Dissertation

mit dem Titel:

Computeralgebra – ein Weg über die Elektrodynamik zur Quantenphysik

vorgelegt von

Dipl.-Math. Jochen Geppert

beim Promotionsausschuss der

Universität Siegen

-Fachbereich Physik-

im Oktober 2004

urn:nbn:de:hbz:467-853

Gutachter: Prof. Dr. W. Winnenburg, Prof. Dr. H. Dahmen

Rigorosum: 20.10.2004

Vorsitzender der Prüfungskommission: Prof. Dr. M. Bodemann

Prüfer:

Prof. Dr. W. Winnenburg (Didaktik der Physik)
Prof. Dr. H. Dahmen (Theoretische Physik)
PD Dr. K. Düsberg (Philosophie)

Danksagung

Die Arbeit entstand in die Jahren 1999 und 2004 auf Anregung meines Doktorvaters Prof. Dr. W. Winnenburg und wurde von ihm sowie von Herrn Prof. Dr. H. Dahmen betreut, korrigiert und begutachtet. Beiden Professsoren möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für die fachlich reizvolle und menschlich sehr angenehme Zusammenarbeit danken. Es war mir jederzeit möglich, fachliche Anregung und Rat einzuholen.
Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Abteilung der Didaktik der Physik der Universität Siegen möchte ich an dieser Stelle ebenfalls meinen herzlichen Dank für die tatkräftige Unterstützung meines Vorhabens und das angenehme Arbeitsklima danken.

Contents

1 Sachanalyse **1**

1.1 Das Ausgangsproblem: Unanschaulichkeit 5

1.2 Didaktische Lösungsversuche 13

1.2.1 Elementarisierung der Quantenphysik 14

1.2.2 Zugang zur Quantenphysik entlang einer historischen Schilderung des Entwicklungsprozesses 19

1.2.3 Computerunterstützte Konzepte 23

1.2.4 Zusammenfassung: Didaktische Konzepte zur Quantenphysik in der Schule 28

1.3 Das Siegener Konzept 31

1.3.1 Was ist Computeralgebra ? 32

1.3.2 Merkmale eines modernen CAS 34

1.3.3 Das Computeralgebrasystem Maple 38

1.3.4 Computeralgebra im Mathematikunterricht 38

1.3.5 Begründungen des Siegener Konzepts zur Quantenphysik 43

2 Einführung in die Quantenphysik **46**

2.1 Allgemeine Ziele der Vorlesung 46

2.2 Strukturierung 48

2.3 Didaktische Begründungen 49

2.3.1 Untersuchung der MAXWELL-Gleichungen 49

2.3.2 Entstehung elektromagnetischer Wellen 57

2.3.3 Der klassischen Physik widersprechende Ergebnisse . . 60

2.3.4 Der Teilchenaspekt der Materie 65

2.3.5 Der Wellenaspekt der Materie 65

2.3.6 Zusammenführung beider Standpunkte 66

2.3.7 Bemerkungen zur HEISENBERG-Unschärferelation . 66

3 Quantenmechanik **68**

3.1 Allgemeine Ziele und Strukturierung der Vorlesung 68

3.2 Didaktische Begründungen 70

3.2.1 Anknüpfung an den Kurs "Einführung in die Quantenphysik" . . . 70
3.2.2 Einfache Modellprobleme . . . 77
3.2.3 Das Modell des harmonischen Oszillators . . . 87
3.2.4 Das H-Atom . . . 94

4 Erfahrungen mit Maple in der Lehre 100

5 Anhang 1: Literaturliste 102

6 Anhang 2: CD im Einbanddeckel: Vorlesungsskripte sowie zu ihnen passende Maple-Dateien 104

Einleitung: Beschreibung der Arbeit

Die im Folgenden beschriebene Arbeit stellt das Ergebnis der dreijährigen Entwicklung und Erprobung eines Quantenphysikkurses im Rahmen der Lehrerausbildung der Sekundarstufe I an der Universität Siegen dar. Der Kurs ist Teil der Entwicklung eines Siegener Lehrkonzepts - ein auf der Anwendung des Computeralgebrasystems (CAS) Maple beruhender Ausbildungsgang, durch welchen den Studierenden der Physik Sek. I in einem sechsemestrigen Kurs ein Grundlagenstudium ermöglicht werden soll. Es soll Vorlesungen zur klassischen Mechanik und Elektrodynamik, sowie zur klassischen Thermodynamik im Grundstudium umfassen. Daran soll anschließend im Hauptstudium ein Kurs zur Einführung in die Quantenphysik sowie ein Kurs zur nichtrelativistischen Quantenmechanik erfolgen, die beide in dieser Arbeit vorgestellt und in ihrer didaktischen Konzeption begründet werden. Der sechsemestrige Einführungskurs in die Physik soll dann durch einen Kurs zur Kern- bzw. Elementarteilchenphysik abgerundet werden.
Die Gruppe der Lehramtsstudierenden Sek. I ist aus zweierlei Gründen für die Erprobung eines Quantenphysikkurses reizvoll. Auf der einen Seite sieht die Studienordnung Sek. I ein Studium der Quantenphysik vor, auf der anderen Seite sind die mathematischen Kenntnisse dieser Studierenden auf dem Niveau eines gymnasialen Leistungskures in Mathematik anzusetzen. Sie bilden somit eine willkommene Testgruppe für den Einsatz von Teilen dieses Lehrkonzepts in der Sek. II. Die didaktischen Probleme, die in der Schule in der Vermittlung der Quantenphysik auftreten, sind im wesentlichen auch in dieser Gruppe präsent. Aus diesem Grund spielen die in der didaktischen Diskussion vertretenen Standpunkte auch in der Ausbildung der Lehramtskandidaten die gleiche Rolle wie für den Quantenphysikunterricht in der Schule.
Der im Folgenden beschriebene Kurs zur Quantenphysik[1] ist dabei so angelegt, dass er sich nicht nur an Lehramtsstudierende richtet, sondern ebenfalls für Schülerinen und Schüler der Sekundarstufe II geeignet ist. Der Kurs ist so aufgebaut, dass er als Vorlesung an der Hochschule sowie im Selbststudium durchgearbeitet werden kann. Teile des Kurses sind daneben auch im Unterricht der Sekundarstufe II einsetzbar[2]. Ziel dieser Arbeit ist es, die relativ unanschaulichen Ergebnisse der Quantenphysik durch den Einsatz des Computeralgebrasystems Maple auch für Adressaten mit mathematischen Kenntnissen, die der Oberstufe des Gymnasiums entsprechen, verständlich darzustellen. Der Kurs ist in zwei Hauptteile: *Einführung in die Quantenphysik* und *Quantenmechanik* aufgeteilt. Jeder dieser Teile ist

[1] Dieser Kurs besteht aus den erwähnten Teilen zur *Einführung in die Quantenphysik* (3. Sem) und der nichtrelativistischen *Quantenmechanik* (4. Sem).

[2] So habe ich während meines Referendariats seit dem 01.02.2002 schon einige Maple-Programme aus dieser Arbeit im Rahmen meines Ausbildungsunterrichts im Leistungskurs Physik mit Erfolg eingesetzt.

wiederum in kleinere Sacheinheiten, sogenannten Vorlesungen[3] eingeteilt. Zu den meisten dieser einzelnen Vorlesungen wurden Maple-Programme entworfen, die direkt zum Gegenstand der jeweiligen Vorlesung passen. Diese Verknüpfung zwischen theoretischen Inhalten auf der einen und sie erläuternden Computergraphiken und -animationen auf der anderen Seite bilden das zentrale didaktische Instrument zur Erarbeitung und Verdeutlichung der Ergebnisse der Quantenphysik. Dient der Kurs als Grundlage einer zweisemestrigen Vorlesung, so können die Programme während der Vorlesung am Beamer gezeigt und auch verändert werden[4]. Für ein Eigenstudium sind die einzelnen Programme so konzipiert, dass sie parallel zur Arbeit am Skript genutzt werden können[5]. Die in den einzelnen Vorlesungen entwickelten Themen entsprechen in ihrer Darstellung dem Niveau einer gewöhnlichen Vorlesung an der Hochschule[6]. Durch den parallelen Einsatz der entwickelten Maple-Programme wird dieses mathematisch anspruchsvollere Niveau so veranschaulicht, dass die einzelnen Ergebnisse auch ohne ein vollständiges Erfassen der Mathematik[7] nachvollzogen werden können[8].

[3] Der komplette Kurs wurde bisher zweimal an der Universität Siegen für Lehramtsstudierende der Sekundarstufe I als Vorlesung angeboten. Die einzelnen Vorlesungen wurden den Studierenden dabei als Skript ausgeteilt.

[4] In dieser Weise wurde der Kurs bisher zweimal von mir (WS 1999 / 2000, SS 2000, sowie WS 2000/ 1, SS 2001) durchgeführt. Die gezeigten Programme wurden den Studierenden nach jeder Vorlesung zur Verfügung gestellt.

[5] Es ist daneben auch möglich, die meisten Programme auch losgelöst von den einzelnen Vorlesungsskripten zu benutzen. Sie wurden dazu mit erläuterndem Text versehen.

[6] Die Inhalte der einzelnen Vorlesungsskripte stammten aus den im Anhang erwähnten Lehrbüchern der Physik.

[7] Die jeweils benötigte Mathematik wird in den einzelnen Vorlesungsskripten eingeführt und an grundlegenden Beispielen auch verdeutlicht. Es ist jedoch zum Verständnis der physikalischen Ergebnisse nicht notwendig, zuerst Kurse zur Analysis bzw. linearen Algebra zu besuchen.

[8] Und zwar ohne physikalisch unsaubere didaktische Reduktionen. Als Beispiel hierfür sei die Unbestimmtheitsrelation genannt, die in diesem Kurs mit Maple über eine Fourier-Transformation als mathematisches Ergebnis dargestellt wird. Ihre physikalische Bedeutung wird erst im Anschluss an diese Verdeutlichung diskutiert! Auf diese Weise ist es m. E. nach möglich, physikalisch bedenkliche Vereinfachungen auch für Schülerinnen und Schüler der Sek. II zu umgehen.

Chapter 1

Sachanalyse

Fragt man den Durchschnittsbürger auf der Straße, ob er jemals mit dem Begriff "Quantenphysik" in Berührung gekommen sei und ob diese in seinem Leben irgendeine Rolle spiele, so wird man in der Mehrzahl der Fälle wohl auf ein Kopfschütteln stoßen. Weitet man die Frage auf den Begriff "Atomphysik" aus, so werden die meisten sich wohl an ihre Schulzeit erinnern, an Begriffe wie "Elektronen", "Neutronen" und "Protonen". Vielleicht ist dem einen oder anderen auch noch das BOHR-Modell mit seinen Elektronenbahnen im Gedächtnis geblieben. Weitere Überlegungen könnten den Begriff "Atomphysik" dann noch mit "Atomkraftwerken" oder der "Atombombe" in Verbindung bringen. Dass die Quantenphysik die Grundlage des Computers, der Mikrowelle, des Kernspintomographen und noch vieler weiterer technischer Apparaturen bildet, ist dagegen weitgehend unbekannt. Ohne sie wäre weder ein tieferes Verständnis der Chemie oder der Gentechnik undenkbar. Vergleicht man die Zahl der populärwissenschaftlichen Bücher zur Quantenphysik mit denen beispielsweise zur Relativitätstheorie, so ist die Anzahl der Autoren, die die Quantenphysik allgemeinverständlich darzustellen versuchen, relativ klein[1]. Dies bedeutet jedoch nicht, dass man außerhalb der Wissenschaft überhaupt noch nichts von ihr gehört hat. In manchen Kreisen wird mit ihr die Telepathie und das Löffelbiegen erklärt[2]. Man erklärt mit Hilfe der Quantenphysik eine Reihe von Phänomenen in Science-Fiction-Stories, wie z.B. das Reisen durch die Zeit.

Was aber zumeist völlig unbekannt bleibt, ist die grundlegende Frage, die den Kern der Quantentheorie bildet. Sie beschäftigt sich mit der Frage warum Atome, Moleküle, ganze Vielteilchensysteme sich so verhalten wie man es beobachtet. Ihr Kern ist somit die Suche nach einer Antwort auf die Frage warum die Materie ist wie sie ist. Im Laufe der Entwicklung einer

[1] Zwei sehr gut lesbare populärwissenschaftliche Darstellungen stammen von John Gibbin: "Auf der Suche nach Schrödingers Katze", Piper 2000, sowie "Schrödingers Kätzchen und die Suche nach der Wirklichkeit", Fischer 2000.

[2] Man denke nur an die vielen Nachahmer CAPRAS, die im Gegensatz zu ihm keine tiefere Ahnung von Physik besitzen.

Antwort auf diese Frage hat diese sich ausgeweitet auf das Verhältnis des Menschen zur Realität. Was ist real? Es ist die entscheidende Erkenntnis der Quantenphysik, dass der Mensch, um es in den Worten BOHRs auszudrücken, bei einer Beobachtung nicht mehr nur Zuschauer, sondern Akteur auf der Bühne ist. Der Einfluss des Beobachters auf das zu bebachtende Phänomen ist dabei nicht beherrschbar und von prinzipieller Natur. Diese Erkenntnis bedeutete einen völligen Bruch mit den Vorstellungen, die bis dato in der Physik herrschten. Es ist unmöglich sich mit Quantenphysik zu beschäftigen, ohne irgendwann zu Fragen zu gelangen, die man sich vorher so noch nie gestellt hatte. Was geschieht eigentlich in einem Atom, wenn man es nicht beobachtet? Gibt es eine Realität hinter der Messung oder wird sie erst durch diese geschaffen? Wie entsteht z.B. Bewusstsein im Gehirn?
Es hat einen ganz besonderen Reiz zu erfahren, wie sich diese Theorie entwickelt hat. Die Eleganz und Exaktheit einer mathematischen Beschreibung für gänzlich der Erfahrung widersprechende experimentelle Ergebnisse[3] führte dazu, ihr Glauben zu schenken. Im Laufe dieses intellektuellen Prozesses fand schrittweise eine Modifizierung des Verständnisses von Begriffen statt, die man bis dahin so selbstverständlich .benutzt hatte[4]. Man konnte und kann auch heute nicht auf sie verzichten. Die Beschäftigung mit der Quantenphysik gehört nicht nur als wichtigste physikalische Theorie des zwanzigsten Jahrhunderts in das Studium der Physik. Sie ist über dies hinaus ein zentraler Bestandteil der intellektuellen Aufklärung des Menschen und aus diesem Grund gehört sie zum Bildungskanon der Schule. Im Verlauf der nächsten Kapitel werden einige didaktische Möglichkeiten beschrieben, die Quantenphysik für den Unterricht aufzubereiten. Es werden dort auch Studien beschrieben, die zeigen, dass das fundamental Neue dieser Theorie selbst vielen Lehramtsstudierenden am Ende ihres Physikstudium nicht wirklich deutlich ist. Im Rahmen solcher Untersuchungen zeigte sich, dass viele die Universität mit der Vorstellung von um den Kern auf Bahnen kreisenden Elektronen verlassen. Insbesondere die zukünftigen Lehrer der Sekundarstufe I, der Real- und Hauptschulen erhielten lange Zeit keinerlei Ausbildung in diesem Bereich der Physik. Die Neufassung der nordrhein-westfälischen Studienordnung sieht die Behandlung dieses Gebietes auch im Hinblick auf das Kennenlernen von theoretischen Methoden vor und für diese Gruppe ist primär der im Folgenden beschriebene Kurs gedacht. Die oben genannten Gründe machen auch für Lehrer der Sek. I das Studium der Quantenphysik zu einem unabdingbaren Bestandteil ihrer Ausbildung. Versteht man die Hauptaufgabe des Physikunterrichts darin, den Schülern diesen "...als Chance zur Teilnahme an einer kulturellen Hervorbringung, die den Gang der Entwicklung der Menschheit in der Neuzeit nicht weniger

[3]HEISENBERG fragt z.B. in einem Gespräch mit PAULI, ob das Elektron Hoch- oder Weitsprung betreibe, wenn es von einer "Bahn" in die nächste "hüpfe".

[4]Im Kern die raumzeitliche Beschreibung von Vorgängen im Atom.

bestimmt hat als etwa Religionen in früheren Epochen[5]", so muss dieser Prozess eben auch dem Lehrer vor Augen geführt werden. Das Studium der Quantenphysik bietet dazu die entscheidende Grundlage. Der Studierende muss sich nicht nur mit einem relativ komplizierten Formalismus auseinandersetzen, sondern auch seine eigenen Vorstellungen über die Natur diskutieren. Ein zukünftiger Lehrer, der für Lernschwierigkeiten seiner Schüler sensibel sein will, muss sich dieser inneren Auseinandersetzung stellen. Er muss sich selbst fragen, was eigentlich 'Verstehen' für ihn selbst bedeutet. Die Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist in wie fern das eigene Vorstellungsvermögen dabei eine entscheidene Instanz ist. Der Studierende steht im wesentlichen vor den gleichen Schwierigkeiten wie die Väter der Quantenphysik[6]. M. E. ist kein Bereich der Physik so gut geeignet diesen Verlauf einer kulturellen Hervorbringung - hier ein völlig neues Weltbild - zu demonstrieren, wie die Beschäftigung mit der Quantenphysik. Selbst wenn diese Thematik in der Sekundarstufe I noch kaum eine Rolle spielt, sollten Lehrer dieser Schulstufen über diese Fragen informiert sein. Daneben hat die Quantenphysik wie bereits erwähnt, zu zahlreichen Anwendungen geführt. Warum glänzt Stahl und warum ist er hart, während Holz nicht glänzt und sich im Vergleich dazu eher weich anfühlt? Warum vereinigen sich chemische Elemente und bilden Verbindungen? Die zukünftigen Lehrer der Sek. I sollen in die Lage versetzt werden, zumindest populärwissenschaftliche Bücher über Quantenphysik zu verstehen, um ihre Ergebnisse einzuordnen und in den Unterricht einfließen zu lassen[7]. Da diese Lehramtstudierenden nicht über die notwendigen mathematischen Kenntnisse verfügen, wird in diesem Lehrgang der Versuch unternommen, die Mathematik über das Computeralgebrasystem Maple zu verdeutlichen. Dies geschieht in der Weise, dass Maple hauptsächlich zur graphischen Darstellung und zur Entwicklung von Animationen von quantenphysikalischen Ergebnissen benutzt wird. Der zentrale didaktische Vorteil dieser Verwendung liegt darin, dass in den einzelnen Programmen im wesentlichen die gleichen Symbole verwendet werden, wie in der Mathematik. Eine mathematisches Ergebnis kann so direkt "zum Leben erweckt" werden und die Bedeutung eines theoretischen Ergebnisses wird verständlicher. Auf diese Weise kann eine Lernsteigerung dadurch erreicht werden, dass durch die ausführliche und schnell handhabbare graphische Auswertung eines mathematischen Ergebnisses auch seine Effizienz zur

[5] Jung, W.: Theorien und Motive. Didaktische Konzeption. Unveröffentlichtes Manusskript, Frankfurt / Main 1986.

[6] HEISENBERG beschreibt sehr anschaulich die intensiven Diskussionen, die er mit BOHR, PAULI, EINSTEIN und SCHRÖDINGER in seinen Erinnerungen. Siehe z.B. in Heisenberg, W.: Der Teil und das Ganze, Piper 2001.

[7] Schüler dieser Jahrgänge fragen durchaus nach der Funktionsweise eines LASERs oder wollen wissen, was ein schwarzes Loch ist. Betrachtet man unter diesem Aspekt z. B. die Bücher von S. HAWKING, so ist es für Lehrer ratsam, trotz ihrer Allgemeinverständlichkeit ein tieferes Vorwissen über die Hintergründe der dort dargestellten Ergebnisse zu besitzen.

Beschreibung einer experimentellen Beobachtung deutlich wird. Daneben wird Maple aber auch als williger "Rechenknecht" zur Lösung von Differenzialgleichungen, Berechnung von Integralen etc. eingesetzt. Natürlich liegt in dieser Benutzung von Maple quasi als "black box" auch die Gefahr, das mathematische Entwicklungen nicht mehr verstanden werden und somit die Ergebnisse auch nur noch zur Kenntnis genommen werden müssen ohne wirklich nachvollzogen worden zu sein. Obwohl versucht wird, die benötigte Mathematik an den jeweiligen Stellen durch Beispiele einzuführen[8] und an die Schulmathematik anzuknüpfen, kann der oben beschriebene Einwand nicht völlig entkräftet werden. Es sind eben zwei im Kern nur unter Kompromissen zu vereinbarende Ziele, wenn man Studierenden der Sek. I[9], deren mathematische Kenntnisse sich nicht auf dem Niveau der Sek. II- bzw. Diplom-Studierenden befinden, die Entwicklung theoretischer Ergebnisse auf einem bestimmten Niveau[10] nahe bringen möchte. Der Kompromiss dieses hier vorgestellten Ansatzes besteht darin, dass die Ergebnisse formal korrekt sind[11], jedoch an der einen oder anderen Stelle nicht ausfürlich bzw. vollständig hergeleitet werden.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Kurs wurde seit dem WS 2000 / 01 bisher zweimal als Pilotprojekt den Studierenden der Sek. I[12] angeboten. Parallel zu den einzelnen Vorlesungen sind Maple-Programme entwickelt worden, die in der Vorlesung eingesetzt werden. Sie stehen den Studierenden aber auch für die häusliche Nacharbeit zur Verfügung. Die Benutzung von Maple hat entscheidenden Anteil in der Entwicklung der Struktur des Kurses. Es gibt natürlich viele didaktische Wege zur Quantenphysik und jeder Dozent bevorzugt seinen eigenen Zugang. Der in dieser Arbeit vorgestellte Weg hat als erstes größeres Ziel im Kursteil *Einführung in die Quantenphysik* eine Begründung der SCHRÖDINGER-Gleichung. Dies wird über eine Analogie zu den MAXWELL-Gleichungen erreicht[13]. Der Weg ist dabei die historische Entwicklung, wobei insbesondere darauf abgezielt wird die Eleganz der MAXWELL-Theorie in der Beschreibung des Lichts aufzuzeigen. Die ausführlich beschriebene experimentelle sowie theoretische Notwendigkeit einer Wellengleichung zur Beschreibung atomarer Phänomene führt dann

[8] So werden z.B. Mehrfachintegrale für einfache Beispiel konkret ausgerechnet, ebenso wird z.B. ein Separationsansatz zur Lösung einer partiellen Differenzialgleichung - obwohl mit Maple durchgeführt - ausführlich beschrieben.

[9] Das zweite Fach dieser Zielgruppe muss nicht Mathematik sein!

[10] Eben in einem höheren formalen Niveau, als in den popoulärwissenschaftlichen Bücher dargestellten.

[11] Es wird somit den Studierenden überhaupt keine andere wie auch immer geartete scheinbar anschauliche unmathematische Darstellung gezeigt. Sie werden von Anfang an mit der Abstraktion, aber auch der Eleganz der mathematischen Beschreibung konfrontiert.

[12] Auf freiwilliger Basis wurde dieser Kurs auch von Studierenden der Sek. II besucht.

[13] Der genaue Einsatz von Maple wird dabei im dritten Kapitel vorgestellt und didaktisch begründet.

zur SCHRÖDINGER-Gleichung. Ihre Anwendung auf verschieden Potenzialmodelle bildet dann den Hauptteil des zweiten Teils zur Quantenmechanik[14]. Diese Potenzialprobleme sind im wesentlichen Bestandteil eines jeden Hochschulkurses zur Quantenmechanik. Mit Maple lassen sich hier anschauliche Animationen programmieren[15], die zum Verständnis der Ergebnisse erheblich beitragen.
Die Möglichkeit der Entwicklung und Darstellung von Monte-Carlo-Simulationen mit Maple trägt im Falle des H-Atoms sehr zur Verdeutlichung des statistischen Verständnisses des Ergebnisses bei. Die Verwendung der Wellentheorie wird darüberhinaus noch auf die Behandlung des He-Atoms sowie der chemi-schen Bindung ausgedehnt.
Immer wieder werden innerhalb der Vorlesung Fragen aufgeworfen, die nach einem Verständnis der Quantentheorie über ihren mathematischen Formalismus hinausführen. Fragen dieser Art ("Was geschieht im H-Atom, wenn man nicht misst?") werden zum Abschluss der Vorlesung diskutiert. Es wird zuerst die Kopenhagener Interpretation vorgestellt und ihre Protagonisten werden ausführlich zitiert[16]. Daneben werden aber auch die statistische Interpretation sowie die Viele-Welten-Theorie und die Theorie BOHMs vorgestellt. Dieser Teil ist bewusst an das Ende der Vorlesung gestellt worden. Die Studierenden sollen zuerst von der Effizienz des Formalismus' überzeugt sein, bevor die schwierigen, aber reizvollen Interpretationsfragen vorgestellt werden. Der besondere Reiz in der Beschäftigung mit der Quantentheorie liegt m. E. darin, dass man sehr schnell zu Fragen der Art "Was bedeutet es eigentlich, wenn man davon spricht ein Phänomen zu verstehen?" gelangt. Es wird eindringlich deutlich, wie sehr wir als Menschen doch den Wunsch haben uns die Dinge vorstellen zu können, sie somit mit unseren Alltagserfahrungen zu verknüpfen. Das wichtigste Bildungsgut, dass die Quantenphysik vermitteln kann, ist ein völlig neues Weltbild. Dieses entsteht dadurch, dass wir als Beobachter eines Phänomens dieses direkt durch die Art der Beobachtung unkontrolliert beeinflussen. Man könnte im Rahmen der Kopenhagener Interpretation sagen, dass die Physik erst durch die Beobachtung entsteht[17]. Die Beschäftigung mit der Quantenphysik führt auf der anderen Seite aber auch zu einem größeren Staunen über die Möglichkeiten der mathematischen Beschreibung. Ein Aspekt der HEISENBERG zur Überzeugung der Gültigkeit seines Ansatzes führte, war die Einfachheit und Schönheit der Beschreibung. Er beschreibt

[14] Der Einsatz von Maple in diesem Kurs sowie seine didaktische Konzeption sind Teil des vierten Kapitels.

[15] Insbesondere die Bewegung von GAUSS-Wellenpaketen.

[16] Die Anregung zu diesem Teil stammt aus der sehr lesenswerten Arbeit von Wiesener: Beiträge zur Didaktik des Unterrichts über Quantenphysik in der Oberstufe, Diss., 1988, Westarp Verlag.

[17] Ein quantenmechanisches Teilchen wird erst im Beobachtungsakt Realität in der Weise, dass es über seinen Ort und Impuls Aufschluss gibt.

dies in seinen Erinnerungen aus einem Gespräch mit EINSTEIN[18]:"Aber ich muss zugeben, dass für mich von der Einfachheit und Schönheit des mathematischen Schemas, das uns hier von der Natur suggeriert worden ist, eine große Überzeugungskraft ausgeht."

1.1 Das Ausgangsproblem: Unanschaulichkeit

Die Quantenphysik stellt wegen ihrer formalen Komplexität und der mit ihr verbundenen begrifflichen Fragen einen der anspruchvollsten Themenbereiche der gesamten Schulphysik dar. Es sollte aber nicht auf sie verzichtet werden, denn ein wesentlicher Bildungswert liegt gerade in einer grundlegenden naturphilosophischen Lektion[19]: "Im Rahmen der Quantenphysik wird erstmals aus einer experimentell testbaren physikalischen Theorie heraus deutlich, inwiefern bei der Suche nach einer vom Beobachter unabhängigen an sich existierenden Wirklichkeit diese durch den spezifischen Zugriff 'Realität' beeinflusst und zugleich transparent wird. Angesichts eines aktuellen Weltbildbedürfnisses kann daher eine vertiefte Beschäftigung mit der Quantenmechanik eine Orientierungshilfe geben, den Standort des Menschen in der Ordnung der Dinge und sein Verhältnis zur Realität zu finden."
Das Grundproblem einer Didaktik der Quantenphysik skizziert der amerikanische Physiknobelpreisträger S. WEINBERG in einem Interview mit dem Nachrichtenmagazin "DER SPIEGEL"[20]. Auf die Frage "Glauben Sie wirklich, dass die Quantenmechanik in 100 Jahren jedem so selbstverständlich sein wird, wie heute die Schwerkraft ?" anwortet WEINBERG mit der Feststellung: "Ich weiss es nicht. Vielleicht wird sie uns weniger seltsam erscheinen. Aber ich muss zugeben, es gibt da eine Barriere: die Mathematik. Ich kann mir kaum vorstellen, wie man die Quantenmechanik ohne ein gewisses Verständnis der Mathematik begreifen sollte." Treffender kann man das Ausgangsproblem der Vermittlung von Quantenphysik nicht darstellen. Schüler und Studenten erleben im Umgang mit der Quantenphysik zum ersten Mal vehement die Unanschaulichkeit der Ergebnisse moderner-Physik[21]. WIESNER schreibt dazu: "Eine gänzlich neuartige Physik war entstanden, die in ihren wesentlichen Zügen, in ihrer Abstraktheit, nicht mehr viel mit dem Paradigma einer physikalischen Theorie gemein hatte, das die NEWTON-Mechanik bis dahin dargestellt hatte."[22]

[18] Heisenberg, W.: Der Teil und das Ganze, Piper-Verlag 2001.

[19] Kuhn, W.: Quantenmechanik: Der ideengeschichtliche Entwicklungsprozess in Fischer u. a.: Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.

[20] DER SPIEGEL 30/1999, S.194

[21] Allerdings arbeitet auch die klassische Physik mit einer Menge von unanschaulichen Begriffen, wie etwa dem Phasenraum, dem Trägheitstensor oder der Wirkungsfunktion. Auch die Theorie des elektromagnetischen Feldes ist unanschaulich, obwohl die Vorstellung elektromagnetischer Wellen auf den ersten Blick anschaulich erscheinen mag.

[22] Physik in der Schule 33 (1995), S.452

Die Unanschaulichkeit der Quantenphysik hat im Kern ihre Ursache darin, dass es nicht möglich ist, einem Quantenobjekt (Elektron, Proton etc.), das sich in einem bestimmten Zustand befindet (z.B. das Elektron im H-Atom für eine feste Kombination der Quantenzahlen n,l,m) einen festen Ort und Impuls zuzuordnen, ohne in Widersprüche zu experimentell feststellbaren Quantenphänomenen[23] zu geraten. Misst man z.B. klassisch den Ort und Impuls eines Teilchens zu einer festen Zeit t_0 als $\mathbf{r}(t_0)$ bzw. $\mathbf{p}(t_0)$, so ist die klassische Vorstellung die, dass das Teilchen sich vor der Messung unmittelbar an diesem Ort befand und einen Impuls in der gemessenen Größe besaß[24]. Quantenmechanisch interpretiert ist es aber völlig falsch in dieser klassischen Vorstellung zu argumentieren, man kann z.B. in der Kopenhagener Deutung nur sagen, dass der Ort des Teilchens nicht definiert bzw. nur bis auf kleine Volumina eingegrenzt angebbar ist[25]. Man verliert also völlig die aus der klassischen Mechanik gewohnte angenehme Anschaulichkeit[26] der Bewegung. Es sind die Quantenphänomene an sich, die völlig ungewohnt und fern der alltäglichen Erfahrung ablaufen. Man kann eine scheinbare Anschaulichkeit in einigen Fällen durch Analogiebetrachtungen erzielen, so z.B. wenn man das Doppelspalt-Experiment in der Wellenwanne durchführt, um so plausibel zu machen, dass Licht lange als klassische Welle beschrieben wurde. Man kann in beiden Fällen ein ähnliches Intensitätsmuster[27] feststellen. Die scheinbare Anschaulichkeit besteht dann darin, sich eine Wasserwelle mit einem sie tragenden Medium vorzustellen, was natürlich falsch ist, da es kein solches Medium[28] gibt.
Führt man den gleichen Versuch mit Elektronen durch, erhält man auf dem Schirm wiederum ein Interferenzmuster. In diesem Fall versagt die Anschauung bereits völlig, denn das Elektron wird in den durchgeführten Experimenten als Teilchen und nicht als irgendwie etwas wellenartiges gemessen.
Unsere Alltagserfahrung sagt uns, dass wir diese Phänomene nicht beobachten würden, wenn wir einen Doppelspaltversuch mit Tennisbällen durchführen würden. Man kann die Verwirrung noch weiter treiben, wenn man bedenkt, dass man Interferenzeffekte mit ganzen Atomen messen kann. Einzelne Atome können im Gegensatz zu Elektronen gefangen und dann

[23] Etwa den Beugungsbildern, die man beim Beschuss von Kristallen mit Elektronen erhält.

[24] Im Rahmen der Ungenauigkeit, bedingt durch eine Messwechselwirkung zwischen Teilchen und Messappparatur.

[25] Entsprechendes gilt für den Impuls.

[26] Die aber oft auch nur aus der Gewohnheit heraus entstanden ist, man denke nur an den Begriff des "Massenpunkts" aus der klassischen Mechanik.

[27] Für Wasserwellen kann man z.B. Flaschenkorken, die am Boden der Wellenwanne festgebunden werden, als Detektor verwenden. Ihre Auslenkung aus der Ruhelage bildet dann ein Maß für die Intensität der Wasserwellen.

[28] Es ist eine erstaunliche Erfahrung, dass Studenten mit der Wellenvorstellung des Lichts scheinbar keine Schwierigkeiten haben, da die Analogie zur Wasserwelle eine so starke Assoziationskraft besitzt. Die Schwierigkeiten nehmen enorm zu, wenn dann die Photoneninterpretation des Lichts verstanden werden soll!

fotografiert werden[29]! Diese Ergebnisse reizen den Verstand und bilden eine Quelle für die Faszination der Quantenphysik. Man ist beim Nachdenken über diese Phänomene immer wieder geneigt sich eine Vorstellung auszumalen über die "wirklichen" Vorgänge im Doppelspalt-Experiment[30]. Es ist nun diese Unmöglichkeit des menschlichen Verstandes sich Quantenphänomene vorzustellen[31] und mit klassisch anschaulichen Begriffen zu beschreiben. Stattdessen muss die abstrakte Ebene der reinen mathematischen Beschreibung gewählt werden, die die Schwierigkeit der Quantenphysik ausmacht. Es ist eine neue Grunderfahrung, die man im Laufe der Beschäftigung mit der Quantenphysik macht, dass nämlich die mathematische Beschreibung prinzipiell weiter reicht, als die menschliche Vorstellungskraft.

Die mathematische Beschreibung von Quantenphänomenen ermöglicht zwar eine gewisse abstrakte Anschaulichkeit, viele Ergebnisse[32] können aber in Vorlesungen nicht in der vollen Tiefe dargestellt werden, da einfach die Zeit fehlt und lange die Mittel[33] nicht zur Verfügung standen.

Nicht selten führt diese Unanschaulichkeit auch bei Studenten dazu, die Quantenphysik nur als reinen Formalismus ohne jede Haftung am Experiment zu erlernen und anzuwenden, während die Fragen nach einer Interpretation der Ergebnisse oder eine wissenschaftstheoretische Reflexion ihrer Entstehung ausbleibt[34]. Das Ergebnis dieser Entwicklung beschreibt KUHN: "Die Flucht in den reinen mathematischen Formalismus, die bei Anfängern in der Lehre zu beobachten ist, hat ihre wesentliche Ursache darin, dass ihnen während der Hochschulausbildung meist nur die effektive Handhabung des mathematischen Formalismus' sehr gut vermittelt wird, ohne den eigentlichen Kern der theoretischen Argumentation richtig verstanden zu haben. Hier liegt ein schwerwiegendes Versäumnis der fachwissenschaftlichen Ausbildung der Physiklehrer. Die wissenschaftstheoretische Analyse und unterrichtspraktische Umsetzung der mathematischen Argumentation ist daher eine der zentralen Aufgaben der Physikdidaktik im Rahmen der Lehrerausbil-

[29] Schöne Bilder findet man im Buch von Hans von Baeyer : "Das Atom in der Falle", Reinbek-Verlag 1993. Das Buch enthält allerdings eine Reihe von Fehlern, etwa die Erklärung zur Struktur des Heliumatoms.

[30] Es gehört zu den erstaunlichen Erfahrungen mit einigen Studierenden der Sek. I, für die diese Phänomene eigentlich nichts mit ihren Anspruch an Physik zu tun haben! Physik bleibt für viele Studierende der Sek. I auf einer Ebene der anschaulichen mechanischen und elektrischen Experimente.

[31] D.h. sie mit den Erfahrungen aus dem Alltag zu verknüpfen. Ob die bekannten Erfahrungen aus dem Alltag im Sinne einer Kausalität verstanden sind, ist eine ganz andere Frage.

[32] Insbesondere die zeitlichen Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, z.B. im Falle des Tunneleffekts oder für den harmonischen Oszillator.

[33] Etwa in Form leistungsstarker PCs und entsprechender Programme.

[34] Bei Schülern bleibt meist nur eine Erinnerung an das halbklassische BOHR-Atommodell. Vorstellungen wie etwa die DE BROGLIE-Wellen oder die Wellenfunktion bleiben zumeist falsch verstanden.

dung an der Universität."[35] Diese Feststellung wird untermauert durch Ergebnisse die WIESNER bei der Befragung von Lehramtsstudierenden gefunden hat.
WIESNER untersuchte[36] in der Vorbereitung eines neuen Quantenphysik-Lehrgangs für den Schulunterricht die Vorstellungen von 37 Lehramtsstudierenden (5. bis 11. Fachsemester Physik, Sek. II) über Quanten- und Atomphysik. 52% der Befragten hatten Quantenphysik-Unterricht in der Schule; 79% hatten eine Quantenmechanikvorlesung besucht. Die Methode der Untersuchung war eine mündliche Befragung, die Interviews erstreckten sich über Fragenkomplexe aus dem Bereich der Deutung der Quantenphysik, z.B. über die Vorstellung von Atomen, die Interpretation der Unbestimmtheitsrelation, die Wahrscheinlichkeitsinterpretation, die Deutung des Doppelspalt-Experiments und die Vorstellung von Photonen.
Ein Ergebnis der Befragung über die Atomvorstellung der Lehramtsstudierenden war, dass das BOHR-Atommodell so gut wie immer als Ausgangspunkt der Argumentation benutzt wurde.
Quantenmechanische Modifikationen wurden in den Antworten auf das BOHR-Modell mehr oder weniger stark "aufgesetzt". Es scheint also so zu sein, das die vor allem in der Schule[37] erworbene Vorstellung vom Atomkern, um den in diskreten Bahnen die Elektronen kreisen eine hohe Stabilität im physikalischen Verständnis der zukünftigen Lehrer besitzt. Seine Schwächen werden durch seine hohe Anschaulichkeit auch bei tieferem physikalischem Verständnis scheinbar nicht so recht wahrgenommen[38]. Das Problem, ob das BOHR-Atommodell nicht auch im Schulunterricht ersetzt werden kann, ist eine in der Physikdidaktik kontrovers diskutierte Frage. Im Rahmen des Einsatzes von Computeralgebrasystemen im Physikunterricht wird darauf an späterer Stelle noch ausführlich eingegangen. Bemerkenswert ist an dieser Stelle aber die ersichtlich gewordene Notwendigkeit der Ausbildung von Lehramtsstudierenden der Sekundarstufe I in den Vorstellungen und Modellen der Quantenphysik.
Ein weiteres Ergebnis der Studie WIESNERS über die permante Lokalisierung von Elektronen war die Vorstellung der Lehramtsstudierenden einer "schnellen Bewegung" der Elektronen, die eine Lokalisierung unmöglich mache. Man kann wiederum erkennen, wie stark klassische Vorstellungen auch hier

[35] Kuhn, W. : Quantenmechanik: Der ideengeschichtliche Entwicklungsprozess in Fischler u.a.: Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.

