Der Unterrichtsinhalt

Analysen am Beispiel von Mathematikunterricht in der Jahrgangsstufe 6

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Philosophie

vorgelegt von
Karin Jänicke

eingereicht beim
Fachbereich 2
(Erziehungswissenschaft – Psychologie – Sportwissenschaft)
der
Universität-Gesamthochschule Siegen

urn:nbn:de:hbz:467-101

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit soll als ein Beitrag zur empirischen Erforschung des Unterrichtsinhalts verstanden werden. Dabei gehe ich von einem Verständnis des Unterrichtsinhalts aus, das sich vom allgemeinen Sprachgebrauch unterscheidet. Mit dem Begriff ‚Unterrichtsinhalt' ist nicht allein das Thema einer Unterrichtsstunde oder die im Unterricht behandelte Sache gemeint, sondern – zunächst vereinfacht und umgangssprachlich ausgedrückt – das, was im Unterricht aus einem (vorgegebenen) Thema ‚gemacht' wird. Aus diesem Verständnis (so viel kann schon hier gesagt werden) ergeben sich zwei Prämissen für die Analyse: Erstens kann der Ausgangspunkt nur der empirisch vorfindliche Unterricht selbst sein. Zweitens kann die Analyse nicht beim Unterricht stehenbleiben, sondern muß darüber hinaus nach Bedingungen suchen und in die Analyse einbinden, die ersichtlich Einfluß auf die Konstitution des Unterrichtsinhalts haben.

Die Anzahl der Vorarbeiten zu diesem Themenkomplex sind dabei unverhältnismäßig gering. Der Unterrichtsinhalt als Forschungsgegenstand scheint bis heute vernachlässigt zu sein. Das ist um so erstaunlicher, wenn man zur Kenntnis nimmt, wie vielfältig sich der aktuelle Stand der Unterrichtsforschung darstellt. Er ist derzeit kaum noch zu überblicken, was bereits als Problem formuliert wird:

> „Aufgrund der Ausdifferenzierung und Verästelung von Fragestellungen, der Entstehung immer neuer Spezialitäten und – nicht zuletzt – der Zunahme von Publikationen wird es zunehmend schwieriger, z.T. schon unmöglich, bestimmte Themen oder Themenbereiche der Unterrichtsforschung – geschweige denn diese insgesamt – verfolgen zu wollen." (Terhart 1995)

Bei einer Durchsicht der (deutschen) Literatur zur Unterrichtsforschung, die aus oben genanntem Grund keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann, findet man nur selten Hinweise, die auf den Forschungsschwerpunkt des Unterrichtsinhalts schließen lassen. Sehr häufig findet man interaktionstheoretische Ansätze (vgl. zum Beispiel Mackert 1983, Voigt 1984, Krummheuer/Voigt 1991) oder aber der Unterrichtsinhalt wird eingeschränkt auf das im Unterricht behandelte Thema (Prereira/Keitel 1995, Niegemann 1981, Tietze 1981). Andere Unterrichtsanalysen, die den Unterrichtsinhalt berücksichtigen, reichen nicht über den Unterricht selbst hinaus (zum Beispiel Faust-Siehl 1987).[1]

Die Analyse von Mathematikunterricht mit dem Schwerpunkt des Unterrichtsinhalts im oben genannten Sinn kann jedoch vor dem Hintergrund der Ergebnisse der *Third International Mathematics and Science Study* , kurz: TIMSS[2] eine neue Aktualität gewinnen. Die internationale Leistungsvergleichsstudie hat in Deutschland ein breites Interesse gefunden. Insbesondere das Ergebnis, daß Deutschland im internationalen Vergleich

---

[1] Wierichs stellte 1989 fest: „Das Unbefriedigende an den bislang vorliegenden empirischen Untersuchungen besteht darin, daß das Beziehungsgefüge, in dem der Unterrichtsinhalt steht, nicht angemessen berücksichtigt wird." (Wierichs 1989, S.61) – Daran scheint sich nichts geändert zu haben.

[2] Vgl. Baumert u.a. (1997 und 1999)

bezüglich der mathematischen Leistungen am Ende der Jahrgangsstufe 8 „nur“ in einem breiten Mittelfeld zu finden ist, hat vielfältige Reaktionen hervorgerufen[3].

Die Suche nach Ursachen und Konsequenzen aus diesen Ergebnissen hat gerade erst begonnen. Baumert, Herausgeber der deskriptiven Ergebnisse von TIMSS II (1997) und TIMSS III (1998 b), sieht mögliche Ursachen für die Leistungsunterschiede in folgenden Bereichen:

> „– in der generellen Wertschätzung von Bildung und schulischem Lernen und der damit verbundenen Bereitschaft, persönliche Ressourcen vor allem nichtmonetärer Art zu investieren
>
> – in der spezifischen Lernkultur eines Schulwesens und in der Bedeutung, die dem kontinuierlichen und systematischen Wissenserwerb und der damit verbundenen Anstrengung und Ausdauer zugemessen wird
>
> – in der gesellschaftlichen und schulischen Wertschätzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer und schließlich
>
> – in der Qualität des Fachunterrichts selbst. Vor allem die deskriptiven Befunde der Video-Studie[4] sprechen dafür, daß weniger die allgemeinen sozialen Interaktionsformen im Unterricht als vielmehr die Aufgabenstellungen und die im Bearbeitungsvorgang ausgelösten kognitiven Prozesse für unterschiedliche Leistungsentwicklungen verantwortlich sind.“ (Baumert 1999, S.65)

Insbesondere der letzte Ursachenkomplex ist häufig mit unterschiedlichen Schwerpunkten diskutiert worden: Von einer neuen „Aufgabenkultur“ oder „Unterrichtskultur“ ist die Rede, man müsse selbsttätiges und kooperatives Lernen fördern, systematisches Wiederholen und Sicherung von Basiskenntnissen und mathematischen Grundvorstellungen sind weitere Stichworte, die vielfach auftauchen (vgl. Baumert/Köller 1998, Baumert 1999, die Beiträge in Blum 1998).

Es werden aber auch ganz unterschiedliche bildungspolitische Konsequenzen gezogen: So spricht Durner (1998) von den Vorteilen des gegliederten Schulsystems, die die TIMS-Studie zu Tage gebracht habe und fordert die Vergleichbarkeit von Schulabschlüssen und zentrale Prüfungen, während sich Ratzki (1998) genötigt sieht, die Gesamtschule zu verteidigen.

Die Konsequenzen aus der TIMS-Studie sind also vielfältig und eigentlich nicht neu. Die Diskussion über eine Verbesserung des Mathematikunterrichts hat schon vor der Veröffentlichung der TIMSS-Ergebnisse eingesetzt. Aber sie haben dazu geführt, daß nun konkrete, staatlich geförderte Maßnahmen ergriffen werden, die zu einer Verbesserung des Mathematikunterrichts führen sollen (z.B. das Programm zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (BLK) von 1997).

Man gewinnt den Eindruck, daß durch die (vorerst) deskriptiven Ergebnisse der TIMS-Studie alte Forderungen zur Verbesserung des Unterrichts neue Schubkraft gewinnen,

---

[3] Vgl. z.B. mathematik lehren, Heft 90, oder Pädagogik, Heft 6/98

[4] Zusätzlich zur TIMSS-Hauptstudie wurden in Deutschland, Japan und USA Unterrichtsstunden videographiert und die unterschiedlichen kulturellen Skripte vergleichend herausgearbeitet (vgl. Baumert u.a., 1997).

die TIMS-Studie selbst – als Leistungsvergleichsstudie – aber wenig geeignet erscheint, solche Forderungen zu belegen. Denn sie schaut nicht in den Unterricht hinein, sondern wertet nur die Ergebnisse des Unterrichts als Leistungsmerkmale von Schülern[5] aus. Mehr Aufschluß könnte die Video-Studie darüber geben, was im Unterricht selbst passiert und welche Faktoren den Unterricht beeinflussen. Die derzeitigen Forschungsschwerpunkte zu TIMSS-Video[6] nehmen allerdings jeweils nur bestimmte Aspekte auf, wie zum Beispiel verbale Interaktion, Unterrichtsklima, Problemlösen im Mathematikunterricht. Keine der Arbeiten läßt nach den Kurzbeschreibungen jedenfalls erkennen, daß der Unterrichtsinhalt im Sinne der hier zugrunde liegenden Definition als Forschungsgegenstand in Betracht gezogen wird.

Die Frage nach der Möglichkeit der Verbesserung des (Mathematik-) Unterrichts kann aber meines Erachtens nicht beantwortet werden, ohne ein Bild davon zu haben, was der Unterrichtsinhalt ist, wie er sich konstituiert, welche Möglichkeiten und Beschränkungen der Aneignung und Interpretation der Welt in ihm aufgehoben sind. Ich möchte in dieser Arbeit daher den Unterrichtsinhalt im Mathematikunterricht auch als einen bisher nur unzureichend berücksichtigten Aspekt für die Unterrichtsqualität herausstellen. Es wird um die Frage gehen, *was* im Unterricht an Wissen *erscheint* und *wie* es erscheint; was sich Schüler im Unterricht also prinzipiell aneignen könnten – nicht aber, was sie sich tatsächlich angeeignet haben – und welche Faktoren zur Begründung und Erklärung beitragen können. Es wird davon ausgegangen, daß sich der Unterrichtsinhalt in einem *Beziehungsgefüge* konstituiert, das grundlegend für das Verständnis und die Analyse des Unterrichtsinhalts ist.

Ich kann mich dabei auf zwei Arbeiten stützen: Menck (1986) und im Anschluß daran Wierichs (1989) haben versucht, eine Theorie des Unterrichtsinhalts darzulegen und eine Methode konzipiert, die eine Untersuchung des Unterrichtsinhalts ermöglicht. Menck verstand seinen Ansatz als fächerübergreifend, Wierichs hat ihn fachlich für den Pädagogikunterricht konkretisiert. In dieser Arbeit möchte ich diesen Ansatz weiter verfolgen und aufzeigen, wie er auch für den Mathematikunterricht fruchtbar gemacht werden kann.

Daraus ergeben sich zwei Schwerpunkte: Einerseits soll die Methode der Analyse von Unterrichtsinhalten weiterentwickelt werden. Es soll deutlich werden, wie die von Menck und Wierichs vorgelegte Methode auf andere Fächer zu übertragen ist. Dazu sind fachdidaktische Überlegungen unerläßlich. Ich habe dennoch versucht, den allgemeinen Gedankengang so herauszustellen, daß eine Übertragbarkeit auch für andere Fächer gewährleistet ist.

---

[5] Ich spreche hier und im folgenden von ‚Schülern' und nicht von ‚Schülern und Schülerinnen', ebenso von ‚Lehrern' und nicht explizit von ‚Lehrern und Lehrerinnen'. Dies hat ausschließlich pragmatische Gründe, und natürlich meine ich damit immer beide Geschlechter.
[6] Nachzulesen auf den Internet-Seiten des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung, Berlin.

Andererseits soll die vorliegende Arbeit Erkenntnisse über den Unterrichtsinhalt im Fach Mathematik liefern. Welcher Art ist das Wissen, das im Unterricht erscheint, wer beansprucht die Geltung für dieses Wissen, haben Schüler die Möglichkeit, das Wissen in Frage zu stellen, welches Bild von Mathematik wird im Unterricht vermittelt, und welche Rolle spielen dabei der Lehrer, die Richtlinien, die Schulform, die Schüler? – Dies sind Fragen, die sich auf den konkreten Unterricht beziehen, und die im empirischen Teil zu beantworten sind.

Im einzelnen gliedert sich die Arbeit wie folgt: Zunächst werde ich den Unterrichtsinhalt theoretisch in einen Zusammenhang mit den ihn bestimmenden Faktoren stellen (Kapitel 2). Wo es notwendig erschien, habe ich den Ansatz von Menck (1986) und Wierichs (1989) durch fachdidaktische Überlegungen zum Mathematikunterricht ergänzt. Dieses Kapitel bildet den theoretischen Hintergrund für die folgenden Überlegungen.

In Kapitel 3 stelle ich zwei mögliche Maßstäbe für eine Kritik des Unterrichtsinhalts vor. Eine Unterrichtsanalyse kann nie rein deskriptiv sein, immer liegen ihr bestimmte Wertmaßstäbe zugrunde. In diesem Kapitel werde ich daher beschreiben, welche Auffassung von ‚gelungenem' Unterricht dieser Arbeit zugrunde liegt und daraus zwei Möglichkeiten ableiten, den Unterrichtsinhalt zu kritisieren. In 3.1 entwickle ich dazu ein sogenanntes ‚Strukturgitter', das die Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis unter bestimmte Kategorien faßt, die dann an den Unterricht angelegt werden können, um zu ermitteln, welches Bild der Mathematik im Unterricht repräsentiert wird. Ein weiterer Maßstab wird unter dem Aspekt der ‚Öffnung des Wissens' (3.2) beschrieben, den ich von Wierichs (1989) übernehme und fachlich für den Mathematikunterricht konkretisiere.

Anschließend werden eine Arbeitshypothese, die Grundlage und die Methode der Unterrichtsanalysen (Kapitel 4) vorgestellt, bevor in Kapitel 5 die Einzelfallanalysen folgen. Hier werden sechs Unterrichtseinheiten (Lehrer A-C), die aus einem Forschungsprojekt stammen, das Mitte der 1970er Jahre begonnen, aber nicht abgeschlossen wurde[7], ausführlich analysiert. Es folgen aus dem Jahr 1998 zwei Unterrichtsanalysen (Lehrer D und E), die sich auf eine knappe Darstellung der wesentlichen Aspekte beschränken. Sie sollen auch dazu dienen, die Aussagekraft der Analysen der älteren Unterrichtsdokumente einzuschätzen. Darauf wird dann im Kapitel 6 näher eingegangen. Außerdem werden hier die Ergebnisse unter den wichtigsten Gesichtspunkten insgesamt zusammengefaßt.

[7] Vgl. Menck 1977

2 Der Unterrichtsinhalt

Der ‚Unterrichtsinhalt' ist im allgemeinen Sprachgebrauch meist ein Synonym für das ‚Thema' einer Unterrichtsstunde, für die ‚Sache', um die es im Unterricht geht. Eine solche Gleichsetzung hat allerdings zur Folge, daß zwei thematisch gleiche Unterrichtsstunden, die aber bei unterschiedlichen Lehrern, an verschiedenen Schulformen oder zu unterschiedlichen historischen Zeiten stattfinden, in ihrem Inhalt nicht zu unterscheiden wären. Daß dies nicht der Fall ist, sagt einem schon die eigene Schulerfahrung. Herwig Blankertz hat dieses Phänomen unter dem Stichwort der „methodischen Leitfrage" zu fassen versucht: Am Beispiel des Themas „Tuberkulose"[8] zeigt er, „daß ein einzelnes und im Wortlaut identisches Thema verschiedene Möglichkeiten für Akzentuierung und damit auch für Unterrichtsziele bietet" (Blankertz 1972, S.98). Inhalt und Thema sind insofern zwei unterschiedliche Dinge, als die Möglichkeit gegeben ist, daß ein Thema verschiedene Unterrichtsinhalte zur Folge haben kann - je nachdem, wo der Schwerpunkt des Themas gesetzt wird. Den Schwerpunkt des Themas setzt vor allem der Lehrer. Doch ist er in seiner Entscheidung nicht völlig frei. Ihm sind durch den Lehrplan, durch die Voraussetzungen seiner Schüler, durch die Schulform, die Lehrbücher, die Didaktik usw. Grenzen gesetzt. Diese vielen Faktoren wirken mit an der Konstitution des Unterrichtsinhalts: Der Unterrichtsinhalt steht in einem „Beziehungsgefüge" (Menck 1986, S. 136).

Menck (1986) und im Anschluß daran Wierichs (1989) haben versucht, diese Faktoren näher aufzuschlüsseln und für eine Analyse des Unterrichtsinhalts fruchtbar zu machen. Diese beiden Arbeiten bilden die Grundlage für dieses erste Kapitel, in dem der Unterrichtsinhalt definiert und in Beziehung zu den ihn bestimmenden Faktoren gesetzt wird. Ich übernehme die wichtigsten Aspekte von Menck und Wierichs und ergänze sie an einigen Stellen durch neuere Forschungsergebnisse, insbesondere aus der fachdidaktischen Diskussion des Mathematikunterrichts.

Bevor das ‚Beziehungsgefüge' nun näher erläutert wird, sollen einige Definitionen eine klare Abgrenzung zwischen verschiedenen didaktischen Begriffen schaffen[9]:

> „ ‚*Fächer*' oder ‚Lernbereiche' umschreiben sachlich abgegrenzte Teilgebiete schulischer Arbeit.
>
> Ein ‚*Thema*' umschreibt eine durch den Lehrplan, also durch Schulgesetze, Richtlinien oder Curricula, vorgegebene, mehr oder weniger eingegrenzte sachliche Einheit innerhalb von Fächern oder auch eine fächerübergreifende Einheit. …
>
> Für alles das, was im Unterricht zur Sprache, ins Bild oder sonst ein Medium kommt - es sei auf das ‚Thema' bezogen oder nicht - soll der Begriff ‚*Inhalt des Unterrichts*' benutzt werden. Eine Teilklasse dieser ‚Inhalte' sind die ‚themenorientierten', die durch das ‚Thema' provozierten und im Blick auf dasselbe produzierten ‚Inhalte'.

---

[8] vgl. ausführlich Blankertz 1972, S.97ff

[9] Diese Definitionen sind in der didaktischen Diskussion nicht unbedingt üblich. Oft wird gar kein Unterschied zwischen „Thema" und „Inhalt" gemacht (vgl. z.B. Blankertz 1972, S.94ff), oder es wird nach anderen Aspekten differenziert (vgl. z.B. Klafki 1977, S.22). Auch aus diesem Grund ist eine saubere Begriffsbestimmung notwendig.

> Vom *‚Unterrichtsergebnis'* soll gesprochen werden, wenn man an all das denkt, was unter Anleitung des jeweils maßgeblichen ‚Themas' unterrichtlicher Arbeit an Sachverhalten erarbeitet, zusammengetragen und als gültig festgehalten wird, das also, worüber die Schüler schließlich verfügen sollen.“ (Menck 1986, S.129)
>
> Mit „Unterrichtsergebnis“ meint Menck allerdings nicht „was in den Köpfen der Schüler und sonstwo als ‚Lernergebnis' bleibt“ (ebd., S.75), sondern er meint „ausschließlich … das, was an der Tafel, in den Heften, jedenfalls im Raume steht“ (ebd., S.74f). Denn nur das ist für den Außenstehenden sichtbar und einer Analyse auch zugänglich.

Im folgenden werde ich mich dem Unterrichtsinhalt nähern, indem ich bei den äußeren Bedingungen beginne und den Kreis der Überlegungen schrittweise einenge. Zunächst wird der Zusammenhang von Unterrichtsinhalt und gesellschaftlicher Praxis bestimmt, danach die Frage der Auswahl betrachtet und schließlich die Rolle der Wissenschaften behandelt, die als Maßstab für das im Unterricht erscheinende Wissen fungiert. Anschließend gehe ich auf die Rolle des Lehrers und der Schüler ein, bevor ich den Unterrichtsablauf selbst betrachte.

2.1 Unterrichtsinhalt als symbolische Repräsentation gesellschaftlicher Praxis

Um das oben erwähnte „Beziehungsgefüge“, in dem der Unterrichtsinhalt steht, durchleuchten zu können, ist es notwendig, den weiteren Zusammenhang von Unterricht und der gesellschaftlichen Praxis zu betrachten.

Menck wählt in seinen Arbeiten den Begriff der „gesellschaftlichen Praxis“ vor allem deshalb, weil „es um die Praxis der Menschheit als Ganzes geht, nicht um die einzelner Menschen, die demgegenüber vergleichsweise beschränkt ist“ (Menck 1983, S.179). Die ‚Praxis einzelner Menschen' kann auch als deren ‚Lebenswelt' bezeichnet werden. Sie ist ein Teil der gesellschaftlichen Praxis und kann sich mit anderen Lebenswelten überschneiden – sie muß es sogar als notwendige Voraussetzung für das Verstehen zwischen einzelnen Individuen.

Wie hängt nun der Unterricht mit der gesellschaftlichen Praxis zusammen? – Unterricht soll dem Heranwachsenden „die kompetente Teilnahme an gesellschaftlicher Praxis der Menschen und an einer historisch bestimmten gesellschaftlichen Existenz ermöglichen“ (ebd., S.178). Folglich muß Unterricht auf die gesellschaftliche Praxis in irgendeiner Form verweisen, wenn er dieses Ziel erreichen will; oder anders formuliert: diese Praxis muß in irgendeiner Weise im Unterricht erscheinen.

Nun ist aber die „Scheidung von Unterricht und Praxis, Alltag, … eine prinzipielle“ (Menck 1980, S.115). Niemals ist im Unterricht der Alltag, die gesellschaftliche Praxis ganz unvermittelt und direkt präsent, sondern sie „erscheint vielmehr in Abbildungen verschiedenster Form, zum Beispiel zur Sprache oder ins Bild gebracht“ (Menck 1980, S.114). Es sind also immer Abbildungen oder Symbole, die die gesellschaftliche Praxis im Unterricht repräsentieren, die *für etwas* außerhalb der Schule stehen sollen. Menck spricht deshalb auch von „symbolischer Repräsentation gesellschaftlicher Praxis“ (vgl.

Menck 1986, S.53ff) im Unterricht.[10] Die spezifische Form, in der die gesellschaftliche Praxis im Unterricht erscheint, ist demnach eine symbolisch vermittelte.

Für die Analyse von Unterrichtsinhalten ist daraus die Konsequenz zu ziehen, daß vom Unterrichtsinhalt Rückschlüsse auf die menschliche Praxis zu ziehen sind. Das, was im Unterricht erscheint, verweist in irgendeiner Form auf einen Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis. Es wäre zu untersuchen, welches Bild von dieser Praxis vermittelt wird, ob es beispielsweise vollständig oder nur unzureichend ist. „Die Analyse von Unterrichtsinhalten muß vom Zeichen zum Bezeichneten gehen, muß den Sinn rekonstruieren, der in den Unterrichtsinhalten gleichsam aufbewahrt liegt.“ (ebd., S.54)

Wenn im Unterricht die gesellschaftliche Praxis symbolisch erscheint, drängt sich die Frage auf, *wer nach welchen Kriterien* aus der Fülle der möglichen Inhalte, die im Unterricht zur Sprache kommen könnten, auswählt. Daß nicht alles, was prinzipiell wißbar wäre, in den Unterricht gelangt, ist wohl leicht einsichtig. Welche Instanzen also bestimmen, was in den Unterricht gelangt und was nicht? Dieser Frage möchte ich im nächsten Abschnitt nachgehen.

2.2 Unterrichtsinhalt und gesellschaftliche Herrschaft

Das Dokument, das Aufschluß darüber gibt, was im Unterricht erscheinen soll, ist der Lehrplan: „Als *Lehrplan* bezeichnet man einen als ‚geistigen Besitz‘ ausgezeichneten Ausschnitt aus der Kultur einer Gesellschaft.“ (Menck 1998, S. 82) Hier wird das festgehalten und verbindlich gemacht, was für ein Leben in dieser Gesellschaft als notwendig erachtet wird. Darüber herrschen aber verschiedene Meinungen: Die Wirtschaft wird etwas anderes für notwendig halten als die Kirche, die einzelnen politischen Parteien etwas anderes als Berufsverbände. Erich Weniger hat den Lehrplan daraufhin untersucht, welche ‚Bildungsmacht‘ die beherrschende sei, und festgestellt, daß eine einzelne niemals ihre Interessen ganz durchzusetzen vermag. Es muß also einen regulierenden Faktor geben, und das ist der Staat:

> „Träger des Lehrplans und regulierender Faktor ist, seit es Lehrpläne im modernen Sinne gibt und bis zur Gegenwart hin, der Staat.“ (Weniger 1963, S. 33)

Der Staat ist einerseits eine Bildungsmacht neben anderen, mit bestimmten Interessen, die er im Kampf mit den anderen durchzusetzen versucht, gleichzeitig „ist die Schule vom Staat aus gesehen selbst Ausdruck seiner geistigen Verfassung“ (ebd., S. 34). Vereinfacht ausgedrückt: Der Staat hat ein Interesse an seiner eigenen Erhaltung, er ist angewiesen auf Menschen, die seine Interessen, seine ‚geistige Verfassung‘ verkörpern. Deshalb wird er in der Schule nur das zulassen können, was seiner Verfassung nicht

[10] Er macht in diesem Zusammenhang noch auf zwei Punkte aufmerksam: Erstens gibt es verschiedene symbolische Formen, er nennt dazu, sich auf Cassirer beziehend, „Mythos, Sprache, Kunst, Religion und Wissenschaft“ (ebd., S.55). Zweitens ist symbolische Repräsentation nicht nur in der Schule zu finden, sondern das ganze menschliche Leben ist durch Symbole, die auf etwas verweisen, bestimmt. Die Aneignung gesellschaftlicher Praxis ist „nur als Aneignung ihrer symbolischen Repräsentation möglich, in und außerhalb der Schule“ (ebd., S.57).

widerspricht. Diese Macht kann er andererseits aber nicht so nutzen, daß er als alleinige Bildungsmacht auftritt, denn die anderen Bildungsmächte sind Teil dieser ‚geistigen Verfassung', und so überträgt sich der Kampf um die Mächteverteilung im Staat auf den Lehrplan.

In der Praxis der Lehrplanentwicklung freilich ist dieser Kampf nur noch sehr schwer zu erkennen: „Lehrplanentwicklung findet in *relativer Autonomie* des Bildungssystems im Rahmen des durch den Staat repräsentierten gesellschaftlichen Systems statt" (Menck 1987, S.366). So lautet eine Hypothese Mencks, die durch die Ergebnisse einer 1984/85 durchgeführten Befragung zur Praxis der Lehrplanentwicklung bestätigt wurde. Es waren fast ausschließlich Lehrer, die an der Lehrplanentwicklung beteiligt waren. So „ergibt sich das Bild eines Regelkreises: aus der Schule für die Schule; die Soll-Werte setzt der Staat, der Kultusminister" (ebd., S.367).

Dennoch – auch wenn es nicht unmittelbar zu sehen ist: Im Lehrplan setzen sich herrschende Mächte durch, reguliert durch den Staat. Es ist die herrschende Kultur, die in den Lehrplan und damit in die Schule Einlaß findet, und sie ist deswegen nur ein Ausschnitt aus der gesamten gesellschaftlichen Praxis:

> „Die Themen, die die Lehrpläne ausweisen, repräsentieren also nicht etwa exemplarisch die Fülle der gesellschaftlichen Praxis. Diese ist vielmehr bereits durch interessenbestimmte Auswahl interpretiert." (Menck 1986, S.83)

Wierichs führt diesen Gedanken weiter fort, indem er anführt, daß es „für den Erziehungswissenschaftler von Belang (ist), *wie* Lernende mit dem Selektierten umgehen" (Wierichs 1989, S.17). Es reiche nicht aus, festzustellen, daß Schule durch die durch den Staat ausgewählten Inhalte eine Reproduktionsfunktion erfülle. Im Anschluß an Wexler (1981) weist er darauf hin, daß „Unterrichtsinhalte … also nicht allein auf gesellschaftliche Praxis bzw. bestimmte Ausschnitte aus ihr (verweisen), sie verweisen immer auch zugleich auf eine Praxis der Sammlung, Systematisierung und Tradierung von Wissen über diese Praxis. Bevor Wissen im Unterricht erscheint, ist es einem komplizierten Prozeß der Kodierung und Neukodierung unterworfen" (ebd., S.18). In einer Analyse von Unterrichtsinhalten muß damit „dem Konstruktionscharakter schulischen Wissens Rechnung" getragen werden, indem die „Quellen des im Unterricht herangezogenen Wissens" (ebd., S.19) berücksichtigt werden. Es ist für den einzelnen Schüler von Bedeutung, wie mit dem Wissen im Unterricht umgegangen wird, ob die Abhängigkeit von herrschenden Interessen sichtbar wird oder nicht. Sichtbar werden kann sie jedoch nur, wenn der Konstruktionscharakter des Wissens deutlich wird, wenn zu erkennen ist, welche Institutionen, wie zum Beispiel Wissenschaft, Fachdidaktik oder Schulbuchindustrie, das Wissen für die Schule transformiert haben (vgl. ebd., S.18f). Denn nur dann wird das Wissen kritisierbar, anfechtbar, und der Schüler bekommt die Chance zu einem distanzierten Umgang mit Schulwissen.

Im Unterricht erscheint also eine symbolisch vermittelte und durch die herrschende Kultur bestimmte Auswahl aus der gesellschaftlichen Praxis. Diese Auswahl wiederum braucht einen Maßstab, der gewährleistet, daß das, was im Unterricht erscheint, trotz der Auswahl repräsentativ für die Praxis außerhalb der Schule ist. Dafür stehen in unserer Gesellschaft die Wissenschaften, die am ehesten ein nicht durch bestimmte Interessen beschränktes Bild der Wirklichkeit liefern[11]. Ihre Rolle im Unterricht soll im folgenden untersucht werden.

2.3 Wissenschaft im Unterricht

Das Postulat der Wissenschaftsorientierung im Unterricht ist seit den 70er Jahren ein wichtiges Thema der Lehrplan- und Unterrichtsgestaltung, und zwar für alle Schulstufen. Der Deutsche Bildungsrat formulierte dieses Postulat 1970 explizit im „Strukturplan für das deutsche Bildungswesen“:

> „Die Bedingungen des Lebens in der modernen Gesellschaft erfordern, daß die Lehr- und Lernprozesse wissenschaftsorientiert sind. … Wissenschaftsorientierung der Bildung bedeutet, daß die Bildungsgegenstände … in ihrer Bedingtheit und Bestimmtheit durch die Wissenschaften erkannt und entsprechend vermittelt werden. … Die Wissenschaftsorientiertheit von Lerngegenstand und Lernmethode gilt für den Unterricht auf jeder Altersstufe.“ (Deutscher Bildungsrat 1972, S.33)

In der jüngeren didaktischen Diskussion wird zwar die Verwissenschaftlichung differenzierter gesehen (vgl. Heymann 1996, S. 80ff), sie ist als Maßstab für das im Unterricht erscheinende Wissen jedoch kaum wegzudenken. Hinter die Ergebnisse der Wissenschaft kann der Unterricht jedenfalls nicht zurückgehen, und die Wissenschaftspropädeutik ist nach wie vor ein fester Bestandteil der Richtlinien der Sekundarstufen I und II. In der neuesten Schrift der Bildungskommission NRW (1995) sucht man das Schlagwort ‚Wissenschaftsorientierung‘ allerdings vergeblich. Bei genauerem Hinsehen jedoch findet man auch hier in etwas anderer Terminologie so etwas wie wissenschaftsorientiertes Lernen: So ist von „unterschiedlichen ‚Wissenslogiken‘, zum Beispiel der Naturwissenschaften und der Sozialwissenschaften“ die Rede oder dem „Erwerb von fachlich organisierten Kenntnissen“ (ebd., S. 96). Ich interpretiere dies als Hinweise auf eine Vorstellung von Unterricht, in dem wissenschaftliche Erkenntnisse und Methoden nach wie vor eine Rolle spielen.[12]

Wierichs legt ausführlich dar, wie es zu dieser starken Orientierung an den Wissenschaften kam und wie es in verschiedenen didaktischen Ansätzen begründet wird (vgl. Wierichs 1989, S.20-26). Ich möchte an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen und mich im folgenden darauf beschränken, die Erscheinungsformen von Wissenschaft und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für den Unterricht näher zu erläutern.

Nach Wierichs, der sich hier auf eine Definition von Wissenschaft des Autorenkollektivs der Karl-Marx-Universität Leipzig (1969) bezieht (vgl. Wierichs 1989, S.27), er-

---

[11] Mit der Formulierung „am ehesten“ ist gemeint, daß auch wissenschaftliche Erkenntnisse nicht frei von Interessen sind. Den Zusammenhang zwischen Erkenntnis und Interesse hat Habermas in seiner gleichnamigen Schrift offengelegt (vgl. Habermas 1970, siehe auch 3.1.1). Dennoch bieten die Wissenschaften im Gegensatz zu zum Beispiel persönlichen Erfahrungen und Ansichten ein Bild der Wirklichkeit, das von persönlichen Interessen weitgehend befreit ist.

[12] Leider bleibt der Text diesbezüglich sehr vage.

scheint Wissenschaft im Unterricht auf verschiedene Weise. Er unterscheidet drei Aspekte (ebd., S.27f):

> „1. Wissenschaft als soziale Erscheinung“ (ebd.), womit gemeint ist, daß der *Prozeß* der Erkenntnistätigkeit „bestimmte, eben wissenschaftliche Methoden, Vorgehensweisen etc.“ (ebd.) notwendig macht, die eingebettet sind in ein soziales System. Er spricht damit auch den wissenschaftlichen Diskurs an, der immer mit der Entstehung von wissenschaftlichen Erkenntnissen verbunden ist.
>
> „2. Wissenschaft als Produkt der Erkenntnistätigkeit“ (ebd.), denn Wissenschaft erzeugt Thesen, Hypothesen und Theorien (vgl. Derbolav 1977), die den Menschen dazu dienen sollen, praktische Probleme zu bewältigen. Wissenschaft stellt also ein Konglomerat an Theorien und Methoden bereit.
>
> „3. Wissenschaft als soziale Funktion“ (Wierichs 1989, S.28), was bedeutet, daß die Gesellschaft ein Interesse an den Erkenntnissen der Wissenschaft hat, es besteht ein gesellschaftlicher „Verwertungszusammenhang“ (ebd.), da wissenschaftliches Wissen in zunehmendem Maße gesellschaftlich genutzt wird.

Wenn Wissenschaft so verstanden wird, müßten demnach auch alle ihre Erscheinungsformen in einem Unterricht vorkommen, der die Wissenschaftsorientierung postuliert. Wierichs vermutet und stützt sich dabei auf einige Forschungsarbeiten zu diesem Thema, „daß in der Unterrichtspraxis faktisch vornehmlich der zweite Aspekt von Wissenschaft wirksam wird, indem wissenschaftliche Erkenntnisse – für Schule transformiert – zu Unterrichtsinhalten werden“ (ebd., S.28).

Wissenschaft als *soziale Erscheinung* kommt damit im Unterricht meist nicht zur Sprache, obwohl „Wissen … untrennbar mit einer diskursiven Praxis verbunden (ist), in der es erst seine erkenntnisbildende Kraft entfaltet“ (ebd., S.29). Indem im Unterricht nur die Ergebnisse der wissenschaftlichen Diskurse erscheinen, kann „die harte und oft vergebliche Arbeit an der Sache …, die Forschung nun einmal mit sich bringt“ (Derbolav 1977, S.940), dem Schüler nicht verständlich werden. Gerade im Mathematikunterricht erscheint die Mathematik dann als eine fertige Sache, so als ob sie schon immer dagewesen wäre. Man mutet Schülern zu, ein Wissen zu beherrschen, das in Jahrtausenden entstanden ist. Daß der Weg bis zu diesen Kenntnissen nicht immer problemlos war und ist, kann bei einer Ausblendung von Wissenschaft als sozialer Erscheinung nicht deutlich werden[13].

Wissenschaft in ihrer *sozialen Funktion* bringt nach Wierichs zwei Konsequenzen für den Unterricht mit sich: Zum einen wird dadurch deutlich, „daß im Unterricht eine an gesellschaftlichen Interessen orientierte Auswahl aus dem gesellschaftlich verfügbaren Wissen erscheint“ (Wierichs 1989, S.30f). Darauf wurde bereits im Abschnitt 2.2 aufmerksam gemacht. Zum anderen weist er darauf hin, daß die zunehmende Bedeutung wissenschaftlicher Erkenntnisse für die Gesellschaft auch eine zunehmende Durchdringung des Alltagswissens durch die Wissenschaft impliziert, d.h. eine „zunehmende Verwissenschaftlichung des Alltagslebens“ (ebd., S.30) stattfindet. Die Wissenschaften, ihre Erkenntnisse und Methoden, sind aus unserer alltäglichen Lebenswelt kaum mehr

---

[13] Ausführlich wird auf diesen Aspekt bei der Entwicklung des Strukturgitters eingegangen (3.1)

wegzudenken.[14] Für den Unterricht folgt daraus die Konsequenz, daß der gesellschaftliche Verwertungszusammenhang sichtbar werden müßte, indem die Bedeutung der Wissenschaft für das alltägliche Handeln herausgestellt wird.

Es ergibt sich nun die Frage, wie Schüler wissenschaftliches Wissen im Alltag nutzen können, und das heißt: Wie kann wissenschaftliches Wissen in das Alltagswissen integriert werden? Um diese Frage beantworten zu können, ist es notwendig, das Verhältnis zwischen wissenschaftlichem Wissen und Alltagswissen zu klären. Es gibt zwei gegensätzliche Auffassungen darüber, die Heymann (1996) als Differenz- und Kontinuitätsannahme bezeichnet[15]:

> „*Differenzannahme*: Alltägliches und mathematisches (allgemeiner: wissenschaftliches, K.J.) Denken sind grundverschieden. Das Alltagsdenken ist – wie die Alltagssprache, auf die es sich stützt – vage, unpräzise und führt zu keinen klaren Ergebnissen. …
>
> *Kontinuitätsannahme*: Das mathematische (allgemeiner: wissenschaftliche, K.J.) Denken stellt gleichsam eine systematische Fortschreibung des Alltagsdenkens dar: Das Alltagsdenken wird durch Schärfung seiner Begrifflichkeit und durch systematische und bewußte Anwendung bestimmter Schlußweisen und Strategien … für eine bestimmte Klasse von Problemen … effektiviert." (ebd., S. 224)

Je nachdem, welcher Auffassung man zustimmt, wird man andere Folgerungen für den Umgang mit Wissenschaft im Unterricht ableiten. So weisen Wierichs' Argumente auf die Differenzhypothese hin: „Schulwissen ist nicht eine unvermittelte Fortsetzung oder Präzisierung lebensweltlichen Wissens, sondern hat eine eigene Qualität, die im Unterricht als solche deutlich werden müßte" (Wierichs 1989, S.34). Weder könne das Alltagswissen ohne weiteres der Wissenschaft subsumiert werden, noch wissenschaftliches Wissen ohne Schwierigkeiten in den alltäglichen Wissensvorrat integriert werden. „Mit der wissenschaftlichen Erfassung eines Objektes ist also nicht eine Präzisierung der lebensweltlichen Erfahrung verbunden, sondern jene Erfassung bedeutet einen Bruch mit den im Alltagswissen vorhandenen Deutungsschemata" (ebd., S.33). Die Konsequenz aus der Differenzannahme besteht für Wierichs also darin, im Unterricht auf die Unterschiedlichkeit der beiden Denkformen aufmerksam zu machen, so daß Schüler wissenschaftliches Wissen *neben* ihrem alltäglichen Wissensvorrat nutzen können.

Ganz anders sehen die Konsequenzen für Heymann aus, der von einer Kontinuitätsannahme ausgeht: Wenn Schüler Schwierigkeiten im Umgang mit der Wissenschaft Mathematik haben, die oft sogar im krassen Widerspruch zu ihrem Alltagswissen[16] steht,

---

[14] Man denke hier beispielsweise an die heute selbstverständliche Anwendung moderner Informations- und Kommunikationstechnologien oder die breite Diskussion über Gentechnologie.

[15] Die Begriffe verwendet Heymann im Zusammenhang mit mathematischem und alltäglichem Denken und nicht, um allgemein die Unterschiede zwischen wissenschaftlichem und alltäglichem Denken herauszustellen. Ich glaube aber, daß man diese Annahmen verallgemeinern kann. An anderer Stelle heißt es auch bei Heymann: „Für die Schüler sollte erkennbar werden, daß wissenschaftliches Denken in vielerlei Hinsicht eine systematisierte, sich methodisch absichernde Spielart des Alltagsdenkens darstellt." (ebd., S. 95) Hier finden wir die – von Heymann favorisierte – Kontinuitätshypothese allgemein formuliert wieder.

