunststatus der Mathematik existieren muss, das sich auf das Wissen um mathematikästhetische Kategorien und Funktionen mathematischer Schönheit einerseits und auf eigene Erfahrungen mit den ästhetischen Gegenständen andererseits gründen muss.[14] Die Integration des Ästhetischen in die Unterrichtspraxis, wie sie etwa im Lehrplan gefordert wird, macht also *Reflexion über Mathematik* sowie Einblicke in die und *eigene Erfahrungen* mit der mathematischen Praxis notwendig – Voraussetzungen, die bereits im Studium geschaffen werden können und müssen. Damit können auch aus mathematikästhetischer Perspektive zentrale Pfeiler einer gelungenen Lehrerbildung (vgl. Beutelspacher u. a., 2011, S. 187ff) unterstrichen werden.

9.3 Zum Bildungswert schöner Mathematik

> „Die Unterrichtsqualität steigt in dem Maße, in dem Lernen für die Schülerinnen und Schüler zu einer sinnvollen Tätigkeit wird. Dies setzt

[13] Die Analyse von Felix Kleins *Zwischenstück: Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt* zeigt darüber hinaus, dass die bewusste Reflexion verschiedener Stile in der Mathematikgeschichte durch die Lehrperson zur begründeten Wahl von Inhalten und Herangehensweisen des Mathematiklehrens herangezogen werden kann (vgl. Allmendinger und Spies, 2013).

[14] Mit der Eulerschen Gerade schlägt Heinrich Winter (2007) ein konkretes Beispiel, an dem im Rahmen der Lehrerbildung eine mathematischästhetische Erfahrung gemacht werden könne, inhaltlich vor, ohne dieses jedoch vor theoretischen Überlegungen zur Mathematikästhetik weiter zu diskutieren.

> voraus, dass der Unterricht die in den Fächern liegenden Bildungswerte aufschließt.“ (Müller u. a., 2002, S. 58)

Die Verbindung von Ästhetik und Mathematik, wie sie in dieser Arbeit in den Blick genommen wird, ruft mit Blick auf die Umsetzung in der Schule auch grundsätzlich die Frage nach der Legitimation eines solchen Ansinnens hervor. Bisher wurden die Facetten und erwarteten (positiven) Folgen der Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht bezogen auf die individuelle Motivation, die Problemlösekompetenz oder ein gültiges Wissenschaftsbild zunächst isoliert herausgearbeitet. Dies kann nun zusammengeführt und in den Dienst der umfassenderen Fragen nach dem Beitrag der Mathematikästhetik zum Bildungswert des Faches gestellt werden. Wenn also die Forderung nach ästhetischen Erfahrungen im Rahmen eines Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen gestellt wird (vgl. z.B. Lehrplan Mathematik Sek. II NRW, 1999, S. 38), so ergibt sich daraus zunächst die Frage nach der Verortung der Mathematikästhetik in Konzepten mathematischer *Allgemeinbildung*. Aus der Bedeutung, die ästhetischen Werturteilen wie der mathematischen Schönheit beigemessen wird, einerseits und dem Ergebnis, durchaus gerechtfertigt von der Mathematik als Kunstform zu sprechen, andererseits entsteht weiter die Frage danach, ob und inwiefern die Mathematik so betrachtet einen Beitrag zur *ästhetischen Bildung* leisten kann.

9.3.1 Der Beitrag zur Allgemeinbildung

Hier sollen nun zunächst Anknüpfungspunkte zwischen den bisherigen Ergebnissen zur Mathematikästhetik und zwei Vorschlägen zum Allgemeinbildungswert der Mathematik in der Schule skizziert werden: Zuerst wird eine Anbindung an die „Grunderfahrungen“ nach Heinrich Winter (1995) vorgeschlagen, gefolgt von einer Verortung innerhalb der Heymannschen „Aufgaben der allgemeinbildenden Schule“ (vgl. Heymann, 1996). Die beiden Konzepte unterscheiden sich nicht nur in ihrer grundsätzlichen Anlage, sondern geben auch Anknüpfungspunkte zu jeweils unterschiedlichen Bereichen, die bisher mit der Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht angesprochen wurden und können so verschiedene Facetten der Bildungswirksamkeit der Mathematikästhetik im schulischen Mathematikunterricht aufdecken.

Heinrich Winter fordert in einem häufig aufgegriffenen und diskutierten Artikel unter dem Titel *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht aller Stufen an allgemeinbildenden Schulen drei „Grunderfahrungen“ machen sollen: Allgemeinbildender Mathematikunterricht soll es erstens ermöglichen „Erscheinungen der Welt um uns, [...] aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“. Zweitens sollen Schülerinnen und Schüler „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ kennen und auffassen

lernen. Schließlich soll drittens die Möglichkeit geschaffen werden, „in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben" (Winter, 1995, S. 37).
Mit der ersten Grunderfahrung verweist Winter explizit auf die außermathematische Anwendung und damit u.a. auf das mathematische Modellieren. Dazu nennt er Beispiele aus Naturwissenschaft, Technik und Finanzmathematik und stellt fest, dass „[d]arüber hinaus [...] die Kenntnis der Beziehungen zu Kunst, Design und Architektur von beiderseitigem Nutzen" (Winter, 1995, S. 39) sei. Es geht ihm dabei insbesondere um die Anwendung von Geometrie im Bereich der bildenden Künste, also um Erfahrungen mit den vom Gegenstandsbereich dieser Arbeit abzugrenzenden „Mustern durch Mathematik" und den „Mustern über Mathematik" (vgl. 1.1.1 bzw. 1.1.1). Außerdem weist er auf die „fundamentale Idee der Symmetrie" zur Beschreibung der Phänomene im Raum hin (vgl. Winter, 1995, S. 39). Ästhetische Erfahrungen mit Beweisen oder Theoremen können zu dieser ersten Grunderfahrung nur insofern einen Beitrag leisten, als dass auch die außermathematische Anwendung einen (randständigen) Teil des Eigenschaftskomplexes der Tragweite ausmacht und insofern Anwendungserfahrungen auch im Rahmen der Mathematikästhetik eine Rolle spielen. Deutlicheren Einfluss kann die Mathematikästhetik naturgemäß im Rahmen der zweiten Grunderfahrung haben. So zeigt insbesondere Kapitel 6, dass die Betrachtung innermathematischer Gegenstände als Kunstwerke und ihrer Produzenten als Menschen mit kreativem Potential verborgene Facetten der Wissenschaft und Kulturleistung Mathematik offenbart. Winter selbst weist diesbezüglich auf das zu erfahrene Bild vom Mathematiker als Architekt innermathematischer Strukturen hin: „Jeder Schüler sollte erfahren, dass Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen." (Winter, 1995, S. 39) Bemerkenswert ist außerdem, dass Winter als Beispiele, an denen die zweite Grunderfahrung gemacht werden kann, gerade die Paradebeispiele der Mathematikästhetik anführt: Der griechische Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlreihe sei „eine deduktive Figur, die etwas von der Kraft autonomen Denkens verspüren lässt" (Winter, 1995, S. 40). Ähnlich hebt er die Argumentationen um die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und ihre geometrische Deutung hervor (vgl. auch 10.2). Auch bezüglich der methodischen Voraussetzung der zweiten Grunderfahrung kommt er zu einem ähnlichen Ergebnis, wie es oben für die mathematikästhetische Erfahrung hergeleitet wird: Die „Deduktivität [kann] nur erfahren werden, wenn sie von einer kreativen Konstruktivität [...] geleitet wird" (Winter, 1995, S. 41). Die mathematikästhetische Erfahrung im schulischen Unterricht kann somit mindestens in Teilen ein Beispiel der zweiten Winterschen Grunderfahrung werden.
Die Überlegungen zur Rolle des Ästhetischen im mathematischen Problemlöseprozess unter 9.1.3 verweisen auf den Beitrag der Mathematikästhetik zur dritten Grunderfahrung. Dabei zeigen sich Einflussmöglichkeiten der mathematikästhetischen Perspektive auf die Problemlösekompetenz sowohl im Bereich des aktiven Problemlösens als auch und insbesondere in der Reflexion bestehender Argumentationsgänge. Auch Winter greift letzteres implizit auf, in dem er als mögliche

Fragen zur Reflexion der Lösung u.a. die folgenden vorschlägt: „War das Ergebnis zu erwarten, oder ist das Ergebnis irgendwie überraschend? Gibt es womöglich einen kürzeren, eleganteren Lösungsweg?“ (Winter, 1995, S. 42) Es stehen also Facetten des mathematischen Schönheitsbegriffs (vgl. Kapitel 2) zur Diskussion. Danckwerts und Vogel deuten die dritte Grunderfahrung darüber hinaus, indem sie darauf verweisen, dass heuristische Fähigkeiten „eingebettet [sind] in eine intellektuelle Haltung, zu der auch die Bereitschaft gehört, sich frei, kreativ und positiv gestimmt einer gedanklichen Herausforderung zu stellen“ (Danckwerts und Vogel, 2006, S. 6). Zu einer solchen intellektuellen Haltung mindestens gegenüber der Mathematik kann die Mathematikästhetik beitragen (vgl. 9.1.1 und 9.1.2).[15]

Mit dem Begriff „Grund*erfahrungen*“ bringt Winter explizit auch eine methodische Forderung an allgemeinbildenden Unterricht ins Spiel, und er betont, „dass das Lernen von Mathematik weit mehr sein muss als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Information, dass Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden muss“ (Winter, 1995, S. 38). In 9.2 wurde herausgearbeitet, dass ein Unterricht, der das ästhetische Moment der Mathematik aufgreifen und erfahrbar machen will, genau das leisten muss.

> „Der entscheidende Punkt ist: Erst in der expliziten wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe seine spezifisch bildende Kraft entfalten.“ (Danckwerts und Vogel, 2006, S. 7)

Zur Erfüllung dieser Forderung, die auch in den Ausführungen Winters immer wieder durchscheint, kann die mathematikästhetische Perspektive entscheidend beitragen. So bietet die Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht, wie sie oben skizziert wird, etwa mit dem Begriff mathematischer Schönheit eine konzeptionelle Grundlage zur „wechselseitigen Integration“: Die mathematikästhetische Erfahrung integriert in Elementen jede der Grunderfahrungen und setzt sie so in eine spezifische Beziehung. Die mit dem ästhetischen Erleben in Verbindung gebrachten positiven subjektiven Wirkungen (vgl. 9.1.1) verweisen darüber hinaus auf Werte im Bereich der Persönlichkeitsbildung, die im Winterschen Allgemeinbildungskonzept nicht explizit enthalten sind.

Anders als Winter präsentiert Hans Werner Heymann (1996) zunächst unabhängig vom Fach sieben Aufgaben, die ein als allgemeinbildend geltender Unterricht erfüllen sollte, um dann im zweiten Schritt die Mathematik an diesen zu messen. Dies führt Heymann u.a. zu dem Schluss, dass ein Teil der Aufgaben keinen inhaltlichen Bezug zum Fach Mathematik aufweisen und daher lediglich durch die

[15] Winter sieht den allgemeinbildenden Wert des mathematischen Problemlösens u.a. in der Übertragbarkeit der heuristischen Strategien auf Probleme des Alltags. Sicher spielt die Ästhetik insbesondere bei alltäglichen Entscheidungsproblemen eine zentrale Rolle. Ob hier aber die mathematikästhetische Perspektive aus dem Unterricht nutzbar gemacht werden kann oder ob es nicht vielmehr umgekehrt der Fall ist, dass die gängige Praxis ästhetischer Werturteile im Alltag bewusst für den Mathematikunterricht nutzbar gemacht wird, bleibt zu klären.

Veränderung der Unterrichtskultur im Rahmen des Mathematikunterrichts wirksam werden können. Hierzu zählen die Aufgaben „Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft“, „Einübung in Verständigung und Kooperation“ sowie „Stärkung des Schüler-Ichs“. Zu klären ist, ob die „personenbezogenen“ Effekte der Beschäftigung mit mathematisch Ästhetischem hier einen Beitrag leisten können.
Um auch den Aufgaben mit „sozialethischer und personenbezogenener Zielsetzung“ (Heymann, 1996, S. 249) im Mathematikunterricht Raum zu schaffen, gibt Heymann eine Reihe methodischer Anregungen wie etwa das „Zulassen individuell unterschiedlicher Lösungswege, Gelegenheit zum spielerischen Umgang mit Mathematik, Aufgreifen auch ungewöhnlicher Ideen sowie [. . .] eine Öffnung des Mathematikunterrichts für philosophische und wissenschaftstheoretische Fragestellungen“ oder auch „mehr ‚offene‘ Aufgaben“ (Heymann, 1996, S. 261), und widmet außerdem ein ganzes Unterkapitel den „Merkmalen einer neuen Unterrichtskultur“ (vgl. Heymann, 1996, S. 262ff). Diese methodisch-pädagogischen Ergebnisse und Anregungen bereiten der Integration des Ästhetischen einen besonders fruchtbaren Boden und unterstützen die in 9.2.1 herausgearbeiteten unterrichtlichen Voraussetzungen. Auf die Möglichkeiten mathematikästhetischer Erfahrungen geht Heymann jedoch nur insofern ein, als dass er im Rahmen einer „allgemeinbildenden Unterrichtskultur“ Möglichkeiten zur Erprobung von Phantasie und Kreativität fordert. Dass die Schülerinnen und Schüler dies lediglich „auf spielerische Weise in *mathematikhaltigen* Situationen“ (Heymann, 1996, S. 266, Hervorhebung S. Sp.) erproben sollen, weist aber darauf hin, dass Heymann hier nicht primär auf den phantasievollen und kreativen Umgang mit innermathematischen Inhalten abzielt. Ein mathematisch-künstlerisches Handeln, wie es unter 6.1 für den produktiven Mathematiker beschrieben wurde, steht also nicht im Vordergrund.
Somit verwundert es auch nicht, dass Heymann die mit der Schönheit als *fachimmanente* Eigenschaft und dem Kunstcharakter der Mathematik verbundenen Auswirkungen für die Schülerpersönlichkeit (vgl. 9.1) nicht heranzieht und behaupten kann, dass „Mathematik mit den [. . .] sozialethischen und auf die Person des Schülers bezogenen Aufgaben der Schule inhaltlich zunächst nichts zu schaffen“ (Heymann, 1996, S. 249) habe. Die Ausführungen unter 9.1 weisen jedoch m.E. darauf hin, dass mit den mathematisch-ästhetischen Eigenschaften der Mathematik auch die personenbezogenen Aufgaben *inhaltsbezogen* bedient werden können. Insbesondere bezogen auf die „Stärkung des Schüler-Ichs“ kann die mathematikästhetische Perspektive durch den subjektiv-emotional wirksamen Charakter mathematischer Schönheit einen Beitrag leisten. Dies gilt nicht nur bezogen auf die aktuelle Motivation und die affektive Haltung (vgl. 9.1.1), sondern auch auf das subjektive Mathematikbild (vgl. 9.1.2), welches Heymann folgend häufig eine „hemmende“ Rolle im Rahmen der Ich-Stärkung einnimmt (vgl. Heymann, 1996, S. 261). Außerdem bildet das bewusste Einbeziehen mathematisch-ästhetischer Werturteile in die Reflexion über mathematische Argumentationsgänge oder Problemlösestrategien ein Moment der *inhaltlichen* Verständigung abseits der Frage nach richtig oder falsch. Das individuelle ästhetische Werturteil der Beteiligten gehört dabei zum mathematischen Diskurs. Die ästhetische Dimension der Mathematik eröffnet also

auch dort die Möglichkeit eines Beitrags inhaltlicher Art zur Allgemeinbildung, wo Heymann ausschließlich methodische Möglichkeiten sieht.

Dabei darf nicht vergessen werden, dass die Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht nicht auf das subjektiv emotionale Moment reduziert werden darf und somit auch zu den anderen Heymannschen Aufgaben allgemeinbildender Schulen einen Beitrag leisten kann: Im Rahmen der „Lebensvorbereitung im weiteren Sinne“ bietet die Beschäftigung mit mathematischer Schönheit die Erfahrung eines lohnenden Umgangs mit „geistig herausfordernden Stoffen“ (Heymann, 1996, S. 60) und damit einen Beitrag, der über die Orientierung an der außermathematischen Anwendung hinaus geht.
Da das Schöne mindestens seit der griechischen Antike – mit unterschiedlichen Begründungen – eng mit der Wissenschaft Mathematik verbunden ist (vgl. Kapitel 3), gehört mindestens ein Wissen darum zur „Stiftung kultureller Kohärenz“. Ähnliches gilt für die verschiedenen Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und anderen Kulturleistungen, wie der Kunst oder der Musik. Dazu zählen neben der in dieser Arbeit weitgehend ausgeblendeten Anwendung der Mathematik zur Herstellung und Analyse bildender Kunst auch die Versuche zur Identifikation gemeinsamer Stile, wie sie unter 6.2 vorgestellt und diskutiert werden.

Die mit mathematikästhetischen Erfahrungen einhergehende epistemische Transparenz ist gekennzeichnet durch das Erleben eines besonderen tiefen Verstehens. Ein mathematisches Verstehen verbunden etwa mit dem Aha!-Erlebnis beschreibt Heymann als eine Voraussetzung für den „kritischen Vernunftgebrauch“ im Rahmen der Mathematik (vgl. Heymann, 1996, S. 210ff). Somit können mathematische Schönheitserfahrungen in besonderer Weise zur Erfüllung dieser Aufgabe beitragen.

9.3.2 Der Beitrag zur ästhetischen Bildung

Im Rahmen von Überlegungen zum Lehren und Lernen von Mathematik mit und durch ihre Ästhetik ergibt sich neben der Frage nach dem Beitrag zur Allgemeinbildung – mithin also nach der Legitimation der Umsetzung an allgemeinbildenden Schulen – auch die Frage nach dem Bildungswert für den Einzelnen. Im Folgenden soll ein Antwortversuch gegeben werden, in dem speziell auf den Beitrag der Mathematik zur *ästhetischen Bildung* eingegangen wird. Im Fokus steht also die Frage, inwiefern die Auseinandersetzung mit der Kunstform Mathematik ästhetisch bildsam sein kann und was eine solche Subjektbildung durch die Erfahrung mathematischer Schönheit bedeutet.