[36] Wiesner u. Müller: Vorstellungen von Lehramtsstudenten zur Interpretation der Quantenmechanik - Ergebnisse von Befragungen, in: H. Behrendt (Hrsg): Zur Didaktik der Physik und Chemie, Alsbach (1997), S. 382.

[37] Der Aufbau dieser Vorstellung beginnt häufig bereits in der Sekundarstufe I, im Chemieunterricht der 8. Jahrgangsstufe.Vertieft wird diese Vorstellung dann im Physikunterricht der 10. Klasse, im Rahmen der Thematik "Radioaktivität und Kernenergie", in der auch eine Vorstellung vom Atomkern vermittelt wird.

[38] Diese Erkenntnis kann man als Plädoyer für einen historischen Zugang zur Quantenphysik verstehen.

das Verständnis prägen. So stellt auch WIESNER in seinem Fazit der Untersuchung fest: "....dass in der überwiegenden Zahl der Fälle klassische Vorstellungen statt der korrekten quantenmechanischen dominieren. Sehr oft wird explizit auf in der Schule erworbenes "Wissen" zurückgegriffen." Ein Beleg für den rein formalisierten Zugang der Studierenden zur Quantenphysik ist der hohe Prozentsatz von 47% aller Befragten, die keinen Erklärungsansatz zum Doppelspaltexperiment angeben konnten! Da ein Großteil dieser Studierenden erfolgreich eine Quantenmechanikvorlesung besucht hatten[39], ein erstaunliches Ergebnis. WIESNER kommt weiter zu dem Schluss, dass "die Ausbildung der Lehramtsstudierenden in der Universität nicht ausreichend erscheint, um ein angemessenes quantenmechanisches Bild des Atoms zu vermitteln."
Es gibt bereits didaktische Ideen, diesem Manko zu begegnen, so berichten PADE und POLLEY[40] über einen an populärwissenschaftlichen Fragestellungen ausgerichteten Ansatz für Studienanfänger (Diplom, Sek.II im 1. und 2. Fachsemester, Dauer 1 SWS), mit nur geringem mathematischem Aufwand[41]. Dieser Kurs legt großen Wert darauf, den Prozess der physikalischen Begriffsbildung vom Erlernen von Rechentechniken zu trennen. Die Studierenden bestätigten, dass die Quantenmechanik als weitaus spanndender empfunden wurde, als die (gleichzeitig gehörte) klassische (nicht-chaotische) Mechanik! In diesem Fall wurden also die den menschlichen Verstand stärker herausfordernden experimentellen Ergebnisse der Quantenphysik reizvoller empfunden, als die anschaulichen Ergebnisse und Methoden der klassischen Mechanik.
Einen auf der Einführung intuitiver Bilder beruhenden Zugang zur Quantenphysik hat POSPIECH speziell für Lehrer entwickelt[42]. Als Antwort auf festgestellte Lernschwierigkeiten in der Quantenphysik, beliebiger Wechsel zwischen klassischen und Quanten-Konzepten sowie eines unklaren Modellbegriffs, versucht POSPIECH abstrakte Prozesse durch aus dem Alltag bekannte Bilder zu visualisieren. Beispielsweise erläutert sie den Messprozess in der Quantenphysik anhand eines sogenannten "Frau-Kind-Gesprächs"[43]:
Eine Frau und ein Kind sprechen miteinander, dies kann auf zweierlei Weise interpretiert werden:
- Frau und Kind kennen einander nicht; sie wechseln lediglich einige Sätze

[39] Mit dem erfolgreichen Besuch einer solchen Vorlesung sind diese Studierenden zumindest in der Lage relativ komplexe Probleme wie die Lösung der Schrödingergleichung des H-Atoms abzuleiten oder mit Pauli-Matrizen zu arbeiten.

[40] Quantenmechanik für Studienanfänger - Erfahrungen mit einem neuen Ansatz, in H. Behrendt (Hrsg): Zur Didaktik der Physik und Chemie, Alsbach (1999), S. 268.

[41] Siehe für eine Beschreibung von Beispielen, J.Pade und L.Polley: Vorträge der Frühjahrstagung des FA Didaktik der DPG, Ludwigsburg 1999.

[42] G. Pospiech, Ein neuer Lehrgang für Quantenphysik in der Lehrerausbildung, in: Zur Didaktik der Physik und Chemie, Aulis-Verlag 1999.

[43] G. Pospiech, Vermeidung von Lernschwierigkeiten in der Quantenphysik, in H. Behrendt (Hrsg): Zur Didaktik der Physik und Chemie, Alsbach (1999), S. 303.

miteinander
- Die beiden Personen sind Mutter und Tochter; ihre Sätze sind vor dem Hintergrund tieferer Beziehungen zu interpretieren.

Die erste Beziehung gibt nun den Standpunkt der klassischen Physik wieder, bei dem das Gespräch genau "gemessen" wird durch die exakte Wiedergabe der Sätze. Im zweiten Fall kann die wortgetreue Wiedergabe nicht den eigentlichen Gehalt der Sätze wiedergeben und die Beziehung zwischen Mutter und Tochter kann sich durch eine "Messung" des Gesprächs verändern[44]. Dieses aus dem Alltag vertraute Bild wäre dann ein Anklang an die Vorgänge im Messprozess der Quantenphysik. POSPIECHs Erfahrungen mit solchen Visualisierungen gerade auch in der Lehrerausbildung waren, dass sie zu Diskussionen und zu tieferem Verständnis aber auch zur Suche nach den Grenzen dieser Veranschaulichungen anregten.

Problematisch bleibt allerdings, dass diese Methode wenig kompatibel mit den Vorstellungen einer exakten Wissenschaft ist. Hilfreich ist sie allerdings einem rein formalisierten Zugang zur Quantenphysik entgegen zu wirken. Wichtig bleibt im Hinblick auf die Lehrerausbildung ihre Feststellung, dass sich bei Schülern im Laufe des Physikunterrichts eine Einstellung darüber ausbildet, wie Physik funktioniert und was die Physik bei der Beschreibung der Natur leisten soll. Es gibt Untersuchungen darüber, inwiefern dabei die Einstellung der Physiklehrer zu den Methoden und Modellen der Physik eine Rolle spielt[45]. Das Ergebnis ist, dass implizite Erkenntnis- und Wissenschaftstheorien der Lehrer die Vorstellungen über Naturwissenschaften bei Schülern durchaus mitbestimmen[46]. Seine Erfahrungen mit der Physik und ihrer Arbeitsweise sind dabei entscheidende Grundlage für Schülervorstellungen, die über den alltäglichen Erfahrungshorizont der Schüler hinausgehen. Dies wird insbesondere bei Schülervorstellungen im Bereich der Atomphysik deutlich. In den letzten Jahren wurde eine Reihe von Untersuchungen durchgeführt, die ein Bild davon entwerfen, wie Schüler ihre Vorstellungen über den Aufbau der Stoffe[47] oder der "kleinsten Teilchen" entwickeln[48]. Angefangen mit einer reinen Kontinuumsvorstellung der Materie in der Grundschule wandelt sich diese bis zu einer Teilchenvorstellung in der neunten Klasse. Die Stoffe "sind kontinuierlich aufgebaut; sie lassen sich aber nicht beliebig weit zerteilen. Vielmehr erhält man bei einer fort-

[44] Läuft z.B. ein Tonband während ihres Gesprächs mit, können beide ihre Wortwahl ändern etc.

[45] Gallagher, J.J.: Prospective and practising secondary school science teachers' konwledge and beliefs about the philosophy of science. Sc. Ed. 75(1), 1991, 121-133.

[46] Siehe z.B. auch in Kircher, E. Studien zur Physikdidaktik, IPN 1995.

[47] Pfundt, H: Das Atom - letztes Teilstück oder erster Aufbaustein? Zur Didaktik der Physik und Chemie, Ludwigsburg 1980.
Pfundt, H: Untersuchungen zu den Vorstellungen, die Schüler vom Aufbau der Atome entwickeln. In: Der Physikunterricht, 16 (1982) 1, S.51.

[48] Kirchner, E.: Untersuchung im Unterricht über "kleinste Teilchen" (Atome). In: Der Physikunterricht, 16 (1982) 1, S.35.

gesetzten Teilung schließlich Teilchen, die so klein sind, dass sie nicht weiter zerteilt werden können." (PFUNDT 1982, S.51) Umgekehrt lassen sich dann diese kleinsten Teilchen wieder zu einem Ganzen zusammensetzen, beim erneuten Teilen entstehen dann andere kleinste Teilchen.
In dieser Vorstellung sind die kleinsten Teilchen nicht als diskrete Bausteine eines Diskontinuums zu betrachten, sondern als "letzte Teilungsstücke eines Kontinuums" (PFUNDT 1982, S.52).
Die Teilchen haben damit die gleichen Eigenschaften wie reale Körper.
KIRCHER (1986)[49] beschreibt diese Vorstellungen der Schüler als "gemischte Teilchen- und Kontinuumsvorstellungen" (ebenda S.35); die Schüler selbst pendeln zwischen diesen Vorstellungen und bilden Mischformen.
Eine Veränderung erfahren diese Vorstellungen mit der Einführung des Chemieunterrichts. Aus einer Befragung von Dreizehn- bis Fünfzehnjährigen zieht KNOTE (1975)[50] den Schluss, dass mit der Einführung des Chemieunterrichts in der 9. Klasse weit über 70% der Schüler das Atom als Kern-Hülle-Modell sehen. Für den größten Teil der Schüler umkreisen die Elektronen auf eingezeichneten Bahnen den Atomkern. Bestätigt wird dieses Ergebnis durch Untersuchungen[51] über Schülervorstellungen zum Atommodell des Wasserstoffatoms. Mit Schülern der 12. Jahrgangsstufe wurden diese Untersuchungen zu Beginn des Physikunterrichts über Atomphysik durchgeführt. BAYER ermittelte folgende Ergebnisse:
Mehr als 50% der Schüler stellen sich bereits vor dem Quantenphysikunterricht ein Atom als Planetenmodell mit Bahnen, ähnlich dem BOHR-Modell, vor. Ein Einfluss des Chemieunterrichts wird bei 50% der Schüler festgestellt. Mit anderen Worten, das im Chemieunterricht kennengelernte anschauliche - aber falsche - vom Lehrer aus didaktischen Gründen eingeführte Planetenmodell des Atoms prägt die Vorstellung bei den meisten Schülern. Diese einmal verinnerlichte Vorstellung ist wie die Untersuchungen WIESNERs zeigen, sogar bei den Physikstudenten schwer revidierbar.
Das korrekte, auf der SCHRÖDINGER-Gleichung basierende nicht-relativistische Modell des H-Atoms gilt als schwierig und unanschaulich[52] und kann, wenn es denn überhaupt im Unterricht eingeführt wurde, nicht die Vorstellung eines Planetenmodells ersetzen. Für die Schüler bleibt die Elektronenbahn auch nach Einführung der HEISENBERG-Unschärferelation im Kern

[49] Kircher, E.: Untersuchung im Unterricht über "kleinste Teilchen" (Atome). In: Der Physikunterricht, 16 (1982) 1, S.35

[50] Knote, H.: Zur Atomvorstellung bei 13 - 15jährigen. In: Der Physikunterricht, 9 (1975), S.86.

[51] Bayer, H.J.: Schülervorstellungen beim Übergang vom Bohrschen zum wellenmechanischen Modell. In: Kuhn, W. (Ed.): Vorträge der DPG, Gießen 1986, S.249.
Bayer, H.J.: Schülervorstellungen über das Atom in der Sekundarstufe II. In: Mikelskis, H. (Ed.): Zur Didaktik der Physik und Chemie. Leuchtturm-Verlag, Kiel 1985, S.265-267.

[52] Bis zur Einführung von Computeralgebrasystemen, die auf PCs laufen!

stabil, sie ist eben nur ein bisschen verschmiert[53]. Die Hauptursache dieses falschen Verständnisses liegt darin, dass Schüler immer den Versuch machen, physikalische Zusammenhänge mit Begriffen und Begriffsverbindungen zu beschreiben, die an den Erfahrungen des Alltags orientiert sind. Daneben liegt, wie oben beschrieben, die Vermutung nahe, dass die Einstellung der Physik- und Chemielehrer zum Planetenmodell - und zur Modellbildung überhaupt in den Naturwissenschaften - stark die Vorstellungen der Schüler prägen. Die Einstellungen der Physiklehrer speisen sich natürlich hauptsächlich durch ihre Erfahrungen während der Hochschulausbildung. Es scheint so, als ob die traditionelle Vorlesung nicht in jedem Fall zum Abbau falscher Modelle führt, einschränkend wirkt allerdings, dass in früheren Jahren nur auf Großrechnern anschauliche Software zur Darstellung, z.B. der Wahrscheinlichkeitsräume im Wasserstoffatom zur Verfügung stand und somit in der Schule und auch in Vorlesungen nicht einsetzbar war. Insbesondere war es Schülern und Studenten lange Zeit nicht möglich selbstständig am Computer mit den mathematischen Modellen der Physik eigenständig zu experimentieren, da die Rechnerleistung auf der einen Seite viel zu gering war, auf der anderen Seite die Software auch nicht zur Verfügung stand[54].

1.2 Didaktische Lösungsversuche

Anstrengungen auf diese Problematik der Quantenphysik, insbesondere für den Unterricht in der Schule, didaktisch angemessen zu reagieren gibt es in großer Anzahl. So entwickeln die Lehrmittelfirmen die Versuchsgeräte ständig weiter oder machen sogar gänzlich neue Angebote. In der didaktischen Literatur erscheinen regelmäßig experimentelle und methodische Anregungen für die schulische Darstellung der Quantenphysik.
Die didaktischen Grundpositionen zur Darstellung der Quantenphysik in der Schule lassen sich in zwei konträr stehende Meinungen einteilen, die wiederum an zwei Teilaspekten der Diskussion verdeutlich werden können. Kontrovers diskutiert werden in den didaktischen Erörtungen zum einen Fragen nach der Behandlung von Grundlagen oder Anwendungen der Quantenphysik im Unterricht, zum anderen die Frage des Grades der Anschaulichkeit oder Abstraktion des im Unterricht dargestellten Stoffes. Die beiden Positionen beispielhaft vertreten durch JUNG und KUHN, lassen sich an der Frage des Übergangs von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik

[53] Bethge, T. Empirische Untersuchungen über Schülervorstellungen zur Quantenphysik. In: Kuhn, W. (Ed.): Vorträge der DPG, Gießen 1988, S.249, (1988a).

[54] Ein erstes interaktives Programm zur Quantenmechanik wurde an der Universität Siegen 1989 entwickelt.
S. Brandt, H.D. Dahmen, Quantum Mechanics on the Personal Computer, Springer, Berlin Heidelberg 1989 und 1992.

klar voneinander abgrenzen: so fordert JUNG[55] einen sanften Übergang, während KUHN[56] fordert, den, auch von den Physikern so empfundenen, scharfen Bruch in aller Deutlichkeit auch so im Unterricht darzustellen. Im Folgenden sollen die didaktischen Antworten auf das im Vorherigen beschriebene Problem der Unanschaulichkeit der Quantenphysik dargestellt werden, um dann ein an der Universität Siegen entwickeltes Lehrkonzept basierend auf dem Einsatz von Computeralgebra vorzustellen. Dieses Lehrkonzept wurde hauptsächlich in Vorlesungen für Lehramtsstudenten der Sekundarstufe I eingesetzt. Diese Gruppe ist aus zweierlei Gründen didaktisch reizvoll, auf der einen Seite sieht die Studienordnung ein Studium der Quantenphysik vor, auf der anderen Seite sind die mathematischen Kenntnisse dieser Studenten auf dem Niveau eines gymnasialen Leistungskurses in Mathematik. Aus diesem Grund bilden diese Studierenden eine willkommene Testgruppe für den Einsatz von Teilen dieses Lehrkonzepts in der Sekundarstufe II. Die didaktischen Probleme, die in der Schule in der Vermittlung der Quantenphysik auftreten, sind im wesentlichen auf diese Gruppe übertragbar. Aus diesem Grund spielen die in der didaktischen Diskussion vertretenen Standpunkte auch in der Ausbildung dieser Lehramtskandidaten die gleiche Rolle, wie für den Quantenphysikunterricht der Schule.
Die im Folgenden beschriebenen didaktischen Antworten auf das Problem der Unanschaulichkeit der Quantenphysik widersprechen sich nicht, fließen zum Teil ineinander über und geben den Stand der heutigen fachdidaktischen Diskussion wieder. Dabei werden im einzelnen Versuche zur Elementarisierung der Quantenphysik, wissenschaftstheoretisch reflektiertem Zugang, sowie zur historisierenden Darstellung erläutert. Ein vierter Zugang schildert die Bedeutung des Computers im Unterricht zur Quantenphysik ohne computeralgebraische Methoden zu erwähnen. Ein weiterer Zugang zur Quantenphysik durch Computeralgebrasysteme, der Kern dieser Arbeit ist, wird dann anschließend im zweiten Kapitel vorgestellt.

1.2.1 Elementarisierung der Quantenphysik

In den meisten Versuchen erfolgt die Elementarisierung quantenphysikalischer Ergebnisse durch Analogiebildung aus anderen Bereichen der Physik (Elektrodynamik und Mechanik), die den Schülern vertraut sind. Die Bildung von Analogien gehört zu den Leitprinzipien der physikalischen Forschung und wenn man Physik versteht, "als das was Physiker tun" (OREAR), so ist es grundsätzlich gerechtfertigt durch Analogiebildung zum Verständnis komplizierter Ergebnisse beizutragen. Analogien waren fast immer der Aus-

[55] Jung, W.: Von der klassischen Physik zur Quantenphysik - Schock oder sanfter Übergang?, in H. Fischler: Quantenphysik in der Schule, IPN 1992. Allerdings sind JUNGs Vorschläge nicht in ein konkretes Unterrichtskonzept eingegangen.

[56] Kuhn, W.: Quantenmechanik: Eine wissenschaftstheoretisch reflektierte Analyse ihres ideengeschichtlichen Entwicklungsprozesses, im gleichen Buch.

gangspunkt der Entwicklung fundamentaler physikalischer Theorien, so auch am Beginn der Entwicklung der Quantenphysik.
So fußt PLANCKs Interpolationsformel für die spektrale Energiedichte auf der rein formalen Analogie zwischen seinem gefundenen Entropieausdruck und der BOLTZMANN-Entropieformel[57]. PLANCK nimmt nun diese zunächst rein formale Analogie physikalisch ernst. Mit anderen Worten, PLANCK nimmt an, dass sich hinter dem von ihm gefundenen Zusammenhang zwischen Entropie und der Oszillatorenergie analog zur BOLTZMANN-Deutung ein Abzählverfahren zur Verteilung der Energie auf seine Modelloszillatoren verbirgt[58]. Die physikalische Interpretation dieser Analogie führt dann zu der revolutionären Vorstellung, dass es im Energiekontinuum abzählbare "Portionen" geben muss, PLANCK nannte diese Quanten. Bei der Temperaturstrahlung wird demnach Energie nicht kontinuierlich von den Oszillatoren emittiert und absorbiert, sondern in Energiequanten der Größe $E = h\nu$. Während PLANCK der Strahlung zwischen Emission und Absorption keinen quantenhaften Charakter zuschrieb, besaß EINSTEIN diesen Mut, um die Entropie einer in einem bestimmten Volumen eingeschlossenen Strahlung zu bestimmen. Aus der Analogie zwischen der für die in einem Volumen eingeschlossenen Strahlung und der auf die Verteilung von Teilchen in einem solchen Volumen bezogenen Wahrscheinlichkeit schliesst EINSTEIN: "Monochromatische Strahlung von geringer Dichte verhält sich in wärmetheoretischer Sicht so, wie wenn sie aus voneinander unabhängigen Energiequanten $h\nu$ bestünde".
Dieser Analogieschluss kann als Erfindung des Photons angesehen werden[59]. Dieser kurze historische Abriss der Entstehung der Quantenphysik verdeutlicht den Stellenwert den Analogien in der physikalischen Forschung besitzen. Analogien besitzen aber nur dann einen didaktischen Nutzen, wenn sie "wissenschaftstheoretisch reflektiert und mit anderen gesicherten Erkenntnissen der Fachwissenschaft kohärent sind" (KUHN). Beispielsweise führt die Analogie zwischen Realmodellen für stehende Wellen (z.B. ein beidseitig eingespanntes, schwingendes Seil) und der Phasenwelle des Elektrons leicht zu einer Vorstellung einer Materiewelle. Schüler und Anfangssemester neigen dann dazu, dass Elektron mit einem stehenden Materiefeld zu assoziieren. KUHN schreibt dazu[60]:„ Die Bezeichnung (Materiewelle) ist etwas unglücklich; denn sie kann leicht die falsche Assoziation wecken, als würde bei der DE BROGLIE-Welle irgendetwas ‚materielles' schwingen oder sich

[57] Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise PLANCKs findet man in W. Kuhn: "Die Geburt der Quantenphysik", in Praxis der Naturwissenschaften-Physik 8/49. Jahrgang 2000, S.2-5.

[58] Bei BOLTZMANN bezieht sich das Abzählen auf Teilchen.

[59] Siehe auch den ausführlichen Aufsatz von W. Kuhn: "Die erkenntnisleitende Funktion von Analogien in Forschung und Lehre", in J. Ziller (Ed.) DPG-Vortäge 1997, S.69-84.

[60] Kuhn, W.(Hrsg): Handbuch der experimentellen Schulphysik, Bd.8, Aulis-Verlag 1996.

‚wellen'."
In diesem Zusammenhang sind Darstellungen wie die folgende[61], die die stationären Elektronenzustände in einem H-Atom im DE BROGLIE-Bild beschreiben didaktisch eher hinderlich und sollten nicht verwendet werden.

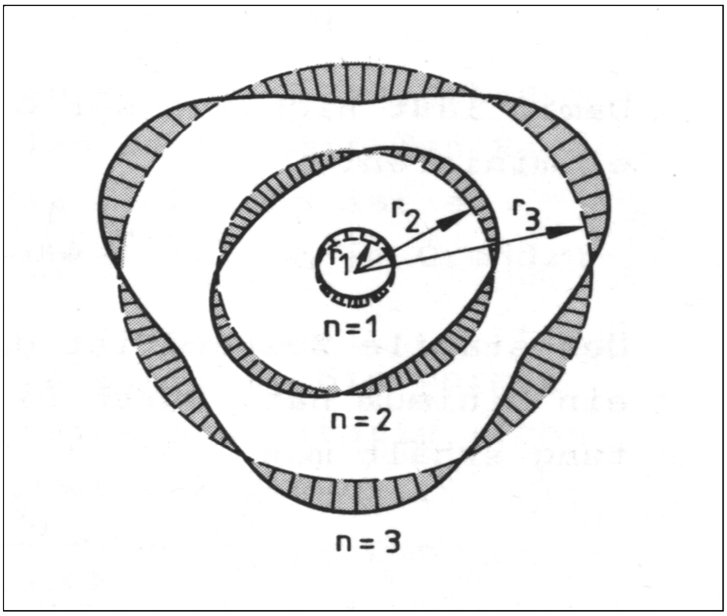

Figure 1.1: Materiewellendarstellung

BETHGE[62] stellt in seinen Untersuchungen zusammenfassend fest, dass das schwierigste Hindernis auf dem Weg zu einer Anschaulichkeit im Bereich der Atomphysik, die mit den Begriffen "Bewegung" und "Bahn" eng verknüpften Erwartungen der Schüler an Anschaulichkeit darstellen. Die Gruppe um NIEDDERER[63] unternimmt in ihrem Lehrgang zur Atomphysik, in dessen Mittelpunkt ein Verzicht auf das BOHR-Atommodell steht, den Versuch die Anschaulichkeit der erwähnten Begriffe "Bewegung" und "Bahn" zu ersetzen. Dies geschieht durch eine Veranschaulichung des Zustandsbegriffs durch eine Analogiebildung zu stehenden mechanischen Wellen. Diese Analogiebildung ist historisch durchaus gerechtfertigt, SCHRÖDINGER selbst

[61] Entnommen aus Bleckamann, A.: Physik, Teil 2, Girardet 1984.

[62] Bethge, T.: Aspekte des Schülervorverständnisses zu grundlegenden Begriffen der Atomphysik. Dissertation, Universität Bremen 1988.

[63] Niederer, H.: Atomphysik mit anschaulichem Quantenmodell, in Fischer, H.(Hrsg): Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.

wollte[64]: "zeigen, dass sich die übliche Quantisierungsvorschrift durch eine andere Forderung ersetzen läßt, in der kein Wort von 'ganzen Zahlen' mehr vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art wie etwa die Ganzzahligkeit der Knotenzahl einer schwingenden Saite". Zu beachten bleibt aber, dass SCHRÖDINGER selbst dem Elektron eine Teilchenhaftigkeit absprach. Das Teilchenhafte eines Elektrons (oder anderer Mikroobjekte) hat für ihn keinen Realitätscharakter, sie sind für ihn "nichts weiter als eine Art Schaumkamm auf einer den Weltgrund bildenden Wellenstrahlung"[65].
SCHRÖDINGER versucht das Teilchenhafte durch Wellenpakete darzustellen. Diese Konstruktion lässt sich allerdings nicht durchhalten, denn mit Ausnahme des harmonischen Oszillators sind diese Wellenpakete nicht notwendig stabil, sie zerfließen mit der Zeit[66]. Aus dieser Problematik heraus entsteht die Wahrscheinlichkeitsinterpretation durch BORN. Die Gefahren eines didaktischen Ansatzes, wie ihn NIEDDERER[67] vorschlägt sind dann z. B. bei der Betrachtung der Frage nach dem "Rand" des Wasserstoffatoms, die im Unterricht von den Schülern aufgeworfen wurde, zu sehen. Stehende mechanische oder auch elektromagnetische Wellen entstehen durch eine Begrenzung ihrer Ausbreitung durch einen Rand und wenn die Analogie der Wahrscheinlichkeitswellen im Vordergrund des Zugangs zur Quantenphysik steht, so ist diese Frage nur zu verständlich. Problematisch bleiben dann aber Aussagen wie "es wurde (im Unterricht) festgehalten, dass ein Rand existieren muss, weil sonst die Welle aus dem Atom entweichen würde, was nach der Wahrscheinlichkeitsdeutung auch zu einem Entweichen des Elektrons und damit zum Zerfall des Atoms führen würde[68]". Diese Deutung, so anschaulich sie auch sein mag, geht an der statistischen Interpretation der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons vorbei. Es gibt eben nur Bereiche einer größeren oder kleinen Antreffwahrscheinlichkeit für das Elektron. So ist die radiale Verteilungsfunktion für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb einer Kugel mit Radius R:

$$W_R(R) = \int_{r=0}^{R} r^2 \cdot R_{nl}^2(r) \cdot dr \tag{1.1}$$

[64] Schrödinger, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. In: Annalen der Physik 79(1926), S.361.

[65] Schrödinger, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. In: Gesammelte Abhandlungen, Bd. III. Wien 1984, S.82-97.

[66] Animationen dieser Prozesse findet man in den Maple-Programmen auf der beigefügten CD.

[67] Siehe auch S.25.

[68] In der vorliegenden Arbeit von NIEDDERER wird dieser Rand im beschriebenen Unterichtsversuch durch die COULOMB-Kraft zwischen Elektron und Proton erklärt. Man müsste in diesem Modell dann von einer Art "effektiven Rand" sprechen, um nicht in einen Widerspruch zur unendlichen Reichweite der el. Anziehung zu geraten. Die Formel zur COULOMB-Kraft ist den Schülern ja aus dem vorherigen Unterricht bekannt.

zwar sehr schnell sehr nahe Eins, aber eben für keinen endlichen Radius wirklich Eins. Mit anderen Worten, es gibt keinen "Rand" des Wasserstoffatoms. Dies ist auf der einen Seite ein unanschauliches Ergebnis, dennoch ist KUHN[69] nur zuzustimmen, wenn er schreibt: "Anschaulichkeit ist kein Wahrheitskriterium" und weiter: " Es sei nachdrücklich darauf verwiesen, dass pädagogisch gut gemeinte Versuche, unanschauliche Quanteneffekte durch anschauliche, handfeste, meist mechanische Modelle verständlich zu machen, stets die Gefahr in sich bergen, wirkliches Verständnis geradezu zu verhindern; denn die Quantenmechanik kann grundsätzlich nicht mit solchen Modellen erklärt werden". Anstatt dann die elektrische Anziehung zwischen Atomkern und Elektron für diesen "Rand" verantwortlich zu machen, wie NIEDDERER es vorschlägt, kann man in der statistischen Interpretation die COULOMB-Anziehung als Begründung für die Gestalt der Wahrscheinlichkeitsräume zugrunde legen. Diese, die korrekte theoretische Interpretation berücksichtigende Beschreibung ist allerdings stark an die Benutzung leistungsstarker Computer und Software gekoppelt.
Zur Zeit der Entstehung des Lehrgangs den die Gruppe um NIEDDERER entworfen hatte (1992) war an einen Einsatz eines leistungsstarken Computeralgebrasystems wie Maple in der Schule noch nicht zu denken. Mit Maple ist heute z.B. eine Monte-Carlo-Simulation der Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons im Wasserstoffatom überhaupt keine größere Schwierigkeit und didaktische Herausforderungen treten eher in der Vermittlung der Methode, als in der Interpretation der Ergebnisse auf. In der statistischen Interpretation kann man dann nur bestimmte Symmetrien innerhalb der Verteilung der Antreffpunkte erkennen, aber von einem Rand des Atoms kann keine Rede sein. Die Darstellung auf der nächsten Seite, die aus einem Maple-Programm zur Vorlesung über das H-Atom stammt, zeigt eine Monte-Carlo-Simulation der Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die Wahl der Quantenzahlen nlm = 321.
Es ist mit Maple überhaupt kein Problem zu jeder gewünschten Kombination der Quantenzahlen nicht nur eine solche stochastische Simulation durchzuführen, sondern auch die Wahrscheinlichkeitsräume darzustellen. In einem späteren Kapitel soll am Beispiel der historischen Entwicklung der Atommodelle der Einsatz eines Computeralgebrasystems konkret vorgestellt werden.
Jede Elementarisierung bringt zwangsläufig einen Verlust an Allgemeingültigkeit und fachlicher Korrektheit mit sich, der Maßstab für die Angemessenheit einer Elementarisierung ist dann der bisherige Kenntnisstand[70] des Schülers oder des Studenten.

[69] Kuhn, W. Quantenmechanik: Der ideengeschichtliche Entwicklungsprozess, in Fischler, H. (Hrsg): Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.
[70] Insbesondere spielen auch die mathematischen Kenntnisse eine entscheidende Rolle.

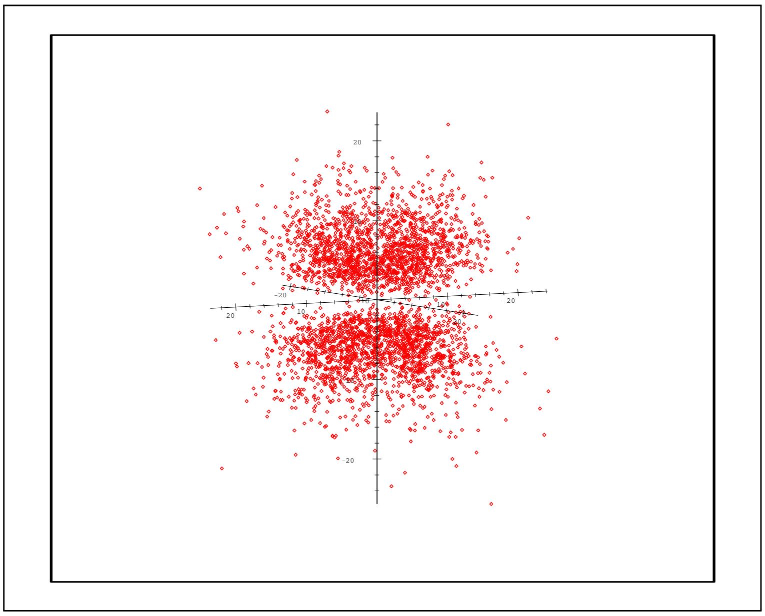

Figure 1.2: Monte-Carlo-Simulation ($\hbar = 1$) für die Kombination nlm=321.

Wird die fachliche Unzulässigkeit der Elementarisierung vom Schüler aufgrund seines bisherigen Wissens als erkennbar angenommen, so ist sie abzulehnen. Ein Beispiel für diesen Fall, wäre die Herleitung der Grundzustandsenergie des H-Atoms durch die HEISENBERG-Unschärferelation, bei der die Streuungen durch Mittelwerte ersetzt werden[71]. Anders sieht es aus, wenn z.B. einem gebundenen Quantenobjekt neben der Gesamtenergie auch eine potenzielle Energie zugeordnet wird, hier werden die Schüler nicht wissen, dass die beiden zugehörigen Operatoren nicht miteinander kommutieren, mit anderen Worten beide Energiewerte zu einem bestimmten Zeitpunkt gar nicht beide bekannt sein können.
Für die Entwicklung eines universitären Kurses zur Quantenphysik für Studierende des Lehramts Sekundarstufe I gilt mit Einschränkungen der gleiche Maßstab. Da diese Gruppe z.B. nicht über spezielle Kenntnisse der theoretischen Mechanik, insbesondere der HAMILTON-Funktion und des Prinzips der Wirkungswellen, verfügt, kann man den direkten Weg, auf dem SCHRÖDINGER zu seiner Gleichung gelangte[72], nicht darstellen.

[71] So z.B. bei der Bestimmung von Größen des Grundzustandes des H-Atoms. Siehe z.B. in DORN / BADER: Physik, Oberstufe Gesamtband 12 / 13, Hannover 1986.

[72] Die geometrische Optik kann in analoger Weise zur klassischen Teilchenmechanik formuliert werden. Dabei kann die Eikonalgleichung der geometrischen Optik als Analogon zur HAMILTON-JACOBI-Gleichung aufgefasst werden. Damit stand die Frage im Raum, ob es dann nicht auch analog zur Wellenoptik eine Art "Wellen-Mechanik" geben könnte. SCHRÖDINGER bejahte diese Frage und gelangte durch diese opto-mechanische Analogie

Die SCHRÖDINGER-Gleichung wird im ersten Teil des Kurses über eine Analogie zu den MAXWELL-Wellengleichungen erschlossen.

1.2.2 Zugang zur Quantenphysik entlang einer historischen Schilderung des Entwicklungsprozesses

Eng mit dem wissenschaftstheoretisch reflektierten Zugang zusammen hängt die Möglichkeit einer Betrachtung der historischen Stationen, die zur Entwicklung der Quantenphysik führten.Die didaktische Leitidee lässt sich in dem folgenden Zitat von HUND[73] zusammenfassen: "Als Physiker wollen wir die heutige Physik besser verstehen. Wieviel an ihr ist durch die Sache, also durch das objektive Naturgeschehen bestimmt, wieviel ist historisch bedingt? Als Physiker wissen wir wenigstens aus der jüngsten Geschichte unserer Wissenschaft, dass die wichtigsten und grundlegenden Erkenntnisse nur bei ihrem Entstehen ausführlicher diskutiert werden, nachher werden sie mehr oder weniger geglaubt oder als selbstverständlich ohne Bedenken gehandhabt. Man lernt ja Physik meist aus einem Lehrbuch, das auf kurzem Wege das für richtig gehaltene Wissen plausibel macht oder nur systematisch darstellt." Für HUND werden die physikalischen Begriffe im heutigen Lernprozess nicht mehr richtig verstanden, weil die Gründe und Zweifel, die bei ihrer Entstehung entstanden heute nicht mehr ausführlich diskutiert werden. HUND kommt dann zu dem Schluss: "In dem Zwiespalt von Verstehen und Handhaben kann die Betrachtung der geschichtlichen Entwicklung der physikalischen Begriffe einiges helfen."
Mit der Betrachtung der einzelnen historischen Stationen einer physikalischen Theorie ist dabei nicht in erster Linie die Durchführung von Versuchen mittels der historischen Apparate gemeint[74]. In erster Linie soll die Entwicklung einer physikalischen Theorie anhand ihrer Historie motiviert und verdeutlicht werden. So lässt es sich entlang dieser Möglichkeit der Betrachtung leicht der Übergang zwischen naivem Realismus (die Dinge sind so wie man sie wahrnimmt"[75]) zum kritischem Realismus ("die Dinge sind so, wie sie entlang komplizierter Theorien beschrieben werden") anhand des Übergangs von klassischer Mechanik zur Quantenmechanik thematisieren. KIRCHER schreibt dazu[76]: "Die physikalische Erkenntnisgewinnung war im naiven Realismus einfach und direkt. Die Wirkungen von materiellen

zu seiner berühmten Gleichung.

[73] Hund, F.: Geschichte der physikalischen Begriffe. Mannheim 1972.

[74] Etwa eine Betrachtung der Messung der Lichtgeschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten.

[75] Es gibt ältere Entwicklungspsychologen, die annehmen, dass Kinder in einer bestimmten Entwicklungsphase in ihrem Verhalten Züge des naiven Realismus zeigen. Siehe z.B. in Remplein, H.: Die seelische Entwicklung des Menschen in Kindes- und Jugendalter. München: Reinhardt, 1958 oder auch Piaget, J.: Die Entwicklung des Erkennens II. Das physikalische Denken. Stuttgart: Klett, 1969.

[76] Kircher, E: Studien zur Physikdidaktik, IPN 1995.

Objekten, etwa die Ausdehnung einer Feder durch ein Gewichtsstück, werden visuell wahrgenommen, in Messdaten umgesetzt, quantifiziert.
Die einzelnen Ergebnisse führen auf anscheinend einfache und logische Weise zu einem Naturgesetz, dass die Eigenschaften der beteiligten Objekte beschreibt." Im naiven Realismus wurde also geglaubt, Naturgesetze durch ein Verfahren der generalisierenden Induktion zu erhalten, viele Physiker verwiesen dabei auf GALILEIs Entdeckung der Fallgesetze, vergaßen dabei aber die vielen Idealisierungen (z.B. die Vernachlässigung des Luftwiderstands). Naive Realisten setzen zusätzlich zur Einfachheit im methodischen Vorgehen noch eine Einfachheit der physikalischen Objekte voraus, z.B. Beschreibbarkeit durch stetige Funktionen und der Erfolg der NEWTON-Mechanik gab ihnen recht. Es wird nur im historischen Kontext und unter Berücksichtigung dieser erkenntnistheoretischen Aspekte klar, weshalb man lange versuchte alle neuen Phänomene der Physik zu "mechanisieren", also durch Elemente der klassischen Mechanik zu beschreiben[77].
Mit der Frage nach der dem letzten Baustein der Materie wurde ein immer tieferes Eindringen in nicht mehr direkt wahrnehmbare Bereiche der Natur[78] notwendig und dieser Prozess lässt sich wiederum im historischen Kontext ohne größere didaktischen Mühen darstellen. Nun wurden z.B. Spuren auf einer Fotoplatte gemäß einer bestimmten Theorie gedeutet.
KIRCHER bemerkt dazu: "Realität ist hier nicht mehr einfach das direkt durch die Sinne Erfassbare, evident Gegebene, so wie der Regenbogen, der bei bestimmten geophysikalischen Gegebenheiten einfach da ist. Realität muss, wie bei der heutigen Elementarteilchenphysik am deutlichsten sichtbar wird, erst durch komplizierte „theoriegeleitete" Apparaturen dazu gebracht werden, sich zu zeigen. Im Falle vieler Elementarteilchen kann man sagen, dass Realität durch die Apparaturen erst geschaffen wurden.[79]" Diese, dem naiven Realismus widersprechende Weise der Methodik der physikalischen Forschung kann nur im historischen Zusammenhang verständlich werden.
Der Bruch zwischen klassischer Physik und moderner Physik (Quantentheorie, Allgemeine Relativitätstheorie) kann überhaupt nur im historischen Kontext herausgearbeitet werden, wenn man nämlich im Unterricht, in der Vorlesung, die neuartigen Phänomene darstellt, die im Rahmen der bisherigen Theorien nicht erklärbar waren.
1984 untersuchte SCHECKER Schülervorstellungen über die Physik als Wissenschaft[80]. Er befragte dabei 450 Schüler in Grund- und Leistungskursen

[77] MAXWELLs Versuch die elektromagnetische Induktion anhand komplizierter mechanischer Stangensysteme zu erklären, kann hier als Paradebeispiel dienen.