[16] Er bezieht sich hier u.a. auf eine Untersuchung von Rosnick/Clement, die auch bei Malle (1993) nachzulesen ist: Studenten und Akademiker sollten eine Aussage durch eine algebraische Gleichung ausdrü-

so liege das nicht daran, daß ihnen die Andersartigkeit nicht genügend bewußt sei, sondern daran, daß nicht genügend Anknüpfungspunkte zu ihrem Alltagswissen geschaffen wurden. Denn das mathematische Denken entspringt dem Alltagsdenken, es benutzt zwar eine andere Sprache mit einer anderen Grammatik (vgl. ebd., S.233), aber das eine geht aus dem anderen hervor. Insofern kann Mathematik als „ ‚Verstärker' des Alltagsdenkens" (ebd.) wirksam werden.

Es kann und soll hier nicht entschieden werden, welche dieser beiden Annahmen richtig oder falsch ist. Es sind, und darauf weist auch Heymann hin, zwei empirisch nicht zu beweisende Hypothesen, die auf spezifische Erscheinungsformen von Wissenschaft im Unterricht aufmerksam machen, und die Art und Weise, wie im Unterricht damit umgegangen wird, auf die eine oder andere Weise interpretierbar machen. Darin liegt die Bedeutung für eine Analyse des Unterrichtsinhaltes.

Ich komme nun zu den am Unterrichtsprozeß direkt beteiligten Personen: der Lehrer und, im Anschluß daran, die Schüler.

2.4 Der Lehrer im Unterricht

Zunächst kann festgestellt werden, daß der Lehrer im Unterricht mit pädagogischer Autorität ausgestattet ist. Schule ist, wie im Zusammenhang mit dem Begriff der gesellschaftlichen Herrschaft bereits erwähnt, mit staatlicher Autorität ausgestattet und im Unterricht ist es der Lehrer, der sie repräsentiert.

> „Der Lehrer ist es, der
> – das Thema setzt (oder zumindest die Themensetzung autorisiert),
> – die Richtung der Interpretationen angibt,
> – die Richtigkeit der einzelnen Interpretationen beurteilt,
> – den Interpretationsprozeß motivierend in Gang hält (dann besonders, wenn die Nötigung zur Interpretation nicht gleichsam im Ziel selbst liegt, sondern ihm äußerlich ist,
> – den Prozeß abschließt" (Menck 1986, S.147).

Das heißt, daß dem Lehrer in der Hauptsache die strukturierenden, auffordernden und fortführenden Spielzüge[17] zukommen. Wenn Schüler von sich aus ein Thema aufbringen, kann es vom Lehrer autorisiert oder zurückgewiesen werden, aber auch dann liegt die steuernde Funktion beim Lehrer.

Voigt (1984), der Mathematikunterricht unter interaktionstheoretischer Perspektive untersucht hat, beleuchtet dieses Phänomen unter dem Aspekt der Situationsdefinition (vgl. Voigt 1984, S.32). Situationen, in denen sich Interaktionspartner befinden, können unterschiedlich definiert werden, man kann in den seltensten Fällen davon ausgehen, daß zwei Interaktionspartner eine Situation gleich deuten. Solche Definitionen müssen immer wieder ausgehandelt werden, damit Verständigung überhaupt möglich ist. In der

---

cken, mit dem Ergebnis: „Was mathematisch ‚richtig' ist, scheint einem großen Teil der Probanden im Rahmen ihres Alltagsdenkens nicht als ‚vernünftig' – und das, obwohl sie unter algorithmischem Aspekt das betreffende Teilgebiet der Schulmathematik … durchaus beherrschen" (Heymann 1996, S.210).

[17] Siehe dazu den Abschnitt 2.6 .

unterrichtlichen Interaktion jedoch sind die Interaktionspartner nicht gleichberechtigt, der Lehrer besitzt mehr Macht als der Schüler, er besitzt die Definitionsmacht:

> In der Institution Schule „gewinnt die Situationsdefinition des Lehrers einen normativen Charakter. Das gilt darüber hinaus insbesondere für den Mathematikunterricht, da die Schulmathematik wie die Mathematik logisch sequentiert und formalisiert ist. Der Lehrer ist bezüglich dieser Aspekte nicht frei in seinen Situationsdefinitionen und läßt letztlich deutlich divergierende Situationsdefinitionen der Schüler nicht zu.“ (ebd., S.39)

Dem Lehrer kommt die Aufgabe zu, dem offiziellen Wissen Geltung zu verschaffen. Im Unterricht wird Wissen konstituiert, am Ende eines Unterrichts steht ein Unterrichtsergebnis, in dem dieses Wissen aufgehoben ist. Welche Interpretationen Geltung erhalten und welche nicht, entscheidet der Lehrer. Zwar können „Geltungsansprüche … bestritten und geprüft werden“ (Wierichs 1989, S.56), Wierichs nennt dazu Kriterien (vgl. ebd., S.56), aber welche „Interpretationen im Unterricht wahr oder richtig sind, entscheidet der Lehrer dadurch, daß er sie bewertet“ (ebd., S.56).[18] Auf welche Autoritäten er sich dabei bezieht, liegt am Lehrer selbst: Er kann das Wissen allein durch seine pädagogische Autorität durchsetzen, die ihm durch die Institution Schule gegeben ist, er kann sich aber auch auf andere Instanzen berufen. So steht hinter dem Wissen der Wissenschaft „eben ‚die‘ Wissenschaft, als formale Organisation in Universitäten bzw. in Instituten, von Wissenschaftlern betrieben und dem Kriterium der ‚Wissenschaftlichkeit‘ verpflichtet“ (Menck 1986, S.96), oder „hinter ‚meinen‘ Erfahrungen steht – das Ich, Subjekt seiner Erfahrungen, und seine Wahrhaftigkeit“ (ebd.) – oder, wie ich hinzufügen möchte: die ‚Autorität‘ des vorangegangenen Mathematikunterrichts. Wenn im Konfliktfall die Autorität des Lehrers in Frage gestellt werden muß, dann sind es diese Instanzen, die die Interpretationen letztendlich durchsetzen. Andersherum ausgedrückt: Je klarer diese Instanzen im Unterricht sichtbar werden, desto einfacher ist es für Schüler, die Interpretationen zu kritisieren, desto weniger werden sie das bereitgestellte Wissen kritiklos übernehmen müssen, da sie sich mit ihrer Kritik nicht direkt gegen die Autorität des Lehrers stellen müssen. Menck drückt dies so aus:

> „Für die Lernenden ist es von Bedeutung, mit welchen Instanzen sie es aufzunehmen haben, wenn sie die pädagogisch gewünschte Kritik praktizieren und bestimmte Geltungsansprüche in Frage stellen.“ (ebd., S.94)

Vermutlich ist es gerade im Mathematikunterricht schwer, diese Instanzen zu erkennen bzw. überhaupt Geltungsansprüche in Frage zu stellen, da, im Gegensatz zu anderen Fächern, „die Fixiertheit auf bestimmte Resultate relativ groß ist und die Weise, wie das Resultat erreicht werden darf, relativ festgelegt ist (logische Durchstrukturiertheit des Faches und die streng formalisierte mathematische Sprache)“ (Voigt 1984, S.64). Diese Hypothese wird im empirischen Teil der Arbeit zu prüfen sein.

---

[18] Im üblichen Mathematikunterricht geschieht das meist im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch: „Der Lehrer stellt eine Frage, deren gültige Antwort er kennt; ein Schüler beantwortet die Frage; der Lehrer bewertet die Antwort.“ Dadurch werden „qua Bewertung aus den Beiträgen der Schüler diejenigen Aussagen ausgesondert, die (nicht) als Wissen gelten sollen“ (Voigt 1984, S.64).

Dem mit pädagogischer Autorität ausgestatteten Lehrer kommt noch eine weitere Funktion zu. Er hat die Aufgabe, das Wissen didaktisch zu transformieren, mit anderen Worten: „in der Unterrichtsvorbereitung nimmt die didaktische Transformation insofern Gestalt an, als der Lehrer einen Plan zur *Konstitution des Inhalts im Unterrichtsprozeß* entwirft“ (Wierichs 1989, S.41). Zwar wird Wissen für schulische Zwecke nicht nur durch den Lehrer strukturiert und aufbereitet, vielmehr stecken diese Transformationen auch „in fachdidaktischen Konzeptionen, in Schulbüchern“ (ebd.) oder in den Curricula. Allerdings ist die „Unterrichtsvorbereitung des Lehrers von besonderer Bedeutung“ (ebd.), da er direkt auf den tatsächlich stattfindenden Unterricht, der uns hier interessiert, Einfluß nimmt.

In der Konstruktion schulischen Wissens schließt sich damit die bisher offen gebliebene Lücke zwischen der gesellschaftlichen Praxis einerseits und dem Unterrichtsinhalt andererseits:

> „Gesellschaftliche Praxis wird, formal gesehen, symbolisch repräsentiert; inhaltlich wird sie in bestimmten Modellen rekonstruiert. Das im Unterricht zur Grundlage der Interpretation herangezogene Wissen ist vorweg strukturiert, geordnet und in einen Zusammenhang gebracht, der als Modell derjenigen gesellschaftlichen Praxis fungiert, auf die es verweist“ (Menck 1986, S.90).

Didaktische Transformation ist auf der einen Seite notwendig, da nur so eine zielgerichtete Aneignung der gesellschaftlichen Praxis möglich ist. Aber:

> „Auf der anderen Seite steht damit das System der symbolischen Repräsentation in Gefahr, daß es zu einer sich selbst genügenden, des verweisenden und erschließenden Bezuges zur gesellschaftlichen Praxis entledigten Welt, zu einer Schulwelt wird“ (ebd., S.91f).

In einer Analyse der Unterrichtsinhalte sollte demnach untersucht werden, wie das Wissen für die Schule transformiert wird. Dies geschieht durch die Analyse der Didaktik des Lehrers, der die didaktische Transformation in der Hauptsache leistet. Darüber hinaus kann sie auch in der Analyse der benutzten Schulbücher transparent gemacht werden. Allgemein muß „die Herkunft des im Unterricht erscheinenden Wissens einbezogen werden“ (Wierichs 1989, S47). Denn nur wenn die Transformation von gesellschaftlicher Praxis im Unterricht sichtbar wird, stellt Unterricht „die Möglichkeit bereit, daß Lehrende und Lernende gesellschaftliche Praxis (re-) konstruieren können und daß sie sich selbst als Konstrukteure begreifen“ (ebd.).

2.5 Die Perspektiven der Schüler

Bisher wurde der Unterricht von der ‚objektiven‘ Seite aus betrachtet. Ausgehend von der Gesamtheit der gesellschaftlichen Praxis folgten wir dem Weg der Auswahl, die im Lehrplan verbindlich gemacht wird. Wir stellten als Maßstab für das im Unterricht erscheinende Wissen die Wissenschaften fest, und analysierten schließlich die Rolle des Lehrers, der die im Lehrplan festgelegten Gegenstände als Repräsentant staatlicher Autorität vermittelt. Diese Darstellung erfaßt aber natürlich nicht den ganzen unterrichtlichen Zusammenhang. Gleichzeitig wirken in den Unterricht auch die ‚subjektiven‘ Einstellungen der beteiligten Personen hinein, die des Lehrers und vor allem die der Schüler. Diese Tatsache wird in vielen Didaktiken außerordentlich stark betont (vgl. z.B. Meyer 1989 oder Becker 1993), und auch in den Richtlinien (1993) ist von „Schülerorientierung“ die Rede.

Auf die Wichtigkeit der Interessen und Voraussetzungen der Schüler für den Unterrichtsprozeß wird immer wieder mit Recht hingewiesen. So macht Rumpf (1979) darauf aufmerksam, daß es neben den offiziellen Weltversionen, die durch Wissenschaft verbindlich gemacht und durch Schule vermittelt werden, auch subjektive, inoffizielle Bedeutungen gibt. Gerade aber „in ihnen meldet sich Subjektivität mit ihrer Lebensgeschichte, ihrer täglichen Naherfahrung, ihrer Sinnlichkeit, ihrer nicht zu überspringenden Emotionalität - *die* Subjektivität also, ohne deren Mitgift jeder Bedeutungsgehalt, jede Erkenntnis, jedes Wissen dem Subjekt fremd, flach, äußerlich bleibt“ (Rumpf 1979, S.210).

Er gibt in seinem Aufsatz einige Beispiele, in denen deutlich wird, daß gerade durch subjektive Interpretation eines Sachverhalts dieser im Gedächtnis bleibt und somit an Bedeutung gewinnt. Auch wenn es eine didaktische Forderung sei, subjektive Assoziationen in den Unterricht zu integrieren, „in Anknüpfungs- und Motivationsphasen“ (ebd., S.213) zu verwenden, so komme es im herkömmlichen Unterricht doch darauf an, „solche privat oder kindlich verzerrten Weltbilder zu überwinden namens der Rationalität und Sachlichkeit“ (ebd., S.214). Die Aufgabe des Lehrers bestehe danach darin, „solche unsachlichen, privaten, substanzlosen Verknüpfungen durch sachorientierte, durch objektive Belehrung auszureuten“ (ebd., S.213). Dies führe schließlich dazu, daß man die eigenen, subjektiven Deutungen einer Sache, falls man sie überhaupt noch wahrnehme, nicht mehr auszusprechen wage, da „die sich durchsetzende Verwissenschaftlichung des offiziellen Weltbildes dazu geführt (hat), daß spontane und situationsgebundene gedankliche Regungen der Subjekte zivilisatorisch gedämpft und privatisiert werden, allenfalls als Privatsache toleriert, ansonsten als laienhaft, kindlich, mythisch, vorwissenschaftlich oder einfach als irreal, nicht objektiv hintanzuhalten“ (ebd., S.229).

Eine Unterrichtskritik, die durchaus nachvollziehbar ist, aber einen wichtigen Punkt, das „Grundproblem der Didaktik“ außer acht läßt: „die Vermittlung von Objektivem, Allgemeinem, Welt und Subjektivem, Individuellem, Lebenswelt“ (Wierichs 1989, S. 58). Schüler haben ‚subjektive‘ und ‚objektive‘ Bedürfnisse, die sich nicht immer (vielleicht nur sehr selten) entsprechen oder überschneiden.

> „Den *Bedürfnissen* der noch nicht erwachsenen Adressaten der Tradition stehen gesellschaftliche Anforderungen gegenüber, gelegentlich auch als ‚objektive Bedürfnisse‘ bezeichnet, solche also, die den Adressaten aufgrund ihrer gesellschaftlichen Position unterstellt werden.“ (Menck ohne Jahr)

Dieser Gegensatz besteht prinzipiell, und er ist nicht aufzulösen, indem ausschließlich die Interessen der Heranwachsenden im Unterricht berücksichtigt werden. Das würde dem Bildungsauftrag der Schule entgegenstehen. Vor dem Hintergrund dieses ‚Dilemmas‘, einerseits die subjektiven Bedürfnisse der Schüler im Unterricht zur Geltung zu bringen, andererseits den gesellschaftlichen Anforderungen gerecht zu werden, sind auch die Ergebnisse der Interaktionsanalysen von Voigt (1984) zu interpretieren.

Im (traditionellen) fragend-entwickelnden Mathematikunterricht identifiziert er verschiedene Muster der Interaktion. Das „Erarbeitungsprozeßmuster“ und das „Muster der inszenierten Alltäglichkeit“ (s. Voigt 1984). Insbesondere letzteres ist an dieser Stelle erwähnenswert, weil es den Umgang mit den alltäglichen Lebenserfahrungen der Schüler im Unterricht offenlegt und aufzeigt, daß dieses oft geforderte „Anknüpfen“ an die Lebenswelt der Schüler offiziell zwar eingehalten wird, inoffiziell aber die lebensweltlichen Interpretationen, da nicht ‚sachdienlich‘, sofort wieder beiseite geschoben werden. Konkret sieht ein solches Interaktionsmuster wie folgt aus:

> „Der Lehrer leitet ein Thema ein, das einen außerschulischen, *alltäglichen* Erfahrungsbereich der Schüler hervorruft. Der Alltagsbezug wird in dem Sinne *inszeniert*, als die Wahrnehmungsperspektiven und Handlungsmuster aus diesem alltäglichen Erfahrungsbereich, wie sie die Schüler erkennen lassen, nicht zur Behandlung des Themas aufgegriffen werden, sondern vom Lehrer durch Änderung von Aufgabenbedingungen indirekt aus der offiziellen Entwicklung des Themas gelöst werden.“ (ebd., S.178)

In den von Voigt interpretierten Unterrichtsausschnitten wird sehr schön deutlich, wie die didaktische Maxime: „Knüpfe an den Erfahrungen des Kindes an!“, die so oder ähnlich nicht nur für den Mathematikunterricht proklamiert wird, oberflächlich realisiert wird, indem Lehrer bei der Einführung neuer Sachverhalte lebensweltliche Erfahrungen der Schüler hervorrufen. Diese Erfahrungen werden dann aber nicht in den Unterricht aufgenommen; sie können kurzerhand entkräftet werden, und zwar dadurch, daß der Lehrer die Voraussetzungen der Aufgabe oder des Problems einfach so ändert, daß die Erfahrungen der Schüler nicht mehr angemessen sind. Sehr schnell kann so wieder die mathematische Sichtweise eingenommen werden, die mit der der Schüler anscheinend nichts mehr zu tun hat[19].

Ich interpretiere dieses Interaktionsmuster als Antwort auf die Schwierigkeit von Lehrern, zwischen den subjektiven und objektiven, oft gegensätzlichen Bedürfnissen zu vermitteln. Gleichzeitig macht es darauf aufmerksam, daß ein Unterricht, in dem zu Anfang die Perspektive auf die alltägliche Lebenswelt der Schüler gerichtet wird, noch kein Unterricht ist, in dem die subjektiven Bedürfnisse als Anknüpfungspunkt für eine Erweiterung der subjektiven Lebenswelt des Einzelnen zur Geltung kommen[20]. Gerade das wäre aber die Voraussetzung für einen gelungenen Bildungsprozeß:

> „Die Aneignung von, ja, selbst eine Auseinandersetzung mit der zugemuteten Kultur ist nur möglich, wenn sich diese auf die *subjektiven Bedürfnisse* beziehen läßt.“ (Menck ohne Jahr)

Der Zusammenhang zwischen Unterricht und gesellschaftlicher Praxis gewinnt so einen weiteren Gesichtspunkt: Die Lebenswelten der Heranwachsenden sind immer ein Teil

---

[19] Daß der Lehrer so vorgehen kann, liegt natürlich an der oben beschriebenen „verzerrten“ Kommunikationsstruktur im Unterricht, in der der Lehrer mehr Macht besitzt als die Schüler (siehe 2.4).

[20] Vgl. dazu die Analyse der Unterrichtseinheit A_4, S.123.

der gesamten gesellschaftlichen Praxis. Wenn Unterricht ihnen die Teilnahme an dieser Praxis ermöglichen soll, so kann das immer nur realisiert werden, indem die individuelle Praxis erweitert wird. Diesen Aspekt werde ich im Abschnitt 3.2 für die Analyse des Unterrichtsinhalts fruchtbar machen.

Nachdem nun die unterschiedlichen Aspekte, die von ‚außen' auf den Unterricht einwirken, erläutert wurden, wird es im folgenden Abschnitt darum gehen aufzuzeigen, was im Unterricht selbst passiert.

2.6 Arbeit und Interpretation im Unterricht

Wie bisher herausgearbeitet wurde, ist der Unterrichtsinhalt symbolische Repräsentation gesellschaftlicher Praxis, das heißt, Gegenstand der unterrichtlichen Arbeit sind Symbole und Abbildungen dieser Praxis. Ein (Unterrichts-) Gegenstand, der als Symbol *für* etwas steht, kann aber nur bearbeitet werden, indem er interpretiert wird, und „demgemäß ist der Modus seiner Bearbeitung der der *Interpretation*" (Menck 1986, S.63).

Menck spricht in diesem Zusammenhang von Arbeit im Unterricht und meint dabei zunächst einen allgemeinen Begriff der Arbeit, so wie Marx ihn versteht. Er überträgt ihn dann auf den Unterricht mit der oben genannten Konsequenz, daß Arbeit im Unterricht immer Interpretation heißt. Auch wenn im Unterricht Produkte hergestellt werden, die einen Gebrauchswert haben[21], so geschieht dies immer „in pädagogischer Absicht" (ebd., S.63). Er konstatiert, „daß Schüler arbeiten, daß diese Arbeit zu einem Ergebnis, einer gültigen Interpretation führen muß und daß dieses Ergebnis in seinem pädagogischen Ertrag nur an der Aneignungs- und Auseinandersetzungsleistung gemessen werden darf, die es dokumentiert, nicht etwa an seinem alltäglichen Gebrauchswert" (ebd., S.66). An anderer Stelle faßt er auch den „produktiven Charakter von unterrichtlichem Handeln" unter dem Begriff der „Konstitution von Bedeutungen" (ebd., S.142) zusammen.

Die nächste Frage wäre die nach dem genauen Ablauf, dem Prozeß der Interpretation eines Themas, nach dem Weg vom Thema zum Unterrichtsergebnis. Denn genau dieser Prozeß ist es ja, der im Rahmen einer Analyse des Unterrichtsinhalts zunächst interessiert, der den Unterrichtsinhalt auf der untersten Ebene im wesentlichen ausmacht und durch unterrichtliche Arbeit bestimmt wird.

Menck zieht zu diesem Zweck die Arbeiten von Bellack und Schütz heran und bezieht diese aufeinander. In „Sprache im Klassenzimmer" (1974) haben Bellack und andere „Unterricht als ein regelgeleitetes Spiel" (Menck 1986, S.67) identifiziert, das in verschiedene Spielzüge zu untergliedern ist. Danach gibt es strukturierende (STRK), auffordernde (AUFF), reagierende (REAG) und fortführende (FORT) Spielzüge. „Inner-

[21] Er erwähnt hier z.B. die Arbeits- und Industrieschulen, denen auf den ersten Blick mit der Industrie gemeinsam war, daß sie Gegenstände für den täglichen Gebrauch herstellten, aber auch neuere didaktische Konzepte, wie das des handlungsorientierten Unterrichts, vgl. S.62f.

halb der durch strukturierende Spielzüge abgegrenzten Teilspiele gibt es eine Abfolge von Aufforderungen und Reaktionen sowie – nicht immer nötig – von Fortführungen" (ebd., S.67). Ich möchte ergänzen, daß die einleitenden Spielzüge nicht unbedingt strukturierende sein müssen. Häufig beginnen Spiele mit Aufforderungen. Die häufigsten Zugkombinationen sind nach Bellack u.a. AUFF REAG FORT und AUFF REAG (vgl. Bellack u.a. 1974, S. 206ff) Demnach könnte ein Teilspiel wie folgt skizziert werden (vgl. Menck 1986, S.68):

(STRK) - AUFF -REAG - (AUFF, REAG) - ...- (FORT)- ...- (FORT) [22]

Diese Spielzüge allein sind allerdings für die oben erwähnte Frage nach dem Ablauf der Interpretation eines Themas wenig fruchtbar. Man findet hier zwar schon den Aspekt der Themensetzung (erste Strukturierung bzw. Aufforderung) und die Beendigung der Interpretation (häufig die letzte Fortführung), der Prozeß der Interpretation aber ‚verschwindet' dazwischen in auffordernden, reagierenden und fortführenden Spielzügen.

Um zu erklären, was genau hier passiert, zieht Menck die „Theorie der Relevanz" von Alfred Schütz (1971) heran. Dieser beschreibt drei Relevanzsysteme, die zum Aufbau von Wissen führen: die *thematische Relevanz, die Auslegungsrelevanz* und die *Motivationsrelevanz*. Zunächst wird durch die thematische Relevanz ein Thema, ein Problem in den Aufmerksamkeitshorizont gerückt, „etwas wird inmitten des unstrukturierten Feldes einer unproblematischen Vertrautheit zum Problem gemacht" (Schütz 1971, S.56). Dieses Problem wird dann ausgelegt, interpretiert:

> „Das bedeutet, daß er (der Interpretierende, K.J.) das Feld ... unter verschiedene typische Erfahrungen subsumieren muß, nämlich unter diejenigen typischen früheren Erfahrungen, die seinen gegenwärtig zuhandenen Wissensvorrat ausmachen." (ebd., S.67) Dies nennt Schütz dann die „Auslegungsrelevanz".

Schließlich kommt noch die Motivationsrelevanz hinzu, die ihn zu einer bestimmten Interpretation führt. Da das Ergebnis, das er erwartet, für ihn von Bedeutung ist, beginnt er überhaupt erst zu interpretieren. Er handelt also *um* etwas *zu* erreichen oder *weil* das Ergebnis für ihn, aufgrund seiner individuellen Biographie, relevant ist (vgl. ebd., S.78ff).

Diese Relevanzen sind voneinander abhängig; sie treten nie isoliert und keineswegs in einer chronologischen Reihenfolge auf (vgl. ebd., S.102). Außerdem – und dieser Gedanke ist für den Bereich der Schule nicht unproblematisch – ist der vorhandene Wissensvorrat, der zur Auslegung eines Themas herangezogen wird und die Motivationsrelevanz mitbestimmt, immer biographisch abhängig (vgl. ebd., S.138). Das heißt, daß jedes Individuum unterschiedliche Wissenselemente zur Auslegung eines Problems

[22] Die in Klammern gesetzten Spielzüge müssen nicht notwendigerweise im Unterricht auftreten.

heranzieht, da jeder andere Erfahrungen in seinem Leben gemacht hat und verschiedene Motivationen (oder gar keine) für ein Thema mitbringt[23].

Menck versucht nun die Theorie von Schütz auf den Unterricht zu übertragen:

> „In einem problemlosen Horizont - sagen wir: zu Beginn einer Unterrichtsstunde (wo allerdings durch das ‚Fach' und das zuvor Gehabte ein Ausschnitt aus dem Horizont schon vorweg abgegrenzt ist) - wird die Aufmerksamkeit auf ein Problem, eine Aufgabe, eben auf ein Thema gelenkt. … Das Thema wird ausgelegt, interpretiert." (Menck 1986, S.69f)

Damit es zu einer Interpretation kommt, wird (meist) vom Lehrer motiviert, sei es, daß er auffordert, etwas Bestimmtes zu tun, sei es, daß er das Thema fortführt, die Aufmerksamkeit auf andere Aspekte lenkt. Das angesprochene Problem der Motivationsrelevanz kann so gelöst werden: Der *Lehrer* macht darauf aufmerksam, inwiefern das erwartete Ergebnis für die Schüler von Bedeutung sein kann, und er kann eventuell fehlendes aber notwendiges Wissen zur Verfügung stellen.

Die gewählten Ausdrücke deuten den Zusammenhang zwischen den Ergebnissen von Bellack und der Relevanztheorie von Schütz schon an, den Menck nun explizit herstellt:

> „In den ‚einleitenden' Spielzügen (strukturierende und auffordernde) findet man Thematisierungen … und Interpretationsrichtungen … sowie Motivationen. Die ‚bezugnehmenden' (reagierenden und fortführenden) enthalten vor allem die Auslegungen, die Lösungsversuche, sowie die Bewertungen und Zusammenfassungen." (ebd., S.70f)

[23] Auf Schule bezogen taucht hier wiederum das Problem der Subjektivität der Inhalte auf (vgl. auch 2.5): Jeder Schüler bringt seine eigene Geschichte, seine individuellen Erfahrungen mit und bezieht sie auf die jeweiligen Inhalte. Wenn die zuhandenen Wissenselemente aber nur unvollständig sind, wird das Thema „in einer unvertrauten und fremden Perspektive gesehen", man kann es im „zuhandenen Wissensvorrat", der „wiederum bloß die Sedimentierung früherer Erfahrungen" ist (Schütz 1971, S.141), nicht richtig einordnen. „Es ist etwas, das einfach hingenommen und geglaubt werden muß oder das uns nichts angeht." (ebd., S.142)

Demzufolge ergänzt Menck das obige Schaubild wie folgt (vgl. ebd., S.71, hier leicht abgewandelt):

(STRK) – AUFF – REAG – (AUFF, REAG) – ...- (FORT) – ...– (FORT)

Themensetzung
Interpretationsrichtung

Motivation

Motivation

Beendigung der Interpretation

Interpretation

Anhand dieser auch inhaltlich gefüllten Struktur ist es nun möglich, den Prozeß der Interpretation eines Unterrichtsthemas genauer zu untersuchen bzw. zu operationalisieren.

2.7 Zusammenfassung

Das ‚Beziehungsgefüge' des Unterrichts ist nun in seinen einzelnen Teilen beschrieben. Die verschiedenen Faktoren wurden in den vorigen Abschnitten analysiert. Die Trennung in einzelne Aspekte birgt allerdings die Gefahr, den Zusammenhang, in dem sie stehen, aus dem Auge zu verlieren. Abschließend möchte ich daher versuchen, diesen Zusammenhang in einem Schaubild zu verdeutlichen, das zwangsläufig stark vereinfacht, andererseits aber vor dem Hintergrund dieses Kapitels eine sinnvolle Zusammenfassung darstellen kann:

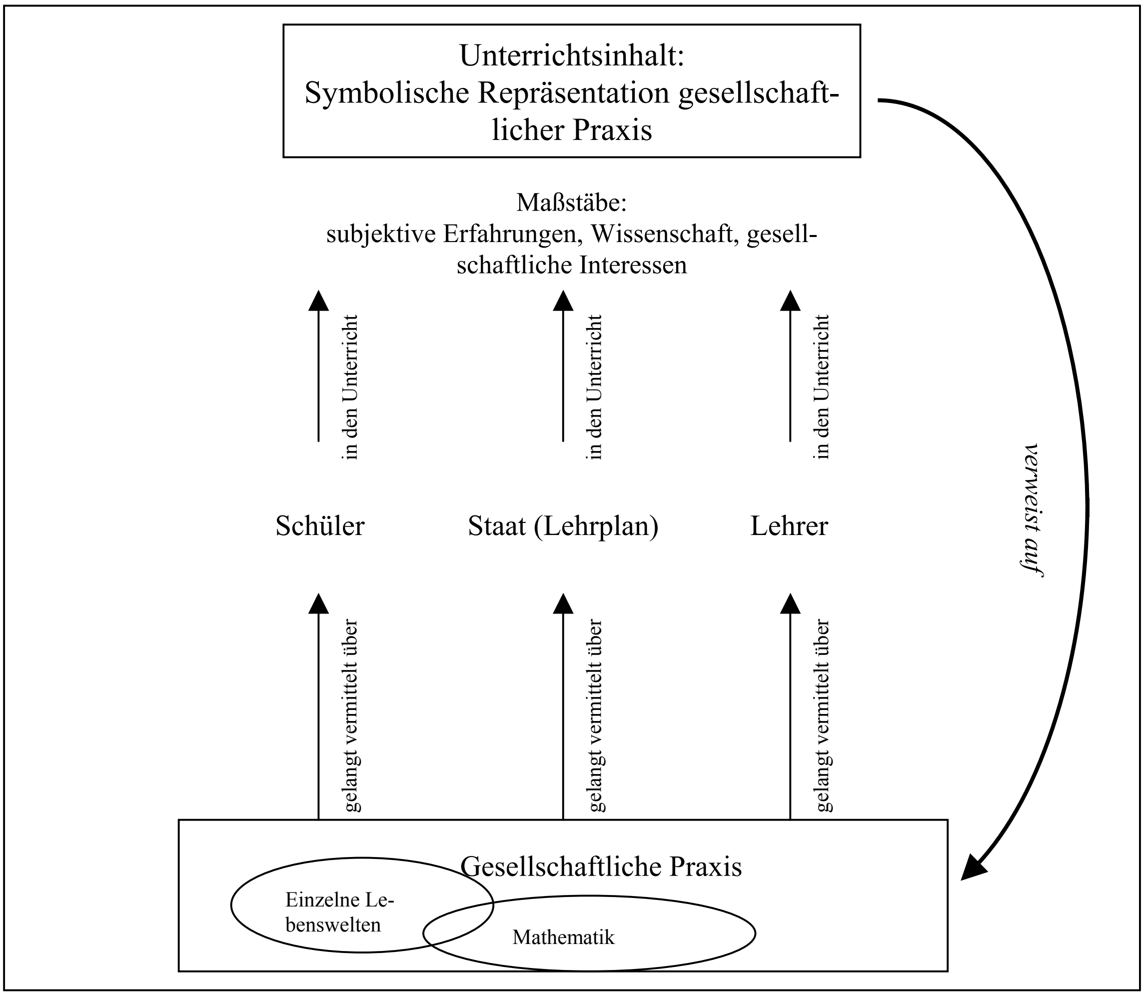

Abbildung 1: Der Unterrichtsinhalt in seinem Beziehungsgefüge

Neben einer beschreibenden Analyse des Unterrichtsinhaltes in seinem Beziehungsgefüge, wird es Aufgabe des empirischen Teils dieser Arbeit sein, den Unterricht kritisch zu beurteilen. Soll die Kritik nicht beliebig sein, werden Maßstäbe benötigt, die die Kritik leiten und diskutierbar machen. Zwei mögliche Maßstäbe sollen dazu im folgenden entwickelt werden. Ihre Grundlage ist eine Definition von ‚Bildung', aus der zwei Aspekte einer kritischen Beurteilung abgeleitet werden.

3 Unterrichtskritik – Zwei mögliche Maßstäbe für eine Analyse des Unterrichtsinhalts

Ein grundlegendes Interesse empirischer Unterrichtsforschung liegt in dem Gelingen von Unterricht. Was aber bedeutet genau ‚Gelingen'? Anhand welcher Kriterien kann entschieden werden, ob ein Unterricht gelungen ist oder nicht? – Wie im ersten Kapitel erläutert, verweist der Unterricht immer auf die gesellschaftliche Praxis, der Zweck des Unterrichts ist die „Bildung" der Heranwachsenden, denen hier „Gelegenheiten bereitgestellt (werden), die es ihnen erlauben, Möglichkeiten der menschlichen Gattung … als potentiell eigene zu erkennen und sich faktisch zu eigen zu machen" (Menck 1986, S.38). Ein gelungener Unterricht wäre also ein Unterricht, der diesen Zweck der Bildung erfüllt. Das scheint trivial zu sein. Legt man diesen Maßstab jedoch an konkreten Unterricht an, kommt man in Schwierigkeiten. Denn es tauchen dann Fragen auf, wie: Was heißt ‚Bildung' im Fach Mathematik? Wie kann ich erkennen, ob Schüler die Möglichkeit haben, im Unterricht die Leistungen der Menschheit als ihre eigenen zu erkennen? Es wird also im folgenden darum gehen, den Maßstab ‚Bildung' so zu operationalisieren, daß er auf Unterricht anwendbar ist, in diesem Fall auf den Mathematikunterricht.

Der Ausgangspunkt ist der Begriff der ‚Bildung', den ich mit Menck wie folgt definiere:

> „Bildung ist die Arbeit, in der Menschen sich ihr Menschsein in der Aneignung von und der Auseinandersetzung mit der Kultur erarbeiten, in der sie – ganz bildlich – den Menschen in und aus sich herausarbeiten." (Menck 1998, S.29)

Auf den Unterricht übertragen heißt das: Sollen Schüler sich bilden können, so muß einerseits ein Ausschnitt aus der Kultur im Unterricht erscheinen, in dem das ‚Menschsein' möglichst vollständig aufgehoben ist, andererseits müssen sie die Möglichkeit haben, sich diesen Ausschnitt zu ‚erarbeiten', einen Teil von dem, was Menschen möglich ist, auch als eigene Möglichkeiten zu erkennen. Daraus ergeben sich zwei Fragen an den Unterricht:

1. *Was wird* aus den gesamten Möglichkeiten *ausgewählt*?
2. Haben die Schüler im Unterricht die Möglichkeit, ihre *eigene Lebenswelt zu erweitern*?

Zu 1. : Unterricht zeichnet sich dadurch aus, daß immer nur ein bestimmter Ausschnitt aus der Kultur oder der gesellschaftlichen Praxis erscheinen kann. Das ist gar nicht anders möglich und ist gleichzeitig auch ein Vorteil gegenüber der Unübersichtlichkeit der Wirklichkeit. Will man Unterricht kritisieren, so kann man also nicht bei der Tatsache der Auswahl und Autorisierung als solcher ansetzen, sie gehört notwendigerweise immer zum Unterricht. „Wenn zu kritisieren ist, dann wäre vielmehr zu prüfen, ob Auswahl und Autorisierung ihrerseits pädagogisch und bildungstheoretisch legitim stattfinden oder nicht" (Menck 1986, S.116). Oder, als Frage formuliert: Ermöglicht die getroffene Auswahl den Schülern, sich die gesellschaftliche Praxis anzueignen, wird sie vollständig dargestellt oder wird etwas im Unterricht ‚unterschlagen', so daß den Heranwachsenden bestimmte Möglichkeiten verschlossen bleiben? Obwohl eine Auswahl stattfinden muß, muß also gleichzeitig garantiert werden, daß der Ausschnitt die Praxis der Menschheit möglichst vollständig repräsentiert.

Dazu soll im folgenden (3.1) ein sogenanntes Strukturgitter[24] entwickelt werden, das den durch das Fach festgelegten Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis, hier: die Mathematik, einbettet in die Gesamtheit der gesellschaftlichen Praxis. Die so entwickelten Begriffe, die die Mathematik als Teil dieser Praxis identifizieren, können dann an den Unterricht angelegt werden. So kann festgestellt werden, welche Aspekte nicht oder nur ansatzweise im Unterricht erscheinen, das heißt, wie vollständig oder unvollständig das Bild der Mathematik ist, das im Unterricht vermittelt wird.

Zu 2.: Die individuelle Lebenswelt zu erweitern, indem man die allgemeinen menschlichen Möglichkeiten als die eigenen erkennt, ist wohl nur oder um so eher möglich, wenn Schüler sich als potentielle Konstrukteure dieser Praxis begreifen können (vgl. 2.4). Das wiederum kann realisiert werden, indem die Auswahl im Unterricht als eine *menschliche* Konstruktion erscheint, die zu einem bestimmten Zweck geschaffen wurde, die ihre Geltung erst durch bestimmte Instanzen erhält, die bestimmte Möglichkeiten, aber auch Grenzen für die menschliche Praxis beinhaltet, die schließlich nur *eine* Möglichkeit der Interpretation eines Sachverhaltes darstellt. Dies deutlich zu machen, darunter versteht Wierichs die ‚Öffnung des Wissens' (vgl. Wierichs 1989). Im Abschnitt 3.2 wird dieser Aspekt näher erläutert und deutlich werden, wie der Grad der Öffnung des Wissens zu untersuchen ist.

3.1 Mathematik im Unterricht – Ein Strukturgitter

Bei der Entwicklung eines Strukturgitters für den Mathematikunterricht werde ich mich an dem von Menck (1975, 1977) erläuterten Gedankengang und an das Beispiel von Adick/Bonne/Menck (1978) halten und, ausgehend von diesen Grundideen, versuchen Begriffe zu finden, die geeignet sind, das Fach Mathematik zu strukturieren.