Der Begriff der ästhetischen Bildung wird – wie bereits seine Bestandteile „ästhetisch“ und „Bildung“ – auf verschiedenste Weise und in unterschiedlichen Zusammenhängen verwendet. Die Verwendung reicht von einem Synonym für die Didaktik des Faches Kunst über ein Ziel der Museumspädagogik bis hin zu *dem* Mittel

zur Moralerziehung[16] und Identitätsstiftung.[17] Dieser breite Rahmen verweist wiederum auf ein großes Spektrum an Gelegenheiten, Mitteln und Hoffnungen, die mit der ästhetischen Bildung in Verbindung gebracht werden (vgl. Spies, 2005).
In den allermeisten Fällen sind es die traditionellen Formen bildender Kunst, die als Gegenstand zur ästhetischen Bildung im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen. Seltener wird auch der Frage nachgegangen, inwiefern ästhetische Bildung in anderen Bereichen und Schulfächern gelingen kann. Dabei stehen an erster Stelle die sprachlichen Fächer und die Gesellschaftswissenschaften, wobei auch hier häufig die ästhetische Bildung durch die methodische Bezugnahme auf Gegenstände, die allgemein als Kunstwerke anerkannt sind, und weniger durch die je fachspezifischen Inhalte angestrebt wird (vgl. z.B. Engel (2004)). Bezogen auf naturwissenschaftlich orientierte Fächer sind etwa die Überlegungen zum Sachunterricht in der Grundschule von Claudia Schomake (2008) zu nennen.
Überlegungen zum Beitrag der Mathematik zur ästhetischen Bildung beschränken sich im Wesentlichen auf die Anwendung bildender Kunst im Rahmen des Lehren und Lernens von Mathematik. Häufig wird gar ein nicht hinterfragter Gegensatz zwischen den Fächern mit traditionell ästhetischem Bildungswert wie Kunst oder Musik einerseits und den „PISA-bezogenen" (Rittelmeyer, 2010, S. 7) Fächern wie Mathematik und Naturwissenschaften anderseits aufgebaut (vgl. Rittelmeyer, 2010, S. 9ff). Die Frage allerdings, inwiefern mathematische Bildung auch ästhetische Bildung sein kann, wird meines Wissens nicht thematisiert. Dies ist angesichts der generell dünnen Literaturlage zur Integration der Mathematikästhetik, wie sie hier verstanden werden soll, in das Lehren und Lernen von Mathematik zunächst nicht erstaunlich, obgleich die Zustimmung zu einer ästhetischen Seite der Mathematik diese Frage eigentlich nahelegt.[18]

Insbesondere vor dem Hintergrund der Ergebnisse aus Teil II und der vorangegangenen Überlegungen zu den Möglichkeiten, mathematische Schönheit im Unterricht erfahrbar zu machen, liegt eine triviale Antwort auf die Frage nach dem Beitrag zur ästhetischen Bildung auf der Hand: Mathematik ist eine Kunstform oder kann mindestens berechtigt als eine solche behandelt werden. Damit sind die auf die Künste bezogenen Überlegungen im Rahmen der ästhetischen Bildung auf die Mathematik übertragbar. Insbesondere wenn davon ausgegangen wird, dass der vertiefte Umgang mit Kunstwerken zu Prozessen ästhetischer Bildung führt, muss mathematische Bildung in direkter Weise zur ästhetischen Bildung beitra-

[16] Dies ist insbesondere in der Tradition der ästhetischen Bildung begründet, war doch die Erziehung zur Humanität durch die Kunst eines der Hauptanliegen von Schillers 27 Briefen *Über die ästhetische Erziehung des Menschen*, als erstem Werk, da sich explizit mit ästhetischer Erziehung auseinandersetzt.

[17] Wie die viel beachteten Ausführungen Klaus Mollenhauers zur Frage *Ist ästhetische Bildung möglich?* (Mollenhauer, 1988) zeigen, wird auch die Frage, ob eine institutionalisierte ästhetische Bildung überhaupt möglich ist, durchaus als berechtigt angesehen.

[18] Die folgenden Ausführungen sind somit ein erster Schritt zur Beantwortung dieser Frage und bleiben daher eine Skizze auf theoretischer Ebene. Eine Konkretisierung etwa mit Blick auf die unterrichtspraktische Umsetzung mathematik-ästhetischer Bildung würde in diesem Rahmen zu weit führen.

gen. Mit dieser grundsätzlichen Feststellung kann aber das Nachdenken über den Beitrag der Mathematik zur ästhetischen Bildung sicher noch nicht abgeschlossen sein. Um fruchtbar für Überlegungen zum schulischen Mathematikunterricht zu werden, bedarf es Konkretisierungen. Im Folgenden sollen daher die Möglichkeiten der Mathematik bezüglich der ästhetischen Bildung in den Blick genommen werden. Um dabei nicht der Gefahr einseitiger Schlüsse durch die Prüfung an einem einzigen isolierten Konzept zu erliegen, wird die Charakterisierung von Johannes Bilstein und Jörg Zirfas als Grundlage herangezogen, die verschiedene Ansätze, ästhetische Bildung zu fassen, integriert und gleichzeitig klar angelegt ist.[19] Die von Bilstein und Zirfas (2009) herausgearbeiteten „Dimensionen Ästhetischer Bildung" sollen dabei die Untersuchung gliedern.

> „Ästhetische Bildung meint hier: Die (bewusste und reflexive) Entwicklung von Sinnestätigkeiten bzw. von einzelnen Sinnen; bzw. stärker auf die Kunst bezogen: die Entfaltung der Sinnlichkeiten im Kontext eines kunstförmigen, vielfache Entfaltungen zulassenden Rahmens." (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 17)

Da bei dieser ersten Dimension die sinnliche Wahrnehmung im Zentrum der Reflexion steht, bezeichnen Bilstein und Zirfas sie als „aisthetische Bildung". Natürlich ist auch alles Nachdenken über ein Stück Mathematik letztlich durch einen Sinneseindruck evoziert, welcher Art dieser ist, ist aber wenig entscheidend für das mathematisch-ästhetische Werturteil. Ein Stück Mathematik wird nicht schöner oder hässlicher, ob es gehört oder gelesen wird. Je nach Rezipiententyp wird der Gegenstand lediglich leichter zugänglich.[20] Bezogen auf Bildbeweise oder stark anschauungsgebundene Argumenationen im schulischen Geometrieunterricht spielt die visuelle Wahrnehmung sicher eine etwas stärkere Rolle. Das mathematisch-ästhetische Werturteil bezieht sich jedoch auch hier letztlich auf die zugrunde liegende Idee und somit auf einen abstrakten Gegenstand.

Obgleich der Gedanke der Aisthesis bezogen auf den Gegenstandsbereich der Mathematikästhetik, wie er in dieser Arbeit im Mittelpunkt steht, also problematisch ist, erlaubt der Ansatz von Bilstein und Zirfas dennoch Querverbindungen. So zählen sie neben den klassischen Fern- und Nahsinnen auch die propriozeptiven und emotionalen Wahrnehmungen zu den ästhetischen Wahrnehmungsmöglichkeiten, die im Bewusstsein des Wahrnehmenden gespiegelt werden sollen. Für die Mathematikästhetik rückt bei dieser Dimension der ästhetischen Bildung also ins-

[19] Angelegt, um die verschiedensten historischen Ansätze aus der *Geschichte der Ästhetischen Bildung* (Zirfas u. a. (2009)) zu verorten, ist das Konzept einerseits breit genug, um die ästhetische Mathematik nicht gleich als „Exoten" zurückzuweisen. Andererseits beziehen sich Bilstein und Zirfas aber auch auf breitgeteilte Kerncharakteristika und verhindern so, dass der Begriff der ästhetischen Bildung zu weit verwendet werden kann und somit seine Aussagekraft verliert.

[20] Vgl. hierzu auch die Diskussion um den Begriff der Eleganz als Eigenschaft mathematischer *Darstellungen* unter 2.5.1 und insbesondere den aisthetischen Wert der Mathematik unter 5.3.

besondere die individuelle emotionale Betroffenheit im Umgang mit schöner Mathematik in den Vordergrund. Eine mathematisch-ästhetische Bildung in diesem Sinne kann und muss dazu einerseits bewusst Raum für den individuellen Umgang mit den Gegenständen schaffen, in dem nicht nur „die“ Lösung eines Problems anvisiert wird. Andererseits müssen diese Gefühlsqualitäten und ihre Wahrnehmung bewusst gemacht und reflektiert werden. Es gilt also den ästhetisch zu bildenden Schüler auf den Eigenschaftskomplex der „emotionale Wirksamkeit“ und sein subjektives Erleben der Mathematik aufmerksam werden zu lassen.
Zu dieser Dimension zählen auch sogenannte Sinneserfahrungen. Diese unterscheiden Bilstein und Zirfas insofern von den Sinneswahrnehmungen, als dass mit ihnen „eine mit dem Vollziehen von sinnlichen Tätigkeiten vorhandene (Einstellungs-)Veränderung zu dem, was erfahren wurde“ (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 17) einhergeht. Insofern sind Motivations- und Haltungsänderungen, die durch die positiven emotionalen Erfahrungen im Umgang mit schöner Mathematik hervorgerufen werden (vgl. 9.1.1), ein Aspekt ästhetischer Bildung.

> „Ästhetische Bildung betrifft hier die Ausdifferenzierung der imaginatio, der Einbildungskraft, der Phantasie.“ (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 18)

Die Schulung der Einbildungskraft bezogen auf die Schönheit der Mathematik geht über die Rolle von mathematischer Kreativität im Rahmen der Problemlösekompetenz (vgl. 9.1.3) hinaus. Diese dritte[21] Dimension der ästhetischen Bildung setzt grundlegender an und markiert somit gleichzeitig einen oben noch nicht beachteten Aspekt: Um die Schönheit einer mathematischen Argumentation erkennen zu können, muss die Einbildungskraft entsprechend sensibilisiert und ausdifferenziert werden. Dazu zählt – der Diskussion unter 8.1 folgend – die über das technische Abarbeiten hinausgehende Phantasie im Rahmen der Produktion von Mathematik einerseits und andererseits das Wissen um und ein Gespür für die inhaltlich nicht determinierte Aussagekraft eines Stücks Mathematik auf Seiten der Rezipienten. Mathematisch-ästhetische Bildung in diesem Sinne zielt somit auf den ästhetisch-semantischen Gehalt von Mathematik ab.
Bilstein und Zirfas verweisen außerdem darauf, dass „imaginäre Bilder immer mehr als nur pure Wahrnehmungen [sind], gehen in sie doch ästhetische Wertungen, individuelle und kollektive Symbolisierungen, traditionelle Codierungen, biographische Reminiszenzen und kollektive Symbolisierungen mit ein“ (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 18). Damit ist ästhetische Bildung im Sinne einer „Ausdifferenzierung der imaginatio“ einerseits Voraussetzung für die oben mit der Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht verbundenen Hoffnungen, andererseits bedeutet sie

[21] Die zweite von Bilstein und Zirfas aufgezeigte Dimension ästhetischer Bildung zielt auf die bildenden Wirkungen direkter subjektiver, körperlicher Erfahrung etwa im Tanz und beim Theater ab (vgl. Bilstein und Zirfas, 2009, S. 18). Die Mathematik wie auch andere nicht notwendig körperlich involvierende Kunstformen – etwa die Literatur – kann dabei keinen entscheidenden Beitrag leisten, so dass hier auf diese Dimension nicht weiter eingegangen wird.

aber auch eine eigenständige Zielsetzung. Zum Mathematiklernen muss also auch das Verinnerlichen der tradierten Wertungen und Symbolisierungen gehören. Hier spielt erneut der Vorbildcharkater der Lehrperson eine entscheidende Rolle.

Der Aspekt, im Rahmen ästhetischer Bildung die Kulturleistung Kunst bzw. Mathematik als solche verstehen zu lernen, wird in der folgenden Dimension ausgeschärft und auf die Ebene des bewussten Lernens gehoben:

> „Ästhetische Bildung meint hier einerseits das Erlernen spezifischer kultureller und symbolischer Zeichensysteme, meint Befähigung zur (universalisierbaren) ästhetischen Urteilsbildung (ästhetische Alphabetisierung); und sie betrifft andererseits den kreativen Denk- und Urteilsprozess, der in der Lage ist, bislang Gültiges neu und anders zu verstehen (ästhetische Kreativität)." (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 19)

Mit dieser Dimension ästhetischer Bildung knüpfen Bilstein und Zirfas an Klaus Mollenhauer an. Für ihn besteht eine unerlässliche Aufgabe der ästhetischen Bildung darin, die „Lesbarkeit der ästhetischen Objektivationen unserer Kultur" (Mollenhauer, 1990, S. 11) weiterzugeben. Mollenhauer geht davon aus, dass mittels der Kunst etwas mitgeteilt werden kann, was andere Zeichen nicht vermögen. Diese Zeichen lesen zu lernen, sei vergleichbar mit dem Schriftspracherwerb, so dass es sich bei der ästhetischen Alphabetisierung um einen klassischen Alphabetisierungsprozess handele (vgl. Mollenhauer, 1990, S. 10). Dies impliziert wiederum, dass das Zeichensystem Kunst jeweils kulturell gegebenen Regeln gehorcht, die es zu lernen und zu interpretieren gilt. In diesem Sinne bestimmt Mollenhauer die „ästhetische Alphabetisierung [...] als [den] vielleicht nicht ganz treffende[n], aber mögliche[n] Ausdruck für den Lernvorgang [...], in dem nichtsprachliche kulturell produzierte Figurationen in einem historisch bestimmten Bedeutungsfeld lokalisiert, das heißt als bedeutungsvolle Zeichen ‚lesbar' werden" (Mollenhauer, 1990, S. 11). Bezogen auf eine mögliche mathematisch-ästhetische Bildung bedeutet das, dass die behandelten Gegenstände als Träger ästhetischer „Informationen" verstanden werden müssen. Dies geht deutlich über das klassische mathematische „Lesenlernen" im Sinne eines Erfassens der inhaltlichen Bedeutung der Zeichen hinaus. Die Lernenden müssen zusätzlich auf den intersubjektiven und kulturell geprägten ästhetischen Gehalt der Gegenstände aufmerksam werden. Dazu gehören einerseits Eigenschaften wie die erstaunliche Tragweite oder die Ökonomie (vgl. 2.1 bzw. 2.2), aber auch die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Stilepoche und die damit ggf. einhergehende kulturelle und historische Färbung (vgl. 6.2). Diese lesen zu lernen bedeutet dann wiederum, ihre je spezifische Bedeutung kennen und einschätzen zu können.

Der kreative Produktionsprozess wird von Bilstein und Zirfas in einer weiteren Dimension ausgeschärft:

> „Ästhetische Bildung meint hier die rezeptive und produktive Auseinandersetzung mit Kunst und mit als ästhetisch – oftmals als schön

> – qualifizierten Gegenstandsbereichen; sie ist insofern bezogen auf die kreativen Umwandlungs- und Gestaltungspotentiale von kunstförmigem Material.“ (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 20)

Diese Dimension entspricht der Deutung der ästhetischen Bildung als klassischem Kunstunterricht mit Fokus auf den eigenen kreativen Umgang. Wird die Mathematik als Kunst bzw. ihre Gegenstände als „kunstförmiges Material“ behandelt, so ist ästhetische Bildung in diesem Sinne auch Teil eines Mathematikunterricht, in dem auf den ästhetischen Gehalt der Gegenstände hingewiesen wird und außerdem Raum für den eigenen kreativen Arbeitsprozess der Schülerinnen und Schüler besteht. In einem Unterricht, der das Mathematikästhetische integriert, bedeutet das mathematische Lernen generell die „rezeptive und produktive Auseinandersetzung mit [der Kunstform Mathematik] und mit als ästhetischen – oftmals als schön – qualifizierten Gegenstandsbereichen.“ Dies bestätigen insbesondere die Überlegungen zur Unterrichtspraxis unter 9.2.1.

Die letzte der von Bilstein und Zirfas angeführten Dimensionen zielt auf den normativen Charakter ästhetischer Werturteile ab:

> „Ästhetische Bildung als Geschmacksbildung impliziert den Umgang mit sozial-ästhetischen Distinktionsformen der Wahrnehmung, des Urteilens und des Verhaltens und Handelns.“ (Bilstein und Zirfas, 2009, S. 20)

Im Rahmen von mathematischer Bildung als Geschmacksbildung in diesem Sinne müsste nicht nur generell die Möglichkeit mathematikästhetischen Urteilens deutlich werden. Darüber hinaus wären etwa auf verschiedenen Werturteilen gründende Strömungen herauszustellen. Es müssen also insbesondere unterschiedliche Denkstile, mindestens sofern die stilbildenden Elemente ästhetischer Art sind, thematisiert werden. Dazu zählen dann auch bestimmte Vorlieben und Abneigungen innerhalb der einzelnen Teildisziplinen der Mathematik. Mindestens muss aber bei den Lehrkräften ein Bewusstsein dafür entstehen, dass sie im Mathematikunterricht geschmacksbildend wirken, was sich in der generellen Haltung der Schülerinnen und Schüler der Mathematik gegenüber widerspiegeln kann.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen, dass mathematische Bildung nicht per se als ästhetische Bildung angesehen werden kann, nur weil die Mathematik einer Kunstform ähnlich ist. Es gibt aber zumindest Überschneidungen der beiden Bereiche, so dass m.E. ästhetische Bildung am Medium Mathematik unter bestimmten Bedingungen sehr gut möglich ist. Dies setzt allerdings generell voraus, dass im mathematischen Bildungsprozess die mathematikästhetische Komponente konsequent integriert wird. Die Kunstförmigkeit der Mathematik und die Möglichkeit ästhetischer Werturteile muss dabei bewusst und mit dem Ziel, ästhetische Bildung zu ermöglichen, eingesetzt werden. Da dabei insbesondere die Subjektorientierung eine zentrale Rolle spielt, geht dieses Ziel über die oben skizzierte Integration der Mathematikästhetik in den Unterricht hinaus.

Im Nachdenken über das Lehren und Lernen von Mathematik ermöglicht der Beitrag zu einer mathematisch-ästhetischen Bildung eine Legitimation jenseits der klassischen Outputorientierung, der außerdem explizit den Lernenden ganzheitlich in den Blick nimmt. Insofern ergänzt die Perspektive auf die Subjektbildung den Beitrag des Ästhetischen zur schulischen Allgemeinbildung. Es handelt sich außerdem um eine Sichtweise von der Mathematik aus auf das Mathematiklehren und -lernen, bei der die Natur der zugrunde liegenden Gegenstände direkt die Perspektive bestimmt und nicht in erster Linie ihr Potential für außermathematische Anwendungen oder die Ausbildung epistemischer Kompetenzen.

9.4 Mathematikästhetik im Rahmen des Lehrens und Lernens

Die hier eingenommene mathematikästhetische Perspektive auf das Lehren und Lernen zeigt, dass die geforderte Integration der Mathematikästhetik eine Horizonterweiterung auf den verschiedensten Ebenen mathematikdidaktischer Überlegungen ermöglicht. Dies gilt sowohl für die konkrete Auswahl und Legitimation der Unterrichtsinhalte und Unterrichtsmethoden als auch übergreifend für Bereiche wie das Problemlösen, das Argumentieren und Begründen oder die Wissenschaftsorientierung. Ebenso vielfältig sind die Hoffnungen, die begründet mit einem die mathematische Schönheit erfahrbar machenden Unterricht verbunden sind. Sie reichen von einem Beitrag zur individuellen Motivation und Problemlösekompetenz über authentische und wissenschaftsnahe Erfahrungen mit der Mathematik bis hin zu einer positiven Haltung gegenüber und Beziehung zu der Mathematik. Ein Hervorheben der ästhetischen Eigenschaften sowie der Kunstförmigkeit von Mathematik erweitert außerdem den Beitrag des Unterrichtsfachs zur Allgemeinbildung und verweist darauf, dass auch die Beschäftigung mit Mathematik zur ästhetischen Subjektbildung beitragen kann. Insbesondere der subjektive Charakter des mathematischen Schönheitsbegriffs lässt die für das Lehren und Lernen von Mathematik zentrale Beziehung von Mensch und Mathematik auf spezifische Art greifbar und wirksam werden.