[78] Die unmittelbare Anschauung fehlt im submikroskopischen Bereich ebenso wie im kosmischen.

[79] Hier ist allerdings anzumerken, dass das Stadium des frühen Kosmos sehr wohl eine physikalische Situation darstellt, die direkt über die Messung der Hintergrundstrahlung beobachtbar ist.

[80] Schecker, H.: Vorstellungen von Schülern über die Wissenschaft Physik, in Mikelski, H. (Hrsg): Zur Didaktik der Physik und Chemie 1984, Leuchtturm-Verlag.

der Sekundarstufe II (überwiegend 11. Klasse) schriftlich zu ihren Vorstellungen über Gegenstände, Ziele und Methoden der Wissenschaft Physik. Dabei kommt SCHECKER zu folgendem bemerkenswerten Ergebnis: "Insbesondere wird[81] das Streben der Physik nach Theorien der allgemeinen Fälle unterschätzt; gleichzeitig wird der Aufstellung spezieller Aussagen von eigenem faktischen Wert zu große Bedeutung zugemessen." Diesem Missverständnis in der Auffassung der Physik als Wissenschaft kann gerade der an historischen Ereignissen sich orientierende Zugang zur Physik entgegenwirken. Es wird dann nämlich deutlich, wie die Physik versucht, eine große Zahl von Phänomenen mit einer einheitlichen Theorie zu erklären.
MATUSCHEK-WILKEN[82] benennt in ihrer Untersuchung einige Vorteile der Orientierung an der historischen Entwicklung der Naturwissenschaften, die in dieser Form insbesondere auch für Lehramtsstudierende zutreffen. Sie beschreibt die Möglichkeit der Vermeidung einer "linearen Erkenntnisgewinnung" der Schüler, wie sie durch Lehrbücher suggeriert werden. Schüler können erkennen, dass Naturwissenschaft nicht so geradlinig abläuft, wie sie es vermuten. Weiter sieht sie die Möglichkeit des Vermittelns der Erkenntnis für die Schüler, dass es sehr schwierig oder unmöglich sein kann, aus einer bereits bekannten Theorie heraus eine neue abzuleiten. Schüler erfahren weiter durch das wie MATUSCHEK-WILKENS es nennt "historisch-problemorientierte Unterrichtsverfahren" die Veränderlichkeit und Begrenztheit von Theorien und Modellen. Sie können erkennen, wie wichtig die Fähigkeit ist, Hypothesen zu bilden und Spekulationen zu entwerfen. Motivierend kann es ihrer Meinung nach wirken, wenn Schüler erkennen, dass die gleichen Probleme die sie haben, auch viele Wissenschaftler vergangener Epochen hatten und diese nicht auf ihr eigenes Unvermögen zurückzuführen sind.
Einen konkreten historisch orientierten Ansatz eines Unterrichtskonzepts zur Einführung in die Quantenphysik stellen JAISLI und NIEDDERER 1981 vor[83]. Sie gehen davon aus, dass "(Moderne) Physik ohne geschichtlich bedingten Bausteine nicht verstehbar ist". Beide benutzen in ihrem Konzept die historische Entwicklung der Quantenphysik als strukturierendes Konzept. Ihr Konzept lässt sich dabei in vier Hauptkapitel einordnen:
1. Grundlagen und Fragestellungen der Physik des 19. Jahrhunderts:
In diesem Kapitel werden die Ideen und Fragestellungen die der Quantenphysik zugrunde liegen dargestellt. Es wird begründet wieso überhaupt eine eigene Theorie der Mikroobjekte notwendig wurde.
2. Auf der Suche nach neuen Ideen:

[81] von den Schülern
[82] Matuschek-Wilken,C.: Geschichte der Chemie im Chemieunterricht - das historisch-problemorientierte Unterrichtsverfahren; Oldenburg, Univ. Diss. 1989.
[83] Jaisli, W., Niedderer, H.: Eine historisch orientierte Einführung in die Quantenmechanik, in Härtel, H. (Hrsg): Zur Didaktik der Physik und Chemie, Leuchtturm-Verlag 1981, S.226-228.

In diesem Kapitel werden zentral der Photoeffekt sowie das BOHR-Atommodell besprochen. Der Photoeffekt steht dabei stellvertretend für die Art von Experimenten, die durch $E = h\nu$ beschrieben werden können und dient dabei als Diskussionsgrundlage für die Idee der Quantisierung des Strahlungsfeldes. Das BOHR-Atommodell wird als Zwischenstufe zwischen klassischer Physik und Quantenphysik vorgestellt.
3. Die Zwillingsgeburt der Theorie:
Im Gegensatz zu vielen Schulbüchern, die SCHRÖDINGERs Formalismus mit der Philosophie HEISENBERGs mischen[84], werden in diesem Konzept beide Theorien getrennt betrachtet. Anhand von Originalzitaten werden beide Ansätze in ihren unterschiedlichen Herangehensweisen nebeneinander vorgestellt.
4. Interpretationen:
In diesem Kapitel werden die Probleme und Kontroversen und Probleme aufgezeigt, die bei der Interpretation der Quantenmechanik entstehen. Da es keine Universalargumente nur für eine Interpretation gibt, wird auch nicht der Versuch unternommen nur eine "richtige und wahre" Interpretation darzustellen. Stattdessen werden die einzelnen Interpretationen anhand einer fiktiven Diskussion unter Physikern dargestellt.
Historisch reflektierte Zugänge zur Quantenphysik haben alle ein mehr oder weniger ähnliches Konzept wie das hier vorgestellte[85].

1.2.3 Computerunterstützte Konzepte

Mit dem Beginn des Einzugs erster Computersysteme in die Schulen in den achtziger Jahren des 20. Jahrhunderts begann auch die Diskussion über den Einsatz des Computers im Physikunterricht. Da die Informatik-Ausbildung nicht Teil des Physikstudiums war, mussten sich viele Physiklehrer mühsam die ersten Programmiersprachen und den Umgang mit dem Computer im Eigenstudium erarbeiten. Aber schon früh findet man eine recht zahlreiche Anzahl von didaktischen Artikeln über die konkreten Einsatzmöglichkeiten des Computers im Physikunterricht. BASIC- und PASCAL-Programme wurden veröffentlicht, um einzelne physikalische Sachverhalte am Computer darzustellen.
Das didaktische Potenzial des Computers lag von Anfang in der Möglichkeit Probleme zu behandeln, die bisher ausgeklammert wurden, da einfach keine Möglichkeit bestand sie im Unterricht zu bearbeiten. Auf der einen Seite ist der mathematische Hintergrund einfach zu schwierig, auf der anderen Seite gab es einfach kaum eine Möglichkeit z.B. Messwerte zu erfassen und sie dann in relativ kurzer Zeit schülergerecht darzustellen und auszuwerten.

[84] Als Beispiel hierfür mag die Verwendung des Begriffs "Zustand" dienen. Für Heisenberg ist es die Information die ein Experimentator über ein Experiment besitzt. Für Schrödinger dagegen ein realer Schwingungszustand einer Elektronenwelle.
[85] Siehe z.B. in Kuhn, W.: Lehrbuch der Physik, Bd II / 2, Braunschweig 1991.

Eine computerunterstützte Messwerterfassung[86] bot da eine Lösung und sie konnte zusätzlich noch zur Vereinfachung der Messanordnung beitragen.
Den Einsatz des Computers im Physikunterricht kann man in drei Anwendungsbereichen darstellen[87]:
1. Numerische Simulationen:
Bei einer numerischen Simulation liegt dem Computerprogramm, wenn auch in abstrakter Form, die gleiche physikalische Gesetzmäßigkeit zugrunde, die auch das reale physikalische Geschehen steuert.
Typische Beispiele hierfür sind die NEWTON-Bewegungsgleichung, das HOOKE-Gesetz, das Gravitationsgesetz oder auch die SCHRÖDINGER-Gleichung. Bei der Behandlung eines solchen Problems wird das physikalische Modell durch ein mathematisches ersetzt. Für dessen Behandlung stehen dann eine Vielzahl numerischer Methoden zur Verfügung. Die Ergebnisse dieser mathematischen Behandlung werden dann wiederum physikalisch interpretiert. Bis zum Aufkommen des Computers im Unterricht konnten dort nur Probleme behandelt werden, die analytisch lösbar waren. Mit der Möglichkeit z.B. Differenzialgleichungen numerisch zu lösen, waren dann auch komplexere Probleme[88] bearbeitbar. Hierzu wurde der Computer genutzt, um einen Algorithmus aus der Mathematik[89], der erst in eine Programmiersprache übersetzt werden musste, abzuarbeiten. Solche Algorithmen der numerischen Behandlung bestehen in vielen Fällen aus elementaren Rechenschritten, die ohne höhere Mathematik ausführbar sind und bieten daher den Vorteil nicht durch einen zu hohen Abstraktionsgrad die Physik zu verdecken[90].
2. Bildhafte Simulationen:
Bei dieser Anwendung des Computers steht das Nachvollziehen des physikalischen Vorgangs auf dem Bildschirm im Vordergrund. Dabei reichen die Möglichkeiten von einer reinen Trickfilmdarstellung bei der eine physikali-

[86] Die Firma Phywe bot schon bald das Interfacesystem COMEX zum **Co**mputerunterstützten **M**essen und **Ex**perimentieren an. Damit war die Messung und Darstellung der elektrischen Spannung und Leistung möglich. COMEX verfügte über einen Zähleranschluss, so dass z.B.auch Messung und Darstellung des radioaktiven Zerfalls möglich war. Durch eine Verbindung war der Anschluss an eine Lichtschrankenschiene möglich, so dass auch eine Reihe verschiedenartiger Darstellungen wie Weg-Zeit-Diagramme, Beschleunigungs-Zeit-Diagramme aber auch die experimentelle Erarbeitung der Stoss- und Impulsgesetze möglich wurden.

[87] Siehe zur ausführlichen Darstellung in Kuhn, W.: Handbuch der experimentellen Schulphysik, Bd.11, Aulis-Verlag, 1986.

[88] Zum Beispiel die numerische Lösung des Drei-Körper-Problems.

[89] Zum Beispiel ein RUNGE-KUTTA-Verfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differenzialgleichung.

[90] Ein klassisches Beispiel, in der die analytische Lösung den Schülern überhaupt nicht zugemutet werden kann, ist z.B. die Beschreibung des Fadenpendels bei großer Amplitude. Die analytische Lösung führt hierbei auf elliptische Integrale. Demgegenüber ist eine numerische Lösung bzw. der zugrundeliegende Algorithmus den Schülern leicht vermittelbar. Da man diesen auch auf dem Papier abarbeiten kann, versteht man auch sofort, wie der Computer arbeitet.

sche Endformel den graphischen Ablauf auf dem Bildschirm steuert bis zur graphischen Veranschaulichung der Ergebnisse einer numerischen Simulation. Hinzu kommt eine Vielzahl physikalischer Aufgabenstellungen, die nicht durch stetige funktionale Zusammenhänge wiedergegeben werden. In der Hauptsache handelt es sich dabei um die Illustration einer physikalischen Idee, die nicht in einer geschlossenen mathematischen Formel beschreibbar ist, wie z.B. einen Stromlaufplan oder die Veranschaulichung des Prinzips eines apparativen Aufbaus. Es ist auch eine Kombination dieser Simulationsart mit der numerischen Simulation möglich. Dabei wird das Ergebnis der Zahlenrechnung nicht als Tabelle oder dargestellte Funktion ausgegeben, sondern steuert ebenfalls eine symbolische Darstellung auf dem Bildschirm. Dadurch kann beispielsweise ein schwingendes Pendel auf dem Bildschirm mit einem daneben stehenden realen Pendel, das die gleichen Parameter besitzt, anschaulich verglichen werden.
3. Computereinsatz im Realexperiment:
Hier lassen sich zwei Einsatzmöglichkeiten unterscheiden. Bei der Steuerung eines Experiments durch den Computer gehen die Daten vom Computer zum Experiment, bei der Messwerterfassung erfolgt der Datenfluss in umgekehrter Richtung. Als Verbindungsbaustein (Interface) zwischen Computer und dem experimentellen Aufbau dient dabei ein Digital-Analog-Wandler bzw. ein Analog-Digital-Wandler, der die vom Computer gelieferten Zahlen in zu diesen proportionale Spannungen umwandelt. Bei hinreichend hoher Stellenzahl des Wandlers ist die Spannung quasi kontinuierlich veränderbar. Auf diese Weise können nicht nur bekannte Geräte wie Vielfachmessgerät, x-y-Schreiber bzw. Speicheroszillograph, Stoppuhr oder Funktionsgenerator nachgebildet werden. Es können auch qualitativ neue "Geräte" programmiert werden, deren Realisation in herkömmlicher Bauweise nur mit sehr großem Aufwand möglich wäre. Beispielsweise ein Drehstromgenerator mit variabler Frequenz bis zur Frequenz Null bei absolut frequenzunabhängiger Amplitude oder ein Speicheroszillograph mit nachträglich möglicher Aufbereitung der Messwerte.
Das Eindringen des Computers bot von Anfang an die Möglichkeit einer Bereicherung des Unterrichts im Sinne einer Methodenvielfalt. Herkömmliche, didaktisch wertvolle Verfahren können durch den Computer sinnvoll ergänzt werden. Durch eine Reduzierung des mathematischen Aufwands können überdies neue Themenkreise erschlossen und ein stärkerer Realitätsbezug erreicht werden. So entfällt beispielsweise weitgehend die Beschränkung auf idealisierte Probleme, stattdessen ist es z.B. in der Mechanik möglich, den Einfluss der Reibung auf die Bewegung eines Objekts zu studieren. Die Prozessorleistung wurde in den letzten 20 Jahren extrem gesteigert, im Vergleich zu den zu Beginn in den Schulen verwendeten Computern sind heutige PCs wahre Großrechenanlagen. Diese Entwicklung gilt es bei der Betrachtung des Einsatzes des Computers in der Lehre der Quantenphysik immer zu berücksichtigen. Gemeinsam ist jedoch allen Anwendungen des

Computers in der Lehre der Quantenphysik, dass die SCHRÖDINGER-Gleichung im Mittelpunkt der Bearbeitung mit dem Computer steht. Sie wird für verschiedene Potenzialfälle numerisch bearbeitet und die Ergebnisse werden anschließend graphisch dargestellt. Auf diese Weise ist es möglich, grundlegende Potenzialmodelle wie z.B. den eindimensionalen Potenzialtopf oder auch den eindimensionalen Potenzialwall zu studieren. Durch diese Möglichkeiten der Betrachtung einfacher quantenmechanischer Modelle kann z.B. der Einfluss der Breite eines Potenzialwalles auf die Tunnelwahrscheinlichkeit studiert werden oder man kann betrachten, wie sich der Einfluss der Breite des Potenzialtopfes auf die Wellenfunktion auswirkt. Simulationen von Lösungen waren lange Zeit nicht programmierbar und gelingen heute in angemessener Zeit nur mit Hilfe computeralgebraischer Methoden, die im zweiten Kapitel vor-gestellt werden.
Aus den heutigen Unterrichtskonzepten kann der Einsatz des Computers nicht mehr weggedacht werden. Im Folgenden sollen nun beispielhaft zwei solcher Unterrichtskonzepte vorgestellt werden, bei denen der Einsatz des Compu-ters eine wichtige Rolle spielt. Dabei werden die beiden Konzepte nicht in aller Breite dargestellt, sondern nur die konkreten Einsatzmöglichkeiten des Computers betrachtet. Das eine stammt von NIEDDERER und ist be-reits erwähnt worden (S.16 u. S.29). In diesem Lehrgang wird der Computer im wesentlichen zur numerischen Simulation eingesetzt. Das zweite Unterrichtskonzept stammt von WIESNER und MÜLLER und zeigt die modernen Möglichkeiten von Computersimulationen. Anschließend wird das über den Schulunterricht weit hinausgehende Programm INTERQUANTA der Siegener Professoren BRANDT und DAHMEN, das speziell für die universitäre Ausbildung entwickelt wurde, vorgestellt.
Im Konzept von NIEDDERER[91] wird, wie bereits erwähnt, der mathematische Aufwand durch eine Analogie zur stehenden Welle reduziert. Auf diese Weise wird das Konzept des Zustands eingeführt und aufbauend auf diese Analogie wird die SCHRÖDINGER-Gleichung in elementarisierter Form als Aussage über die Steigungsänderung bzw. Krümmung der Wellenfunktion benutzt. Die Abhängigkeit dieser Krümmung von den Parametern Gesamtenergie E_n, Potenzial $E_{pot}(x)$ an der Stelle x und dem Funktionswert ψ wird in der folgenden halbquantitativen Form der stationären SCHRÖDINGER-Gleichung zusammengefasst:

$$\psi'' \sim (E_n - E_{pot}) \cdot \psi$$

An dieser Stelle wird nun der Computer eingesetzt, einmal um die Bedeutung von ψ'' zu veranschaulichen, zum anderen um die Bedeutung von Randbedingungen zu demonstrieren. Der Computer dient weiter dazu, die Begriffe

[91] Die folgenden Beschreibungen stammen alle aus dem Aufsatz von Niedderer, H.: Quantenphysik mit anschaulichem Atommodell, in Fischler, H. (Hrsg): Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.

"Zustand", "Eigenwert" und "Amplitudenfunktion" bei mechanischen Wellen zu erarbeiten. Schließlich wird er noch genutzt, um konkrete Eigenwerte und Eigenfunktionen zu berechnen. Im Kurs wird hauptsächlich das Programm STELLA[92] verwendet, das nach der Eingabe einer Differenzialgleichung in der Form eines Flussdiagramms eine numerische Lösung erarbeitet, die am Bildschirm gezeigt wird. Dabei werden konkrete mechanische stehende Seilwellen fotographiert und mit den entsprechenden numerischen Lösungen verglichen. Um die stationären Wellenfunktionen des H-Atoms zu verdeutlichen, wird die Analogie zu stehenden Schallwellen in einer Glaskugel genutzt. Die Knoten wurden mittels eines Glühdrahts sichtbar gemacht und der ganze Vorgang als Videofilm aufgenommen. Die Ergebnisse konnten so mit dem STELLA-Modell verglichen werden. Die Radialfunktionen der Lösung des H-Atoms können ebenfalls mit STELLA dargestellt werden, für eine Wahrscheinlichkeitsdichte-Darstellung wurde ein speziell von NIEDDERER entworfenes Programm verwendet.

Im Unterrichtskonzept von WIESNER und MÜLLER[93] geschieht der Einstieg in die Quantenmechanik über die Betrachtung des Photoeffekts. Da die Durchführung des Experiments relativ zeitaufwendig ist, wird der Computer zur Simulation in einem interaktiven Bildschirmexperiment[94] eingesetzt. Das Verhalten der Photonen wird anschließend in einem MACH-ZEHNDER-Interferometer betrachtet[95], da man mit schulischen Mitteln nur eine Handvoll Experimente zur Quantenphysik realisieren kann. Da der Versuch mit dem MACH-ZEHNDER-Interferometer in der Schule nicht durchgeführt werden kann, steht er als Computersimulation zur Verfügung. Das Simulationsprogramm kann frei aus dem Internet heruntergeladen werden. Der Computer wird im Verlauf des Konzepts weiter eingesetzt, um die statistischen Aussagen der Quantenmechanik zu verdeutlichen. Da die BORN-Wahrscheinlichkeitsinterpretation ein wesentliches Element dieses didaktischen Konzepts ist, erfolgt die Betrachtung ihrer Aussagen am Doppelspaltexperiment mit einzelnen Photonen.

Die Autoren haben auch hierzu ein Programm entwickelt. Es stellt ein interaktives Labor zur Verfügung, in dem Simulationen durchführbar sind.

---

[92] Eine Beschreibung von STELLA und seiner Einsatzmöglichkeiten im Physikunterricht sowie viele Beispiele findet man im Projekt CPU (Computer im Physikunterricht). Siehe dazu in Niedderer, H./ Bethge, T./ Schecker, H.: Abschlussbereicht des Modellversuchs: "Computereinsatz im Physikunterricht (CPU)", Bd.1 bis Bd.4, Universität Bremen 1992.

[93] Müller, R., Wiesener, H.: Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik, www. physik.uni-muenchen.de/didaktik/quanten. Unter dieser Addresse befinden sich pdf-Dateien zum Herunterladen.

[94] Kirstein, J.,Rass, R.: Interaktive Bildschirmexperimente zum Lehren und Lernen von Physik, in: Didaktik der Physik. Beiträge zur Physikertagung Berlin (1997), 458. Ein interaktives Bildschirmexperiment zum Photoeffekt wurde von L. Silbersack (Zulassungsarbeit Universität München 1999) hergestellt.

[95] Für ausführlichere Betrachtungen siehe auch in Müller, R. und Wiesner, H.: Photonen im Mach-Zehnder-Interferometer - ein Zugang zur Deutung der Quantenphysik, www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/quanten.

Es besteht aus einer Quelle, die verschiedene Arten von Quantenobjekten aussenden kann, einer Blende mit Einzel- oder Doppelspalt, deren Breite und Abstand einstellbar sind und einem Schirm, auf dem die Objekte nachgewiesen werden können.

Die erste Version eines auf die Belange hochschuldidaktischer Anforderungen zielendes Programm wurde an der Universität Siegen bereits 1989 von BRANDT und DAHMEN entwickelt[96] und wird seitdem ständig erweitert. Interquanta geht weit über den schulischen Bedarf hinaus, es lassen sich nicht nur gebundene Zustände in einer und drei Dimension behandeln sondern auch Streuprobleme und die Bewegung freier Teilchen in drei Dimensionen und unter der Wirkung von Kräften. Abgerundet wird das Programm durch eine Betrachtung spezieller mathematischer Funktionen, die insbesondere in der Quantenmechanik verwendet werden. Das Programm ist als interaktives Lernprogramm aufgebaut, so dass der Benutzer eigenständig am Rechner Probleme lösen kann. Die einzelnen Programmabschnitte beinhalten dabei die exakten oder numerischen Lösungen, die vom Benutzer durch verändern einzelner Parameter an das zu berechnende Problem angepasst werden können. Interquanta kann begleitend zu Vorlesungen zur Quantenphysik bearbeitet werden und trägt durch eindrucksvolle Graphiken und Animationen zum Verständnis der oft recht unanschaulichen Ergebnisse der Quantenmechanik bei.

1.2.4 Zusammenfassung: Didaktische Konzepte zur Quantenphysik in der Schule

Die Quantenphysik stellt wegen ihrer formalen Komplexität und der mit ihr verbundenen (teilweise bis heute ungeklärten) begrifflichen Fragen eines der schwierigsten Themenbereiche der gesamten Schulphysik dar. Es sollte aber nicht auf sie verzichtet werden, denn ein wesentlicher Bildungswert liegt gerade in einer grundlegenden naturphilosophischen Lektion. KUHN schreibt dazu: "Im Rahmen der Quantenphysik wird erstmals aus einer experimentell testbaren physikalischen Theorie heraus deutlich, inwiefern bei der Suche nach einer vom Beobachter unabhängigen an sich existierenden Wirklichkeit diese durch den spezifischen Zugriff "Realität" beeinflusst und zugleich transparent wird. Angesichts eines aktuellen Weltbildbedürfnisses kann daher eine vertiefte Beschäftigung mit der Quantenmechanik eine Orientierungshilfe geben, den Standort des Menschen in der Ordnung der Dinge und sein Verhältnis zur Realität zu finden."
Die in der fachdidaktischen Literatur diskutierten Unterrichtskonzepte unterscheiden sich teilweise stark voneinander. Jeder Ansatz stellt dabei eine andere Antwort auf die Frage nach dem Bildungswert der Quantenphysik

[96] Brandt, S. u. Dahmen, H.: Quantum Mechanics on the Personal Computer, Springer 1989.

für den Schüler und die Schülerin dar.
Man kann die einzelnen Konzepte einem Vorschlag von WIESNER gemäß nach den folgenden Kategorien zusammenfassen:
a) Unterrichtskonzepte, die sich besonders auf die Prinzipien des quantenmechanischen Formalismus konzentrieren und diese auf verschiedene Fragestellungen anwenden,
b) Unterrichtskonzepte, deren Schwerpunkt auf den begrifflichen Problemen der Quantenphysik liegt,
c) Unterrichtskonzepte, in denen die Quantenphysik als Basis für das Verständnis zahlreicher physikalischer Theorien (z.B. Atomphysik, Kernphysik, Teilchenphysik, Festkörperphysik) begriffen wird,
d) Unterrichtskonzepte, in denen sie als Grundlage für zahlreiche technologische Anwendungen (z.B. Transistor, LASER) wichtig ist.
Zur Kategorie a) zählen z.B. die Vorschläge von BADER[97],KÜHLBECK[98] oder ERB und SCHÖN[99]. Dieser Kategorie ist ebenfalls der Vorschlag von BRACHNER und FICHTNER[100] zuzuordnen, in dem die Verwendung von Wahrscheinlichkeitsamplituden sowie das sogenannte quantenmechanische Fundamentalprinzip eine wichtige Rolle spielen.
Zur Kategorie b) kann man das Berliner Konzept[101] (FISCHLER, LICHTFELDT u.a.) zählen. Dieses Konzept ist dadurch geprägt, dass es den Unterschied zwischen klassischen und quantenmechanischen Phänomenen stark betont und Bezüge zur klassischen Physik vermieden werden. Ein weiteres Konzept, das man dieser Kategorie zuordnen kann, ist der von KUHN entworfene[102] Lehrgang zur Behandlung der Quantenmechanik in Grund- und Leistungskursen. Der zentrale Begriff dieses Ansatzes ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude. Der Zugang zu dieser Vorstellung erfolgt anhand der historischen Entwicklung ausgehend von PLANCKs Beschreibung der Hohlraumstrahlung. KUHN beachtet in der Entwicklung der Historie wissenschaftstheoretische Zusammenhänge insb. bei der Deutung

[97] Bader, F.: Eine Quantenwelt ohne Dualismus, Schroedel, Hannover 1996.

[98] Kühlbeck, J.: Modellbildung in der Physik, hrsg. v. Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart 1997.

[99] Erb, R.: Optik in der Oberstufe, Physik in der Schule 33 (1995); Schön, L. u. Werner, J.: Vom Licht zum Atom, in: Brechel, R. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie 1998, S.304.

[100] Brachner, A. u. Fichtner, R.: Quantenmechanik, Schroedel, Hannover 1980; Fichtner, R.: Zu einem grundlegenden Prinzip in der Quantentheorie, Physik in der Schule 32, 1994, 244.

[101] Fischler, H.: Die Berliner Konzeption einer "Einführung in die Quantenphysik": Didaktische Grundsätze und inhaltliche Details, in Fischer, H.(Hrsg.): Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.
Berg, A. u. a.: Einführung in die Quantenphysik - Ein Unterrichtsvorschlag für Grund- und Leistungskurse, Pädagogisches Zentrum Berlin 1989.
Fischler, H., Lichtfeldt. M.: Ein Unterrichtskonzept zur Einführung in die Quantenphysik, Physik in der Schule, 32, 276 (1994)

[102] Kuhn, W.: Lehrbuch der Physik, Band II/2. Braunschweig 1991.

des Photo- und des COMPTON-Effekts und weist schon frühzeitig auf die moderne Quantenelektrodynamik als heutzutage anerkannte Erklärung hin. Ebenso werden Atommodelle in ihrer historischen Reihenfolge vorgestellt und in ihrer wissenschaftstheoretischen Bedeutung diskutiert. Im Sinne einer ideengeschichtlichen Analyse des Dualismusproblems wird die DE BROGLIE-Relation nicht aus Messdaten gewonnen, sondern durch Nachzeichnen der grundsätzlichen theoretischen Gedankengänge DE BROGLIEs. Die moderne Quantenmechanik beginnt anschließend mit der Behandlung der SCHRÖDINGER-Wellenmechanik. Kernstück des Konzepts ist jedoch das den quantenphysikalischen Messprozess beinhaltende Kapitel. Hier wird ausgehend von Doppelspaltexperimenten mit Elektronen ein Zugang zum Begriff der Wahrscheinlichkeitsamplitude gelegt. Über Versuche mit polarsiertem Licht wird ein zweidimensionaler HILBERT-Raum eingeführt. So ist es dann möglich so abstrakte Begriffe wie Erwartungswert, Übergangswahrscheinlichkeit und Reduktion des Zustandsvektors zu veranschaulichen. Abgeschlossen wird dieser Vorschlag durch eine Diskussion verschiedener Deutungen der Quantenmechanik.
In die gleiche Kategorie gehört auch der erste, sogenannte qualitative Basiskurs des Münchener Unterrichtskonzepts von WIESNER und MÜLLER. Hier werden sehr intensiv Deutungsfragen der Quantenphysik behandelt, der zweite Teil des Konzepts, der sogenannte quantitative Aufbaukurs ist eher der Kategorie a) zuzuordnen. Hier werden erste Einblicke in die formale Struktur der Quantenmechanik gegeben (z.B. die Bedeutung einer Eigenwertgleichung).
Zur Kategorie d) kann man das „Visual Quantum Mechanics”-Konzept von ZOLLMAN[103] einordnen. Mit Simulationsprogrammen werden hier z.B. die Spektren von LEDs untersucht und auf die Bandstruktur von Festkörpern zurückgeführt.
Zur Kategorie c) zählt das bereits erwähnte Konzept von NIEDERRER und Mitarbeitern.

[103] Zollman, D.: Visual Quantum Activities, http://www.phys.ksu.edu/perg/vqm

1.3 Das Siegener Konzept

In diesem Kapitel wird als weitere didaktische Möglichkeit eines Zugangs zur Quantenphysik das auf der Anwendung des Computeralgebrasystems (CAS) Maple beruhende Siegener Lehrkonzept vorgestellt. Es richtet sich in erster Linie an Studierende der Sekundarstufe I, wird aber auch Studierenden der Sekundarstufe II angeboten. Die Anwendung von Teilen des Konzepts ist auch in der Oberstufe des Gymnasiums möglich und es kann auch zum Selbststudium genutzt werden.
Das grundlegende Ziel dieses Lehrkonzepts ist es, mittels der Nutzung computeralgebraischer Methoden schwierige mathematische Rechnungen dem Computer zu überlassen und physikalische Ergebnisse durch Graphiken und insbesondere durch Animationen zu veranschaulichen. Daneben wird das Ziel verfolgt, die Studierenden mit Computeralgeba im Allgemeinen und dem System Maple im Besonderen vertraut zu machen, da dieses ein sehr leistungsstarkes und für die Schule geeignetes CAS ist.
Das Siegener Lehrkonzept zur Quantenphysik ist Teil eines auf der Anwendung von CAS beruhenden Ausbildungskonzepts, durch welches den Studierenden der Physik Sek. I/II in einem sechsemestrigen Kurs ein Grundlagenstudium ermöglicht werden soll. Es umfasst Vorlesungen zur klassischen Mechanik und Elektrodynamik sowie zur klassischen Thermodynamik. Daran anschließend folgt ein Kurs zur Einführung in die Quantenphysik sowie ein Kurs zur nichtrelativistischen Quantenmechanik, die beide in dieser Arbeit vorgestellt und in ihrer didaktischen Konzeption begründet werden. Abgerundet wird dieser sechsemestrige Einführungskurs in die Physik durch einen Kurs zur Kern- bzw. Elementarteilchenphysik.
Im Folgenden wird zuerst geklärt, was sich hinter dem von vielen als nicht zutreffend empfundenen, aber sich so eingebürgerten Begriff der "Computeralgebra" verbirgt. Zunächst wird geklärt, was sich hinter dem Begriff „Computeralgebra" verbirgt und was die wichtigsten Merkmale eines Computeralgebrasystems (CAS) sind. Anschließend folgt eine kurze Beschreibung des dieser Arbeit zugrundeliegenden Systems Maple, sowie ein Erfahrungsbericht über den Einsatz von CAS im Mathematikunterricht in Gymnasien in Niedersachsen, der dokumentiert, dass der Einzug computeralgebraischer Methoden in den schulischen Unterrichtsalltag auch dort sich bereits in vollem Gange befindet[104]. Auf die allgemeinen Begründungen des Siegener Konzepts folgen dann die didaktischen Ziele und deren Umsetzung durch CAS im Lehrgang zur Quantenphysik und Quantenmechanik.

[104] Im Rahmen der Hochschulausbildung sind Maple und ähnliche Systeme natürlich schon länger als Hilfsmittel im Gebrauch.

1.3.1 Was ist Computeralgebra ?

Unter dem Begriff der "Computeralgebra" versteht man heute den Grenzbereich zwischen Algebra und Informatik, der sich mit dem Entwurf, Analyse, Implementierung und Anwendung algebraischer Algorithmen befasst. Ein anschauliches Beispiel für die Möglichkeiten computeralgebraischer Methoden gibt FUCHSSTEINER in seinem Vortrag[105] auf der Bundeswissenschaftspressekonferenz am 25.04.1994 in Bonn. Er beschreibt die fast zwanzig jährige Arbeit, die DELAUNEY brauchte, seine unvollendete Theorie der Mondbewegung zu verfassen. Dabei verbrachte DELAUNEY allein zehn Jahre (!) damit die Ergebnisse - wohlgemerkt die Formeln, nicht die Zahlenergebnisse - zu überprüfen. 1970 wurden diese formalen Ergebnisse mit einem CAS erneut überprüft, innerhalb von zwanzig Stunden! Heute würde diese Überprüfung, bei der auf S.234 ein Fehler gefunden wurde, weniger als eine Stunde dauern!
Die Entwicklung von CAS geht bis in die vierziger Jahre des 20.Jahrhunderts zurück, als man kleinere Systeme zur Lösung spezieller Probleme einsetzte. Der eigentliche Aufschwung setzte aber erst ein, als man in der theoretischen Elementarteilchenphysik dazu überging, Formeln von Computern symbolisch bearbeiten zu lassen. Man sah sich zu diesem Schritt gezwungen, weil Terme, die sich über 50 oder mehr Din-A4-Seiten erstreckten, 'von Hand' einfach nicht mehr zu bewältigen waren.
Das Wort 'Algebra' in CAS meint somit also die algorithmische Behandlung symbolischer algebraischer Ausdrücke, die zur Lösung von Gleichungen - oder allgemeiner von algebraischen Aufgabenstellungen notwendig sind.
Die z.B. für die Integration in Computeralgebra-Programmen verwendeten Verfahren beruhen auf Sätzen und Verfahren von LIOUVILLE und HERMITE aus dem 19.Jahrhundert und dem in den vierziger Jahren des 20. Jahrhunderts von RITT entwickelten Gebiet der Differenzialalgebra. Die enorme Leistungsfähigkeit heutiger Integrationsroutinen basiert allerdings auf einer grundlegenden Arbeit von RISCH aus dem Jahre 1968, die diese Ideen wieder aufgriff und für die immer leistungsfähigeren Computer nutzbar machte. Der resultierende Algorithmus ist allerdings nach wie vor so komplex, dass bei einer Rechnung auf dem Papier wohl meist nach stundenlangem Rechnungen bei einem dann wahrscheinlich falschen Ergebnis enden würde.

[105] Fuchssteiner, B.: Zur Bedeutung der Computeralgebra, http://www.rz.uni-osnabrueck.de/Dokumentation/
RZ_Zeitschrift/htm/miro-16/Kapitel5.html

Beispiel[106]: Betrachte das folgende parameterabhängige Integral:

$$F(\varepsilon) = \int_0^{\pi} \frac{(\sin x)^2}{(1+\varepsilon \cdot \cos(x))^2} dx$$

Im Falle $0 < \varepsilon < 1$ erhält man mit der Formel Nr. 347 aus der Formelsammlung von BRONSTEIN u. SEMENDJAJEW[107] das folgende Ergebnis:

$$F(\varepsilon) = \frac{\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right)$$

Maple gibt das korrekte Ergebnis ohne größere Mühe[108] nach kurzer Zeit aus.

Während die ersten Integrationsversuche am Rechner noch ein mehr oder weniger geschicktes Durchprobieren all der üblichen Integrationstricks waren, hat man mit dem RISCH-Algorithmus nun eine völlig neue Qualität erreicht. Durch die algebraische Beschreibung des Problems liefert dieser Algorithmus bei bestimmten Funktionen praktisch einen Beweis, dass deren Integrale nicht elementar lösbar sind.
Eine weiteres Anwendungsgebiet für den Einsatz von CAS ist das symbolische Lösen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Das Lösen von Differenzialgleichungen ist in fast allen Gebieten der Naturwissenschaften von grundlegender Bedeutung[109]. Die Kenntnis von analytischen Lösungen in geschlossener Form ist dabei von ganz besonderem Interesse, da sie Einsichten in die Struktur des zugrundeliegenden Problems erlauben, die durch eine numerische Lösung nicht möglich sind. In aller Regel ist die Bestimmung solcher analytischer Verfahren mit großem Rechenaufwand verbunden. Außerdem sind die verwendeten Lösungsverfahren meist nur heuristisch, da der Rechenaufwand für systematische Verfahren noch erheblich größer ist. Ähnlich wie beim Integrieren verwendet man Tabellen von gelösten Beispielen[110] und versucht, sein eigenes Problem auf eines dieser Beispiele zurückzuführen.
CAS bieten einen fundamental neuen Ansatz. Der Rechenaufwand an analytischen Rechnungen spielt nur noch eine untergeordnete Rolle, er wird fehlerfrei am Computer ausgeführt[111]. Durch CAS wird die Arbeit an Differenzialgleichungen revolutioniert. Man muss kein Prophet sein, um vorherzusagen,

[106] Flügge, S.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 4, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin 1964.

[107] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt / Main 1967.

[108] Siehe in der beiliegenden CD-Rom im Programm "**Maplebsp.mws**".

[109] Natürlich insbesondere in der Quantenmechanik, deren Grundgleichung, die SCHRÖDINGER-Gleichung, in konkreten Modellen auf gewöhnliche Differnzialgleichungen führt.

[110] Ein Standardwerk ist die Sammlung von KAMKE:
Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. Stuttgart 1983.

[111] Zwei Beispiele finden sich auf der CD-ROM in der Maple-Datei "**Maplebsp.mws**".

dass in wenigen Jahren Algorithmen für fast alle Klassen von Gleichungen, die von praktischem Interesse sind, entwickelt und implementiert werden[112]. Langwieriges Arbeiten mit Nachschlagwerken wird dann vollständig durch die Arbeit mit dem Computer abgelöst[113].
Das Wort „Algebra" in CAS meint also die algorithmische Behandlung symbolischer algebraischer Ausdrücke, die zur Lösung von algebraischen Aufgabenstellungen notwendig sind. Im Prinzip kann jeder Lösungsansatz, der sich durch einen Algorithmus beschreiben lässt in ein CAS implementiert werden. Ein CAS ist zusätzlich auch noch in der Lage numerisch zu rechnen, wobei die Rechengenauigkeit nur von der Prozessorleistung des Computers abhängig ist.