Menck definiert ein ‚didaktisches Strukturgitter' wie folgt:

> „Ein *‚didaktisches strukturgitter'* ist ein gefüge von begriffen, ein gedankengang, in dem einerseits die möglichkeiten der interpretation und beherrschung von wirklichkeit aufgehoben sind. Zum anderen enthalten sie den – methodischen – gesichtspunkt, daß diese möglichkeiten dem individuum nicht um ihrer selbst oder heteronomer zwecke willen, sondern als möglichkeit der erweiterung seiner selbstbestimmung (‚pädagogische intentionalität') zu vermitteln sind. … Ein

[24] Ich greife an dieser Stelle auf (fach-)didaktische Überlegungen zurück, die vor allem in den 1970er Jahren angestellt wurden. Auch auf die Gefahr hin, dass es altmodisch erscheinen mag: Ich halte die Ideen nach wie vor für hilfreich und insbesondere im Zusammenhang der hier durchzuführenden Unterrichtsanalysen für fruchtbar. Die Diskussion über fachdidaktische Strukturgitter ist in den letzten zwei Jahrzehnten (leider) verstummt. Einen Überblick über den damaligen Diskussionsstand findet man bei Lenzen/Meyer (1975) oder bei Kell (1995)

> thema qualifiziert sich als unterrichtsgegenstand erst, wenn es nach allen momenten aufgeschlüsselt wird, die durch die begriffe des strukturgitters bezeichnet sind." (Menck 1975, S.96f)

In dieser Definition steckt also einerseits die Absicht, durch ein Gefüge von geeigneten Begriffen die gesamten Möglichkeiten der gesellschaftlichen Praxis bereitzustellen, andererseits schließt es die „pädagogische Intentionalität" mit ein, die „unterrichtsleitenden Intentionen" (Adick/Bonne/Menck 1978, S.196). Dies meint den Rückbezug der im Unterricht erscheinenden gesellschaftlichen Praxis zum Schüler, dem Individuum, das sich diese Praxis aneignen soll. Dahinter verbirgt sich die Frage nach der Bedeutung des Ausschnittes aus der gesellschaftlichen Praxis für den Schüler (vgl. Menck 1986, S.120). Ein Strukturgitter hätte demnach Kategorien zu bieten, die es erlauben, die ‚Möglichkeiten der Menschheit' zu identifizieren *und* gleichzeitig zu prüfen, ob die notwendige Auswahl daraus pädagogisch legitim ist bzw. den unterrichtsleitenden Intentionen folgt. Einen Unterricht, der dieses leistet, der also Rückbezüge herstellt, nennt Menck einen „reflexiven Unterricht": „Reflexiver Unterricht ist einer, in dem seine eigenen Voraussetzungen ins Spiel und zur Sprache kommen" (ebd.).

Zunächst einige Voraussetzungen, die mitgedacht werden müssen, wenn von Unterricht in der Schule die Rede ist:

- „Die im Unterricht behandelte Sache, das Thema, ist ein Ausschnitt aus der gesellschaftlich produzierten Wirklichkeit.
- Diese Wirklichkeit ist im Unterricht in symbolischer (zumeist sprachlicher) Form präsent.
- Unterricht in der Schule ist die Institution, in der Heranwachsende die Möglichkeiten der Menschheit als ihre eigenen Möglichkeiten erkennen und sich zu eigen machen können." (Menck 1977, S.369)

Der sich daran anschließende Gedankengang zur Strukturierung eines Unterrichtsfaches ist nun folgender: Es muß erstens die gesellschaftliche Praxis als ein Ganzes identifiziert werden, aus der das im Unterricht Erscheinende ein Ausschnitt ist. Diese Praxis kommt im Unterricht aber nicht direkt, sondern über Symbole vermittelt zur Sprache. Diese wiederum werden gemessen an dem, „was prinzipiell wißbar ist" (Adick/Bonne/Menck 1978, S.187). Dafür steht heute die Wissenschaft, denn sie ist der Maßstab, der an die Erkenntnisse, die im Unterricht vermittelt werden, angelegt wird.

Der zweite Schritt besteht demnach darin, Kategorien für die „Bedingungen der Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis" (ebd., S.188) zu finden. Diese ersten beiden Dimensionen strukturieren dann „die über Wissenschaft vermittelte gesellschaftliche Praxis" (Menck 1977, S.372).

Als dritter Schritt wird dann „Mathematik" als Teil der gesellschaftlichen Praxis und gemessen an wissenschaftlicher Erkenntnis strukturiert und unter geeignete Begriffe subsumiert, so daß letztlich ein Kategoriengefüge entsteht, in dem „die möglichkeiten der interpretation und beherrschung von wirklichkeit aufgehoben sind" (Menck 1975, S.96), beschränkt auf das Stück Wirklichkeit ‚Mathematik'. Diese Begriffe werden durch eine Bedingungsanalyse gefunden (siehe 3.1.2).

Der letzte Schritt besteht in der Identifizierung der ‚unterrichtsleitenden Intentionen‘. Darauf werde ich an dieser Stelle verzichten, da es mir in diesem Zusammenhang darum geht, die Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis zu identifizieren, um später in der Analyse ein Instrument zur Hand zu haben, das es erlaubt, den im Unterricht erscheinenden Ausschnitt auf seine Vollständigkeit hin zu überprüfen. Unter dem Aspekt der ‚Öffnung des Wissens‘ (3.2) werde ich auf diesen Aspekt zurückkommen. Wollte man dieses Strukturgitter allerdings für eine vollständige didaktische Strukturierung eines Themas heranziehen, müßte man diese vierte ‚Dimension‘ allerdings anfügen. Die von Menck (1975) im Rückgriff auf Habermas entwickelten Begriffe „Anpassung, Einübung, Ich-Aufbau“ oder der Vorschlag von Adick/Bonne/Menck (1978), die unterrichtsleitenden Intentionen in den Begriffen „Information, Interpretation und Analyse“ zu fassen, dürften für jedes Unterrichtsfach Geltung haben und könnten somit auch für dieses Strukturgitter Anwendung finden.

3.1.1 Gesellschaftliche Praxis und Wissenschaft

Nach Habermas (1970) ist die Menschengattung „von Haus aus an bestimmte Medien der Vergesellschaftung gebunden …: an Arbeit, Sprache und Herrschaft. Die Menschengattung sichert ihre Existenz in Systemen gesellschaftlicher Arbeit und gewaltsamer Selbstbehauptung; durch traditionsvermitteltes Zusammenleben in umgangssprachlicher Kommunikation; und schließlich mit Hilfe von Ich-Identitäten, die das Bewußtsein des Einzelnen im Verhältnis zu den Normen der Gruppe auf jeder Stufe der Individuierung von neuem befestigen“ (ebd., S.162). D.h., noch einmal mit anderen Worten ausgedrückt: Durch *Arbeit*, oder zweckrationales Handeln, durch „aktive Eingriffe in die Natur, die ihre Lebensbedingungen verändern“ (Adick/Bonne/Menck 1978, S.189), sichern sich Menschen ihre Existenz und befriedigen ihre Bedürfnisse. Gesellschaftliche Arbeit ist nur möglich, wenn sich Menschen verstehen und ihr Handeln durch kommunikativ ausgehandelte Normen in gewissem Rahmen festgelegt ist, sie sich also durch *Sprache* verständigen können. Eine Gesellschaft bedarf weiterhin „Verteilungs-, Kontroll- und Sanktionsmechanismen“ (ebd., S.188), um ihre Reproduktion und Weiterentwicklung zu sichern. Diese *Herrschaft*smechanismen funktionieren um so besser, je mehr die (im besten Fall sprachlich ausgehandelten) gesellschaftlichen Normen vom Individuum verinnerlicht werden, d.h. Teil seiner Identität sind und seine Bedürfnisse befriedigt werden. Die Medien Arbeit, Sprache, Herrschaft bilden somit die Kategorien für die gesellschaftliche Praxis.

Diese Medien sind mit bestimmten Interessen der Menschengattung verbunden, aus Arbeit, Sprache und Herrschaft entspringen die „erkenntnisleitenden Interessen“:

> Das *technische Erkenntnisinteresse*: „Dies ist das Erkenntnisinteresse an der technischen Verfügung über vergegenständlichte Prozesse“, das der „möglichen informativen Sicherung und Erweiterung erfolgskontrollierten Handelns“ dient (Habermas 1970, S.157). Es sucht „nach Informationen, die erlauben, die Verfügungsgewalt der Menschengattung im Prozeß ihrer Existenzsicherung durch gesellschaftliche Arbeit zu erweitern“ (Adick/Bonne/Menck 1978, S.188).

> Das *praktische Erkenntnisinteresse*: Es „erzeugt Interpretationen, die eine Orientierung des Handelns in einem Kommunikationssystem ermöglichen, das durch Tradition geprägt und gemeinsame Sprache zusammengehalten wird“ (ebd.), es dient der „Erhaltung und der Erweiterung der Intersubjektivität möglicher handlungsorientierender Verständigung“ (Habermas 1970, S.158).
>
> Das *emanzipatorische Erkenntnisinteresse*: Es „erzeugt Analysen, die das Bewußtsein aus seiner Abhängigkeit von hypostasierten, als naturhaft empfundenen Zwängen und Gewalten lösen (Adick/Bonne/Menck 1978, S.188), und einen Prozeß der Selbstreflexion in Gang setzen.

Diese Interessen sind die „Bedingung der Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis“ (Menck 1977, S.370) und bestimmen damit Wissenschaft überhaupt. Damit bilden sie die Kategorien der wissenschaftlichen Erkenntnis allgemein. Zusammen mit der ersten Dimension ergibt sich folgendes Raster, das die über Wissenschaft vermittelte gesellschaftliche Praxis kategorial bestimmt:

<table>
<tr><th>Erkenntnisleitende Interessen
Medien der Vergesellschaftung</th><th>technisches Erkenntnisinteresse</th><th>praktisches Erkenntnisinteresse</th><th>emanzipatorisches Erkenntnisinteresse</th></tr>
<tr><td>Arbeit</td><td colspan="3" rowspan="3">Über Wissenschaft
vermittelte
gesellschaftliche Praxis</td></tr>
<tr><td>Sprache</td></tr>
<tr><td>Herrschaft</td></tr>
</table>

Abbildung 2 : Das Strukturgitter (nach Menck 1975, S. 87)

In dieses Raster soll nun „Mathematik“ als Teil der über Wissenschaft vermittelten gesellschaftlichen Praxis gleichsam als eine dritte Dimension eingefügt werden. Es besteht die Aufgabe, geeignete Begriffe zu finden, die diese Disziplin unter den gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Bedingungen aufschlüsseln.

3.1.2 Bedingungsanalyse

Unter einer Bedingungsanalyse versteht Menck (1975)

> „eine analyse der faktoren, die den begriff von z.b. ‚politik‘ (oder ‚Mathematik‘, K.J.) in seiner historisch bestimmten ausprägung bestimmt haben und bestimmen. Die bedingungsanalyse wäre also eine rekonstruktion derartiger begriffe, die einen bestimmten ausschnitt aus der gesellschaftlichen wirklichkeit festlegen.“ (S.88)

Ein Rückblick in die Geschichte der Mathematik (3.1.2.1) soll zeigen, wie und unter welchen gesellschaftlichen Bedingungen sich die Mathematik entwickeln konnte. Dadurch soll der Blick für die wesentlichen Merkmale dieser Wissenschaft geschärft werden, die sich im heutigen hochspezialisierten Wissenschaftsbetrieb nur noch schwer ausmachen lassen. Der zweite Teil der Bedingungsanalyse besteht dann in einem historischen Überblick über die wichtigsten didaktischen Richtungen (3.1.2.2), der vor allem die unterschiedlichen Sichtweisen des Zusammenhangs von Mathematik und gesellschaftlicher Praxis in diesen Ansätzen verdeutlichen soll. Schließlich werden verschiedene philosophische Positionen der Mathematik daraufhin beleuchtet, wie das ‚Wesen' der Mathematik zu bestimmen ist (3.1.2.3). Es wird sich herausstellen, daß es sinnvoll ist, für die Beschreibung der ‚Wirklichkeit' der Mathematik eine Position außerhalb der traditionellen Ansätze zu suchen, die sich als fruchtbar im Zusammenhang mit den Ergebnissen der ersten beiden Teile der Bedingungsanalyse erweisen wird.

3.1.2.1 Zur Geschichte der Mathematik

In diesem Abschnitt soll das Augenmerk auf die Zusammenhänge von Mathematik und gesellschaftlicher Praxis im historischen Rückblick gerichtet werden. Dazu werden einige Epochen, die für die Entwicklung der Mathematik von Bedeutung sind, beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit ist es lediglich möglich, nur einige Aspekte der Entwicklungsgeschichte herauszustellen, die nicht den Anspruch einer umfassenden Analyse beanspruchen können. Ich verweise dazu auf die diesem Kapitel zugrunde liegende Literatur, vor allem auf Wußing (1979), Gericke (1996) und Kline (1990). Die leitende Frage beim Durchgang durch die Geschichte, die die Auswahl der zur Sprache kommenden Aspekte leitet, soll also sein: Welche gesellschaftliche Rolle spielte die Mathematik in der Vergangenheit und was kann daraus für die heutige gesellschaftliche Stellung der Mathematik gefolgert werden? Wie ist die Stellung der Wissenschaft Mathematik vor dem gesellschaftlichen Hintergrund der jeweiligen historischen Epochen zu verstehen?

Ich beginne bei der Mathematik der Ägypter und damit in der Zeit, in der bereits eine Schrift existierte[25]. Das Papyrus Rhind und das Moskauer Papyrus sind die aufschlußreichsten Quellen. Sie entstanden vermutlich um 1700 v. Chr., wobei sie wahrscheinlich auf ältere Schriften aus dem 19. Jh. v. Chr. zurückgehen. Die wichtigsten Errungenschaften ägyptischer Mathematik sind:

- das dezimale Zahlensystem (in Hieroglyphen, allerdings kein Positionssystem) und Beherrschung der vier Grundrechenarten,
- das schriftliche Dividieren mit allen natürlichen Zahlen,
- die Kenntnis von (Stamm-) Brüchen,
- das Lösen von linearen Gleichungen und
- Flächen- und Volumenberechnungen verschiedener geometrischer Figuren und Körper[26].

Was war nun das Besondere an der ägyptischen Kultur, die eine derartige mathematische Leistung hervorbringen konnte?

---

[25] Diese Entscheidung ist willkürlich und bedeutet nicht, daß es nicht schon vorher mathematische Entwicklungen gab. Die Dokumente über die prähistorische Mathematik sind allerdings spärlich und ihre Interpretationen sehr verschieden (vgl. Gericke 1996, S.1ff), so daß ich auf ihre Darstellung verzichten möchte.

[26] Die Ägypter kannten z.B. einen recht guten Näherungswert für die Kreiszahl π und die richtige Formel für die Berechnung eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche.

Das Leben in Ägypten spielte sich vor allem an den Ufern des Nils ab, wo das fruchtbarste Land zu finden war. Im Gegensatz zu früheren Gesellschaftsformen waren die Ägypter als Agrargesellschaft auf gemeinsames Handeln angewiesen. Es mußten Bewässerungsanlagen gebaut werden, die Kalenderrechnung wurde zur Vorhersage von Nilüberschwemmungen notwendig, Felder mußten vermessen werden, und es wurden die großartigen Grabstätten der Pharaonen gebaut: die Pyramiden. Es entstand ein neuer Berufsstand der Schreiber, die für Verwaltung, Steuereinnahmen, Rechtsprechung zuständig waren und auch die Mathematik anwandten und weiterentwickelten. In diesem gesellschaftlichen Kontext ergibt sich das Bild einer auf praktische Zwecke ausgerichteten Mathematik, die direkt auf die Bedürfnisse der damaligen Gesellschaft zurückzuführen ist. Die Ägypter begnügten sich mit der Anwendbarkeit, die sich durch praktische Erfolge zeigte. Beweise oder rein theoretische Erkenntnisse waren ihnen fremd.

Ungefähr zeitgleich entwickelte sich die Mathematik auch in Mesopotamien, dem Land zwischen Euphrat und Tigris. Man spricht meist von „babylonischer Mathematik", da die meisten Funde mathematischer Keilschrifttexte aus der Zeit um 1800 v.Chr. stammen, dem Beginn des Altbabylonischen Reiches. Es gibt allerdings auch Funde, die weitaus älter sind und aus denen hervorgeht, daß das Zahlensystem bereits früh entwickelt war und auch geometrische Berechnungen bereits bekannt waren. Die Babylonier benutzten ein Sexagesimalsystem (ebenfalls aber kein Positionssystem) und legten für die Grundrechenarten (auch mit Stammbrüchen) umfangreiche Tabellen an, die das Rechnen mit großen Zahlen erheblich vereinfachten. Aber auch in anderen Bereichen waren die Kenntnisse hier umfangreicher als bei den Ägyptern. Die Babylonier kannten z.B. die pythagoräischen Zahlentrippel und den sogenannten pythagoräischen Lehrsatz. Weiterhin waren sie in der Lage, quadratische und biquadratische Gleichungen zu lösen, und das in einer Form, wie sie grundsätzlich auch heute noch benutzt wird (quadratische Ergänzung). Wie in Ägypten spielten auch hier die gesellschaftlichen Erfordernisse, wie Landvermessung und Kanalbauten, aber auch Erbschaftsverteilung oder Wirtschaftsrechnung (es bestanden ausgeprägte Handelsbeziehungen z.B. nach Indien) eine große Rolle bei der Entwicklung der überwiegend praktisch nutzbaren Mathematik. Es lassen sich allerdings auch erste Ansätze für eine rein theoretische Bearbeitung feststellen. Lösungsstrategien von Gleichungen beispielsweise sind nicht mehr unmittelbar an bestimmte Situationen gebunden, sondern werden losgelöst und verallgemeinert mit einem Symbolsystem behandelt:

> „Die mesopotamische Rechentechnik hat sich unter Verwendung vorzüglicher Rechentafeln an recht komplizierten, durch die gesellschaftliche Entwicklung determinierten Problemen entfaltet. Darüber hinaus wurden Problemstellungen behandelt, die schon als Resultat der innerlogischen Entwicklung der Mathematik anzusehen sind. Die mesopotamische Rechenkunst erreichte ein Niveau, das bereits Züge echten algebraischen Denkens aufweist und erst am Ausgang der Antike wieder annähernd erreicht, im islamischen Osten seit dem 10. Jh. und im christlichen Europa sogar erst während der Renaissance übertroffen werden konnte." (Wußing 1979, S.44)

Letztlich kann man aber sagen, daß die Mathematik oder Rechentechnik sowohl in Ägypten als auch in Mesopotamien vor allem unter dem Aspekt der Nützlichkeit entwickelt wurde. Sie wurde mit der steigenden Komplexität der (Stadt-) Staaten, die sich durch Verwaltung, Steuerabgaben, Handelsbeziehungen, Tempelbauten und neue Berufszweige wie Handwerker und Kaufleute auszeichneten, notwendig.

Die hochentwickelte Mathematik der Ägypter und Babylonier hat auch die griechische Mathematik beeinflußt. Viele Kenntnisse der Griechen (wie z.B. der berühmte „Satz des Pythagoras") gehen auf diese Kulturen zurück. Die Griechen haben die Mathematik also keineswegs neu erfunden. Was sie allerdings erfunden haben – oder besser gesagt, was sich in ihrer Kultur entwickeln konnte – ist der Beginn der sogenannten *reinen Mathematik,* einer Wissenschaft, die sich nicht um ihre Anwendungen kümmert bzw. sie sogar bewußt ablehnt.

Die griechische Mathematik begann vermutlich mit Thales um 600 v. Chr.. Er gehört zu den ersten, die (vor allem geometrische) Gesetzmäßigkeiten explizit formulierten und ansatzweise bewiesen. Das war etwas grundlegend Neues und leitete die deduktive Methode der Griechen ein, die strenge Beweisführung. „Die Frage, *warum* eine Vorschrift richtig ist, wurde jedenfalls in den bisher bekannten Texten nicht gestellt. Das hat wohl Thales zum ersten Mal getan, wenn er, wie Eudemos sagt, die Messung der Entfernung von Schiffen auf See durch einen Kongruenzsatz gerechtfertigt hat" (Gericke 1992, S.112). Nach Thales kamen die Pythagoräer. Sie entwickelten eine regelrechte Zahlenmystik, die philosophisch und religiös geprägt war. „Alles ist Zahl" war ihr Motto, und das hieß, daß die ganze Welt durch Zahlen, durch Mathematik zu erklären sei. Die Zahl wurde damit zum Forschungs*gegenstand*, was eine Abwendung vom praktischen Nutzen der Erkenntnisse bewirkte. Sie führten die deduktive Beweismethode weiter voran, indem sie abstrakte Gesetzmäßigkeiten aus Postulaten ableiteten. Wenn hier allerdings von „Zahlen" die Rede ist, so muß man sich vor Augen halten, daß die Pythagoräer nur die natürlichen Zahlen als Zahlen akzeptierten, d.h. Zahlen, die sich durch Zusammensetzen aus der Einheit ergeben und auf die letztlich alles zurückzuführen ist. Das Verhältnis von Strecken in geometrischen Figuren beispielsweise mußte ihrer Überzeugung nach immer durch natürliche Zahlen ausdrückbar sein. Die Entdeckung der Inkommensurabilität, d.h. der Tatsache, daß es Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß besitzen (wie die Diagonale zur Seite eines Quadrates), stand im absoluten Widerspruch zur Zahlenmystik der Pythagoräer und trug mit zum Zusammenbruch dieses Bundes bei.

In der sogenannten klassischen oder athenischen Periode (Athen wurde zum einflußreichsten Stadtstaat in Griechenland) erlebten die Mathematik und andere Wissenschaften, vor allem die Philosophie, ihre Blütezeit. Die vielen Erkenntnisse mußten zusammengefaßt und systematisiert werden. Hippokrates (406? – 377?) schrieb die ersten „Elemente", die die ebene Geometrie, regelmäßige Körper, Zahlentheorie (Teilbarkeit) und Gleichungen (geometrisch interpretiert) behandelten. Außerdem enthielten sie Proportionenlehre und Probleme der Würfelverdopplung und Kreisquadratur, die auf das Problem der Inkommensurabilität, d.h. des Irrationalen hinausliefen. Wie systematisch diese Themen dargestellt oder bewiesen wurden bleibt unklar, da die Originaltexte nicht mehr vorhanden sind (vgl. Gericke 1992, S.91). Im Gegensatz zu den „Elementen“ von Euklid, die um 300 v. Chr. geschrieben wurden und die durch die außerordentlich strenge deduktive Methode zum Maßstab bis in die heutige Zeit wurden. Euklid leitet die Sätze aus Definitionen, Postulaten und Axiomen ab, die damit die Grundelemente sind, auf die sich jede Aussage zurückführen läßt. Die „Elemente“ des Euklid waren lange Zeit, nachdem sie im Mittelalter wiederentdeckt und übersetzt wurden, maßgeblich für die Ausbildung an Schulen und Universitäten; in England waren sie bis Mitte des 18. Jh. einziges Lehrbuch der Geometrie.

Im Zuge der Eroberung Griechenlands durch Alexander den Großen wurde Alexandria das Zentrum der griechischen Mathematik (die Stadt wurde 331 v.Chr. gegründet). Hier wirkten unter anderem Euklid, Apollonios und Heron. Es entstand eine der größten Bibliotheken, die jedoch nach und nach in Kriegen und Eroberungszügen der Römer und später, im 7.Jh., der Moslems zerstört wurde. Nach der römischen Herrschaftsübernahme konnte sich die griechische Mathematik zwar noch lange halten, an die Leistungen früherer Jahrhunderte konnte sie allerdings nicht anknüpfen.

Nachdem in kurzer Form auf die grundlegenden Aspekte der griechischen Mathematik eingegangen wurde, möchte ich nun auf die gesellschaftspolitischen Umstände zu sprechen kommen, vor deren Hintergrund sich diese Wissenschaft entwickeln konnte. Zwei Aspekte sind meines Erachtens besonders wichtig: Erstens die Philosophie, die mit der Mathematik immer sehr eng verknüpft war (vgl. Finley 1983, S.87f), und zweitens die damalige griechische Gesellschaftsstruktur, die zwar viele demokratische Elemente besaß, aber gleichzeitig immer eine Sklavengesellschaft war.

Der philosophische Hintergrund der Mathematik geht vor allem auf Platon zurück. Die Abwendung von der direkten Anschauung und der Erfahrung wurde von ihm am deutlichsten formuliert. Platon selbst war beeinflußt von Sokrates, dessen Schüler er war und den er in seinen Dialogen sprechen läßt, aber auch von den Pythagoräern, an dessen Zahlenmystik er sich anlehnte.

> „Für ihn (Platon, K.J.) konnte die ganze Welt der Erfahrung, da sie keine Dauer habe, unvollkommen und ‚unwirklich‘, nie Gegenstand echten Wissens sein, das sich unmittelbar auf die ewigen und wirklichen Ideen oder Formen richten mußte. Er lehnte deshalb grundsätzlich alle Naturwissenschaft ab, sofern sie sich nicht auf Mathematik und vor allem auf Geometrie zurückführen ließ.“ (Finley 1983, S.88)

„Gerade“ und „Kreis“ waren für Platon die grundlegenden Elemente, die idealen Figuren, aus denen sich alles ableiten läßt. Und das hieß, nur was mit Zirkel und Lineal zu konstruieren ist, konnte Gegenstand der mathematischen Forschung sein und zur ewigen Wahrheit führen. Aus diesen Konstruktionen mußte alles herleitbar sein. Die deduktive Methode wurde so auch aus philosophischer Sicht notwendig.

Die Abkehr von der Erfahrung und die Beschränkung auf die dahinterstehende ewige Wahrheit, die man durch die Geometrie erkennen könne, war nicht immer Maßstab der mathematischen Forschung. Thales hatte damit begonnen, die Natur rational zu erklären und bezog sich dabei sehr wohl auf die Anschauung. Das Neue in seiner Sichtweise bestand in der Rationalität der Erklärung, während vorher die Natur und jede Erscheinung in ihr ein Werk der Götter war. Und auch Aristoteles, ein Schüler Platons, lehnte Empirismus nicht ab, sondern machte ihn im Gegenteil zur Basis der Erkenntnis. Er wandte sich damit gewissermaßen gegen die Ideenlehre Platons. Und dennoch finden wir in der griechischen Mathematik ein Phänomen, das auf nahezu alle Mathematiker und Philosophen zutrifft, ob sie in der Tradition Platons standen oder nicht, und das deshalb nicht allein durch die Philosophie zu erklären ist: Kaum einer der großen Wissenschaftler ist je auf die Idee gekommen, seine Kenntnisse anzuwenden, also produktiv im praktischen Sinne tätig zu sein. Auch Aristoteles, der eher ein Naturwissenschaftler als Mathematiker war, reichte die Erkenntnis der Phänomene aus, eine mögliche Anwendung wurde weder von ihm noch von anderen in Erwägung gezogen (vgl. Finley 1983, S.91).

Ein Blick auf die Gesellschaftsstruktur kann zur Erklärung dieses Phänomens beitragen: Die „Naturwissenschaft und die Philosophie der Griechen waren ‚aristokratisch' in dem Sinne, daß sie sich in der Schicht der Vermögenden entwickelten, die in Krieg und Staatskunst, Dichtung und Redekunst die einzigen annehmbaren nützlichen Betätigungen sahen." (ebd.) Diese wohlhabenden Männer konnten es sich leisten, über philosophische und mathematische Probleme nachzudenken, sie waren von praktischer Arbeit entbunden. Gleichzeitig wurde die Arbeit von Handwerkern oder Bauern (die oftmals Sklaven waren) zwar nicht von ihnen verachtet, aber sie stand wertmäßig unter der des Philosophen, da sie, „so notwendig und nützlich sie auch sein mag, einem geringerwertigen Gut dient" (ebd., S.92). Münzinger (1971) geht bei der Interpretation dieses Sachverhaltes noch einen Schritt weiter. Er sieht in der Abwendung von der Nützlichkeit der Mathematik eine „Flucht vor dem Häßlichen in dieser Gesellschaft, vor der Armut, der Willkür, dem Unzulänglichen, dem Widersprüchlichen, dem Brutalen. Die Hinwendung zur ästhetischen Mathematik erweist sich als Abwendung von der Aufgabe, gesellschaftliche Probleme menschlich zu lösen" (S.42). Einer der – aus heutiger Sicht – größten Widersprüche der Antike ist wohl die Sklaverei, die in der griechischen und römischen Gesellschaft immer ein grundlegender Bestandteil war und doch ganz offenbar im Gegensatz zu einer Philosophie von Humanität und Tugend steht. Es waren allerdings nur wenige, die versuchten, die Sklaverei zu legitimieren, von Kritisieren kann gar keine Rede sein. Wenn Kritik geübt wurde, so geschah dies in der Absicht, die Sklavenhalter zu mehr Humanität gegenüber ihren Sklaven zu ermahnen. Dadurch konnte die Gesellschaft die Institution der Sklaverei aufrechterhalten (vgl. Finley 1981, S. 145ff). Die Mehrheit der Bevölkerung hat wohl nie ernsthaft darüber nachgedacht. „Die Philosophen freilich konnten an dieser Frage nicht vorübergehen, und vielleicht haben sie nirgends so sehr versagt, wie bei dem Versuch, sie befriedigend zu beantworten" (Finley 1983, S.109). Die Schwierigkeit bestand darin, die Sklaverei im Sinne der Philosophie zu rechtfertigen, ohne sie in Frage zu stellen. Aristoteles sprach von einer von Natur aus gegebenen Tatsache, daß manche Menschen zum Sklaven bestimmt seien (vgl. Finley 1981, S.143f und 1983, S.109f). Diese Sichtweise wurde später nur noch von wenigen eingenommen, und doch konnten die Probleme nicht beseitigt werden.

Die Welt der Mathematik ist im Gegensatz zu dieser Wirklichkeit frei von Widersprüchen, sie zeichnet sich gerade durch eine logische und eindeutige Beweisführung aus. Vor diesem Hintergrund erscheint die – sicherlich etwas gewagte und spekulative – Interpretation Münzingers durchaus vertretbar. Obwohl man nie mit Sicherheit wird sagen können, was die wirklichen Beweggründe für eine Beschäftigung mit Mathematik waren, scheint eines jedoch sicher: Es war nur einer Minderheit vorbehalten, sich mit Wissenschaften im allgemeinen und mit Mathematik im besonderen zu beschäftigen. Sie war ein Privileg der herrschenden Schicht und wurde nur an die folgenden Generationen dieser Schicht weitergegeben. Dadurch diente sie der Sicherung ihrer gesellschaftlichen Position (vgl. Münzinger 1971, S.41)

Es lassen sich also sowohl philosophische als auch gesellschaftlich-politische Gründe ausmachen, die die Entwicklung der griechischen Mathematik erklären können. Damit möchte ich nicht bestreiten, daß es auch noch andere Ursachen oder Erklärungsmöglichkeiten gibt. Es sollte lediglich deutlich werden, daß die insgesamt beeindruckenden Leistungen, die in der Antike hervorgebracht wurden, nicht nur auf die Leistungen einiger Individuen zurückgeführt werden können, sondern Ausdruck eines Ganzen sind, in dem gesellschaftliche und weltanschauliche Voraussetzungen eine tragende Rolle spielen. Gleichzeitig lassen sich schon bis zu diesem Zeitpunkt zwei wichtige Dimensionen der Mathematik ausmachen, die uns auch im weiteren Verlauf der Geschichte begegnen werden und die im heutigen Wissenschaftsbetrieb der Universitäten als Unterscheidungsmerkmal zwischen den einzelnen Disziplinen dienen: eine anwendungsbezogene Mathematik, wie sie bei den Ägyptern und Babyloniern auszumachen ist, und eine abstrakte, theoretische oder reine Mathematik, die sich gerade von diesem Nützlichkeitsprinzip lossagte und die erstmals im antiken Griechenland aufzufinden ist.

Nach der Übernahme der Herrschaft durch die Römer, die sich ab ca. 200 v. Chr. im Mittelmeerraum ausbreiteten, wurden in der griechischen Mathematik und Philosophie keine größeren Fortschritte mehr erzielt. Die umfangreiche Bibliothek in Alexandria wurde, wie gesagt, während der römischen Eroberungskriege etappenweise zerstört. Maßgeblich war auch der zunehmende Einfluß des Christentums (es wurde 391 zur Staatsreligion im Römischen Reich), das die Mathematik und Philosophie der griechischen Heiden größtenteils ablehnte und bekämpfte, da sie im Widerspruch zur christlichen Ideologie standen. Dieser Standpunkt der Kirche verhinderte bis ins hohe Mittelalter im christlich geprägten Kulturraum eine Beschäftigung mit der Mathematik der Griechen. Erst zur Zeit der Renaissance wurden diese Leistungen erneut entdeckt und weiterentwickelt.

Doch nicht nur das Christentum verhinderte eine weitere Entwicklung der Wissenschaften. Die Römer hatten eine ganz andere Vorstellung davon, was eine Wissenschaft zu leisten habe. Sie mußte wiederum vor allem nützlich sein. Sie kümmerten sich nicht um Beweise und Systematik. Elementare Mathematik war Bestandteil der Berufsausbildung der Baumeister und Vermessungsleute, abstraktere Mathematik[27] fand lediglich Eingang in die Lehrpläne der Redner. Diese Redner bekleideten politische Ämter, und so gesehen war auch diese Ausbildung auf einen praktischen Nutzen hin ausgerichtet. Die Einschränkung auf praktische Verwendbarkeit war, neben den Einflüssen des Christentums, ausschlaggebend für die Stagnation auf dem Gebiet der Mathematik.

> „The Roman civilization was unproductive in mathematics because it was too much concerned with practical and immediately applicable results." (Kline 1990, S.204)

Das Römische Reich wurde 395 geteilt. Während sich das Oströmische oder Byzantinische Reich bis ins 15. Jh. halten konnte, zerfiel das Weströmische Reich mehr und mehr. Es wurde vom Feudalismus geprägt, die römische Gesellschaftsstruktur löste sich auf.[28] Kirche und Adel schlossen sich zusammen und lebten vom Anbau und Handwerk der Leibeigenen. Es gab so gut wie keine Bildung, selbst die Feudalherren konnten selten lesen oder schreiben. Lediglich in den Klöstern wurde eine minimale Bildung weitergegeben. Der mathematische Teil bestand aus elementarer Mathematik und Kalenderrechnung (die beweglichen Feiertage mussten bestimmt werden). Griechische Mathematik geriet völlig in Vergessenheit, es gab überhaupt keine überlieferten Schriften. Dies änderte sich durch die ersten Kontakte mit dem Islam. Das Islamische Reich war bis Spanien vorgedrungen, und erst ab dem 11. Jh. konnte Spanien von den Christen teilweise zurückerobert werden. Die Mathematik des Islam war gegenüber der der Christen sehr weit fortgeschritten. Ausgehend von den Schriften der Griechen, die sie ins Arabische übersetzten und sorgsam studierten, entwickelten sie das Wissen weiter und orientierten sich in ihrer Methode an der der Griechen, auch wenn sie nicht die Systematik und logische Strenge der „Elemente" Euklids erreichten.

Mit diesen durch die Eroberungskriege hergestellten Kontakten begann auch in den christlichen Völkern wieder stärkeres Interesse für die Mathematik zu entwickeln. Sie übersetzten vom Arabischen ins Lateinische, was vorwiegend in den Klöstern geschah. Die Übersetzungen waren allerdings nicht immer gut und oft fehlerhaft. In Sizilien und Rom wurden auch griechische Originaltexte gefunden, so z.B. einzelne Texte von Euklid und Archimedes, deren Übersetzungen dann weitaus exakter waren. Dennoch: Bis ins 15. Jh. spielten Mathematik und Naturwissenschaften nur eine sehr geringe Rolle in der Gesellschaft. Die Universitäten, die seit dem 12. Jh. gegründet wurden, waren immer noch an die Kirche gebunden. Eine freie Wissenschaft konnte sich unter der Herrschaft der Kirche nicht entwickeln. Außerdem war Europa in viele kleine Staaten geteilt

[27] Sie bestand vor allem aus Geometrie und Arithmetik – neben Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Astronomie und Harmonielehre ein Teil der sogenannten „sieben freien Künste".
[28] Vgl. dazu Finley 1981.

(nach Zusammenbruch des Heiligen Römischen Reiches Deutscher Nation) und geschwächt durch Kriege, Kreuzzüge und die schwarze Pest. All das verhinderte trotz Kenntnis der griechischen und arabischen Schriften eine mathematische Wissenschaft.

Im 14. und 15. Jh., das allgemein das Zeitalter der Renaissance genannt wird, begann ein Umschwung im Denken. Die Natur wurde Ausgangspunkt der Erkenntnis und rationales Denken setzte sich mehr und mehr durch. Das Interesse richtete sich nicht mehr auf das Jenseits, sondern auf das Diesseits, auf das individuelle Leben. Das bedeutete nicht, daß die christliche Religion an Einfluß verlor. Ähnlich wie schon die Pythagoräer mit ihrer Zahlenmystik, sahen auch die Wissenschaftler dieser Zeit die Mathematik als göttliche Schöpfung an. Durch das Studium der Mathematik konnte man das göttliche Wesen der Dinge, der Welt, der Natur erkennen, oder, wie es Kline ausdrückt, „by crediting God with being a supreme mathematican, it became possible to regard the search for the mathematical laws of nature as a religious quest“ (Kline 1990, S.219). Dieses Vorgehen, das Rückbesinnen auf die Natur und rational-logisches Arbeiten, stand im Widerspruch zur Scholastik an den Universitäten. In Italien, dem Ausgangspunkt der neuen Denkweise, wurden daraufhin die ersten Akademien gegründet, die sich bewußt von den Universitäten distanzierten. Hier wurden lateinische Texte in die Landessprache übersetzt. Vor allem Künstler, Unternehmer und Kaufleute waren an mathematischem Wissen interessiert, das sie praktisch nutzbar machten. Lohnarbeit ersetzte zunehmend den Dienst der Leibeigenen, so daß neue zeit- und geldsparende Technologien von großem Interesse waren; in der Malerei und Baukunst wurden perspektivische Darstellungen zum Standard. Neben den noch seltenen Akademien sorgte auch die 1450 erfundene Buchdruckkunst für eine weitere Verbreitung der Schriften und eine zunehmende Trennung von Bildung und Kirche.

Zu den Leistungen auf mathematischem Gebiet gehört der Ausbau der Trigonometrie, Perspektivenlehre (die bei Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer ihren Ausdruck fand), die Entwicklung und Verbesserung der Rechenmethoden (Beginn des Rechnens mit indisch-arabischen Ziffern und langsame Überwindung des Abakus-Rechnens) und Algebraisierung des Rechnens (z.B. das Lösen von Gleichungen). Auch auf naturwissenschaftlichem Gebiet wurden einige bahnbrechende Erfolge in der Anwendung der Mathematik erreicht, man denke an Kopernikus und Kepler im Bereich der Astronomie. Trotz allem waren die Fortschritte der Mathematik im Vergleich zu den folgenden Jahrhunderten nicht sehr groß. Es war mehr eine Rückeroberung der alten griechischen Kenntnisse als eine wirkliche Weiterentwicklung. Diese Epoche ist dennoch vor allem deshalb wichtig, weil sich eine ganz neue Sichtweise auf die Mathematik durchsetzte, ohne die die späteren Erfolge nicht möglich gewesen wäre: Mathematik wurde als Grundlagenwissenschaft, als die Voraussetzung für Wissenschaft und Technik, anerkannt.

> „Equally important for the health and growth of mathematics was that it has once more, as in Alexandrian times, reestablished its intimate connections with science and technology. In science the realization that mathematical laws are the goal, the be-all and end-all, and in technology, the ap-

> preciation that the mathematical formulation of the results of investigations was the soundest and most useful form of knowledge and the surest guide to design and construction, guaranteed that mathematics was to be a major force in modern times and gave promise of new developments.“ (Kline 1990, S.247)

Mit der Mathematik des folgenden 16. und 17. Jh. verbindet man vor allem die Namen Leibniz (1646-1716) und Newton (1642-1727), die die Analysis einleiteten, das Rechnen mit infinitisimalen Größen. Hervorgebracht wurden diese neuen Methoden vor allem durch praktische Probleme: Bewegung im freien Fall, Planetenbewegung, Flächen- und Volumenberechnung, die mit der fortschreitenden Entwicklung von Produktionsmechanismen einher gingen (vgl. Wußing 1979, S.162). Außerdem wurden innermathematische Interessen deutlicher, wie sie sich im Tangentenproblem zeigen, das in der Aufgabe besteht, eine Tangente an eine beliebigen Punkt einer Kurve zu legen. Dies führte zum Differenzenquotienten und zum Ableitungsbegriff. Allerdings hatten die Arbeiten von Leibniz und Newton, denen diese Erkenntnisse nicht einfach in den Schoß fielen, sondern die sich auf Werke von z.B. Kepler, Descartes, Pascal, Barrows berufen konnten, noch einige Mängel. Den Grenzwertbegriff, so wie wir ihn heute kennen, hatten sie noch nicht definiert. Die Erfolge im Umgang mit den neuen Methoden blieben dennoch nicht aus. Insbesondere in den Naturwissenschaften und hier vor allem in der Physik, wurden sie begeistert aufgenommen und angewendet.