Kapitel 10

Klassiker der Mathematikästhetik

> „But, as with other subjective experiences, examples provide the best guide to what is meant." (Gardiner, 1983, S. 80)

Cyril Gardiner nutzt in seinem Essay *Beauty in Mathematics* diesen Hinweis, um von einer kurzen Einleitung über die Relevanz des Ästhetischen für die Mathematik und Bemerkungen zu den von Hardy angeführten Schönheitskriterien (vgl. Zitat S. 28) zu einer ausführlichen Besprechung mehrerer Beispiele überzuleiten. Obgleich den theoretischen Überlegungen zum mathematischen Schönheitsbegriff und zum Kunstcharakter der Mathematik in dieser Arbeit ungleich mehr Gewicht eingeräumt wird als der Darstellung konkreter Beispiele, kann Gardiners Eindruck in mehrfacher Hinsicht zugestimmt werden: Zunächst verweisen die Ergebnisse aus Teil I und II immer wieder auf den Aspekt der Subjektivität, der in Werturteilen über die und im Umgang mit der Kunstform Mathematik zum Tragen kommt. Dabei zeigt sich, dass gerade im Versuch, diese Facette des Mathematikästhetischen zu fassen, auf mögliche individuelle mathematikästhetische Erfahrungen und damit auch auf konkrete Beispiele zurückgegriffen werden muss. An ausgewählten Gegenständen werden aber auch die leichter greifbaren oben herausgearbeiteten Eigenschaften und Zusammenhänge in besonderer Weises deutlich, werden doch am Beispiel die Ergebnisse aus ihrer systematischen Darstellung gelöst. Ein solcher Perspektivwechsel bietet nicht zuletzt die Möglichkeit, Querverbindungen zwischen in den Teilen I und II aus systematischen Gründen unterschiedenen Gebieten zu ziehen.
Der Raum, der der Untersuchung konkreter Beispiele hier eingeräumt wird, zeigt dabei jedoch, dass die Einschätzung Gardiners, „examples provide the *best* guide to what is meant" (s.o.) hier nicht geteilt wird. Um allgemeine, vergleichbare und etwa in anderen Gebieten anwendbare Ergebnisse im diffusen Feld der Mathematikästhetik zu identifizieren, ist es m.E. unumgänglich, zunächst die vielen – häufig aus Beispielen gezogenen – Einzelpositionen zusammenzubringen und systematisch darzustellen. Nur ein solcher Hintergrund erlaubt es, in einer darauf folgenden Analyse konkreter Gegenstände über persönliche Eindrücke und mathematikästhetische Erfahrungen – so wertvoll diese für die Annäherung sind – hinauszugehen. Die folgende Konkretisierung an häufig genannten Beispielen der

Mathematikästhetik bietet somit nicht den „besten“, aber einen wichtigen ergänzenden Weg, um das Phänomen mathematikästhetischer Erfahrungen zu fassen.

Im Folgenden sollen mit der Eulerschen Formel und zwei verschiedenen Beweisen aus dem Komplex Irrationalität und Inkommensurabilität Klassiker der Mathematikästhetik vorgestellt und diskutiert werden. Die Wahl der Beispiele erhebt dabei nicht den Anspruch ein innovativer Vorschlag zu sein, sondern greift auf Bewährtes zurück und nutzt die breit geteilte Einschätzung, so besonders schöne „Muster der Mathematiker“ zu präsentieren und diese als Anstoß zur Diskussion der erarbeiteten Ergebnisse zu nutzen.

10.1 Die schönste Formel der Welt

> „Eine Zahl, die sich in der Unendlichkeit verlor, und eine andere, die niemals ihr wahres Gesicht offenbarte, zogen elegant ihre Bahnen und trafen sich an einem fernen Punkt. Obwohl nirgendwo ein Kreis zu sehen ist, schwebt unerwartet π aus dem Nichts herab und gesellt sich zu ihnen, um sich dann mit dem schüchternen i zusammenzutun. Aneinandergelehnt verharren sie nun gemeinsam in aller Stille, mucksmäuschenstill, aber man braucht nur eine 1 hinzuzufügen, und schon verändert sich schlagartig die Welt. Alles löst sich in 0 auf.“ (Ogawa, 2012, S. 180f)

Nicht immer wird der berühmte Spezialfall der Eulerschen Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

so poetisch beschrieben wie hier von der Autorin Yoko Ogawa. Ihr mathematisch-ästhetischer Wert jedoch wird immer wieder hervorgehoben, und sie gilt als die schönste Formel der Mathematik. So wurde sie in der Form $e^{i\pi} = -1$ etwa von den Lesern des *mathematical intelligencer* 1990 unter vielen schönen Stücken der Mathematik auf den ersten Platz gewählt (vgl. Wells, 1990). Dabei hat die Gleichung eine solche Popularität erlangt, dass sie in belletristischen Darstellungen wie dem eingangs zitierten kürzlich erschienen Roman *Das Geheimnis der Eulerschen Formel* zum Synonym für die geheime Faszination der Mathematik werden kann.

Interessant dabei ist, dass es sich hier um ein Theorem handelt, dessen ästhetischer Wert nicht – auch nicht in Teilen – auf seinen Beweis zurückgeführt wird. Anders als im nachfolgend besprochenen Beispielkomplex um die Beweise zu Irrationalität und Inkommensurabilität wird hier das mathematisch-ästhetische Erlebnis an einem (mindestens auf den ersten Blick) verhältnismäßig kurzen und wenig komplexen Stück Mathematik festgemacht. Wenn im Folgenden also die Eulersche Formel vorgestellt und aus mathematikästhetischer Perspektive beleuchtet wird, so steht *das* Paradebeispiel einer schönen mathematischen Gleichung im Mittelpunkt.

Im Gegensatz zu den unter 10.2 vorgestellten, bereits in der griechischen Antike bekannten Beweisen handelt es sich hier um ein relativ junges Beispiel besonderer mathematischer Schönheit. So veröffentlichte Leonhard Euler (1707–1783) die nach ihm benannte Formel samt ihrer Herleitung erstmals 1748 im ersten Band des zweibändigen Werks *Introductio in analysis infinitorum* (E101/102)[1] (vgl. Jahnke, 1999, S. 146). Das Vorgehen Eulers in der *Introductio* soll im Folgenden auch die Darstellung des Beispiels leiten.[2]

10.1.1 Die Eulersche Formel

In Kapitel 7 der *Introductio* (Bd. 1) wird zunächst die heute als „Eulersche Zahl" bezeichnete Größe definiert und zum ersten Mal mit dem heute gängigen Buchstaben e bezeichnet. Unter der programmatischen Überschrift *Von der Darstellung der Exponentialgrößen und der Logarithmen durch Reihen* stellt Euler zunächst das monotone Wachstum der Funktion $x \mapsto a^x$ fest, indem er wie folgt beginnt:

> „Da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt, falls a eine Zahl größer als 1 ist, so folgt daraus, dass, wenn der Exponent nur unendlich wenig größer ist als 0, auch die Potenz die Einheit nur um unendlich wenig übersteigen wird. Ist daher ω eine unendlich kleine Zahl [...], so wird
>
> $$a^\omega = 1 + \psi,$$
>
> wenn ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl bedeutet. [...] Da nun a noch unbekannt ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen. Alsdann wird:
>
> $$a^\omega = 1 + k\omega$$
>
> [...]." (Euler, 1885, S. 86)

Damit gilt für beliebiges[3] j und beliebig kleines ω

$$(a^\omega)^j = (1 + k\omega)^j$$

[1] Hier in der deutschen Übersetzung von H. Maser, 1885.

[2] Je nach systematischem Ansatz kann die Gleichung etwa im Rahmen einer *Einführung in die Analysis* naturgemäß auf unterschiedliche Weise motiviert und hergeleitet werden. Um hier der Diskussion über das angemessene Vorgehen aus dem Wege zu gehen, aber auch, um einen Einblick in die historische Quelle zu erhalten, wird die Herleitung eng an Eulers Original gehalten. Neben der Quelle selbst werden die Ausführungen dazu von Hans Niels Jahnke (1999) herangezogen.

[3] Euler verwendet im Original für die hier mit j bezeichnete Veränderliche den Buchstaben i, da dieser zu seiner Zeit noch nicht als Bezeichnung der Imaginären Einheit festgelegt war. Um Verwechslungen mit der heute gängigen Notation zu vermeiden, wird hier und im Folgenden der Buchstabe j verwendet.

und somit

$$a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j.$$

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes erhält er nun zunächst eine Reihendarstellung der Form

$$a^{j\omega} = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \ldots$$

Mit $j = \frac{z}{\omega}$ bei endlichem z „wird j, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich groß“ (Euler, 1885, S. 87) und Euler kann a^z schreiben als

$$a^z = 1+\frac{1}{1}kz+\frac{1(j-1)}{1 \cdot 2j}k^2z^2+\frac{1(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2j \cdot 3j}k^3z^3+\frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1 \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}k^4z^4+\ldots$$

In dem er $z = 1$ annimmt und mittels einiger Überlegungen zum Verhalten von Brüchen der Form $\frac{j-b}{j}$ für beliebig großes j und eine natürliche Zahl b kommt Euler in §116 zunächst zu folgendem Ergebnis (vgl. Euler, 1885, S. 88):

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Diese Reihe kann er dann nach einigen Überlegungen zum zugehörigen Logarithmus in §122 zu der folgenden, für das hier zu besprechende Beispiel entscheidenden Definition verwenden:

> „Da man nun bei der Verfertigung dieses Logarithmussystems die Basis a nach Belieben wählen kann, so kann man sie auch so annehmen, dass $k = 1$ wird. Setzen wir nun $k = 1$, so erhalten wir nach der in §116 gefundenen Reihe
>
> $$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$
>
> Verwandelt man diese Brüche in Dezimalbrüche und addiert sie sodann, so erhält man für a folgenden Wert
>
> $$a = 2,71828182845904523536028,$$
>
> wo auch noch die letzte Ziffer genau ist. Die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen werden gewöhnlich natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt, weil die Quadratur der Hyperbel durch solche Logarithmen ausgeführt werden kann. Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl $2,718281828459\ldots$ stets den Buchstaben e gebrauchen, so dass also e die Basis des natürlichen oder

> hyperbolischen Logarithmus bedeutet, welcher der Wert $k = 1$ entspricht, oder es soll e stets die Summe der unendlichen Reihe
>
> $$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$
>
> bezeichnen.“ (Euler, 1885, S. 91)

Euler geht also von der Frage nach dem Grenzwert der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ für $n \to \infty$ aus, um diesen dann als Basis des natürlichen Logarithmus einerseits bzw. als Wert der Reihe $\sum \frac{1}{n!}$ andererseits zu beschreiben sowie den nummerischen Wert auf 23 Nachkommastellen genau anzugeben.

> „Nach den Logarithmen und Exponentialgrößen müssen die Kreisbögen und deren Sinus und Cosinus betrachtet werden, [...] weil sie aus den Logarithmen und Exponentialgrößen selbst entspringen, so bald dieselben imaginäre Zahlgrößen enthalten.“ (Euler, 1885, S. 95)

Mit Hilfe dieser Vorüberlegung leitet Euler in Kapitel 8 unter dem Titel *Von den transcendenten Zahlgrößen, welche aus dem Kreis entspringen* zunächst Eigenschaften und Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen (Additionstheoreme usw.) aus Überlegungen am Einheitskreis und darauf aufbauend die Reihendarstellung von Sinus und Kosinus her. Euler ist dabei der erste, der sin und cos als Funktionen auffasst und diese konsequent an einem Kreis mit Radius 1 einführt (vgl. Jahnke, 1999, S. 146).
In §138 gelangt Euler dabei für unendlich großes j zu folgenden Darstellungen:

$$\cos\nu = \frac{(1 + \frac{\nu\sqrt{-1}}{j})^j + (1 - \frac{\nu\sqrt{-1}}{j})^j}{2} \quad \text{und} \quad \sin\nu = \frac{(1 + \frac{\nu\sqrt{-1}}{j})^j - (1 - \frac{\nu\sqrt{-1}}{j})^j}{2\sqrt{-1}}$$

Unter Rückgriff auf die oben skizzierte Herleitung der Eulerschen Zahl e erinnert er zunächst an den Zusammenhang $(1 + \frac{s}{j})^j = e^s$. In dem er nun ohne besonderes Aufsehen auch imaginäre Größen als Argument zulässt, erhält er

$$\cos\nu = \frac{e^{+\nu\sqrt{-1}} + e^{-\nu\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\nu = \frac{e^{+\nu\sqrt{-1}} - e^{-\nu\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Damit fährt Euler wie folgt fort:

> „Hieraus ist ersichtlich wie die imaginären Exponentialgrößen auf den Sinus und Cosinus reeller Bogen zurück geführt werden können. Es ist nämlich:
>
> $$e^{+\nu\sqrt{-1}} = \cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu$$
>
> [...].“ (Euler, 1885, S. 106)

Obgleich die Verwendung von Zahlenbeispielen ein besonderes Merkmal der *Introductio* ist (vgl. Jahnke, 1999, S. 145f), verzichtet Euler an dieser Stelle auf den naheliegenden Schritt, den Spezialfall für $\nu = \pi$ zu betrachten. Für den mathematikästhetischen Diskurs ist jedoch gerade die daraus entstehende Gleichung von besonderer Bedeutung, gilt sie doch als die schönste Formel überhaupt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Anzumerken ist dazu, dass andere Arbeiten die Gleichung auch in der Form $e^{i\pi} = -1$ oder auch $e^{\frac{\pi}{2}} = i^{-i}$ als schönste Formel der Mathematik benennen. Aus mathematikästhetischer Sicht stellt sich also auch die Frage nach möglichen Unterschieden dieser mathematisch äquivalenten Darstellungsformen. Wenn im Folgenden die Frage nach den Gründen für den mathematikästhetischen Ruhm dieser Formel gesucht und sie dazu auf der Grundlage der Ergebnisse aus Teil I und II analysiert wird, wird auch dieser Frage nachzugehen sein.

10.1.2 Zur Ästhetik von $e^{i\pi} + 1 = 0$

> „Elegant und kompakt, vereint diese Beziehung alle Grundkonstanten der Analysis und ist gleichermaßen für Mystiker, Wissenschaftler, Philosophen und Mathematiker voller Deutungsmöglichkeiten: Vielleicht ist sie die faszinierendste Formel aller Zeiten.“ (Basieux, 2003, S. 71)

So wie hier von Piere Basieux wird immer wieder der ästhetische Wert der Eulerschen Formel hervorgehoben und eine Begründung versucht.[4] Wie das Beispiel Basieuxs zeigt, wird dazu häufig die Tatsache angeführt, dass sich in der Form $e^{i\pi} + 1 = 0$ mit e, i, π, 0 und 1 die wichtigsten Zahlen der Mathematik vereinen. Dies allein ist jedoch zunächst kein (mathematik-)ästhetisches Kriterium und es stellt sich die Frage, wie der Reiz, der von dieser Gleichung ausgeht, spezifiziert werden kann. Aus mathematikästhetischer Sicht bietet sich dazu ein Abgleich mit den in Kapitel 2 herausgearbeiteten Eigenschaftskomplexen an. Dabei ergeben sich auch immer wieder Hinweise auf den Kunstwerkcharakter der Formel im Sinne von Kapitel 6 bzw. 8.

Bereits Euler betont in seiner *Introductio* die innermathematischen Beziehung innerhalb der Gleichung in der von ihm hergeleiteten Form $e^{ix} = \sin x + i \cos x$, wenn er darauf hinweist, dass in dieser Gleichung der Zusammenhang von komplexer Exponentialfunktion und reellen Winkelfunktionen gegeben sei (vgl. Zitat S. 225): $\sin x$ und $\cos x$ bilden Real- bzw. Imaginärteil von e^{ix}. Mit Hilfe dieser Beziehung werden also Grundbausteine zunächst disparater mathematischer Disziplinen in Beziehung gesetzt. Sie bildet somit einen Punkt der innermathematischen Vernetzung (vgl. 2.1.1).

[4] Vgl. z.B. Emil Fellmann (1983), Francois Le Lionnais (2004) oder Doris Schattschneider (2006).

Auch verwendete bereits Euler selbst die Gleichung in seinen Arbeiten in den unterschiedlichsten Zusammenhängen. So etwa in §183 der *Introductio*, um umgekehrt die trigonometrischen Funktionen mit komplexem Argument mit Hilfe der Exponentialfunktion darzustellen. Außerdem kommt sie dort nach Jahnke in verschiedenen Beweisen und Herleitungen etwa von Reihendarstellungen zum Zuge (vgl Jahnke, 1999, S. 146). Jahnke weist außerdem auf die Suche nach einem analytischen Ausdruck für die Fakultäten hin, an der neben James Stirling, Daniel Bernoulli und Christian Goldbach auch Euler maßgeblich beteiligt war und sich ebenfalls die Gleichung zu Nutze machen konnte (vgl. Jahnke, 1999, S. 147).
Als weiteres elementares Beispiel für eine konkrete Anwendung der Eulerschen Formel kann die Darstellung der komplexen Zahlen durch Polarkoordinaten ins Feld geführt werden: Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a+ib$ gilt $z = |z|(\frac{a}{|z|}+i\frac{b}{|z|}) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei φ den Winkel zur reellen Achse beschreibt. Mit Hilfe der Eulerschen Formel lässt sich dies nun in die kompakte und gut handhabbare Form $z = |z|e^{i\varphi}$ bringen. Zur Lösung des zunächst geometrischen Problems der Darstellung eines Punktes in der Gaußschen Zahlenebene mit Hilfe eines Winkels und des Abstands zum Ursprung wird auf die leichter handhabbare Exponentialfunktion zurückgegriffen. Dieses Beispiel ist insofern paradigmatisch für die Tragweite des betrachteten Zusammenhangs, als dass hier einerseits ein Ergebnis von großer Nützlichkeit durch die Eulersche Gleichung erhalten wird, das als solches wiederum in den verschiedensten inner- und außermathematischen Gebieten Anwendung findet. Andererseits wirkt sie in gewissem Sinne im Verborgenen, da während der Anwendung der Polarkoordinaten die Exponentialfunktion ganz selbstverständlich auch zur Beschreibung geometrischer Zusammenhänge oder allgemein für Rechnungen im Komplexen verwendet wird. Der „Umweg“ über die trigonometrischen Funktionen und damit die Verwunderung über den hinterliegenden Zusammenhang wird dabei höchstens auf den zweiten Blick deutlich.