1.3.2 Merkmale eines modernen CAS

CAS bilden ein Allzweckwerkzeug mit einer hohen Bedienungsfreundlichkeit und Zuverlässigkeit, die darüber hinaus auch sehr preisgünstig sind. Die Programmiersprache, des in dieser Arbeit verwendeten CAS Maple ist sehr einfach, da es sich im Prinzip um die identischen Symbole wie in der Mathematik handelt, die leistungsstarke Studentenversion ist mit einem Preis unter 35 Euro in einer für Schüler und Studenten vetretbaren Kategorie. Die folgenden Merkmale sind kennzeichnend für ein modernes CAS[114]:
1. Symbolisches Rechnen:
Das Hauptmerkmal eines CAS ist die Fähigkeit symbolische Rechenoperationen durchzuführen. Konkret bedeutet dies:
- Termumformung: algbraische wie auch komplexe Umformungen, Vereinfachung von Ausdrücken nach verschiedenen Kriterien, Ausmultiplizieren, Faktorisieren, interaktives Bearbeiten mit der PC-Maus. CAS kennen eine Vielzahl trigonometrischer sowie transzendenter Vereinfachungen.
- Lösen von Gleichungen: Algebraische Gleichungen sowie Gleichungssysteme können, soweit sie lösbar sind, durch CAS bearbeitet werden. Trigonometrische und transzendente Gleichungen sind in speziellen Fällen lösbar, numerische Lösungen sind in jedem Fall erhältlich. Daneben können Tests auf Identität von Ausdrücken durchgeführt werden.

[112]Man muss allerdings im Rahmen der Anwendung von numerischen Lösungen in der Physik stark darauf achten, das infolge der numerischen Routinen nicht grundlegende Erhaltungsssätze (insb. der Energieerhaltungssatz) verletzt werden und das Ergebnis dadurch unbrauchbar wird!

[113]Das CAS Maple, das in dieser Arbeit verwendet wird, kann die folgenden Typen von Differenzialgleichungen symbolisch ohne Schwierigkeiten lösen:
DGL 1. Ordnung: Lineare DGL, exakte DGL, homogene DGL, DGL mit getrennten Variablen, BERNOULLI-DGL, RICCATI-DGL, CLAIRAUT-DGL,
DGL 2. Ordnung: lineare DGL, EULER-DGL, BESSEL-DGL, BERNOULLI-DGL,
DGL höherer Ordnung: lineare DGL mit konstanten Koeffizienten
Lineare DGL-Systeme

[114]Sie wurden übernommen aus dem Artikel von Komma, M: CAS an der Schule, http://www.ikg.rt.bw.schule.de/leucas/cas.htm

- Funktionen: Alle gängigen Funktionen sind vordefiniert, daneben kann der Benutzer eigene Funktionen definieren. Die Berechnung von Funktionswerten, sowie der Umkehrfunktion ist möglich. Es können stückweise definierte Funktionen bearbeitet, sowie Funktionen als Operator mit eigenem Definitionsbereich verwendet werden.
- Infinitesimalrechnung:
• Folgen: Die Bildung von Folgen (auch iterativ sowie rekursiv) ist möglich, daneben ist ein CAS in der Lage Differenzengleichungen zu lösen.
• Reihen: Man kann Reihen entwickeln, sowie Identitäten für endliche Reihen überprüfen.
• Grenzwerte: CAS sind in der Lage Grenzwerte zu bestimmen, dabei ist sogar die Annäherung an einen Punkt (links- bzw. rechtsseitig) kein Problem.
• Differentiation: CAS verfügen über alle Ableitungsregeln (partiell und total).
• Integration: CAS verfügen über alle Integrationsregeln sowie eine umfangreiche Integraltabelle, zusätzlich sind auch uneigentliche Integrale bearbeitbar. Die numerische Integration ist in jedem Fall möglich.
• Differenzialgleichungen: CAS sind in der Lage gewöhnliche sowie lösbare partielle Differenzialgleichungen zu lösen. Dabei ist eine geschlossene sowie in jedem Fall eine numerische Lösung für gewöhnliche Differenzialgleichungen möglich. Sie verfügen zusätzlich über Werkzeuge zur graphischen Darstellung der Lösung (Felder, Phasendiagramme....).
- Geometrie: Die Behandlung von geometrischen Objekten (zwei- wie auch dreidimensional) wie Punkt, Gerade, Ebene, Kugel ist kein Problem. CAS verfügen über die dazu gehörigen Gleichungen, sowie deren graphische Darstellung.
- Vektorrechnung: Alle Vektoroperationen sind möglich.
- Stochastik: Alle wichtigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit allen notwendigen Operationen sind bekannt.

2. Graphik: Parallel zur ursprünglichen Absicht (symbolisches Rechnen), die man mit CAS anstrebte, ist es durch die rasante Entwicklung der Computerhardware möglich geworden, die Fähigkeiten des Computers zur Visualisierung stark voran zu treiben, so dass die graphischen Fähigkeiten eines CAS nun weit über denen eines reinen "Funktionsplotters" liegen.
• 2D: Darstellung von Funktionen und Scharen von Funktionen (farbig und mit einstellbarer Linienart, Beschriftung etc.). Es sind parametrische Plots (algebraische Kurven sowie Phasendiagramme) sowie Plots in verschiedenen Koordinatensystemen möglich. Daneben sind CAS in der Lage implizite Plots sowie die Darstellung von Vektorfeldern auf dem Bildschirm zu zeichnen.
• 3D: Alle Optionen wie oben. Es sind verschiedene Perspektiven und Beleuchtungen von Flächen im Raum, sowie die Darstellung von Gitterlin-

ien, Hidden Lines, gefüllten Flächen, Höhenlinien und Dichteplots möglich.
• Animationen: Sie sind möglich für zwei- wie auch dreidimensionaler Abläufe. Es ist ein schrittweises Abtasten von Kurven- und Flächenscharen sowie ein kontinuierlicher Film und die Abbildung zyklischer Bewegungen möglich.
• Graphische Objekte: Parallel zu den geometrischen Objekten werden in eigenen Bibliotheken Standdardobjekte angeboten, deren eigene Programmierung möglich ist[115].

3. Programmierung: Ein größeres CAS wie Maple bietet alle Möglichkeiten der Programmierung. Der wichtige Unterschied zu herkömmlichen Compiler-Sprachen ist, dass die Befehle in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Eine Art Compilierung ist jedoch auch möglich, indem Befehle eines Arbeitsblattes ausgeführt und das Arbeitsblatt dann in einem systemeigenen Code abgespeichert wird. Nach dem Laden dieser Datei stehen dann sofort die Ergebnisse aller ausgeführten Befehle zur Verfügung.
• Datentypen: Einfache Variablen, Felder, Listen, Mengen und weitere systemeigene Typen.
• Prozeduren: Neben den Funktionen gibt es eine Vielfalt von Möglichkeiten durch Prozeduren mit lokalen und globalen Variablen die Bibliothek des Systems zu erweitern. Eine typischer Vorteil eines CAS gegenüber einer Compilersprache ist an dieser Stelle, dass die Prozeduren interaktiv schrittweise aufgebaut und bearbeitet werden können. Meistens besteht auch die Möglichkeit, die Prozeduren in andere Sprachen übersetzen zu lassen.
• Verzweigungen: Sie gehören zum Standardrepertoire eines CAS.
• Schleifen: Es sind alle typischen Konstruktionen implementiert, dabei sind auch eigene Typen (z.B. Mengen) erlaubt. Ein interaktives Arbeiten, etwa der Abbruch einer Endlosschleife ist möglich.
• Logik: Alle BOOLE-Operatoren sind bekannt, die Definition eigener Operatoren ist möglich und sogar Beweise über die Prädikatenlogik sind vorgesehen[116].

4. Bibliothek: Darunter versteht man die Wissensbasis eines CAS. Die Bibliothek eines Systems enthält alle Konstanten, vordefinierten Variablen und vor allem die Befehle und Algorithmen, die vom Benutzer verwendet werden können. Meistens baut die Sprache eines CAS auf einen Kern auf (der z.B. in C programmiert ist) und es können Programmpakete bei Bedarf

[115] Die Graphik oder allgemeiner die Visualisierung hat sich inzwischen schon fast zum zweiten Standbein der Computeralgebra entwickelt. Sie nimmt eine tragende Rolle bei der Heuristik und experimentellen Mathematik ein, sowohl in der Forschung als auch in der Lehre. Dazu kommen in immer stärkerem Maße die Möglichkeiten von Multimedia, insbesondere Sound und die Verknüpfung zu anderen Anwendungen und Schnittstellen zu Messgeräten.

[116] Die Programmierung ist natürlich die Domäne eines CAS, das von Algorithmen lebt.

hinzugeladen werden. Dazu kommt eine (oft von Benutzern geschriebene) Bibliothek von Anwendungen oder "elektronischen Büchern", die vom Hersteller selbst mit angeboten werden oder im Internet zu erhalten sind - inzwischen auch online direkt aus einer Arbeitssitzung heraus (Client-Server).

5. System: Die größeren CAS sind durchweg befehlsorientiert und die Sprachelemente sind dem Benutzer voll zugänglich (bis hin zur Änderung systemeigener Befehle).

6. Oberfläche / Benutzerschnittstelle: Die meisten CAS arbeiten mit dem sogenannten 'Arbeitsblatt-Konzept' (engl.: Worksheet, Notebook...). Eine einfach zu bedienende Benutzeroberfläche ist eines der wichtigsten Kriterien für den Einsatz von CAS in der Lehre und im Eigenstudium. Dazu gehört eine klare Strukturierung von Input-, Output-, Text– und Graphikregion.
• Input: Hier werden die Befehle eingegeben und können (beliebig oft) ausgeführt und erneut editiert werden.
• Output: In dieser Region antwortet das System in standardisierter mathematischer Notation. In guten Systemen kann der Output als Input weiterverwendet werden - mit Maple ist dies ohne Probleme möglich.
• Text: Meistens werden alle Möglichkeiten der Textverarbeitung geboten. Größere Computeralgebrasysteme werden zu wissenschaftlichen Publikationen genutzt und sind mit Vorlagen für verschiedene Stile ausgestattet.
• Hypertext: Inzwischen können in fast allen Computeralgebrasystemen Bookmarks und Hyperlinks gesetzt werden, sowohl intern (innerhalb eines Arbeitsblattes oder auf ein anderes Arbeitsblatt) als auch extern auf einen URL im WWW. Das ermöglicht im Prinzip die komplette Vernetzung der Bibliotheken.
• Menü: Neben dem üblichen Menü werden die systemspezifischen Aktionen angeboten, etwa einzelne Befehle, Formatierungen oder Optionen.
• Paletten: Sonderzeichen und Buchstaben für den mathematischen Schriftsatz, häufig benötigte Befehle oder Schablonen (z.B. für Matrizen). In einem größeren CAS können die Paletten vom Anwender selbst zusammengestellt werden.
• Kontextmenüs: Oft ist es möglich, Aktionen wie z.B. die Termvereinfachung oder den Plot eines ausgewählten Terms etwa über die rechte Taste der PC-Maus auszulösen, wobei die angebotenen Menüs kontextsensitiv sind und auch vom Benutzer selbst eingerichtet werden können.
• Es haben sich Hilfsbrowser eingebürgert, die in größeren Computeralgebrasystemen schon zu kompletten mathematischen Nachschlagewerken angewachsen sind. Ebenso gehört Volltextsuche und kontextsensitive Hilfe zum Standard. Eigene Hilfeseiten und Beispiele können zur Hilfe hinzugefügt werden. Ein wichtiger Teil der Hilfe sind auch verständliche und detaillierte Fehlermeldungen.

1.3.3 Das Computeralgebrasystem Maple

Der Name Maple ist eine Abkürzung des Begriffs: *mathematical manipulation language* und wurde von der Symbolic Computation Group, Department of Computer Science, University of Waterloo gemeinsam mit der ETH Zürich entwickelt. Maple wurde zunächst kostenlos verteilt und wird seit 1985 kommerziell vertrieben. Die aktuelle Version lautet Maple V Release 8, dieser Arbeit liegt die Version Release 4 zugrunde, da sie in der Studentenversion sehr preisgünstig ist[117]. Maple besitzt eine ganzzahlige Arithmetik und daraus resultierend eine Genauigkeit für numerische Berechnungen bis zu 500000 Stellen, in der Studentenversion allerdings nur bis 100 Stellen. Ein weiterer Schwerpunkt liegt in der Visualisierung von Daten (Funktionen, Punktmengen etc.) bis hin zur Animation. Maple beinhaltet weiter eine Bibliothek mit Prozeduren für diverse mathematische und technische Problemstellungen, die ständig weiter entwickelt wird. Neben Maple gibt es weitere Computeralgebrasysteme, die bekanntesten sind Mathematica, Mathcad Plus, MuPad oder das auch in der Schule auf Taschenrechnern gebräuchliche System Derive.
Maple bildet die Grundlage dieser Arbeit, da es den Anforderungen des Schulunterrichts am nächsten kommt. Maple ist sehr bedienungsfreundlich, es ist für die Schule zwar überdimensioniert, damit aber leistungsstärker als z.B. Derive und nicht so komplex und teuer wie Mathematica, das in erster Linie für Arbeiten in der Forschung konzipiert ist.
Maple wird bereits in ausgewählten Modellschulen in Baden-Würtemberg im Rahmen des „Pilotprojekts Mobiles Klassenzimmer[118]" eingesetzt. Im Rahmen dieses Projekts wurde sogar eine Abiturprüfung mit Maple durchgeführt[119].

1.3.4 Computeralgebra im Mathematikunterricht

In der Bundesrepublik kann man global gesehen einen Anstieg der Nutzung von CAS in den Schulen sowie den Universitäten erkennen. In weit mehr als

[117] Sie kostet etwa 40 Euro, während die Studentenversion der Ausgabe Release 5 rund 35 Euro teurer ist. Durch den günstigen Preis war es möglich alle Studierenden mit der Studenten-Version Release 4 auszustatten, so dass neben der Arbeit im PC-Labor der Universität auch die häusliche Arbeit mit Maple gewährleistet ist.

[118] Unter der Addresse http://www.ikg.rt.bw.schule.de/maple.html findet man die Hompage dieses Projekts. Dort findet man auch eine beeindruckende Sammlung von Maple-Programmen, die Schüler im Rahmen des Projekts "Ein elektronisches Schulbuch" entworfen haben. Daneben werden auch beeindruckende Animationen aus vielen Bereichen der Physik, unter anderem auch aus der Quantenphysik gezeigt.

[119] Ermert, M.: "Laptop zum Spicken. Ertsmals durften Schüler beim Abitur Computer benutzen" in DIE ZEIT, 1999, Nr.19.

der Hälfte der Bundesländer[120] darunter auch NRW[121] sind CAS erlaubt. Der Einzug von Graphikrechnern (GTR) und Taschencomputern (TC) in den Schulunterricht ist in den einzelnen Bundesländern unterschiedlich realisiert worden. In NRW und einigen weiteren Bundesländern[122] sind Schulversuche durchgeführt worden, andererseits gab und gibt es im ganzen Bundesgebiet lokale Versuche von engagierten Lehrern CAS als Werkzeug in den Unterricht einzuführen.
Insbesondere in Niedersachsen sind die Voraussetzungen für den Einsatz von CAS in den Schulen günstig, denn es gibt keinen offiziellen Taschenrechnererlass mehr, die Schulen haben eigenständig die Möglichkeit über denn Einsatz der Hard- und Software zu entscheiden. In den neu entwickelten Rahmenrichtlinien für die Sek. I/II wird davon ausgegangen, dass in der Sek. I alle Schülerinnen und Schüler einen graphikfähigen Taschenrechner besitzen und in den Schulen Zugang zu weiterer Software haben. In der Sek. II wird darüber hinaus der Einsatz von CAS als ein neues Werkzeug vorgesehen. In den neuen Einheitlichen Prüfungsanforderungen im Abitur sind alle Hard- und Software zugelassen, wenn der Gleichheitsgrundsatz gewährleistet ist. Durch die Empfehlung der Mathematikkommission für einen zukünftigen Mathematikunterricht am Gymnasium wird der Einsatz von Hard- und Software entsprechend unterstützt. Im Sommer 1999 wurde vom Kultusministerium in einem Erlass darüber hinaus der Einsatz von GTR und Taschencomputern mit CAS in den entsprechenden Schulstufen gefordert. Aufgrund der Erlasslage können die Schulen auf der Basis von Rahmenrichtlinien und Einheitlichen Prüfungsanforderungen im Abitur individuell den Einsatz von Hard- und Software planen und durchführen. Es wurde weiter beschlossen, alle Mathematiklehrer an Gymnasien verbindlich in den nächsten Jahren im Sinne der Mathematikempfehlungen fortzubilden. Themenschwerpunkte werden dabei der Einsatz und Einfluss von GTR und CAS im Unterricht sein.
Die im folgenden beschriebenen Erfahrungen[123] aus einem Schulversuch in Niedersachsen decken sich in ihren Ergebnissen weitgehend mit den Erfahrungen des schon beschriebenen Pilotprojekts "Mobiles Klassenzimmer" aus Baden-Würtemberg sowie Untersuchungen zum Einfluss des TI 92 im

[120] Niedersachsen, Schleswig-Holstein, Rheinland-Pfalz, Nordrhein-Westfalen, Hessen, Hamburg, Bremen, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen-Anhalt, Thüringen (jeweils nicht in Prüfungen), Baden-Würtemberg (mit Einschränkung auf Schulversuche). Quelle: http//www.uni-karlsruhe.de/~CAIS/CAR/CAR25/
node11.html

[121] Nähere Informationen zur Nutzung von CAS in einzelnen Modellschulen in NRW findet man unter http://www.learn-line.nrw.de.

[122] Nordrhein-Westfalen [3], Baden-Würtemberg [4], Niedersachsen [1] und Sachsen [4].

[123] Schwardmann, U.: CAS in der Schule, Erfahrungen in Deutschland http://www.uni-karlsruhe.de/~CAIS/CAR/CAR25/
node11.html

Mathematikunterricht in Österreich[124]:
1. Beim Einsatz von CAS werden auf der einen Seite mathematische Verständnisdefizite klarer aufgezeigt, da die Schülerinnen und Schüler sich durch die Entlastung bei Termumformungen nicht mehr hinter der schematischen Anwendung des Kalküls verstecken können. Andererseits können durch den Einsatz von CAS Mängel in der Kalkülkompetenz (Lösen von Gleichungen, korrektes Differenzieren und Integrieren) ausgeglichen werden, so dass diese nicht mehr vom Auffinden der Problemlösung ablenken.
Leistungsstarken Schülern eröffnen sich durch das neue Werkzeug neue Perspektiven, die sie zu kreativem Umgang mit Mathematik anregen können[125]. Sowohl leistungsstarke als auch leistungsschwache Schüler können dadurch vom Einsatz des Rechners profitieren. Bei schwächeren Schülern mit bisher befriedigenden Leistungen wird durch den Einsatz des Rechners die Tendenz ihrer Leistungsfähigkeit deutlicher: diejenigen, die gute Ideen aber Schwächen in der Umsetzung haben, werden durch das Werkzeug entlastet und können ihre Lösungsideen eher umsetzen; diejenigen, deren Leistung sich primär auf sicheren Umgang mit dem Kalkül stützt, werden durch die veränderten Anforderungen im Unterricht und den Klausuren diese Leistungsstärke nicht mehr so zur Geltung bringen können.
2. Durch verstärkten Einsatz des Rechners wird ohne entsprechende Gegensteuerung die Kalkülkompetenz der Schüler geringer[126]. Andererseits kann gerade der Rechner dazu anregen, der äußeren Form nach unterschiedliche Terme mit klassischen Mitteln auf Gleichheit zu überprüfen. Die geringere Kalkülkompetenz wirkt sich aber nach den bisherigen Beobachtungen nicht auf die Fähigkeit aus, inner- und außermathematische Probleme unter Einsatz des Rechners zu lösen. Die Lösungswege sind im Gegenteil häufig kreativer, da die Besorgnis der nicht erfolgreichen Bearbeitung des algebraischen Problems gering ist. Es bleibst abzuwarten, wie sich die Forderungen an die Kalkülkompetenz durch verstärkten Einsatz von CAS in allen Lebensbereichen (vergleichbar mit dem Taschenrechner) langfristig verändern werden.
3. Durch den Einsatz des Rechners wird das Gespräch über Mathematik deutlich befruchtet. Unterschiedliche Ansätze und Lösungsstrategien, deren Vergleich nicht mehr durch fehlerhafte Termumformungen „belastet" ist, fordern zu Fragen und Diskussionen heraus, die weit über das übliche hinausgehen. Es ist jetzt weniger das „wie" sondern eher das „warum" Zentrum

[124] Heugl, H., Klinger, W., Lechner, J.: Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen, Addison-Wesley, 1996.

[125] Man sollte unbedingt einen Blick auf die Homepage des Pilotprojekts "Mobiles Klassenzimmer" werfen und die riesige Zahl von Maple-Programmen betrachten, die von Schülern für Schüler aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik enworfen wurden.

[126] Hier die liegt die entscheidende Gefahr der Nutzung von CAS! Sie kann dazu führen, das Schüler sämtliche Rechenoperationen nur noch durch die "black box" des Rechners erledigen lassen und so schleichend immer schlechtere mathematische Fähigkeiten ausbilden! Mathematische Phantasie ist ohne Kalkülkompetenz nicht denkbar.

der gemeinsamen Betrachtung eines Lösungsweges.
4. Im Rahmen der Untersuchung war insbesondere in Lerngruppen, in denen CAS langfristig eingesetzt wurde, zu beobachten, dass sich die Unterrichtsinhalte nicht mehr so stark am Kalkül orientierten. Innermathematische Fragestellungen konnten vielschichtiger untersucht werden (Interpolation und Extrapolation, vielschichtige Anwendung der Integralrechnung, numerische Verfahren etc.), außermathematische Anwendungen waren durch den Einsatz von CAS überhaupt erst sinnvoll geschlossen zu bearbeiten. Reales Datenmaterial musste nicht erst manipuliert werden, sondern konnte in der vorgelegten Form weiterverarbeitet werden. Dadurch konnten reale Problemstellungen mit mathematischen Modellen sinnvoll behandelt werden. CAS bieten die Möglichkeit, Probleme auf unterschiedlichen Betrachtungsebenen (graphisch, tabellarisch, algebraisch) zu bearbeiten und sich die entstehenden Sachverhalte zu veranschaulichen. Diese neue Qualität des Mathematikunterrichts, problemlos auf unterschiedlichen Ebenen zu arbeiten, bietet Schülern die Chance, ihre individuellen Lösungsstrategien umzusetzen. Die Abgrenzungen der Ebenen einerseits und ihre Verknüpfungen andererseits werden durch ein derartiges Werkzeug initiiert.
5. Aufgrund der Vielzahl von Variationsmöglichkeiten kommen die Schüler selbstständig zu neuen Fragestellungen, erhalten eine Fülle von Anschauungsmaterial, wodurch sich die Durchdringung des Stoffes vertiefen kann.
6. Bei schriftlichen Lernzielkontrollen konnte festgestellt werden, dass sich nach entsprechenden Anlaufschwierigkeiten keine wesentlich neuen Probleme ergaben. Es konnte beobachtet werden, dass mit zunehmender Veränderung des Unterrichts in Hinsicht auf den Umfang des Rechnereinsatzes auch die Klausuren so gestaltet wurden, dass die Benutzung des Rechners nur nebensächlich wurde. Statt der klassischen Anfertigung einer Zeichnung oder Skizze, die bei Einsatz des integrierten Funktionsplotters nur noch sehr eingeschränkt Sinn macht, wurden z.B. Zeichnungen vorgegeben, die entsprechend weiter zu untersuchen bzw. zu interpretieren waren. Bei Funktionsbetrachtungen z.B. wurde eine breite Untersuchung zugunsten einer starken Fokussierung auf Einzelaspekte mit anschließender Variation verworfen. Die klassische Kurvendiskussion verliert ihren Stellenwert, dennoch bleiben einzelne Aspekte erhalten und gewinnen im anderen Kontext neue Bedeutung[127].
Beklagt wird jedoch nach wie vor[128], dass die Ausbildung der Lehramtsstudierenden im Bereich CAS noch nicht genügend vorangetrieben wurde und im Augenblick eher stagniert. Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Vorlesungen sind Pflichtvorlesungen für Studierende der Sekundarstufe I,

[127] An dieser Stelle sei auf die Aufgabenbeispiele verwiesen, die man z.B. über http://www.learnline.de herunterladen kann.
[128] Siehe den Bericht der 2. Thurnau-Tagung: Computeralgebra in Lehre, Aus- und Weiterbildung, http://www.uni-karlsruhe.de/~CAIS/CAR/CAR27 /node4.html

die aber auch für die Studierenden der Sekundarstufe II Teil ihrer Didaktik-Ausbildung sind. Mit dieser Arbeit wird also der Forderung nach einer verstärkten Ausbildung der Lehramtsstudierenden im Umgang mit CAS an der Universität Siegen Rechnung getragen.

1.3.5 Begründungen des Siegener Konzepts zur Quantenphysik

Die Neufassung der Studienordnung[129] für den Studiengang Physik mit dem Abschluss Erste Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I vom 11.12.1998 sieht als ein Ziel dieses Studienganges vor, "....einen soliden Überblick über die makroskopische und mikroskopische Physik sowie gründliche Kenntnisse und Fähigkeiten in der experimentellen und theoretischen Erfassung physikalischer Zusammenhänge zu vermitteln"[130], dabei dienen die fachphysikalischen Vorlesungen[131] "...der Vermittlung von wissenschaftlichem Grund- und Spezialwissen und von methodischen Kenntnissen durch zusammenhängende Darstellung größerer Sachgebiete", sie sollen Wege eröffnen "zu Erweiterung und Vertiefung der Kenntnisse im Selbststudium". Die Studierenden sollen dazu einen sechsemestrigen Kurs absolvieren, der sie in die Gebiete der klassischen Mechanik und Elektrodynamik (Physik I und II) sowie der klassischen Thermodynamik (Physik III) im Grundstudium einführen soll. Im Hauptstudium sollen dann Gebiete der modernen Physik (Quantenphysik, Kern- und Elementarteilchenphysik) behandelt werden. Die Studienordnung sieht dabei ausdrücklich eine Einführung in die Behandlung theoretischer Methoden im Rahmen der Behandlung dieser Gebiete vor. Daneben ist die Einübung neuer didaktischer Möglichkeiten der Neuen Medien ein weiteres Ziel der Lehrerbildung an der Universität Siegen.
Ausgangspunkt der Entwicklung des Siegener Konzepts war somit die Vorgabe der Behandlung moderner Gebiete der Physik unter angemessener Beachtung theoretischer und neuer didaktischer Methoden. Da die mathematischen Kenntnisse der Studierenden sich dabei nur auf dem Niveau eines Leistungskurses bewegen, steht man vor dem didaktischen Problem einer angemessenen, aber richtigen Darstellung der Ergebnisse moderner Physik bei nur relativ geringem mathematischen Grundlagenwissen der Studierenden. Der Einsatz eines CAS ermöglicht es, dieses Problem zu lösen, da in vielen Bereichen das CAS als "black-box" genutzt werden kann, um z.B. Lösungen von Differenzialgleichungen zu berechnen. In diesem Fall steht nicht mehr die Lösung einer Differenzialgleichung im Mittelpunkt einer Vorlesung[132], sondern deren Ableitung aus der Problemstellung sowie die Inter-

[129] Aufgrund des § 2 Abs.4 und § 85 Abs.1 des Gesetzes über die Universitäten des Landes Nordrhein-Westfalen in der Fassung vom 03.08.1993 (GV.NW.S.532), zuletzt geändert durch Gesetz vom 01.07.1997 (GV.NW.S. 213) hat die Universität Siegen diese neue Studienordnung erlassen. Siehe Amtliche Mitteilungen Nr. 6/1999, der Universität Siegen.
[130] Amtliche Mitteilungen Nr. 6/1999, S.4
[131] Amtliche Mitteilungen Nr. 6/1999, S.5
[132] Im Falle der kompletten Lösung der nichtrelativistischen Schrödingergleichung für das H-Atom kann sich deren Lösung über mehrere Stunden hinziehen.

pretation ihrer Ergebnisse[133]. Durch die relativ einfache Programmierung eines CAS wie Maple sind die Studierenden relativ schnell in der Lage selbstständig Problemstellungen zu bearbeiten oder die in der Vorlesung dargestellten Programmergebnisse abzuändern und auf andere Fragestellungen anzuwenden. Durch die Darstellung von Animationen ist es möglich zeitliche Abläufe sichtbar zu machen und z.B. die Formeln des quantenmechanischen Tunneleffekts direkt im Rechner zu verarbeiten und sichtbar zu machen[134]. Daneben ist man mit solchen Animationen in der Lage den Übergang von der Quantenphysik in die klassische Physik zu verdeutlichen, wie dies im z.B. im Rahmen der Behandlung des harmonschen Oszillators[135] geschieht.
Das Wechselspiel zwischen Hypothese und Experiment kann mit Hilfe eines CAS immer wieder dargestellt werden. So können z.B. mathematische Modelle berechnet werden, die die Ablösung einer elektromagnetischen Welle von einem schwingenden Dipol verdeutlichen[136] oder die Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluss einer elektromagnetischen Welle[137] zeigen. Auf diese Weise kann theoretisch das Prinzip eines Empfängers dargestellt werden, der ja dann auch durch die HERTZ-Versuche experimentell nachgebildet wurde. Auf die Möglichkeit die Unzulänglichkeit des RUTHERFORD-Atommodells wurde in diesem Zusammenhang schon eingegangen. Es lassen sich eine Vielzahl von theoretischen Ergebnissen darstellen, die dann im Zusammenhang mit ihrer experimentellen Bestätigung zum Verständnis des Formalismus der Quantenphysik beitragen.
Im Rahmen des Siegener Konzepts, eines auf der Anwendung von Maple basierenden sechsemestrigen Kurses zur Physik, werden seit dem Sommersemester 2000 Vorlesungen diesen Typs angeboten. Da eine relativ große Gruppe Studierender zu diesem Zeitpunkt das Hauptstudium nach dem dritten Semester begann, wurden zuerst zwei Vorlesungen zur Quantenphysik, eine einführende und eine vertiefende[138] zur Quantenmechanik im darauffolgenden Wintersemster angeboten. Beide Vorlesungen werden in dieser Arbeit vorgestellt und in ihrem didaktischen Aufbau begründet. Geplant

[133] Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass diese Aussage nur für Studierende des Lehramnts Sek. I und für Schüler der Sek. II gilt. Natürlich ist die Besprechung mathematischer Verfahren zur analytischen Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen sonst von großer Wichtigkeit.

[134] Siehe das beiliegende Maple-Programm "QMVorl7Pr1.mws, sowie Winnenburg, W. und Geppert, J.: Maple, ein Weg in die Quantenphysik, Vortrag bei dpg-Tagung in Bremen im März 2001.

[135] Siehe das Maple-Programm "QMVorl12Pr1.mws" sowie Geppert, J. u. Winnenburg, W.: Der quantenmechanische harmonische Oszillator, Vortrag auf der GDCP-Tagung, Dortmund, September 2001.

[136] Siehe die beiliegenden Programme zur Quantenphysik-Vorlesung Nr.8.

[137] Siehe die beiliegenden Programme QPVorl10Pr1.mws und QPVorl10Pr2.mws, die zur Quantenphysik-Vorlesung Nr. 10 gehören.

[138] Die Studienordnung schreibt das vertiefte Studium eines Teilgebietes vor. In Siegen ist dieses Gebiet i.A. die Quantenphysik.

ist allerdings vom Wintersemester 2001/2002 mit einer Mechanik-Vorlesung zu beginnen, um die Anwendung von Maple bereits ab dem ersten Semester anzubieten. Der Einstieg in die Benutzung von Maple kann aber auch später beginnen, wie in der Darstellung dieser Arbeit zu sehen ist.
Da die Versuch Quantenphysik mit Hilfe eines CAS darzustellen das Zentrum dieser Arbeit und des Siegener Konzepts ist, werden Demonstrationsversuche nur am Rande erwähnt. Die Studierenden führen während ihrer praktischen Ausbildung aber die wichtigsten, an der Universität zur Verfügung stehenden Experimente zur Quantenphysik durch. Es hat sich im Lauf der Vorlesungen als sinnvoll erwiesen, den Studierenden ein ausführliches Skript zu den einzelnen Vorlesungen anzubieten, die sich direkt auf die Maple-Programme beziehen und ihre Ergebnisse einbinden. Dieses Skript ist gemeinsam mit dem Maple-Programmen zum Selbststudium geeignet, die Programme können aber auch eigenständig ohne Skript verwendet werden, da sie mit erklärenden Texten versehen sind. Alle Programme wurden während der Vorlesungen am Bildschirm gezeigt und parallel verändert, um ähnliche Probleme zu bearbeiten. Die Programme wurden den Studierenden anschließend per e-mail zugesandt. In begleitenden Praktika im Computerlabor wurden von den Studierenden selbstständig Programme geschrieben und Übungen bearbeitet.
In den beiden folgenden Kapitel werden nun die beiden Vorlesungen des Siegener Konzepts zur Quantenphysik in ihrem didaktischem Aufbau und ihrer Zielsetzung begründet.

Chapter 2

Einführung in die Quantenphysik

2.1 Allgemeine Ziele der Vorlesung

Der Kurs zur *Einführung in die Quantenphysik* besteht aus 18 Vorlesungen und ist damit in seinem Stoffumfang auf einen Kurs im Sommer- wie auch im Wintersemester zugeschnitten. Zu jeder Vorlesung existiert ein eigenes Skript unterschiedlicher Länge, wobei der Stoffumfang einer Vorlesung sich nach den in dieser Vorlesung behandelten Maple-Programmen richtet. So sind für einzelne relativ kurze Vorlesungen längere Maple-Programme entwickelt worden, die überdies noch während der Vorlesung abgeändert wurden, so dass der reine im Skript aufgeführte Vorlesungsstoff etwas kürzer dargestellt wurde. Nicht zu allen Themen erschien es sinnvoll Maple-Programme zu entwickeln, die zu diesen vereinzelten Vorlesungen entstandenen Skripte sind dann etwas länger konzipiert. Die einzelnen Skripte sind so angelegt, dass sie parallel zu den angegebenen Maple-Programmen verwendet werden können. Sie benutzen und erläutern Ergebnisse, die am Computer errechnet und graphisch dargestellt werden. Aus diesem Grund wurden viele in den einzelnen Programmen entwickelte Graphiken in die Skripte eingebunden, um damit den Zusammenhang zwischen Skript und Programm zu verdeutlichen.
Das zentrale Ziel des Kurses zur *Einführung in die Quantenphysik* ist eine Plausibilitätsbetrachtung der nichtrelativistischen SCHRÖDINGER-Gleichung. Sie besitzt zwar axiomatischen Charakter und kann somit ähnlich wie die NEWTON-Bewegungsgleichung nicht aus allgemeinen Prinzipien hergeleitet werden. Dennoch ist es möglich sie aus vergleichenden Betrachtungen aus den MAXWELL-Gleichungen plausibel zu machen[1]. Mit einer stichhaltigen Begründung der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung verfügen die Studierenden dann über ein mathematisches

[1] Siehe Skript zur 19. Vorlesung *Einführung in die Quantenphysik*.

Axiom, dessen Ergebnisse wiederum auf Phänomene in der Natur angewendet werden kann, um die Plausibilität zu erhöhen. So beginnt der zweite Teil zur Quantenphysik, ein Kurs über Quantenmechanik, direkt mit der SCHRÖDINGER-Gleichung und wendet sie auf verschiedene Potenzialmodelle an. Beide Kursentwürfe sollen die Möglichkeiten der Verwendung von Computeralgebrasystemen demonstrieren und orientieren sich aus diesem Grund stark an mathematischen Konzepten. Maple wird in erster Linie zur graphischen Veranschaulichung und Animation mathematischer Ergebnisse verwendet, daneben kommt es aber auch bei konkreten Termumformungen zum Einsatz[2]. Auf diese Weise wird angestrebt, den Studierenden den "Respekt" vor mathematischen Entwicklungen zu nehmen und abstrakte Ergebnisse
zu verdeutlichen, ohne sie zu elementarisieren. So wird z.B. durch die Animation zeitlich veränderlicher räumlicher Vektorfelder verständlich, was unter dem Prozess der Ablösung einer elektromagnetischen Welle gemeint ist. Ein entscheidender Vorteil gegenüber vielen anderen Computerprogrammen ist es, dass dieselben mathemtischen Symbole, die im Skript oder an der Tafel stehen, im Prinzip auch so in ein CAS eingegeben werden. Es tritt dann der Lerneffekt ein, dass ein abstrakter mathematischer Ausdruck direkt eingegeben wird und dann zu einer relativ anschaulichen graphischen Darstellung führt. Durch die Transformation der abstrakten Symbolik eines mathematischen Ausdrucks in eine graphische Darstellung oder Animation verliert die Mathematik ihre Abstraktion und wird als weniger abschreckend angesehen[3].

[2] So werden in verschiedenen Fällen mit Maple Separationsansätze für partielle Differenzialgleichungen durchgeführt.

[3] Es gehört zu den Zielen eines Quantenphysik-Kurses Studierenden und gerade Lehramtsstudierenden deutlich zu machen, dass eine mathematische Darstellung prinzipiell weiter geht, als die menschliche Vorstellungskraft. Eine zenrale Erfahrung im Laufe der Vorlesung war, dass die Studierenden diesen Sachverhalt akzeptierten und begannen die graphischen Darstellungen als Vorstellungen zu übernehmen. So stellten sich z.B. die Studierenden nach dem Kursteil über elektromagnetische Wellen diese nicht mehr als Wellen analog zu Wasserwellen vor, sondern als Pfeile mit zeitlich veränderlicher Länge und Richtung im Raum. Es gelingt also durch Anwendung von CAS mathematische Ergebnisse als Vorstellungen im Gehirn quasi zu implementieren.

2.2 Strukturierung

Die Vorlesung ist so aufgebaut, dass die einzelnen Teile in linearer Form auf einander aufbauen.
Die folgende Graphik zeigt einen Verlaufsplan:

Gliederung ***Einführung in die Quantenphysik***

I. Untersuchung der Maxwell –Gleichungen

1. Wiederholung von mathematischen u. elektrodynamischen Grundbegriffen I
2. Wiederholung von mathematischen u. elektrodynamischen Grundbegriffen II
3. Das Gesetz der Ladungserhaltung, Induktionsgesetz
4. Das Gesetz von Ampere und die Ergänzung Maxwells
5. Die Maxwell –Gleichungen im Vakuum
6. Betrachtung der zweidimensionalen Maxwell –Gleichung im Vakuum, Polarisation und Wellenpakete
7. Die homogene Wellengleichung in Kugelkoordinaten

II. Entstehung elektromagnetischer Wellen

8. Der schwingende Dipol
9. Experimentelle Erzeugung und Messung elektromagnetischer Wellen
10. Beschleunigte Punktladung, Lienard –Wiechert –Potenzial

III. Der klassischen Physik widersprechende Ergebnisse

11. Mathematische Modelle: Elektron auf einer Kreisbahn, Zwei –Körper –Problem
12. Die Abrahams –Lorentz –Gleichung
13. Stehende mechanische und elektromagnetische Wellen
14. Der lichtelektrische Effekt und die Unmöglichkeit seiner klassischen Beschreibung
15. Der Compton –Effekt

IV. Der Teilchenaspekt der Materie

16. Die Teilbarkeit der Materie, Millikan –Versuch und das Punktmodell des Elektrons

V. Der Wellenaspekt der Materie

17. Die de Broglie –Wellentheorie

VI. Zusammenführung beider Standpunkte

18. Deutung der Welleneigenschaften des Elektrons, Plausibilitätsbetrachtung der Schrödinger –Gleichung

Figure 2.1: Gliederung der Vorlesung: E*inführung in die Quantenphysik*

2.3 Didaktische Begründungen

Wie bereits beschrieben, ist eine Plausibilitätsbetrachtung der nichtrelativistischen SCHRÖDINGER-Gleichung das grundlegende Ziel dieses Kurses zur Einführung in die Quantenphysik. Ein wichtiges Zwischenziel ist dabei die Eleganz der MAXWELL-Theorie herauszustreichen, den Studierenden soll ein Verständnis dafür vermittelt werden, dass Physiker wie W.THOMSON von einem nur durch zwei kleine Wolken getrübten strahlend blauen Himmel der Physik sprachen[4]. Es soll durch den Aufbau des Kurses den Studierenden ein Gefühl vermitteln, welcher Triumph der klassischen Physik es bedeutete, dass die theoretische Vorhersage elektromagnetischer Wellen aus der MAXWELL-Theorie und ihr experimenteller Nachweis gelang. Es soll klar werden, dass viele Physiker damals der Meinung waren, die Hauptaufgabe der kommenden Physikergeneration bestehe nur noch darin, "an bekannte Ergebnisse noch weitere Dezimalen anzuhängen".
Dieses Ziel wird in der ersten Hälfte des Kurses bis zur 15. Vorlesung verfolgt.