> „Gewiß, die Grundbegriffe des *Calculus* waren unklar, weder Newton noch Leibniz hatten sie jemals präzise erklären können – aber seine Operationsregeln waren einfach, die Anwendung dieser Regeln brachte Erfolg über Erfolg, die Resultate wuchsen mit der Zeit zu einer sich selbst tragenden Architektur zusammen und standen, soweit sie die Naturwissenschaften betrafen, in vollem Einklang mit Beobachtung und Experiment.“ (Heuser 1990, S.680)

Nach Leibniz und Newton kamen Euler, Bernoulli, Lagrange, um nur einige zu nennen, und bauten die Analysis weiter aus, allerdings mehr in die Breite als in die Tiefe. Die Mathematik hing aufs Engste mit der Praxis zusammen, sie „wirkte hinein in Kartographie, Navigation, Ballistik, Schiffs- und Maschinenbau. Umgekehrt ließ sie sich in einem solchen Maße von praktischen Problemen inspirieren, daß wir geradezu von einer Symbiose zwischen der Analysis und ihren Anwendungen sprechen dürfen“ (ebd., S.681). Vor dem Hintergrund der Aufklärungsbewegung, der beginnenden industriellen Revolution, des Interesses des Bürgertums an neuen Technologien, wird das verständlich. Gleichzeitig vergrößerte sich das Bildungsbedürfnis. Die Ecole Polytechnique wurde 1794 in Frankreich gegründet, und hier wurde Mathematik als Grundlagenwissenschaft, als Basis für alle technischen Berufe gelehrt und fand erstmalig auch offiziell Eingang in die höhere Berufsausbildung.

Die oben angedeuteten Mängel der Theorie, die hauptsächlich in einer Unklarheit der Begriffe lag, wurden in der Folgezeit immer deutlicher. Nach den vielen Erfolgen in der Anwendung konzentrierte sich nun die Arbeit auf die exakte Beweisführung und Formulierung. Ein Preisausschreiben der Berliner Akademie von 1784 zeigt dieses Interesse deutlich:

> „Die höhere Geometrie [Mathematik] benutzt häufig unendlich große und unendlich kleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen.“ (zitiert nach Heuser 1990, S.689)

Damit begann die erneute Besinnung auf die Strenge der Beweisführung in Anlehnung an die Antike. Bolzano, Cauchy, Riemann, Fourier und Weierstraß sind u.a. die Namen, mit denen sich die Analysis im 19. Jh. verbinden läßt. Sie konkretisierten die Begriffe wie „Funktion“, „Stetigkeit“ und „Grenzwert“. Vor allem aber wurde das Zahlensystem erst in diesem Jahrhundert vollständig geklärt und systematisch aufgebaut, wobei der Prozeß quasi umgekehrt verlief, nämlich von den komplexen Zahlen absteigend zu den natürlichen Zahlen, auf die sich rückwirkend alles aufbauen ließ. Erst gegen Ende des 19. Jh. stand die Mathematik damit ‚auf sicheren Füßen’ und nach „einer langen Wanderung durch die Steinwüste der Exhaustion und das Schattenreich der Infinitesimalien war die Analysis zurückgekehrt zu ihrem Ursprung, zu Pythagoras, der in Kroton verkündet hatte: ‚Alles ist Zahl‘“ (Heuser 1990, S.700). – So stellte sich die Mathematik am Ende des 19. Jahrhunderts dar.[29]

Natürlich machte nicht allein die Analysis so bedeutende Fortschritte. Auch die Algebra wurde stark ausgebaut. So wurde der Fundamentalsatz der Algebra von Gauß 1799 erstmalig bewiesen – ein Hauptproblem der Algebra war damit gelöst. Andere Bereiche der Mathematik wurden ebenfalls weiterentwickelt oder als selbständiges Gebiet entdeckt, wie z.B. die Wahrscheinlichkeitstheorie. Das Bild der Mathematik wurde differenzierter und langsam bildete sie sich als eigenständige Wissenschaft neben den Naturwissenschaften heraus. Der Differenzierungsprozeß brachte eine Reihe von Wissenschaftszweigen hervor: Geometrie, Gruppen- und Körpertheorie, Topologie, Zahlentheorie, Differentialgleichungen, Funktionentheorie u.s.f. (vgl. Wußing 1979, S249). Außerdem wurde der axiomatische Zugang zur Mathematik erweitert und auf viele Gebiete ausgedehnt. Mengen- und Gruppentheorie bekamen ebenfalls eine grundlegende Stellung und konnten auch auf physikalischen Gebieten zur Anwendung gebracht werden (vgl. Beck 1982, S.105).

So erwuchs eine Wissenschaft, die, schaut man sich die Lehre an den Universitäten an, scheinbar nichts mehr mit der Praxis der Nicht-Mathematiker zu tun hat. Sie ist mittlerweile so hoch spezialisiert und differenziert, daß Anwendungen nur selten in den Blick geraten[30] und die Verbindung zwischen Mathematik und gesellschaftlicher Praxis heute

---

[29] Das Gefühl der Sicherheit währte allerdings nicht lange. Mit der Entdeckung der Antinomien, insbesondere der Russelschen Antinomie, die eine ‚Grundlagenkrise‘ einleiteten, wurde letztlich, nach einigen (erfolglosen) Versuchen, die Mathematik als ein widerspruchsfreies System zu etablieren, die Idee aufgegeben, jemals eine sichere Grundlage der Mathematik zu finden (vgl. Davis/Hersh 1985, S.339ff).

[30] Damit soll nicht behauptet werden, daß sie tatsächlich in jedem Forschungsbereich unmittelbar zu erkennen wären, wenn man nur genau genug hinsähe. Innermathematische Forschung gehört ebenso zur Wissenschaft Mathematik wie anwendungsbezogene. Beides steht in einer Wechselwirkung, wie das Beispiel der Entwicklungsgeschichte der Analysis gezeigt hat. Nachdem viele praktische Probleme, die

nur noch schwer nachzuweisen ist. Es ist dennoch möglich, an einzelnen Beispielen die Wechselwirkung auch für dieses Jahrhundert aufzuzeigen. Am Beispiel der Analysis habe ich bereits dargestellt, wie Probleme in Naturwissenschaft und Technik die Entwicklung der Mathematik vorangetrieben haben. Ein jüngeres Beispiel ist die Optimierung, die aus wirtschaftswissenschaftlichen Problemen heraus entstanden ist (vgl. auch Beck 1982, S.102ff). Auch in umgekehrter Richtung lassen sich Beispiele finden, von denen Beck (1982, S.104ff) einige zusammengestellt hat und von denen ich eines zitiere:

> „Ein geradezu ironisches Beispiel ist die Anwendung zahlentheoretischer Forschung … HARDY rechnete die Zahlentheorie zur 'wirklichen Mathematik', die er als nutzlos, harmlos und insbesondere als nicht anwendbar auf das Militärwesen charakterisierte. Später erweisen sich Theoreme aus der Zahlentheorie als grundlegend für die um 1950 entstandene Codierungstheorie, die ja bei der Nachrichtenübermittlung (auch im Kriege) von großer Bedeutung ist." (ebd.)

Es bleibt abschließend festzuhalten, daß die Mathematik immer mit der gesellschaftlichen Praxis verbunden war und ist. Nicht immer unmittelbar, aber ohne ein gesellschaftliches Bedürfnis an mathematischer Forschung wäre eine Entwicklung dieser Wissenschaft unmöglich gewesen. Nun mag man einwenden, daß die antike Mathematik bei den Griechen doch das beste Beispiel für eine reine Mathematik sei, die überhaupt nichts mit der Praxis zu tun habe. Ich habe die Griechen oben selbst als Erfinder der reinen Mathematik bezeichnet. Hier sollte zweierlei beachtet werden: Erstens existierte auch in Griechenland eine praktische Mathematik, die die Kaufleute, Handwerker oder Vermessungsleute benutzten und die ihren Zweck sicherlich voll erfüllte. Es gibt zumindest keinen Grund anzunehmen, daß z.B. die Landvermessung bei den Griechen schlechter funktionierte als bei den Babyloniern oder Ägyptern. Zweitens war die Praxis der Mathematiker dieser Zeit, und das heißt der Philosophen, eine ganz andere als die der „Praktiker" oder „Künstler", wie man damals sagte. Jene waren an philosophischen Fragen interessiert und nicht an Technik. Eine praktische Umsetzung im Sinne einer technischen Nutzung ihrer Erkenntnisse kam ihnen gar nicht in den Sinn, denn das gehörte ganz einfach nicht zu ihren gesellschaftlichen Aufgaben[31]. Somit war die Mathematik auch in der Antike mit der gesellschaftlichen Praxis verknüpft, mit der Praxis der herrschenden Klasse. Diese Tatsache allerdings ist keine Besonderheit der griechischen Antike. Der Aufschwung der Mathematik nach der französischen Revolution beispielsweise war von den praktisch orientierten Interessen des Bürgertums bestimmt, der „neuen" herrschenden Klasse. Drittens erinnere ich an dieser Stelle an die ‚Medien der Vergesellschaftung' Arbeit, Sprache und Herrschaft (vgl. 3.1.1). Gesellschaftliche Praxis ist ein umfassender Begriff und meint eben mehr als die gesellschaftliche Arbeit.

---

sich vor allem in der Physik stellten, gelöst waren, ergab sich hier die Notwendigkeit, die Begriffe zu präzisieren und besser handhabbar zu machen, und das heißt, innermathematisch zu arbeiten.

[31] Abgesehen davon gibt es auch aus der Antike einzelne Beispiele, die das Gegenteil zeigen, aber sicherlich nur Ausnahmen sind. So soll Heron von Alexandrien eine Mathematik vertreten haben, „die der Befriedigung praktischer Belange diente" (vgl. Wußing 1979, S.78).

In diesem kurzen historischen Rückblick sollte deutlich geworden sein, daß und wie die Mathematik untrennbar mit der Gesellschaft verbunden ist. Die antike Mathematik ist ebenso undenkbar ohne die antike Gesellschaft, ihre praktischen Probleme und ihre Struktur wie die Mathematik des 16. und 17. Jh. nicht ohne die beginnende industrielle Revolution und die Ideen der Aufklärung möglich gewesen wäre. Damit konnte eine Behauptung gestützt werden, die Horkheimer schon 1937 formulierte, daß nämlich alle Produktionszweige, und damit auch die Wissenschaft,

> „nicht als selbständig und unabhängig anzusehen (sind). Sie sind Besonderungen der Art und Weise, wie sich die Gesellschaft mit der Natur auseinandersetzt und in ihrer gegebenen Form erhält. Sie sind Momente des gesellschaftlichen Produktionsprozesses, mögen sie selbst auch wenig oder gar nicht produktiv im eigentlichen Sinne sein." (Horkheimer 1968, S.146)

Der Rückblick war notwendig, weil dieser Zusammenhang in der Mathematik, so wie sie sich nach einem langen Entwicklungsprozeß heute darstellt, nicht mehr ohne weiteres aufzuspüren ist. Gerade die Mathematik ist scheinbar nicht „produktiv im eigentlichen Sinne" und ist dennoch ohne eine Gesellschaft, in der sie sich in ihrer je spezifischen Form entwickeln kann, gar nicht denkbar.

3.1.2.2 Die wichtigsten didaktischen Ansätze im Überblick

Im folgenden soll ein historischer Abriß der Mathematikdidaktik mit ihren unterschiedlichen Richtungen dargelegt werden. Insbesondere soll untersucht werden, wie Mathematikunterricht jeweils gesellschaftlich legitimiert wurde, wenn überhaupt auf seine gesellschaftliche Relevanz aufmerksam gemacht wurde. Ich stelle drei Richtungen vor: die ‚traditionelle Mathematik', die Neue Mathematik und die anwendungsorientierte Mathematik. Auswahlkriterium für diese drei Richtungen ist ihre Auswirkung auf Richtlinien und Lehrpläne.[32] Für die Darstellung der ‚traditionellen Mathematik' und der Neuen Mathematik konnte ich mich auf die „Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland" von Helge Lenné (1969) stützen.[33] Die anwendungsorientierte Mathematik wird etwas ausführlicher erläutert werden, da der Bezug zur gesellschaftlichen Praxis hier am deutlichsten und differenziertesten zur Sprache kommt. Die durchgehende Fragestellung bei der Betrachtung der verschiedenen didaktischen Strömungen soll sein: Wie hängen gesellschaftliche Praxis und Mathematik zusammen, und wie wird dieser Zusammenhang didaktisch realisiert?

---

[32] Während die ersten beiden Richtungen die Lehrpläne sehr stark beeinflußt haben, ist es bei der anwendungsorientierten Mathematik noch nicht abzusehen, wie stark und in welcher Form ihr Einfluß auf Lehrpläne und Unterrichtsgestaltung sein wird. Neuere Richtlinien und Lehrpläne und Entwürfe zu diesen zeigen allerdings, daß der „jüngste Trend zur Anwendungsorientierung" (Heymann 1996) auch hier seinen Niederschlag findet.

[33] Lenné hat (allerdings nur bis Mitte der 60er Jahre) drei Hauptrichtungen der Mathematikdidaktik identifiziert und systematisch gegenübergestellt. Außer den hier Vorzustellenden hob er die Didaktik Wittenbergs und Wagenscheins hervor. Auf Lehrpläne und ihre Inhalte haben sich allerdings nur die ‚traditionelle' und die Neue Mathematik ausgewirkt.

Die ‚traditionelle Mathematik'

Die ‚traditionelle Mathematik' bestimmte den Mathematikunterricht des Gymnasiums seit Anfang des 20. Jahrhunderts bis ungefähr Mitte der 50er Jahre und länger. Erst seit dieser Zeit haben umfangreiche Maßnahmen zu einer Erneuerung des Mathematikunterrichts, zumeist unter dem Namen der Neuen Mathematik, eingesetzt. Helge Lenné stützt sich bei seiner Analyse der Fachdidaktik dieser Zeit vor allem auf Lehrpläne und Schulbücher aus den Jahren von 1945 bis 1955 (Lenné 1969, S.18).

Er geht in einer einführenden Betrachtung von den Bildungszielen der ‚traditionellen Mathematik' aus und prüft dann die Möglichkeit ihrer Einlösung durch die in den Lehrplänen vorgeschriebenen Einzelstoffe. Schon hier ergibt sich nach Lenné das Bild einer Ambivalenz zwischen den (allgemeinen) Bildungszielen (z.B. Fähigkeit zu logischem Denken) und den Einzelstoffen (vgl. ebd. S.28). Lediglich bei speziellen Qualifikationen, die zumeist auf eine spätere berufliche Verwendung ausgerichtet sind (z.B. Umgang mit Zahlen und Gleichungen), lassen sich Verknüpfungen mit Inhalten feststellen, wobei sich hier darüber hinaus das Problem ergibt, daß die Inhalte gesellschaftlich nicht mehr adäquat erscheinen, wie Lenné an einigen Beispielen erläutert (vgl. ebd., S.26ff).

Auf die Gründe einer solchen Ambivalenz geht er im folgenden Kapitel ein, in dem er die historischen und gesellschaftlichen Ursachen näher beleuchtet. „Ausgangspunkt auch der Traditionellen Mathematik ist das neuhumanistische Gymnasium" (ebd., S.38) und die damit einhergehende Vorstellung einer allgemeinen Bildung. Durch den Bezug zur antiken Mathematik sollte die Schulmathematik, wie die alten Sprachen, diesem Ziel untergeordnet sein. Gleichzeitig entwickelten sich auch die Natur- und Gesellschaftswissenschaften weiter und gelangten zu mehr Bedeutung, worauf die diese Wissenschaften stärker berücksichtigenden Realschulen entstanden. Da aber weiterhin allein das Gymnasium zu gesellschaftlich höheren Positionen führte, und es seinem Anspruch nach die „wirkliche" Bildung vermittelte, setzte eine „Auseinandersetzung um die volle Gleichstellung der Realschulen mit dem neuhumanistischen Gymnasium" (ebd., S.40) ein, die 1900 verwirklicht wurde.

Für den Mathematikunterricht bedeutete dies, daß fast alle Unterrichtsstoffe des Gymnasiums von den Realschulen übernommen und „zugleich wichtige Realschulstoffe wie etwa bürgerliche Rechnung aller Art aufrechterhalten" wurden (ebd., S.41), die außerdem durch den neuhumanistischen Bildungsbegriff – und nicht etwa durch die Fachwissenschaft – legitimiert wurden. Das Gymnasium seinerseits mußte sich durch die neue Konkurrenz der Realschulen deren stofflichen Schwerpunkten anpassen und den traditionellen Fächern weniger Platz einräumen. „Damit war einer hochgradig historisch-zufälligen Stoffauswahl in Mathematik Tür und Tor geöffnet" (ebd.).

Bei den in den Lehrplänen aufgeführten Bildungszielen schlägt sich diese Entwicklung des Gymnasiums nieder, indem einerseits sehr allgemeine Ziele und Auffassungen genannt werden („Mathematik als ‚Geisteswissenschaft' ", „logisches Denken, Abstraktionsfähigkeit“ (ebd. S.41f)) und andererseits von „Ordnung, Sorgfalt, Konzentrationsvermögen, Beharrlichkeit, Fleiß, Ausdauer, kurz, die besonderen Tugenden von Schülern in einer Lernschule“ (ebd., S.42), die eher den „ursprünglichen – pragmatischen – Intentionen der Realschule entsprechen“ (ebd., S.45). Außerdem identifiziert Lenné noch weitere Bildungsziele, die er den „Einflüssen der Reformpädagogik und der Psychologisierung des Unterrichts“ (ebd.) zuschreibt (z.B. Kreativität und Phantasie) sowie der „Reaktion auf das neue philosophische Grundlagen- und Selbstverständnis der mathematischen Wissenschaft“ (ebd.), die eine Einführung in philosophische Grundlagen im Unterricht bewirkte. Aber auch die gesellschaftliche und kulturelle Bedeutung der Mathematik wurde als Bildungsargument angeführt, „ohne jedoch im ganzen damit konkrete didaktische Folgerungen zu verknüpfen“ (ebd.). Er faßt seine Ausführungen zusammen:

> „Die Gesamttendenz aller in diesen Schichten auftretenden Bildungsvorstellungen scheint zu sein, daß die Traditionelle Mathematik zahlreiche, teilweise heterogene, *allgemeine* Bildungsziele in sich aufgenommen hat, in die aber nicht die charakteristische Struktur der Mathematik als Wissenschaft direkt eingeht. … Man könnte kurz von einer - wie auch immer historisch bedingten – ‚fachstrukturellen Abstinenz‘ sprechen.“ (ebd., S.46)

Die Entwicklungsgeschichte des Gymnasiums und der Realschule vor dem Hintergrund ihrer Legitimation durch Bildungsziele könnte man auch vor dem Hintergrund des Zusammenhangs von Unterricht und Herrschaft interpretieren (vgl. Abschnitt 2.2) – denn die Angleichung der Realschule an die Institution des Gymnasiums als „Standesschule“ (ebd., S.40) wurde notwendig, damit die Privilegien der Absolventen gesichert waren, sie hatte prinzipiell keine pädagogischen oder bildungstheoretischen Gründe. So wurde ein ursprünglich pädagogisch legitimierter Bildungsbegriff, eben um herrschende Interessen zu sichern, ins Gegenteil verkehrt.

Diese Gefahr der Reduzierung einer Bildungsidee auf gesellschaftliche Interessen sieht auch Lenné: Im Zusammenhang mit der charakteristischen Stofforganisation der ‚traditionellen Mathematik‘, die er als „Aufgabendidaktik“ (Lenné 1969, S.35) bezeichnet und die sich durch eine strenge Systematik einzelner Teilgebiete mit jeweils einzelnen Aufgabentypen auszeichnet, wobei darüber hinaus die einzelnen Gebiete wenig miteinander verknüpft sind (ebd., S.34f), zeigt er die gesellschaftliche Funktion eines solchen Vorgehens auf:

> „In der Aufgabendidaktik werden … jeweils bestimmte Kenntnisse, Operationen und Methoden vom Lehrer vorgetragen. … Sodann werden vom Lehrer beziehungsweise Lehrbuch Aufgaben gestellt. Diese Aufgaben werden vom Schüler gelöst. Die Resultate werden vom Lehrer kontrolliert. Dieses Schema entspricht … mithin im Prinzip der hierarchischen politischen Ordnung jener Zeit, in der sich die oben geschilderte Praxis des Gymnasiums historisch manifestierte, und zugleich den Ordnungsvorstellungen jener höheren Beamten und Offiziere, deren Zubringerinstitution die höhere Schule war“ (ebd., S.51f). Und weiter, sich auf die Gegenwart beziehend: „Wenn eine ursprünglich so klar erscheinende Bildungsvorstellung wie die Humboldtsche praktisch geradezu in ihr Gegenteil verkehrt und damit nicht nur bezüglich ihrer allgemeinen Ziele und Unterrichtsinhalte, sondern auch unterrichtspraktisch zu einer Leerformel werden konnte, so muß auch in der Gegenwart mit solchen Möglichkeiten gerechnet werden. So etwa scheint bei Wittenberg und Wagenschein der Begriff des Elementaren, in der Neuen Mathematik der Begriff der wissenschaftlichen Sauberkeit die Versuchung nahezu beliebiger didaktischer Ausdehnung zu enthalten“ (ebd.)

Abschließend kann festgehalten werden, daß in der ‚traditionellen Mathematik' ihre gesellschaftliche Bedeutung so gut wie gar nicht reflektiert wurde, zumindest wurden Bildungsziele, die auf eine gesellschaftliche Relevanz abzielten, nicht auf die Inhalte bezogen. Mathematik wurde durch allgemeine, vom Neuhumanismus geprägte Bildungsziele legitimiert, die vielleicht sogar die Umsetzung und genauere Reflexion des Argumentes, daß Mathematik ein grundlegender Bestandteil der Gesellschaft ist und deshalb Bildungsbestandteil sein muß, verhinderten (vgl. ebd. S.44). – Wie sieht es nun mit Begründungen in der bislang durchschlagendsten Reformbewegung, der Neuen Mathematik, aus?

Die Neue Mathematik

Nach Lenné war vor allem die „fachstrukturelle Abstinenz" (ebd., S.53) ein Grund für eine Reform der Schulmathematik, mit der allerdings schon zu Anfang des 20. Jahrhunderts die sogenannten Kleinschen Reformen[34] begründet wurden (vgl. Damerow 1984, S.34ff). Hinzu kam die seit Mitte der 50er Jahre einsetzende fachmathematische Orientierung des Bourbarkismus[35]. Dieser neue strukturmathematische Ansatz hatte den Anspruch, „die meisten Gebiete der Mathematik, die bisher in immer weitergehender Differenzierung auseinanderstrebten, in einer Hierarchie universeller und zudem beweistechnisch höchst ökonomischer Begriffe" (Lenné 1969, S.80) zusammenzufassen. Der Bezug zur Schulmathematik wurde zudem von einem der Begründer von Bourbaki, Jean Dieudonné, selbst hergestellt (vgl. Damerow 1984, S.36f), so daß die Ideen der Strukturmathematik ohne große Umwege Einlaß in die Schule finden konnten. Ein weiterer wichtiger Grund, ohne den solch weitreichende Reformen (und ihre staatliche Finanzierung) sicherlich nicht stattgefunden hätten, war der sogenannte „Sputnik-Schock" in den USA und die in Deutschland angekündigte „Bildungskatastrophe". „Heute ist schon fast vergessen, daß auch an ihrer (der Neuen Mathematik, K.J.) Wiege handfeste *wirtschaftliche Überlegungen* standen" (Schupp 1988, S.9). Die westliche Welt befürchtete ganz einfach, wirtschaftlich ins Hintertreffen zu geraten, und versuchte dieser angeblichen Gefahr mit einer Bildungsreform, die vor allem an den Wissenschaften orientiert sein sollte, entgegenzutreten. Inhaltlich wirkte sich diese Reform hauptsächlich in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern aus. „Besonders nach dem zweiten Weltkrieg wurde die Bedeutung von Naturwissenschaften und Mathematik für Gestalt und Bestand der Industriegesellschaft so deutlich wie nie zuvor" (Lenné 1969, S.80). Diese neue Sichtweise auf das Fach Mathematik erzwingt geradezu eine auf die Gesellschaft bezogene Legitimation des Faches. Wie sah diese konkret aus und wie wurde inhaltlich damit umgegangen?

---

[34] benannt nach dem Mathematiker Felix Klein

[35] Der Name *Nicolas Bourbaki* ist das Pseudonym einer Gruppe französischer Mathematiker, die sich 1939 zusammengefunden hatte.

Ausdruck der Reformbewegung auf Lehrplanebene sind der Nürnberger Rahmenplan von 1965 und die Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts der Kultusministerkonferenz (KMK) von 1968. In beiden Schriften wird die oben angedeutete Sichtweise eindeutig eingenommen. So heißt es in der Präambel des Nürnberger Rahmenplans, daß „der Mathematik und den Naturwissenschaften eine stetig steigende Bedeutung bei der Formung unseres politischen, wirtschaftlichen und sozialen Lebens zukommt“ (zit. nach Lenné 1969, S.314). Aber auch in den Richtlinien der KMK werden als Gründe für eine Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Hauptsache praktische Gründe genannt: das „Eindringen moderner mathematischer Betrachtungsweisen in Wissenschaften, die für Wirtschaft, Gesellschaft und Staat von Bedeutung sind“, „Verständnis für mathematische Strukturen“, um „die Probleme zu lösen, vor die er (der Mensch, K.J.) in der modernen, rationalisierten Welt gestellt wird“ (zit. nach OECD 1974, S.172). Diese Ziele, die auf eine gesellschaftliche Relevanz von Mathematik verweisen, wurden inhaltlich jedoch nicht umgesetzt. Anwendungen mathematischer Methoden finden so gut wie gar keinen Platz, es überwiegt der fachmathematische Anspruch. Obwohl die gesellschaftliche Bedeutung also durchaus erkannt wurde (ohne daß man dabei allerdings sehr konkret wurde), werden Anwendungen wegen „ausschließlicher Orientierung am Status quo der mathematischen Wissenschaft nicht mehr durch eine entsprechende Gestaltung des Stoffplans eingelöst, ja durch die ersatzlose Streichung der traditionellen Anwendungen in den Haupt- und Realschulplänen sogar in ihr Gegenteil verkehrt“ (Damerow 1977, S.223). Andererseits blieben sonstige stoffliche Veränderungen weitgehend aus. Traditionelle Inhalte wurden lediglich anders, an strukturmathematischen Gesichtspunkten orientiert, formuliert. Beispielsweise entspricht dem traditionellen Stoffgebiet „Bruchrechnung“ in den Richtlinien der KMK der Themenkreis „Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen und ihrer Verknüpfungen“ (vgl. ebd., S.228f). Dennoch oder gerade durch die Umformulierung traditioneller Stoffe und deren Einbettung in übergreifende Ordnungsstrukturen, hatte die Neue Mathematik eine erhebliche Stoffvermehrung zur Folge (vgl. Lenné 1969, S.95ff).

Die Richtlinien und Rahmenlehrpläne für den Mathematikunterricht der KMK sollten ab 1972/73 stufenweise gelten. Es setzte eine Welle von Reformbestrebungen in allen Bundesländern ein, die bis 1981 noch kein einheitliches Bild zeigte (vgl. Damerow u.a. 1981). Die Empfehlungen für eine Modernisierung wurden in den Lehrplänen der einzelnen Bundesländer völlig unterschiedlich umgesetzt, und selbst innerhalb der Länder war die Lehrplanarbeit vielfach unkoordiniert (ebd., S.15). „Im ganzen gesehen reicht das Spektrum für viele der Stoffgebiete von der völligen Gleichartigkeit der Behandlung in den traditionellen und in den neuen Plänen bis zur eindeutigen Alternative mit Auswirkungen auf den Stoffausbau des Gesamtcurriculum.“ (ebd., S.18)

Es läßt sich insgesamt sagen, daß die Reformbestrebungen der Neuen Mathematik gescheitert sind. Die einseitige Orientierung an der Fachmathematik, die eine Abwendung von den Anwendungen bewirkte, stieß schon bald auf Widerspruch. Die Ansprüche, mit denen sie sich zunächst Geltung verschaffte, konnten nicht eingelöst werden. „*Aus den Mitteln* (strukturelle Aufhellung, logische Fundierung, sprachliche Präzisierung) *wurden Zwecke*", wie es Schupp (1988) rückblickend formuliert. Letztlich blieb die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik wie in der ‚traditionellen Mathematik' unreflektiert und ohne inhaltliche oder methodische Konsequenzen.

Ich möchte nun abschließend eine neue didaktische Richtung darstellen, die sich gerade aus diesen Mängeln der Neuen Mathematik entwickelt hat: die anwendungsorientierte Didaktik. Sie hat zwar bislang noch nicht so einen erheblichen Einfluß auf die geltenden Lehrpläne gehabt, scheint aber den Aspekt der gesellschaftlichen Relevanz in stärkerem und konsequenterem Maße hervorzuheben.

Anwendungsorientierter Mathematikunterricht

Die Anwendungsorientierung, die „wie zuvor die ‚Neue Mathematik' eine internationale Strömung" ist (Heymann 1996, S.186), setzte seit Mitte der 70er Jahre ein und kann heute auf vielfältige Arbeiten mit teilweise recht unterschiedlichen Zielsetzungen zurückblicken. Schon ein Blick in die mathematikdidaktischen Zeitschriften (z.B. „Der Mathematikunterricht") der letzten Jahre zeigt einen eindeutigen Schwerpunkt der anwendungsorientierten Sichtweise. Charakteristisch ist gleichzeitig, daß die theoretische Diskussion, vor allem der Modelltheorie (s.u.), viel fundierter und einheitlicher ausgetragen wird, als es bei der Neuen Mathematik der Fall war[36]. Während der Anwendungsaspekt auch früher schon eine wichtige Rolle spielte (vgl. z.B. die Didaktik Lietzmanns von 1926, erläutert von G. Kaiser (1985), S.161ff , vgl. auch Schupp 1988, S.6ff), hat sich die modelltheoretische Sichtweise als Grundlage der Anwendungsorientierung erst innerhalb der letzten 20 Jahre durchgesetzt. Sie soll daher zunächst erläutert werden, bevor ich anschließend auf die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik zurückkomme.

Ausgangspunkt ist die Überlegung, daß ein mathematisches Modell einer gegebenen Situation nicht automatisch immanent ist, daß man dieses Modell nicht entdecken kann, wenn man nur lange genug die Situation betrachtet (eine Auffassung, die sich in den üblichen „eingekleideten Aufgaben" und in der traditionellen Methode des Sachrechnens in den Volks- bzw. Hauptschulen widerspiegelt; vgl. Schupp 1988, S.7f.). Das modellbildende Subjekt hat selbst einen Einfluß auf das Modell, verschiedene Subjekte bilden unter Umständen verschiedene Modelle für die gleiche Ausgangssituation, je nachdem, welches Ziel sie verfolgen, in welcher Zeit sie handeln oder für wen sie das Modell entwerfen. Der Grund dafür ist die Tatsache, daß ein Modell nie die ganze Situation vollständig abbilden kann, es können immer nur einzelne, für relevant gehaltene Merkmale aufgenommen werden, und über diese Relevanz entscheidet eben das mo-

[36] vgl. z.B. Damerow 1977, S.235

dellbildende Subjekt (ebd., S.10).[37] Es ist jedoch nicht immer notwendig, für jedes Problem ein mathematisches Modell neu zu entwerfen. In Standardmodellen, über die man im allgemeinen gar nicht mehr reflektiert, sind die relevanten Merkmale oft schon von außen vorgegeben, sie werden tradiert, auch und vor allem durch Schule. Dies heißt allerdings nicht, daß man sich der Modellbildung nicht bewußt werden kann und sollte. Im Gegenteil, nur durch ein Bewußtsein von den zugrundeliegenden Modellvoraussetzungen oder Annahmen, die an die Situation gestellt werden, können auch andere, geringfügig abweichende Situationen sinnvoll modelliert werden[38].

Die Entwicklung eines Modells wird als Prozeß gedacht:

> „Das in einer außermathematischen Situation auftretende Problem wird zunächst in ein innermathematisches Problem überführt (*modellieren*) und dieses dann mit den dortigen Mitteln gelöst (*deduzieren*). Die mathematische Lösung wird nun wieder in die Ausgangssituation übertragen (*interpretieren*) und schließlich überprüft, ob die so erhaltenen Informationen zu deren Klärung in der Tat beitragen (*validieren*). Wenn nicht, sollte der Lösungsprozeß fortgesetzt werden, ist insbesondere zu prüfen, welche der bisherigen Maßnahmen geeignet abzuändern sind" (ebd., S.11, in Klammern gesetzte Anmerkungen von mir, K.J.).

Der Prozeß des Modellbildens läßt sich wie folgt visualisieren:

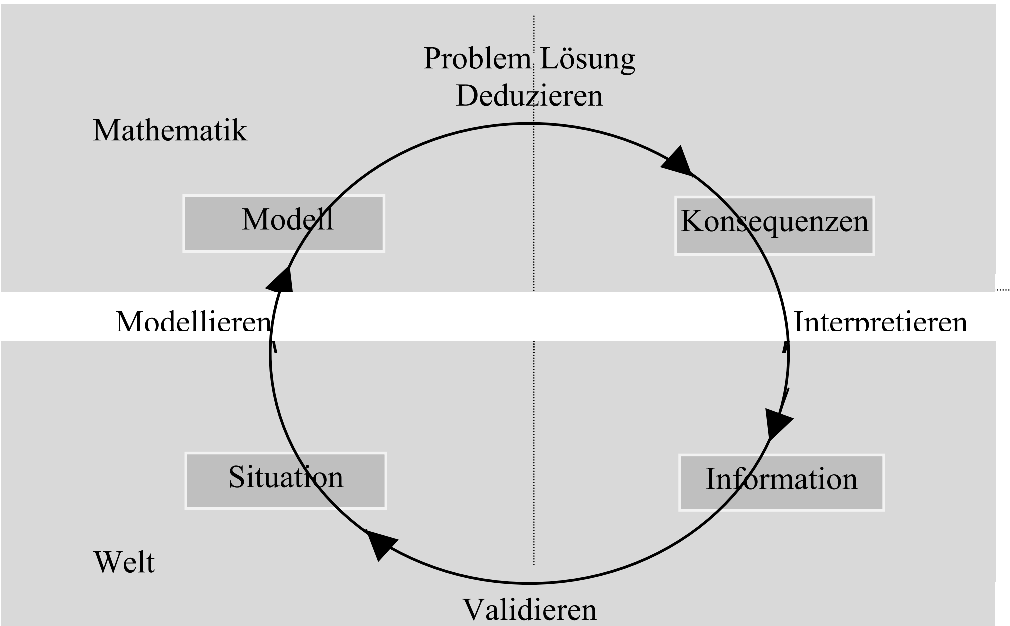

Abbildung 3: Modellbildungsprozeß (nach Schupp 1988, S.11)

Der Modellbildungsprozeß ist jedoch nur ein Aspekt einer anwendungsorientierten Didaktik. Kaiser-Meßmer (1989) stellt in einem Aufsatz verschiedene Grundrichtungen inner- und außerhalb Deutschlands vor und kommt neben der hier erläuterten Modellbildungsauffassung, die sie eher der „pragmatischen Richtung" zuordnet, zu der Darstellung einer an humanistischen Bildungsidealen orientierten Grundauffassung. Die

[37] Zur Modelltheorie vergl. auch Stachowiak 1973.

[38] Man denke hier z.B. an die Voraussetzung der direkten Proportionalität beim Einkauf von Waren. Dieses Standardmodell gilt nicht mehr, wenn bei großer Abnahme Rabatte gewährt werden.

Vertreter dieser Richtung betonen ebenfalls die Wichtigkeit von Anwendungen im Unterricht, allerdings unter etwas anderen Aspekten:

> „Die **humanistische Richtung** entwickelt *stärker theorieorientierte Konzeptionen* zum Einbezug von Anwendungsbezügen in den Mathematikunterricht … .Diese Konzeption beinhaltet einerseits, daß Anwendungen unverzichtbarer Bestandteil des Mathematikunterrichts sein sollen …, lehnt aber andererseits eine zu enge Auffassung von Anwendungen als nachträgliche Anwendung bereits eingeführter mathematischer Verfahren ab“ (ebd., S.323). Wichtiger ist das Mathematisieren, das hier etwas anderes meint als nur Modellieren: „Für die **humanistische Richtung** ist die Forderung nach *Befähigung* zum *Mathematisieren der Realität* und auch der *Mathematik* zentraler Bestandteil der theoretischen Konzeptionen, da nur so Schüler/innen das Anwenden lernen. Sie entwickelt demgegenüber (der pragmatischen Richtung gegenüber, K.J.) ein stark an der Wissenschaft Mathematik ausgerichtetes Verständnis von Mathematisieren als *Ordnen mathematischen* und *nicht-mathematischen Stoffes.*“ (ebd., S.227f)

Einer eher humanistischen Richtung sind ebenfalls die Arbeiten von Treffers und de Lange zuzuordnen. Treffers (1987) nennt die Mathematisierungsaktivitäten auch horizontales und vertikales Mathematisieren, für ihn sind dies fundamentale Grundbegriffe des Mathematikunterrichts. Auch Freudenthal bezieht sich auf Treffers, wenn er die Begriffe näher beschreibt: „Horizontal: das Schematisieren, das ein Problemfeld der mathematischen Behandlung (im engeren Sinne) zugänglich macht. Vertikal: die mathematische Verarbeitung mit all ihrem das Mathematische (im engeren Sinne) kennzeichnenden Weiterschweifen.“ (Freudenthal 1987, S.98). Ebenfalls im Anschluß an Treffers konkretisiert de Lange (1987) die Mathematisierungsaktivitäten wie folgt (vgl. S.43, Übersetzung von mir, K.J.):

Horizontales Mathematisieren:

- Identifizieren der speziellen Mathematik in einem allgemeinen Kontext (der realen Welt);
- Schematisieren;
- ein Problem auf unterschiedliche Weise formulieren und visualisieren;
- Beziehungen und Regelmäßigkeiten entdecken;
- Isomorphien in unterschiedlichen Problemen erkennen;
- ein reales Problem in ein mathematisches Problem transformieren;
- ein reales Problem in ein bekanntes mathematisches Modell transformieren.

Vertikales Mathematisieren:

- eine Beziehung durch eine Formel ausdrücken;
- Regelmäßigkeiten beweisen;
- Modelle verfeinern und anpassen;
- verschiedene Modelle benutzen;
- Modelle kombinieren und integrieren;
- neue mathematische Konzepte formulieren;
- generalisieren.

Die Autoren sind sich allerdings darin einig, daß die Unterscheidung relativ künstlich ist, da sich die Aktivitäten nicht immer eindeutig der einen oder anderen Kategorie zuordnen lassen. Die Schritte im Mathematisierungsprozeß bauen außerdem nicht in dem Sinne aufeinander auf, daß zunächst nur horizontal und anschließend vertikal mathematisiert wird, sondern sie lassen sich eher in einem Stufenprozeß (vgl. Abbildung 4) beschreiben, in dem die verschiedenen Aktivitäten sich abwechseln und die Stufen unterschiedlich hoch oder breit ausfallen können.