Wie weitgehend der Aspekt der interdisziplinären Vernetzung gesehen wird, zeigt sich in Aussagen von Mathematikern, die in der Formel $e^{\pi i} + 1 = 0$ nicht nur wichtige Konstanten vereint, sondern die gesamte Mathematik repräsentiert sehen: Die Eulersche Zahl e bzw. die Exponentialfunktion spielt eine zentrale Rolle in der Analysis. Die Gleichungslehre macht die imaginäre Einheit i notwendig, so dass hier die Algebra repräsentiert wird. Ergänzt wird dies durch π als zentrale Größe der Geometrie.[5] Für diese Einschätzung spricht nicht zuletzt ihre Anwendbarkeit in weiten Teilen der Mathematik.[6]

Obwohl dies mit Blick auf eine Gleichung zunächst etwas fern liegt, erfüllt die Eulersche Formel auch den Tragweiteaspekt der weitreichenden Heuristik (vgl. 2.1.2). Dabei zeigt sich diese Eigenschaft nicht in einer übergreifenden Beweisidee, sondern als Hilfsmittel zur Strukturierung. Dies wird etwa in Verallgemeinerungen

[5] Ein Dank für Informationen und Einschätzungen rund um Bedeutung und Anwendungsgebiete der Eulerschen Formel gilt Prof. Dr. Gerd Mockenhaupt.

[6] Für eine Zusammenstellung vieler interessanter Beispiele siehe McCartin (2006).

wie der folgenden deutlich:

$$e^{tI} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

So kann ein Zusammenhang zwischen Exponentialabbildung und Drehgruppen hergestellt werden, der ähnlich der komplexen Euler-Formel wiederum zum Vernetzungspunkt verschiedener mathematischer Disziplinen wird.

Es ist nicht nur die Tatsache, dass die wichtigsten Zahlen der Mathematik in der Formel $e^{i\pi}+1=0$ vereint sind[7], sondern auch die Art, wie diese zusammengebracht werden können, die zu einer besonderen mathematikästhetischen Wertschätzung der Eulerschen Formel führen müssen. Le Lionnais bringt dies wie folgt auf den Punkt:

> „The brilliance of this expression is due to the nearly perfect elimination of every element foreign to the three numbers[8] just cited.“ (Le Lionnais, 2004, S. 128)

Die Formel erfüllt also das oben angeführte Minimalitätskriterium (vgl. 2.2.1) in besonderer Weise und stellt einen in diesem Sinne einfachen Gegenstand der Mathematik dar. In Relation zu der außerordentlichen Tragweite ist die Eulersche Formel somit ein Paradebeispiel für ein ökonomisches „Muster der Mathematiker“ im Sinne der unter 2.2.2 beschriebenen klassischen Form der Ökonomie.

Die Frage nach der subjektiven Zugänglichkeit der Gleichung ist dagegen weniger eindeutig zu beantworten. Zunächst kann festgehalten werden, dass die Formel durch ihre Minimalität leicht – evtl. auch quasi „auf einen Blick“ – zu erfassen ist. Dies zeigt sich u.a. darin, dass sie leicht memoriert werden kann. Auch sind die Elemente aus denen sie aufgebaut ist, aus anderen Zusammenhängen bekannt.[9] Jedoch bedarf selbst ein erstes inhaltliches Verstehen eines Vorwissens, das über die üblichen Schulkenntnisse hinaus geht. Insbesondere der Ausdruck $e^{i\pi}$ setzt die Kenntnis der komplexen Zahlen und der imaginären Einheit sowie eine Vorstellung der Exponentialfunktion voraus. Darüber hinaus verlangt selbst ein erster Einblick in die Herleitung und Tragweite dieses Stücks Mathematik weitergehende Kenntnisse und Erfahrungen. Die zunächst so schlicht anmutende Gleichung lässt also ihre Komplexität und auch die Tragweite als ein Grund ihres mathematikästhetischen Ruhms erst auf den zweiten Blick offenbar werden.[10]

[7] Das würde auch die mathematisch korrekte Gleichung $0 \cdot (e + i + \pi + 1) = 0$ erfüllen, der wohl kein besonderer ästhetischer Wert zugesprochen würde.

[8] Le Lionnais zählt als wichtigste Zahlen der Mathematik, die in der Eulerformel vorkommen nur 1, π und e auf.

[9] Die Zahl π ist bekannt aus der Kreisgeometrie, e^x zur funktionalen Beschreibung von Wachstum und die Art des Terms aus der Arithmetik.

[10] In diesem verborgenen Reiz kann unter Umständen auch ein starkes motivationales Potential liegen. So berichtet ein heutiger Mathematikdozent, dass ihn der Wunsch, diese Formel zu verstehen in das Mathematikstudium geführt hat.

Die Möglichkeit zu epistemischer Transparenz dieses Beispiels ist also stark von den Kenntnissen des Rezipienten abhängig. Außerdem besteht eine große Diskrepanz in der Einschätzung dieser Möglichkeiten: Auf der einen Seite stellt Le Lionnais die Behauptung auf, dass der dargestellte Zusammenhang in heutigen Zeiten so offensichtlich geworden sei, dass die Formel inzwischen „abgestanden“ sei oder zumindest sehr natürlich daher komme (vgl. Le Lionnais, 2004, S. 128). David Wells greift diese Behauptung kritisch auf und stellt die Frage nach dem Personenkreis, für den diese Offensichtlichkeit gegeben sei (vgl. Wells, 1990, S. 38). Dieser Einwand scheint berechtigt, betrachtet man auf der anderen Seite Hinweise, die selbst aus dem Kreis der Mathematiker ihre Skepsis darüber äußern, ob die Formel überhaupt in vollem Umfang und Tiefe erfasst werden kann. Um die eigene Skepsis auszudrücken, wird dazu immer wieder der folgende Ausspruch des Mathematikers Benjamin Peirce (1809–1880) angeführt:

> „Gentleman, we have not the slightest idea what this equation means, but we may be sure that it means something very important.“ (hier zitiert nach McCartin, 2006, S. 12)

Bedeutung und Tiefe der Euler-Formel ist für Peirce bestenfalls erahnbar. Dem tiefen Verstehen oder gar einem Aha!-Erlebnis, also der unter 2.3 beschriebenen epistemischen Transparenz, verschließt sie sich solchen Bekenntnissen zufolge jedoch. Genau dieses Spannungsfeld einer besonders einfach fasslich anmutenden Darstellung und der nur vage erreichbaren epistemischen Transparenz scheint jedoch für die besondere (ästhetischen) Anziehungskraft der Gleichung verantwortlich zu sein.

Die u.a. hochschuldidaktischen Überlegungen des Mathematikers Felix Klein geben in der Diskussion um die Möglichkeit epistemischer Transparenz in Bezug auf die Eulersche Formel dem Vorwissen bzw. konkret der Art der Herleitung ein besonderes Gewicht:

> „Im System A – und leider schließt man sich diesem auf der Schule fast ausschließlich an – treten beide Funktionen ganz heterogen auf: e^x bzw. der Logarithmus erscheint als bequemes Hilfsmittel beim numerischen Rechnen, $\sin x$ aber entsteht in der Dreiecksgeometrie. Wie soll man da verstehen, daß beide in so einfacher Weise zusammenhängen, und noch mehr, daß sie sich in den verschiedensten Gebieten, die weder mit der Technik des nummerischen Rechnens noch mit der Geometrie das mindeste zu tun haben, immer wieder ganz von selbst als naturgemäßer Ausdruck der dort obwaltenden Gesetze darbieten? [...] Im System B erscheinen diese Zusammenhänge ganz verständlich und der von Anfang an hervorgehobenen Bedeutung der Funktionen durchaus angemessen: Hier entstehen ja e^x und $\sin x$ aus der selben Quelle, der Quadratur einfacher Kurven [...].“ (Klein, 1908, S. 85)

Die oben vorgestellte Herleitung der Gleichung aus Eulers *Introductio* würde dabei dem „System A“ entsprechen, während Klein selbst vorschlägt, die Funktionen jeweils aus der Integration von Hyperbel bzw. Kreis zu definieren, um dann die Reihenentwicklung „wiederum nach einem einheitlichen Prinzip, dem Taylorschen Lehrsatze“ (Klein, 1908, S. 84) zu erhalten.[11] Klein bezieht sich hier auf die Grundform $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, die bei entsprechender Einführung als natürlich und transparent angesehen werden müsse. Ob auf diese Weise auch die Gleichung in der Form $e^{i\pi} + 1 = 0$ ihren mysteriösen Charakter verlieren würde, bleibt offen – erhält man sie doch unabhängig von der Herleitung der Ausgangsbeziehung in jedem Fall „lediglich“ durch Einsetzen von π.

Immer wieder wird nicht nur die Besonderheit hervorgehoben, dass die Euler-Formel die wichtigsten Zahlen verbindet, sondern auch die emotionale Wirksamkeit dieser Tatsache in Äußerungen zum ästhetischen Wert der Gleichung deutlich. So drückt etwa Doris Schattschneider das Moment des Erstaunens aus und spricht von $e^{i\pi} + 1 = 0$ als „perhaps one of the most surprising of all mathematical truths“ (Schattschneider, 2006, S. 41). Gleichzeitig qualifiziert sie die oben bereits angesprochene Schlichtheit emotional und beschreibt die Euler-Formel als „incredibly spare equation“ (ebd.). Damit ist sie ein Beispiel unter vielen, die ihre emotionale Betroffenheit ob der Einfachheit und der großen Tragweite äußern. Insbesondere scheint es das Zusammenspiel von weitreichender innermathematischer Vernetzung und einer besonders einfach anmutenden Form zu sein, die die Eulersche Formel so „unglaublich“ erscheinen lassen. Diese emotionale Qualität der Eigenschaftskomplexe Tragweite und Ökonomie bildet schließlich die Grundlage des mathematikästhetischen Werturteils.

Als Klassiker der Mathematikästhetik wird die Eulersche Formel naturgemäß auch in Konzepten zur Stilgeschichte der Mathematik zum Beispiel. Dabei spiegeln sich die beschriebenen, zum Schönheitsurteil beitragenden Eigenschaften als stilbildende Elemente wider: Le Lionnais zählt die Gleichung etwa zu den „Fakten klassischer Schönheit“, also zu denjenigen mathematischen Aussagen, die durch eine harmonische Verbindung von knapper, sparsamer Form und der Beherrschung großer Vielfalt beeindrucken (vgl. 6.2.1, S. 138f). Bense dagegen nutzt nicht die Formel, das Werk selbst, um es einem Stil zuzuordnen, sondern greift auf den Künstler zurück. Insbesondere Eulers Leistungen im Rahmen der Analysis ordnet er dem mathematischen Barock zu (vgl. Bense, 1946, S. 127). Ähnlich würde wohl Karl Heinrich Hofmann vorgehen. Obgleich er Euler nicht explizit nennt, kann dieser sicher zur hofmannschen „Renaissance der Mathematik“ gerechnet werden, die sich gerade durch eine große Genie-Dichte auszeichnet (vgl. 6.2.1, S. 133f).

Dass Euler als mathematisches Genie gilt, zeigt sich in Urteilen von Biographen und Mathematikhistorikern. Dabei wird in der Rückschau insbesondere auf die bemerkenswerte Größe seines Gesamtwerkes und die enorme Bandbreite der bearbeiteten Gebiete hingewiesen. So stellt Jahnke beispielsweise fest, dass Euler „der

[11] Für eine ausführliche Darstellung der beiden Systeme A und B – Klein spricht auch von „Entwicklungsreihen“ – und eine Einordnung aus mathematikästhetischer Perspektive vgl. Allmendinger und Spies (2013).

überragende Mathematiker und theoretische Physiker des 18. Jahrhunderts" gewesen sei und „Umfang, Spannweite und Tiefe seines Werkes [...] ohne Beispiel" seien (Jahnke, 1999, S. 132). Darüberhinaus wurde bereits zu Lebzeiten seine besondere mathematische Begabung erkannt. Sein Lehrer Johann Bernoulli etwa bescheinigt Euler im Anhang einer eigenen Arbeit die „glücklichsten Anlagen" und bezeichnet ihn an anderer Stelle als „ingeniösen jungen Mann" (zitiert nach Fellmann, 1995, S. 23f). Dass Euler, wie dies für das künstlerische Genie häufig beschrieben wird, in der Lage war, Neues und auch über seinen berühmten Lehrer hinaus Weisendes zu schaffen, zeigt ein Blick in die Entwicklungsgeschichte derjenigen Gebiete, an denen Euler mitgearbeitet hat. So war er es, der die Analysis von der geometrischen Deutung loslöste und in seiner *Introductio* zu einer algebraischen Auffassung und Strukturierung der behandelten Gegenstände führte (vgl. Jahnke, 1999, S. 133). Die hier beleuchtete Gleichung in der oben dargestellten Form[12] ist also das Werk eines großen Wissenschaftlers und Künstlers der Mathematik mit innovativem und breitgefächertem Oevre.

Das mathematische Kunstwerk Euler-Formel wird in der Mathematikwelt auch als solches gehandelt. Die Einschätzung, sie sei ein besonders schönes, wenn nicht das schönste Stück Mathematik, wird disziplinübergreifend geteilt. Dies verwundert aufgrund der Anwendbarkeit in den verschiedensten Teildisziplinen und der großen Tragweite (s.o.) nicht. Da sie nicht ohne Weiteres mit Mitteln der (aktuellen) Schulmathematik erfasst werden kann, existiert das ganz breite Publikum nicht per se.[13] Dennoch ist die Gleichung elementar genug, um im Mathematikgrundstudium hergeleitet zu werden, so dass auch hier Publikum und Kritiker nicht ausschließlich aus der Gruppe der schaffenden Mathematiker also der Künstler selbst stammen müssen (vgl. die Diskussion unter 6.4.2). Interessanter Weise wird $e^{i\pi} + 1 = 0$ von ihren Interpreten zwar einhellig als besondere Schönheit beschrieben, eine explizite Begründung abgesehen vom gemeinsamen Auftreten der wichtigsten Zahlen der Mathematik bleiben sie jedoch meist schuldig, obgleich die vorangegangene Analyse zeigt, dass bestimmte gängige mathematikästhetische Kriterien, wie etwa die Ökonomie, auf besondere Weise erfüllt sind. Dies könnte auf das beschriebene Gefühl mangelnder epistemischer Transparenz zurückgeführt werden, das der Gleichung einen leicht „mystischen" Charakter gibt. So wurde hier mit der Eulerschen Formel in gewissem Sinne die *Mona Lisa* der Mathematik-Welt untersucht.

[12] Anzumerken ist, dass ein ähnlicher Zusammenhang bereits früher auch von anderen Mathematikern in Eulers Umfeld (Johann Bernoulli und Roger Cotes) diskutiert wurde, dieser in der *Introductio* jedoch zum ersten Mal explizit in dieser Form hergeleitet und verwendet wurde (vgl. Jahnke, 1999, S. 146f).

[13] Populärwissenschaftliche Arbeiten, die sich diesem Kunstwerk nähern wollen, müssen vielmehr für die nötigen Vorinformationen mindestens bezüglich der komplexen Zahlen sorgen (vgl. etwa Basieux (2003)).

10.2 Schön irrational

Ein weiteres häufig behandeltes Beispiel im Zusammenhang mit mathematikästhetischen Überlegungen und damit ein weiterer Klassiker der Mathematikästhetik ist der Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2. Genauer werden immer wieder verschiedenen Argumentation, die mit dieser Aussage in Verbindung stehen, als Paradebeispiele schöner Beweise oder mathematischer Kunst angeführt. Dazu zählen neben verschiedenen indirekten Argumentationen über den Charakter von $\sqrt{2}$ auch Beweise für das geometrische Problem der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Einheitsquadrat. Es handelt sich hierbei auch in dem Sinne um klassische Beispiele, dass sowohl Widerspruchsbeweise als auch die direkte geometrische Argumentation über die Wechselwegnahme – jeweils im Zusammenhang mit der geometrischen Deutung – bereits in der griechischen Antike bekannt waren. Obgleich es sich also um einen sehr alten und in der Literatur sowohl im Rahmen mathematikästhetischen Verhaltens als auch entsprechend reflektierender Arbeiten häufig angeführten Beispielkomplex handelt, sprechen verschiedene Gründe dafür, auch die Ergebnisse dieser Arbeit daran zu konkretisieren: Aus dem naheliegenden und historisch relevanten Zusammenhang von zahlentheoretischer und geometrischer Deutung ergeben sich erstens sehr verschiedene Herangehensweisen, die auf Unterschiede in ihrem mathematikästhetischen Gehalt geprüft werden können. Daher soll im folgenden je eine Möglichkeit der Argumentation aus den beiden Bereichen vorgestellt werden. Diese lassen einerseits zwei Facetten eines Problembereiches zur Geltung kommen. Andererseits sind sie hinreichend verschieden, um zwei eigenständige Beispiele für Schönheit und Kunstcharakter der Mathematik darzustellen.[14]

Bei beiden Beispielen handelt es sich zweitens um elementar zugängliche Problemstellungen und Argumentationsgänge, die z.B. Hardy dennoch zu den „Mustern der Mathematiker“ zählt, denen aufgrund ihrer Ästhetik ein dauerhafter Platz in der Welt gesichert ist:

> „They are ‚simple‘ theorems, simple both in idea and in execution, but there is no doubt at all about their being theorems of the highest class. Each is as fresh and significant as when it was discovered – two thousend years have not written a wrinkle on either of them.“ (Hardy, 1940, S. 92)

An solchen „Evergreens“ der Mathematikästhetik wird gleichzeitig ein interessantes mathematikästhetisches Phänomen deutlich: die Konstanz von Beispielen und Werturteilen über die Geschichte bei gleichzeitig subjektiv geprägtem Urteil. So erwartet Hardy nach der Vorstellung u.a. eines Widerspruchsbeweises für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ die generelle Zustimmung seiner Leser:

[14] Wenn im Folgenden von Beispielkomplex die Rede ist, ist darunter die generelle Problemstellung wie auch beide Beispiele zu verstehen.