2.3.1 Untersuchung der MAXWELL-Gleichungen

Vorlesung 1: Wiederholung von mathematischen und elektrodynamischen Grundbegriffen I

Der Kurs beginnt mit einer Wiederholung mathematischer sowie elektrodynamischer Grundkenntnisse. Die Studierenden haben im zweiten Semester eine Vorlesung zur Einführung in die Elektrodynamik gehört und verfügen bereits über die wichtigsten Grundbegriffe der Elektrodynamik. Dennoch ist der Kurs auch auf einen Beginn mit sehr geringen Kenntnissen der Elektrodynamik möglich und die Arbeit mit Maple erleichtert hier den Einstieg erheblich. Zu jeder Vorlesung dieses Kursabschnitts existieren Maple-Programme. Die Bezeichnung der Programme ist am Vorlesungsskript orientiert und nicht am jeweiligen Inhalt, so bedeutet eine Bezeichnung wie "QPVorl1Pr1.mws": das erste (Pr.1) **M**aple-**w**ork**s**heet zur **Vorl**esung Nr. 1 zum Kurs **Q**uanten**p**hysik. Der Inhalt der Programme wird in jedem Skript zu Beginn kurz erläutert, um den Bezug zur Vorlesung herzustellen. Der Kurs beginnt mit einer Wiederholung mathematischer Grundbegriffe (Koordinatensysteme, Vektorbegriff, Flächen- u. Volumenintegral) sowie des Feldbegriffes und seiner Verankerung im Experiment. Im ersten der beiden beigefügten Maple-Programme werden Beispiele für zwei- und dreidimensionale Vektorfelder gezeigt und man kann selbstständig neue Vektorfelder programmieren. Daneben wird das elektrische Potenzial einge-

[4]Die eine "Wolke" war die Nichtnachweisbarkeit des Äthers, daraus sollte sich die EINSTEIN-Relativitätstheorie entwickeln. Das andere, als eher unbedeutend angesehene Problem, war die theoretische Beschreibung der Intensitätsverteilung des schwarzen Hohlraums. Hieraus sollte sich die Quantenphysik entwickeln.

führt und über Maple-Graphiken im zweiten Programm an Mono-, Di- und Quadrupol verdeutlicht.

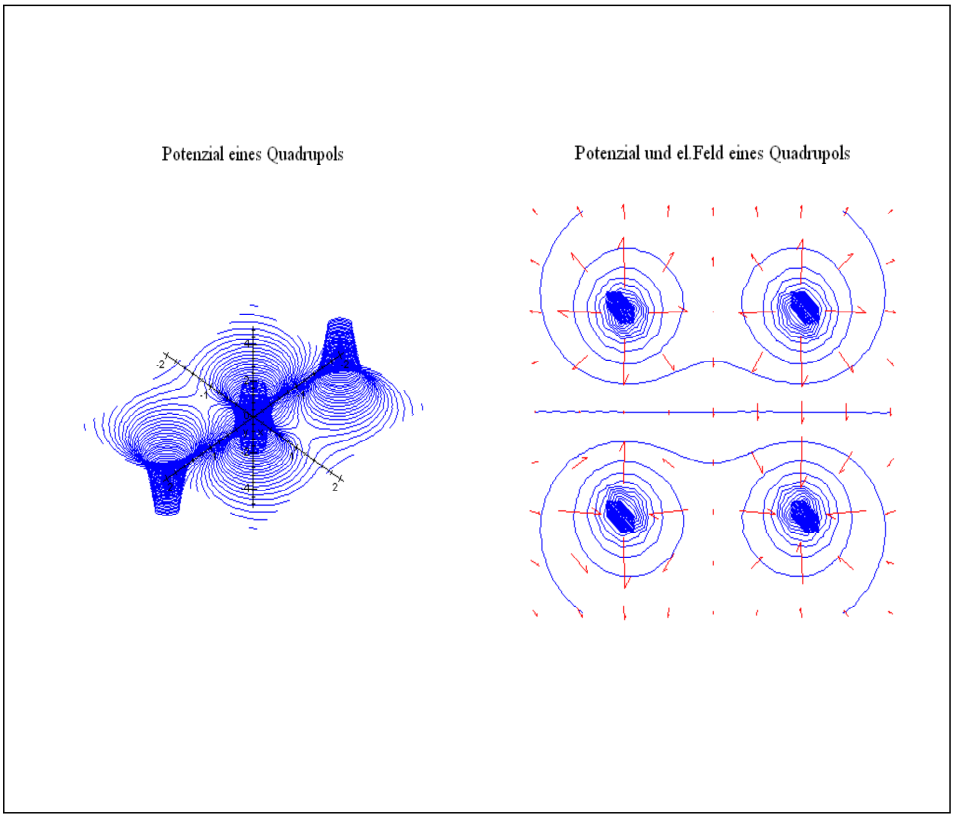

Figure 2.2: Darstellung der Potenziallinien und des elektrischen Feldes eines Quadrupols.

Vorlesung 2: Wiederholung von mathematischen und elektrodynamischen Grundbegriffen II

Die zweite Vorlesung setzt die begonnene Wiederholung bzw. Einführung mathematischer und elektrodynamischer Grundbegriffe fort. So werden neben dem Gradienten einer skalaren Funktion, die Divergenz sowie die Rotation eines Vektorfeldes[5] vorgestellt. Erstes zentrales mathematisches Ergebnis ist der Integralsatz von GAUSS, der anhand von Graphiken einge-

[5]Diese Operationen lassen sich alle mit Maple durchführen. Im ersten Programm zur Vorlesung werden Graphiken zu allen Operationen gezeigt und so ihre Bedeutung verständlich zu machen.

führt und dann auf die Situation des Gesamtflusses eines elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche angewendet wird. Für zwei leicht lösbare Fälle wird der Integralsatz auch mathematisch vollständig durchgerechnet. Als weitere elektrodynamische Grundbegriffe werden die el. Stromdichte, sowie das B-Feld und seine Kraftwirkung auf bewegte elektrische Ladungen diskutiert. Als weitere Anwendung von Maple werden in diesemZusammenhang numerische Bahnen geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern berechnet. Dabei wird insbesondere darauf geachtet, dass die betrachteten Zeitintervalle nicht zu groß werden, um der Größe numerischer Fehler Rechnung zu tragen. Es wird ebenfalls demonstriert, wie man ein geladenes Teilchen durch ein konstantes B-Feld auf eine Kreisbahn zwingen kann. Die Situation eines konstanten E- und B-Feldes kann geschlossen analytisch berechnet werden. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für ein E-Feld mit konstanter y- und z-Koordinate, die x-Koordinate verschwindet, das B-Feld zeigt in z-Richtung:

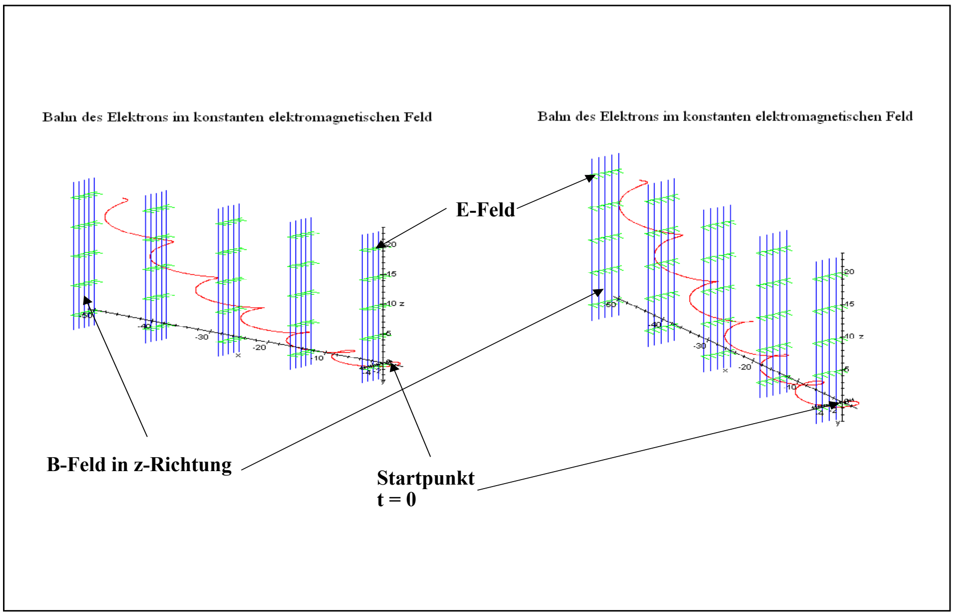

Figure 2.3: Bahn eines Elektrons im konstanten elektromagnetischen Feld. Die Achseneinheit ist m.

Vorlesung 3: Das Gesetz von der Ladungserhaltung sowie das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz von FARADAY steht im Mittelpunkt der dritten Vorlesung, daneben wird noch das Gesetz der Ladungserhaltung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}\,(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(\mathbf{r}, t) \tag{2.1}$$

mit j der el. Strom- und ρ der Ladungsdichte, eingeführt. Der Integralsatz von STOKES wird über eine Graphik in seiner Bedeutung veranschaulicht, um so die differenzielle Form des Induktionsgesetzes zu erhalten. Das dazugehörende Maple-Programm zeigt eine Animation zum Induktionsgesetz, die differenzielle Form

$$\nabla \times \mathbf{E}\,(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\,(\mathbf{r}, t) \tag{2.2}$$

wird für zwei Spezielfälle[6] gelöst und die beiden zeitabhängigen Felder in einer gemeinsamen Animation dargestellt. Sinn dieses Programms ist es, einen Eindruck zeitlich veränderlicher Felder zu vermitteln. Den Studierenden wird damit ein erster, mathematisch korrekter Eindruck dafür vermittelt, wie sich beide Felder beeinflussen[7]. Das Ziel ist eine Transformation der Vorstellung elektromagnetischer Wellen. Animierte Vektorfelder auf dem PC-Bildschirm führen später zu einer Wellenvorstellung, die sich nicht mehr an Wasserwellen orientiert[8], sondern an der mathematisch korrekten Darstellung[9]. FEYNMAN[10] schreibt in diesem Zusammenhang: "Wir sind leider auf Abstraktionen angewiesen, auf Instrumente, mit denen wir das elektromagnetische Feld beschreiben, usw. Trotzdem sind die Felder in gewissem Sinn wirklich,...., denn wir können immer noch erreichen, dass diese Instrumente die Signale vom Raumschiff Mariner II ermitteln und uns über Galaxien in einer Entfernung von Milliarden von Kilometern unterrichten." Die Physik erlaubt laut FEYNMAN nur Vorstellungen, die "mit allem anderen konsistent sein müssen, was bereits bekannt ist" und daher ist es eminent wichtig gerade bei zukünftigen Lehrern die "erlaubten" Vorstellungen zu erzeugen. Animationen, die mit Maple leicht programmiert

[6] Im ersten Fall das induzierte E-Feld eines in einer festen Richtung periodisch schwankenden B-Feldes. Im zweiten Fall wird ein periodisch schwankender el. Strom in einem unendlich langen Draht untersucht.

[7] Dies ist die eine Seite der Begründung, wie sich elektromagnetische Felder durch den Raum fortpflanzen.

[8] Mit dieser falschen Vorstellung verbindet sich dann immer die Frage nach dem wellentragenden Medium. Es hat sich im Verlauf der Vorlesung gezeigt, dass eine Transformation der Vorstellung einer elektromagnetischen Welle weg von der Wasserwellenvorstellung hin zu einem Bild solcher zeitlich veränderbarer Vektorfelder gelingt.

[9] Die Animationen zeigen die Felder in der Darstellung, dass der Beobachter relativ zu ihnen ruht.

[10] Feyman, R.: Vorlesungen über Physik, Bd.2, Verlag Oldenbourg 1991, S.383.

werden können, haben sich dazu als probates Mittel erwiesen, falsche, aus dem Alltag stammende Vorstellungen und Misskonzepte in den Köpfen der Studierenden zu verändern.

Vorlesung 4: Das Gesetz von AMPÈRE und die Ergänzung MAXWELLs

Das AMPÈRE-Gesetz:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}\left(\mathbf{r}'\right) \cdot \mathbf{dr}' = \mu_0 \iint_A \mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right) \cdot \mathbf{dA}' \tag{2.3}$$

wird experimentell begründet und an einem bereits bekannten Beispiel[11] getestet und das Ergebnis wird mit Maple dargestellt. Die Notwendigkeit der MAXWELL-Ergänzung wird begründet und ihre experimentellen Konsequenzen beschrieben. Das zweite zur Vorlesung gehörende Maple-Programm beinhaltet eine Wiederholung aller Kenntnisse über Schwingungen und Wellen, die aus der Mechanik bekannt sein sollten. Die Wiederholung ist an dieser Stelle sinnvoll, denn mit dieser Vorlesung sind alle vier MAXWELL-Gleichungen experimentell begründet und erscheinen nicht als mathematisches Axiom. Die mathematischen Kenntnisse, insbesondere Oberflächen- und Volumenintegrale können bei Studierenden der Sekundarstufe I nicht vorausgesetzt werden. Aus diesem Grund ist es möglich den Lehrgang auch mit der fünften Vorlesung zu beginnen. Eine andere Möglichkeit wird den Studierenden an der Universität Siegen in Form einer freiwilligen zweisemestrigen Mathematikveranstaltung "Mathematische Methoden der Physik" angeboten. Dieser Kurs ist auf einen Beginn im ersten Semester zugeschnitten und beinhaltet im ersten Teil eine Einführung in die Lineare Algebra (insbesondere lineare Gleichungssyteme, Matrizen und Determinanten sowie eine Einführung in die Eigenwerttheorie) und eine Wiederholung der Schulanalysis. Es bietet sich an, im Verlauf dieses Mathematikkurses bereits Maple einzusetzen, damit die Studierenden schon vom ersten Semester an dieses System kennen- und benutzen lernen. Der zweite Teil des Kurses beinhaltet dann eine kurze Einführung in die Vektoranalysis sowie der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Da dieser Kurs freiwillig ist, sind allerdings trotzdem die einzelnen Vorlesungen so aufgebaut, dass die dort erarbeiteten mathematischen Kenntnisse nicht vorausgesetzt werden.
Aus diesem Grund ist es möglich den Kurs zur Einführung in die Quantenphysik auch mit der fünften Vorlesung zu beginnen.

[11] Homogen durchflossener Draht.

Vorlesung 5: Die MAXWELL-Gleichungen im Vakuum

Diese Vorlesung beinhaltet die Lösung sowie eine Untersuchung der eindimensionalen MAXWELL-Wellengleichung im Vakuum. Ihre Lösung:

$$E(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx), \; \omega = \frac{2\pi}{T}, \; k = \frac{2\pi}{\lambda}, \; \omega = \pm ck \tag{2.4}$$

wird abgeleitet und mit Maple untersucht. Nach einem Einschub über komplexe Zahlen sowie der Möglichkeit ihrer Darstellung und Bearbeitung mit Maple wird die allgemeine Form einer eindimensionalen ebenen Welle, die sich entlag einer festen Richtung - hier der x-Achse - vorgestellt:

$$E(x,t) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} = E_0 \left\{ \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t) \right\} \tag{2.5}$$

und mit Maple untersucht[12]. Anschließend wird die allgemeine Lösung der homogenen MAXWELL-Gleichung vorgestellt und mit Maple bearbeitet[13]. Über die Herleitung der Kopplung der beiden homogenen Gleichungen wird dann als Beispiel eine transversale elektromagnetische Welle, die sich in einer festen Richtung bewegt, dargestellt.

Vorlesung 6: Betrachtung der zweidimensionalen MAXWELL-Gleichung im Vakuum, Polarisation und Wellenpakete

Die sechste Vorlesung beinhaltet eine ausführliche Betrachtung im zweidimensionalen Fall. Im Zusammenhang mit der Phasengeschwindigkeit wird ein Hinweis auf die experimentelle Messung der Lichtgeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen gegeben. In diesem Zusammenhang wird dann auf die Hypothese MAXWELLs zur Interpretation des Lichts als elektromagnetischer Welle eingegangen[14].
Das dazugehörende Maple-Programm beinhaltet nun zum ersten Mal die Fähigkeiten von Maple zur symbolischen Bearbeitung mathematischer Ausdrücke, denn es wird ein kompletter Separationsansatz zur Lösung der zweidimensionalen MAXWELL-Gleichung im Vakuum durchgeführt. Die einzelnen Rechenschritte sind dabei in aller Ausführlichkeit dargestellt und mit erläuterndem Text versehen. Die Schwierigkeit des Separationsansatzes in diesem Fall ist gering und die am Bildschirm erscheinenden Ergebnisse sind noch sehr übersichtlich. Die Rechnung wird in der Vorlesung am PC beobachtet und erläutert. In diesem Zusammenhang kann man einen weiteren Vorzug des Einsatzes von CAS kennenlernen, die Rechnungen sind einfach

[12] Superpositionsprinzip, kontruktive sowie destruktive Interferenz und die dafür notwendigen Bedingungen.

[13] So werden Phasenflächen anhand einer Animation einer sich ausbreitenden Kugeloberfläche dargestellt.

[14] Die zugehörige Theorie ist wegen der vektoriellen Natur dieser Wellen sehr kompliziert und daher nicht Teil der Vorlesung!

schneller durchgeführt. Es bleibt mehr Zeit für eine Klärung offener Fragen, die Rechnung kann gegebenenfalls mehrmals hintereinander vorgeführt werden, ohne das ein zu großer Zeitverlust entsteht. Um einem Verlust von Rechenkompetenz entgegen zu wirken, wurde in einer Übung zur Vorlesung ein Separationsansatz vorgegeben, der mit Papier und Bleistift zu lösen war und das Ergebnis sollte anschließend mit Maple kontrolliert werden. Die Polarisation ebener Wellen wird anschließend behandelt. Maple-Animationen von linear, zirkular und elliptisch polarisierten Vektorfeldern dienen hier der Veranschaulichung der eingeführten Ergebnisse. Als mathematischer Einschub und zur Vorbereitung der Betrachtung von Wellenpaketen werden uneigentliche Integrale diskutiert. Die Vorlesung schließt mit einer ausführlichen Betrachtung von Wellenpaketen -insb. dem GAUSS-Wellenpaket - ab. Maple wird hier zum einen eingesetzt, um die GAUSS-Funktion zu diskutieren sowie zum anderen zur Animation der zeitlichen Entwicklung von Wellenpaketen.

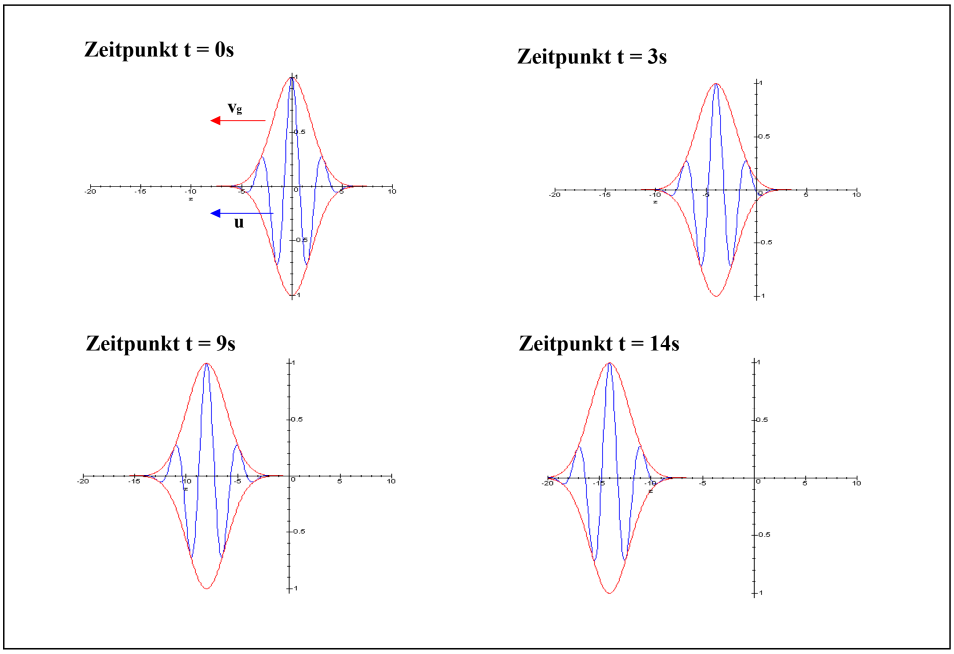

Figure 2.4: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit stimmen überein. Man beachte, dass sich weder die Form der GAUSS-Funktion, noch die ebene Welle verändern!

Eine Untersuchung der Verteilungsbreiten - im Orts- wie im k-Raum der Welle - und ihrer Darstellung mit Maple geben einen ersten Eindruck dieses später im Rahmen der Diskussion der Unbestimmtheitsrelation wichtigen Zusammenhanges.

Vorlesung 7: Die Wellengleichung in Kugelkoordinaten

Im Mittelpunkt dieser Vorlesung steht die Lösung der homogenen Wellengleichung:

$$\Delta\Phi\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi\left(\mathbf{r},t\right) \tag{2.6}$$

in Kugelkoordinaten. Es werden dabei einschränkend nur kugelsymmetrische Lösungen:

$$\Phi\left(\mathbf{r},t\right)=\Phi\left(r,t\right)\Rightarrow\Delta_{\vartheta,\varphi}\Phi\left(\mathbf{r},t\right)=0 \tag{2.7}$$

betrachtet. Die Wellengleichung wird über einen Separationsansatz mit Maple gelöst und anschließend diskutiert. Maple wird in diesem Zusammenhang eingesetzt, um die zeitliche Entwicklung von Phasenlinien bzw. -flächen durch Animation zu verdeutlichen. Daneben werden die r-Projektion von:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{r}e^{i(kr+\omega t)}\right) \tag{2.8}$$

sowie eine zweidimensionale auslaufende Kugelwelle in einer besonders schönen Animation[15] diskutiert:

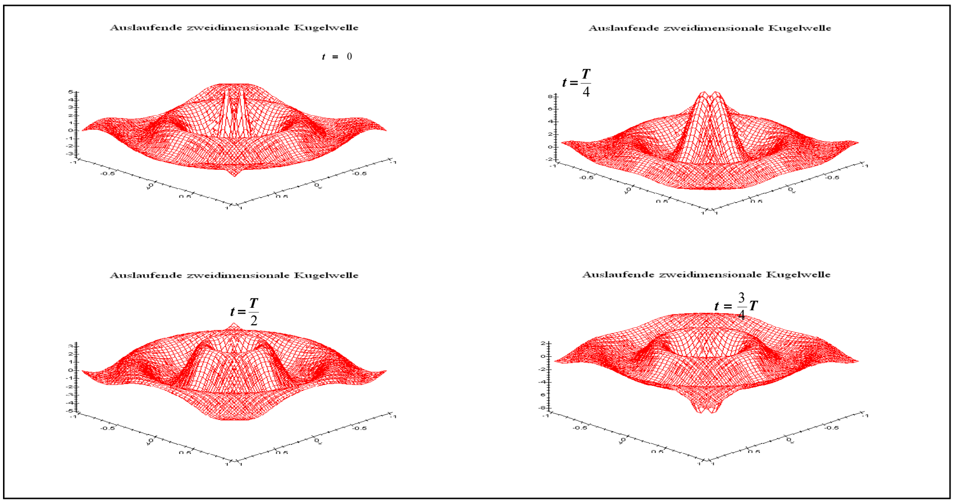

Figure 2.5: Zweidimensionale auslaufende Kugelwelle.

Als Abschluss dieser Vorlesung werden diese allgemeinen Ergebnisse dann noch auf die MAXWELL-Gleichung übertragen. Maple wird in diesem Zusammenhang benutzt, um die zeitliche Entwicklung eines kugelsymmetrischen E- bzw. B-Feldes darzustellen.

[15] Vergleicht man diese Aniation mit einem Wassertropfen, der auf eine windstille Wasseroberfäche fällt, so ist die Übereinstimmung schon frappierend.

2.3.2 Entstehung elektromagnetischer Wellen

Vorlesung 8: Der schwingende elektrische Dipol

Die theoretische Beschreibung der Entstehung elektromagnetischer Wellen entlang der Diskussion eines schwingenden elektrischen Dipols bildet den Gegenstand dieser Vorlesung. Die mathematischen Ergebnisse werden dabei nicht hergeleitet[16], sondern vorgegeben, jedoch mit Maple diskutiert. Es werden Animationen des elektrischen Potenzials sowie des E- bzw. B-Feldes eines schwingenden Dipols betrachtet. Man kann sehr deutlich die Ablösung einer elektromagnetischen Welle vom Dipol erkennen:

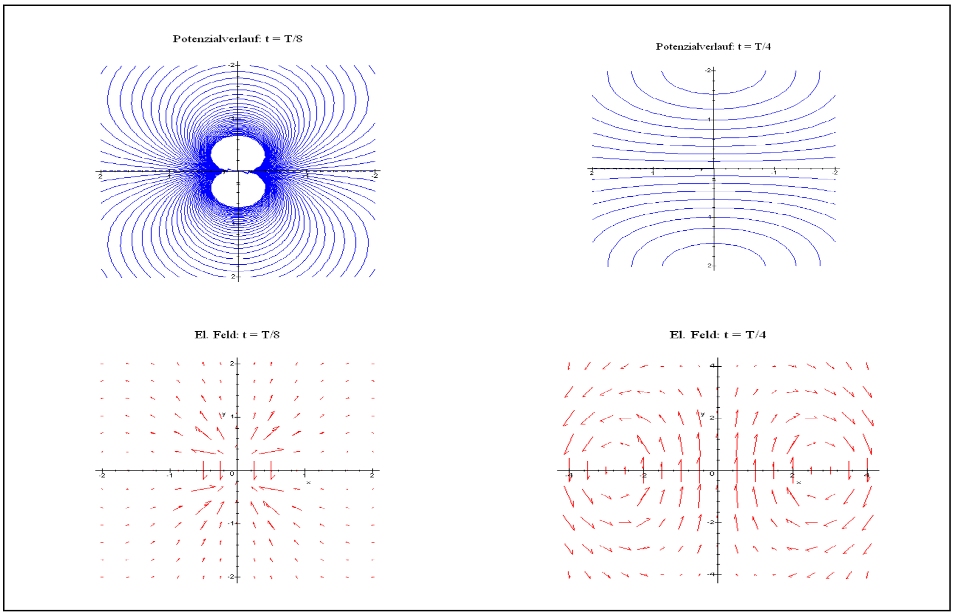

Figure 2.6: Situation zum Zeitpunkt $t = \frac{T}{8}$ und $t = \frac{T}{4}$. Man beachte insbesondere die geschlossenen Feldlinien zum zweiten Zeitpunkt!

Über:

$$rot\left[\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\left(r,t\right) = \mu_0 \cdot rot\left[\mathbf{B}\left(r,t\right)\right] \tag{2.10}$$

kann man verstehen wie sich die Felder sozusagen "gegenseitig durch den Raum tragen". Die zeitliche Änderung des einen Feldes führt zur Entstehung des anderen. Die Vorlesung schließt mit einem Essay FEYNMANs

[16] Sie übersteigen die Kenntnisse der Studierenden.

zum Vorstellungsvermögen in den Naturwissenschaften, dass aus seinen ausgezeichneten Vorlesungen zur Elektrodynamik übernommen wurde[17].

Vorlesung 9: Experimentelle Erzeugung und Messung elektromagnetischer Wellen

Nachdem die mathematische Beschreibung der Entstehung elektromagnetischer Wellen vorgestellt wurde, dient diese Vorlesung dazu den experimentellen Beleg der Theorie zu liefern. Die Erzeugung elektromagnetischer Wellen wird anhand der Betrachtung des elektrischen Schwingkreises eingeführt. In diesem Zusammenhang werden gewöhnliche Differenzialgleichungen betrachtet und ihre Bearbeitung mit Maple vorgestellt. Maple wird zur Lösung der Schwingungsgleichung:

$$\frac{d^2U_C\left(t\right)}{dt^2}+2\beta\frac{dU_C\left(t\right)}{dt}+\omega_0^2U_C\left(t\right)=0\ ,\ 2\beta:=\frac{R}{L}\ ,\ \omega_0^2:=\frac{1}{LC} \tag{2.11}$$

in den verschiedenen Dämpfungsfällen benutzt. Die Lösungen werden graphisch zusammen mit einer Energiebetrachtung für den Fall schwacher Dämpfung diskutiert:

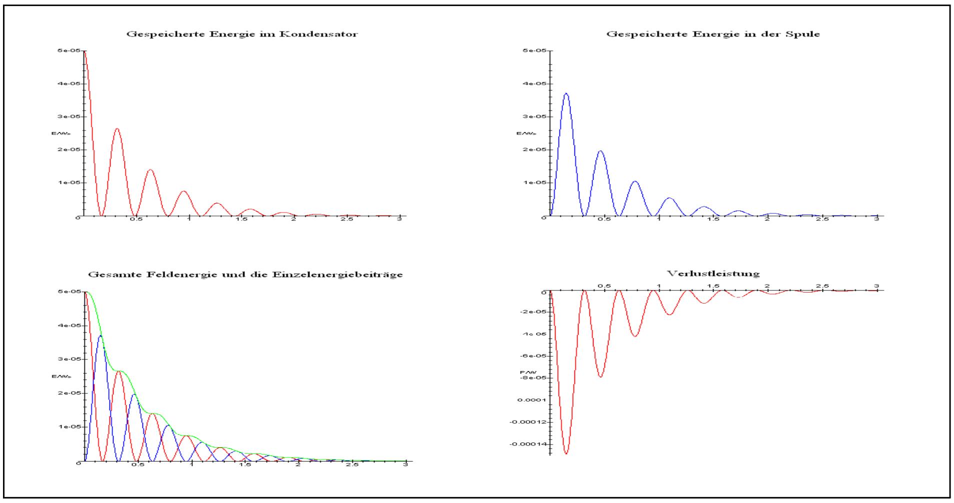

Figure 2.7: Feldenergien bzw. Verlustleistung in einem elektrischen Schwingkreis mit schwacher Dämpfung.

Abschluss dieser Vorlesung bildet die Diskussion des experimentellen Nachweises elektromagnetischer Wellen anhand einer Dipolantenne.

[17] Feynman, Leighton, Sands: Vorlesungen über Physik, Bd. I - III, Oldenbourg Verlag 1991

Vorlesung 10: Beschleunigte Punktladung, LIÉNARD-WIECHERT-Potenzial

Gegenstand dieser Vorlesung ist die mathematische Diskussion der Wirkung elektromagnetischen Wellen, die auf geladene Teilchen treffen. In diesem Zusammenhang wird über die LIÉNARD-WIECHERT-Potenziale verdeutlicht, dass beschleunigte geladene Teilchen elektromagnetische Wellen abstrahlen. Dieses Ergebnis ist für die Diskussion des H-Atoms von großer Bedeutung. Maple wird in dieser Vorlesung dazu benutzt, das im Problem „Elektromagnetische Welle trifft auf ruhendes Elektron" entstehende Anfangswertproblem numerisch in einem sehr kleinen Zeitintervall zu lösen[18]. Über das erhaltene Ergebnis lässt sich theoretisch postulieren, dass eine elektromagnetische Welle Energie transportiert. Als Ergebnis wird die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes sowie der POYNTING-Vektor eingeführt. Die Diskussion bewegter Punktladungen entlang der LIÉNARD-WIECHERT-Potenziale bildet den Abschluss dieser Vorlesung. Maple wird in diesem Zusammenhang in der Diskussion eines gleichmäßig beschleunigten Elektrons zur Animation dieser Bewegung sowie des elektrischen Potenzials und der Felder genutzt.

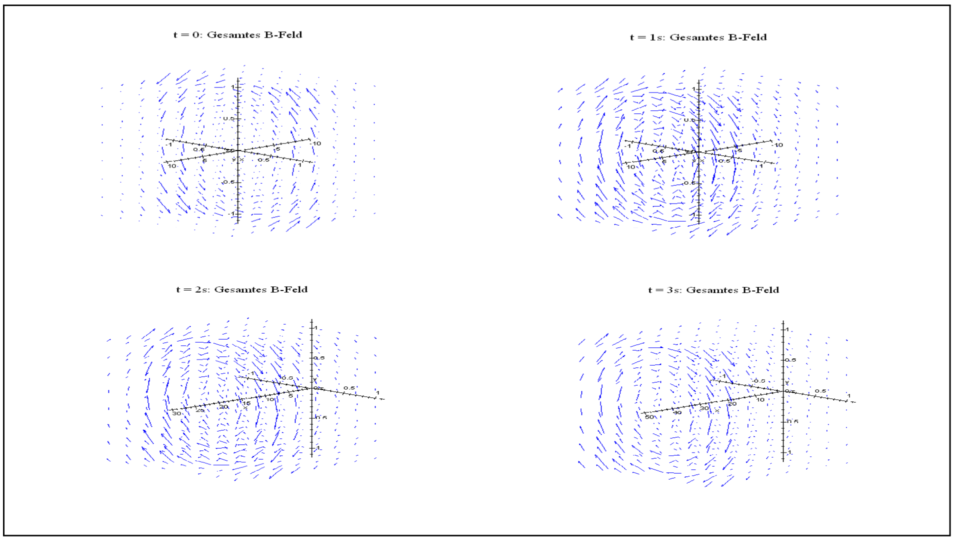

Figure 2.8: Gesamtes **B**-Feld einer auf der x-Achse gleichmäßig beschleunigten Elektrons. Die Einheit der Achsen ist m.

[18] Zur Vereinfachung wird allerdings die Strahlungskraft des beschleunigten Elektrons vernachlässigt. Im Rahmen dieses Modells ist dies durchaus zulässig, da der didaktische Gesichtspunkt nur auf der Verschiebung des Elektrons liegt. Es soll dadurch verdeutlicht werden, dass eine elektromagnetische Welle Energie transportiert.

2.3.3 Der klassischen Physik widersprechende Ergebnisse

Vorlesung 11: Mathematische Modelle: Elektron auf einer Kreisbahn, Zwei-Körper-Problem

Ziel dieser Vorlesung sind weitere Vorbereitungen der Diskussion des H-Atoms und der den klassischen Erwartungen widersprechenden experimentellen Ergebnissen. Dazu wird im ersten Modell dargestellt, wie man durch ein geeignet gerichtes, konstantes B-Feld ein Elektron auf eine Kreisbahn zwingen kann[19]. Da die Energieabstrahlung noch keine Berücksichtigung findet, ist die numerische Betrachtung über kurze Zeitintervalle unproblematisch und wird deshalb auch für zwei weitere unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch diskutiert. Als weiteres Modell wird das Zwei-Körper-Problem: „Elektron im Feld eines Protons" behandelt. Hier werden entsprechend der Anfangsbedingungen, die Fälle des in das Proton stürzende Elektron, Elektron auf einer Kreisbahn, sowie Elektron auf einer eliptischen Bahn und Elektron auf einer Hyperbelbahn betrachtet. Die Ergebnisse können mit Maple alle numerisch errechnet werden, sind aber auch analytisch ableitbar[20].

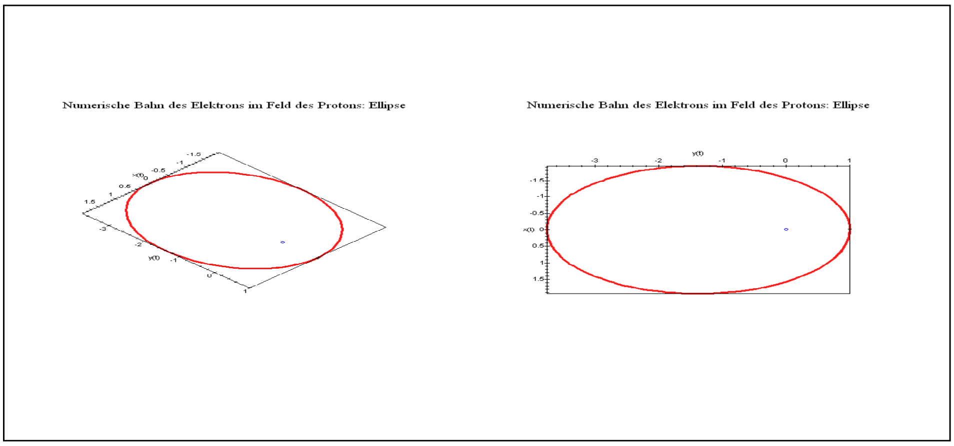

Figure 2.9: Numerisch errechnete elliptische Bahn des Elektrons um das Proton. Die Einheit der Achsen ist das Meter.

Den Abschluss dieser Vorlesung bildet dann die Diskussion der Berücksichtigung der Energieabstrahlung eines beschleunigten Elektrons, wobei aller-

[19] Die Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle wird dabei noch vernachlässigt, sie ist Gegenstand der nächsten Vorlesung!

[20] Da die numerischen Ergebnisse mit den analytischen Lösungen übereinstimmen, wurde auf ihre Herleitung verzichtet. Gleichzeitig ist dadurch jedoch auch die physikalische Gültigkeit der numerischen Lösung sichergestellt.

dings weitestgehend nur die Ergebnisse ohne Herleitung mitgeteilt werden[21].

Vorlesung 12: Die ABRAHAMS-LORENTZ-Gleichung

Gegenstand dieser Vorlesung sind nun die Ergebnisse der Berücksichtigung der Energieabstrahlung eines beschleunigten Elektrons auf einer Kreisbahn. Das dazugehörige mathematische Modell ist die ABRAHAM-LORENTZ-Differenzialgleichung:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}\,(t) = -m\omega^2 \mathbf{r} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \ddot{\mathbf{r}}\,(t) \tag{2.12}$$

wobei der Term der dritten Ableitung die Strahlungskraft des Elektrons berücksichtigt. Diese Gleichung ist über eine leicht modifizierte Kreisbahn:

$$\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(0) \cdot e^{i\omega t(1+\delta)} \tag{2.13}$$

lösbar, da die Strahlungskraft relativ klein im Vergleich zur COULOMB-Kraft ist. Die enstehenden drei Lösungen werden mit Maple untersucht und graphisch dargestellt, wobei eine als unphysikalisch verworfen wird[22]. Die beiden anderen Lösungen ergeben das gleiche Bild eines in sehr kurzer Zeit auf einer spiralförmigen Bahn auf den Kern zustürzenden Elektrons!