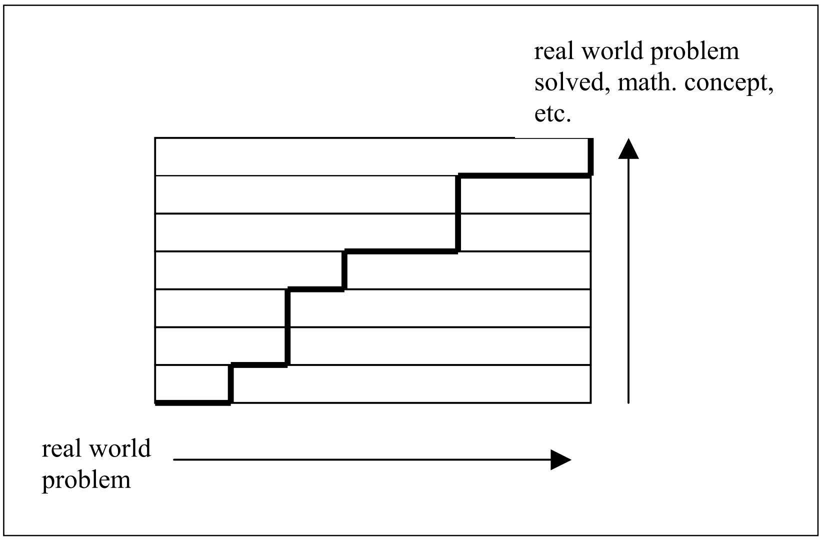

Abbildung 4: Mathematisierung (nach de Lange 1987, S.45)

Freudenthal (1987), ebenfalls ein Vertreter der ‚humanistischen Richtung', betont außerdem, daß der „Unterschied zwischen horizontalem und vertikalem Mathematisieren … subjektiv und situationsabhängig" ist (S.98). Denn was zur Lebenswelt gehört und durch horizontales Mathematisieren in die mathematische Symbolwelt überführt werden soll, ist individuell unterschiedlich und von der jeweiligen Situation abhängig: „Allerdings sind die Welten nicht scharf abgegrenzt. Sie können sich ausweiten … und verengen…. Abwechselnd kann etwas der Lebenswelt und der Symbolwelt angehören" (ebd.).

Der Mathematisierungsprozeß ist weiterhin immer notwendig mit Reflexion über die jeweiligen Tätigkeiten verbunden. Gerade dadurch entsteht der in Stufen verlaufende Prozeß. De Lange (1987) drückt dies so aus:

> „ Horizontal and vertical mathematizing comes about through students actions and their reflections on their actions.…The student must reflect on his personal process of mathematization, discuss his activities with other students, must evaluate the products of his mathematization, and interpret his results." (ebd., S.44)

Treffers und im Anschluß daran auch de Lange benutzen die Begriffe horizontales und vertikales Mathematisieren als Kategorien zur Charakterisierung und Einordnung verschiedener didaktischer Ansätze. Sie unterscheiden zwischen mechanistischem, empirischem, strukturalistischem und realistischem Mathematikunterricht, wobei die Unterschiede am Grad der Mathematisierungsaktivitäten festgemacht werden. So entsteht die folgende Tabelle:

	horizontal	vertikal
empirisch	+	–
realistisch	+	+
strukturalistisch	–	+
mechanistisch	–	–

Abbildung 5: Didaktische Ansätze, nach dem Grad der Mathematisierungsaktivitäten sortiert (nach de Lange 1987, S.101)

Die anschließenden näheren Beschreibungen machen deutlich, daß die hier dargestellten didaktischen Richtungen sich den vier in der Tabelle auftauchenden Ansätzen zum großen Teil zuordnen lassen. ‚Mathematisierung' ist insofern ein Konzept, das in nahezu allen didaktischen Richtungen zu finden ist, allerdings in unterschiedlicher Ausprägung und Richtung. Die ‚traditionelle Mathematik' entspricht demnach eher dem mechanistischen Ansatz, in dem laut Tabelle Mathematisierungen so gut wie gar nicht auftauchen. Die Neue Mathematik, die einen stark strukturmathematischen Einfluß besaß, ist im strukturalistischen Ansatz wiederzufinden. Hier wird vor allem vertikal mathematisiert, d.h. hauptsächlich innermathematisch gearbeitet. Der empirische Ansatz entspricht dann dem modelltheoretischen Schema, in dem das horizontale Mathematisieren eine übergeordnete Rolle spielt, das vertikale Mathematisieren jedoch nur rudimentär zu finden ist. Der realistische Ansatz schließlich entspricht dem von den Autoren vorgestellten, in dem beide Mathematisierungsaktivitäten zum Tragen kommen, der humanistischen Richtung der Anwendungsorientierung, wie Kaiser-Meßmer es charakterisiert hat. Das bedeutet gleichzeitig, daß die Mathematisierung, so wie sie im realistischen Ansatz verstanden wird, den Modellbildungsprozeß implizit enthält. Der Unterschied zur eher pragmatischen Richtung besteht darin, daß die einzelnen Schritte dort immer an die konkrete Situation gebunden bleiben und der Prozeß im allgemeinen beendet ist, wenn das Anfangsproblem gelöst ist, während sie hier über die Ausgangssituation hinaus in die mathematische Symbolwelt hineinreichen.

Zur Illustration von horizontaler und vertikaler Mathematisierung möchte ich kurz ein Unterrichtsbeispiel von de Lange heranziehen (ausführlich bei de Lange (1987), S.46ff):

> Es geht um den Populationszuwachs von Ratten. Ausgangspunkt bildet ein Text eines niederländischen Biologen, in dem behauptet wird (unter bestimmten vereinfachten Voraussetzungen), daß, ausgehend von einem Paar, die Anzahl der Ratten nach einem Jahr 1808 beträgt. Dies soll überprüft werden. Von den Schülern und Lehrern, denen diese Aufgabe gestellt wurde, werden zunächst sehr unterschiedliche Modelle und Visualisierungen entworfen, nachdem man sich auf einige Modellannahmen geeinigt hatte (jeder Wurf besteht aus sechs Kindern, von denen je drei weiblich und drei männlich sind, die weiblichen Neugeborenen sind nach 80 Tagen geschlechtsreif und jedes geschlechtsreife Weibchen gebiert nach 40 Tagen weitere sechs Junge). Es wird also vornehmlich horizontal mathematisiert, wenngleich auch vertikale Mathematisierungsaktivitäten erkennbar sind, indem Regelmäßigkeiten festgestellt und bewiesen werden oder durch eine

Formel ausgedrückt werden. Die Richtigkeit der genannten Zahl wird schließlich bestätigt, und das Wachstum der Ratten (unter den vereinfachten Bedingungen) kann in einer sukzessiv definierten Folge dargestellt werden[39], „a typically vertical component of the mathematization process" (ebd., S.53). Von ganz individuellen Darstellungsformen und Lösungsansätzen ausgehend, einigt man sich damit auf eine bestimmte, allgemein gültige mathematische Lösung. Eine weitere Möglichkeit, den Wachstumsprozeß mathematisch bearbeitbar zu machen, ist die Darstellung in Form einer Matrix. Die Frage, ob es sich um exponentielles Wachstum handelt, erlaubt eine Einordnung in größere (funktionale) Zusammenhänge. Mit dieser mathematischen Bearbeitung ist die Ausgangsfrage zwar gelöst, doch wirft das Problem weitere Fragen auf. Es ist offensichtlich, daß die zugrundeliegenden Annahmen nicht realistisch sind. Die Ratten können sterben, die konstante Anzahl von sechs Jungen und die gleichmäßige Aufteilung der Geschlechter ist sehr stark vereinfachend. So können neue realistischere Modelle entworfen werden, die z.B. eine bestimmte Sterblichkeitsrate mit einbeziehen und zu völlig anderen Ergebnissen führen (z.B. statt 1808 nur noch 121 Ratten). Die starke Abhängigkeit von den Modellannahmen und den dahinterstehenden Interessen tritt dadurch deutlich hervor. Schließlich ist der Weg zu Problemen des Bevölkerungswachstums nicht mehr weit. – Bei Heymann (1996, S.244ff) findet sich ein Beispiel, in dem ein Zeitungsartikel zu diesem Thema kritisch auf Modellannahmen und gesellschaftliche Relevanz befragt wird.

Welche Sicht der Mathematik in unserer Welt kommt in diesem Ansatz zum Vorschein? Heymann thematisiert die Anwendungsorientierung bzw. den Modellbildungsprozeß unter dem Kapitel der „Weltorientierung im Mathematikunterricht" (Heymann 1996, S.183ff). Weltorientierung ist für ihn ein wichtiger Bestandteil der Allgemeinbildung (neben sechs anderen). Seine Argumentation ist die folgende: „Der vom Fach repräsentierte Weltausschnitt darf kein auf die Schule beschränktes Eigenleben fristen, und er darf nicht gänzlich unverbunden neben der erfahrungsgetränkten außerschulischen Alltagswelt der Schüler stehen" (ebd., S.183). Der „Weltausschnitt" Mathematik allerdings läßt sich nicht ohne weiteres in der Alltagswelt wiederfinden, wenn man von sehr trivialen Beispielen absieht („mathematische Alltagskultur" (ebd.)). „Mathematik ist Teil unserer Welt und zugleich in ihr verborgen"(ebd.). Mathematik ist zwar konstitutiv für die Welt (zumindest für die abendländische), aber man sieht sie nur selten, sie verbirgt sich hinter den Phänomenen. Und obwohl die Mathematik Erkenntnismittel[40] und Konstruktionsmittel (vgl. ebd.) unserer Lebenswelt ist, ist es ihr „eigentümliche(r) Vorzug …, daß ihre technischen Anwendungen unabhängig davon funktionieren, ob der Nutzer sie kennt oder sich ihrer zumindest partiell bewußt ist" (ebd.). Wenn aber der Mathematikunterricht die tiefgreifende Wichtigkeit dieses Faches für die Gestaltung der Welt sichtbar machen soll und nicht nur bloßes Schulwissen um seiner selbst willen vermitteln will, müssen die mathematischen Erkenntnisse, Ursachen und Konstruktionen *hinter* den Phänomenen sichtbar werden. Eine Ausklammerung dieses Aspekts hieße, den Schülern bestimmte Möglichkeiten der Weltaneignung zu verschließen. Anwendungsorientierter Unterricht auf der Grundlage einer modelltheoretischen Perspektive ist eine Möglichkeit, die versteckte Mathematik wieder zum Vorschein zu bringen.[41]

---

[39] Hier besteht übrigens ein enger Zusammenhang zu den berühmten Fibonacci-Zahlen.

[40] „Unser Wissen über die natürliche Welt ist in viel höherem Maße Ergebnis des Einsatzes von Mathematik als Erkenntnismittel, als es den üblichen Formulierungen dieses Wissens anzusehen ist" (Heymann 1996., S.184)

[41] ‚Versteckt' oder ‚hinter den Phänomenen' ist die Mathematik insofern, als sie von Menschen als Erkenntnis- oder Konstruktionsmittel benutzt wurde. Sie ist nicht etwa von Natur aus da, so daß sie nur

Treffers versteht unter diesem Sichtbarmachen der Mathematik gerade das horizontale Mathematisieren, in das das Modellbilden mit eingeschlossen ist. Seine Vorstellung von einem realistischen Mathematikunterricht geht jedoch noch darüber hinaus: das vertikale Mathematisieren erlaubt es außerdem, nach weiteren, besseren Modellen zu suchen, mathematische Konzepte, Lösungsschemata zu verfeinern und in einen größeren mathematischen Zusammenhang einzuordnen, letztlich: zu generalisieren. Erst dadurch entsteht die Möglichkeit, das erarbeitete Wissen, das nun in einem größeren Zusammenhang steht, weiter zu verwenden, vor allem auf neue Probleme anzuwenden, und das heißt, flexibel damit umzugehen. Mathematik ist damit mehr als ein Werkzeug, mit Hilfe dessen man bestimmte Probleme lösen kann. Je weiter man mit der Generalisierung fortschreitet, desto größer wird die Anwendungsmöglichkeit. Insofern ist auch das vertikale Mathematisieren gesellschaftlich relevant, indem die mathematischen Strukturen ausgeweitet werden und sich so ähnliche, speziellere oder auch ganz neue Anwendungsbezüge ergeben. Auch dies ist ein Charakteristikum der Mathematik, das im geschichtlichen Rückblick bereits angesprochen wurde.

Allerdings, und darauf weisen viele Autoren zu diesem Thema hin, ist eine Umsetzung dieses Prinzips unterrichtsmethodisch sehr schwierig. Verschiedene Situationen mathematisch angemessen zu beschreiben und zu modellieren, ist nicht immer einfach, und die benötigten mathematischen Mittel sind oft sehr komplex. Auf solche methodischen Probleme brauchen wir hier jedoch nicht näher einzugehen. Wichtig war an dieser Stelle herauszustellen, wie der gesellschaftliche Bezug der Mathematik heute differenzierter als zur Zeit der „Neuen Mathematik" betrachtet wird. Die schon im geschichtlichen Rückblick festgestellte Verbindung zwischen der ‚angewandten' und ‚reinen Mathematik wurde durch die Begriffe ‚horizontales' und ‚vertikales' Mathematisieren hergestellt und konkretisiert. Beides ist Teil der Mathematik und die Trennung in zwei unabhängige Disziplinen, wie sie an Hochschulen zu finden ist, ist aus unterrichtstheoretischer Perspektive unzulässig.

Die Bedingungsanalyse erfordert nun als letzten Punkt die Betrachtung der Mathematik als Wissenschaft. Wie ist das Wesen der Mathematik zu bestimmen, wie sehen Mathematiker ihre Disziplin, womit beschäftigen sie sich, und wo sehen sie den Ort der Mathematik innerhalb der gesellschaftlichen Praxis?

3.1.2.3 Grundlagenforschung – Drei traditionelle Ansichten über das Wesen der Mathematik und eine Alternative

Wenn man von den traditionellen Grundlagen der Mathematik spricht, so sind damit zumeist der Platonismus, der Formalismus und der Konstruktivismus gemeint. Die Tradition der beiden letztgenannten ist aber eigentlich relativ jung: Diese beiden Richtun-

noch entdeckt werden müßte. Dies widerspräche der modelltheoretischen Sichtweise (siehe oben). Der Mensch sieht die Mathematik in die Phänomene hinein, oder er entdeckt die (menschliche) mathematische Konstruktion der Phänomene.

gen entwickelten sich erst aus der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik Anfang des 20. Jahrhunderts heraus. Ursache der Grundlagenkrise war die Entdeckung von Widersprüchen in der Mengenlehre Cantors durch Russel, der selbst voller Hoffnung war, daß die Mengenlehre als Grundlage der gesamten Mathematik etabliert werden könne.[42] Die daraus entstandenen Probleme wollte man umgehen, und man bemühte sich um einen neuen Zugang zur Mathematik, da der Aufbau aus der Mengenlehre heraus als gescheitert angesehen werden mußte.[43] So entwickelte sich die Schule der Konstruktivisten, deren Name vor allem mit Brouwer verbunden wird, und später dann der Formalismus, dessen Hauptvertreter Hilbert war.

Eine lange Tradition hat hingegen der Platonismus, der bereits im antiken Griechenland entstanden ist. Die Elemente des Euklid sind ein eindrucksvolles Beispiel dieser Philosophie, die bis in die Gegenwart eine der wichtigsten und weitverbreitetsten Grundlagen darstellt.

Über diese drei Richtungen ist an anderen Stellen bereits ausführlich und viel geschrieben worden.[44] Ich möchte daher lediglich eine kurze Zusammenfassung von Davis/Hersh zitieren, die die wichtigsten Punkte in kurzer Form darstellt. Anschließend soll eine Alternative ausführlicher vorgestellt werden, die ein völlig anderes Licht auf die Mathematik wirft.

> „Im Platonismus sind mathematische Objekte real. Ihre Existenz ist eine objektive Tatsache; sie existieren, unabhängig, ob wir von ihrer Existenz wissen oder nicht. Unendliche Mengen, überabzählbar unendliche Mengen, unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten, raumfüllende Kurven – alle die Bewohner des mathematischen Panoptikums sind bestimmte Objekte mit bestimmten Eigenschaften, einige bekannt, viele unbekannt. Selbstverständlich sind diese Objekte weder körperlich noch stofflich. Sie existieren außerhalb des Raums und der Zeit der physischen Existenz. Sie sind unveränderlich – wurden weder geschaffen, noch werden sie sich je verändern oder auflösen. Jede sinnvolle Frage über ein mathematisches Objekt hat eine präzise Antwort, unabhängig davon, ob wir sie ermitteln können oder nicht. Dem Platonismus zufolge ist ein Mathematiker ein ebenso empirischer Wissenschaftler wie ein Geologe; er kann nichts erfinden, da alles bereits vorhanden ist. Es bleibt ihm nur, die Dinge zu entdecken. …
>
> Der Formalismus geht dagegen davon aus, daß es *keine* mathematischen Objekte gibt. Die Mathematik besteht nur aus Axiomen, Definitionen und Sätzen – mit anderen Worten, aus Formeln. Es gibt, extrem gesehen, Regeln, mit deren Hilfe man eine Formel von der anderen ableitet, doch die Formeln geben keine Auskunft *über* etwas; sie sind einfach Symbolketten. Natürlich weiß der Formalist, daß mathematische Formeln manchmal auf physikalische Probleme angewendet werden. Wenn man einer Formel eine physikalische Interpretation gibt, erhält sie einen Inhalt und kann wahr oder falsch sein. Doch dieses Wahr oder Falsch hängt mit der besonderen physikalischen Interpretation zusammen. Als rein mathematische Formel hat sie weder eine Bedeutung noch einen Wahrheitswert. …
>
> In der Frage der Existenz und der Realität vertreten Platonisten und Formalisten entgegengesetzte Standpunkte; doch über die Argumentationsprinzipien, die man in der mathematischen Praxis zulassen will, besteht zwischen ihnen keine Uneinigkeit. Einen ganz anderen Standpunkt vertreten die Konstruktivisten. Für sie ist nur das echte Mathematik, was durch eine endliche Konstruktion

[42] vgl. Davis/ Hersh (1986), S.349f

[43] Russel gab allerdings keineswegs auf, er versuchte die Mengenlehre zu retten und neu aufzubauen. Aber auch dieses Projekt muß als gescheitert angesehen werden (vgl. Davis /Hersh, 1986, S.350)

[44] vgl. z.B. Davis/Hersh (1986), Kap. 7, Meschkowski (1976)

> erzeugt werden kann. Die Menge der reellen Zahlen oder jede andere unendliche Menge ist so nicht zu erzeugen.“ (Davis/ Hersh, 1986, S.335f)
>
> Es sei zum Konstruktivismus noch angemerkt, daß die (unendliche) Menge der natürlichen Zahlen ihnen als eine „fundamentale Intuition“ (ebd., S 351) gilt, sie dienen somit als „Ausgangspunkt der Mathematik“ (ebd.).

In der Praxis verhält es sich nach Davis/Hersh meistens so, daß, wenn sich Mathematiker überhaupt Gedanken über die Grundlagen ihrer Wissenschaft machen, sie meistens einer platonischen Sichtweise zustimmen; wenn es allerdings darum geht, ihre Disziplin zu rechtfertigen, sie sehr häufig eine formalistische Perspektive einnehmen.[45] Der Konstruktivismus hat nur noch wenige Anhänger und keinen großen Einfluß mehr.

In den letzten Jahrzehnten scheint sich jedoch zunehmend auch eine andere Sicht auf die Mathematik durchzusetzen, die den empirischen Ausgangspunkt der Mathematik betont.[46]

1974 schreibt Courant über das Wesen der Mathematik:

> „Wie so oft gesagt wird, zielt die Mathematik auf fortschreitende Abstraktion, logisch strenge, axiomatische Deduktion und immer größere Verallgemeinerung … Jedoch ist die Hervorhebung dieses Aspektes der Mathematik vollkommen irreführend, falls dadurch der Eindruck entsteht, daß Konstruktion, imaginative Induktion und Kombination sowie der schwer definierbare geistige Vorgang, den man Intuition nennt, eine untergeordnete Rolle für die produktive mathematische Betätigung oder das echte Verständnis spielen.… In der Tat gehen allgemeine Theorien aus der Betrachtung des Spezifischen hervor, und sie sind sinnlos, falls sie nicht dazu dienen, den darunter liegenden spezifischen Inhalt aufzuklären und zu ordnen.
>
> Die Wechselwirkung zwischen Allgemeinheit und Individualität, Deduktion und Konstruktion, Logik und Imagination – das ist das fundamentale Wesen der lebendigen Mathematik. … Allgemein gesprochen wird eine solche Entwicklung von der ‚konkreten‘ Basis aus starten, dann durch Abstrahieren Ballast abwerfen und zu den hohen, dünnen Luftschichten aufsteigen, wo Navigation und Beobachtung leicht sind; nach diesem Flug erfolgt die entscheidende Bewährungsprobe, die im Landen und im Erreichen spezifischer Ziele auf den in neuer Weise überblickten unteren Ebenen der individuellen ‚Realität‘ besteht. Kurz gesagt, der Flug in die abstrakte Allgemeinheit muß vom Konkreten und Spezifischen aus starten und auch wieder dahin zurückführen.“ (Courant 1974, S. 184f)

‚Individuelle Realität‘ bedeutet für Courant nicht unbedingt die objektive Realität, also ein Stück Welt außerhalb der Mathematik. Er meint vielmehr das, was für das konkrete, forschende Individuum real und vertraut ist; dies können eine mathematische Theorie, ein mathematisches Theorem oder auch eine reale Situation sein. Somit besteht das Wesen der Mathematik für ihn auch in der innermathematischen Abstraktion und anschließender innermathematischer Konkretion, denn eine Abstraktion erweist sich nur dann als zweckmäßig, wenn sie auch wieder ‚konkret‘ werden kann, d.h. wenn sie der Ordnung oder der Übersichtlichkeit des ‚Konkreten‘ dient. Das ‚Konkrete‘ muß dabei bei der Abstraktion noch nicht unbedingt mitgedacht werden; es ist geradezu charakteristisch für die Mathematik, daß sich Konkretionen im nachhinein ergeben, die bei der Abstraktion überhaupt keine Rolle gespielt haben. Courant führt dazu einige Beispiele

[45] vgl. Davis/ Hersh (1986), S.337f

[46] Weitere als die im folgenden aufgeführten Beispiele finden sich in anderen Aufsätzen bei Otte (1974). So z. B. bei Alexandrow, Dress oder Brieskorn. Außerdem bei Lakatos (1982), S.23ff.

an, z.B. die Verallgemeinerung von Ellipsengleichungen des dreidimensionalen Raumes auf den n-dimensionalen Raum oder sogar auf Räume mit unendlicher Dimension. Diese Abstraktion ist nicht nur formal möglich, sondern erweist sich darüber hinaus als zweckmäßig und konkret in der Theorie mechanischer und elektrischer Systeme (vgl. ebd., S.187ff).

Auch von Neumann vertritt eine ähnliche Ansicht. Wenn man in fortgeschrittener Mathematik auch nur noch selten einen Bezug zur Erfahrungswelt finde, die Anfänge jeder mathematischen Theorie seien empirisch:

> „Ich glaube, es ist eine verhältnismäßig gute Annäherung an die Wahrheit – eine so komplizierte Wahrheit, daß etwas anderes als eine Annäherung undenkbar ist – wenn man sagt, daß die mathematischen Ideen in der Empirie entstehen, obwohl die Genealogie manchmal lang und dunkel ist. Wenn sie sich jedoch einmal von dort her herausgebildet haben, beginnen sie ein eigenartiges, selbständiges Leben, und man könnte den mathematischen Gegenstand am ehesten mit einem schöpferischen Gegenstand vergleichen, der fast ausschließlich ästhetischen Motivationen unterliegt, auf keinen Fall aber mit einer empirischen Wissenschaft. … Da eine mathematische Disziplin sich weit von ihrer empirischen Quelle entfernt, … ist sie sehr ernsthaften Gefahren ausgesetzt. … Mit anderen Worten, wenn sich ein mathematischer Gegenstand sehr weit von seiner empirischen Quelle entfernt hat oder wenn mit ihm viel ‚abstrakte' Inzucht getrieben worden ist, besteht die Gefahr der Degeneration. … Jedenfalls scheint mir, wenn einmal diese Stufe erreicht worden ist, die verjüngende Rückkehr zur Quelle das einzige Heilmittel zu sein: das Neueinführen mehr oder weniger explizit empirischer Ideen." (v. Neumann, 1974, S.45f)

In diesen zwei exemplarisch herangezogenen Zitaten deutet sich bereits an, was Davis/ Hersh nun systematisch untersuchen: Die traditionellen philosophischen Sichtweisen, vor allem Platonismus und Formalismus, widersprechen der Wirklichkeit der Mathematik – und damit meinen sie die alltägliche Arbeit des Mathematikers. Mathematische Objekte haben eine inhaltliche Bedeutung, sie haben eine ‚konkrete Basis' (Courant); dann aber haben sie ein ‚eigenartiges, selbständiges Leben' (v. Neumann); schließlich folgt die ‚Bewährungsprobe' (Courant), indem sie ihre Inhaltlichkeit zurückgewinnen. Dem Platonismus widerspricht die empirische Grundlage der mathematischen Objekte, dem Formalismus die Existenz und Inhaltlichkeit dieser Objekte. Davis/Hersh konstatieren, daß es zwei Tatsachen sind, die zusammengenommen den einzelnen Philosophien entgegenstehen:

> „Erste Tatsache: Die Mathematik ist eine menschliche Erfindung. Dies ist den Mathematikern bewußt, denn sie besorgen das Geschäft des Erfindens. …
>
> Zweite Tatsache: Diese Produkte, die wir hervorbringen, … sind für uns, ihre Erzeuger, rätselhaft. Sie haben Eigenschaften, die wir nur mit Mühe und viel Scharfsinn entdecken können; sie haben andere Eigenschaften, die wir vergeblich zu entdecken versuchen; und sie haben Eigenschaften, die wir nicht einmal vermuten. Alles, was mit dem Lösen mathematischer Probleme zusammenhängt, kann als Beweis für diese zweite Tatsache dienen." (Davis/Hersh, 1986, S.431f)

Das heißt einerseits ‚erfinden' wir mathematische Objekte, die keine physische Realität besitzen, andererseits besitzen diese Objekte zugleich mit ihrer Erfindung Eigenschaften, die entdeckt werden können. Diese beiden Tatsachen, die von Davis/Hersh vielfältig durch Beispiele belegt werden, sind für Anhänger ausschließlich einer der Positionen nicht miteinander vereinbar: Die Platonisten würden der ersten Tatsache widersprechen, denn die mathematischen Objekte werden ihrer Ansicht nach ja nicht erfunden, sondern sie existieren bereits in einer ‚Ideenwelt‘ und müssen nur entdeckt werden, ebenso wie ihre Eigenschaften. Deshalb würden sie der zweiten Tatsache wohl zustimmen. Der Formalist hingegen würde die erste Tatsache bejahen, der zweiten Tatsache jedoch entgegenhalten, daß ein rein imaginäres Objekt keine Eigenschaften besitzen könne, denn das würde ja seine Existenz voraussetzen. Der Konstruktivist schließlich würde wohl beide Tatsachen ablehnen. Allein die natürlichen Zahlen existieren, jede weitere Existenz eines mathematischen Objektes und dessen Eigenschaften muß erst konstruktiv gezeigt werden – unter Rückgriff auf die natürlichen Zahlen und in endlich vielen Schritten.

Wenn nun beide Tatsachen akzeptiert werden – und das soll im folgenden getan werden – reicht keine der traditionellen mathematischen Positionen aus. Davis/Hersh fragen nun weiter, welche Annahmen diesen Positionen zugrunde liegen, die eine Synthese beider Tatsachen verhindern. Sie kommen zu dem Schluß, daß sie zusammengenommen der Annahme widersprechen, daß die Welt „sich aus zwei Stoffen zusammensetzt – der Materie, d.h. physikalischer Substanz, die in einem Physiklabor studiert wird, und dem Geist, d.h. meinem oder deinem Geist, der privaten Psyche, die jeder von uns irgendwo in seinem Gehirn sitzen hat“ (ebd., S.434). Die Mathematik wäre nach der ersten Tatsache dem ‚Geist‘, nach der zweiten Tatsache der ‚Materie‘ [47] zuzuordnen und daraus folgt der Widerspruch, denn ‚Geist‘ *und* ‚Materie‘ gleichzeitig kann etwas nicht sein.

Damit beide Tatsachen akzeptiert werden können, suchen die Autoren nach einem Standpunkt außerhalb dieser einschränkenden Sichtweise, und sie beziehen sich dazu auf Karl Popper. Er unterscheidet ebenfalls zwischen ‚Geist‘ und ‚Materie‘, erweitert diese Einteilung jedoch um eine dritte Komponente. Er wählt die Begriffe ‚Welt 1, 2 und 3‘:

> „Welt 1 ist die physikalische Welt, die Welt von Masse und Energie, von Sternen und Felsbrocken, von Blut und Knochen.
>
> Die Welt des Bewußtseins entwickelt sich aus dieser materiellen Welt im Verlauf der biologischen Evolution. Gedanken und Gefühle, das Bewußtsein, dies sind keine physikalischen Realitäten. Ihre Existenz ist zwar untrennbar an jene des lebenden Organismus gebunden, doch sie sind qualitativ verschieden von physiologischen und anatomischen Phänomenen; sie stehen auf einer anderen Stufe. Sie gehören zu Welt 2.
>
> Im weiteren Verlauf der Evolution treten soziales Bewußtsein, Traditionen, Sprache, Theorien, soziale Institutionen auf: die ganze nichtmaterielle Kultur der Menschheit. Die Existenz dieser Kultur ist untrennbar mit dem individuellen Bewußtsein der Mitglieder dieser Gesellschaft verbunden, sie sind aber qualitativ verschieden von Phänomenen des individuellen Bewußtseins. Sie müssen daher auf einer anderen Stufe verstanden werden. Sie sind Teil der Welt 3, und das ist natürlich auch die Welt, zu der die Mathematik gehört.“ (ebd., S.434f)

Die Mathematik ist für Popper geradezu ein klassisches Beispiel dafür, daß nichtmaterialisierte Gegenstände, also solche Gegenstände, die kein materialisiertes Pendant (z.B.

---

[47] ‚Materie‘ darf hier allerdings nicht wirklich physikalisch verstanden werden. Aber nach der zweiten Tatsache besitzen die Objekte Eigenschaften, die wie Materie in einem Labor untersucht werden können, sie sind unabänderlich vorhanden.

in Form einer niedergeschriebenen Theorie) in der Welt 1 besitzen, in der Welt 3 tatsächlich existieren. Er gibt selbst ein Beispiel:

> „Mit der Erfindung (oder Entdeckung?) der natürlichen Zahlen (Kardinalzahlen) traten auch ungerade und gerade Zahlen ins Dasein, noch bevor diese Tatsache jemand bemerkte oder beachtete. Das gleiche gilt für Primzahlen. … Diese Entdeckungen schufen neue objektive Problemsituationen, die neue Fragen wie die folgenden aufwarfen: Wie rasch steigt die Seltenheit der Primzahlen? … Es ist wichtig zu sehen, daß das objektive und unmaterielle Dasein dieser Probleme ihrer bewußten Entdeckung in gleicher Weise vorausgeht, wie die Existenz des Mount Everest seiner Entdeckung vorausliegt. (Popper/Eccles, 1982, S.67)

Eine Materialisierung geschieht durch die Vermittlung von Welt 2: Indem ein Problem erfaßt wird, in ein individuelles Bewußtsein tritt, kann es auf Welt 1 einwirken und materielle Gestalt annehmen.[48]

Doch zurück zu den beiden Tatsachen der Mathematik: Offensichtlich lassen sich in der Welt 3 die scheinbar widersprüchlichen Tatsachen miteinander vereinbaren. Einerseits sind ihre Gegenstände geistige Produkte von Menschen, und dennoch besitzen sie objektiv reale Eigenschaften, die bereits vor einer möglichen Entdeckung existieren:

> „Man kann sagen, daß Welt 3 nur zu Anfang Menschenwerk ist, und daß Theorien, wenn sie einmal da sind, ein Eigenleben zu führen beginnen: Sie schaffen unvorhergesehene Konsequenzen, sie schaffen neue Probleme.“ (Popper/Eccles, 1982, S.65)

Davis/Hersh ziehen aus diesen Überlegungen den Schluß, daß die Mathematik einerseits eine Geisteswissenschaft ist, denn sie beschäftigt sich mit „menschlichen Inhalten und ist nur im Kontext der Kultur verständlich“, und ihr Sinn liegt „im gegenseitigen Einverständnis menschlicher Wesen und nicht in einer äußeren nichtmenschlichen Realität“ (Davis/Hersh 1986, S.435). Ein Formalismus, der jede inhaltliche Interpretation beiseite schiebt oder sogar leugnet, wird dieser Auffassung ebenso wenig gerecht, wie der Platonismus, der den Sinn eben in einer ‚nichtmenschlichen Realität‘ sieht. Andererseits hat die Mathematik einen „naturwissenschaftlichen Charakter“, denn ihre „Folgerungen sind zwingend wie jene der Naturwissenschaften“ (ebd.).

Es stellt sich nun die Frage, wie diese Erfindungen, deren Eigenschaften zu entdecken sind, entstehen, und das heißt, was bestimmt den Fortschritt der Mathematik? Imre Lakatos, ein Schüler Poppers, zeichnet in ‚Beweise und Widerlegungen‘ (1979) ein Bild der Mathematik, das er als ‚quasi-empirisch‘[49] bezeichnet. Er wendet sich eindeutig gegen den Formalismus und betont die inhaltliche Seite der Mathematik. Was er als Methode der ‚Beweise und Widerlegungen‘ bezeichnet, entspricht gleichzeitig seiner Auffassung von der ‚wirklichen‘ Mathematik, also der Mathematik, wie sie Mathematiker alltäglich betreiben:

> „(1) Ursprüngliche Vermutung

---

[48] vgl. Popper/Eccles (1982), Kapitel P2

[49] Er wählt den Begriff ‚quasi-empirisch‘ und nicht ‚empirisch‘, weil die Basisaussagen, d.h. die Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind, nicht „raumzeitlich singuläre“ Aussagen sein müssen; eine quasi-empirische Theorie „ist nur dann empirisch, wenn ihre Basistheoreme raumzeitlich singuläre Basisaussagen sind, über deren Wahrheitswerte anhand der altehrwürdigen, aber ungeschriebenen Regeln der empirischen Wissenschaft entschieden wird.“ (vgl. Lakatos 1982, S.27f und Davis/Hersh 1986, S.368)

(2) Beweis (ein grobes Gedankenexperiment oder Argument, das die ursprüngliche Vermutung in Untervermutungen oder Hilfssätze zerlegt)

(3) ‚Globale' Gegenbeispiele (Gegenbeispiele zur ursprünglichen Vermutung) tauchen auf

(4) Neuuntersuchung des Beweises: der ‚schuldige Hilfssatz', zu dem das globale Gegenbeispiel ein ‚lokales' Gegenbeispiel[50] ist, wird ausfindig gemacht. Dieser schuldige Hilfssatz kann vorher ‚versteckt' geblieben oder falsch eingeordnet worden sein. Jetzt wird er deutlich bestimmt und als Bedingung in die ursprüngliche Vermutung eingebaut. Der Satz – die verbesserte Vermutung – verdrängt die ursprüngliche Vermutung mit dem neuen beweiserzeugten Begriff als entscheidendem neuen Merkmal." (Lakatos 1979, S.119)

Zu Anfang steht also eine Vermutung, die aus irgendeinem mathematischen oder auch außermathematischen Problem entstehen kann. Die Vermutung erhärtet sich und wird bewiesen, allerdings nicht unbedingt deduktiv, das ist in diesem Stadium auch gar nicht möglich, da man im allgemeinen nicht über ein Axiomensystem verfügt, aus denen die Vermutung abgeleitet werden kann. Der Beweis besteht eher aus einem ‚Gedankenexperiment'. Doch auch wenn der Beweis schlüssig erscheint, kann man noch lange nicht sicher sein. Bei einem kritischen Blick könnten Gegenbeispiele auftauchen. Bei einem globalen Gegenbeispiel wird das Prinzip der ‚Rückübertragung der Falschheit' wirksam[51]:

„Die Falschheit wird von der naiven Vermutung zurückübertragen auf die Hilfssätze, von der Folgerung des Satzes auf seine Voraussetzungen." (ebd., S.41)

Die Vermutung muß geändert werden, es entsteht ein neuer ‚beweiserzeugter' Begriff, auf den sich die neue Vermutung stützt. Dies ist meines Erachtens neben der anfänglichen Vermutung eine wichtige Stelle der ‚Erfindung' neuer mathematischer Objekte. Sie entstehen aus Vermutungen heraus, sie erhalten im Zuge der Beweise und Widerlegungen immer wieder neue Gestalt, sie verändern sich aufgrund einer beweiserzeugten Notwendigkeit. Dieser Prozeß kann sich beliebig oft wiederholen, im allgemeinen kommt er (vorerst) zum Erliegen, wenn keine Gegenbeispiele mehr gefunden werden und der Satz als (relativ) sicher angesehen wird. Ob der Satz aber nun tatsächlich ‚wahr' ist oder nicht, diese Frage kann nie mit Sicherheit beantwortet werden. Ein Gegenbeispiel kann auch nach vielen Jahren, in denen sich ein Satz bewährt hat, noch gefunden werden und zu einer Revision zwingen.[52]

---

[50] Ein lokales Gegenbeispiel ist eines, daß einen Hilfssatz, also eine Voraussetzung der Vermutung widerlegt, ein globales hingegen widerlegt die Vermutung an sich. Lokale Gegenbeispiele müssen demnach nicht dazu führen, die Vermutung aufzugeben. Ein globales Gegenbeispiel aber, das auch gleichzeitig ein lokales ist, ist für die Vermutung überhaupt nicht ‚gefährlich'. Das ist die Logik, die hinter Punkt (4) steckt: Man sucht nach einem Hilfssatz, der aus dem globalen Gegenbeispiel gleichzeitig ein lokales macht.

[51] Dieses Prinzip ist für Lakatos der Hauptunterschied zwischen einer euklidischen und einer quasi-empirischen Theorie: Bei einer euklidischen wird die Wahrheit von den Axiomen zu den Sätzen übertragen, bei einer quasi-empirischen überträgt sich die Falschheit von den Sätzen (Vermutungen) zurück auf die Voraussetzungen. (vgl. Lakatos 1982, S.27ff)

[52] So ging man viele Jahrhunderte davon aus, daß die euklidische Theorie die absolute Wahrheit beinhaltete. Die Entdeckung (bzw. Erfindung?) der nichteuklidischen Geometrie belehrte uns allerdings eines besseren.

Wie verhält es sich nun aber mit den vielen scheinbar ‚euklidischen', also nach der euklidischen Methode aufgebauten Theorien? Zweifellos sind ja alle anerkannten mathematischen Theorien weitestgehend formal-deduktiv aufgebaut. Dem Mathematikstudenten werden diese Theorien im allgemeinen streng nach der deduktiven Methode präsentiert (Axiom oder Definition, Satz, Beweis) und nicht nach der Methode Vermutung–Beweis–Widerlegung. Dies steht aber auch nicht im Widerspruch zu Lakatos' Auffassung. Er zeigt selbst an einem Beispiel, daß es möglich ist, eine gesicherte Vermutung in ein formales System zu übersetzen und einen deduktiven formalen Beweis zu führen.[53] Dieser neue Beweis läßt in seinem Dialog[54] die Frage aufkommen, ob man nun endlich davon ausgehen könne, daß der Satz und der Beweis endgültig, also wahr seien. Diese Frage wird am Schluß jedoch verneint*: „Du wirst niemals wissen*, denn es gibt immer eine Möglichkeit zu zweifeln."(ebd., S.116) – Damit endet der Dialog.[55]

Dieser letzte Zweifel, der nie auszuschalten ist, liegt in der Bedeutung der Axiome und Definitionen begründet, ohne die ein deduktiver Beweis nicht möglich wäre. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder ich interpretiere die Definitionen als eine Übersetzung der ursprünglichen inhaltlichen Bedeutung oder aber als eine Neuschaffung, die mit der ursprünglichen Bedeutung nichts mehr zu tun hat. Im zweiten Fall sagen der Satz und der Beweis jedoch nichts mehr über das ursprüngliche Problem aus. Es kann also nicht entschieden werden, ob die ursprüngliche Vermutung nun wahr oder falsch ist, auch wenn der Beweis formal-deduktiv zu diesem Satz (der dann aber ebenfalls als eine Neuschaffung interpretiert werden muß) führt. Die Übersetzung hat jegliche inhaltliche Bedeutung abgeschüttelt. Im ersten Fall sieht die Sache auch nicht besser aus: Wenn die inhaltliche Bedeutung erhalten bleibt, die Übersetzung also wirklich wie eine Übersetzung in eine andere Sprache verstanden wird, so kann man sich wie auf der Vorstufe immer noch nicht vor Gegenbeispielen sicher sein. Zu dem Satz im formalen Gewand könnte ebenso wie zu der ursprünglichen Vermutung ein Gegenbeispiel auftauchen, das es notwendig machte, die Voraussetzungen (Axiome und Definitionen) erneut zu prüfen. Die Frage nach der Wahrheit kann also selbst durch eine Übersetzung in eine formale Theorie nicht beantwortet werden. Eine euklidische Theorie kann demnach höchstens der Abschluß einer langen, von Widersprüchen und Kritik begleiteten Tätigkeit sein, die immer inhaltlich bestimmt ist. Das heißt gleichzeitig, daß die in einer euklidischen Theorie am Anfang stehenden Axiome, Definitionen und Hilfssätze grundsätzlich beweiserzeugt sind und nur in den seltensten Fällen einer unmittelbaren Einsicht entstammen, wie es der ‚Euklid-Mythos'[56] gerne propagiert.