> „I can hardly believe that anyone who has understood the two theorems[15] will dispute that they pass these tests [of beauty and seriousness].“ (Hardy, 1940, S. 98)

Der Beispielkomplex um die Irrationalität von $\sqrt{2}$ bietet sich somit in besonderer Weise an, die Tendenzen zur Intersubjektivität des mathematikästhetischen Werturteils am Beispiel des mathematischen Schönheitsbegriffs zu prüfen.
Die Auswahl bietet sich außerdem aus systematischen Gründen an: In der Literatur werden beide Beispiele nicht nur als mathematisch besonders schöne Gegenstände gehandelt, sondern auch immer wieder einer Kunstform ähnlich behandelt, in dem sie etwa zur Veranschaulichung bestimmter Stilrichtungen herangezogen werden. Somit können an ihnen die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Hauptteile zur Schönheit und zum Kunstcharakter der Mathematik diskutiert werden. Bezogen auf die Anwendungen der Ergebnisse mit Blick auf das Lehren und Lernen von Mathematik (Kapitel 9) bieten sich die Beispiele außerdem insbesondere auf Grund ihrer elementaren Zugänglichkeit an und der damit verbundenen Möglichkeit, diese prinzipiell im Unterricht der Mittelstufe zu behandeln.
Hier werden nun jeweils eine geometrische und eine zahlentheoretische Variante des Beispielkomplexes zunächst kurz skizziert und in den historischen Kontext der *Elemente* des Euklid gestellt. In einem zweiten Schritt werden dann die systematischen Ergebnisse aus Teil I und II auf diese Beispiele angewendet und so konkretisiert. Andererseits führt dies auch zur Ausschärfung der Beispiele unter mathematikästhetischer Perspektive.

10.2.1 Der klassische Widerspruchsbeweis

Im schulischen Mathematikunterricht wird die Irrationalität von $\sqrt{2}$ im Rahmen der Erweiterung der rationalen zu den reellen Zahlen problematisiert. Damit ist $\sqrt{2}$ häufig die erste nichtrationale Zahl, der Schülerinnen und Schüler bewusst begegnen, und der Beweis dieser Tatsache ist der erste Irrationalitätsbeweis. Häufig wird dabei auf die historische Argumentation, wie sie in den Euklidschen *Elementen* ausgeführt wird, verwiesen. Anders als bei Euklid kommt in Lehrbüchern aber die geometrische Deutung von $\sqrt{2}$ als Diagonale im Einheitsquadrat nur vor, um etwa die Lage auf der Zahlengeraden zu konstruieren. Der eigentliche Beweis für die Irrationalität kann dann losgelöst von geometrischen Überlegungen auf rein algebraischer Ebene erbracht werden. Eine solche Möglichkeit wird im folgenden vorgestellt. Mit Blick auf Kapitel 9 wird aus systematischen Gründen ein Argumentationsgang vorgestellt, wie er häufig auch in Schulbüchern für die Mittelstufe zu finden ist[16]:

[15] Hardy stellt außerdem die Euklidische Argumentation zur Unendlichkeit der Primzahlmenge als Beispiel für „theorems of the highest class“ vor (vgl. Hardy, 1940, S. 92ff).

[16] Anhand dieses Klassikers finden sich sogar äußerst seltene Hinweise auf den ästhetischen Gehalt in der Schule. So wird im Begleittext einer der folgenden ähnlichen Argumentation in „Neue Wege 9“ beispielsweise darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um „ein besonders schönes

Satz:
Die Quadratwurzel aus 2 ist irrational.

Beweis (per Widerspruch):
Es wird indirekt argumentiert und zunächst angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational und damit in der Form $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ darstellbar. Dabei kann angenommen werden, dass p und q ganze Zahlen sind und $\frac{p}{q}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist. Durch Quadrieren erhält man $2 = \frac{p^2}{q^2}$ und damit $p^2 = 2q^2$. Das heißt p^2 und damit auch p selbst sind gerade Zahlen. In diesem Fall ist p darstellbar als $p = 2r$ und Einsetzen ergibt $4r^2 = 2q^2$ also $2r^2 = q^2$. Somit sind q^2 und damit auch q ebenfalls gerade Zahlen. Dies steht nun im Widerspruch zu der Annahme, dass $\frac{p}{q}$ einen vollständig gekürzten Bruch darstellt.
$\sqrt{2}$ kann demnach nicht rational sein, ist also irrational. $\square$

Häufig werden Argumentationen wie die hier vorgestellte auf Buch X der Euklidschen *Elemente* (§115a) bzw. auf Aristoteles (Erste Analytik 41a) zurückgeführt.[17] Neben der Beobachtung, dass es den antiken Mathematikern einzig um die geometrische Frage der Inkommensurabilität und nicht um den Zahlbereich der rationalen Zahlen geht, ist dieser Verweis auch strukturell immer dann nicht vollständig haltbar, wenn wie hier geschehen aus der Rationalitätsannahme ein Widerspruch dazu abgeleitet wird, dass $\sqrt{2}$ bzw. das Verhältnis von Seite und Diagonale als Verhältnis zweier *teilerfremder* ganzer Zahlen darstellbar ist. In den *Elementen* wird zwar ebenfalls indirekt argumentiert und das geometrische Problem mittels der vorweg in Buch X gemachten Erkenntnis, dass kommensurable Größen zueinander in einem Verhältnis stehen wie „eine Zahl zu einer Zahl“ (Euklid, Buch X, §5), übertragen. Durch die Wahl dieser Zahlen derart, dass sie die kleinsten sind, die in dem selben Verhältnis stehen wie Seite und Diagonale, wird dies dann aber zu dem Widerspruch geführt, dass eine der beiden Zahlen dann zugleich gerade und ungerade sein müsse, dass heißt es ist keine Eigenschaft des Verhältnisses sondern eine Eigenschaft einer der beiden Größen, die zum Widerspruch geführt wird.

10.2.2 Beweis mittels Wechselwegnahme

Das geometrisch formulierte Problem der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Einheitsquadrat bedarf zum Beweis nicht unbedingt eines Übergangs zu Zahlentheorie und Algebra, wie dies in *Buch X* der Euklidischen *Elemente* vorgeschlagen wird. Auch der rein geometrische Beweis ist bereits seit der griechischen

Beispiel für einen indirekten Beweis“ (Neue Wege 9, 2003, S. 26) handele.

[17] Clemens Thaer, dessen deutsche Euklidübersetzung hier zugrunde gelegt wird, merkt an, dass §115a erst später den *Elementen* hinzugefügt wurde und vermutlich aus einem wesentlich älteren Werk übernommen wurde (Euklid, Elemente, Anmerkungen, S. 462). Darauf weist auch die Tatsache hin, dass Aristoteles den Beweis ganz ähnlich wiedergibt.

Antike bekannt, fußt er doch auf dem klassischen Prinzip der Wechselwegnahme[18].

So behaupten Rademacher und Toeplitz, der Beweis durch Wechselwegnahme sei „ganz im griechischen Geist abgefaßt und in der Gedankensphäre vom X. Buch des Euklid gelegen“ (Rademacher und Toeplitz, 1933, S. 16). Diese Folgerung liegt zunächst nahe, gibt doch Euklid das Prinzip der Wechselwegnahme allgemein zur Bestimmung der Inkommensurabilität in *Buch X* an:

Buch X, §2:
Mißt, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.

Anzumerken ist jedoch, dass für den speziellen Fall von Seite und Diagonale im Quadrat das Verfahren in den *Elementen* nicht zur Anwendung kommt. Dennoch ist Rademacher und Toeplitz aber mindestens darin zuzustimmen, dass der folgende Beweis über die Wechselwegnahme zu jenen „kleinen Liedern“ gehört, die ohne großes Vorwissen den „entscheidenden Gedanken“ erkennen lassen (Rademacher und Toeplitz, 1933, S. VIIIf).

Satz:
Diagonale und Seite eines Quadrates sind inkommensurabel.

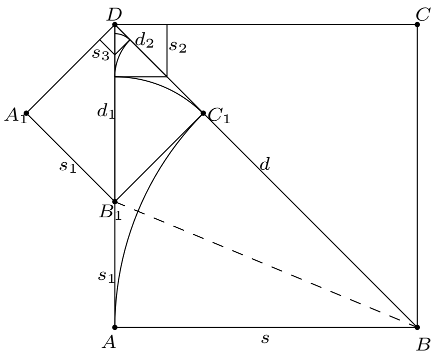


Abbildung 10.1: Wechselwegnahme am Quadrat

[18]Für eine Beschreibung des Wechselwegnahmeprinzips in heutiger Schreibweise und weiterer möglicher Anwendungen etwa zur Bestimmung des ggT über den sogenannten „Euklidischen Algorithmus“ siehe z.B. Beutelspacher u. a. (2011) (S. 64).

Beweis (mittels Wechselwegnahme):
Zu einem Quadrat mit Seitenlänge s und Diagonale d wird ein weiteres Quadrat mit Seitenlänge s_1 und Diagonale d_1 so konstruiert, dass gilt

$$d = s + s_1, \quad s_1 < s$$

(vgl. Abbildung 10.1). Durch Kongruenzbetrachtungen an den beiden rechtwinkligen Dreiecken B_1BA und B_1BC_1 erhält man für die Strecke $\overline{AB_1}$ die Länge s_1 und damit für die Länge der Ursprungsseite $s = s_1 + d_1$.
Auch am Quadrat mit der Seitenlänge s_1 kann auf gleiche Weise ein weiteres Quadrat mit Seite s_2 und Diagonale d_2 konstruiert werden, so dass wiederum gilt $d_1 = s_1 + s_2$ und somit:

$$s = 2s_1 + s_2, \quad s_2 < s_1.$$

Dieses Verfahren kann sukzessive fortgesetzt werden, *ohne jemals abzubrechen.*
Für die aufeinanderfolgenden Quadratseiten heißt das:

$$\begin{aligned} s &= 2s_1 + s_2, \quad s_2 < s_1 \\ s_1 &= 2s_2 + s_3, \quad s_3 < s_2 \\ s_2 &= 2s_3 + s_4, \quad s_4 < s_3 \\ &\vdots \\ s_{k+1} &= 2s_k + s_{k-1}, \quad s_{k-1} < s_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für die Differenz von Diagonalen und Seiten gilt dabei

$$d - s = s_1 > d_1 - s_1 = s_2 > d_2 - s_2 = s_3 > d_3 - s_3 = s_4 \ldots > d_k - s_k = s_{k+1} \ldots > 0.$$

Das Verfahren bricht nicht ab, d.h. es gilt $s_k \neq 0$ für alle $k = 1, 2, 3 \ldots$, und die Quadratseiten werden beliebig klein. Damit wird man zu jedem vorgegeben noch so kleinen Maß e eine Seite s_k finden, die kleiner ist als dieses. Damit kann e auch kein gemeinsames Maß von Seite und Diagonale im Ausgangsquadrat sein.

□

Beide vorgestellten Beweise zählen in der Literatur zu den Paradebeispielen schöner Mathematik und sind gleichzeitig Beispiele dafür, dass auch aktive Mathematiker mathematikästhetisches Erleben nicht nur mit Gegenständen ihrer aktuellen Forschung verbinden. Vielmehr sind es häufig gerade Probleme und Argumentationen wie der vorgestellte Beispielkomplex, die mit relativ geringem mathematischem Vorwissen erschlossen werden können, denen aber dennoch oder gerade deshalb immer wieder ein besonderer ästhetischer Reiz zugesprochen wird. Dies ist nicht nur mit Blick auf die Verwendung im schulischen Mathematikunterricht oder in populärwissenschaftlicher Literatur von Bedeutung, sondern ermöglicht auch eine direkte Anwendung. Es wird sich zeigen, dass beide Beispiele, wie sie sich in der zugrundeliegenden Beweisidee und der mathematischen Disziplin, derer sie sich bedienen, unterscheiden, auch unterschiedliche Facetten des mathematischen Schönheitsbegriffs ansprechen und als Kunstwerke unterschiedlich behandelt werden müssen.

10.2.3 Ein schöner Schluss

Hier soll nun der vorgestellte Beweiskomplex zunächst vor dem Hintergrund der Ergebnisse aus Teil I beleuchtet werden. Obgleich die vorgestellten Beweise schon seit der Antike bekannt sind und somit auch Beispiele für die Positionen des *historischen Streifzugs* sein könnten, soll auch hier der Schwerpunkt insbesondere auf der Frage liegen, inwieweit sich die in Kapitel 2 herausgearbeiteten Eigenschaften mathematischer Schönheit daran konkretisieren lassen. Dies ist insbesondere der übergreifenden Frage dieser Arbeit nach der zeitgenössischen Ästhetik der Mathematik bzw. der mathematischen Praxis und der Erkenntnis aus Kapitel 3 geschuldet, dass sich Schönheitsverständnis und Anwendungsbereich über die Geschichte stark gewandelt haben. In einem zweiten Schritt wird dann die Frage nach dem Kunstcharakter der vorgestellten Beweise gestellt.

> „[The irrationality of $\sqrt{2}$] is a deep result of great generality, in that it opens up a whole new region of mathematics, namely the real numbers, and eventually the calculus and classical analysis.“ (Gardiner, 1983, S. 80)

Was Gardiner hier als besondere, die Argumentationen um die Irrationalität von $\sqrt{2}$ charakterisierende „Tiefe“ anführt und damit als Begründung für ihren ästhetischen Wert, entspricht in weiten Teilen dem unter 2.1 dargestellten Eigenschaftskomplex der Tragweite. Dabei betont er insbesondere die durch die Entdeckung der Irrationalität im Allgemeinen angestoßene Zahlbereichserweiterung und die damit verbundene Entstehung neuer mathematischer Gebiete.
Ein Blick auf die Mathematikgeschichte unterstreicht dies und zeigt außerdem weitere Facetten der Tragweite des Beispielkomplexes. So sorgte zum einen die Erkenntnis der Inkommensurabilität scheinbar offensichtlich gegebener Größen wie der Seite und der Diagonale im Quadrat für fruchtbare innermathematische Irritationen, die umfangreiche Forschungen zur Zahlbereichserweiterung anstießen (vgl. zusammenfassend Schmidt-Thieme und Weigand, 2003, S. 43).[19] In der Wechselbeziehungen des geometrischen und des arithmetischen Beweises zeigt sich weiter ein Paradebeispiel für die nützliche Verbindung von zunächst disparaten Disziplinen.

[19] Der Legende nach wurde die Inkommensurabilität zunächst am regelmäßigen Fünfeck, dem Wahrzeichen der Phythagoreer entdeckt. Für eine skizzenhafte Darstellung und Einordnung vgl. Beutelspacher u. a. (2011), S. 62ff.

Bereits Euklid erkennt in (Euklid, Elemente, Buch X, §5 bis 7) den Zusammenhang des geometrischen Problems der (In)Kommensurabilität mit der Darstellbarkeit der beteiligten Größen als Zahlverhältnis und kann sich so für seinen Beweis (Buch x, §115a) die Erkenntnisse der Arithmetik aus den vorhergehenden Büchern nun im Kontext der Geometrie zu Nutze mache. Ähnliches ist auch umgekehrt denkbar, kann doch die Frage nach der Rationalität von $\sqrt{2}$ erst durch die geometrische Argumentation über die Wechselwegnahme visuell fassbar werden.
Mit der geometrischen Deutung ist auch die Erweiterung des subjektiven Zahlkonzepts bezüglich der „Lückenhaftigkeit“ der rationalen Zahlengeraden verbunden. Damit geht die Möglichkeit einher, im rein zahlentheoretisch angelegten Beweis einen für das ästhetische Empfinden zentralen subjektiven Mehrwert zu erleben.
Bezogen auf die Tragweite im Sinne einer weitreichenden Heuristik werden weniger die möglichen Wechselwirkungen, als vielmehr Unterschiede der beiden Beispiele deutlich. So ist die zahlentheoretische Argumentation ein elementar zugänglicher Beweis durch Widerspruch und damit ein Beispiel für eine in der gesamten Mathematik zentrale Beweismethode. Des Weiteren kann der Argumentationsgang in der Art, wie er oben zitiert wird, leicht zum Nachweis der Irrationalität von Quadratwurzeln aus weiteren Nichtquadratzahlen übertragen werden.[20] Auch die Methode der Wechselwegnahme ist eine in weiteren Kontexten verwendbare Strategie. Mit ihrer Hilfe können beispielsweise inkommensurable Strecken im regelmäßigen Fünfeck nachgewiesen werden[21], und bezogen auf die natürlichen Zahlen entspricht sie dem euklidischen Algorithmus. Ihre Anwendung muss jedoch „für jede Größenart gesondert definiert werden“ (Thiele, 1999, S. 18).
Hinweise auf die Tragweite der vorgestellten Resultate bzw. der zugrunde liegenden Beweisideen zeigen somit die besondere innermathematische Bedeutung der vorgestellten Beispiele auf. Vor dem Hintergrund der Ergebnisse zur Rolle dieses Eigenschaftskomplexes (vgl. 2.1.3) sind sie jedoch noch nicht dazu geeignet, den ästhetischen Wert der Beispiele vollständig zu erfassen.

Insbesondere die Zusammenschau der beiden unterschiedlichen Beweisformen lässt das ästhetisch wirksame Moment der Einfachheit als subjektive Zugänglichkeit (vgl. 2.2.1) deutlich werden: Sowohl der Widerspruchsbeweis als auch die Argumentation über die Wechselwegnahme lassen erkennen, dass gerade die Bestimmung der Einfachheit als Fehlen epistemischer Hürden von den jeweiligen subjektiven Voraussetzungen abhängig ist. So wird ein Rezipient, der mit der Übertragbarkeit von Teilereigenschaften einer Zahl auf ihr Quadrat (und umgekehrt) vertraut ist, im Irrationalitätsbeweis keine Hindernisse wahrnehmen, die für die geometrische Argumentation notwendigen Kongruenzbetrachtungen möglicherweise jedoch als „unnötigen technischen Überbau“ empfinden. Hier wird deutlich, dass nicht nur ein grundständiges Verstehen des konkreten mathematischen Sachverhaltes dem

[20] Eine noch stärkere Verallgemeinerungsfähigkeit bergen Irrationalitätsbeweise, die über die Primfaktorzerlegung argumentieren. Diese sind sogar leicht auf n-te Wurzeln übertragbar.

[21] Die Wechselwegnahme am regelmäßigen Fünfeck verläuft „intuitiver“ als am Quadrat. Vgl. dazu etwa Beutelspacher u. a. (2011) S. 64f oder Hischer (2000) S. 97ff.

mathematisch-ästhetischen Urteil vorausgehen muss, sondern ein solches Werturteil entscheidend vom Vorwissen des Rezipienten geprägt ist. So zeigt sich in der Gegenüberstellung der beiden Beweise ein konkretes Beispiel für die in Kapitel 5 herausgestellte zusammenfassende Beobachtung, dass das mathematikästhetische Wohlgefallen ein rational vermitteltes ist.
Einen weiteren, die subjektive Zugänglichkeit beeinflussenden Faktor stellt die Repräsentationsform dar. So kann die Visualisierung im geometrischen Beweis dem einen die Strukturähnlichkeit der Quadrate und den weiteren Verlauf der Wegnahme sofort offenbaren, während ein anderer mit der Fortführbarkeit ins Unendliche hadert. Für Letzteren könnte dann aber wiederum durch den evtl. einfacher handhabbaren Übergang auf ein Problem der Darstellbarkeit als Zahlverhältnis die Spannung von der Komplexität des Unendlichen und der Schlichtheit des Widerspruchsbeweises erlebbar werden. Auch in diesem Sinne ist die Entscheidung, welcher der beiden Beweise die einfacheren Mittel verwendet, um ein Resultat von solcher Tragweite zu zeigen, welcher also im klassischen Sinne der ökonomischere ist, vom wertenden Subjekt abhängig.