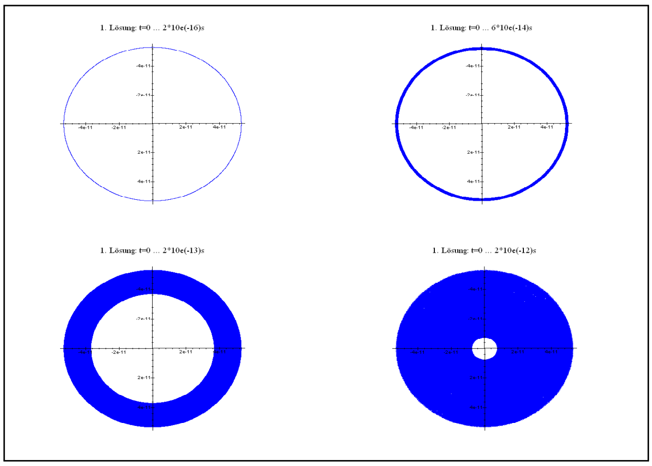

Figure 2.10: Das Elektron bewegt sich in einer Spirale auf das Proton im Ursprung zu. Die Einheit der Achsen ist Meter.

[21] Die Herleitung übersteigt die Kenntnisse der Hörer. Sie kann aber z.B. in Fliessbach: Elektrodynamik, B.I. Verlag 1993, S. 250 ff nachgelesen werden. Die Ergebnisse wurden aus dieser Darstellung übernommen.

[22] Einen Prozess des Entfernens des Elektrons vom Proton und die damit verbundene Instabilität des H-Atoms wird in der Natur nicht beobachtet!

Durch dieses frappierend falsche im Rahmen der klassischen Physik korrekt berechneten Ergebnisses wird deutlich, dass man in der Atomphysik völlig neue Konzepte benötigte.

Vorlesung 13: Stehende mechanische und elektromagnetische Wellen

Um die Gedanken SCHRÖDINGERs die zur Entstehung seiner berühmten Gleichung führten leichter zu verstehen und um zu verdeutlichen, dass Energiequantisierung schon Phänomen der klassischen Physik war, werden in dieser Vorlesung stehende Wellen betrachtet. Dazu wird das Problem der schwingenden Saite und der schwingenden Membran vorgestellt und die Ergebnisse mit Maple dargestellt. Es wird eine Energiebetrachtung der schwingenden Saite sowie die Herleitung ihrer Bewegungsgleichung durchgeführt[23]. Man erhält zur Beschreibung der schwingenden Saite ein Anfangswertproblem der Wellengleichung, das anschließend über einen Separationsansatz vollständig gelöst wird. Beispiele von Lösungen werden in Animationen mit Maple vorgestellt, wobei Begriffe wie Eigenmoden oder erste Oberschwingung etc. eingeführt werden. Maple wird weiter dazu genutzt, um Wellenpakete zu berechnen, sie graphisch abzubilden und ihre zeitliche Entwicklung durch eine Animation darzustellen.

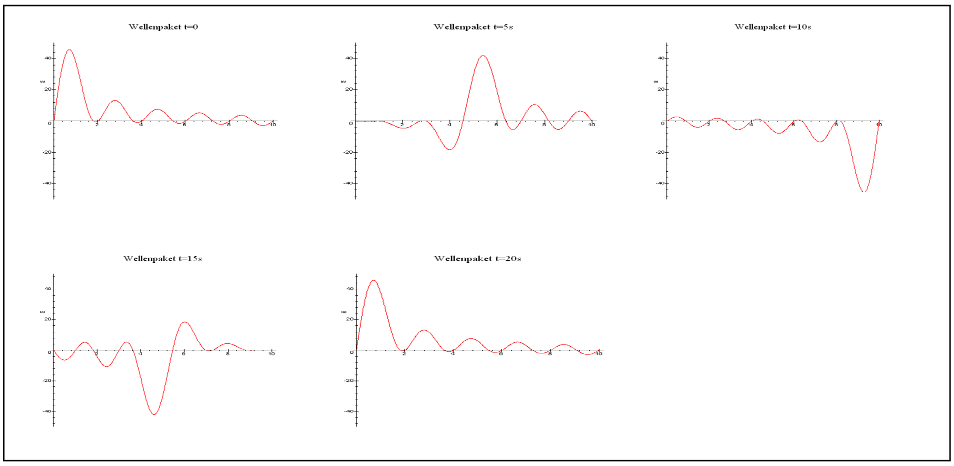

Figure 2.11: Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets aus den ersten 10 Eigenschwingungen.

Bei der energetischen Betrachtung wird deutlich, dass die Gesamtenergie eines Wellenpakets - somit der schwingenden Saite - quantisiert ist. Mit

[23]Die gesamte Vorlesung befindet sich somit auf einem etwas höheren aber dennoch vertretbaren mathematischen Niveau!

anderen Worten, nicht mit jeder von außen zugeführten Energie lässt sich eine stehende Welle anregen! Dieses Ergebnis ist im Hinblick auf die experimentellen Ergebnisse des H-Atoms und seiner wellentheoretischen Betrachtung von großer Bedeutung. Die Physiker verfügten schon über ein klassisches Modell, dass quantisierte Energiewerte produziert, jedoch ist seine Übertragung auf das punktartig interpretierte Elektron des H-Atoms natürlich sehr gewöhnungsbedürftig! Die Diskussion des Problems der eingespannten Membran, somit die Übertragung der Ergebnisse der eindimensionalen Saite auf zwei Dimensionen, führt zu den Chladnischen Klangfiguren, die mit Maple dargestellt und mit experimentelle Bildern verglichen werden.
Den Abschluss dieser Vorlesung bildet die Diskussion stehender elektromagnetischer Wellen innerhalb eines Hohlraums. Maple wird hierbei benutzt, um die zeitliche Entwicklung des Realteils von E- und B-Feld in einer Animation darzustellen.

Vorlesung 14: Der lichtelektrische Effekt und die Unmöglichkeit seiner klassischen Beschreibung

Im Zentrum dieser Vorlesung steht der lichtelektrische Effekt, die Beobachtung, dass eine isoliert aufgestellte negativ geladene Metallplatte bei Bestrahlung mit kurzwelligem ultravioletten Licht Elektronen emittiert. Dieser auf den ersten Blick scheinbar[24] so harmlose Effekt ist im Rahmen der MAXWELL-Theorie nicht erklärbar! Dieses Problem wird genau erläutert, um daran anschließend die Notwendigkeit eines neuartigen Konzepts zu verdeutlichen. EINSTEINs Erklärung, die eine korpuskulare Theorie des Lichts beinhaltet, wird zuerst theoretisch vorgestellt. Den Abschluss dieser Vorlesung bildet dann eine Beschreibung ihrer experimentellen Bestätigung.

[24] Die genauen experimentellen Ergebnisse, die alle in der Vorlesung beschrieben werden, zeigen dann, dass es sich um eine wirklich rätselhafte Beobachtung handelte.

Vorlesung 15: Der COMPTON-Effekt

Als weiterer Beleg einer notwendigen Modifizierung klassischer Konzepte wird in dieser Vorlesung der COMPTON-Effekt und seine Erklärung im Photonenbild beschrieben. Maple wird in dieser Vorlesung eingesetzt, um endliche skalare wie auch vektorielle Wellenpakete darzustellen. Man kann dadurch recht anschaulich zeigen, dass sich durch die Überlagerung von unendlich ausgedehnten Wellen Strukturen ergeben, die räumlich relativ scharf zentriert sind!

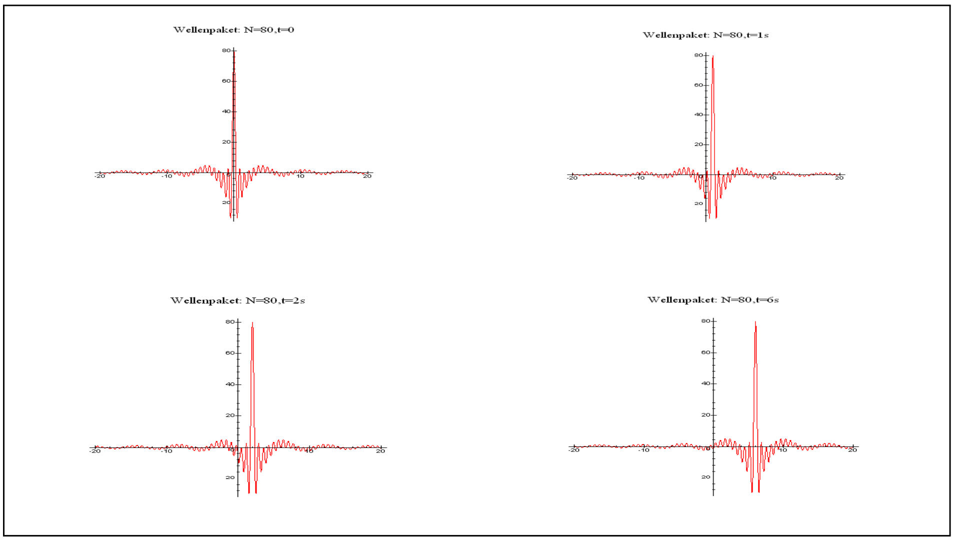

Figure 2.12: Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets aus 80 Elementarwellen.

Nachdem in der 6. Vorlesung auch die GAUSS-Funktion als Gewichtsfunktion eingeführt wurde, wird anschließend ein vektorielles GAUSS-Wellenpaket in einer Animation als Beispiel eines kontinuierlichen Wellenpakets gezeigt. Es wird begründet, dass je enger das Wellenpaket räumlich zentriert ist, umso größer die Unschärfe in der Frequenz wird[25]. Als Modell eines Photons setzt man dann schließlich ein kontinuierliches Wellenpaket der Energie:

$$h\nu = \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} \langle u_{em} \rangle \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{2.14}$$

wobei $\langle u_{em} \rangle$ die zeitgemittelte Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.

[25] Ein Wellenpaket ist ja nicht mehr monochromatisch, d.h. es besitzt keine eindeutige Frequenz.

2.3.4 Der Teilchenaspekt der Materie

Vorlesung 16: Die Teilbarkeit der Materie, MILLIKAN-Versuch und das Punktmodell des Elektrons

Diese Vorlesung enthält alle experimentellen Hinweise auf die Teilchenstruktur der Materie im Allgemeinen und der Elektronen im Besonderen. Neben den experimentellen Ergebnissen DALTONs aus dem frühen 19. Jahrhundert werden die Erfolge der kinetischen Gastheorie und ihrer zugrundeliegenden Modellvorstellung der Moleküle als Kugeln erwähnt. Über Streuprozesse war man sich schon sehr bald über die Dimensionen der Atome im Klaren und das Periodensystem gab weitere Hinweise über die Struktur und Aufbau der Atome.
Die Teilcheneigenschaften der Elektronen werden über die FARADAY-Gesetze und den MILLIKAN-Versuch sowie die Phänomene der Gasentladung begründet, ebenso lassen die experimentellen Ergebnisse des WIEN-Filters eine Bestimmung der Elektronenmasse zu. Spezifische Ladung sowie Masse und das Verhalten entlang der Beschreibung der klassischen Punktteilchenmechanik führen nicht zu dem Schluss, dass Elektronen irgendwie geartete Welleneigenschaften besitzen. Ein Vergleich zwischen der theoretisch postulierten Kreisbahn eines Elektrons[26] und ihrem experimentellen Beleg sowie eine Darstellung der Ergebnisse der RUTHERFORD-Streuung schließen diese Vorlesung ab.

2.3.5 Der Wellenaspekt der Materie

Vorlesung 17: Die de BROGLIE-Wellentheorie

Im Mittelpunkt dieser Vorlesung steht die Theorie de BROGLIEs, die aus Symmetriebetrachtungen heraus, Welleneigenschaften für Elektronen und anderen bisher als punktförmige Teilchen aufgefasste Gebilde postuliert[27], sowie ihre experimentelle Bestätigung durch die Versuche von DAVISSON und GERMER, die ausführlich dargestellt werden.

[26] Die Bewegungsgleichung stammt aus dem Ansatz NEWTONs für die Bewegung einer als punktartig konzentrierten Masse! Die zugehörige Bewegungsgleichung ist geschlossen lösbar und mit Maple wird die Bewegung in einer Animation dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment stellt somit eine Bestätigung des Kugelmodells des Elektrons dar.

[27] Die didaktisch anschauliche Herleitung wurde aus einer Arbeit von KUHN übernommen. Siehe in KUHN u.a.: Handbuch der experimentellen Physik,Bd. 8. Sek. II, Aulis-Verlag 1996.

2.3.6 Zusammenführung beider Standpunkte

Vorlesung 18: Deutung der Welleneigenschaften von Elektronen, Plausibiltätsbetrachtung zur SCHRÖDINGER-Gleichung

Die in der vorherigen Vorlesung dargestellte Wellentheorie wird nun in der letzten Vorlesung durch die Wahrscheinlichkeitsdeutung erklärt. Die Dichte der Elektronen auf einem Nachweisschirm steht über das Betragsquadrat der ihr zugeordneten Wellenfunktion mit dieser in Verbindung. Die Interferenzeffekte können somit als Interferenz der Wahrscheinlichkeitswellen gedeutet werden. Die zugehörige Wellengleichung, die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung, deren Lösung die Wellenfunktion ist, wird anschließend über eine Plausibiltätsbetrachtung entlang der MAXWELL-Gleichung[28] begründet[29].

2.3.7 Bemerkungen zur HEISENBERG-Unschärferelation

Innerhalb des einführenden Kurses zur Quantenphysik wurde auf die Einführung der HEISENBERG-Unschärferelation verzichtet, da die Kenntnisse am Ende des einführenden Kurses nur eine semiklassische Herleitung erlauben, die im Kern mehr Probleme aufwirft, als sie löst. In vielen Physik-Schulbüchern werden Herleitungen angeboten, die didaktisch recht fragwürdig sind. Im wesentlichen gibt es drei Typen von Herleitungen in Schulbüchern und didaktischer Literatur:
1. Semiklassische Herleitungen unter Verwendeung wellenoptischer Phänomene wie Beugung und Interferenz am Einzelspalt oder HEISENBERG-γ-Mikroskop[30].
2. Herleitungen unter Verwendung der klassischen Beziehung $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$

[28] Obwohl die Herleitung optischer Phänomene anhand der Wellengleichung MAXWELLs das Niveau der Vorlesung weit übersteigt, ist diese Möglichkeit erwähnt worden. Die beobachteten Interferenzerscheinungen bei Elektronen lassen nun eine Vermutung über eine ähnliche Wellengleichung zu.

[29] Der Weg über die KLEIN-GORDON-Gleichung wurde vermieden, da er für die Hörergruppe als zu abstrakt - Einführung der Ersetzungsregeln - erschien. Es wird in einem kurzen Hinweis, dennoch auf sie Bezug genommen. Die Analgie zur klassischen Wellegleichung bringt nämlich das Problem mit sich, dass sie eine zweite Zeitableitung der Wellenfunktion enthält. Man kann aber zumindest im nichtrelativistischen Fall an der KLEIN-GORDON-Gleichung zeigen, dass diese vernachlässigbar ist. Sie geht damit in die freie SCHRÖDINGER-Gleichung über.

[30] Diese Herleitung benutzt im Kern klassische Vorstellungen über Bahn und Impuls eines Teilchens. Problematisch bleibt dann, dass das Ergebnis dann benutzt wird, um die klassischen Vorstellungen über Bahn und Impuls als veränderungsbedürftig darzustellen. Siehe z.B. in Dorn. F, Bader, F: Physik, Grundkursband 12/13. Hannover 1976 oder Müller, A., Leitner, E., Dilg, W.: Physik, Leistungskurs 3. Semester: Theorie der Wärme, Atomphysik. München, 4.Auflage 1983. Diesen Typ der Herleitung benutzen ebenfalls Schreiner, J.: Physik für die Sekundarstufe II. Frankfurt/M. 1978 und Gross, Berhag: Atome, Kerne, Quanten. Stuttgart 1987. Sogar im Lehrerband von Kuhn, W.: Handbuch der experimentellen Schulphysik, Bd.8: Atome und Quanten, Aulis-Verlag 1996 findet sich diese Herleitung.

der FOURIER-Synthese[31].
3. Quantenmechanische Herleitungen am Potenzialtopf mit unendlichen hohen Wänden[32].
WIESNER[33] kritisiert sie zurecht und verweist darauf, dass es eigentlich nur zwei Alternativen gäbe, entweder man verzichtet auf eine Herleitung in der Schule und beschränkt sich auf eine Interpretation der HEISENBERG-Unschärferelation oder man ist gezwungen den Weg über GAUSS-Wellenpakete zu gehen, der für die Schule allerdings zu schwer erscheint. Diesen Weg der Herleitung in einem speziellen Fall wird im zweiten Teil des Kurses zur Quantenmechanik beschritten, da Maple über den Formalismus der FOURIER-Transformation verfügt, der dann als „black box" benutzt werden kann.
Ob man Maple zur Herleitung der HEISENBERG-Unschärferelation in der gymnasialen Oberstufe benutzen kann, ist bisher noch nicht geklärt. Man kann allerdings vermuten, dass die starken graphischen Funktionen es ermöglichen, GAUSS-Wellenpakete auch in der Schule zu behandeln, man kann dann ohne Einführung der Operatorendarstellung die HEISENBERG-Unschärferelation verdeutlichen[34].

[31] Diese Herleitung, die im wesentlichen mit der falschen Eigenfunktion des Impulsoperators arbeitet, um komplexe Funktionen zu umgehen findet man z.B. in Kuhn, W (Hrsg.): Physik III. Hannover 1976 oder in Schwaneberg, R.: Überlegungen zur Elementarisierung der Unbestimmtheitsrelation für die Sekundarstufe II und für die Lehrerausbildung. In: Scharmann, A. (Hrsg), Tagungsband der Frühjahrstagung des FA Didaktik der DPG, Gießen 1977, S.284-308.

[32] Wegener, U.: Zur Behandlung der HEISENBERGschen Unschärferelation in einigen Schulbüchern. In: Siegener Pädagogische Studien 24, 1978. Das Modell des Potenzialtopfes mit unendlich hohen Wänden wird in dieser Arbeit nicht verwendet, da es einzig zu dem Zweck konstruiert wurde, ein relativ leicht lösbares Beispiel zur SCHRÖDINGER-Gleichung zu demonstrieren. Unendliche Potenziale kommen in der Natur nicht vor, aus diesem Grund und da man mit Maple auch kompliziertere Modelle lösen kann, ist dieser Weg der Herleitung unzureichend.

[33] Wiesener, H.: Beiträge zur Didaktik des Unterrichts über Quantenphysik in der Oberstufe, Westarp-Verlag, Essen 1989, S.96.

[34] Siehe hierzu speziell das Skript 2 der Vorlesung über Quantenmechanik.

Chapter 3

Quantenmechanik

3.1 Allgemeine Ziele und Strukturierung der Vorlesung

Der Kurs *Quantenmechanik* besteht aus 17 Vorlesungen und ist ebenso wie der Kurs *Einführung in die Quantenphysik* in seinem Stoffumfang auf ein Sommer- wie auch ein Wintersemester zugeschnitten[1]. Die Vorlesung baut auf dem Einführungskurs auf, kann aber bei Zeitmangel auch getrennt von diesem behandelt werden. In diesem Falle ist es allerdings sinnvoll, die SCHRÖDINGER-Gleichung, mit der der Kurs *Quantenmechanik* beginnt, in einer Plausibilitätsbetrachtung einzuführen. Es existiert wiederum zu jeder Vorlesung ein eigenes Skript und zu den meisten Vorlesungen wurden Maple-Programme erstellt, die die Grundlage der einzelnen Vorlesungen darstellen. Die Themen, die in den einzelnen Vorlesungen behandelt wurden, stammen aus den im Anhang aufgeführten Büchern zur experimentellen bzw. theoretischen Physik.

[1] In den beiden bisherigen Fällen wurde der Kurs zur *Einführung in die Quantenphysik* im Sommersemester und der Kurs zur *Quantenmechanik* in einem Wintersemester durchgeführt. Es lassen sich dabei bequem pro Woche eine oder auch zwei Vorlesungsskripte bearbeiten.

Die folgende Graphik zeigt einen Verlaufsplan der Vorlesung:

Gliederung: ***Quantenmechanik***

I. Anknüpfung an den Kurs *Einführung in die Quantenphysik*

1. Die eindimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung
2. Die zweidimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung
3. Die HEISENBERG-Unschärferelation

II. Einfache Modellprobleme

4. Streuung freier Teilchen an einer endlichen Potenzialstufe $E > V_0$
5. Streuung freier Teilchen an einer endlichen Potenzialstufe $E < V_0$
6. Der Tunneleffekt durch eine Potenzialbarriere
7. Der Tunneleffekt als Grunderscheinung der Radioaktivität
8. Das Modell des endlich tiefen Potenzialtopfes
9. Die Kaltemission von Elektronen

III. Das Modell des harmonischen Oszillators

10. Der harmonische Oszillator – klassische Betrachtung
11. Der harmonische Oszillator – quantenmechanische Betrachtung
12. Der zwei- bzw. dreidimensionale Oszillator: quantenmechanische Betrachtung
13. Quantenmechanische Betrachtung der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektrischen sowie einem magnetischen Feld, LANDAU-Niveaus

IV. Das H-Atom

14. Lösung der LAPLACE-Gleichung
15. Historische Grundlagen der Atomphysik
16. Das Atommodell von BOHR
17. Das H-Atom: quantenmechanische Betrachtung

Figure 3.1: Gliederung der Vorlesung *Quantenmechanik*.

3.2 Didaktische Begründungen

3.2.1 Anknüpfung an den Kurs "Einführung in die Quantenphysik"

Vorlesung 1: Die eindimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung

Die erste Vorlesung zur Quantenmechanik beginnt an der Stelle, wo die letzte Vorlesung zur "Einführung in die Quantenphysik" aufgehört hat. Es wird noch einmal zusammenfassend der Weg beschrieben, wie im Einführungskurs die SCHRÖDINGER-Gleichung plausibel gemacht wurde. Anschließend wird die freie eindimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung über einen Separationsansatz mit Maple gelöst. Es wird gezeigt, dass die Überlagerung von Elementarlösungen wiederum eine Lösung dar-stellt, obwohl dies durch die Behandlung der MAXWELL-Gleichung bekannt ist. Anschließend wird mit Maple gezeigt, dass auch die folgende Wellenfunktion, ein sogenanntes "FOURIER-Integral" Lösung der freien SCHRÖDINGER-Gleichung ist:

$$\psi\left(x,t\right)=\int\limits_{k=-\infty}^{\infty} a\left(k\right)\cdot e^{i\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}dk \tag{3.1}$$

Man kann mit Maple ohne größere Mühen diesen Term in die freie SCHRÖDINGER-Gleichung einsetzten und durch den Befehl "simplify" zeigen, dass beide Seiten identisch sind. Die Vorgehensweise mit Maple hat den Zweck, den Studierenden den Respekt vor formalen Ausdrücken wie dem obigen zu nehmen. Die Motivation der Studierenden steigt, die Maple-eigenen Differenziationsroutinen auf einen formal schwierig aussehenden Ausdruck „loszulassen" und zu sehen, welches Ergebnis sich ergibt. Durch diesen Umgang mit formal komplexen Ausdrücken verliert die Mathematik zusehends ihren Schrecken und wird als nützliches Instrument zur Beschreibung von Naturphänomenen angesehen[2]. Da die obige Funktion $a\left(k\right)$ frei wählbar ist[3] kann dadurch nun die GAUSS-Funktion:

$$a\left(k\right)=C\cdot e^{-\frac{\left(k-k_0\right)^2}{4\sigma_k^2}} \tag{3.2}$$

eingeführt werden. Durch die Wahl der verschiedenen Parameter kann die Höhe, Breite oder auch das Zentrum der GAUSS-Funktion variiert werden, auch dies wird mit Maple graphisch demonstriert. Das entstehende

[2] Man konnte es in den Vorlesungen immer wieder erkennen, wie zu Beginn komplexe formale Ausdrücke nur sehr zögerlich akzeptiert wurden. Nachdem sie allerdings mit Maple formal und insbesondere graphisch behandelt wurden, wurde der Umgang mit ihnen zu einem selbstverständlichen.

[3] Man kann problemlos mit Maple verschiedene Funktionen $a\left(k\right)$ testen, der Integralausdruck ist immer eine Lösung der freien eindimensionalen SCHRÖDINGER-Gleichung.

FOURIER-Integral:

$$\psi(x,t) = C \cdot \int\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(k-k_0)^2}{4\sigma_k^2} + i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} dk \tag{3.3}$$

kann berechnet werden. Diese Rechnung wird mittels einer quadratischen Ergänzung des Integranden durchgeführt[4] und man erhält:

$$\psi(x,t) = C \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^{\left(\frac{\left(\frac{k_0}{2\sigma_k^2} + ix\right)}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4\sigma_k^2} + \frac{i\hbar}{2m}t\right)}}\right)^2 - \frac{1}{4\sigma_k^2}k_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4\sigma_k^2} + \frac{i\hbar}{2m}t\right)}} \tag{3.4}$$

Diese Lösung wird anschließend in eine Amplituden- sowie in eine Phasenfunktion zerlegt:

$$\psi(x,t) = M(x,t) \cdot e^{i \cdot \Phi(x,t)} \tag{3.5}$$

$$M(x,t) = \frac{C \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sigma_k}}{\sqrt{\sigma_x(t)}} \cdot e^{-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{4\sigma_x^2(t)}} \tag{3.6}$$

$$\Phi(x,t) = \frac{m\left(2mk_0x - \hbar k_0^2 t - 4\sigma_k^4 x^2 t\right)}{2m^2 + 8\sigma_k^4 \hbar^2 t^2} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\sigma_k^2 \hbar t}{m}\right) \tag{3.7}$$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{1}{4\sigma_k^2} + \frac{\hbar^2 \sigma_k{}^2}{m^2} t^2} \tag{3.8}$$

Anschließend wird der Ausdruck dann in einer Maple-Animation untersucht und man kann erkennen, dass sich die Information über den wahrscheinlichsten Ort eines Teilchens zuerst aufbaut[5], dann ein Maximum erreicht, um anschließend wieder zu „zerfließen". Die Information über den wahrscheinlichsten Aufent-haltsort eines Teilchens wird also mit fortlaufender Zeit immer geringer, dies ist eine Folge der HEISENBERG-Unschärferelation, die in der dritten Vorlesung behandelt wird. Ebenso wird mit Maple-Graphiken demonstriert, dass eine breite GAUSS-Funktion in der k-Variablen zu einer

[4] Ziel dieser quadratischen Ergänzung ist das Integral:

$$\int\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{-A \cdot k^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{A}},\ A > 0$$

[5] Die SCHRÖDINGER-Gleichung ist im Hinblick auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeit schon eine deterministische Gleichung.

schmalen Verteilung in der x-Variablen führt, ein Ergebnis, dass wiederum auf die HEISENBERG-Unschärferelation hinweist.
Die folgende Graphik stellt die mathematischen Ergebnisse dieser Vorlesung noch einmal in einem Bild dar:

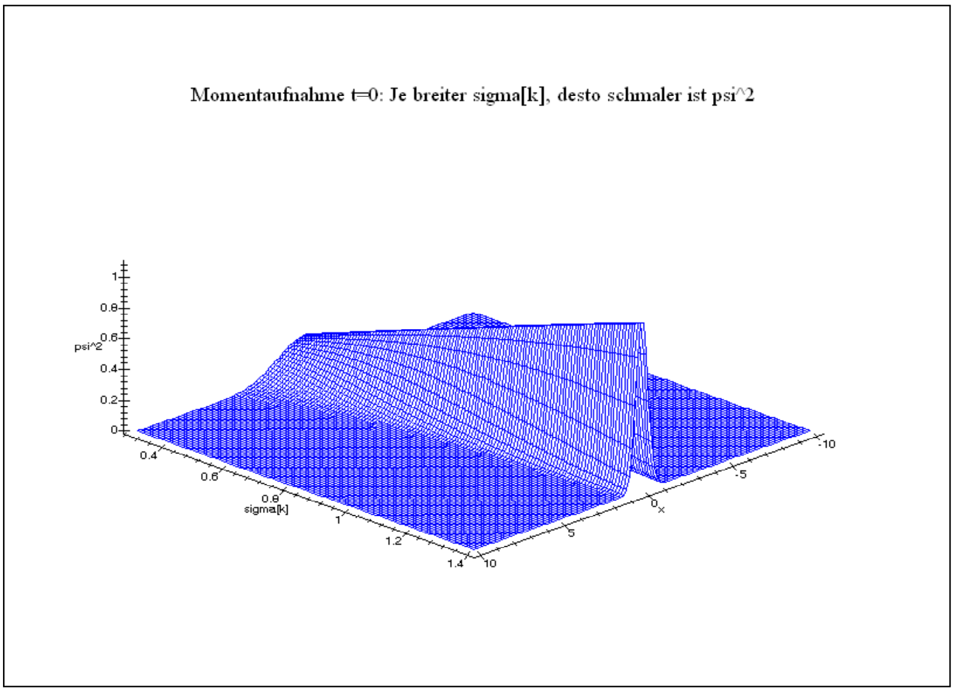

Figure 3.2: Darstellung von $|\psi(x,0)|^2$ in Abhängigkeit von σ_k. Die Einheiten der Achsen ist m, m^{-1} sowie der Wahrscheinlichkeitsdichte pro m in der vertikalen Achse.

Vorlesung 2: Die zweidimensionale SCHRÖDINGER-Gleichung

In der zweiten Vorlesung werden danach die Ergebnisse der ersten Vorlesung auf die zweidimensionale freie SCHRÖDINGER-Gleichung übertragen. Sie wird durch die zweidimensionale Verallgemeinerung der eindimensionalen Lösung gelöst. Ebenso wird das FOURIER-Integral auf die beiden Variablen k_1,k_2 verallgemeinert:

$$\psi(x,y,t) = \int\limits_{k_1=-\infty}^{\infty} \int\limits_{k_2=-\infty}^{\infty} a(k_1,k_2) \cdot e^{i\left(k_1 x + k_2 y - \frac{\hbar\left(k_1^2+k_2^2\right)}{2m} t\right)} dk_2 dk_1 \qquad (3.9)$$

und die zweidimensionale GAUSS-Funktion:

$$a\left(k_1,k_2\right)=e^{-\left(\frac{k_1-k_{10}}{4\sigma_{k_1}^2}\right)^2}\cdot e^{-\left(\frac{k_2-k_{20}}{4\sigma_{k_2}^2}\right)^2} \tag{3.10}$$

eingeführt. Die Wirkung der verschiedenen Parameter wird in verschiedenen Maple-Graphiken, wie z.B. in der folgenden demonstriert:

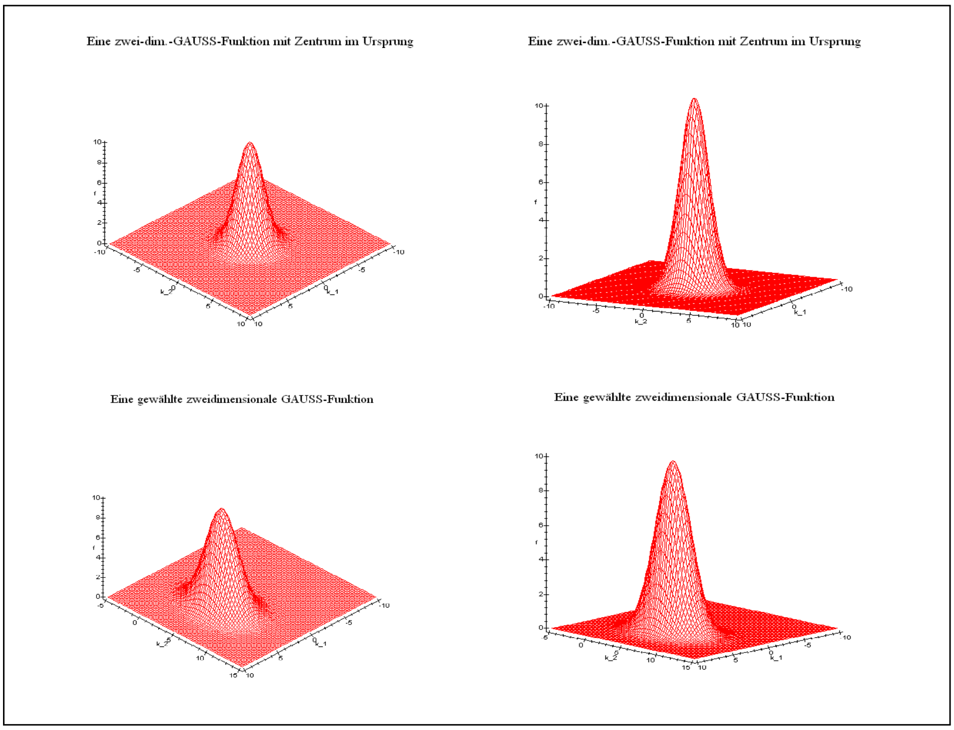

Figure 3.3: Beispiele für zweidimensionale GAUSS-Funktionen. Die beiden oberen Abbildungen zeigen die Funktion im ersten gewählten Fall.

Das entstehende FOURIER-Integral:

$$\psi\left(x,y,t\right)=\iint\limits_{k_1,k_2=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{k_1-k_{10}}{4\sigma_{k_1}^2}\right)^2}\cdot e^{-\left(\frac{k_2-k_{20}}{4\sigma_{k_2}^2}\right)^2}\cdot e^{i\left(k_1x+k_2y-\frac{\hbar\left(k_1^2+k_2^2\right)}{2m}t\right)}dk_2dk_1 \tag{3.11}$$

kann leicht gelöst werden, da man die Integrale faktorisieren kann. Die Lösung kann wiederum als Animation betrachtet werden. Entscheidendes Ergebnis dieser Behandlung ist, dass durch die Maple-Animationen wie ein- wie zweidimensionalen Falle erkennen kann, dass sich die Zukunft eines freien Teilchen nicht voraussagen lässt. Im Gegensatz zur klassischen Beschreibung bewegt es sich nicht auf einer geradlinigen Bahn, die man bestimmen

kann, nach dem man es einmal irgendwo lokalisiert und seinen Impuls an diesem Ort festgestellt hat. Im Gegenteil, es lassen sich quantenmechanisch nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen. Nachdem man einen wahrscheinlichsten Ort festgestellt hat, wird die Zukunft des Teilchens immer unbestimmter, je feiner der wahrscheinlichste Ort festgestellt wurde.
Ein Beispiel aus einer Maple-Animation zeigt die folgende Abbildung:

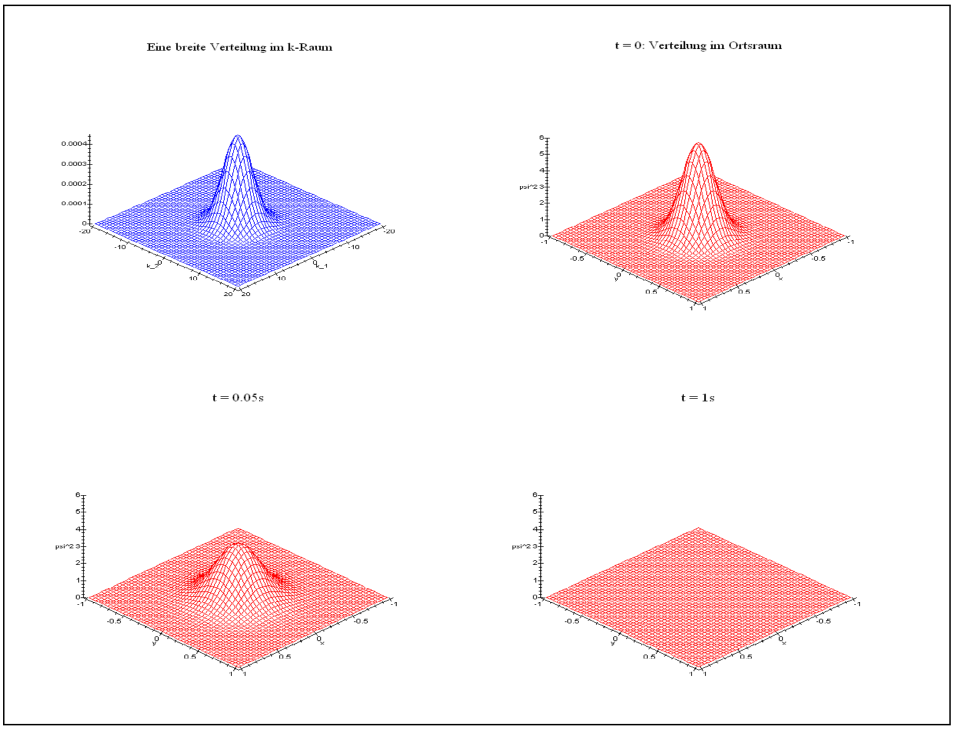

Figure 3.4: Das linke obere Bild zeigt die Darstellung der Funktion $a\left(k_1,k_2\right)^2$ .Die Achseneinheiten sind hier m^{-1} für die horizontalen Achsen. Die anderen Darstellungen zeigen die zeitliche Entwicklung von $\left|\psi\left(x,y,t\right)\right|^2$. Die Einheit der x- bzw- y-Achse ist jeweils m. Man beachte den relativ schnellen Informationsverlust über den Ort des Teilchens!

Da das freie Teilchen streng genommen nur eine mathematische Idealisierung ist, wird anschließend die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein Teilchen in einem Potenzial eingeführt. Da in der Vorlesung nur zeitlich konstante Potenziale betrachtet werden, kann die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung leicht durch einen Separationsansatz aus der zeitabhängigen gewonnen werden.
Diese Vorlesung schließt mit einer Betrachtung der quantenmechanischen

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r},t)|^2 + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{3.12}$$

und der in den folgenden Vorlesungen benötigten Darstellung eines Elektronenstrahls durch eine ebene Welle ab.

Vorlesung 3: Die HEISENBERG-Unschärferelation

Der Umgang mit Maple begünstigt didaktisch die Einführung des Operatorbegriffs, da z.B. die Anwendung des Differentiationsbefehls auf eine Funktion in der Form:

$$\mathrm{diff}(f(x), x) = f'(x)$$

erfolgt und man den Befehl "diff" als "black box" benutzt[6]. Ähnliches gilt für die meisten Befehle für symbolische Operationen. Auf diese Weise ist der Übergang zum Begriff des "Operators" kein größeres Problem mehr. Die dritte Vorlesung beginnt mit der Einführung des Operatorbegriffes und der wichtigsten Definitionen, insbesondere des Eigenwertes und der Eigenfunktion von Operatoren. In diesem Zusammenhang wird dann der HAMILTON-Operator eingeführt und die SCHRÖDINGER-Gleichung als Eigenwertgleichung des HAMILTON-Operators interpretiert. Über die Interpretation des HAMILTON-Operators als Gesamtenergieoperator lässt sich dann der Impulsoperator definieren. Daran anschließend wird der Erwartungswert des Impulsoperators eingeführt[7] und mit Maple wird anschließend seine Eigenwertgleichung im eindimensionalen Fall gelöst. Man erhält als Lösung:

$$\psi(x,t) = f(t) \cdot e^{i\frac{p}{\hbar}x} \tag{3.13}$$

mit einer frei wählbaren Funktion $f(t)$. Diese wird i.A. durch:

$$f(t) = e^{-i\frac{p^2}{2m}t} = e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} \tag{3.14}$$

festgelegt[8], so dass man die Eigenfunktion des Impulsoperators:

$$\psi_p(x,t) = e^{i\frac{p}{\hbar}x} \cdot e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} \tag{3.15}$$

zum Eigenwert p erhält. Allerdings bleibt das Problem der Nichtnormierbarkeit bestehen[9].