[53]vgl. Lakatos 1979, S.98ff

[54] ‚Beweise und Widerlegungen' ist fast ausschließlich in Form eines Dialogs zwischen einem Lehrer und seinen Schülern geschrieben und mit ausführlichen Fußnoten versehen, die vor allem die historischen Entwicklungen eindrucksvoll darstellen.

[55] Die Herausgeber seiner Arbeit (Lakatos starb, bevor es veröffentlicht werden konnte) haben diesen Dialog verlängert. Es ist jedoch ungewiß, ob sie mit ihrem Zusatz auch die Meinung Lakatos' getroffen hätten.

[56] vgl. Davis/Hersh 1986, 339ff

Lakatos' Konsequenz daraus für den Zugang zur Mathematik (er bezieht sich hier auf die Hochschule) ist die Ablehnung des deduktivistischen Stils, der der euklidischen Methodenlehre folgt, und die Befürwortung eines heuristischen Zugangs:

> „Beim deduktivistischen Stil sind alle Aussagen wahr und sämtliche Schlüsse gültig. Die Mathematik wird als dauernd wachsende Menge ewiger, unveränderlicher Wahrheiten dargestellt. Gegenbeispiele, Widerlegungen oder Kritik können da unmöglich hereinbrechen. Ein autoritärer Anstrich wird dem Untersuchungsgegenstand dadurch gesichert, daß man mit getarnten monstersperrenden und beweiserzeugten Definitionen und mit dem voll entfalteten Satz beginnt und die ursprüngliche Vermutung, die Widerlegungen und die Kritik des Beweises unterdrückt. Der deduktivistische Stil verbirgt den Kampf, verbirgt das Abenteuer."(ebd., S.143)

Ein heuristischer Stil wird versuchen, den Weg nachzuzeichnen, die Probleme, aus denen die Vermutung entstanden ist, die Widersprüche, aus denen sich die beweiserzeugten Definitionen ergeben, offenzulegen. Unter anderem begründet er den heuristischen Zugang damit, daß er Kritik als notwendiges Mittel für den Fortschritt in der Mathematik herausstellt und nicht auf Autoritätsgläubigkeit angewiesen ist.[57]

Ich fasse die wichtigsten Punkte dieses Abschnitts zusammen, die auch für die folgenden Überlegungen von Bedeutung sind:

1. Mathematik kann nicht losgelöst von der Realität (nach Popper Welt 1) gesehen werden. Sie nimmt von dort ihren Anfang und kann auf sie zurückwirken.
2. Mathematische Aussagen, Sätze, Definitionen usf. sind weder inhaltsleer noch liegt ihr Sinn in einer außermenschlichen Realität. Sie sind Teil der Welt 3, sie sind „Erzeugnisse des menschlichen Geistes" (Popper 1982, S.64) und haben deshalb immer irgendeine Bedeutung.
3. Mathematik hat keinen Anspruch auf Unfehlbarkeit. Sie ist ‚quasi-empirisch'. Kritik und (Beweis-) Analyse sind das wichtigste Mittel für den Fortschritt der Wissenschaft Mathematik. Eine Mathematik, die absolute Wahrheit für sich in Anspruch nimmt, verhindert Kritik und fördert Autoritätsgläubigkeit.

Im folgenden sollen die durch die Bedingungsanalyse gewonnenen Erkenntnisse dazu genutzt werden, die wesentlichen Momente der Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis herauszuarbeiten.

3.1.3 Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis

Blicken wir zunächst auf die Bedingungsanalyse zurück: Der geschichtliche Rückblick hat gezeigt, daß gesellschaftliche Praxis und Mathematik immer miteinander verknüpft waren und sind. Die Wissenschaft Mathematik, so wie sie sich uns heute darstellt, ist durch einen hohen Grad der Differenzierung in viele Einzeldisziplinen geprägt. Diese wiederum werden grob unterteilt in „angewandte" und „reine Mathematik". Daß diese

---

[57] In einer Fußnote bemerkt er dazu: „Es ist bis jetzt noch nicht ausreichend erkannt worden, daß die gegenwärtige mathematische und naturwissenschaftliche Ausbildung eine Brutstätte des Autoritätsdenkens und der ärgste Feind des unabhängigen und kritischen Denkens ist." (Lakatos 1979, S.135, F256)

Unterscheidung relativ künstlich ist, wurde durch die Entwicklungsgeschichte und mit einigen Beispielen aus der Gegenwart belegt. Die Unterscheidung ist daher als notwendige Folge der hohen Spezialisierung anzusehen.[58]

Der Überblick über verschiedene didaktische Ansätze konnte deutlich machen, daß der Zusammenhang zwischen gesellschaftlicher Praxis und Mathematik zwar immer gesehen wurde, bislang jedoch nur rudimentär in Lehrplänen ihren Ausdruck gefunden hat. Die neuere Richtung der Anwendungsorientierung hat ihn auf der Grundlage des Modellbegriffs bzw. der Mathematisierung am differenziertesten herausgearbeitet. Insbesondere das Konzept des ‚realistischen Mathematikunterrichts' von Treffers und de Lange vermittelt ein ausgewogenes Bild der Mathematik, das sowohl die außermathematische als auch innermathematische Arbeit berücksichtigt. Dies entspricht den im historischen Rückblick gewonnenen Erkenntnissen.

Schließlich wurde in der Diskussion der Grundlagen der Mathematik herausgestellt, daß es auch hier Ansätze zu einer ‚realistischen' Sichtweise auf die Mathematik gibt. Die ‚Alternative', wie sie genannt wurde, beschreibt die Mathematik nicht als ein fertiges, unantastbares, von Wahrheit erfülltes Produkt, sondern berücksichtigt die alltägliche Wirklichkeit der Mathematiker, berücksichtigt den Entstehungsprozeß, der von Kritik und Widersprüchen begleitet ist. Vor allem machte sie darauf aufmerksam, daß die Frage nach der Wahrheit in der Mathematik ebenso prinzipiell unbeantwortet bleiben muß wie in anderen Wissenschaften auch.

Diese Position erweist sich nun im Zusammenhang mit der Didaktik des ‚realistischen Mathematikunterrichts' als äußerst fruchtbar: Horizontales und vertikales Mathematisieren beschreiben gerade den Prozeß, die Entwicklung von einer Vermutung, die aus einem Problem, sei es inner- oder außermathematisch, entsteht, zu einer ‚gesicherten' mathematischen Tatsache. Doch kommt nun ein wichtiger Aspekt ausdrücklich hinzu, der bei Treffers und de Lange implizit anklingt (in der Forderung nach ständiger Reflexion ist er vermutlich enthalten), aber nicht deutlich genug ausgesprochen wurde: daß ständige Kritik für den Fortschritt unabdingbar ist.

Durch die Bedingungsanalyse ist damit das Feld abgesteckt, in dem die Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis zu finden ist. Es sollen im folgenden drei Begriffe eingeführt werden, die dieses Feld möglichst prägnant abdecken. Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, daß die Begriffe nur Stichwörter sein können, und die vorangegangen Überlegungen notwendig für ihr angemessenes Verständnis sind. Die drei Begriffe sollen sein: *Modell, System, Überprüfung*.

Der Begriff ‚*Modell*' macht darauf aufmerksam, daß die Mathematik in ihren Ursprüngen von der außermathematischen Realität beeinflußt ist und auf diese Realität auch zurückwirken kann. Mathematische Modelle finden Anwendung bei der Lösung von

[58] „The vast expansion of mathematics and science made it more and more difficult to be at home in both fields." (de Lange 1987, S.116)

außermathematischen Problemen (das können so konkrete und einfach strukturierte Probleme wie Flächenberechnungen, aber auch komplexe Problemfelder aus anderen Wissenschaften, z.B. Physik oder Sozialwissenschaften sein); aber auch innermathematisch finden Modellbildungsprozesse statt (ein formales System kann ein Modell für ein noch nicht formalisiertes Problem sein). Der Begriff des ‚Modells' weist auf den Zusammenhang der Mathematik mit der gesellschaftlichen Arbeit hin, die als konstituierendes Merkmal der gesellschaftlichen Praxis festgehalten wurde. Gleichzeitig wird in diesem Begriff das technische Erkenntnisinteresse am deutlichsten. Durch Modelle werden Informationen erzeugt, „die unsere technische Verfügungsgewalt erweitern" (Habermas 1970, S.162).

Mit dem Begriff ‚*System*' soll die Mathematik als ein System von Sätzen und Beweisen charakterisiert werden, als eine ‚Geisteswissenschaft mit naturwissenschaftlichem Charakter'. Dahinter verbirgt sich die Auffassung, daß die Objekte, über die man spricht und mit denen man sich in der Mathematik auseinandersetzt, einerseits menschliche Schöpfungen sind, die dann aber eine vom Erfinder und historisch unabhängige, objektive Realität besitzen, die sich darin zeigt, daß Eigenschaften dieser Objekte entdeckt und bewiesen werden können. Die Objekte und deren Eigenschaften werden in Sätzen und Beweisen sprachlich festgehalten und systematisiert, meist in einer Symbolsprache, wenn die jeweilige Theorie weiter fortgeschritten und formalisiert ist. Wichtig ist es noch einmal zu betonen, daß die mathematischen Sätze eine inhaltliche Bedeutung haben und sich ändern können; genau wie die Objekte selbst können sie eine andere Gestalt annehmen, falls der Beweis Widersprüche oder Gegenbeispiele erzeugt. Insgesamt verweist dieser Begriff auf den Aspekt der ‚Sprache', ein weiteres ‚Medium der Vergesellschaftung' und auf das praktische Erkenntnisinteresse, das der „Erhaltung und … Erweiterung der Intersubjektivität möglicher handlungsorientierender Verständigung" (ebd., S.158) dient.

Schließlich soll der Begriff ‚*Überprüfung*' darauf hinweisen, daß Mathematik nicht unfehlbar ist, daß die Suche nach absoluter Wahrheit auch in bzw. mit Hilfe der Mathematik prinzipiell unabgeschlossen ist und daß Kritik möglich und notwendig ist. Lakatos macht darauf aufmerksam, daß Überprüfung bei der Entwicklung formaler Theorien nicht wegzudenken ist, des Teils der Mathematik also, den wir hier mit dem Begriff ‚System' erfassen wollen. Vermutung und Widerlegung sind demnach der Anfang einer deduktiven Theorie. Axiome und Definitionen sind keine unmittelbar einsichtigen Voraussetzungen, sondern sie sind beweiserzeugt in dem Sinne, daß sie durch Widersprüche im Beweis einer Vermutung hervorgehen. Mathematik, die diesen Aspekt nicht offenlegt oder ihn bewußt verschleiert, indem sie so tut, als sei der deduktive Aufbau einer Theorie dem Wissenschaftler in den Schoß gefallen, durch Einsicht in die scheinbar evidenten Voraussetzungen dieser Theorie, wirkt autoritär und verhindert jegliche Art von Kritik. Doch auch beim Prozeß der Modellbildung ist Überprüfung entscheidendes Mittel für die Fortsetzung und Beendigung des Prozesses, und zwar bei allen Prozeßschritten (Prüfung der Modellvoraussetzungen, Suche nach geeigneten mathematischen Mitteln, Übertragung auf die Ausgangssituation und Überprüfung der Angemessenheit der so gefundenen Lösung).Vor allem die kritische Reflexion des ersten und letzten Schrittes im Modellbildungsprozeß kann auf Grenzen (und Möglichkeiten) der mathematischen Bearbeitung aufmerksam machen: einem Modell liegen immer bestimmte Interessen zugrunde, und nicht alles, was mit mathematischen Mitteln gelöst wurde, ist dem ursprünglichen Problem auch angemessen. Der Aspekt der ‚Überprüfung' liegt damit quasi quer zu den anderen beiden Aspekten, und verweist am ehesten auf die Nähe zum gesellschaftlichen Begriff der ‚Herrschaft' und zum emanzipatorischen Erkenntnisinteresse, das das „Subjekt aus der Abhängigkeit von hypostasierten Gewalten" löst (Habermas 1970, S.159).

Das Strukturgitter aus Abbildung 2 (s.S.31) soll nun durch die hier erläuterten Begriffe ergänzt werden. Ich füge sie dort ein, wo in Abbildung 2 die Medien der Vergesellschaftung *Arbeit, Sprache Herrschaft* standen. Dies ist die logische Konsequenz aus der Überlegung, daß die Mathematik ein Teil – eine Teilmenge, könnte man sagen – der gesellschaftlichen Praxis ist, und eben durch die Begriffe *Modell, System, Überprüfung* beschrieben werden kann. Gekreuzt mit den erkenntnisleitenden Interesse, ergibt sich ein Feld, das *die über die Wissenschaft vermittelte Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis* erfaßt. Die Trennung dieser Begriffe kann selbstverständlich nur eine analytische Trennung sein. Es verhält sich hier genau so wie mit den Begriffen ‚Arbeit, Sprache und Herrschaft' selbst. Die Bezüge zwischen den Medien der Vergesellschaftung und den Begriffen ‚Modell, System und Überprüfung' sind natürlich vielfältiger und dürfen keineswegs so eindeutig gedacht werden, wie ich es in den obigen Erläuterungen angedeutet habe und wie es durch das Strukturgitter nahegelegt wird. Die Herausstellung der Nähe zu den Begriffen der einzelnen Dimensionen sollte deutlich machen, daß sich die neu gefundenen Begriffe in den vorgegebenen Rahmen einfügen lassen. Eine eindeutige Zuordnung von z. B. Modell - Arbeit - technisches Erkenntnisinteresse ist weder sinnvoll noch möglich. Dies ist der Grund dafür, daß das durch die Spalten- und Zeilenbeschriftungen definierte Feld offengehalten und nicht in einzelne Zellen geteilt wurde. Es soll als weite Abgrenzung der Mathematik von anderen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis verstanden werden, ohne daß Überschneidungen ausgeschlossen werden können. Das so definierte Feld ist auf vielfältige Weise mit den Medien der Vergesellschaftung und den erkenntnisleitenden Interessen verflochten.

erkenntnisleitende Interessen / Mathematik	technisches Erkenntnisinteresse	praktisches Erkenntnisinteresse	emanzipatorisches Erkenntnisinteresse
Modell	Mathematik, als Teil der über Wissenschaft vermittelten gesellschaftlichen Praxis		
System			
Überprüfung			

Abbildung 6: Mathematik, als Teil der über Wissenschaft vermittelten gesellschaftlichen Praxis

Damit steht uns für die Analyse von Mathematikunterricht ein Satz von Kriterien zur Verfügung, den wir an den Unterrichtsinhalt anlegen können. Wenn man davon ausgeht, daß Heranwachsende sich im Unterricht einen Teil der gesellschaftlichen Praxis aneignen sollen, so muß der Unterricht auch darauf verweisen; die gesellschaftliche Praxis bzw. ein für das Fach charakteristischer Ausschnitt aus ihr sollte im Unterricht symbolisch bearbeitet werden. Für den Mathematikunterricht soll dieser Ausschnitt nun durch die drei oben entwickelten Begriffe beschrieben werden. Der Unterricht kann dann mit Hilfe dieser Kategorien daraufhin untersucht werden, ob das bearbeitete Wissen auf das durch die Begriffe abgesteckte Feld verweist oder ob der Unterricht bestimmte Bereiche ausschließt, und das heißt, den Heranwachsenden im Unterricht bestimmte Möglichkeiten verschlossen bleiben.

3.2 Öffnung des Wissens

Neben der Vollständigkeit des im Unterricht erscheinenden Wissens, dies gemessen an der Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis, möchte ich nun einen weiteren Maßstab der Kritik erläutern. Denn die Gegenüberstellung des Wissens mit den Möglichkeiten der Menschheit berücksichtigt eines nicht: die Schüler, die sich dieses Wissen aneignen sollen, die ihre Möglichkeiten erweitern sollen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn sie im Unterricht die Gelegenheit haben, das im Unterricht erscheinende Wissen zurückzubeziehen auf sich und auf ihre Lebenswelt. Diesen Anspruch an Unterricht formuliert Menck im didaktischen Strukturgitter durch die Dimension der ‚pädagogischen Intentionalität' (vgl. Menck 1975, S. 90ff). Ihr liegt die Vorstellung eines ‚reflexiven' Unterrichts zugrunde,

> „die Vorstellung eines Unterrichts, der Rückbezüge herzustellen sucht zwischen dem einerseits, worüber er informiert und dessen Verbindlichkeit er erschließt: gesellschaftliche Praxis, und den Schülern andererseits, die als Menschen prinzipiell Subjekte dieser Praxis sind. Plakativ und formal gesagt: Reflexiver Unterricht ist einer, in dem seine eigenen Voraussetzungen ins Spiel und zur Sprache kommen." (Menck 1986, S.120)

Anstatt dem obigen Strukturgitter eine weitere Dimension hinzuzufügen und die Reflexivität des Unterrichts anhand der Kategorien der pädagogischen Intentionaltät zu identifizieren, werde ich dem ‚heuristischen' Ansatz Mencks (vgl. ebd., S.116ff) folgen, den ich mit Wierichs (1989) die ‚Öffnung des Wissens' nenne.[59]

Es geht auch hier darum zu ermitteln, welche Interpretationen im Unterricht Geltung erhalten bzw. welche nicht. Darüber hinaus soll aber auch die Frage gestellt werden, ob und wenn ja, wie im Unterricht mit den nicht offiziell zur Geltung kommenden Interpretationen umgegangen wird. Für die Identifizierung eines reflexiven Unterrichts ist nach obiger Erläuterung zu untersuchen, ob Schüler den Rückbezug vom im Unterricht zur Geltung gebrachten Wissen zu sich selbst vollziehen können. Umgekehrt kann man sagen, daß *nicht* von reflexivem Unterricht gesprochen werden kann, wenn der Rückbezug für Schüler nicht möglich ist. Dies kann nach Wierichs (1989) auf zweierlei Arten untersucht werden:

Erstens durch die „Verdeutlichung des Konstruktionscharakters des im Unterricht herangezogenen und verbindlich gemachten Wissens" (Wierichs 1989, S.63). Damit ist gemeint, daß „mit dem Wissen Hinweise auf seine Herkunft und Begründungen für seine Geltung erscheinen" (ebd.), daß auf „Möglichkeiten und Beschränkungen des Wissens aufmerksam" gemacht wird (ebd., S.64). So kann gesichert werden, „daß sich die Interpreten mehr als nur Schulwissen aneignen können" (ebd.). Gleichzeitig erleichtert eine solche Öffnung auch eine „Kritik des Wissens" (ebd.). Denn wenn die Geltung verbürgenden Instanzen sichtbar werden und das Wissen als menschliche Leistung (zu einem bestimmten Zweck, allgemein: der Erweiterung der menschlichen Möglichkeiten) erscheint, können die Geltung des Wissens und damit die für die Geltung einstehenden Instanzen leichter in Frage gestellt werden. Dadurch wiederum kann deutlich werden, daß das im Unterricht erscheinende Wissen immer nur eine Auswahl aus dem verfügbaren Wissen darstellt, daß es bestimmte Möglichkeiten aber auch Beschränkungen menschlichen Handelns bereitstellt, daß die ‚Sache' auch anders interpretiert werden kann.

Nun kann der Konstruktionscharakter dadurch deutlich werden, daß das Unterrichtsergebnis durch *direkte* Hinweise auf die erwähnten Punkte konstituiert wird, daß also im Unterrichtsergebnis unterschiedliche Interpretationen und ihre jeweiligen Geltungsinstanzen, Möglichkeiten und Beschränkungen, das Wissen als menschliche Leistung zugleich mit aufgehoben sind. Vermutlich jedoch ist es häufig so, daß im Unterricht eine offizielle, (vom Lehrer) autorisierte Interpretation das Unterrichtsergebnis maßgeblich bestimmt. Was passiert, wenn Schüler die ‚Sache' anders interpretieren?

---

[59] Das hat bestimmte Gründe: Erstens folge ich damit dem von Wierichs (1989) vorgelegten Analyseschema. Zweitens bietet diese Vorgehensweise auch methodische Vorteile: So ist es möglich, vom Unterricht selbst auszugehen und von dort aus den weiteren Zusammenhang zu erschließen. Dies deckt sich mit der Methode der lokalen Topographie (vgl. 4.3). Darüber hinaus ist der Grad der Öffnung nicht unbedingt sofort sichtbar, wie im folgenden erläutert werden wird. Deshalb ist es sinnvoll, im Unterricht nach bestimmten Stellen zu suchen, die dann vor diesem Hintergrund interpretiert werden können.

Dies ist ein zweiter Aspekt, unter dem die Öffnung des Wissens untersucht werden kann: das „Aufbrechen vorgegebener oder autorisierter Bedeutungen“ (Wierichs 1989, S.63). Dazu geht man von den Stellen im Unterricht aus, in denen mehr oder weniger deutlich wird, daß unterschiedliche Interpretationen aufeinandertreffen.. Was ist damit gemeint? – Im Abschnitt 2.2 zur gesellschaftlichen Herrschaft wurde es bereits gesagt: Unterschiedliche Interaktionsteilnehmer können die Situation, in der sie sich befinden oder über die sie sprechen, unterschiedlich definieren. Habermas (1971, S. 136ff) spricht vom ‚Diskurs‘, der dann nötig wird, damit Verstehen wieder möglich ist. Menck drückt dies so aus:

> „Sofern Handeln dadurch gestört wird, daß die Geltung von Aussagen über handlungsrelevante Sachverhalte bzw. von Regeln des Handelns bezweifelt wird, müssen ein theoretischer bzw. praktischer Diskurs in Gang gesetzt werden, in denen die Geltung bis zur Wiederherstellung eines Konsenses problematisiert wird.“ (Menck 1986, S. 116)

Solche Diskurse entstehen also immer dann, wenn widersprüchliche Interpretationen zu einem Sachverhalt aufeinandertreffen. Auf den Unterricht übertragen spricht Menck in diesen Fällen von ‚Bruchstellen‘ (vgl. ebd. S.117).

> „Derartige Brüche und die sie thematisierenden Diskurse - sofern vorhanden - sind deswegen aufschlußreich, weil sich in ihnen die besagte Auswahl dokumentiert und weil sie am besten die diese legitimierende Autorität erkennen lassen. Brüche, widersprüchliche Interpretationen enthalten also Hinweise auf andere Möglichkeiten der Interpretation des Unterrichtsthemas.“ (ebd.)

In Bruchstellen wird also zunächst deutlich, daß es verschiedene Interpretationsmöglichkeiten des Gegenstandes gibt, aus denen eine Auswahl getroffen wird. Für die Frage nach der Öffnung des Wissens ist es nun interessant, *wie* im Unterricht mit Bruchstellen umgegangen wird. Denn anders als in einer beliebigen Interaktion, in der die Interaktionsteilnehmer prinzipiell gleichgestellt sind – und nur dann kann von einem Diskurs im Sinne Habermas’ gesprochen werden – ist es in der Schule der Lehrer, der mit pädagogischer Autorität ausgestattet und damit in der Lage ist, eine Auseinandersetzung über die Geltung des Wissens einzuleiten oder die offizielle Geltung durchzusetzen. Die Frage ist also, ob das Wissen in dem Sinne geöffnet wird, daß unterschiedliche Interpretationen sichtbar werden und daß die Geltung der Interpretationen durch Hinzunahme der Geltung verbürgenden Instanzen ausgehandelt wird; kurz: ob die Bedeutungen tatsächlich ‚aufgebrochen‘ werden. Damit würde den Schülern die Möglichkeit gegeben, ihre differierenden Interpretationen deutlich zu machen, eventuell zu korrigieren oder zur Geltung zu bringen. Sie wären nicht gezwungen, die vorgegebenen Bedeutungen kritiklos zu übernehmen, sondern wären in der Lage, sie zu begründen und als ihre eigenen Möglichkeiten zu erkennen. Öffnung des Wissens ist in diesem Sinne Voraussetzung für reflexiven Unterricht.

Kann man aus diesen Feststellungen nun schließen, daß, wenn es im Unterricht keine Bruchstellen gibt, die Interpretationen von Lehrer und Schülern geteilt werden? Diese Frage ergibt sich aus der Vermutung, die bereits in 2.5 angesprochen wurde, daß es gerade im Mathematikunterricht eher weniger Interpretationsspielraum gibt und damit eventuell auch weniger (explizite) Bruchstellen.

Auch Voigt (1984) schreibt solchen Bruchstellen im Unterricht eine Bedeutung bei der Analyse der Interaktion zwischen Lehrer und Schülern zu. Er geht davon aus, daß jegliche Äußerungen in einer Interaktion einen „indexikalen, d.h. vagen, mehrdeutigen Charakter“ haben (Voigt 1984, S.28), und es illusionär sei zu glauben, man könne diese Indexikalität vollständig beheben. Anzustreben sei vielmehr der „*adäquate methodische Umgang* mit indexikalen Ausdrücken“ (ebd., S.29). Dieser zeichnet sich durch eine sinnvolle und langsam fortschreitende Bedeutungszuschreibung durch die Interaktionspartner aus, insbesondere bei zentralen und neu eingeführten Begriffen. „Wird die Bedeutung nicht in gleicher Weise von Schülern und Lehrern generiert, kann lang andauerndes grundsätzliches Mißverstehen im Unterricht entstehen“ (ebd.). Solche Mißverständnisse äußern sich dann in Bruchstellen, die die „Beteiligten selbst … nicht als problematisch erfahren (müssen); denn sie gehen prinzipiell von der Annahme aus, daß die Bedeutungen intersubjektiv geteilt seien“ (ebd.). Voigt bezeichnet damit den „working consensus“, den „Fall der wechselseitigen Unterstellung gegenseitigen Verstehens im Unterricht“ (Voigt 1984, S.40). Er „basiert auf einem subjektiv unhinterfragten Verständnis vom Fortgang der Interaktion und der Entwicklung des Gesprächsthemas, das in der Regel nicht von den jeweils anderen Interaktionspartnern enttäuscht wird“, und Voigt nimmt an, „daß dieses Verständnis die Differenzen in den Situationsdefinitionen auf der Handlungsebene zudeckt“ (ebd., S.41).

Der „working consensus“ zeigt sich auch in den Interaktionsmustern, die Voigt aus seinen Unterrichtsanalysen rekonstruiert, insbesondere im ‚Erarbeitungsprozeßmuster‘. Es zeichnet sich durch drei Phasen aus:

> „Phase 1: Nennung der offenen Aufgabe durch den Lehrer, erste Schülerangebote und vorläufige Einschätzung durch den Lehrer – *Konstituierung der Aufgabe*
>
> Phase 2: Kanalisierte Entwicklung der endgültigen Lösung – *Fixierung der Lösung*
>
> Phase 3: Bewertung der thematisierten offenen Verfahren und Ergebnisse und Reflexion des kontextuellen Zusammenhangs – *Interpretation des Vorgehens*“ (ebd., S. 128).

Die Tatsache, daß dies ein Muster ist, das Schüler und Lehrer kennen und erfolgreich anwenden, um schnell zu einer Lösung zu kommen, heißt gleichzeitig, daß mögliche Mißverständnisse selten aufgedeckt werden. Dies würde nämlich ein Abweichen vom Interaktionsmuster und damit Unsicherheit bedeuten. Man einigt sich oberflächlich auf ein bestimmtes Verständnis der behandelten Sache, ohne daß man wirklich von einem gemeinsamen Verstehen ausgehen kann:

> „Das Erarbeitungsprozeßmuster stellt zusammengefaßt die Struktur einer Interaktion im Mathematikunterricht dar, in der im wesentlichen ein als geteilt geltendes Ergebnis konstituiert wird, ein geteiltes Verstehen jedoch nicht gesichert ist.“(ebd., S.160, i. O. kursiv)

Insbesondere im Mathematikunterricht können wir also nicht davon ausgehen, daß ein Fehlen von Bruchstellen bedeutet, daß die Geltung von Lehrer und Schülern in gleichem Maße geteilt wird. In der Analyse werde ich deshalb einen Schritt weiter gehen als Wierichs. Wenn es möglich ist, soll unabhängig von Bruchstellen untersucht werden, welche Bedeutung das erarbeitete Unterrichtsergebnis für die Schüler hat, ob es von der offiziellen abweicht oder mit ihr übereinstimmt. Dies kann zwar in der Regel nicht mit Hilfe der Unterrichtsprotokolle allein geschehen, wohl aber vor allem auf der Grundlage von Interviews mit Schülern überprüft werden.[60] Auf der Grundlage der so gewonnenen Erkenntnisse kann es dann auch möglich sein, rückwirkend in den Unterricht zu gehen, und genau die Stellen aufzusuchen, in denen die Differenzen entstanden. Die Frage wäre dann, ob es sich eventuell um implizite Bruchstellen handeln könnte, die auf den ersten Blick aber problemlos erschienen, oder ob tatsächlich, im Sinne des „working consensus", die Situation als unproblematisch erfahren wird, und die Beteiligten die Interpretationsdifferenz nicht bemerken. Unter dem Aspekt der Öffnung des Wissens würde das bedeuten, daß in diesem Fall die Schüler weder die Interpretationsdifferenzen erkennen noch die offizielle Interpretation übernehmen können. Die offizielle Bedeutung des Unterrichtsergebnisses bliebe ihnen damit in jedem Fall verschlossen.

[60] Leider gibt es nicht zu allen Unterrichtseinheiten Schülerinterviews (vgl. 4.2.1).

4 Arbeitshypothese, Grundlage und Methode der Analysen

4.1 Unterrichtskritik – Eine Hypothese

Vor dem Hintergrund des im ersten Kapitel erläuterten Verständnisses von Unterricht und den dargestellten Maßstäben für eine Kritik von Unterricht (Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis – vgl. 3.1.3 – und Öffnung des Wissens – vgl. 3.2), liegt nun der Rahmen fest, innerhalb dessen eine Reihe von Unterrichtsdokumenten analysiert werden kann. Es bleibt noch eine Hypothese aufzustellen, an der die Arbeit orientiert werden kann.[61]

Ich fasse zunächst noch einmal kurz die den Maßstäben zugrunde liegenden Gedanken zusammen: Unterricht dient dem Zweck, Heranwachsenden Orientierungen für ihr Handeln außerhalb der Schule zu vermitteln.[62] Dies geschieht, indem Ausschnitte aus der gesellschaftlichen Praxis, der Wirklichkeit für die Schule transformiert werden. Im Unterricht erscheinen also symbolische Repräsentationen der gesellschaftlichen Praxis, die interpretiert werden und den Heranwachsenden so die Möglichkeit eröffnen, die Wirklichkeit (symbolisch) zu beherrschen. Damit verbindet sich die Hoffnung auf Beherrschung der Praxis. Ob die Schüler diese Praxis tatsächlich beherrschen, ist eine Frage, die durch eine Unterrichtsanalyse nicht beantwortet werden kann. Überprüft werden kann allerdings, ob ihnen im Unterricht die *Möglichkeit der Beherrschung* eröffnet wird, das heißt, ob im Unterricht auf einen möglichst vollständigen Ausschnitt der Wirklichkeit verwiesen wird. Andersherum ausgedrückt: Werden im Unterricht bestimmte Aspekte der gesellschaftlichen Praxis nicht berücksichtigt, so kann daraus geschlossen werden, daß den Schülern bestimmte Möglichkeiten der menschlichen Praxis verschlossen bleiben. Dieser Aspekt wird mit Hilfe des oben entwickelten didaktischen Strukturgitters untersucht werden.

Der besagte Ausschnitt, auf den der Unterricht verweist, wird zunächst durch das Fach, in diesem Fall: die Mathematik, bestimmt. Aus diesem so festgelegten Feld wird ausgewählt. Diese Auswahl ist notwendig; es ist natürlich nicht möglich alles, was zur Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis gehört, für den Unterricht zu transformieren. Aber diese zweite Auswahl muß pädagogisch legitim geschehen, d.h. im Interesse

[61] Methodisch ist es sinnvoll, eine Nullhypothese und eine Alternativhypothese aufzustellen. Eine Nullhypothese ist widerlegbar, aber nicht beweisbar (vgl. Lexikon der Psychologie, 1980). Allerdings versteht es sich von selbst, daß die Stichprobe der hier untersuchten Unterrichtsstunden natürlich viel zu klein ist, um aus einer Widerlegung der Nullhypothese auf die Wahrheit der Alternativhypothese zu schließen. Außerdem handelt es sich hier vor allem um eine interpretative Analyse, die ohne statistische Kennwerte auskommen muß. Daher kann erstens der Gültigkeitsbereich der Hypothesen sich nur auf die zu analysierenden Unterrichtsstunden erstrecken, und zweitens ist es nicht möglich, Irrtumswahrscheinlichkeiten für die Ablehnung oder Annahme der Alternativhypothese anzugeben (siehe dazu auch Abschnitt 4.3).

[62] Daß es daneben auch andere Ziele geben kann und gibt, soll mit diesem Satz nicht angezweifelt werden. Aber mindestens das sollte Unterricht leisten, wenn er nicht Selbstzweck sein soll.

der Bildung der Heranwachsenden. Dies ist der zweite Maßstab für eine Unterrichtskritik, der durch den Grad der Öffnung des Wissens erfaßt werden soll.

Im folgenden sollen einige Ergebnisse von Menck (1986) und Wierichs (1989) kurz dargestellt werden, in deren Kontext auch diese Arbeit steht und vor deren Hintergrund eine Arbeitshypothese aufgestellt werden soll. Menck vermutet aufgrund einiger Fallanalysen aus verschiedenen Unterrichtsfächern, daß Verweise auf die Wirklichkeit eher selten aufgedeckt werden:

> „Das im Unterricht repräsentierte Bild von Welt ist im wesentlichen das einer Schulwelt; nur ganz selten findet man Spuren von Reflexivität …“ (Menck 1886, S. 125)

Wierichs bestätigt diese Vermutung für den Pädagogikunterricht an unterschiedlichen Schulformen:

> „In allen Stunden kommt ein Aspekt nicht oder kaum zur Geltung: der Aspekt der Reproduktion. Daß Erziehung auch immer Reproduktion *ist,* scheint im Pädagogikunterricht systematisch unterschlagen zu werden.“ (Wierichs 1989, S. 205)

Und unter dem Aspekt der ‚Öffnung des Wissens‘ kommt er zu dem Schluß,

> „daß es (auch) im Pädagogikunterricht Tendenzen zur Abschottung des unterrichtlichen Wissens gegenüber unerwarteten, es möglicherweise öffnenden Interpretationen gibt.“ Außerdem „gibt es allenfalls flüchtige Hinweise auf die Herkunft des herangezogenen Wissens. Vor allem aber fehlen bzw. werden nicht eingefordert explizite Begründungen für das Erscheinen und die Geltung bestimmten Wissens.“ (ebd., S. 214)

Ausgehend von diesen Ergebnissen möchte ich nun folgende Hypothesen aufstellen:

Nullhypothese: Im Unterricht (in dem dieser Analyse zugrundeliegenden Unterricht) wird auf einen Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis verwiesen, der diese Praxis vollständig repräsentiert; und das im Unterricht erscheinende Wissen wird in dem Sinne geöffnet, daß die Auswahl für den Unterricht sichtbar wird und unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten erhalten bleiben.

Alternativhypothese: Im Unterricht (in dem dieser Analyse zugrundeliegenden Unterricht) erscheint ein (systematisch) beschränktes Bild der gesellschaftlichen Praxis, und eine Öffnung des Wissens findet, wenn überhaupt, nur ansatzweise statt.

Es sei noch einmal betont, daß der Geltungsbereich der an diesen Hypothesen orientierten Ergebnisse sich nur auf die tatsächlich analysierten Stunden erstrecken kann. Sollte die Nullhypothese widerlegt werden können, so könnten daraus lediglich Hinweise für weitere Untersuchungen von Mathematikunterricht abgeleitet werden. Und es könnte darauf aufmerksam machen, daß zumindest die Gefahr eines der Nullhypothese entgegenstehenden Unterrichts besteht.

Abschließend möchte ich noch auf einen weiteren Aspekt der Untersuchung hinweisen: Die Aufnahmen der Unterrichtsstunden entstammen zum einen aus einem Forschungsprojekt, das Mitte der 70er Jahre mit dem Ziel der Analyse des Unterrichtsinhalts begonnen wurde, zum anderen wurden sie speziell für diese Arbeit im Sommer 1998 angefertigt. Dies hatte folgenden Grund: In den 70er Jahren war die Didaktik der Neuen

Mathematik (vgl. 3.1.2.2) noch sehr aktuell. In einigen dieser älteren Unterrichtsaufnahmen wird das sehr deutlich (zum Beispiel in den Stunden zu A_3[63]). Es ergab sich für mich die Frage, ob dieser neuere ‚Trend' in der Mathematikdidaktik heute ebenso spürbar ist, wie es die Neue Mathematik in den 70er Jahren war. Das heißt, sind die Unterrichtsstunden überhaupt miteinander vergleichbar und wenn ja, inwiefern? Und wenn es Differenzen gibt, die auf eine vorherrschende didaktische Strömung zurückzuführen sind: Inwiefern sind die Analyseergebnisse heute noch aussagekräftig? Anders gefragt: Ist der Mathematikunterricht heute aufgrund der – hypothetisch angenommenen – didaktischen Tendenz zur Anwendungsorientierung eher in der Lage, die in der Nullhypothese aufgestellten Kriterien zu erfüllen?

Um diese Fragen zu beantworten, sollen also neben den Unterrichtsstunden aus den 70er Jahren die neueren Stunden zum Vergleich hinzugezogen werden. Auch hier ist nicht mit repräsentativen Ergebnissen, sondern lediglich mit Tendenzen oder Hinweisen auf Unterrichtspraxis zu rechnen.

Im folgenden werde ich auf die einzelnen Unterrichtsstunden näher eingehen und die Methode der Analyse sowie die einzelnen Schritte weiter erläutern.

4.2 Die Grundlage der Analyse

4.2.1 Die Unterrichtsdokumente

Die empirische Grundlage dieser Analyse bilden Transkripte von Mathematikunterrichtsstunden und Interviews mit Lehrern und Schülern. Diese wurden zu unterschiedlichen Zeiten und an unterschiedlichen Schulen angefertigt. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die hier zu analysierenden Stunden[64]:

[63] Zur Bezeichnung der Stunden siehe Fußnote 64

[64] Zur Bezeichnung: Buchstabe und tiefstehende Nummer bezeichnen jeweils eine *Unterrichtseinheit* bei dem durch den Buchstaben gekennzeichneten Lehrer. Eine nachstehende Zahl in Klammern kennzeichnet die jeweilige Stunde aus der Unterrichtseinheit. Zum Beispiel: $A_3(2)$ ist die zweite Stunde der dritten Unterrichtseinheit bei Lehrer A. Bei den Lehrern B, D und E entfallen die Tiefziffern, da jeweils nur eine Unterrichtseinheit aufgenommen wurde.