Der geometrische Beweis über die Wechselwegnahme bzw. eine Skizze der Vorgehensweise, wie sie Abbildung 10.1 zeigt, bildet ein Beispiel für einen Gegenstandsbereich aus der „Grauzone" zwischen „Mustern der Mathematiker" und „Mustern aus der Mathematik" wie sie unter 5.3 dargestellt wurde. Dem geübten Rezipienten genügt bereits der Blick auf die Abbildung, um die Argumentation ohne den Umweg über die fachsprachliche Repräsentation zu erfassen. Möglicherweise ist so ein Innewerden „als Ganzes" unmittelbarer gegeben als im Falle des sprachlich abgefassten Widerspruchsbeweises. Die insbesondere auf dem Vorwissen beruhenden Unterschiede bezüglich der subjektiven Zugänglichkeit der beiden Beispiele verweisen jedoch darauf, dass nicht per se der aisthetisch zugänglichere Beweis als schöneres Stück Mathematik bewertet werden muss, und es entsteht außerdem der Verdacht, dass sich das Objekt unmittelbarer visueller Wahrnehmung vom Gegenstand mathematikästhetischer Urteile unterscheidet. Ein aisthetisches Werturteil über Abbildung 10.1 folgt anderen Qualitäten, etwa der Linienführung oder Farbgebung, und entspräche demnach nicht der (mathematik)ästhetischen Beurteilung des Wechselwegnahmebeweises auf der Grundlage von Kriterien, wie den in Kapitel 2 herausgearbeiteten.

Die beiden vorgestellten Beispiele offenbaren jedoch auch die in den Gegenständen selbst liegenden Unterschiede bezüglich der epistemischen Transparenz. Der indirekte Beweis zur Irrationalität ermöglicht von seiner Anlage her einen Einblick in die grundlegende Struktur der rationalen Zahlen als generell durch Brüche darstellbare Objekte. Darüber hinaus führt der erzeugte Widerspruch zunächst aber nur zu der Erkenntnis, *dass* $\sqrt{2}$ diese Eigenschaft nicht hat. Eine Begründung dafür oder weiteres über die Beschaffenheit des Objektes $\sqrt{2}$ legt er jedoch nicht offen. Einen solchen unbefriedigenden Mangel erkennt Francois Le Lionnais in Widerspruchsbeweisen im allgemeinen und nennt den hier diskutierten als ein Beispiel unter vielen: „While just as convincing as other proofs, these actually do not shed

any light on the structure of the propositions they establish.“ (Le Lionnais, 2004, S. 141) Im vorgestellten Widerspruchsbeweis bleibt die Frage nach dem *„Warum“* der Irrationalität somit ungeklärt.[22]
Dies ist in der geometrischen Argumentation zumindest potenziell anders. Durch die fortgesetzte Wechselwegnahme entstehen sichtbar immer kleinere Vierecke, deren Struktur jeweils mit der des Ausgangsquadrats übereinstimmt. Über diese Erkenntnis ist nun der Weg geebnet zu verstehen, dass der Prozess niemals abbrechen und somit – weil die Quadratseiten beliebig klein werden – kein gemeinsames Maß von Seite und Diagonale gefunden werden kann. Der epistemische Mehrwert der geometrischen Argumentation liegt dabei wie oben bereits angedeutet nicht darin, dass sie voraussetzungsärmer wäre oder in einer besseren Zugänglichkeit durch die Visualisierung, sondern vielmehr in ihrer eher suchend, *konstruktiv* angelegten Grundstruktur.

Inwiefern die unterschiedlichen Beispiele Aha!-Erlebnisse evozieren können, ist vom Rezipienten abhängig, wie schon die Überlegungen zur subjektiven Zugänglichkeit zeigen. So gibt es Beispiele, die zur Beschreibung einer solchen Erfahrung gerade den Widerspruchsbeweis zur Irrationalität heranziehen, andere dagegen sehen in diesem Widerspruchsbeweis gerade ein Paradebeispiel des „step-by-step reasoning“, das dem Aha!-Erlebnis entgegenstehe[23]. Ob sich im Fall der Beispiele ein tieferes Verstehen in Form eines Aha!-Erlebnisses einstellt oder das Verstehen gar ganz ausbleibt, kann durch die Wahl der Beweisart sicher beeinflusst werden, bleibt letztlich jedoch wieder vom rezipierenden Subjekt und den jeweiligen Möglichkeiten zum Umgang mit dem Gegenstand abhängig.

Als Klassiker der Mathematikästhetik und damit als besonders schöne Stücke der Mathematik werden auch die hier besprochenen Beweise aus dem Beispielkomplex der Irrationalität/ Inkommensurabilität immer wieder mit den unter 2.4 beschriebenen Emotionen in Verbindung gebracht. So kann etwa die generelle Tragweite des Resultates zu mehr oder weniger stark ausgeprägten emotionalen Reaktionen führen – wird doch unter Umständen das gesamte bisherige Zahlkonzept in Frage gestellt.
Darüber hinaus kann die geometrische Argumentation etwa durch das Erstaunen über die Strukturähnlichkeiten im unendlich Kleinen begleitet werden. Aber auch die Erkenntnis, dass das gesuchte gemeinsame Maß nun sicher nicht gefunden werden kann, kann je nach Vorwissen und Erwartungen ein großes Maß an Überraschung bereit halten. Der Widerspruchsbeweis provoziert dagegen eher das Gefühl der Unausweichlichkeit. So scheint nach der formulierten Annahme jeder

[22] Dies führt Le Lionnais zu der Einschätzung, dass etwa im schulischen Kontext solche Beweise als schwierig erlebt werden, da sie häufig auf Tricks beruhten, die lediglich Bewunderung für den Autor des Beweises hervorriefen, für die Rezipienten jedoch besondere Hindernisse darstellten (vgl. Le Lionnais, 2004, S. 141).

[23] Vgl. Papert (1988) S. 114. Als Beispiel für ein „aha-single-flash-insight“ beschreibt Papert einen Beweis für die Irrationalität über den Vergleich der Primfaktoranzahlen, der bereits die Gleichung $p^2 = 2q^2$ als elementar erkennbar widersprüchlich aufzeigt.

Schritt den nächsten nahezulegen, und der Beweisgang läuft unausweichlich auf den Widerspruch zu. Seymour Papert beschreibt aus einem Experiment mit Studierenden, dass diese Unausweichlichkeit wiederum emotional unterschiedlich erlebt und eingeordnet werden kann:

> „One can experience the process of inevitability in very different ways with very different kinds of affect. One can experience it as being taken over in a relationship of temporary submission. One can experience this as surrender to Mathematics, or to another person, or of one part of oneself to another. One can experince it not as submission but as the exercise of an exhilarating power.“ (Papert, 1988, S. 115)

Paperts Beobachtung zeigt, dass das emotionale Erleben des Beweisprozesses auch negativ konnotiert sein kann. Die Unausweichlichkeit bedeutet nicht per se eine positive Schönheitserfahrung, sondern kann auch Abscheu oder Angst hervorrufen. Dies verweist darauf, dass nicht die Anwesenheit bestimmter Gefühle angesichts eines „Musters der Mathematiker“ allein zu Schönheitsurteilen führt. Andererseits zeigt sich, dass die Möglichkeit einer mathematikästhetischen Erfahrung auch an einem anerkannten Klassiker von der (emotionalen) Verfasstheit des Rezipienten abhängt.[24]
Die Eindrücke und Emotionen, die Papert hier beschreibt, sind darüber hinaus ein Beispiel für die Wirkung, die der mathematische Text auf den nacherfindenen Rezipienten haben kann. Der Leser wird im Beweisverlauf von Schritt zu Schritt mitgenommen, um schließlich unausweichlich den Widerspruch zu erkennen. Ausgehend von der Annahme, $\sqrt{2}$ sei als vollständig gekürzter Bruch darstellbar, wird einem literarischen Text gleich ein Spannungsbogen aufgebaut, der auf unterschiedliche Weise erlebt werden kann. Solche Erlebnisse zeigen, dass der Vergleich mathematischer Texte im Allgemeinen und mindestens des oben vorgestellten Widerspruchsbeweises mit Romanen oder Kurzgeschichten, wie es exemplarisch unter 6.3 vorgestellt wird, nicht von der Hand zu weisen ist.[25]

Über den Entstehungsprozess der hier im Vordergrund stehenden mathematischen Kunstwerke und die Fähigkeiten und Begabungen der daran beteiligten Mathematiker wäre hier naturgemäß jede Aussage rein spekulativ.[26] Das auch in der aktuellen mathematischen Praxis zu beobachtende Phänomen, im Endprodukt die Spuren des Produktionsprozesses so weit wie möglich durch einen deduktiv geordneten Beweistext zu verwischen, zeigt das Werk Euklids jedoch in besonderem

[24] Dies wird ähnlich auch für ästhetische Erfahrungen etwa mit Formen der bildenden Künste beschrieben.

[25] Eine genaue strukturelle Analyse der Beispiele, wie sie etwa Reviel Netz vorschlägt (vgl. 6.3.2), wäre in diesem Zusammenhang interessant, würde aber eine Abhandlung mit eigenem Schwerpunkt erfordern und den Rahmen dieses Kapitels sprengen.

[26] Das vermutlich einzige „persönliche“ Zeugnis dazu aus dieser Zeit ist wohl die Legende, nach der die Pythagoreer von der Entdeckung der Inkommensurabilität – an ihrem Wahrzeichen, dem regelmäßigen Fünfeck – so getroffen waren, dass dies der Entdecker Hippassos mit dem Leben bezahlen musste.

Maße. Dies lässt mindestens vermuten, dass auch die antiken Beweise (wie etwa Euklid, Buch X, 115a) sich den griechischen Mathematikern nicht in der vollendeten klassischen Argumentationsform offen gelegt haben, wie sie dort zu lesen ist. Um dennoch etwas über den künstlerischen Schaffensprozess und die Rolle des Ästhetischen bezüglich der hier besprochenen Beispiele zu erfahren, kann die Beobachtung des Nacherfindens solcher Gedanken herangezogen werden. Solche empirischen Untersuchungen mit Studierenden bzw. Schülern beschreiben etwa Seymour Papert (1988) und auch Martin Wagenschein (1970). Die empirische Studie Paperts ist dabei explizit angelegt, um an die Ausführungen Poincarés zur mathematischen Erfindung anzuknüpfen, und will die Rolle des Ästhetischen in solchen Erfahrungen beim Mathematiktreiben im Kleinen aufzeigen (vgl. Papert, 1988, S. 110). Untersuchungen wie diese weisen darauf hin, dass auch in Bezug auf die Entstehung der hier betrachteten Beispiele das Ästhetische eine zentrale Rolle spielt und Prozesse, wie sie unter 6.1 für die Arbeit des Mathematikers als Künstler beschrieben wurden, auch im erneuten Umgang mit diesen Problemen zu beobachten sind.[27] Die in solchen Untersuchungen beschriebenen Um- und Irrwege der Probanden zeigen am Beispiel die in der theoretischen Untersuchung immer wieder naheliegende These, dass zwischen dem Nachvollziehen der Argumentation, also der Rezeption eines mathematischen Produkts, und der Arbeit des schaffenden Produzenten selbst im Bereich elementarer Beispiele unterschieden werden muss. Obwohl die von Papert beobachteten Studierenden vermutlich dem Beweis in einer Vorlesung leicht Schritt für Schritt folgen könnten, geschieht das Auffinden der Beweisidee ohne Vorkenntnisse und Hilfen nicht geradlinig.[28] Das konkrete Beispiel unterstreicht somit erneut, dass das kantische Vorgehen vom Produkt und seiner Rezipierbarkeit auf die Lernbarkeit mathematischen Schaffens zu schließen nicht gerechtfertigt ist.

Aus der bisher dargestellten Anwendbarkeit mathematikästhetischer Eigenschaften ergibt sich, dass auch die Beweise des Beispielkomplexes Irrationalität/ Inkommensurabilität stilbildende Elemente aufweisen und mathematischen Stilen zugeordnet werden können. Im Rahmen von Systematiken, die zeitlich aufeinanderfolgende, nicht wiederkehrende Stilepochen auszeichnen und dabei die gesamte griechische Mathematik (bis zur Rennaissance) der „Klassik" zuordnen, würde der gesamte Beispielkomplex eindeutig auch im stilistischen Sinne als klassisch gelten.[29] Positionen, die persönliche Stile bestimmter Mathematiker auszeichnen und bezogen auf die Antike insbesondere den „euklidischen Stil" von anderen abgrenzen[30], würden den Widerspruchsbeweis – obgleich er wie beschrieben nicht ganz dem Vorgehen in den *Elementen* entspricht – vermutlich auch stilistisch von der

[27] Vgl. dazu auch die Überlegungen zum Beitrag des Ästhetischen im mathematischen Problemlöseprozess unter 9.1.3.

[28] Die unterschiedlichsten (Irr-)Wege beschreibt auch Wagenschein für die von ihm beobachteten Schülergruppen (vgl. Wagenschein, 1970, S. 139ff).

[29] Vgl. die Darstellung der Ansätze von Max Bense oder Karl Heinrich Hofmann (S. 133ff).

[30] Siehe insbesondere die Zuordnung Reviel Netz' (S. 152ff.) aber auch Hinweise dazu bei Felix Klein (1908) und Helmut Hasse (1952).

eher iterativ, konstruktiv angelegten Wechselwegnahem unterscheiden. Auch in der quer zur historischen Entwicklung liegenden Systematik nach Le Lionnais zeigen sich Unterschiede in der ästhetischen Wahrnehmung und stilistischen Zuordnung zwischen den beiden Beweisen des Beispielkomplexes. Er behandelt das hier besprochene Irrationalitätsbeispiel explizit und bezeichnet den Widerspruchsbeweis als Paradebeispiel für eine mathematische Methode romantischer Schönheit (vgl. Le Lionnais, 2004, S. 141). Die oben dargestellte Wechselwegnahme jedoch würde er als rekursive Methode wohl dem klassischen Stil zuordnen und ihr somit wiederum eine besondere Ökonomie bescheinigen. Der Beispielkomplex als Ganzes bzw. der Zusammenhang der Resultate zur Inkommensurabilität einerseits und zur Irrationalität andererseits, als Beispiel der innermathematischen Vernetzung von Geometrie und Zahlentheorie, wäre wiederum der klassischen Schönheit mathematischer Fakten zuzuordnen (vgl. Le Lionnais, 2004, S. 124). Durch eine solche stilistische Einordnung können also verschiedene mathematikästhetische Einschätzungen sichtbar gemacht und benannt werden. Die Verortung in der Systematik Le Lionnais' verweist dabei sowohl auf die mögliche Unterscheidung zwischen der Schönheit der Beweismethoden und der Schönheit der bewiesenen Sätze, als auch darauf, dass bei den betrachteten Beispielen je sehr unterschiedliche Facetten des mathematischen Schönheitsbegriffs mehr oder weniger stark ausgeprägt sind.

Die Analyse des Beispielkomplexes aus mathematikästhetischer Perspektive zeigt einerseits, dass die verschiedenen Beweise vor dem Hintergrund der Ergebnisse von Teil I und II differenziert beschrieben werden können. Obgleich sie aus einem inhaltlich verwandten Beispielkomplex stammen, kommen einzelne Charakteristika mathematischer Schönheit je unterschiedlich zum Tragen. Dies führt über die Begründung mathematikästhetischer Werturteile hinaus zu einer umfassenden inhaltlichen Einordnung der Beispiele, sowie zu einer Beschreibung der Beziehung möglicher Rezipienten zu den genannten Beweisen. Die Zuordnung zu je verschiedenen mathematischen Stilen unterstreicht die mathematikästhetischen Unterschiede innerhalb des Beispielkomplexes und bietet einen Rahmen, diese einzuordnen und zu benennen. Die Möglichkeit der stilistischen Einordnung bildet außerdem ein Argument für den Kunstwerkcharakter der untersuchten Beispiele (vgl. 8.2). Dies wird durch die Stellung der Beispiele in der „Mathematikwelt“ bestätigt. So werden beide Beweise immer wieder in populärwissenschaftlichen Arbeiten einem breiten Publikum vorgeführt. Aufgrund der elementaren Zugänglichkeit handelt es sich hier um Beispiele dafür, dass Rezipienten wie auch Kritiker nicht selbst aus der Gruppe der schaffenden Mathematiker stammen müssen. Sie sind also auch für Nichtmathematiker als Gegenstände mathematikästhetischer Kommunikation (vgl. 6.4.3) geeignet.

Die Analyse zeigt nicht zuletzt, dass die gewählten Beispiele zurecht zu den Klassikern der Mathematikästhetik gezählt und in diesem Zusammenhang immer wieder aufgegriffen werden.

10.3 Ausblick und Schlussbemerkungen

Wie dies hier für zwei Klassiker der Mathematikästhetik, die Eulersche Formel und den Beispielkomplex um Irrationalität und Inkommensurabilität vorgeschlagen wurde, könnten viele weitere „Muster der Mathematiker“ auf ihren mathematikästhetischen Wert untersucht werden. Dabei wären je nach Forschungsinteresse neben weiteren häufig genannten Klassikern, wie etwa dem Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlmenge, sowohl Stücke der aktuellen Forschungsmathematik als auch Beispiele auf ganz elementarem Level, wie etwa präformale Beweise oder schülereigene Problemlösungen, interessante Gegenstände.

Die Ergebnisse bezüglich der hier behandelten Beispiele zeigen bereits, dass es bei der Analyse aus mathematikästhetischer Perspektive zu einer umfänglichen Darstellung des betrachteten Stücks Mathematik kommen muss, was insbesondere dem facettenreichen mathematischen Schönheitsbegriff geschuldet ist. Dabei wird das jeweilige Beispiel nicht nur mit der Frage nach seinem Kunstcharakter in den Kontext mathematischer Praxis gestellt. Der betrachtete Gegenstand ist dazu zu einem gewissen Grad sowohl in seinem historischen Kontext als auch bezüglich seiner Einbettung in größere mathematische Zusammenhänge zu betrachten. Dies muss durch (potentielle) subjektive Erfahrungen im Umgang mit dem untersuchten Gegenstand wesentlich ergänzt werden. Empirische Untersuchungen auf der Grundlage der vorliegenden hauptsächlich theoretischen Ergebnisse mit geeignetem Design in unterschiedlichen Bereichen und Zielgruppen – vom schaffenden Fachmathematiker bis hin zum Grundschüler – könnten dies unterstreichen und evtl. zu einer weiteren wissenschaftssoziologisch fundierten Beschreibung dieses Aspekts führen. Auf der Grundlage solcher Untersuchungen wären dann auch weitere Aussagen über Funktion und Rolle des Ästhetischen bezüglich der Rezeption und Produktion von Mathematik zu verankern.