[6] Die Kenntnis der Regeln der Differenzialrechnung kann allerdings bei den Hörern der Vorlesung vorausgesetzt werden.

[7] Hierbei kann man an Stochastik-Kenntnisse aus der Schule anknüpfen.

[8] Auf diese Weise beachtet man den Separationsansatz in der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung.

[9] Die Normierbarkeit auf die DIRAC-Funktion ist mathematisch zu anspruchsvoll und kann daher in der Vorlesung nicht behandelt werden. Es kann nur angedeutet werden, dass es noch eine andere Normierbarkeit gibt.

Die Anbindung des quantenmechanischen Formalismus' an das Experiment wird im folgenden über das weitere quantenmechanische Axiom des Korrespondenzprinzips vorgestellt. Es werden HERMITE-Operatoren und die Unschärfe eines Operators definiert, wobei hier die Fehlerrechnung, die die Studierenden im Praktikum lernen eine hilfreiche Verständnisbrücke bildet. Nachdem die Entwicklung der Wellenfunktion nach den Eigenfunktionen eines HERMITE-Operators eingeführt ist, wobei im kontinuierlichen Fall insbesondere das FOURIER-Integral (3.1) hilfreich ist, wird das zentrale Ziel dieser Vorlesung, die Herleitung der HEISENBERG-Unschärferelation an einem Beispiel angesteuert. Maple ist in der Lage FOURIER-Transformationen durchzuführen, d.h. zu einer beliebigen Funktion $f(x)$ die FOURIER-Transformierte gemäß:

$$F(p) = \int_{p=-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx \tag{3.16}$$

zu berechnen[10]. Man kann im zu Vorlesung gehörenden Programm diese Transformation für verschiedene GAUSS-Funktionen $f(x)$ testen und erhält das gleiche Phänomen wie bereits in den ersten beiden Vorlesungen, schmale x-Verteilungen führen zu breiten p-Verteilungen und umgekehrt:

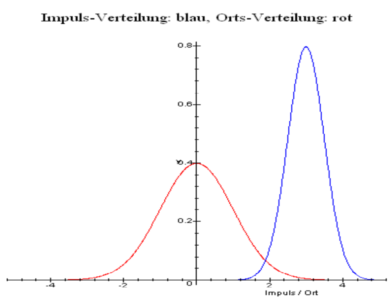

Figure 3.5: Orts- und Impulsverteilung: die Einheiten der x-Achse sind m bzw. kgm/s. Die Einheit der y-Achse ist jeweils die Wurzel aus der Wahrscheinlichkeitsdichte Ort bzw. Impuls.

Analog zum Vorgehen HEISENBERGs im Jahre 1929 wird anschließend für

[10]Das Verfahren der FOURIER-Transformation ist Maple-intern ein einziger Befehl "-fourier". Da der Begriff des Operators nun bekannt ist, ist diese Befehlsstruktur äußerst hilfreich, Respekt vor solch einer Transformation zu nehmen.

ein kräftefreies Teilchen die Unschärferelation hergeleitet. Innerhalb dieser Herleitung wird Maple als „hilfreicher Rechenknecht” genutzt, da sämtliche Integrale bei der Berechnung der Erwartungswerte mit Maple berechnet werden können. Man erhält für das Produkt der beiden Unschärfen des Orts- und Impulsoperators die HEISENBERG-Unschärferelation:

$$\delta x \cdot \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.17}$$

Diese Ungleichung wird dabei nur so interpretiert, dass es nicht möglich ist, ein physikalisches System so zu beschreiben[11], dass die beiden Größen Ort und Impuls zur gleichen Zeit scharf definiert sind. In wie weit es sinnvoll ist, die HEISENBERG-Unschärferelation in der Schule herzuleiten gehen die Meinungen auseinander. In Abschnitt 2.3.8 wurde auf die Problematik schon eingegangen. Die Frage berührt den Kern des Quantenphysikunterrichts in der Schule, nämlich die Frage inwiefern man auf den ganzen Formalismus dort zugunsten einer Betrachtung der Ideen der Quantenphysik verzichten sollte. Die Frage ist nicht abschließend geklärt, an dieser Stelle soll nur darauf eingegangen werden, welchen Beitrag die Anwendung von CAS im Physikunterricht hier leisten kann. Die Anwendung von Maple bietet neben den vielfältigen mathematischen Routinen den entscheidenden Vorteil, dass im Umgang mit Maple das Konzept des Operators spielerisch erlebt wird[12]. Da man Funktionen mit "int" integriert, wird das Integral ganz natürlich als "black box" erlebt, der Übergang zum Operatorbegriff fällt nicht weiter schwer. Die Eigenwertgleichung des Impulsoperators löst Maple ganz von allein, es müssten nur komplexe Zahlen im Unterricht behandelt werden. M.E. kann man Schülern, die über Erfahrungen im Umgang mit Maple besitzen den Formalismus einer FOURIER-Transformation als "black box-Verfahren" zumuten, um dann auf diese Weise nach der graphischen Einführung und Behandlung eines GAUSS-Wellenpakets die HEISENBERG-Ungleichung herzuleiten. Es liegen hierzu allerdings noch keine praktischen Ergebnisse aus dem Schulunterricht vor, so dass die Frage, ob Computeralgebra hier eine Brücke zwischen formaler Quantentheorie und Ideen der modernen Physik in der Schule schlagen kann, noch offen bleibt.

3.2.2 Einfache Modellprobleme

Die nächsten sechs Vorlesungen beinhalten einfache mathematische Modellprobleme der SCHRÖDINGER-Gleichung. Damit wird zum einen das Ziel verfolgt, die Mathematik der SCHRÖDINGER-Gleichung näher kennen zu

[11]Die Wellenfunktion ist ja die einzige Möglichkeit ein physikalisches System so zu beschreiben, dass die Theorie mit dem Experiment übereinstimmt. Die Frage nach dem Realitätsgehalt der Wellenfunktion wird an dieser Stelle in der Vorlesung noch offen gelassen.

[12]Daran anschließend läßt sich auch der Erwartungswert und die Unschärfe eines Operators begründen, wobei an Stochastik-Kenntnisse erinnert werden muss.

lernen, zum anderen wird mit dem Tunneleffekt eine erste experimentelle Bestätigung einer mathematischen Vorhersage, die der klassischen Vorstellung völlig widerspricht gegeben.
Inhalt der vierten Vorlesung ist die Streuung freier Teilchen an einer endlichen Potenzialstufe. Es handelt sich hierbei um das einfachste Modell für eine Reihe von in der Physik häufig vorkommenden Problemen, die man unter dem Begriff "Streuung" zusammenfasst[13]. Es lassen sich bereits aus diesem einfachsten Modell wichtige Schlüsse auf physikalisch beobachtbare Phänomene ziehen.

Vorlesung 4: Streuung freier Teilchen an einer endlichen Potenzialstufe $E > V_0$

So wird in der vierten Vorlesung der Fall behandelt, dass die einfallende Energie größer ist als das abstossende Potenzial. Klassisch erwartet man also keinerlei Reflexion eines Teilchens. Die SCHRÖDINGER-Gleichung wird mit Maple gelöst und graphisch ausgewertet. Von besonderem didaktischen Wert ist die Entwicklung eines GAUSS-Wellenpakets. Über die allgemeine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$\psi(x,t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} a(k) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E(k)t} \cdot \varphi_k(x) \cdot dk \tag{3.18}$$

wobei $\varphi_k(x)$ die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung in den einzelnen Gebieten beschreibt, wird mit der Vorgabe:

$$\begin{aligned} a(k) &= e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\delta_k^2}} && (3.19) \\ E(k) &= \frac{\hbar k^2}{2m} > V_0 && (3.20) \end{aligned}$$

die Reflexion eines Teilchens[14] an der endlichen Potenzialwand mit dem Potenzial V_0 beschrieben. Das Integral wird mit Maple über eine Reihe von vertretbaren Näherungen im zur Vorlesung gehörenden Programm gelöst. Anschließend wird eine Animation des Betragsquadrates gezeigt. Der didaktische Wert der Animation ist beträchtlich, zeigt sie doch das ganze, der klassische Vorstellung widersprechende Phänomen, der teilweisen Reflexion. Auf der anderen Seite wird die Mathematik lebendig und obiges Integral gewinnt sehr stark an Anschauung.
Die folgende Darstellung zeigt Bilder aus dem zur Vorlesung gehörenden

[13] Beispiele hierfür sind die Streuung von Ionen an Ionen, Nukleonen am Atomkern oder die Streuung von Elektronen an einer geladenen Metalloberfläche.

[14] Das einzelne Teilchen wird gemäß der Kopenhagener Interpretation durch ein GAUSS-Wellenpaket repräsentiert.

Maple-Programm:

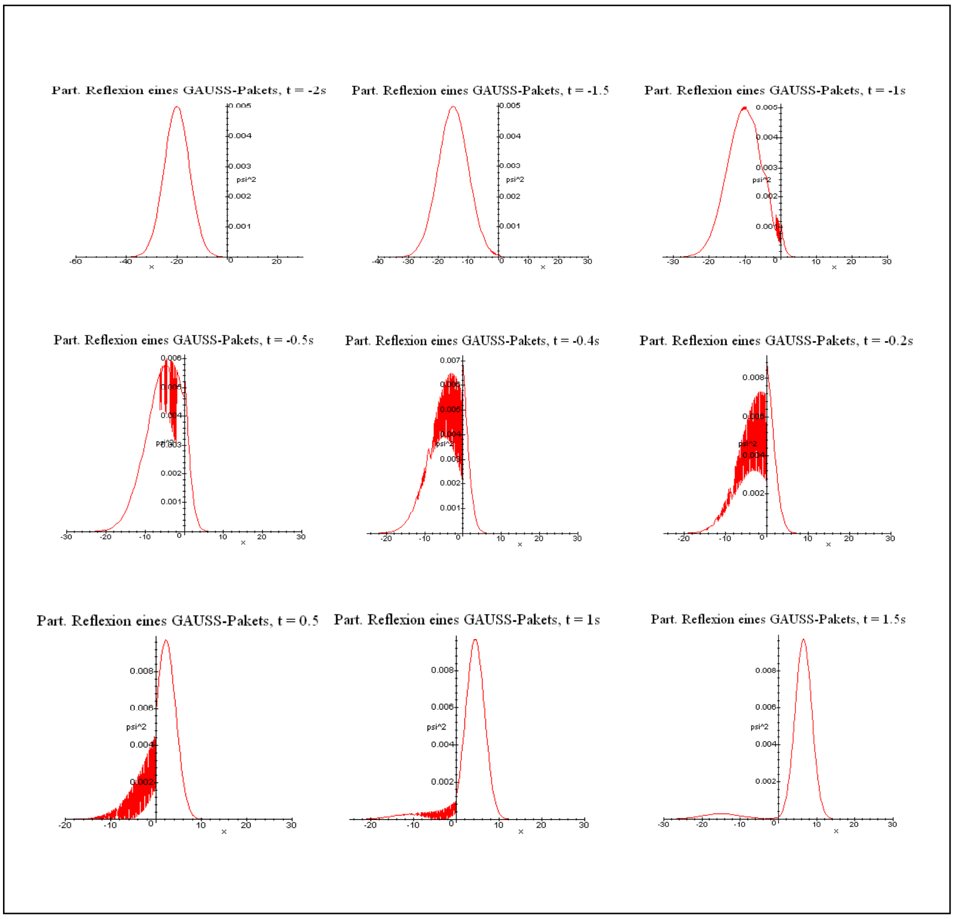

Figure 3.6: Zeitliche Entwicklung der Teilchenzahldichte $|\psi(x,t)|^2$.

Diese Phänomen der teilweisen Rückreflexion ist von der Energie des einfallenden Teilchens abhängig, man kann in zweiten Animation, den Fall $E \gg V_0$ betrachten und kann klar erkennen, dass der reflektierte Anteil stark abnimmt und das quantenmechanische Verhalten sich dem klassisch erwarteten annähert.

Vorlesung 5: Streuung freier Teilchen an einer endlichen Potenzialstufe $E < V_0$

In der fünften Vorlesung wird der Prozess der Streuung an einer endlichen Potenzialwand für den Fall $E < V_0$ behandelt.

Die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung wird mit Maple durchgeführt und auch eine Animation eines GAUSS-Wellenpakets wird analog zum Vorgehen in der vierten Vorlesung berechnet. Die mathematische Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung zeigt ein Eindringen des Teilchens in den klassisch verbotenen Teil, welche vom Unterschied zwischen E und V_0 abhängt. Die Animation des GAUSS-Wellenpakets zeigt dieses klassisch nicht verstehbare Verhalten.
Die folgende Darstellung zeigt die Maple-Ergebnisse:

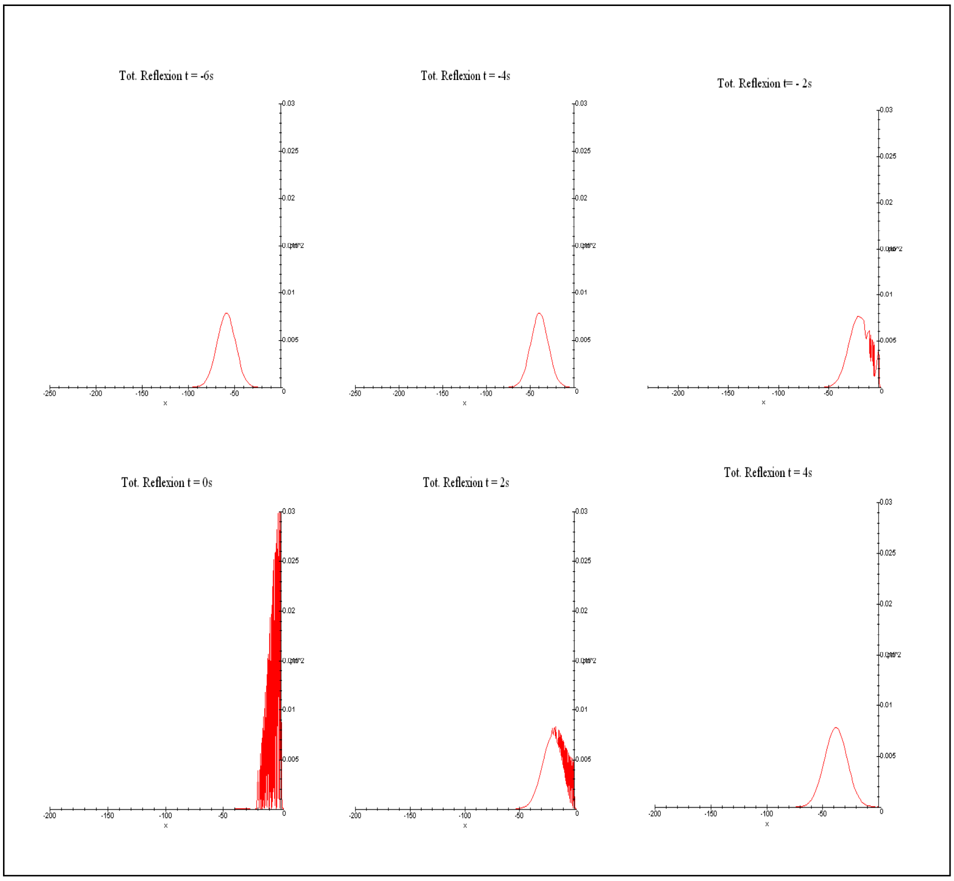

Figure 3.7: Zeitliche Entwicklung von $|\psi\,(x,t)|^2$.

Durch Betrachten der Animation und der anderen mit Maple entwickelten Graphiken taucht automatisch die Frage auf, was denn geschehen würde, wenn der Potenzialbereich nur eine Ausdehnung besitzen würde, die kleiner wäre, als die Eindringtiefe des Wellenpakets. Diese Frage führt zum Tunneleffekt, der Gegenstand der nächsten Vorlesungen ist.

Vorlesung 6: Der Tunneleffekt durch eine Potenzialbarriere

Der Tunneleffekt durch eine Potenzialbarriere ist Gegenstand der sechsten Vorlesung zur Quantenmechanik.
Die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung in den drei Gebieten wird mit Maple berechnet und man erhält aus dieser Rechnung einen Transmissionskoeffizienten[15]:

$$T \approx \frac{32E \cdot (V_0 - E)}{4V_0^2 - 6V_0 \cdot E + 5E^2} \cdot e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}L} \tag{3.21}$$

wobei L die Breite des Potenzialwalls und E die Energie des einfallenden Teilchens darstellen. Man kann an diesem zweierlei erkennen (und mit Maple graphisch erarbeiten): auf der einen Seite kann Information durch den Wall tunneln, auf der anderen Seite nimmt dieser Anteil mit zunehmender Breite des Potenzialwalles exponentiell ab:

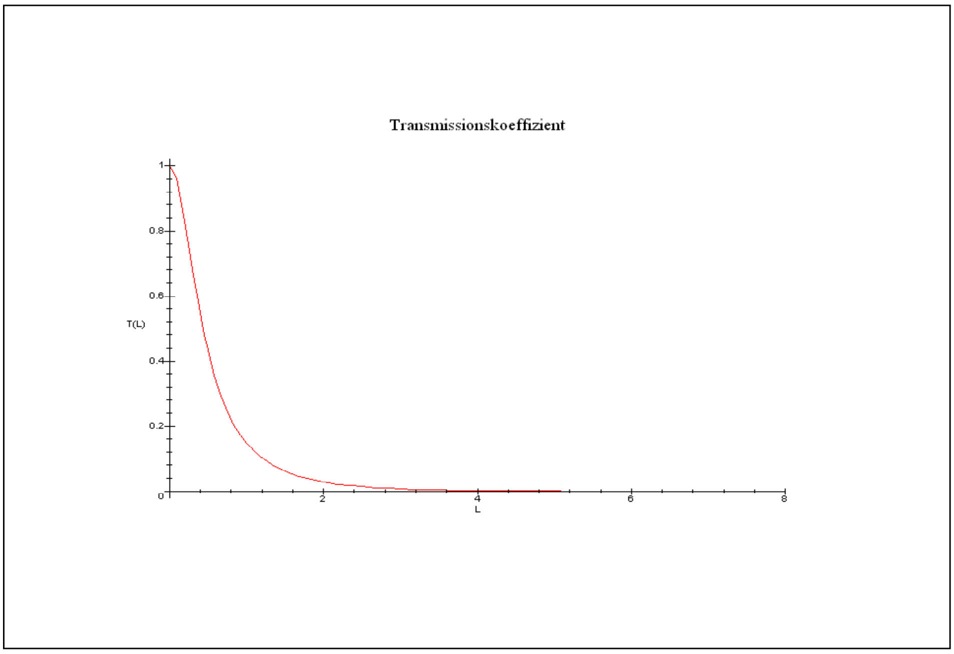

Figure 3.8: Graphische Darstellung des Transmissionskoeffizienten

Natürlich macht erst eine Animation eines GAUSS-Wellenpakets den Effekt

[15] Verhältnis zwischen einfallender und durch den Potenzialwall gehender Information. Klassisch erwartet man einen verschwindenden Anteil, da die Energie des einfallenden Teilchens kleiner als das Potenzial ist.

so richtig deutlich und es ist schon beeindruckend mit anzusehen wie Maple die Mathematik "zum Leben erweckt".
Die folgende Darstellung zeigt die Ergebnisse aus der Maple-Animation:

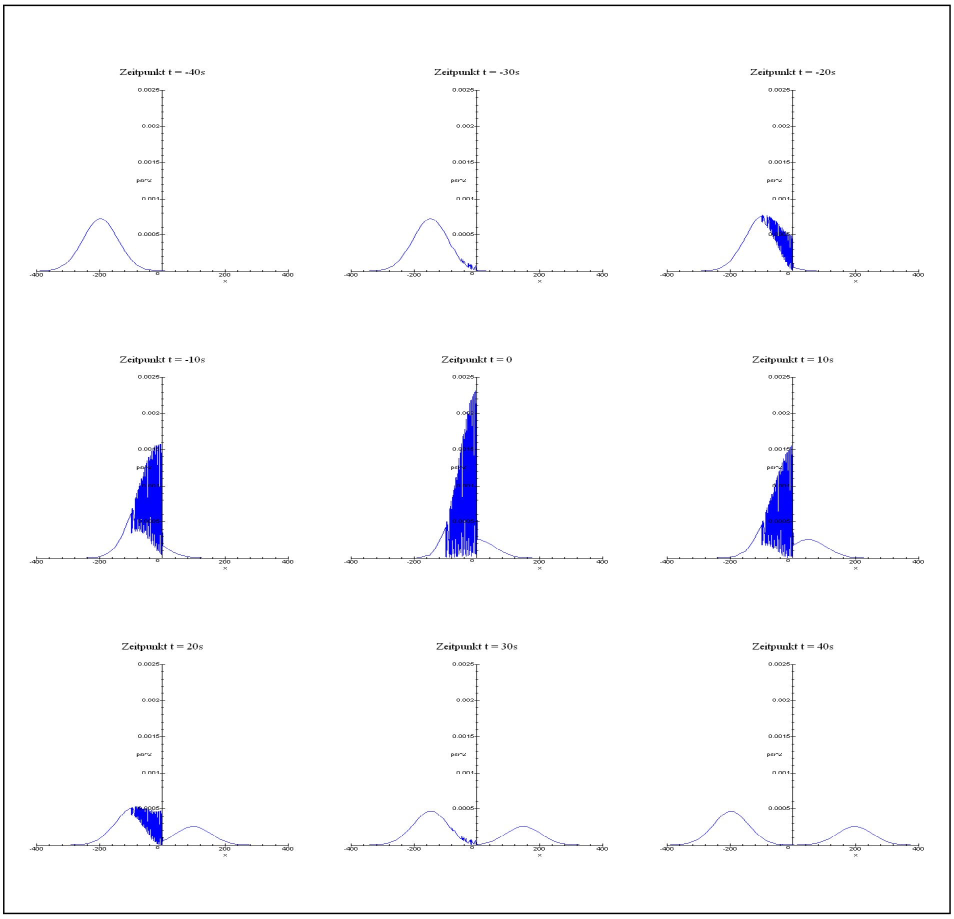

Figure 3.9: Tunneleffekt: Zeitliche Entwicklung von $|\psi\,(x,t)|^2$

Es lassen sich in Abhängigkeit von der Energie des einfallenden Teilchens verschiedene Fälle programmieren und studieren, die den Tunneleffekt verdeutlichen. Das dieser verblüffende Effekt, der natürlich aus der Optik für Licht bekannt ist nun für feste Teilchen, z.B. für Elektronen mathematisch postuliert wird, reizt zur Frage, ob dieser Effekt auch in der Natur zu beobachten ist[16].

[16] Die Studierenden werden immer wieder eindringlich darauf hingewiesen, dass es sich bei den behandelten Problemen um mathematische Modellprobleme handelt. Es gibt in der Natur keine Potenziale die einen solchen Verlauf wie die hier behandelten besitzen, dennoch können die Ergebnisse solcher Modellrechnungen oft auf Naturphänomene zumindest

Vorlesung 7: Der Tunneleffekt als Grunderscheinung der Radioaktivität

Die nächste Vorlesung widmet sich dieser Frage und beschreibt ein Beispiel für einen in der Natur vorkommenden Tunneleffekt: den Tunneleffekt als Grund-erscheinung der natürlichen Radioaktivität. Dieser Effekt wird in aller Ausführlichkeit beschrieben.Die beiden Vorlesungen *Einführung in die Quantenphysik* und *Quantenmechanik* kommen als Grundlage der mündlichen Physikprüfung im Staatsexamen der Studierenden der Sekundarstufe I in Betracht. Aus diesem Grund wurden verschiedene Vorlesungen zu möglichen Prüfungskombinationen zusammengefasst, u.a. die Vorlesung über den Tunneleffekt und sein Vorkommen in der Natur.

Vorlesung 8: Das Modell des endlich tiefen Potenzialtopfes

Die achte Vorlesung behandelt das Modell des endlich tiefen Potenzialtopfes. Man kann es zur Beschreibung von in einem Metall gebunden Elektronen verwenden. Es werden beide Möglichkeiten betrachtet, zum einen, dass die Energie der einfallenden Teilchen positiv ist, man also ein Streuproblem erhält und auf der anderen Seite werden gebundene Teilchen, also der Fall $E < 0$ bearbeitet. Für den Fall postiver Teilchenenergien wird mit Maple die SCHRÖDINGER-Gleichung gelöst und es werden ausführlich Reflexions- und Transmissionskoeffizient untersucht[17]. Da das Verhalten eines GAUSS-Wellenpakets in diesem Fall der Reflexion und Transmission an einer Potenzialstufe entspricht - und damit bekannt ist - wurde in diesem Fall auf eine Animation verzichtet. Viel interessanter ist in der Behandlung dieses Modells, dass der von Maple berechnete Reflexionskoeffizient[18]:

$$|R| = \sqrt{\frac{(\cos(2qa) - 1)(k^2 - q^2)^2}{-6k^2q^2 + k^4\cos(2qa) + q^4\cos(2qa) - k^4 - q^4 - 2k^2q^2\cos(2qa)}} \tag{3.22}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{3.23}$$

in dem Rahmen übertragen werden, dass sie eine brauchbare und in ihren Ergebnissen mit dem Experiment übereinstimmende Erklärung bieten. Es lassen sich zudem auch noch die Potenzialverläufe dem Experiment besser anpassen, jedoch werden dann die Rechnungen oft sehr komplex.

[17] Maple wird dabei eingesetzt, um das aus der SCHRÖDINGER-Gleichung mit Randbedingungen entstehende Gleichungsystem zu lösen und die Koeffizienten anschließend zu vereinfachen. Eine Auswertung für große und kleine postive Energien mittels einer Limesbetrachtung wird mit Maple ebenfalls möglich.

[18] $V_0 < 0$ ist das Potenzial des Potenzialtopfes und a stellt seine Breite dar.

$$q = \sqrt{\frac{2m\left(E - V_0\right)}{\hbar^2}} \qquad (3.24)$$

Nullstellen besitzt, die von der Breite des Topfes und der Potenzialtiefe abhängen[19]:

$$\cos\left(2qa\right) = 1 \Rightarrow qa = n\pi,\ n = 0, 2, 4, 6, ...$$

Man erhält die diskreten Energiewerte:

$$E_n = V_0 + \frac{\left(n\pi\hbar\right)^2}{2ma^2} \qquad (3.25)$$

wobei $E_n > 0$ beachtet werden muss. Dieses klassisch überhaupt verständliche, rein quantenmechanisches Phänomen wird anschließend zur Erklärung des RAMSAUER-Effekts verwendet.
Der zweite Teil der Vorlesung beschäftigt sich dann mit den sogenannten gebundenen Lösungen, also dem Fall $E < 0$. In diesem Fall führt die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung auf ein homogenes Gleichungssystem, dessen triviale Lösung physikalisch keinen Sinn macht. Stattdessen wird mit Maple die Determinante der Koeffizientenmatrix berechnet und man erhält aus der Forderung der Nullidentität der Determinante eine implizite Gleichung in der Variablen κ[20]:

$$2 \cdot \cos\left(a\kappa\right) \cdot \sin\left(a\kappa\right) \cdot \left(q^2 - \kappa^2\right) + +2q\kappa \cdot \left(\sin^2\left(a\kappa\right) - \cos^2\left(a\kappa\right)\right) = 0 \qquad (3.26)$$

Diese Gleichung wird mit Maple nach κ aufgelöst und man erhält zwei Fälle:

$$\kappa = -\frac{q}{\tan\left(qa\right)} = \frac{\sqrt{-\kappa^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}}}{\tan\left(a \cdot \sqrt{-\kappa^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}}\right)} \qquad (3.27)$$

$$\kappa = q \cdot \tan\left(qa\right) = \sqrt{-\kappa^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}} \cdot \tan\left(a \cdot \sqrt{-\kappa^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}}\right) \qquad (3.28)$$

Beide Gleichungen können bei bekanntem Potenzial V_0 numerisch mit Maple gelöst werden, wie auch am Ende der Vorlesung in einem numerischen Beispiel demonstriert wird. Man kann aber auch die folgenden Substitutionen vornehmen:

$$l\ :\ = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2 \qquad (3.29)$$

$$x\ :\ = qa \qquad (3.30)$$

[19] Die Untersuchung für sehr große einfallende Energien E ergab bereits das Ergebnis:

$$\lim_{k\to\infty} |R| = 0$$

[20] Es gilt:

$$\kappa^2 := -E \cdot \frac{2m}{\hbar^2} > 0$$

Die Breite des Potenzialtopfs beträgt 2a.

und man erhält somit:

$$\kappa = \frac{\sqrt{l - x^2}}{a} \tag{3.31}$$

Diesen Ausdruck kann man anschließend in beide Gleichungen für κ einsetzen und beide Seiten der Gleichung graphisch darstellen.
Es wird dann ohne konkrete Kenntnis des Potenzials bereits deutlich, dass man nur diskrete Energiewerte und man kann aus der Graphik mittels der Maustaste näherungsweise die folgenden Werte ablesen:

$$x_n \sim \frac{\pi}{2} \cdot n,\, n = 1, 2, 3, 4, ... \tag{3.32}$$

Hieraus erhält man schließlich die folgende formale Näherung für die diskreten Energiewerte:

$$E_n \sim V_0 + \frac{(n\pi\hbar)^2}{2m\,(2a)^2} < 0 \tag{3.33}$$

Sobald also die Energiewerte größer oder gleich Null werden, ist die Diskretisierung abzubrechen.
An diese formalen Betrachtungen schließt sich ein konkretes numerisches Beispiel an, dass die obigen Überlegungen illustriert. Es werden für beide Fälle die diskreten Energiewerte berechnet und graphisch gezeichnet, um so die Vorstellungen von Energiebändern in einem Festkörper zu verdeutlichen[21].

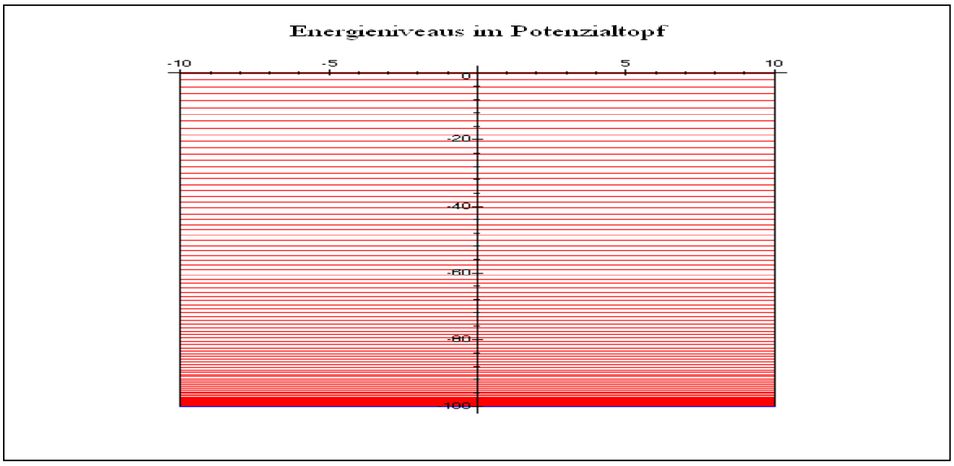

Figure 3.10: Energieniveaus im Potenzialtopf für das gewählte Beispiel.

Mittels der allgemeinen Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für diskrete

[21]Die diskreten Energiewerte liegen in der Nähe des Nullniveaus so dicht beieinander, dass sie praktisch kontinuierlich verteilt wirken.

Energiewerte[22]:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \cdot e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \ , \ a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x) \cdot \varphi_n(x,0) \cdot dx \qquad (3.34)$$

wird über die Anfangsbedingung:

$$\varphi(x,0) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{\delta_x^2}} \qquad (3.35)$$

eine Animation der Lösung berechnet und gezeigt.

Vorlesung 9: Die Kaltemission von Elektronen

Als Anwendung dieses mathematischen Modells sowie als weiteren Beleg für den Tunneleffekt in der Natur wird in der folgenden neunten Vorlesung die Kaltemission von Elektronen aus einem Metall unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes sowie das Rastertunnelmikroskop beschrieben.Wiederum ist die neunte Vorlesung so aufgebaut, dass sie zusammen mit den vorherigen Vorlesungen über den endlich tiefen Potenzialtopf sowie den Tunneleffekt als Prüfungsthema im Examen verwendet werden kann.

[22] Diese Lösung ist bereits aus der ersten Vorlesung zur Quantenmechanik bekannt.

3.2.3 Das Modell des harmonischen Oszillators

Vorlesung 10: Der harmonische Oszillator - klassische Betrachtung

Die nächsten vier Vorlesungen beschäftigen sich ausführlich mit einem der wichtigsten mathematischen Modelle der theoretischen Physik, dem harmonischen Oszillator. Er wird in vielen klassischen Bereichen der Physik angewendet, z.B. der Beschreibung von Schwingungsvorgängen in der Mechanik und Elektrodynamik, PLANCK verwendet dieses Modell zur Beschreibung der Hohlraumstrahlung. Der quantenmechanische harmonische Oszillator wird z.B. in erster Näherung zur Beschreibung von Molekülspektren oder der LANDAU-Niveaus benutzt.
Die erste Vorlesung zum harmonischen Oszillator, Vorlesung 10, knüpft an bereits bekannte Kenntnisse über den klassischen harmonischen Oszillator an. Er wird im beigefügten ersten Maple-Programm zur zehnten Vorlesung ausführlich besprochen, es werden Graphiken gezeigt und Schwingungsvorgänge in Animationen dargestellt.
Von großer Wichtigkeit ist im Hinblick auf die Frage des Übergangs von klassischer Mechanik und Quantenmechanik eine Betrachtung der klassischen Wahrscheinlichkeitsdichte. Dazu wird ein Massenpunkt betrachtet, der zwischen den beiden Punkten -x_0 und x_0 harmonisch hin und her schwingt. Dabei bewegt sich der Massenpunkt in der infinitesimal kleinen Zeit dt um das infinitesimal kleine Wegstück dx, von x nach x+dx.
Eine Vollschwingung dauert die Zeitspanne T. Damit gilt:

$$\int\limits_{t=0}^{T} \frac{dt}{T} = 1 \tag{3.36}$$

Aus diesem Grund kann man $dP := \frac{dt}{T}$ als Wahrscheinlichkeit dafür auffassen, dass sich das Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ aufhält. Dann erhält man für die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{dt}{dx} \tag{3.37}$$

Für ein konkretes mathematisches Beispiel eines im Intervall $[-3m, 3m]$ harmonisch hin und her schwingenden Massenpunkt:

$$x\left(t\right) = -3m \cdot \cos\left(\sqrt{2}\frac{1}{s}t\right) \tag{3.38}$$

erhält man:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3m}x\right)^2}}\frac{1}{m} \tag{3.39}$$

Die folgende Graphik zeigt die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte. Man kann sofort erkennen, dass die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte an den Umkehrpunkten sehr stark zunimmt, mit anderen Worten, die Verweildauer in einem infintesimal kleinen Intervall an den Umkehrpunkten ist am höchsten für alle Orte der Bewegung! Dies ist jedoch nicht weiter verwunderlich, bedenkt man, dass an den Umkehrpunkten ein Abremsvorgang in einen Beschleunigungsvorgang übergeht:

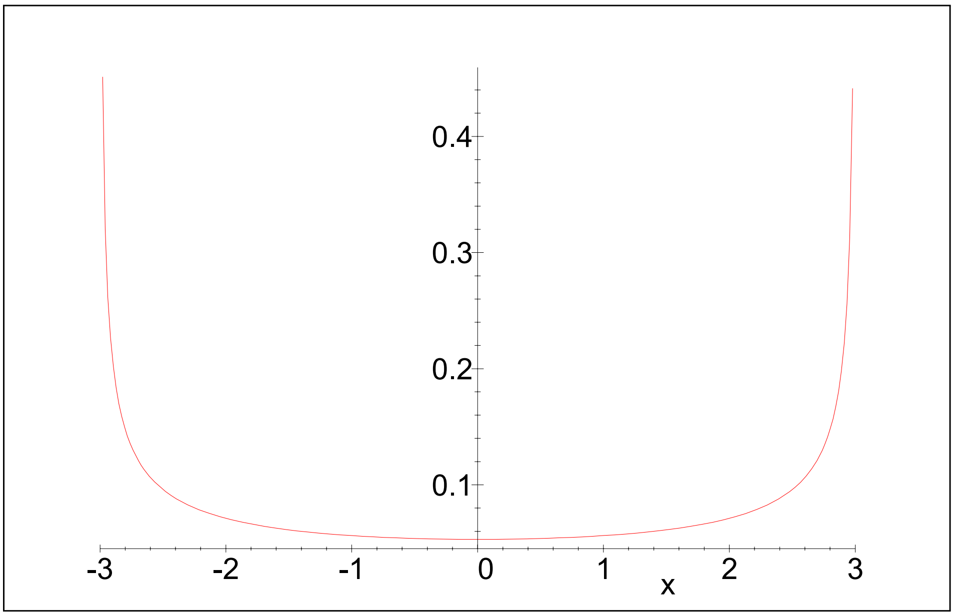

Figure 3.11: Klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte: die Einteilung der x-Achse ist m, die der y-Achse ist 1/m.

Zur Vorbereitung des quantenmecahnischen harmonischen Oszillators werden anschließend die HERMITE-Polynome eingeführt. Mit Maple lässt sich leicht die Aussage, dass die n-Ableitung der GAUSS-Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ gleich einem Polynom n-ten Grades multipliziert mit dem Faktor e^{-z^2} plausibel machen, da man ohne Probleme in einer Schleifenkonstruktion Ableitungen bel. Ordnung symbolisch berechnen kann. Die Definition der HERMITE-Polynome bildet dann keine Probleme mehr. Ebenso lässt sich mit Maple die HERMITE-Differenzialgleichung für verschiedene Ordnungen überprüfen. Eine mathematische Herleitung dieser Differenzialgleichung wurde für interessierte Studierende am Ende des Vorlesungskripts angegeben.