Bezeichnung	Lehrer	Monat	Jahr	Anzahl Stunden	Ausf. analysierte Stunde	Klasse	Schule
A_1	A	August	1977	4	1. Stunde, $A_1(1)$	6, A-Kurs	Orientierungsstufe, Schulzentrum, Niedersachsen
A_2	A	August	1977	4	1. Stunde, $A_2(1)$	6, C-Kurs	Orientierungsstufe, Schulzentrum, Niedersachsen
A_3	A	Februar	1978	3	2. Stunde, $A_3(2)$	6, A-Kurs	Orientierungsstufe, Schulzentrum, Niedersachsen
A_4	A	Juni	1978	3	2. Stunde, $A_4(2)$	6, A-Kurs	Orientierungsstufe, Schulzentrum, Niedersachsen
B	B	August	1977	3	1. Stunde, B(1)	6	Orientierungsstufe Gymnasium, Niedersachsen
C_1	C	Februar	1978	3	3. Stunde, $C_1(3)$	6	Orientierungsstufe Gymnasium, Niedersachsen
C_2	C	Juni	1978	3	2. Stunde, $C_2(2)$	6	Orientierungsstufe Gymnasium, Niedersachsen
D	D	Mai	1998	3	1. Stunde, D(1)	6	Orientierungsstufe Gymnasium, NRW
E	E	Mai	1998	3, davon 1 Doppelstunde	1. Stunde, E(1)	6	Orientierungsstufe Gymnasium, NRW

Aus allen Unterrichtseinheiten wurde mindestens eine Stunde vollständig transkribiert und von den übrigen eine Inhaltsangabe angefertigt, die sich aus den wichtigsten Abschnitten im Originalton zusammensetzt. Jeweils eine Stunde jeder Unterrichtseinheit wurde als Grundlage für eine ausführliche Analyse gewählt und codiert[65]. Die weiteren zugehörigen Unterrichtsaufnahmen wurden jedoch mit in die Analyse einbezogen, sofern sie dazu beitrugen, die Interpretation zu vervollständigen. So konnten zum Beispiel bestimmte Merkmale, die sich in der ausführlichen Analyse einer Stunde zeigten, durch Hinzunahme weiterer Stunden der Unterrichtseinheit deutlicher herausgestellt oder auch relativiert werden. Ein bestimmtes Auswahlkriterium gab es nicht. Bei den älteren Aufnahmen mußte ich mich darauf beschränken, diejenigen Stunden zu wählen, von denen bereits ein vollständiges Transkript existierte, da eine neue Abschrift der Tonbänder zu zeitaufwendig geworden wäre. Bei den neueren Aufnahmen (D und E) wurde jeweils die erste Stunde zugrunde gelegt, da in beiden Parallelklassen das gleiche neue Thema eingeführt wurde, und damit gerade diese Stunde für einen Vergleich geeignet erschien.

Die Aufnahmen der Lehrer A, B und C wurden bereits vor 20 Jahren im Rahmen eines Forschungsprojektes zur Analyse von Unterricht und neben vielen weiteren Unterrichtsstunden – nicht nur Mathematikunterricht – aufgenommen. Im Rahmen dieses For-

[65] vgl. 4.2.2

schungsprojektes wurden bereits die Transkripte und Inhaltsangaben erstellt sowie Ansätze zur Auswertung entwickelt, die sich allerdings von dem hier dargestellten unterschieden. Es wurden weiterhin auch Videoaufnahmen einzelner Stunden erstellt, die sich für die Analyse jedoch als weitgehendst unbrauchbar erwiesen, da sie von zu schlechter Qualität waren und zudem auf einem veralteten Videosystem produziert wurden.

Die Unterrichtsmitschnitte fanden an verschiedenen Schultypen statt. Die Aufnahmen des Lehrers A wurden an einer Orientierungsstufe eines Schulzentrums (OS) in Niedersachsen durchgeführt. Diese eigenständige Schulform wurde in Niedersachsen schrittweise seit 1971/72 eingeführt, die Schule, an der die Unterrichtsaufnahmen stattfanden gehörte zu den ersten dieser Art. Der Unterricht findet in unterschiedlichen, nach Leistung der Schüler differenzierten Kursen statt. Der Unterricht des Lehrers A wurde in einem A- und einem C-Kurs aufgenommen, d.h. in einem Kurs für leistungsstarke und einem für leistungsschwächere Schüler. Diese Kurse fanden parallel statt.

Die Aufnahmen der Lehrer B und C fanden in der selben Klasse eines Gymnasiums in Niedersachsen mit integrierter Orientierungsstufe statt. Lehrer C war Referendar und übernahm die Klasse von Lehrer B im zweiten Halbjahr. Es gab hier zwar keine Differenzierungskurse, aber es galten die gleichen Richtlinien wie auch für die Orientierungsstufe des Schulzentrums, an der Lehrer A unterrichtete.

Schließlich wurden 1998 neue Unterrichtsaufnahmen angefertigt, ebenfalls in der 6. Klasse eines Gymnasiums, allerdings in Nordrhein-Westfalen. Beide Lehrer (D und E) unterrichten an der gleichen Schule in zwei Parallelklassen. Hier mußte auf Videoaufnahmen verzichtet werden, weil der technische Aufwand für eine Person zu groß gewesen wäre.

Zu allen Stunden – mit Ausnahme der von Lehrer B – existieren zu einzelnen Stunden Lehrerinterviews, zu A_1 bis A_3 und C_1 des weiteren auch Schülerinterviews. Zu C_3 liegt ein Interview vor, an dem der Lehrer und einzelne Schüler gemeinsam teilgenommen haben. Zu den neueren Aufnahmen gibt es leider nur Lehrerinterviews, Interviews mit Schülern waren aus organisatorischen Gründen nicht möglich.

4.2.2 Das themenorientierte Verlaufsprotokoll

Um die Bearbeitung der Verbalprotokolle zu vereinfachen und den Schwerpunkt auf die Inhalte des Unterrichts zu lenken, schlägt Menck die Anfertigung eines themenorientierten Verlaufsprotokolls (TOP) vor. Es folgt in seiner Logik den oben erläuterten (2.6) Begriffen „Thema", „Interpretation" und „Motivation", wie sie Menck aus den Arbeiten von Bellack und Schütz abgeleitet hat. Diesem Vorschlag folgte auch Wienichs (1989).

> „Der Ablauf des Unterrichts wird gegliedert, und zwar nach der Abfolge der Themen bzw. Unterthemen. Dazu sucht man diejenigen Punkte auf, an denen ein neues Thema – ‚Thema' im Sinne von Schütz – eingeführt und in das Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt wird. … Man findet Themen in strukturierenden Spielzügen und wohl nur in ihnen. Sie werden von dem, der sie auf-

> bringt, in der Regel mit Hinweisen auf mögliche oder erwartete Interpretationen … versehen. Wir sprechen hier von einer ‚Interpretationsrichtung'. Sodann identifiziert man der Reihe nach die ‚Interpretationen' des Themas und listet sie auf, wozu Hinweise auf die verwendeten ‚Medien' kommen. Schließlich trägt man die ‚Motivationen', also die Bewertungen und Prozeßsteuerungen an den entsprechenden Stellen ein. Natürlich werden auch die ‚handelnden Personen' notiert" (Menck 1986, S.76).

Ich habe mich bei dieser Arbeit für einen etwas anderen Weg entschieden, der darüber hinaus die datentechnische Verarbeitung erleichtert. Arnim Kaiser (1995) hat ein Verfahren vorgelegt, das es erlaubt, Unterricht nicht nur unter interaktionstheoretischer oder methodischer Perspektive zu untersuchen, sondern auch den inhaltlichen Aspekt mit einzubeziehen. Auch er bezieht sich auf Bellack und seine Theorie der Sprachspielzüge, wie sie bereits in 2.6 erläutert wurden. Die Differenzierung nach strukturierenden (STRK)[66], aufforderenden (AUFF), reagierenden (REAG) und fortführenden (FORT) behält er bei und bezeichnet sie als den ‚performativen Aspekt' (vgl. Kaiser 1995, S. 12). Hinzu kommt nun allerdings noch der ‚propositionale Gehalt' (ebd.), der die inhaltliche Bedeutung der einzelnen Spielzüge näher erfaßt. Er entwickelt insgesamt sieben Kategorien (vgl. ebd., S 12f):

Wissenschaftsorientierung (wiss): So werden alle Äußerungen codiert, die den Gegenstand „im Rückgriff auf Begriffe, Theorien, Verfahren entsprechender wissenschaftlicher Disziplinen" (ebd.) zu erfassen versuchen.

Lebensweltliche Orientierung (lebw): Sie erfaßt Äußerungen, die sich ebenfalls auf den Gegenstand des Unterrichts beziehen, ihn aber im Gegensatz zur wissenschaftlichen Betrachtung, unter Hinzunahme lebensweltlicher Erfahrung zu beschreiben oder zu erfassen versuchen.

Lernprozeß (lern): In solchen Äußerungen werden Lernprozesse thematisiert, „dies sowohl, wenn sich bei Teilnehmern Lernbarrieren, Schwierigkeiten, Hemmnisse, Blockaden auftun, als auch zur Unterstützung und Bekräftigung erfolgreich eingeschlagener Lernwege" (ebd.).

Praktische Beschäftigung mit dem Gegenstand (prak): Dies meint Äußerungen, die eine „Beschäftigung mit dem Gegenstand durch den Einsatz von praktischen Fähigkeiten und Fertigkeiten" (ebd., S. 15) signalisiert.

Unterrichtsorganisatorische Aktivitäten (uorg): Hier wird alles das erfaßt, was die Organisation des Unterrichts erfaßt. „Dazu zählen beispielsweise Regelungen über Einteilungen von Arbeitsgruppen, Hinweise auf Lektionen in Lehrbüchern, Regeln des Arbeitsverfahrens" (ebd., S.13) usw.

Unterrichtssystemische Aktivitäten (usys): Hierher gehören solche Äußerungen, die den Unterricht als System aufrechterhalten sollen, die sich daher nicht oder nur mittelbar auf den Gegenstand des Unterrichts beziehen, so etwa alle disziplinierenden Äußerungen.

Private Inhalte (priv): Schließlich findet man in jedem Unterricht auch Äußerungen, die weder den Gegenstand noch den Unterricht als solchen betreffen, „Aspekte der eigenen Befindlichkeit, Stimmungen, Gefühle zur Sprache" (ebd.) z. B., aber auch nicht auf den Unterricht bezogene private Gespräche zwischen Schülern.

---

[66] Kaiser zählt zu den strukturierenden Spielzügen allerdings auch solche, die zusammenfassen und ordnen (vgl. S. 14). Dies entspricht nicht der Definition von Bellack: „Der strukturierende Spielzug ist ein *einleitender* Schritt. Er setzt den Kontext für das Sprachverhalten im Unterricht, indem er das Sprachverhalten zwischen Lehrer und Schülern entweder anregt oder hemmt bzw. ausschließt, und indem er die Art der Interaktion angibt." (Bellack u. a. 1974, S. 143, Hervorhebung von mir, K.J.) Ich habe mich bei der Codierung an diese von Bellack vorgegebene Definition gehalten.

Die Vorgehensweise sah nun wie folgt aus: Zunächst wurde aus jeder Unterrichtseinheit eine vollständig transkribierte Stunde in einer Datenbank-Tabelle nach unterschiedlich zu codierenden Sprachspielzügen sortiert, d.h. zusammenhängende Sprechanteile wurden gegebenenfalls in mehrere einzelne Äußerungen aufgeteilt (dies war vor allem bei den Lehrer-Äußerungen nötig, die in vielen Fällen mehrere unterschiedlich zu codierende Spielzüge enthalten). Sodann wurden die Bedeutungen gemäß der von Kaiser entwickelten Kategorien dazu notiert. Auf die Identifizierung einzelner Schüler wurde dabei verzichtet, da es die computerunterstützte Auswertung erheblich erleichtert und für den Unterrichtsinhalt nur eine zweitrangige Rolle spielt. Außerdem konnten in den Transkripten nicht alle Schüleräußerungen eindeutig identifiziert werden. Der folgende Unterrichtsausschnitt aus $C_1(3)$ veranschaulicht das Vorgehen:

Person	**Spielzüge**	**Bedeutung**	**Äußerung**
L	STRK	uorg	So, ich will die erstmal kurz anschreiben, die Aufgaben, und dann dazu die Lösungen.
L	AUFF	wiss	Was kann man zu diesem Bruch sagen?
S	REAG	wiss	Größer als 1.
L	AUFF	uorg	Stephan.
S	REAG	wiss	Daß der Zähler größer ist als der Nenner.
L	AUFF	wiss	Also, wie nennt man diese Brüche korrekt?
S	REAG	wiss	Unechte Brüche.
L	FORT	lern	Unechte Brüche.
L	AUFF	wiss	Was kann man damit machen?
L	FORT	lern	Wer sagt denn , daß er's nicht kann?
L	AUFF	wiss	Jörg! Was kann man mit unechten Brüchen machen?
S	REAG	wiss	Man kann sie in...in 'ne gemischte Zahl verwandeln.
L	AUFF	uorg	So, dann diktier die mal.
S	REAG	wiss	Ja, das wärn… das wärn siebzig, ne, einundsiebzig … zwei Zehntel, ein Fünftel. Zwei Zehntel kann man kürzen.
L	STRK	wiss	Ja, und das kann man doch sehr schön als Dezimalbruch schreiben.

Die Arbeit mit einem Datenbankprogramm ermöglicht es nun, bestimmte Abfragen zu erstellen oder Auszählungen nach bestimmten Kriterien auszuführen. Das erwies sich als besonders interessant bei der Analyse des im Unterricht erscheinenden Wissens.

Die Auszählung der einzelnen Spielzüge gibt einen ersten Einblick in die Herkunft des Wissens. Sind es z. B. vornehmlich Aufforderungen des Lehrers und entsprechende Reaktionen der Schüler oder vor allem Fortführungen, aus denen das im Unterricht erscheinende Wissen sich zusammensetzt und wie sind die Sprechakte quantitativ auf Lehrer und Schüler verteilt? Dies eröffnet einen ersten Zugang zu der Art und Weise, wie Wissen im Unterricht konstituiert wird. Nimmt man nun noch die Bedeutungen hinzu, so sind für die Konstituierung des Wissens insbesondere die auf Wissenschaft und Lebenswelt bezogenen Äußerungen interessant, da es hier unmittelbar um den Gegenstand des Unterrichts geht. Wie verteilen sich die jeweiligen propositionalen Aspekte quantitativ, bezogen auf Lehrer und Schüler und schließlich in bezug auf die Spielzüge? So können Hinweise darauf gewonnen werden, ob das Wissen vornehmlich unter Hinzunahme mathematischer Begriffe oder Theorien[67] oder der Erfahrungen der Schüler gewonnen wird. Dies deutet die Geltung verbürgenden Instanzen bereits an, die sich darüber hinaus vor allem jedoch in den auf Lernprozesse bezogenen Äußerungen zeigen. Ist es der Lehrer, der bestätigt oder korrigiert oder werden andere Instanzen herangezogen? Hier wird deutlich, daß die rein numerische Auswertung allein natürlich nicht genügt. Gleichzeitig müssen die Äußerungen selbst betrachtet werden. Die numerische Auswertung kann nur den Zugang erleichtern und das Augenmerk auf bestimmte Tendenzen lenken, die dann im einzelnen inhaltlich nachzuprüfen sind.

Doch auch bei der Interpretation einzelner Sequenzen wird die Arbeit durch die Aufnahme in ein Datenbankprogramm erleichtert. Bestimmte Abschnitte können leichter gefunden werden und nicht interessierende Sprechakte (private oder unterrichtssystemische beispielsweise) können ausgeblendet werden.

Außerdem wurden die Tabellen dazu genutzt, einzelne Stunden miteinander zu vergleichen. So wurden zum Beispiel die Stunden $A_1(1)$ und $A_2(1)$ einander gegenübergestellt, um auf den Differenzierungsaspekt aufmerksam zu machen und Hinweise auf wesentliche Unterschiede zu gewinnen.

Abschließend möchte ich noch auf einige Schwierigkeiten hinweisen, die auch Kaiser (vgl. ebd., S. 23f) in ähnlicher Form anspricht: Die Codierungen waren vor allem bei den Bedeutungen nicht immer eindeutig. Insbesondere bei der Unterscheidung von wissenschaftsorientierten (*wiss*-) und lebensweltlich orientierten (*lebw*-)[68] Äußerungen waren die Unterschiede oft nicht eindeutig zu erkennen, in vielen Fällen mußte es aus dem Kontext heraus interpretiert werden, welcher Kategorie die Äußerungen zuzuordnen sind. Und selbst dann bestanden noch Unsicherheiten. Ich vermute, daß sich diese Schwierigkeit insbesondere im Mathematikunterricht ergibt, wo die lebensweltlichen Erfahrungen der Schüler oftmals nur bedingt oder oberflächlich[69] im Unterricht erscheinen. Andererseits konnte ich feststellen, daß, selbst wenn eine Aufgabe den Erfahrungshintergrund der Schüler anspricht, diese sehr schnell von sich aus die mathematische Sichtweise einnehmen oder es zumindest versuchen. Sind das nun lebensweltliche Äußerungen, die nur mathematisch ‚verpackt‘ sind oder verweisen sie eindeutig auf ihr im Mathematikunterricht gebildetes Vorwissen? Diese Frage wird auch unter Hinzunahme des unterrichtlichen Kontextes selten zu beantworten sein. Ich habe mich dazu entschieden, in solchen Zweifelsfällen die Äußerungen als *wiss*-Sprechakte zu codieren, wenn in ihnen mathematische Begriffe vorkommen.

---

[67] Alle Äußerungen, in denen mathematische Begriffe vorkamen oder die einen Bezug zu mathematischen Theorien oder Verfahren aufwiesen, wurden als *wiss*-Äußerungen codiert.

[68] Im folgenden werde ich meist die entsprechenden Abkürzungen benutzen.

[69] Dieses Problem wurde von Voigt (1984) analysiert unter dem Stichwort „Das Muster der inszenierten Alltäglichkeit“, vgl. auch 2.5

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, einer zu hohen Differenzierung vorzubeugen, die die Analyse und Interpretation nur unübersichtlich macht. Darauf macht auch Kaiser aufmerksam, und ich schließe mich seiner Entscheidung an:

> „Nicht selten stellt sich die Frage nach den Grenzen des Sprechakts. Geht man ganz exakt vor, entsteht eine Tendenz zur Überdifferenzierung, die kaum noch sinnvoll handhabbar ist. Wir haben daher pragmatisch begründet die Regel eingeführt, im Zweifelsfall den komplexeren Zusammenhang als einen Sprechakt anzusehen." (ebd., S.23f)

4.2.3 Die Paraphrase

Der nächste Schritt, der sich an die codierte Erfassung der Verbalprotokolle anschließt, ist die Erstellung der Paraphrase, die am Anfang jeder Analyse steht und geeignet ist „demjenigen, der das Verbalprotokoll nicht kennt, einen Überblick über die unterrichtliche Konstitution des Inhalts zu geben" (Wierichs 1989, S.77). Sie besteht aus „Überschriften, über die ganze Stunde sowie über einzelne thematische Einheiten. Die Überschriften sollen das Ergebnis der durch das Thema bzw. Unterthema bestimmten Arbeit zusammenfassen" (Menck 1986, S.80). Und sie besteht aus „einem Text, der die einzelnen Arbeitsschritte, die Interpretationen in ihrer Abfolge wiedergibt. Die verwendete Sprache sollte dabei, soweit wie möglich, die des Unterrichts selbst sein" (ebd.).

TOP und Paraphrase bilden somit Ausgangspunkt und Beginn der Analyse, anhand derer eine lokale Topographie entwickelt wird, die ich im folgenden beschreiben möchte.

4.3 Die Methode der lokalen Topographie

Es ist bereits an mehreren Stellen angeklungen, daß bei der Analyse von Unterrichtsinhalten das ganze „Beziehungsgefüge" (Menck 1986, S.136), in dem sie stehen, mit erfaßt werden muß. Der Unterrichtsinhalt ist also nie isoliert von seinem Kontext verstehbar, sondern nur, wenn alle Aspekte, bis hin zur gesellschaftlichen Praxis, in der der Unterricht stattfindet und auf die er verweist, erläutert und transparent gemacht werden. Der Zusammenhang, in dem der Unterricht steht, wurde in Kapitel 2 erläutert (vgl. Abbildung 1, S.25) .

Die „Methode der lokalen Topographie" besteht nun darin, diesen Kontext, in dem der Unterrichtsinhalt steht, zu beleuchten, um ihn in all seinen Dimensionen verstehen und beurteilen zu können. Dazu geht man vom konkreten Unterricht aus: „Der Anfang wird also beim einzelnen Datum, bei der unverständlichen Handlung, bei dieser Unterrichtsstunde und ihren Inhalten gemacht" (ebd., S.103). Man wird nun versuchen, dieses bis hierhin Unverständliche in einen „nachvollziehbaren Zusammenhang mit anderen, uns bereits bekannten Sachverhalten" (ebd.) zu bringen, denn nur dadurch kann verständlich werden, was dort passiert. Mit der „lokalen Topographie" meint Menck somit „diejenige Ordnung, die ich erzeuge, wenn ich einen ganz bestimmten Unterricht und seinen am Thema orientierten Inhalt in einen geordneten Zusammenhang mit anderen, ihn erläuternden und verständlich machenden Sachverhalten bringe" (ebd.).

Es ergeben sich in diesem Zusammenhang zwei methodische Probleme (vgl. ebd., S.104f): Erstens kann man keine genaue Grenze der Umgebung angeben, die den Unterrichtsinhalt eingrenzt. „Vielmehr bestimmen der schulpraktische Kontext … und das praktische Interesse an der Analyse ebenso ihren Umfang wie das Ausmaß, in dem Forscher und ihre Adressaten über gemeinsames Wissen verfügen“ (ebd., S.104). Insofern kann eine Analyse nie als abgeschlossen gelten, was das zweite Problem schon impliziert, daß nämlich die Gefahr besteht, daß man nur diejenigen Zusammenhänge herausstellt, die in ein „vorgefertigtes Bild passen“ (ebd., S.105). Diesen Schwierigkeiten könne man dadurch entgegentreten, daß man eine „prinzipielle Unabgeschlossenheit und eine ebenso prinzipielle Skepsis gegenüber der Geltung vorläufiger Interpretationen“ (ebd.) akzeptiert. Die im empirischen Teil dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse sollen und können daher nie endgültige Aussagen sein. Sie sollten als Basis für weitere Diskussionen verstanden werden.

4.4 Die einzelnen Schritte der Analyse

Die Analyse wird sich in insgesamt vier Schritte gliedern. Sie entsprechen im wesentlichen dem von Wierichs (1989) entwickelten Analyseschema[70]. Sie beginnt mit der Analyse des im Unterricht erscheinenden Wissens. Hier geht es zunächst um die Herkunft des Wissens, dann um die Geltung verbürgenden Instanzen für das im Unterricht erscheinende Wissen, und schließlich um die Öffnung des Wissens. Auf die letzten beiden Aspekte ist oben bereits eingegangen worden (siehe S.17 und Abschnitt 3.2). Zur Herkunft des Wissens ist folgendes anzumerken:

> „Es können formal drei Quellen für das im Unterricht herangezogene Wissen unterschieden werden:
>
> – Medien
>
> – die Lehrperson und ihr Sachwissen
>
> – die Schüler und ihr Vorwissen.“ (Wierichs 1989, S.82)

Sofern Medien im Unterricht erscheinen (Schulbücher, Arbeitspapiere oder ähnliches), werden sie in der Analyse in ihrer Funktion zur Konstituierung des Wissens untersucht werden. „Das Vorwissen der *Lehrperson* ist im Unterricht aufgrund ihrer pädagogischen Autorität das *Sachwissen*“ (ebd., S.83). Es hat eine andere Funktion (denn der Lehrer entscheidet, welches Wissen Geltung erhält und welches nicht) und eine andere Qualität als das Vorwissen der Schüler. Das Vorwissen der Schüler kann zum Teil als Alltagswissen bezeichnet werden. Es entstammt aus dem „subjektiven Wissensvorrat“ (Luckmann 1981, S.94), dessen Elemente „in eigenständig deutenden Akten konstituiert worden sind“ oder „sozial abgeleitet wurden“ (ebd., S.97) und damit aus dem gesell-

---

[70] Ausgelassen wurde der Aspekt „Einstellungen der Schüler zum Unterricht“. Die mir vorliegenden Schülerinterviews erwiesen sich unter diesem Aspekt als wenig fruchtbar. Inhaltlich beziehen diese sich vor allem auf das Verständnis der Schüler vom Unterrichtsergebnis. Sie werden in den Analysen deshalb unter dem Aspekt der ‚Öffnung des Wissens‘ genutzt, in dem es gerade darum geht, unterschiedliche Interpretationen herauszuarbeiten (vgl. 3.2).

schaftlichen Wissensvorrat stammen. Es muß aber bedacht werden, daß sich im subjektiven Wissen nicht nur Alltagswissen befindet, das „die Alltagswirklichkeit betrifft“ (ebd., S.93), sondern auch „Elemente speziellen Expertenwissens“ (ebd., S.97). Letzteres wird nicht zuletzt durch Schule, hier: durch Mathematikunterricht, vermittelt.

Anschließend soll die Didaktik des Lehrers untersucht werden. Berufliche Sozialisation, Annahmen des Lehrers über einen ‚guten‘ Unterricht, Unterrichtsplanung und Lehrziele können weiteren Aufschluß über den Unterrichtsinhalt geben. Sofern vorhanden, können die Lehrerinterviews hier sehr hilfreich sein.

Der Lehrer ist weiterhin Repräsentant des Unterrichtsfaches und der Schule. Dies ergibt den nächsten Untersuchungsaspekt, in dem Lehrpläne und die Schule als Institution auf ihre Funktion für die Konstitution des Unterrichtsinhaltes befragt werden sollen.

Schließlich wird in einem letzten Schritt das oben entworfene Strukturgitter für den Mathematikunterricht herangezogen, um zu prüfen, auf welchen Ausschnitt der gesellschaftlichen Praxis der Unterricht verweist bzw. welche Aspekte ausgeklammert werden. Auf dieses Problem wurde bereits in Abschnitt 3.1 ausführlich eingegangen.

5 Unterrichtsanalysen

Gemäß der Tabelle auf Seite 74 folgen nun die Analysen von insgesamt 9 Unterrichtseinheiten, aus denen je eine Stunde ausführlich analysiert wird. Es werden vier Unterrichtseinheiten von Lehrer A herangezogen, wobei die Einheiten A_1 und A_2 im Abschnitt 5.1 zusammengefaßt werden, da sie parallel in einem A-Kurs und in einem C-Kurs stattfanden (vgl. 5.1). Es folgen eine Unterrichtseinheit bei Lehrer B (5.4) und zwei Unterrichtseinheiten bei Lehrer C (5.5 und 5.6), der als Referendar die Klasse von Lehrer B übernommen hatte. Alle Unterrichtsaufnahmen bei den Lehrern A bis C stammen aus den Jahren 1977 und 1978. In den letzten beiden Abschnitten (5.7 und 5.8) werden zwei Unterrichtseinheiten von 1998 analysiert, die bei den Lehrern D und E aufgenommen wurden.

Die einzelnen Analysen sind im wesentlichen gleich aufgebaut: Ich beginne mit der Paraphrase einer einzelnen Stunde, die bei der Analyse im Vordergrund steht. Es folgen die Analyse des im Unterricht erscheinenden Wissens, der Didaktik des Lehrers und des Fachs und der Schule. Abschließend wird untersucht, welches Bild von Mathematik im Unterricht konstituiert wird.

5.1 Die Unterrichtseinheiten A_1 und A_2

Im folgenden wird zunächst ausführlich die erste Stunde der ersten Unterrichtseinheit bei Lehrer A analysiert. Sie wurde im August 1977 aufgenommen und ist die erste Mathematikstunde nach den Sommerferien im A-Kurs der 6. Klasse eines Schulzentrums in Niedersachsen. Das gleiche gilt für die Stunde $A_2(1)$, bis auf den Unterschied, daß sie in einem C-Kurs[71] stattfand. Die Stunde $A_2(1)$ wird im folgenden zum Vergleich herangezogen, dies insbesondere im Abschnitt 5.1.4.2.

In beide Unterrichtseinheiten A_1 und A_2 wird das Themengebiet „Teiler und Vielfache" behandelt, in der jeweils ersten Stunde dieser Unterrichtseinheiten wird in das Thema eingeführt und der Begriff „Teiler" definiert.

Interviews gibt es zur vierten Stunde im A-Kurs $A_1(4)$ (Lehrerinterview) und zur ersten Stunde im C-Kurs $A_2(1)$ (Schülerinterview).

5.1.1 Paraphrase zu $A_1(1)$

Thema: Die Menge der Teiler einer Zahl aus N

1. Die drei Möglichkeiten, vorgegebene Zahlen in zwei Spalten zu sortieren.

Der Lehrer schreibt Zahlen ungeordnet an die Tafel, „die offensichtlich aus zwei Spalten einer Tabelle stammen … die aber eigentlich völlig durcheinandergewürfelt waren",

[71] In diesem Schulzentrum wurde in der 6. Klasse differenziert nach eher leistungsstarken (A-Kurs) und eher leistungsschwächeren (C-Kurs) Schülern.

die Schüler sollten sich die Zahlen „in Ruhe angucken". Spontan schlagen die Schüler vor: „gerade-ungerade", „ein- und zweistellige", „was durch 48 und was durch 35 geteilt werden könnte". Diese drei Möglichkeiten (A, B und C) notiert der Lehrer an der Tafel, die Schüler nennen die entsprechenden Zahlen zu den einzelnen Möglichkeiten.

2. Die Möglichkeit C: Die Teiler von 48 und 35.

„Die Möglichkeit C, das ist jetzt unsere einzige Möglichkeit, mit der wir … in diesem Augenblick arbeiten", die anderen Möglichkeiten wischt der Lehrer deshalb weg. Die Schüler sollen „ganz genau erläutern, was denn dahintersteckt". Man kann die 48 durch alle Zahlen in der oberen Spalte teilen. „Bei einer möglichen Geteiltaufgabe" steht die 48 vorne und alle anderen Zahlen nach dem Divisionszeichen, den Platz vor dem Divisionszeichen nennt man Divident, den dahinter Divisor und das Ergebnis einer solchen Aufgabe den Quotienten. Der Lehrer definiert: Die Zahlen, die an der Stelle des Divisors stehen können, nennt man auch Teiler. Er führt die Schreibweise T(48) ein; erinnert an die Mengenschreibweise und „wie man das liest"; erklärt, daß der Strich bei „4|48" heißt: „ist Teiler von". Die Schüler lesen „$5 \nmid 48$" als „…ist nicht Teiler von".

3. Stillarbeit: S.9, Aufg. 2[72]

„Bestimme alle Teiler von a) 18; b) 24; c) 27; d) 42; …"

4. Die Tauschaufgabe dient zum Auffinden aller Teiler.

Die Aufgabe 2a) wird ausführlich besprochen (T(18)). Nachdem eine Lösung vorgelesen wurde, fragt der Lehrer nach Lösungen mit einer anderen Reihenfolge. Einige werden genannt. Er fragt dann „wie man das am günstigsten machen kann, daß man kein Element vergißt".: „der Größe nach", „ich geh die ganzen Zahlen durch", „man kann auch immer die Tauschaufgabe nehmen". Das wird erläutert: $1 \cdot 18$, $2 \cdot 9$, $3 \cdot 6$. Die Faktoren kann man auch vertauschen. Der Lehrer fährt fort: „4 mal was ist 18? gibt es nicht", ebenso mit 5, „und dann käme wieder 6", dann „geht's also rückwärts. Dann kann man aufhören". Es folgt noch ein Vorschlag: „Wenn nun 6 … rauskäme, dann hat man 3 und 1 und 2".

5. Hausaufgaben: S.9, Aufg. 2, e-h; S.10, Aufg. 3

[72] Alle Aufgaben, sofern nicht anders vermerkt, stammen aus dem Schulbuch *Mathematik heute* (1971), herausgegeben von Athen/Griesel

5.1.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.1.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Das Schulbuch

Das Schulbuch „Mathematik heute 6“, herausgegeben von Athen und Griesel (1971), wird in dieser Stunde in erster Linie als Aufgabensammlung benutzt. Es kommt als Wissensquelle daher eigentlich nicht in Frage. Die Vorgehensweise im Unterricht unterscheidet sich in einigen Punkten allerdings von der des Schulbuchs. Es soll deshalb an dieser Stelle etwas näher betrachtet und dem im Unterricht erscheinenden Wissen gegenübergestellt werden, um auf die Differenzen aufmerksam zu machen.

Die erste Unterrichtseinheit A_1 (die ersten vier Unterrichtsstunden zu Beginn des 6. Schuljahres im August 1977) behandelt das Thema „Teiler- und Vielfachenbeziehung“. Dies bildet den ersten Abschnitt des ersten Kapitels des Schulbuches. Hier wird in dieses Thema anhand von vier Beispielen eingeführt, wobei die ersten beiden eher realitätsbezogen, die Beispiele drei und vier mathematisch orientiert sind.

Beim ersten Beispiel besteht die Aufgabe darin, 20 Schüler im Sportunterricht in gleich große Riegen aufzuteilen und herauszufinden, wieviel Möglichkeiten der Sportlehrer hat. Das zweite Beispiel wirft das Problem auf, 28 quadratische Platten zu Rechtecken auszulegen. Ebenfalls schließt sich hier die Frage an, wieviel und welche verschiedenen Möglichkeiten es gibt. An diesen Einführungsbeispielen wird der Begriff „Teiler“ und „Vielfaches“ erläutert. Beide Begriffe werden gleichzeitig eingeführt, und es wird schon hier auf die Bedeutungsgleichheit der Aussagen „a ist Teiler von b“ und „b ist Vielfaches von a“ aufmerksam gemacht.

In den nächsten beiden Beispielen werden mit Hilfe von Multiplikationsmaschinen[73] die Vielfachenmenge sowie die Teilermenge hergeleitet. Hier wird (allerdings als Zusatzstoff gekennzeichnet) außerdem der Begriff der komplementären Teiler vorgestellt. Am Ende dieser knapp dreiseitigen Einführung werden noch einmal die wichtigsten Begriffe und Schreibweisen („a ist Teiler von b: a|b“ „Teilermenge von a: T(a)“) mit konkreten Zahlenbeispielen zusammengefaßt und anschließend, rot hinterlegt, der Begriff des Teilers mathematisch korrekt definiert: „Zwischen zwei von Null verschiedenen Zahlen kann die besondere Beziehung ‚ist Teiler von’ bestehen. Eine Zahl a ist Teiler einer Zahl b, geschrieben a|b, wenn man b als Produkt zweier natürlicher Zahlen schreiben kann, wobei ein Faktor a ist.“(Mathematik heute 6, S.9). Analog folgt die Definition für „ist nicht Teiler von“. Der zweite Teil dieser Definition ist als eine erste Erweiterung gekennzeichnet. Von den anschließenden Aufgaben (insgesamt 18) beziehen sich zwei direkt auf die Einführungsbeispiele (Riegenbildung und Plattenlegen), die übrigen sind eher abstrakter Natur (Bestimmung von Teiler- und Vielfachenmengen, mit Hilfe von

[73] Mit ‚Multiplikationsmaschinen‘ werden Diagramme bezeichnet, die die Multiplikation zweier Zahlen graphisch darstellen.

Multiplikationsmaschinen Teilerbeziehungen nachweisen, Obermengen von gegebenen Mengen und wahre oder falsche Aussagen bestimmen).

Die Art der Aufgaben entspricht den im Lehrerheft angegebenen Lernzielen (vgl. Lehrerheft, S.8), in denen keinerlei Realitätsbezüge erscheinen. Die beiden ersten Ziele, die hier genannt werden, sind das Erfassen von „ist Teiler bzw. Vielfaches von“ als eine „besondere Relation zwischen natürlichen Zahlen“ (ebd.). Die Schüler sollen beim Auffinden von Teilern oder Vielfachen einer Zahl „nicht mehr an eine Produktbildung denken, sondern nur an die Relation zwischen den Zahlen. Hier erweisen sich die Multiplikationsmaschinen als wertvolle Hilfe.“ (ebd.)

Welche Rolle spielt das Medium Buch im Unterricht und bei der Konstitution des Unterrichtsinhalts? Der Einstieg, den der Lehrer zu Beginn der ersten Stunde wählt, entspricht nicht den Beispielen des Lehrbuches. Sein ‚Problem‘ ist von vornherein mathematisch ausgerichtet, es geht darum, Zahlen auf verschiedene Art und Weise in zwei Spalten zu sortieren.[74] Dieser Einstieg, der sehr schnell auf das gewünschte Ergebnis führt (sortieren nach den Teilern von 48 und 35), hat allerdings Folgen für den weiteren Unterrichtsverlauf. Wie auch das Mathematikbuch will der Lehrer im zweiten Teil der Stunde eine Definition des Teilerbegriffs erarbeiten. Diese aber unterscheidet sich stark von der (zugegebenermaßen sehr wissenschaftlich ausgedrückten, aber mathematisch korrekten) Definition im Buch.

Nachdem geklärt wird, wo „bei einer möglichen Geteiltaufgabe“ die Zahl 48 und ihre Teiler stehen und wie diese Stellen heißen, faßt der Lehrer zusammen: „Ja, und uns geht es ja um diese Zahlen und die Zahlen können alle an Stelle des Divisors stehen und die ham nun noch’n anderen Namen … und zwar nennt man diese Zahlen auch Teiler“. Während das Buch also die Teilerrelation über den in der Algebra üblichen Weg der Multiplikation definiert, wählt der Lehrer den Weg über die Division. In mathematischer Fachsprache würde seine Definition also lauten: a ist Teiler von b, wenn es eine Zahl c aus N gibt, so daß b geteilt durch a gleich c ist, oder: wenn b geteilt durch a wieder eine natürliche Zahl ist (a, b ungleich Null).[75] Konsequenzen hat diese Definition, die sich direkt aus dem vom Lehrer gewählten Anfangsproblem ergibt, vor allem im letzten Teil der Stunde.