Die mathematikästhetische Perspektive, wie sie im Rahmen dieser Arbeit aufgespannt wird, führt somit angewandt auf ein bestimmtes „Muster der Mathematiker“ zu Informationen abseits von Fragen nach formaler Korrektheit oder ontologischem Status wie sie in der klassischen Mathematikphilosophie behandelt werden. Es handelt sich vielmehr um eine Metareflexion mit Fokus auf den objektiven und subjektiven Wirkungsweisen der Gegenstände und reiht sich somit wie eingangs vorgeschlagen in die Beiträge zur mathematikphilosophischen Diskussion ein, deren Interesse auf die mathematische Praxis gerichtet ist. Umgekehrt liefern die Untersuchungen dieser Arbeit zum mathematischen Schönheitsbegriff und zum Kunststatus der Mathematik als ein Versuch einer disziplinären Wissenschaftsästhetik gerade den Rahmen und Hintergrund, einen auch in solchen Ansätzen immer nur angedeuteten Aspekt der Mathematik und ihrer Praxis fassbarer zu machen – das Phänomen der ästhetischen Erfahrung Mathematik.

Literaturverzeichnis

[Allmendinger und Spies 2013] Allmendinger, Henrike ; Spies, Susanne: „Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt“ – Das Zwischenstück in der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ als Stilgeschichte und Kleinsches Programm. In: Rathgeb, Martin (Hrsg.) ; Helmerich, Markus (Hrsg.) ; Krömer, Ralf (Hrsg.) ; Lengnink, Katja (Hrsg.) ; Nickel, Gregor (Hrsg.): *Mathematik im Prozess.* Wiesbaden, 2013, S. 177–194

[Andersen 2007] Andersen, Kirsti: *The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge.* New York, 2007

[Aristoteles, Metaphysik] Aristoteles: *Metaphysik. Schriften zur Ersten Philosophie.* Stuttgart, 2000. – Übersetzt und herausgegeben von Franz F. Schwarz

[Augustinus, De musica] Augustinus, Aurelius: *Musik. De Musica Libri sex.* 4. Aufl. Paderborn, 1962. – Deutsche Übertragung von Carl Johann Perl

[Augustinus, De ordine] Augustinus, Aurelius: *Die Ordnung. De Ordine.* 4. Aufl. Paderborn, 1966. – Deutsche Übertragung von Carl Johann Perl

[Augustinus, De quantitate animea] Augustinus, Aurelius: *Die Größe der Seele. De quantitate animea liber unus.* Paderborn, 1960. – Deutsche Übertragung von Carl Johann Perl

[Barth 2005] Barth, Armin P.: Schönheit – Das Ceterum Censeo des Mathematikunterrichts. In: *Die Wurzel – Zeitschrift für Mathematik.* 39 (2005), S. 68–77

[Basieux 2003] Basieux, Pierre: *Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze.* 3. Aufl. Hamburg, 2003

[Bauer 2010] Bauer, Julian G.: *Theorie, Komposition und Analyse - der Einfluss der Mathematik auf die Musik im 20. Jahrhundert: eine musikwissenschaftliche Analyse der Interdependenzen von Musik und Mathematik im 20. Jahrhundert anhand der Beispiele Joseph Schillinger, Conlon Nancarrow, Iannis Xenakis und Jan Beran.* Frankfurt a.M., 2010

[Beckmann 2009] Beckmann, Astrid: Förderung des Variablenbegriffs durch fächerübergreifende Stationen zwischen Kunst und Mathematik. In: *Der Mathematikunterricht* 2 (2009), S. 20–27

[Bense, 1946] Bense, Max: Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik. Die Mathematik und die Wissenschaft. In: Walther, Elisabeth (Hrsg.): *Max Bense. Ausgewählte Schriften Bd. 2.* Weimar, 1998, S. 103–232. – Erstmals veröffentlicht 1946

[Bense, 1949] Bense, Max: Konturen einer Geistesgeschichte der Mathematik II. Die Mathematik in der Kunst . In: Walther, Elisabeth (Hrsg.): *Max Bense. Ausgewählte Schriften Bd. 2.* Weimar, 1998, S. 103–232. – Erstmals veröffentlicht 1949

[Beutelspacher u. a. 2011] Beutelspacher, Albrecht ; Danckwerts, Rainer ; Nickel, Gregor ; Spies, Susanne ; Wickel, Gabriele: *„Mathematik Neu Denken“ – Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden, 2011

[Bill 1972] Bill, Max: *max bill: system mit fünf vierfarbigen zentren.* St. Gallen, 1972

[Bilstein und Zirfas 2009] Bilstein, Johannes ; Zirfas, Jörg: Bildung und Ästhetik. Eine Einleitung. In: (Zirfas u. a., 2009)

[Birkhoff 1933] Birkhoff, George W.: *Aesthetic Measure.* Cambridge, 1933

[Bomski und Suhr 2012] Bomski, Fransziska (Hrsg.) ; Suhr, Stefan (Hrsg.): *Fiktum versus Faktum? Nicht-mathematische Dialoge mit der Mathematik.* Berlin, 2012

[Borel 1981] Borel, Armand: *Mathematik: Kunst und Wissenschaft.* 2. München, 1981

[Borwein 2006] Borwein, Jonathan M.: Aesthetics for the Working Mathematician. In: (Sinclair u. a., 2006), S. 21–40

[Brinkmann 2006] Brinkmann, Astrid: Erfahrung mathematischer Schönheit. In: Büchter, Andreas (Hrsg.) ; Humenberger, Hans (Hrsg.) ; Hussmann, Stephan (Hrsg.) ; Prediger, Susanne (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag.* Hildesheim, 2006, S. 203–213

[Brinkmann und Sriraman 2009] Brinkmann, Astrid ; Sriraman, Bharath: Aesthetics and Creativity: An exploration of the relationships between the constructs. In: *Relatively and Philosophically Earnest.* 2009

[Brisson 1996] Brisson, Luc: Den Kosmos betrachten, um richtig zu leben: Timaios. In: Kobusch, Theo (Hrsg.) ; Mojsisch, Burkhard (Hrsg.): *Platon. Seine Dialoge in der Sicht neuer Forschungen.* Darmstadt, 1996, S. 229–248

[Bungartz 2003] Bungartz, Hans-Joachim: Schön einfach - einfach schön. Sätze, Beweise und Algorithmen auf dem Laufsteg. In: *aviso. Zeitschrift für Wissenschaft und Kunst in Bayern.* 1 (2003), S. 38–47

[Burton 2004] BURTON, Nathalie: *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics.* Norwell, 2004

[Byrne 1847] BYRNE, Oliver: *The first Six Books of the Elements of Euclid in which couloured Diagrams and Symbols are used instead of Letters for the Greater Ease of Learners.* London, 1847

[Carroll 1999] CARROLL, Noel: *Philosophy of Art. A contemporary introduction.* Oxon, 1999

[Chaitin 2002] CHAITIN, Gregory: *Conversation with a Mathematician. Math, Art, Science and the Limits of Reason.* London, 2002

[Chernyak und Kahdan 1997] CHERNYAK, Leon ; KAHDAN, David: Kant and the Aesthetic-Expressive Vision of Mathematics. In: TAUBER, I.A. (Hrsg.): *The Elusive Synthesis: Aesthetic and Science.* Dortrecht, 1997, S. 203–255

[Corfield 2003] CORFIELD, David: *Towards a Philosophy of real mathematics.* Cambridge, 2003

[Crousaz 1715] CROUSAZ, Jean-Piere d.: *Traité du Beau.* Genf, 1715. – unveränderter Nachdruck, 1970

[D'Alembert 1751] D'ALEMBERT, Jean L.: *Einleitung zur Enzyklopädie.* Hamburg, 1751. – Herausgegeben und eingeleitet von Erich Köhler, 2. durchgesehene Aufl., 1975

[Danckwerts und Vogel 2006] DANCKWERTS, Rainer ; VOGEL, Dankwart: *Analysis verständlich unterrichten.* München, 2006

[Davies 2001] DAVIES, Stephen: Definitions of art. In: GAOUT, Berys (Hrsg.) ; MCIVER LOPES, Dominic (Hrsg.): *The Routledge Companion to Aesthetics.* London and New York, 2001, S. 169–179

[Davis und Hersh 1994] DAVIS, Philip J. ; HERSH, Reuben: *Erfahrung Mathematik.* Basel, 1994

[Der Mathematikunterricht 55/2 2009] *Der Mathematikunterricht – Mathematik und Kunst.* 2009. – Herausgegeben von Herbert Henning

[Devlin 2002] DEVLIN, Keith: *Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur.* Heidelberg/ Berlin, 2002

[Dickie 1997] DICKIE, George: *Introduction to Aesthetics. An Analytic Approach.* Oxford, 1997

[Diderot 1989] DIDEROT, Denis: Beau – Schön. In: D'ALEMBERT, Jean Le R. (Hrsg.) ; DIDEROT, Denis (Hrsg.): *Enzyklopädie. Eine Auswahl.* Frakfurt a.M., 1989, S. 76–91. – Herausgegeben und eingeleitet von Günter Berger. Aus dem Französischen von Günter Berger, Theodor Lücke und Imke Schmidt

[Doxiadis 2005] DOXIADIS, Apostolos: Euclid's Poetics: An examination of the similarity between narrative and proof. In: EMMER, Michele (Hrsg.): *Mathematics and Culture II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity.* Berlin and Heidelberg, 2005, S. 175–182

[Dreyfus und Eisenberg 1986] DREYFUS, Tommy ; EISENBERG, Theodore: On the Aesthetics of Mathematical Thought. In: *For the Learning of Mathematics* 6(1) (1986), S. 2–10

[Dutton 2001] DUTTON, Denis: Aesthetic Universals. In: GAUT, Berys (Hrsg.) ; MCIVER, Lopes (Hrsg.): *The Routledge Companion to Aesthetics.* London, New York, 2001

[Eco 1991] ECO, Umberto: *Kunst und Schönheit im Mittelalter.* Wien, München, 1991

[Eco 2004] ECO, Umberto: *Die Geschichte der Schönheit.* München, Wien, 2004

[Emmer 1993] EMMER, Michele: Art and Mathematics: The Platonic Solids. In: EMMER, Michele (Hrsg.): *The Visual Mind: Art and Mathematics.* Cambridge, 1993, S. 215–220

[Emmer 2005] EMMER, Michele: Mathematics and Cinema. In: DERS. (Hrsg.): *The visual mind II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity.* Cambirdge, 2005, S. 569–600

[Engel 2004] ENGEL, Birgit: *Spürbare Bildung. Über den Sinn des Ästhetischen im Unterricht.* Münster, 2004

[Epple 2000] EPPLE, Moritz: Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. In: *Mathematische Semesterberichte* 47 (2000), S. 131–163

[Euklid, Elemente] EUKLID: *Die Elemente. Bücher I – XIII.* 4. Frankfurt a.M., 2003. – Aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Mit einer Einleitung von Peter Schreiber

[Euler 1885] EULER, Leonhard: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen.* Berlin, 1885. – Ins Deutsche übertragen von H. Maser

[Fellmann 1983] FELLMANN, Emil A.: Leonhard Euler – Ein Essay über Leben und Werk. In: FELLMANN, Emil A. (Hrsg.): *Leonhard Euler 1707-1783. Beiträge zu Leben und Werk.* Basel, 1983

[Fellmann 1995] FELLMANN, Emil A.: *Leonhard Euler.* Hamburg, 1995

[Feyerabend 1983] FEYERABEND, Paul: *Wider den Methodenzwang.* Frankfurt a.M., 1983

[Field 1997] FIELD, Judith V.: *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance.* New York, 1997

[Fomenko 1990] FOMENKO, Anatolii T.: *Mathematical Impressions.* Rhode Island, 1990

[Gardiner 1983] GARDINER, Cyril: Beauty in Mathematics. In: *Mathematical spectrum.* 16(3) (1983), S. 78–84

[Gerstberger 2009] GERSTBERGER, Herbert: Mathematics learning and aesthetic production. In: *ZDM –The international Journal on Mathematics Education* 41 (2009), S. 61–73

[Giordanetti 1995] GIORDANETTI, Piero: Das Verhältnis von Genie, Künstler und Wissenschaftler in der Kantischen Philosophie. In: *Kant-Studien* 86 (1995), S. 406–430

[Glynn 2010] GLYNN, Ian: *Elegance in Science. The Beauty of Simplicity.* Oxford, 2010

[Goldin 2000] GOLDIN, Gerald: Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving. In: *Mathematical Thinking and Learning* 2(3) (2000), S. 209–219

[Granger 1968] GRANGER, Gilles-Gaston: *Essai d'une Philosophie du Style.* Paris, 1968

[Grundhöfer und Rosehr 2007] GRUNDHÖFER, Theo ; ROSEHR, Nils: Die Fibonacci-Zahl 144 in Bildern von Rune Mields. In: (Lauter und Weigand, 2007)

[Guderian 1990a] GUDERIAN, Astrid: Spurensuche: Mathematik und Kunst. Matheamtises von der prähistorischen Zeit bis zu den Fühkulturen. In: (Guderian, 1990b), S. 263–273

[Guderian 1990b] GUDERIAN, Dietmar: *Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre. Von der magischen Zahl über das endlose Band zum Compueterprogramm.* Paris, 1990

[Guderian 2005] GUDERIAN, Dietmar: Mathematics in Contemporary Arts - Finite and Infinity. In: EMMER, Michele (Hrsg.): *Mathematics and Culture II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity.* Berlin, Heidelberg, 2005, S. 23–37

[Guderian 2007] GUDERIAN, Dietmar: Mathematik in der Kunst - Ein Weg zum Kunstwerk. In: (Lauter und Weigand, 2007), S. 18–23

[Gunzenhäuser 1975] GUNZENHÄUSER, Rul: *Maß und Information als ästhetische Kategorien. Einführung in die ästhetische Theorie G.D. Birkhoffs und die Informationsästhetik.* Baden-Baden, 1975. – Zweite überarbeitete und erweiterte Aufl.

[Hadamard 1945] Hadamard, Jacques: *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princton, 1945

[Halmos 1968] Halmos, Paul R.: Mathematics as a creative art. In: *American scientist* 56 (1968), S. 375–389

[Hardy 1940] Hardy, Godfrey H.: *A Mathematician's Apology.* Cambridge, 1940. – 13. Nachdruck mit einem Vorwort von C. P. Snow. 2007

[Harré 1958] Harré, Rom: Quasi-Aesthetic Appraisals. In: *Philosophy* 33 (1958), Nr. 125, S. 132–137

[Hasse 1952] Hasse, Helmut: *Mathematik als Wissenschaft Kunst und Macht.* Wiesbaden, 1952

[Hauskeller 1994] Hauskeller, Michael: *Was das Schöne sei. Klassische Texte von Platon bis Adorno.* München, 1994

[Hein 2010] Hein, Wolfgang: *Die Mathematik im Mittelalter. Von Abakus bis Zahlenspiel.* Darmstadt, 2010

[Heintz 2000] Heintz, Bettina: *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien, 2000

[Heitzer 2007] Heitzer, Johanna: Spiralen in Kunst und Mathematik. In: (Lauter und Weigand, 2007), S. 60–67

[Heymann 1996] Heymann, Hans W.: *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim, Basel, 1996

[Hischer 2000] Hischer, Horst: Klassische Probleme der Antike – Beispiele zur „Historischen Verankerung". In: Blankenagel, Jürgen (Hrsg.) ; Spiegel, Wolfgang (Hrsg.): *Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik – Festschrift für Harald Scheid.* Stuttgart u.a., 2000, S. 97–118

[Hofmann 1982] Hofmann, Karl H.: Eine Stilkunde des Raumbegriffs – Spekulationen zwischen Kunst- und Mathematikgeschichte. In: *Jahrbuch Überblicke Mathematik* (1982), S. 171–191

[Hutcheson, Inquiry] Hutcheson, Francis: *An Inquiry concerning Beauty, Order, Harmony, Design.* The Hague, 1973. – Edited with an Introduction and Notes by Peter Kivy

[Jahnke 1999] Jahnke, Hans N.: Die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts. In: Jahnke, Hans N. (Hrsg.): *Geschichte der Analysis.* Heidelberg, Berlin, 1999, S. 131–170

[Jullien 2008] Jullien, Caroline: *Esthétique et Mathématicques. Une exploration goodmanienne.* Rennes, 2008

[Kant, KrV] Kant, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft.* Hamburg, 1998. – Nach der ersten und zweiten Originalausgabe herausgegeben von Jens Timmermann

[Kant, KU] Kant, Immanuel: *Kritik der Urteilskraft.* Stuttgart, 1963. – Herausgegeben von Gerhard Lehmann

[Kauferstein 2006] Kauferstein, Christian: *Tanszendentalphilosophie der Mathematik. Versuch einer systematischen Rekonstruktion der Leitlinien einer Philosophie der Mathematik in Kants „Kritik der reinen Vernunft“ und Maimons „Versuch über die Transzendentalphilosophie“.* Stuttgart, 2006

[King 1992] King, Jerry P.: *The Art of Mathematics.* New York, 1992

[Klein 1908] Klein, Felix: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Bd. I (Arithmetik, Algebra, Analysis). Berlin, 1908. – Seitenzählung nach der 4. Aufl. von 1933

[Koriako 1999] Koriako, Darius: *Kants Philosophie der Mathematik. Grundlagen-Voraussetzungen-Probleme.* Hamburg, 1999

[Krull 1930] Krull, Wolfgang: Über die ästhetische Betrachtungsweise in der Mathematik. In: *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen.* 61 (1930), S. 207–220

[Kuhn 1978] Kuhn, Thomas S.: *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen.* 3. Aufl. Frankfurt am Main, 1978

[Kutschera 1988] Kutschera, Franz v.: *Ästhetik.* Berlin u.a., 1988

[Lauter 2007] Lauter, Marlene: Mathematik als Metapher - Betrachtungen einiger konstruktiv-konkreter Bildwerke. In: (Lauter und Weigand, 2007)

[Lauter und Weigand 2007] Lauter, Marlene ; Weigand, Hans-Georg: *Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst.* Würzburg, 2007

[Le Lionnais 2004] Le Lionnais, Francois: Beauty in Mathematics. In: Le Lionnais, Francois (Hrsg.): *Great Currents of Mathematical Thought.* Bd. II. Mathematics in the Arts and Sciences. 2. Auflage. New York, 2004, S. 121–158

[Lehrplan Mathematik Sek. II NRW 1999] Weiterbildung NRW, Ministerium für Schule und (Hrsg.): *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II. Mathematik.* Frechen, 1999