Vorlesung 11: Der harmonische Oszillator -quantenmechanische Betrachtung

Die elfte Vorlesung beschäftigt sich dann mit der Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für das harmonische Oszillatorpotenzial. Die Gleichung wird im beigefügten Maple-Programm gelöst. Da es sich in diesem Falle um eine nicht so einfache Gleichung handelt, wird sie dort schrittweise gelöst und die jeweiligen Zwischenergebnisse werden im Skript festgehalten. Man erhält schließlich die aus der letzten Vorlesung bereits bekannte HERMITE-Differenzialgleichung und durch einen Vergleich beider Gleichungen einen Ausdruck für die diskreten Energien, die ein Teilchen in einem Oszillatorpotenzial annehmen kann:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{3.40}$$

Da Maple die HERMITE-Polynome in einem eigenen Befehl kennt, ist der Umgang mit den Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators bequem und einfach.
Die folgende Abbildung zeigt stationäre Wellenfunktionen, die mit Maple entwickelt und dargestellt wurden:

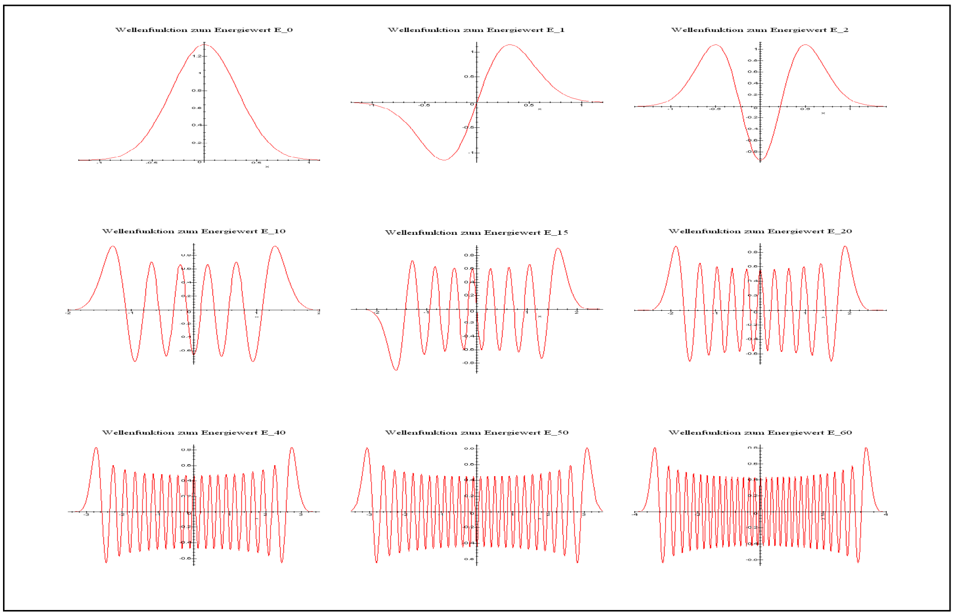

Figure 3.12: Stationäre Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich der quantenmechanischen und der klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte. Dabei wird mit Maple ein

Vergleich der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten für das obige Beispiel für verschiedene n entwickelt und gezeigt. Man erhält mit zunehmender Quantenzahl eine immer stärker werdende Annäherung zwischen quantenmechanischer und klassischer Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte. Die folgende Abbildung zeigt einen Vergleich für den Fall $n = 60$:

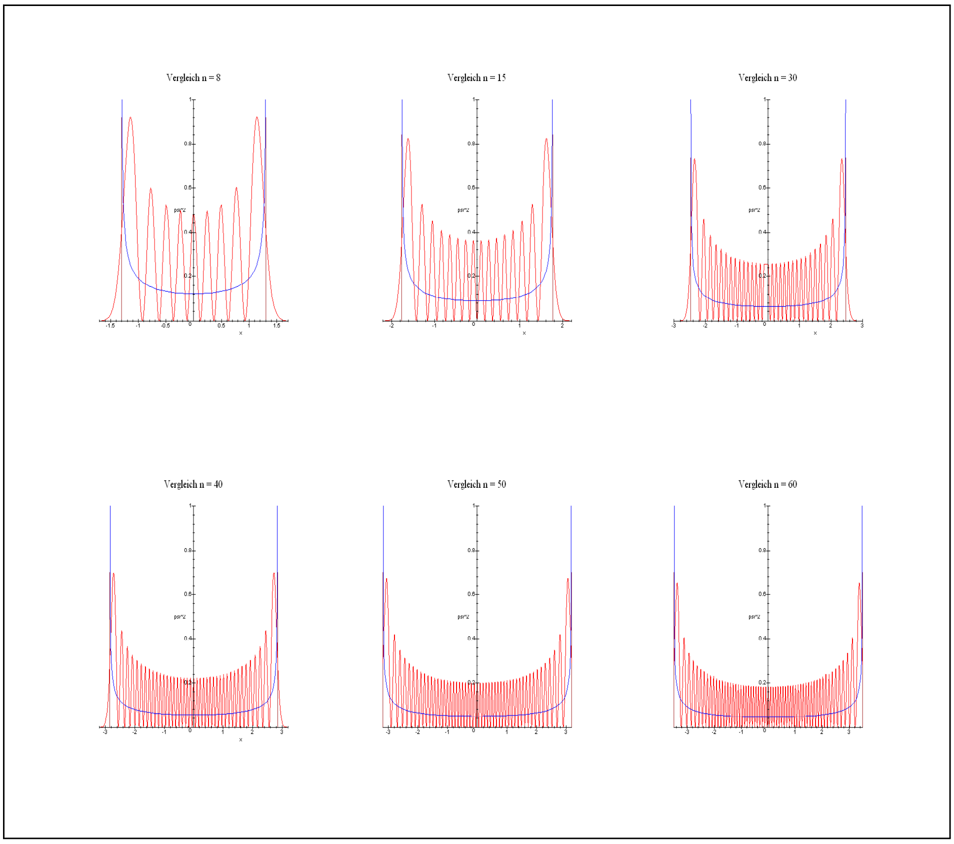

Figure 3.13: Vergleich der klassischen mit der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für eine Folge wachsender Quantenzahlen n. Die Einheit der x-Achse ist m, die der y-Achse ist 1/m.

Diese asymptotische Übereinstimmung in den statistischen Aussagen ist der Kern des Korrespondenzprinzips von BOHR. Es lässt sich m.E. hieraus nicht ableiten, dass bei hohen Quantenzahlen die Gesetze der Quantenmechanik in die klassischen übergehen. WEGENER[23] weist in seiner Untersuchung darauf hin, dass für BOHR aus diesem Prinzip keinesfalls gefolgert wer-

[23] Wegener, U.: Bemerkungen zur Darstellung des Korrespondenzprinzips und des Verhältnisses Quantenmechanik - klassische Physik in einigen Schulbüchern. In: Praxis der Naturwissenschaften 8/1980, S.229-233.

den sollte, dass die Quantnenphysik als Grenzfall die klassische Physik einschließt und dass die unterschiedlichen Prinzipien der klassischen Physik und der Quantenmechanik nicht vergessen werden dürfen. Zwei Zitate BOHRs sollen dies belegen:
1.„Das Korrespondenzprinzip ist ein Ausdruck für die Bestrebung, ungeachtet des grundsätzlichen Gegensatzes zwischen den Postulaten der Quantentheorie und den klassischen Theorien, jeden Zug dieser Theorie bei dem Ausbau der Quantentheorie in sinngemäßer Umdeutung zu verwerten.”
(BOHR[24]1931)
2.„Die Bestrebungen, innerhalb der Quantentheorie, jeden klassischen Begriff in einer Umdeutung zu verwenden, die, ohne mit dem Postulat von der Unteilbarkeit des Wirkungsquantums in Widerspruch zu stehen, dieser Forderung nachkommt, fanden einen Ausdruck in dem sogenannten Korresspondenzprizip.” (BOHR[25] 1931).
Sehr anschaulich ist die im weiteren Verlauf entwickelte Animation eines GAUSS-Wellenpakets, denn der harmonische Oszillator ist das einzige Potenzial, das die Form des Wellenpakets im Falle kohärenter Zustände nicht verändert.

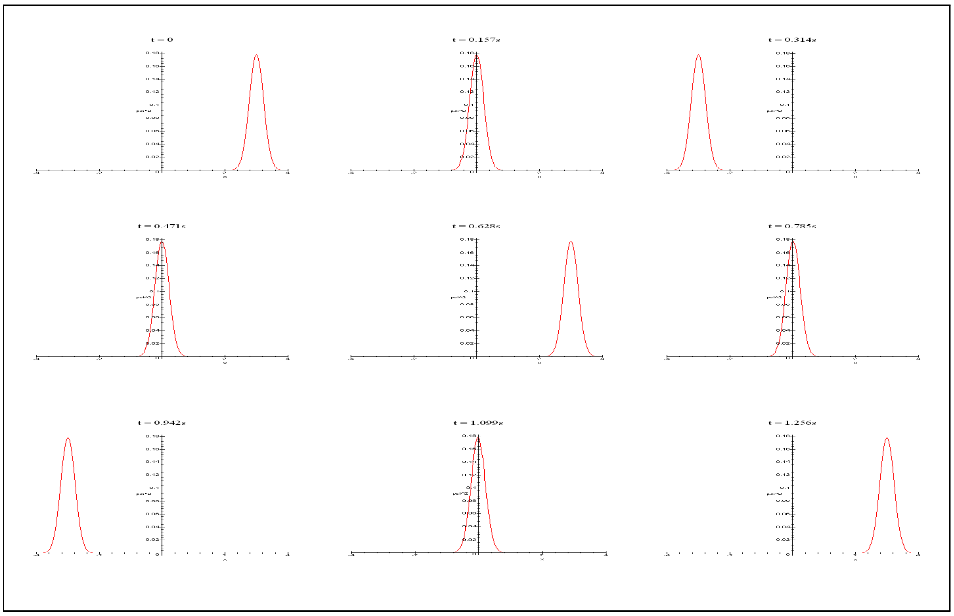

Figure 3.14: Zeitliche Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, die Einheit der x-Achse ist m.

[24]In: Atomtheorie und Naturbeschreibung, S.24. Berlin 1931.
[25]Im geichen Buch, S. 72.

Die mathematische Entwicklung dieser Animation ist im Anhang des Vorlesungsskripts für interessierte Studierende ausführlich beschrieben.

Vorlesung 12: Der zwei- bzw. dreidimensionale Oszillator: quantenmechanische Betrachtung

In der zwölften Vorlesung wird dann über die Einführung von Produktzuständen der zwei- und dreidimensionale harmonische Oszillator be-sprochen. Es tritt in diesem Falle zum ersten Mal eine Entartung der Energie auf, das heißt zu einem festen Energiewert[26] gehören mehrere Wellenfunktionen. Eine anschauliche Animation der Bewegung eines zweidimensionalen GAUSS-Wellenpakets im Vergleich mit der ihr entsprechenden klassischen Schwingung eines Teilchens der Masse m wird im zur Vorlesung gehörenden Maple-Programm entwickelt.

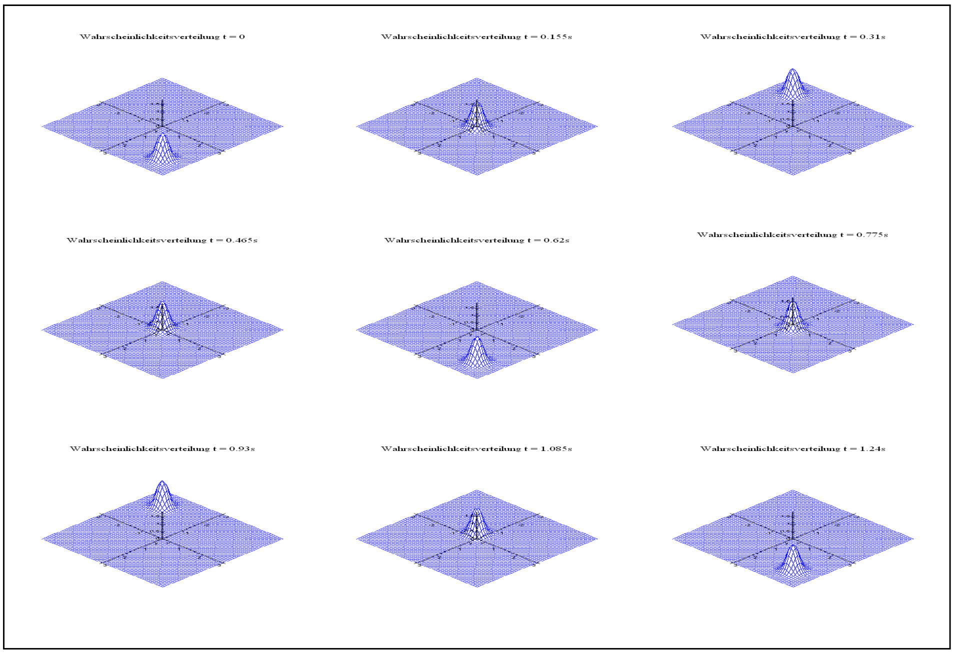

Figure 3.15: Zeitliche Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines zweidimensionalen harm. Oszillators. Die Einheit der x-, bzw. y-Achse ist m.

[26] Mit Ausnahme der Grundzustandsenergie $E_0 = \hbar\omega$ sind alle weiteren diskreten Energieeigenwerte entartet.

Vorlesung 13: Quantenmechanische Betrachtung der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektrischen sowie einem magnetischen Feld, LANDAU-Niveaus

Diese Vorlesung behandelt dann zwei Probleme aus der Elektrodynamik: die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektrischen sowie anschließend in einem magnetischen Feld. Sinn dieser Betrachtung ist es, einen Vergleich zwischen klassischer und quantenmechanischer Beschreibung zu ermöglichen. Für den zweiten Fall stößt man wieder auf die SCHRÖDINGER-Gleichung des harmonischen Oszillators. Für den klassisch erlaubten Teil der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen elektrischen Feld führen klassische wie quantenmechanische Beschreibung auf identische Ergebnisse, so dass die klassische Beschreibung in manchen Fällen selbst für quantenechanische Teilchen wie das Elektron möglich ist. Da sie in jedem Fall einfacher ist, ist sie vorzuziehen.
Die Bewegung eines Elektrons in einem geeignet gewählten homogenen Magnetfeld $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$ führt auf eine Kreisbahn des Elektrons. Dabei ist der klassische Radius des Kreises abhängig von der Energie des Elektrons, die da sie eine Erhaltungsgröße ist, abhängig von den Anfangsbedingungen des Elektrons ist. Man erhält für den klassischen Radius des Elektrons:

$$R_{klass} = \sqrt{\frac{2E}{q^2 B_z^2}} \tag{3.41}$$

Das heißt ein stärker werdendes B-Feld führt zu einem kleineren Kreisradius. Eine Betrachtung der klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte führt auf ein Bild der klassischen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des harmonischen Oszillators, was nicht weiter verwundert. Aus dem Grund ist schon zu erwarten, dass die SCHRÖDINGER-Gleichung in diesem Fall der des harmonischen Oszillators entspricht. Die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein geladenes Teilchen wird ohne Begründung gegeben, da die Studierenden der Sek.I keine Vorkenntnisse der theoretischen Mechanik, insb. der HAMILTON-Funktion besitzen. Die Gleichung wird dann mit Maple im beigefügten Programm gelöst und es wird dabei sichtbar, wie die SCHRÖDINGER-Gleichung des harmonischen Oszillators auftaucht. Die diskreten Energieniveaus, die dabei entstehen, nennt man auch LANDAU-Niveaus. Ein Vergleich mit der klassischen Lösung ergibt dann ein dem obigen klassischen Ergebnis entsprechendes Resultat der Verkleinerung des Kreisradius bei zunehmender Feldstärke.

3.2.4 Das H-Atom

Vorlesung 14: Lösung der LAPLACE-Gleichung

Die folgenden vier Vorlesungen beschäftigen sich dann speziell mit der nicht-relativistischen Theorie des H-Atoms. Die erste der vier Vorlesungen, Vorlesung 14, hat dabei einführenden und vorbereitenden Charakter. So werden Kugelkoordinaten erneut betrachtet und insbesondere Maple-Darstellungen von Funktionen in Kugelkoordinaten eingeführt, da die Interpretation dieser Bilder nicht so ganz einfach ist. Ein internes Manko ist dabei, dass Maple die Kugelkoordinaten θ und ϕ gerade umgekehrt wie in der Literatur üblich definiert[27]. Die LAPLACE-Gleichung in Kugelkoordinaten wird im zur Vorlesung gehörenden Maple-Programm über ein Separationsansatz Schritt für Schritt gelöst. Dabei ist mit Maple sogar ein Potenzreihenansatz möglich! Die in der Lösung entstehenden Funktionen sind zum einen die LEGENDRE-Polynome, die mit Maple entwickelt und graphisch dargestellt werden. Daneben tauchen noch die Kugelfunktionen auf, die ebenfalls mit Maple definiert und für beliebige Kombinationen l und m graphisch dargestellt werden:

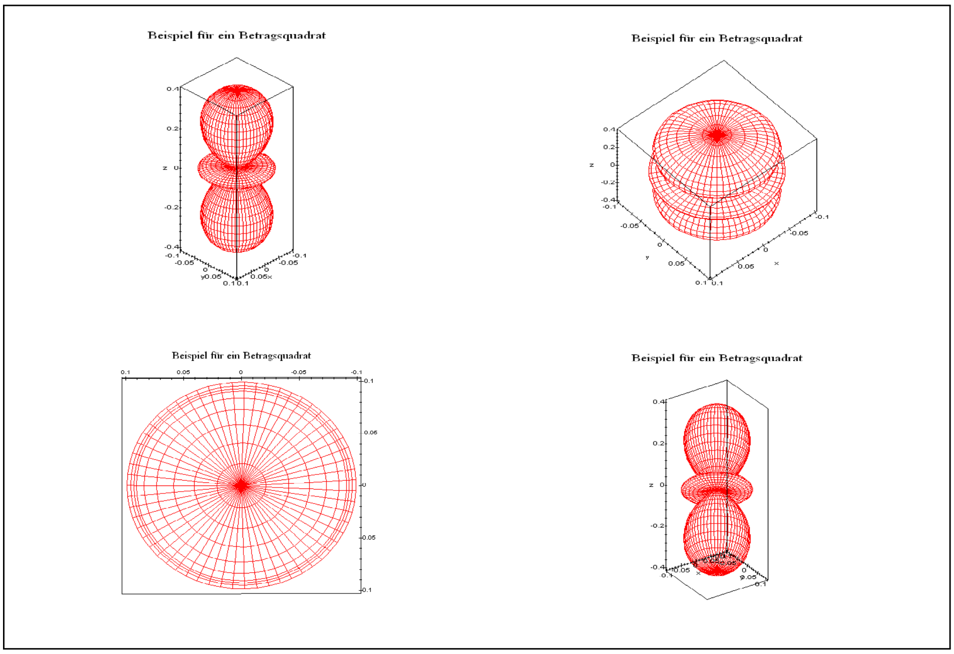

Figure 3.16: $|Y_{20}(\theta, \varphi)|^2$ in verschiedenen Ansichten

[27] Es wurde aber die in der Literatur übliche Notation beibehalten und nur Maple-intern neu programmiert.

Da man diese Darstellungen beliebig drehen kann, ist es möglich sich ein Bild über die Struktur der jeweiligen Kugelfunktion zu machen, die ja später den winkelabhängigen Teil der Wellenfunktion des Elektrons im H-Atom bilden. In diesem Zusammenhang erschien es dann sinnvoll die quantenmechanische Behandlung des Drehimpulses einzuführen, da die Kugelfunktionen die Eigenwertfunktionen des $\hat{\mathrm{L}}^2$-Operators, wie auch des $\hat{\mathrm{L}}_z$-Operators sind. Beide Eigenwertgleichungen:

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.42}$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \phi) = m\hbar \cdot Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{3.43}$$

können mit Maple für jede Kombination l,m nachgewiesen werden. Klassisch nicht zu erklären ist die Diskretsierung des Betrages wie auch der z-Komponente des Drehimpulses, es handelt sich um ein typisches quantenmechanisches Phänomen.

Vorlesung 15: Historische Grundlagen der Atomphysik

Die Entwicklung der Theorie des H-Atoms beginnt dann in der 15. Vorlesung mit einem historischen Rückblick auf die Anfänge der Atomvorstellungen im 18. und 19. Jahrhundert. Es wird die Entdeckung des Elektrons durch J.J. THOMSON sowie die Beobachtung der Linienspektren des Wasserstoffs und ihre mathematische Beschreibung durch verschieden Serien beschrieben. Aus den experimentellen Beobachtungen der Spektrallinien konnte die RYDBERG-Konstante abgelesen werden:

$$R_{\mathrm{exp}} = 1.09678 \cdot 10^{-7} \frac{1}{m} \tag{3.44}$$

Die Übereinstimmung dieses Zahlenwertes mit dem aus der BOHR-Theorie abgeleiteten wird in der nächsten Vorlesung noch eine Rolle in der Brauchbarkeit des BOHR-Modells des H-Atoms spielen. Bevor das BOHR-Modell des H-Atoms eingeführt wird, werden noch zwei andere historische Atommodelle vorgestellt, die beide nachhaltig das Dilemma verdeutlichen, vor dem die Atomphysik zu Beginn des 20. Jahrhunderts stand. Es werden das THOMSON-Modell (1903) und das RUTHERFORD-Modell (1911) beschrieben, wobei letzteres aus der Schule, sowie aus der Vorlesung *Einführung in die Quantenphysik* bereits bekannt ist[28]. Beide Modelle zeigen richtige Ergebnisse, versagen jedoch in der vollständigen Beschreibung der experimentellen Ergebnisse, so folgt aus dem THOMSON-Modell des H-Atoms, dass dieses nur eine einzige Spektrallinie besitzen sollte, während das

[28] Siehe Skript 12 zur "Einführung in die Quantenphysik".

RUTHERFORD-Modell nicht in der Lage ist, die Stabilität der Atome zu begründen, wohl aber die einzige Antwort auf die RUTHERFORD-Streuergebnisse war.

Vorlesung 16: Das Atommodell von BOHR

Man kann über den didaktischen Nutzen des BOHR-Modells des H-Atoms im Schulunterricht geteilter Meinung sein[29], in einem Kurs für Lehramtsstudierende sollte dieses Modell behandelt werden, da es einen Meilenstein in der Entwicklung der Quantenphysik aufweist und deshalb allein aus historischen Gründen von großem Interesse ist. Aus diesem Grund ist das BOHR-Modell des H-Atoms der zentrale Gegenstand der 16. Vorlesung zur Quantenmechanik. Das erste Maple-Programm zeigt Animationen zur klassischen Beschreibung des Zweikörperproblems, um an bereits bekannte Kenntnisse aus der klassischen Mechanik anknüpfen zu können.
Die Problematik des strahlenden Elektrons ist bereits aus der Vorlesung *Einführung in die Quantenphysik* bekannt[30] und so ist klar, dass der offensichtlichen Stabiltät der Atome, sowie der Ergebnisse der RUTHERFORD-Experimente eine neue Theorie zur Beschreibung des H-Atoms und seiner diskreten Linien notwendig wurde. Das zweite Maple-Programm zu dieser Vorlesung enthält alle Graphiken, die sich aus der Theorie BOHRs ergeben.
BOHR berechnete zwei Ausdrücke für die Umlauffrequenz des Elektrons, einen klassischen:

$$\nu_{kl}\left(n\right) = \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt{\frac{32\varepsilon_0 h^3 c^3 R^3}{Z^2 m_e e^4}} \tag{3.45}$$

sowie einen neuartigen quantenphysikalischen. Diese neue korrespondierende Frequenz, die zum Übergang des Zustands n in den Zustand n-1 gehört:

$$\nu_{qu}\left(n\right) = cR\frac{\left(2n-1\right)}{\left(n-1\right)^2 n^2} \tag{3.46}$$

[29] So vertritt z.B. SAUER in seinem Aufsatz "Didaktische Aspekte der Bohrschen Atomtheorie" eine eher kritische Position, da er befürchtet, Schüler könnten als einziges Ergebnis dieser Theorie strahlungsfreie Kreisbahnen des Elektrons im Kopf behalten.
Diese Erkenntnis wäre natürlich kontraproduktiv zur eigentlichen Quantenphysik.
Die gegenteilige didaktische Position vertritt HÖFLING in seinem Aufsatz "Plädoyer für die Behandlung des Bohrschen Atommodells in der Schule". Seine Argumentation ist lernpsychologischer Natur. Es soll dem Schüler ermöglicht werden über das anschauliche BOHR-Modell in den abstrakten Formalismus hineinzuwachsen. Weitere Vorzüge dieses Modells und seiner Erweiterung in das BOHR-SOMMERFELD-Modell sind die Beschreibung wasserstoffähnlicher Atome sowie bei Hinzunahme des PAULI-Prinzips die Aufbauprinzipien der Atomhülle und die chemische Bindung. Für didaktisch besonders wertvoll hält HÖFLING die Überprüfbarkeit der Vorhersagen des BOHR-Modells im Experiment. Beide Aufsätze findet man in: Fischler, H.(Hrsg): Quantenphysik in der Schule, IPN 1992.

[30] Siehe Vorlesung 11 zur *Einführung in die Quantenphysik*.

nähert sich mt wachsendem n immer mehr der klassischen Frequenz an. Dieses Verhalten führt auf das BOHR-Korrespondenzprinzip, im Kern handelt es sich wie weiter vorne angedeutet, um eine asymptotische Annäherung der klassischen und quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsaussagen für große Quantenzahlen n. Die BOHR-Theorie wird in dieser Vorlesung ausführlich dargelegt und insbesondere die Übereinstimmung ihrer theoretischen Vorhersagen (z.B. der RYDBERG-Konstanten und der Linien) mit dem Experiment herausgestrichen. Es hat sich im Laufe der Vorlesung als didaktisch äußerst hilfreich erwiesen, auf zeitgenössische Zitate der Väter der Quantentheorie zurückzugreifen und so schließt diese Vorlesung auch mit einer Beschreibung einer Diskussion zwischen HEISENBERG und BOHR[31], in der BOHR seine Schwierigkeiten und Zweifel mit diesem Modell darlegt. Seine eigenen Gedanken und Zweifel sind äußerst tröstend und machen die Schwierigkeiten deutlich, die selbst Nobelpreisträger mit Quantentheorie hatten. BOHR spricht das zentrale Problem dieser Theorie an, die einen Versuch darstellen muss, Vorgänge zu beschreiben, die eigentlich mit den klassischen Begriffen nicht zu leisten war.

Vorlesung 17: Das H-Atom: quantenmechanische Betrachtung

Die zentrale Vorlesung zur Theorie des H-Atoms ist die nächste, deren Inhalt die nichtrelativistische SCHRÖDINGER-Gleichung des H-Atoms ist. Sie wird mit Maple in aller Ausführlichkeit und in kleinen Schritten gelöst und Zwischenergebnisse werden graphisch dargestellt[32]. In dieser Vorlesung können die Möglichkeiten, die ein CAS wie Maple besitzt voll ausgereizt werden. Es ist für eine beliebige Wahl der Quantenzahlen n, l, m möglich die Radialfunktion, wie auch die Kugelfunktion, also den winkelabhängigen Teil der Wellenfunktion darzustellen. Die Wellenfunktion wird im einzelnen untersucht und die Auswirkungen der Änderung verschiedener Parameter diskutiert[33]. Es wird der Erwartungswert für den Radius für verschiedene Fälle näher betrachtet. Anschließend wird der winkelabhängige Anteil der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in Bildern näher untersucht, wobei insbesondere darauf Wert gelegt, die Bilder in Kugelkoordinaten wirklich zu verstehen. Dies wird mit Maple durch verschiedene Schnitte durch die Bilder erreicht.
Die Stabilität des H-Atoms im Grundzustand, wird über ein Gedankenexperiment unter Zuhilfenahme der HEISENBERG-Unschärferelation erklärt. In diesem Zusammenhang wird deutlich, dass die quantenmechanische Erk-

[31] Sie stammt aus dem Buch: Heisenberg, W.: Der Teil und das Ganze, Piper-Verlag 2001.

[32] So z.B. eine Energiebetrachtung innerhalb der durch einen Separationsansatz entstehende Radialgleichung.

[33] So z.B. der Einfluss der Änderung der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte bei fester Wahl von n und Z und variabler Drehimpulsquantenzahlen l.

lärung der Stabilität einen ganz anderen Charakter besitzt, als erwartet. Da die Beschreibung des Elektrons durch eine Wellenfunktion die bisher einzig sinnvolle ist, ist die Begründung der Stabilität auch eine im Rahmen dieser Beschreibungsart. Es wird an dieser Stelle immer wieder herausgestrichen, dass eine Erklärung dieses Phänomens durch klassische Konzepte zum Scheitern verurteilt sind und dass das eigentliche Problem in der Akzeptanz einer Erklärung über die Unschärferelation damit zusammen hängt, dass ihre Vorstellungen nicht Teil unserer Erfahrung sind.
Den Höhepunkt dieser Vorlesung stellt dann eine Monte-Carlo-Simulation der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte dar. Es ist mit Maple möglich, diese für eine beliebige Wahl der Quantenzahlen n, l, m durchzuführen, da Maple über einen eigenen Zufallszahlengenerator verfügt. Erst durch diese Simulation wird das Neuartige in der Beschreibung durch die Quantenmechanik wirklich sichtbar. Es wird deutlich, dass das H-Atom keinen Rand besitzt. Durch einen Vergleich mit dem winkelabhängigen Anteil wird diese noch besser verständlich, wie die folgende Abbildung zeigt:

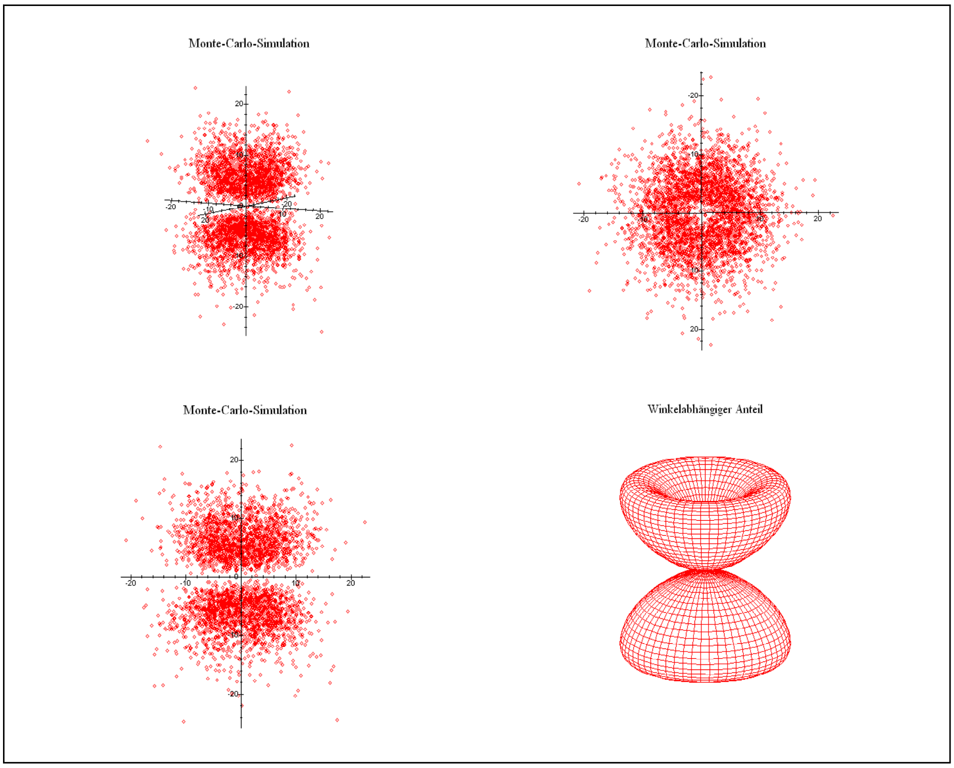

Figure 3.17: Vergleich zwischen Monte-Carlo-Simulation und winkelabhängigem Anteil im Falle nlm = 321.

M.E. bietet diese Form der Darstellung eine völlig neue didaktische Chance, die Ergebnisse der Quantenmechanik zu verdeutlichen und in den Köpfen der Schüler und Studenten eine Planetenvorstellung des H-Atoms zu revidieren und das wesentlich Neue in den Vorstellungen der Quantenmechanik zu verdeutlichen. Die Simulation ist in der Studentenversion immer noch mit über 2000 Zufallszahlen möglich, so dass die Struktur der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für jede Kombination der Quantenzahlen möglich ist. Daneben ist die Simulation beliebig drehbar, so dass ihre Struktur genau betrachtet werden kann. Selbst wenn man im Physikunterricht der Oberstufe die SCHRÖDINGER-Gleichung nicht behandelt, da sie zu abstrakt und von den wesentlichen neuen Ideen eher ablenkt, bedeutet die Möglichkeit von Monte-Carlo-Simulationen m.E. nach ein emi-nent wichtiges Hilfsmittel zur Verdeutlichung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Im Anschluss an die Betrachtung solcher Simulationsbilder kann eine Diskussion der Fragen nach dem Ort des Elektrons etc. erfolgen. Die Schüler können aber erkennen, dass man die Simulationsbilder nur so interpretieren kann, dass entweder bei sehr vielen H-Atomen, die alle im gleichen Zustand sind, gleichzeitig der Ort des Elektrons bestimmt wurde oder ein einzelnes H-Atom wurde im wieder in seinen Ausgangszustand zurückversetzt, um anschließend den Ort des Elektrons zu messen. Man kann ohne Schwierigkeiten erkennen, dass es nicht möglich ist den Ort des Elektrons vorherzusagen, man kann nur Orte mehr oder minder großer Antreffwahrscheinlichkeit (entsprechend der Dichte der Simulationspunkte) angeben. Ausgehend von solchen Bildern lässt sich die Frage diskutieren, ob das Elektron, das an einem bestimmten Punkt festgestellt wurde, sich kurz vorher in der Nähe desselben befunden haben muss. Die Frage führt dann direkt in die spannenden Interpretationsfragen der Quantenmechanik, die m.E. auch in der Schule angesprochen werden sollten.

Chapter 4

Erfahrungen mit Maple in der Lehre

Die beiden Vorlesungen werden seit dem Wintersemester 1999 / 2000 an der Universität Siegen immer abwechselnd angeboten. Da die Hörerzahl bisher noch zu gering war[1] sind die im folgenden beschriebenen Ergebisse reine Erfahrungswerte, die sich aus Gesprächen mit den Studierenden ergeben haben. Zielsetzung dieses Kurses zur Quantenphysik ist es, Lehramtsstudierenden, insbesondere der Sekundarstufen I eine Einführung in die moderne Physik zu geben. Die Entstehung physikalischer Theorien lässt sich in anschaulicher Weise bei der Entwicklung der Quantenphysik beobachten. In diesem Zusammenhang kann als weiteres Ziel das Kennenlernen theoretischer Methoden der Physik angeführt werden. Eine physikalische Theorie kommt ohne mathematische Beschreibung nicht aus und gerade im Bereich der Atomphysik ist es eine eminent wichtige Bildungserfahrung, wenn klar wird, dass die mathematische Beschreibung prinzipiell weiter reicht als die menschliche Vorstellungskraft, die natürlich aus der Lebenserfahrung geprägt ist. An dieser Stelle kann die Einbeziehung von Computeralgebrasystemen in der Lehre eine entscheidende Brücke bilden. Durch die leicht zu entwickelnden graphischen Darstellungen und Animationen beginnt die Mathematik stark an Anschaulichkeit hinzu zu gewinnen und schafft beim Studierenden Vertrauen in ihre Effizienz. Vorbehalte gegen den Formalismus der Quantentheorie lassen sich durch Graphen und Animationen abbauen[2]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass zum jetzigen Zeitpunkt (2002) Maple nur in der Vorlesung als didaktisches Hilfsmittel größtenteils zur Veranschaulichung mathematischer Zusammenhänge benutzt wurde. Die in den Vorlesungen benutzten Maple-Programme wurden den Studierenden zwar

[1] Im ersten Durchgang wurden die Vorlesungen von 9 Hörern besucht, im zweiten von 2.

[2] Aussagen wie "Jetzt habe ich den Sinn der mathematischen Beschreibung erst richtig verstanden", sind nach Beendigung des Kurses keine Seltenheit.

zur Verfügung gestelllt, eignen sich aber in erster Linie nur zur Nachbearbeitung des Vorlesungsstoffes anhand des Skripts. Eigens für die Anwendung von Maple erstellte Übungsprobleme sind in der Vorbereitung. Ziel dieser Entwicklung ist ein vollständig ausgearbeiteter sechsemestriger Kurs zur Einführung in die Physik. Allerdings zeigt die Erfahrung, dass schon die Lehrprogramme von den Studierenden zur Lösung von Probleme genutzt werden. Sie lassen sich an praktisch jeder Stelle abändern, um so weitergehende Fragestellungen eigenständig zu behandeln. Es gelingt im Laufe der Vorlesung zunehmend eine Änderung der Vorstellungen der Studierenden. Während zu Beginn des Kurses zur Quantenphysik rein klassische, den Alltagserfahrungen entnommene Vorstellungen in den Köpfen der Studierenden vorherrschen, wird mit der Einführung elektromagnetischer Wellen und ihrer Visualisierung durch Maple eine Transformation dieser Vorstellungen eingeleitet. Man kann beobachten, wie die Studierenden sich auf diese Darstellungen einlassen und somit eine Änderung ihrer Auffassung von Physik stattfindet, die sich im weiteren Verlauf der Vorlesung noch vertieft.
Problematisch bleibt, dass Rechentechniken nur ungenügend geübt werden. Die Betrachtung der Lösungsschritte an einem vorgefertigten Programm führt leider nur in sehr geringem Umfang zur Übung eigener Rechenfähigkeiten. Aus diesem Grund ist eine Vertiefung der Vorlesung in Form schriftlicher Hausübungen weiterhin notwendig.

Chapter 5

Anhang: Literaturliste und Vorlesungsskripte

Lehrbücher der Experimentalphysik:
Alonso, Marcelo u. Finn, Edward: Physik, Inter European Editions B.V., 1977
Brandt, Siegmund u. Dahmen, Hans Dieter: Mechanik, Springer-Verlag 1996
Brandt, Siegmund u. Dahmen, Hans Dieter: Elektrodynamik, Springer-Verlag 1997
Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik, Bd. 3, Springer-Verlag 2000
Gasiorowicz, Stephen: Quantenphysik, R. Oldenbourg Verlag München, Wien, 1999
Halliday, David u. Resnick, Robert: Physik, Teil 1 / 2, Walter de Gruyter, 1993
Känzig, Werner: Quantenphysik, vdf-Verlag 1990
Lindström, Gunnar u. Langkau, Rudolf: Physik kompakt: Quantenphysik, Vieweg-Verlag, 1996
Schpolski, E. W.: Atomphysik, Bd. 1 / 2, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979
Lehrbücher der theoretischen Physik:
Fliessbach, Torsten: Lehrbuch zur Theoretischen Physik, Bd. 1, Mechanik, Spektrum-Verlag Heidelberg, 1999
Fliessbach, Torsten: Lehrbuch zur Theoretischen Physik, Bd. 2, Elektrodynamik, Spektrum-Verlag Heidelberg, 2000
Fliessbach, Torsten: Lehrbuch zur Theoretischen Physik, Bd. 3, Quantenmechanik, Spektrum-Verlag Heidelberg 2000
Haken, Hermann u. Wolf, Hans Christoph: Molekülphysik und Quantenchemie, Springer-Verlag 1991
Haken, Hermann: Licht und Materie, Bd.1: B.I. Wissenschaftsverlag 1989
Landau, L. D. u. Lifschitz, E. M.: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd.

III, Akademie-Verlag Berlin 1986
Mitter, Heinrich: Quantentheorie, B.I. Wissenschaftsverlag 1994
Scheck, Florian: Mechanik, Springer-Verlag 1996
Schwabl, Franz: Quantenmechanik, Springer-Verlag 1990
Stuart, Herbert: Kurzes Lehrbuch der Physik, Springer-Verlag 1996
Lehrbücher der Physikdidaktik:
Fischler, Helmut (Hrsg): Quantenphysik in der Schule, IPN 1992
Kircher, Ernst: Studien zur Physikdidaktik, IPN 1995
Lerch, Hans-Jürgen: Grundlagen der Didaktik der Physik, Wilhelm Goldmann Verlag München, 1973
Lichtfeldt, Michael: Schülervorstellungen in der Quantenphysik und ihre möglichen Veränderungen durch Unterricht, Dissertation, Westarp Wiss., Essen 1991
Nachtigall, Dieter: Skizzen zur Physikdidaktik, Peter Lang, Frankfurt am Main, Bern, New York, Paris, 1987
Wiesner, Hartmut: Beiträge zur Didaktik der Physik in der Oberstufe, Dissertation, Westarp Wiss., Essen 1989

Chapter 6

Anhang 2: CD im Einbanddeckel: Vorlesungsskripte sowie zu ihnen passende Maple-Dateien

Eine CD am Ende im Einbanddeckel beinhaltet die zur Lehrgang gehörenden Vorlesungsskripte sowie die dazu passenden Maple-Dateien.