[Lenhard 2006] Lenhard, Johannes: Computersimulation. Über einen Umbruch in der ästhetischen Konstitution der Mathematik. In: Krohn, Wolfgang (Hrsg.): *Ästhetik in der Wissenschaft. Interdisziplinärer Diskurs über das Gestalten und Darstellen von Wissen.* Bd. 7. Hamburg, 2006, S. 181–185

[Lietzmann 1931] Lietzmann, Walther: *Mathematik und Bildende Kunst.* Breslau, 1931

[Littlewood 1986] LITTLEWOOD, John E. ; BOLLOBAS, Bela (Hrsg.): *Littlewood's Miscellany.* Cambridge, 1986

[Lohse 1990] LOHSE, Richard P.: Serielle Ordnungen. In: (Guderian, 1990b), S. 275–277

[Löwe und Müller 2010] LÖWE, Benedikt (Hrsg.) ; MÜLLER, Thomas (Hrsg.): *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice.* London, 2010

[Maak 2006] MAAK, Angela: *Mit Ecken und Kanten – Kunstwerke mit geometrischen Aspekten.* Kempen, 2006

[Marc-Wogau 1938] MARC-WOGAU, Konrad: *Vier Studien zu Kants Kritik der Urteilskraft.* Uppsala, 1938

[mathematik lehren 157 2009] : *Mathematik Lehren 157: Kunst – Kreative Zugänge zur Mathematik.* Dezember 2009

[Matthews 1997] MATTHEWS, Patricia M.: *The Significance of Beauty. Kant on the Feeling and the System of Mind.* Dordrecht u.a., 1997

[McAllister 1996] MCALLISTER, James w.: *Beauty and Revolution in Science.* Ithaca, London, 1996

[McAllister 2005] MCALLISTER, James W.: Mathematical Beauty and the Evolution of Standards of Mathematical Proof. In: EMMER, Michele (Hrsg.): *The Visual Mind II.* Cambridge (u.a.), 2005, S. 15–34

[McCartin 2006] MCCARTIN, Brian: e: The Master of All. In: *The mathematical intelligencer.* 28 (2006), Nr. 2, S. 10–21

[Mehrtens 1990] MEHRTENS, Herbert: *Moderne Sprache Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt a.M., 1990

[Müller u. a. 2002] MÜLLER, Gerhard N. ; STEINBRING, Heinz ; WITTMANN, Erich C.: *Jenseits von PISA: Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht.* Seelze-Velber, 2002

[Müller 1992] MÜLLER, W.G.: Stil und Philosophie. Denk-Stile/ Lebens-Stile. In: RITTER, Joachim (Hrsg.) ; GRÜNDER, Karlfried (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* Bd. 10: R - Sc. Darmstadt, 1992

[Müller-Hill und Spies 2011] MÜLLER-HILL, Eva ; SPIES, Susanne: Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik. In: HELMERICH, Markus (Hrsg.) ; LENGNINK, Katja (Hrsg.) ; NICKEL, Gregor (Hrsg.) ; RATHGEB, Martin (Hrsg.): *Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven.* Wiesbaden, 2011, S. 261–281

[Model 1987] MODEL, Anselm: *Metaphysik und reflektierende Urteilskraft bei Kant. Untersuchungen zur Transformierung des leibnizschen Monadenbegriffs in der Kritik der Urteilskraft.* Frankfurt a. M, 1987

[Mollenhauer 1988] MOLLENHAUER, Klaus: Ist ästhetische Bildung möglich? In: *Zeitschrift für Pädagogik* 34 (1988), Nr. 4, S. 443–461

[Mollenhauer 1990] MOLLENHAUER, Klaus: Die vergessene Dimension des Ästhetischen in der Erziehungs- und Bildungstheorie. In: LENZEN, Dieter (Hrsg.): *Kunst und Pädagogik. Erziehungswissenschaft auf dem Weg zur Ästhetik?* Darmstadt, 1990, S. 3–17

[Morrow 1970] MORROW, Glenn: *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements. – Introduction.* S. xxxix–lxvii. Princton, 1970

[Most 1992] MOST, G. W.: Schöne (das). In: RITTER, Joachim (Hrsg.) ; GRÜNDER, Karlfried (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* Bd. 8: R - Sc. Darmstadt, 1992, S. 1343–1351

[Netz 2005] NETZ, Reviel: The Aesthetics of Mathematics: A Study. In: MANCOSU, Paolo (Hrsg.) ; JORGENSEN, Klaus F. (Hrsg.) ; PEDERSEN, Stig A. (Hrsg.): *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.* Dortrecht, 2005, S. 251–293

[Netz 2009] NETZ, Reviel: *Ludic Proof. Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic.* Cambridge, 2009

[Neue Wege 9 2003] LERGENMÜLLER, Arno (Hrsg.) ; SCHMIDT, Günter (Hrsg.): *Mathematik – Neue Wege 9. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Hannover, 2003

[von Neumann 1976] NEUMANN, John von: The Mathematician. In: TAUB, A. H. (Hrsg.): *John von Neumann: Collected Work.* Bd. 1. Oxford u.a., 1976, S. 1–9

[Nickel und Rottmann 2006] NICKEL, Gregor ; ROTTMANN, Michael: Mathematische Kunst: Max Bill in Stuttgart. In: *Mitteilungen der DMV* 14 (2006), Nr. 3, S. 150–159

[Oechslin 2010] OECHSLIN, Werner: *Essay zu Oliver Bryne: The first six Books of the Elements of Euclic.* Köln, 2010

[Ogawa 2012] OGAWA, Yoko: *Das Geheimnis der Eulerschen Formel.* 2012

[Ossermann 2005] OSSERMANN, Robert: Mathematics Takes Center Stage. In: EMMER, Michele (Hrsg.): *Mathematics and Culture II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity.* Berlin, Heidelberg, 2005, S. 187–194

[Papert 1988] PAPERT, Seymour: The Mathematical Unconscious. In: WECHSLER, Judith (Hrsg.): *On Aesthetics in Science.* Basel, 1988, S. 104–119

[Piecha 2002] PIECHA, Alexander: *Die Begründbarkeit ästhetischer Werturteile.* Paderborn, 2002

[Platon, Philebos] PLATON: Philebos. In: OTTO, Walter (Hrsg.) ; GRASSI, Ernesto (Hrsg.) ; PLAMBÖCK, Gert (Hrsg.): *Sämtliche Werke* Bd. 5. Reinbek, 1964, S. 71–139. – Nach der Übersetzung von Friedrich Schleiermacher

[Platon, Politeia] PLATON: *Politeia.* Stuttgart, 1994. – Übersetzt und herausgegeben von Karl Vretska

[Platon, Timaios] PLATON: Timaios. In: OTTO, Walter (Hrsg.) ; GRASSI, Ernesto (Hrsg.) ; PLAMBÖCK, Gert (Hrsg.): *Sämtliche Werke* Bd. 5. Reinbek, 1964, S. 141–213. – Nach der Übersetzung von Hieronymus Müller

[Poincaré, 1914] POINCARÉ, Henri: *Wissenschaft und Methode.* Darmstadt, 1973. – Unveränderter Nachdruck der ersten deutschsprachigen Ausgabe von 1914

[Pólya 1949] PÓLYA, George: *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Bern : Francke, 1949

[Proclus, Commentary] PROCLUS: *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Princeton, 1970. – Translated with Introduction and Notes by Glenn R. Morrow

[Proklus, Kommentar] PROKLUS: *Kommentar zum Ersten Buch von Euklids „Elementen“.* Halle (Saale), 1945. – Aus dem Griechischen ins Deutsche übertragen und mit textkritischen Anmerkungen versehen von L. Schönberger. Besorgt und Eingeleitet von M. Steck

[Radbruch 1989] RADBRUCH, Knut: *Mathematik in den Geisteswissenschaften.* Göttingen, 1989

[Radbruch 1997] RADBRUCH, Knut: *Mathematische Spuren in der Literatur.* Darmstadt, 1997

[Radbruch 2009] RADBRUCH, Knut: *Bausteine zu einer Kulturphilosophie der Mathematik.* Leipzig, 2009

[Rademacher und Toeplitz 1933] RADEMACHER, Hans ; TOEPLITZ, Otto: *Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik.* Berlin, 1933. – Reprint der 2. Aufl., Berlin 2000

[Rademakers 2009] RADEMAKERS, Elfriede: *Kunst und Mathematik. Kreative Unterrichtsideen zu Mustern, Formen und optischen Täuschungen.* Paderborn, 2009

[Reicher 2005] REICHER, Maria E.: *Einführung in die philosophische Ästhetik.* Darmstadt, 2005

[Reiner 1994] REINER, Frederick: Mathematics and the Arts: Taking their Resemblances Seriously. In: *Humanistic Mathematics Network journal.* 9 (1994), S. 9–20

[Rittelmeyer 2010] Rittelmeyer, Christian: *Warum und wozu ästhetische Bildung? Über die Transferwirkungen künstlerischer Tätigkeiten. Ein Forschungsüberblick.* Oberhausen, 2010

[Rota 1997] Rota, Gian-Carlo: The Phenomenology of Mathematical Beauty. In: Palombi, Fabrizio (Hrsg.): *Indiscrete Thoughts.* Boston, 1997, S. 121–133

[Roth 2007] Roth, Jürgen: Konkrete Kunst in Bewegung. In: (Lauter und Weigand, 2007), S. 24–30

[Rowe 2002] Rowe, David: Is (Was) Mathematics an Art or a Science? In: *The Mathematical Intelligencer* 24 (2002), Nr. 3, S. 59–64

[Ruelle 2007] Ruelle, David: *The Mathematician's Brain.* Princeton, 2007

[Ruelle 2010] Ruelle, David: *Wie Mathematiker ticken.* Berlin, Heidelberg, 2010

[Schattschneider 2006] Schattschneider, Doris: Beauty and Truth in Mathematics. In: (Sinclair u. a., 2006), S. 41–57

[Schiralli 2006] Schiralli, Martin: The Meaning of Pattern. In: (Sinclair u. a., 2006), S. 105–125

[Schmidt-Thieme und Weigand 2003] Schmidt-Thieme, Barbara ; Weigand, Hans-Georg: Die Wurzel aus zwei. In: *Mathematik lehren* 121 (2003), S. 42–43

[Schomake 2008] Schomake, Claudia: *Ästhetische Bildung im Sachunterricht. Zur kritisch-reflexiven Dimension ästhetischen Lernens.* Baldmannsweiler, 2008

[van der Schoot 2005] Schoot, Albert van der: *Die Geschichte des Goldenen Schnitts. Aufstieg und Fall der göttlichen Proportion.* Stuttgart-Bad Cannstatt, 2005

[Shabel 2003] Shabel, Lisa A.: *Mathematics in Kant's Critical Philosophy. Reflections on Mathematical Practice.* New York u.a., 2003

[Siller und Siller 2007] Siller, Hans-Stefan ; Siller, Angela: Musikalische Grundphänomene mathematisch beschreiben. Anregungen für einen fächerübergreifenden Unterricht Musik-Mathematik-Physik. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 16 (2007), S. 34–37

[Sinclair 2006a] Sinclair, Nathalie: The Aesthetic Sensibilities of Mathmaticians. In: (Sinclair u. a., 2006), S. 87–104

[Sinclair 2006b] Sinclair, Nathalie: *Mathematics and Beauty. Aesthetic Approaches to teaching children.* New York and London, 2006

[Sinclair 2009] Sinclair, Nathalie: Aesthetics as a liberating force in mathematics education? In: *ZDM –The international Journal on Mathematics Education* 41 (2009), Nr. 1,2, S. 45–60

[Sinclair und Pimm 2006] SINCLAIR, Nathalie ; PIMM, David: A Historical Gaze at the Mathematical Aesthetic. In: (Sinclair u. a., 2006), S. 1–17

[Sinclair und Pimm 2010] SINCLAIR, Nathalie ; PIMM, David: The Many and the Few: Mathematics, Democracy and the Aesthetic. In: *Educational Insights* 13 (2010), Nr. 1

[Sinclair u. a. 2006] SINCLAIR, Nathalie (Hrsg.) ; PIMM, David (Hrsg.) ; HIGGINSON, William (Hrsg.): *Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity.* New York, 2006

[Spies 2005] SPIES, Susanne: *Die Hoffnungen ästhetischer Bildung. Konzepte in Geschichte und Gegenwart.* Oktober 2005. – Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe II mit Zusatzprüfung für die Sekundarstufe I (unveröffentlicht)

[Spies 2008a] SPIES, Susanne: Muster und Mathematik – ein Ausstellungsrundgang. In: *Diagonal.* 30 (2008), S. 79–91

[Spies 2008b] SPIES, Susanne: Zur Ästhetik der Mathematik. In: WITZKE, Ingo (Hrsg.): *Mathematical Practice and Development throughout History.* Berlin, 2008, S. 241–256

[Spies 2011] SPIES, Susanne: „Sie sollen die Schönheit der Mathematik erfahren." Didaktische Perspektiven der Mathematikästhetik. In: HAUG, Reinold (Hrsg.) ; HOLZÄPFEL, Lars (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.2011 bis 25.02.2011 in Freiburg.* Bd. 2. Münster, 2011, S. 815–818

[Spies 2012] SPIES, Susanne: Schön irrational! – Irrational schön? Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive. In: *mathematica didactica* (2012), Nr. 35, S. 5–24. – URL `http://mathdid.ph-freiburg.de/documents/md_2012/md_2012_Spies_Schoenheit.pdf`

[Sprute 1998] SPRUTE, Jürgen: Francis Hutcheson. In: NIDA-RÜMELIN, Julian (Hrsg.) ; BETZLER, Monika (Hrsg.): *Ästhetik und Kunstphilosophie. Von der Antike bis zur Gegenwart in Einzeldarstellungen.* Stuttgart, 1998, S. 418–424

[Stewart 2008] STEWART, Ian: *Die Macht der Symmetrie. Warum Schönheit Wahrheit ist.* Heidelberg, 2008

[Stout 1999] STOUT, Lawrence N.: *Aesthetic Analysis of Proofs of the Binomial Theorem.* 1999. – URL `www.iwu.edu/~lstout/aesthetics.pdf`

[Tatarkiewicz 1979] TATARKIEWICZ, Wladyslaw: *Geschichte der Ästhetik. Erster Band: Die Ästhetik der Antike.* Basel, 1979. – Aus dem Polnischen übersetzt von Alfred Loepfe

[Tatarkiewicz 1980] TATARKIEWICZ, Wladyslaw: *Geschichte der Ästhetik. Zweiter Band: Die Ästhetik des Mittelalters.* Basel, 1980. – Aus dem Polnischen übersetzt von Alfred Loepfe

[Thiele 1999] THIELE, Rüdiger: Antike. In: JAHNKE, Hans N. (Hrsg.): *Geschichte der Analysis.* Berlin and Heidelberg, 1999, Kap. 1, S. 5–42

[Thomas 2002] THOMAS, Robert S. D.: Mathematics and Narrative. In: *The Mathematical Intelligencer* 24 (2002), Nr. 3, S. 43–46

[Tymoczko 1993] TYMOCZKO, Thomas: Value Judgments in Mathematics: Can We treat Mathematics as an Art? In: WHITE, Alvin (Hrsg.): *Essays in Humanistic Mathematics.* Whashington, 1993, S. 67–77

[Tymoczko 1995] TYMOCZKO, Thomas: Review on Jerry P. King: The Art of Mathematics. In: *Philosophia Mathematica,* 3 (1995), Nr. 3, S. 120–126

[Tymoczko 1998] TYMOCZKO, Thomas (Hrsg.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology.* Boston, 1998

[van der Waerden 1953] WAERDEN, Bartel L. van der: Einfall und Überlegung in der Mathematik. In: *Elemente der Mathematik.* 8 (1953), Nr. 6, S. 121–144

[Wagenschein 1970] WAGENSCHEIN, Martin: Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2. In: DERS. (Hrsg.): *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken.* Bd. 1. Stuttgart, 1970, S. 138–151

[Weitz 2002] WEITZ, Morris: Die Rolle der Theorie in der Ästhetik. In: BLUHM, Rohland (Hrsg.) ; SCHMÜCKER, Reinold (Hrsg.): *Kunst und Kunstbegriff. Der Streit um die Grundlagen der Ästhetik.* Paderborn, 2002, S. 39–52

[Wells 1988] WELLS, David: Which Is the Most Beautiful? In: *The Mathematical Intelligencer* 10, 4 (1988), S. 30–31

[Wells 1990] WELLS, David: Are These the Most Beautiful? In: *The Mathematical Intelligencer* 12,3 (1990), S. 37–41

[Wenzel 2001] WENZEL, Christian H.: Beauty, Genius, and Mathematics: Why did Kant change his Mind? In: *History of Philosophy Quaterly* 18 (2001), Nr. 4, S. 415–432

[Wenzel 2005] WENZEL, Christian H.: *An Introduction to Kant's Aesthetics. Core Concepts and Problems.* Malden u.a., 2005

[Weth 2007] WETH, Thomas: Die Schönheit in der Mathematik. In: (Lauter und Weigand, 2007), S. 68–72

[Weyl 1955] WEYL, Hermann: *Symmetrie.* Basel, 1955

[Wille 2004] WILLE, Holger: *Was heißt Wissenschaftsästhetik? Zur Systematik einer imaginären Disziplin des Imaginären.* Würzburg, 2004

[Winter 1995] WINTER, Heinrich: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 61 (1995), S. 37–46

[Winter 2007] WINTER, Heinrich: Eulersche Gerade und Feuerbachkreis – eine Studie zur ästhetischen Erziehung im Geometrieunterricht. In: PETER-KOOP, Andrea (Hrsg.) ; BIKNER-AHSBAHS, Angelika (Hrsg.): *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung. Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag.* Hildesheim, 2007

[Winterbourne 1988] WINTERBOURNE, Anthony T.: Art and Mathematics in Kant's critical Philosophy. In: *The British Journal of Aesthetics* 28.3 (1988), S. 266–277

[Wolff-Metternich 1995] WOLFF-METTERNICH, Brigitta-Sophie v.: *Die Überwindung des Mathematischen Erkenntnisideals. Kants Grenzbestimmung von Mathematik und Philosophie.* Berlin, New York, 1995

[Young 1992] YOUNG, J. M.: Construction, Schematism, and Imagination. In: POSY, Carl J. (Hrsg.): *Kant's Philosophy of Mathematics.* Dordrecht u.a., 1992, S. 159–175

[Zirfas 2009] ZIRFAS, Jörg: Die Transzendenz des Geniessens. Das religiöse Modell der Ästhetischen Bildung von Aurelius Augustinus. In: (Zirfas u. a., 2009), S. 187–205

[Zirfas u. a. 2009] ZIRFAS, Jörg (Hrsg.) ; KLEPACKI, Leopold (Hrsg.) ; BILSTEIN, Johannes (Hrsg.) ; LIEBAU, Eckart (Hrsg.): *Geschichte der Ästhetischen Bildung. Bd. 1 Antike und Mittelalter.* Paderborn, 2009