In diesem fünften Unterrichtsabschnitt nämlich, die sich an die Besprechung der Übungsaufgabe (Teilermengen bestimmen) anschließt, fragt der Lehrer nach „einer ande-

---

[74] Inwieweit die Probleme Riegenbildung und Plattenverlegung, wie sie im Buch erscheinen wirklich realitätsbezogen sind, oder ob sie nicht ebenso wie das Problem des Lehrers der mathematischen Ebene zuzuordnen sind, soll an dieser Stelle zunächst offen bleiben (vgl. 5.1.5)

[75] Diese Definition ist nicht falsch. Unter gruppentheoretischen Gesichtspunkten allerdings ist N bzgl. der Multiplikation eine Halbgruppe, die Verknüpfung „:“ ist in dieser Halbgruppe gar nicht definiert, weil N bzgl. der Division nicht abgeschlossen ist. Somit kann der Begriff „Teiler“ algebraisch korrekt so nicht definiert werden. Läßt man aber die (seit der Grundschule bekannte) Division von natürlichen Zahlen gelten unter der Bedingung, daß sie nur möglich ist, wenn „sie aufgeht“, d.h. wenn wieder eine natürliche Zahl herauskommt, so kann man auch mit Hilfe der Division den Teiler einer natürlichen Zahl definieren.

ren Reihenfolge“ die Teiler zu ordnen. Er will auf einen „Trick“ hinaus, „wie man das am günstigsten machen kann, daß man kein Element vergißt.“ Daraufhin antwortet Susi: „Man kann auch immer die Tauschaufgabe da hinschreiben“ und meint damit offensichtlich, die jeweils komplementären Teiler der Zahl zusammen aufzuschreiben. Im Unterrichtsbeispiel, in dem die Teiler von 18 gesucht werden, hieße das: 1 und 18, 2 und 9, 3 und 6, denn, und das wird von einem Schüler dann sinngemäß auch so gesagt, das Produkt dieser Zahlen ist jeweils 18. Hier wird von den Schülern und anschließend auch vom Lehrer die Definition des Schulbuchs verwendet, ohne daß er dies ausdrücklich sagt. Denn daß zwei Faktoren, deren Produkt jeweils 18 ergibt, gleichzeitig auch Teiler von 18 sein müssen, wurde im Unterricht bisher nicht erwähnt. Es bleibt auch ungewiß, ob das allen Schülern, mit Ausnahme von Susi vielleicht, klar wird. Denn es ist der Lehrer, der die Begründung, was diese Teilerpaare miteinander zu tun haben, fortführt:

> „So … kann man sicher sein, daß man nichts vergißt. Das nächste wäre jetzt: 4 mal was ist 18? Gibt es nicht. 5 mal was ist 18, gibt es auch nicht und dann käme wieder 6 mal und dann ginge es mal 3 und dann geht’s wieder rückwärts. Dann kann man aufhören. Dann hat man alle Elemente gefunden.“

Es wird also an keiner Stelle explizit gesagt, daß die einzelnen Faktoren Teiler sind, weil das Produkt 18 ergibt. Es wird scheinbar angenommen, daß das so sein muß. Aufgrund der im Unterricht eingeführten Definition des Teilers ist diese Tatsache so leicht nicht einzusehen. Ich vermute, daß die Schüler beim Begriff des Teilers hauptsächlich an das Dividieren denken, so wie es die Definition und die Erarbeitung durch das Beispiel ‚Zahlen sortieren‘ nahegelegt haben. Dafür spricht auch die Tatsache, daß die Schüler bei der Begründung der „Tauschaufgabe“ Schwierigkeiten haben, diesen Zusammenhang auszudrücken. Sie sehen zwar, daß das Produkt der Faktoren jeweils 18 ist, daß sie deswegen aber Teiler sein müssen, sagen sie nicht, und auch der Lehrer geht explizit nicht darauf ein.

Zusammenfassend: Der Lehrer hält sich insoweit an die Intentionen des Schulbuches, als sein Einstieg ebenfalls ‚problemorientiert‘ ist, auch wenn das von ihm gewählte Einstiegsbeispiel ein rein mathematisches Problem ist. Er legt viel Wert auf eine korrekte Mengenschreibweise und sicheres Lesen solcher Ausdrücke, deren Schulung und Verwendung ebenfalls ein Ziel des Unterrichtswerkes ist. Sein Einstiegsproblem und die im Unterricht erarbeitete Definition entsprechen allerdings nicht denen des Buches. Seine Definition ist mathematisch nicht ganz exakt, sie ergibt sich aber zwangsläufig aus seinem Anfangsbeispiel. Bei der Begründung der „Tauschaufgabe“ wäre die Produktdefinition sehr hilfreich gewesen bzw. wäre dies ein guter Anlaß gewesen, sie zusätzlich einzuführen. Der Zusammenhang von Faktoren eines Produkts und der Teilerrelation wird so nicht deutlich. Er wird implizit zwar benutzt, aber es muß bezweifelt werden, ob er tatsächlich auch so verstanden wird.[76] Verständlich wird der Umgang mit dem

[76] Zwei Stunden später geht der Lehrer explizit auf die Definition im Buch ein. Die Schüler sollen sie lesen und Fragen dazu stellen. Sie haben ganz offensichtlich große Schwierigkeiten mit der Formulie-

Schulbuch und die Einführung einer eigenen Definition durch einen Kommentar des Lehrers am Ende der dritten Stunde, in der große Schwierigkeiten beim Verständnis der Schulbuch-Definition auftreten (s. Fußnote 76): „Eigentlich ging es bloß darum, den Beweis dafür zu erbringen, daß dieses Buch nicht viel taugt als Schülerarbeitsbuch, weil man selbst wenig damit anfangen kann. Ich fürchte, der Beweis ist erbracht“.

Das Sachwissen des Lehrers und das Vorwissen der Schüler

Neben dem Unterrichtsmedium „Schulbuch“ können noch zwei andere Wissensquellen im Unterricht auftauchen: das Wissen von Lehrer und Schülern, wobei das des Lehrers eher als Sachwissen (er besitzt die pädagogische Autorität) und das der Schüler als zunächst nicht weiter zu identifizierendes Vorwissen zu bezeichnen ist. Letzteres kann „Alltagswissen“ genauso gut sein wie „Schulwissen“, also Wissen, das zuvor im Unterricht erworben wurde. Wie wird das Wissen dieser Unterrichtseinheit, das sich in den Unterrichtsergebnissen manifestiert, aus diesen Wissensquellen konstituiert? Dieser Frage soll hier nachgegangen werden. Wiederum soll die erste Stunde dieser Einheit ausführlicher analysiert werden und die nachfolgenden Stunden in Einzelfällen zur Erläuterung oder Ergänzung herangezogen werden.

Einen ersten Zugang zur Herkunft des Wissens verschafft man sich durch die Betrachtung der numerischen Auswertung der Sprechakte von Lehrer und Schülern. Die folgenden Tabellen zeigen die Verteilung der Sprechakte von Schülern und Lehrer während der ganzen Stunde[77].

Spielzüge	lern	uorg	wiss	Summe
AUFF			1	1
FORT	8	1	17	26
REAG	5	1	39	45
Summe	13	2	57	72

Tabelle 1 : Sprechakte Schüler aus $A_1(1)$

Spielzüge	lern	uorg	Usys	wiss	Summe
AUFF	6	28		14	48
FORT	25	9	1	10	45
STRK	4	1		2	7
Summe	35	38	1	26	100

Tabelle 2: Sprechakte Lehrer aus $A_1(1)$

rung. Der Lehrer geht mit ihnen Satz für Satz durch und faßt schließlich zusammen: „… und mit diesen Worten da is’ nichts anderes gesagt, als daß immer dann eine Zahl Teiler sein muß von einer anderen Zahl, wenn einer der Faktoren dieser anderen Zahl auch der Teiler ist.“ Auch diese Zusammenfassung ist mißverständlich und trifft nicht ganz die Definition im Buch. Leicht hätte man hier noch einmal die „Tauschaufgabe“ als Beispiel heranziehen können. Daß auch an dieser Stelle die Aussage der Definition nicht verständlich wird, kann daraus gefolgert werden, daß kein Schüler anschließend in der Lage ist, sie auf eine Definition für „ist Vielfaches von“ zu übertragen.

[77] Ausgelassen wurde allerdings der erste Teil der Stunde, in dem es – da es die erste Stunde nach den Sommerferien und ein neu zusammengesetzter A-Kurs ist – allgemein um den Unterschied zwischen A- und C-Kursen geht. Siehe dazu auch 5.1.4.2.

Betrachtet man zunächst die Sprechakte der Schüler, so fällt auf, daß mit Abstand die häufigsten Äußerungen reagierende *wiss*-Äußerungen sind (39 von insgesamt 72). Da es praktisch keine auffordernden Sprechakte von Schülern gibt, handelt es sich hierbei um Reaktionen auf Aufforderungen des Lehrers. So liegt die Vermutung nahe, daß sich das Wissen im Unterricht zu einem großen Teil aus dem Vorwissen der Schüler konstituiert, das als Reaktion auf Lehrer-Aufforderungen in den Unterricht eingebracht wird. Dieses Vorwissen ist weiterhin vermutlich Schulwissen, denn als *wiss*-Sprechakte wurden diejenigen Äußerungen codiert, in denen mathematische Begriffe in irgend einer Weise vorkommen. Jedenfalls wurde an keiner Stelle ein *lebensweltlicher* Gehalt identifiziert, so daß dadurch ebenfalls die Vermutung gestützt wird, daß der Erfahrungsbereich, auf den sich dieses Wissen bezieht, vor allem der Mathematikunterricht ist. Zum Beispiel, und damit gehen wir zu einer näheren inhaltlichen Betrachtung über: Wissen, wie man Zahlen sortieren kann; Wissen, wie man die Stellen in einer Geteiltaufgabe nennt.

Es gibt aber auch Stellen im Unterricht, bei denen eine Identifizierung als Schulwissen nicht so eindeutig ist, obwohl sie formal als *wiss*-Sprechakte codiert wurden: Auf die Frage des Lehrers beispielsweise, wie man $5 \nmid 48$ liest, antwortet ein Schüler spontan: „Is' kein Teiler von" und ein anderer: „Is' nich Teiler von", was vom Lehrer wiederholt und damit legitimiert wird. Das Vorwissen besteht hier vermutlich darin, daß die Schüler (aus dem Mathematikunterricht?) wissen, daß ein Durchstreichen von Symbolen (in der Mathematik) eine Verneinung der Aussage bedeutet. Dieses Prinzip gilt natürlich auch in anderen (alltäglichen) Lebenszusammenhängen. Wie gesagt, es kann hier keine eindeutige Zuordnung getroffen werden. Wichtig ist an dieser Stelle vielleicht nur festzustellen, daß ein möglicher Bezug zur Alltagswirklichkeit der Schüler nicht explizit hergestellt wird.

Ähnlich unsicher muß eine Zuordnung des Vorwissens der Schüler im letzten Unterrichtsabschnitt bleiben, wo es um die ‚Tauschaufgabe' geht, die im letzten Abschnitt schon zur Sprache kam. Der „Trick", die Zahlen durch die „Tauschaufgabe" zu ordnen, kann nicht aus der Definition der Teilerbeziehung, wie sie in dieser Stunde formuliert wurde, gefolgert werden. Es ist möglich, daß Susi in den vorangegangenen Übungen dieses Prinzip zufällig entdeckt hat. Es bleibt aber insgesamt unklar, ob sie mit dem Begriff ‚Tauschaufgabe' wirklich das Prinzip meint, das der Lehrer im Sinn hat. Sie nennt zwar die Zahlenpaare, die miteinander multipliziert 18 ergeben und genau die Teiler dieser Zahl sind, aber was da nun ‚getauscht' werden soll und warum, wird nicht deutlich. Der Schüler, der diesen Vorschlag von Susi aufnimmt und zu erklären versucht, hält sich an das von ihr gewählte Wort und erläutert dazu:

> „ … also sie hat 1 mal 18 genommen und dann hat se gleich alle beiden Teiler aufgeschrieben. Und bei 2 mal 9 … Ja, dann hat se wieder 2 mal 9, sind 18, denn wieder 9 mal 2, is' auch 18 und 3 mal 6 is' 18 und 6 mal 3 is' auch 18."

Die ‚Tauschaufgabe' von Susi scheint für ihn damit erklärt zu sein, den Zusammenhang von Faktoren und Teilern hat er damit allerdings nicht erfaßt. Der Lehrer führt seine

Überlegungen anschließend fort, er gibt ihnen durch sein Sachwissen erst den Sinn, der beabsichtigt war (s.o.).

Am zweithäufigsten treten bei den Schülern fortführende *wiss*-Äußerungen auf. Dies ist ein Zeichen dafür, daß es durchaus Stellen im Unterricht gibt, in denen Schüler von sich aus, als eine Fortführung auf eine vorhergehende Schüler- oder Lehreräußerung, jedenfalls nicht direkt auf eine Aufforderung des Lehrers, ihr Wissen in den Unterricht einbringen.

Betrachtet man die Verteilung der Schüleräußerungen auf die einzelnen Unterrichtsabschnitte, so zeigt sich ein relativ konstantes Bild. Die entsprechenden Tabellen werden daher nicht gesondert aufgeführt. Wie in der Verteilung über die ganze Stunde, treten in jedem Abschnitt am häufigsten reagierende *wiss*-Äußerungen auf, und zusammen mit den fortführenden *wiss*-Äußerungen bilden sie durchgängig den größten Anteil an Sprechakten.

Die entsprechenden Tabellen der Lehreräußerungen zeigen ein nicht ganz so einheitliches Bild. In Tabelle 2 fällt zunächst auf, daß auffordernde und fortführende Spielzüge annähernd gleich verteilt sind, ebenso wie *lern-* und *uorg*-Äußerungen. Den größten Anteil bilden die auffordernden *uorg*-Äußerungen, den nächst kleineren die fortführenden *lern-* Äußerungen. *Wiss*-Äußerungen machen insgesamt nur ca. ein Viertel aller Sprechakte aus.

Die Aufforderungen *unterrichtsorganisatorischer* Art sind meistens namentliche Aufforderungen an einzelne Schüler oder organisatorische Hinweise zur Bearbeitung einer Aufgabe und ähnliches. Der Lehrer *organisiert* somit den Verlauf des Unterrichts mehr als daß er inhaltliche, direkt auf den Gegenstand bezogene Anweisungen gibt. Dies entspricht der oben aufgestellten Vermutung, daß sich das Wissen zum großen Teil aus dem Vorwissen der Schüler konstituiert. Es gibt jedoch auch Stellen im Unterricht, in denen der Lehrer sein Wissen direkt in den Unterricht einbringt, es sind dies vor allem die fortführenden *wiss*-Äußerungen (insgesamt 10). Schaut man genauer hin, wo diese Sprechakte auftauchen, so sieht man, daß die Hälfte dieser Äußerungen im zweiten Unterrichtsabschnitt auftauchen. Das ist kein Zufall, denn hier ist es der Lehrer, der die Definition und die Schreibweise von „ist Teiler von“ einführt. Eine andere entscheidende Stelle befindet sich im letzten Unterrichtsabschnitt, in dem es um die ‚Tauschaufgabe‘ geht. Erst durch sein Wissen kommt der eigentliche „Trick“ voll zur Geltung:

> So is’ / kann man sicher sein, daß man nichts vergißt. Das nächste wäre jetzt: 4 mal was ist 18? Gibt es nicht. 5 mal was ist 18, gibt es auch nich, und dann käme wieder 6 mal und dann ginge es mal 3 und denn geht´s wieder rückwärts. Dann kann man aufhören. Dann hat man alle Elemente gefunden.

Daß er im übrigen nur auf diese eine Möglichkeit, alle Teiler zu finden, hinaus wollte, wird auch daran deutlich, daß ein anschließender Vorschlag eines Schülers, der durchaus sinnvoll ist, vom Lehrer nicht mehr aufgenommen wird und damit auch keine Geltung erhält (vgl. Paraphrase, Abschnitt 4).

Fragt man nun nach den Geltung verbürgenden Instanzen, so sind besonders die fortführenden *lern*-Äußerungen des Lehrers aufschlußreich. Es wurde oben bereits festgestellt, daß die so codierten Sprechakte neben den *unterrichtsorganisatorischen* Aufforderungen am häufigsten auftauchen. Bei genauerem Hinsehen verbergen sich dahinter Bestätigungen von Schülerantworten, eine direkte Zurückweisung einer Antwort findet sich während der ganzen Stunde nicht. So ist es fast immer der Lehrer, der durch seine Bestätigung die Geltung für das Wissen verbürgt, das Vorwissen der Schüler erhält immer erst durch die Bewertung des Lehrers seine Gültigkeit.[78] Denn auch wenn der Lehrer nichts sagt und nur einen anderen Schüler aufruft, scheint das für die Schüler zu bedeuten, daß ihre Antwort noch nicht der Vorstellung des Lehrers genügt oder daß sie später kommentiert und bewertet, d.h. legitimiert wird oder nicht (ein Beispiel dazu findet sich im ersten Unterrichtsabschnitt, in dem Möglichkeiten für das Sortieren von Zahlen gesucht werden). In dieser Stunde jedenfalls findet sich kein Hinweis darauf, daß ein Schüler allein die Geltung von Wissen verbürgt. Der Lehrer bezieht sich allerdings an einigen Stellen auf einen allgemeinen Geltungsanspruch des von ihm legitimierten Wissens. Mit Worten wie „schreibt man", „nennt man", „liest man" macht er deutlich, daß nicht nur er allein die Geltung verbürgt, sondern daß es allgemeines Wissen ist, letztendlich ist es die Wissenschaft Mathematik, die für dieses Wissen einsteht.

5.1.2.2 Öffnung des Wissens

Hier soll der Frage nach dem „Aufbrechen vorgegebener oder autorisierter Bedeutungen" und der „Verdeutlichung des Konstruktionscharakters des im Unterricht herangezogenen und verbindlich gemachten Wissens" (Wierichs 1989, S.86) nachgegangen werden. Das Aufbrechen von Bedeutungen, die Geltung beanspruchen, kann in sogenannten „Bruchstellen" deutlich werden. Im letzten Abschnitt wurde herausgearbeitet, daß das Wissen durch den Lehrer kraft seiner pädagogischen Autorität seine Geltung erhält. Gibt es nun im Unterricht Anzeichen dafür, daß diese Geltungsansprüche in Frage gestellt werden, daß unterschiedliche Interpretationen aufeinandertreffen und wenn ja, wie wird damit im Unterricht umgegangen?

In dieser ersten Unterrichtsstunde fällt zunächst auf, daß der Unterricht auf den ersten Blick sehr reibungslos abläuft. Es treten keine offensichtlichen Bruchstellen auf. Möglicherweise könnte der letzte Abschnitt, die ‚Tauschaufgabe' als eine solche bezeichnet werden, da hier vermutlich Schüler und Lehrer die Bedeutung dieser Antwort anders interpretieren, worauf oben schon mehrfach eingegangen worden ist. Es ist aber allein schon deswegen nicht zu entscheiden, weil die Bedeutung nicht ausgehandelt wird. Es

[78] Nach Voigt ist dies ein typisches Phänomen in der unterrichtlichen Interaktion eines fragend-entwickelnden Unterrichts: „Vom Schüler wird die Übernahme der Verantwortung, für die Qualität (den Wahrheitsgehalt) seiner Aussage geradezustehen, nicht erwartet" (Streek 1979, zitiert bei Voigt 1984, S.31). „Erst die Bewertung der eigenen und anderer Antworten durch den Lehrer ermöglicht dem Schüler retrospektiv die offiziell geltende Bedeutung der Anforderungen und auch der eigenen Antwort zu erfassen" (Voigt 1984, S.31).

wird im Unterricht nicht ersichtlich, ob und wenn ja, welche Bedeutung die Schüler dieser Antwort zuschreiben, ob sie sich tatsächlich von der des Lehrers unterscheiden. Zu dieser Stunde gibt auch kein Schülerinterview, das darüber Aufschluß geben könnte.

Nun könnte man unterstellen, daß, weil keine Bruchstellen auftauchen, Schüler und Lehrer sich „verstehen" und das verbindlich gemachte Wissen teilen sowie dessen Geltungsansprüche akzeptieren. Ich möchte im folgenden einige Überlegungen anschließen, die bei einer abschließenden Bewertung dieses Aspektes mit berücksichtigt werden sollten.

1. Wie oben erwähnt, ist es in dieser Stunde der Lehrer, der die Geltung des Wissens verbürgt, teilweise mit Bezug auf allgemein geteiltes Wissen, das die Wissenschaft Mathematik bereitstellt. Dieses Wissen in Frage zu stellen, das, wie es für die Mathematik charakteristisch ist, so eindeutig daherkommt, dürfte für die Schüler sehr schwierig sein. Wollten sie Kritik äußern, müßten sie es mit der Autorität des Lehrers und der Mathematik als Wissenschaft aufnehmen. Ein Beleg für den Einfluß der Geltung verbürgenden Instanzen auf die Öffnung des Wissens ist eine Unterrichtssequenz aus der dritten Stunde, in der das Schulbuch diese Instanz ist. Es tritt sicherlich auch mit wissenschaftlichem Anspruch auf und dennoch ist es leichter zu kritisieren: Das Thema dieser Sequenz ist die Definition aus dem Buch (s.o. S. 84). Die Schüler äußern hier ganz offen ihre Unzufriedenheit und ihre Verständnisschwierigkeiten mit diesem Text. Das können sie auch und es hat keine negativen Konsequenzen für sie, sie greifen damit ja nicht den Lehrer an. Es ist nur eine Vermutung, aber es ist zu bezweifeln, ob die Schüler diesen Text genauso offen kritisiert hätten, wenn er dem Munde des Lehrers entstammt hätte.

2. Ein anderer Grund mag in der Natur eines fragend-entwickelnden Unterrichts in Mathematik liegen. Voigt hat in seiner Analyse ein Erarbeitungsprozeßmuster identifiziert, das auch in dieser ersten Stunde, insbesondere bei der „Tauschaufgabe", wiederzufinden ist. Dieses Interaktionsmuster zeichnet sich durch drei Phasen aus (Voigt 1984, S.128, siehe auch Kapitel 3.2):

   1. „Nennung der offenen Aufgabe durch den Lehrer, erste Schülerangebote und vorläufige Einschätzung durch den Lehrer". Hier: Die Frage des Lehrers: „Hat jemand die Elemente dieser Menge anders geordnet?", daraufhin einige Antworten, unter anderem „der Größe nach".

   2. „Kanalisierte Entwicklung der endgültigen Lösung". Hier: Der Lehrer schränkt die Aufgabe ein auf einen „Trick", „wie man das am günstigsten machen kann, daß man kein Element vergißt". Daraufhin die Antwort von Susi: „Tauschaufgabe".

   3. „Interpretation des Vorgehens". Hier: „Was haben denn diese … Zweiergruppen miteinander zu tun", Erläuterung eines Schülers und anschließende Fortführung durch den Lehrer.

   In Kapitel 3.2 wurde bereits darauf hingewiesen, daß dieses Interaktionsmuster mit dazu beitragen kann, daß unterschiedliche Interpretationen nicht thematisiert werden.

3. Ein weiterer ganz praktischer Grund, ist die Tatsache, daß dieser letzte Unterrichtsabschnitt bereits nach dem Pausengong stattfindet. Vielleicht sind Schüler und Leh-

rer froh, die Stunde endlich abschließen zu können. Die Thematisierung eines möglichen Mißverständnisses hätte diese Stunde unnötig in die Länge gezogen.

Wie gesagt, es kann nicht eindeutig entschieden werden, ob die Unterrichtssequenz „Tauschaufgabe“ als eine Bruchstelle zu interpretieren ist. Wenn ja, so wird sie nicht aufgedeckt bzw. thematisiert, so daß eine geteilt geltende Interpretation möglich wäre. Gründe dafür habe ich in den obigen drei Punkten zu geben versucht.

Ich möchte nun die zweite Stunde ($A_1(2)$) heranziehen, in der, wie ich meine, mindestens zwei explizite Bruchstellen auftauchen, und untersuchen, wie grundsätzlich mit solchen Stellen im Unterricht umgegangen wird.

In dieser Stunde wird in das Thema „Vielfaches“ und „Vielfachenmengen“ eingeführt, der Begriff des ‚Vielfachen‘ wird als Umkehrung der Relation ‚ist Teiler von‘ definiert. Nachdem der Begriff und Schreibweisen geklärt sind, leitet der Lehrer eine Übungsphase ein. Die Vielfachenmenge der Zahl 7 soll bestimmt werden. Ein Schüler beginnt: V(7) = {14, 7, 21, …}. Daraufhin entwickelt sich folgendes Unterrichtsgespräch (nach Inhaltsangabe):

S	7 ist doch nicht Vielfaches von sich selber, das gibt’s doch nicht.
S	Doch!
…	
Peter	7 ist doch das Vielfache von 7, denn 1 mal 7 ist ja 7, genauso wie 2 mal 7 14 ist.
Gisela	Ja, aber 1 ist doch nicht viele, sondern eben nur 1.
L	Dagmar.
Dagmar	Ist ja denn nur 1 mal und nicht mehrere mal.
S	Bei Vielfaches glaubt man ja immer, daß es mehrere Male ist, denn 1 ist ja eben nur einmal und nicht mehrere Male.
L	Ja, das ist ein Problem, ist nun 7 das Vielfache von 7 oder beginnen die Vielfachen erst bei 14? …
L	Vielleicht kann uns das, was wir gestern kennengelernt haben – ‘ist Teiler von’ – vielleicht kann uns das da auch ein bißchen weiterhelfen zu entscheiden, ob nun 7 hier reingehört oder nicht. …
S	7 geteilt durch 7 , das geht ja auch. 7 ist ein Teiler davon, also ist 7 auch ein Vielfaches von 7, denn sonst könnte es ja auch nicht Teiler von 7 sein.

Diese letzte Äußerung wird als Erklärung schließlich akzeptiert, es wird noch ein wenig erläutert, was das genau heißen soll, aber am Ende steht die Begründung:

L	… Wenn man jetzt davon ausgeht – und das wußten wir ja schon – 7 ist Teiler von 7, dann muß ja auch die Umkehrung stimmen. … Also: 7 ist Element dieser Menge.

Damit ist dieser Unterrichtsabschnitt abgeschlossen.

Hier treffen ganz offensichtlich zwei Denkweisen aufeinander: Das Alltagsdenken, in dem es logisch erscheint, von „Vielfach“ erst ab „Zweifach“ zu sprechen, und das mathematische Denken, in der „Einfach“ schon zu „Vielfach“ gehört, da sonst die Widerspruchslosigkeit gefährdet würde. Vom Lehrer wird die Interpretationsdifferenz ausdrücklich thematisiert, er verweist auf ‚das, was wir gestern kennengelernt haben‘ und, eher implizit, auf die korrekte Definition von ‚Vielfaches‘ als Umkehrung der Teilerrelation. Es wird also die Mathematik als die in diesem Fall Geltung verbürgende Instanz deutlich in Anspruch genommen. Ich vermute allerdings, daß das Wissen nicht in dem Sinne geöffnet wurde, daß man sich auf einen Konsens wirklich geeinigt hätte. Anlaß zu dieser Vermutung ist das Interview, das anschließend mit einigen Schülern geführt wurde. Nach Betrachtung der Videoaufnahme der oben genannten Stelle, entwickelt sich das folgende Gespräch:

Claudia	… Ich glaub das immer noch nicht irgendwie.
Gisela	Ich glaub das auch nicht.
Torsten	Das is' ja genau das Gegenteil von 'Teiler von'.
Gisela	Ja, aber guck mal, das Vielfache, das bedeutet, daß mehr da ist, das weiß ja wohl jeder, daß es öfters is', ne.
Torsten	Du, Gisi, Gisi, nicht Vielfaches, … eins ist doch schon Vielfaches, ist doch schon einmal da.
Gert	Gisi, sonst wäre ja 7 auch kein Teiler von 7.
Gisela	Naja, das hat er uns auch erklärt, aber / kapier ich trotzdem nicht.

Gisela sieht nicht ein, warum in der Mathematik das Wort ‚Vielfach' anders zu interpretieren sei als im Alltag, während Torsten darin kein Problem sieht. Er scheint zu verstehen, daß dies eine notwendige Verallgemeinerung darstellt, ohne die der Begriff ‚Vielfaches' nicht als Umkehrung des Teilerbegriffs verstanden werden kann. Diese Notwendigkeit aber, den Begriff mathematisch anders zu interpretieren als im alltäglichen Sprachgebrauch, wird im Unterricht nicht thematisiert. Dadurch wird nicht deutlich, daß die mathematische Interpretation nur eine unter anderen ist. Die alltägliche Bedeutung von ‚Vielfaches' wird als falsch zurückgewiesen, obwohl sie unter anderen Voraussetzungen durchaus sinnvoll ist. Die mathematische Begründung wird von den Schülerinnen zwar angenommen, aber ‚kapiert' haben es zumindest Gisela und Claudia nicht. Es ist für sie nach wie vor keine logische Argumentation.

Im nächsten Unterrichtsabschnitt findet man eine weitere explizite Bruchstelle, die zwei Interpretationsdifferenzen in sich birgt, wobei eine nur aus dem Schülerinterview ersichtlich wird.

An der Tafel stehen die Vielfachenmengen von vier (V(4)) bzw. von acht (V(8)) mit den ersten drei bzw. vier Elementen. Der Lehrer fragt dann, ob man die letzte Menge „auch noch anders bezeichnen könnte, nicht nur V(8), sondern auch noch anders." Es kommen Vorschläge von den Schülern: V(2), V(4) oder auch V(1). Das Ziel des Lehrers ist es herauszuarbeiten, daß V(4) die Obermenge von V(8) ist. Die Frage wird also konkretisiert: Man muß „das jetzt begründen, weshalb das V(1), V(2) und V(4) sein kann, oder aber man muß den Gegenbeweis antreten, wieso das nicht sein kann." Zu der Beziehung zwischen den Mengen V(8) und V(4) sagt Torsten dann: „Das ist immer die Hälfte von dem Ergebnis." und wenig später Mark: „Bei V(8) ist immer das doppelte von V(4) drin." Auf Torstens Antwort geht der Lehrer nicht ein, bei Mark kommentiert er: „Die Mengen sind hier nicht zu Ende, da kommen ja noch unendlich viele Elemente. Deswegen weiß ich nicht, ob das immer das doppelte ist." Neben anderen Antworten, die der Lehrer aufnimmt und rephrasiert („Alles, was in V(8) ist, ist auch in V(4)") kommen von Matthias und Michael ähnliche Antworten wie von Torsten und Mark: „Das von V(4) ist immer die Hälfte von V(8)“ und „V(4) ist die Hälfte von V(8)“. Aus der Sicht des Lehrers ist hier ein Mißverständnis aufgetreten, das geklärt werden sollte:

> „Das wollen wir mal ausräumen mit der Hälfte, was hier so rumgeistert. Nehmen wir doch einfach ’ne andere Darstellungsform für Mengen. Gibt’s noch andere Möglichkeiten, Mengen darzustellen? … Ihr kennt doch alle die Möglichkeiten, ’n Mengenbild zu zeichnen.“ – Das wird an der Tafel für die beiden Mengen gemacht. – „Und ich glaube, das ist’n Beispiel zu sehen, daß hier nirgendwo von Hälfte zu sprechen ist. Allenfalls, wenn man diesen Kreis doppelt so groß macht, denn kann man von der Hälfte vom doppelten reden. Aber sonst ist nichts mit Hälfte und doppelt. – Da sind genausoviel Elemente drin wie dort, und man müßte ja bis ins Unendliche weiterschreiben, da sind also in beiden Mengen gleich viel Elemente, da kann man nicht von Hälfte und doppelt reden.“

Damit ist dieses Unterthema abgeschlossen und es kommt auch von keinem Schüler mehr ein diesbezüglicher Vorschlag. Worin bestand aber das Mißverständnis, das einen reibungslosen Fortgang des Unterrichts aus Sicht des Lehrers erschwerte und das er zu klären versucht? Der Lehrer interpretiert die Schüleräußerungen als „Die Anzahl der Elemente von V(4) ist die Hälfte der Anzahl der Elemente von V(8)“. Das ist natürlich nicht richtig, beide Mengen haben unendlich viele Elemente (was allerdings durch das Mengenbild auch nicht deutlich wird – im übrigen ist sein Vorschlag, man könne von „Hälfte“ reden, wenn man die Kreise nur verschieden groß zeichne, ebenfalls nicht haltbar, solange man sich auf die Anzahl der Elemente bezieht, und das tut er ja offensichtlich). Aber ich bezweifle ob die Schüler das gleiche wie der Lehrer meinen. In der Aussage: „Das von V(4) ist immer die Hälfte von V(8)“ oder „Bei V(8) ist ja immer das doppelte von V(4) drin“ steckt wohl vielmehr die Erkenntnis, daß die *Elemente* von V(8) immer doppelt so groß sind wie die entsprechenden Elemente von V(4), wenn man sie der Reihenfolge nach aufschreibt, und so standen sie ja an der Tafel.[79] D.h., diese Bruchstelle erweist sich als ein Mißverständnis zwischen Schülern und Lehrer, das eigentlich gar keines ist. Der Lehrer interpretiert die Schülerantworten falsch. Festzuhalten bleibt, daß der Lehrer unterschiedliche Interpretationen thematisiert und auszuräumen versucht. Allerdings haben die Schüler hier keine Chance zu erläutern, wie ihre Aussagen genau zu verstehen sind. Es wird ihnen vom Lehrer eine unsachgemäße Auslegung unterstellt, sie werden somit gezwungen, die Perspektive des Lehrers auf den Sachverhalt einzunehmen, ohne daß eine wirkliche Aushandlung erfolgt. So bleibt letztlich dieses Mißverständnis unaufgedeckt. Man einigt sich an dieser Stelle darauf, nicht mehr von ‚Hälfte‘ zu sprechen – für den Lehrer ist das plausibel, für die Schüler dürfte der Grund dafür nicht so klar sein.

Im Interview, das nach dieser Stunde mit einigen Schülern geführt wurde, wird eine weitere Interpretationsdifferenz deutlich, die wahrscheinlich wie oben aus einer Differenz zwischen alltäglichem und mathematischem Sprachgebrauch hervorgeht.

[79] Diese Interpretationsweise der Schüler bestätigt auch das anschließende Schülerinterview zu dieser Stunde. Hier sagt Torsten: „Zuerst dacht ich, Ober- und Untermenge müßte man immer durch zwei teilen, eh, zwölf geteilt durch zwei sind sechs.“ Er bezieht sich also eindeutig auf die Elemente der Menge.

Es ist der Begriff der ‚Obermenge', der zu Schwierigkeiten führt. Gisela sagt im Interview: „man glaubt doch immer, daß die größere Zahl die Obermenge ist, sozusagen, nun ist aber die kleinere Zahl die Obermenge, und das irritiert einen irgendwie." Für sie lautet das Unterrichtsergebnis damit: „Immer die größere (Zahl, K.J.) ist die Untermenge." Schaut man sich den Unterricht vor diesem Hintergrund noch einmal an, so fällt eine Stelle auf, die im Unterricht scheinbar untergeht[80]. Der Lehrer fragt nach einer „Obermenge von V(25)". Daraufhin die Antwort einer Schülerin: „Obermenge von 25 ist 50." Diese Antwort ist falsch, wird vom Lehrer aber nicht thematisiert[81]. Ich interpretiere sie als Ausdruck des Mißverständnisses, das von Gisela im Interview formuliert wurde, und sie zeigt, daß nicht nur Gisela das Unterrichtsergebnis anders interpretiert, als es im Unterricht gemeint ist.

Auch hier werden die Schüler, die so denken, die entsprechenden Aufgaben lösen können; der Begriff der Untermenge als Teilmenge der Obermenge (obwohl beide Mengen unendlich sind!) scheint aber in ihren Köpfen nicht das gleiche zu bedeuten wie für den Lehrer oder wie das Unterrichtsergebnis es nahelegt. Auch hier wird die Differenz zwischen alltäglichem und mathematischem Denken nicht thematisiert (es traten im Unterricht selbst allerdings auch keine diesbezüglichen Schwierigkeiten auf).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß offensichtliche Bruchstellen in dieser ersten Unterrichtseinheit eher selten auftauchen. Mögliche Gründe dafür, bezogen auf die erste Unterrichtsstunde, wurden angeführt. Die Beispiele aus der zweiten Stunde zeigten, daß trotz Thematisierung eines Mißverständnisses, nicht unbedingt von einer Aushandlung gesprochen werden kann. Im ersten Beispiel (7V7) wurde die gültige Interpretation zwar begründet, der Grund für die Interpretationsdifferenz (Unterschied zwischen alltäglichem und mathematischem Denken) aber nicht ausreichend diskutiert. Im zweiten Beispiel (V(4) ist Obermenge von V(8)) waren die Schüler gezwungen, die vom Lehrer als gültig zugelassene Interpretation zu übernehmen, ohne daß sie die Möglichkeit erhielten, ihre Perspektive herauszustellen.

Ein weiteres Indiz für die Öffnung des Wissens ist, wie eingangs festgestellt, die Verdeutlichung des Konstruktionscharakters. Wissen ist immer konstruiert, es zeigt immer eine bestimmte Sichtweise auf die Welt. Wird im Unterricht dieser Konstruktionscharakter deutlich, d.h. haben die Schüler die Möglichkeit zu erkennen, daß die im Unterricht eingenommene Sichtweise nur eine unter anderen ist, erscheinen „Hinweise auf seine Herkunft sowie Begründungen dafür, daß bestimmtes Wissen … herangezogen und verbindlich gemacht wird" (Wierichs 1989, S.87)?

In der ersten Unterrichtsstunde fällt dazu eine Unterrichtssequenz auf, in der der Lehrer das Thema der Stunde bestimmt: Nachdem die Schüler drei Möglichkeiten gefunden

---

[80] Zu beachten ist allerdings, daß mir nur eine Inhaltsangabe vorliegt, die den Unterricht nicht vollständig und Wort für Wort wiedergibt.

[81] Es ist aufgrund der Inhaltsangabe nicht zu entscheiden, ob die Antwort vom Lehrer bewußt nicht beachtet wird oder ob er sie wirklich nicht gehört hat.

haben, die vorgegebenen Zahlen zu sortieren, beginnt er den zweiten Unterrichtsabschnitt mit folgenden Worten:

> „Wir hätten also drei Möglichkeiten, diese durcheinandergewürfelten Zahlen aus zwei Tabellenspalten doch wieder zusammenzusetzen. Äh, und heute, ja mit dem heutigen Tag beginnt das, da interessiert uns ganz besonders die Ordnung hier unten (Ordnung nach Teilern, K.J.). Deswegen wische ich die anderen Möglichkeiten mal weg. … Die Möglichkeit C, das ist jetzt unsere einzige Möglichkeit, mit der wir … in diesem Augenblick arbeiten."

Warum ist gerade die dritte Möglichkeit (für den Lehrer) interessant? Warum sollten die Schüler erst nach verschiedenen Möglichkeiten suchen, wenn diese ohne Begründung weggewischt werden? Was ist das Besondere an Möglichkeit C, so daß nur noch mit ihr gearbeitet werden soll? Alle drei Ordnungsprinzipien waren den Schülern bekannt, auch die dritte ist zunächst nichts Neues für sie. Aber der Lehrer gibt keinerlei Hinweise zu seiner Auswahl, außer vielleicht, daß es „interessant" ist. Er hätte anführen können, daß gerade diese Möglichkeit Gelegenheit bietet, einen neuen Begriff kennenzulernen, daß nun die bekannte Eigenschaft, daß nur bestimmte natürliche Zahlen durch eine vorgegeben Zahl teilbar sind (in der Menge der natürlichen Zahlen), systematischer betrachtet werden soll. All dies fehlt. Den Schülern wird es auch dadurch erschwert, Kritik zu äußern, das Thema in Frage zu stellen. Möglichkeiten und Grenzen des Wissens (denn was ist eigentlich der Sinn einer systematischen Betrachtung der Teilerbeziehung und -eigenschaften außer der Vorbereitung auf die Bruchrechnung?) werden nicht erörtert. Reflexiver Unterricht ist das nicht.

Schaut man sich den weiteren Verlauf dieser und der folgenden Unterrichtsstunden an, so finden sich auch hier wenig Begründungen für das im Unterricht erscheinende Wissen. Wenn sie erscheinen, so sind es meist pragmatische Begründungen (z.B. wird die Schreibweise a|b mit dem Hinweis auf die Zeitersparnis eingeführt, oder die Anfertigung der Teilertabelle (in der vierten Stunde) wird retrospektiv dadurch legitimiert, daß man an ihr die Anzahl der Teiler einer Zahl ablesen kann – warum zuvor die Eigenschaften der Teilerrelation anhand dieser Tabelle erarbeitet und aufgeschrieben wurden, wird nicht gesagt). Letztendlich erscheinen keine Begründungen für die Behandlung des Themas „Teiler- und Vielfachenbeziehungen". Was das Besondere an dieser Betrachtung von bereits bekannten Tatsachen ist, bleibt den Schülern verborgen.[82]

5.1.3 Die Didaktik des Lehrers

Das Ziel einer Analyse der Didaktik des Lehrers ist es herauszuarbeiten, ob spezifische Einstellungen des Lehrers zu seinem Unterricht, bestimmte Unterrichtsmethoden und -ziele den Unterrichtsinhalt verständlicher machen können. Dazu ziehe ich alle Interviews heran, die während des Schuljahres mit dem Lehrer A durchgeführt wurden.

[82] Die didaktische Schwierigkeit, dieses Thema zu legitimieren, wird im letzten Abschnitt noch ausführlicher dargestellt werden, wenn es um den Unterrichtsinhalt als Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis geht (vgl. 5.1.5).

In der ersten Stunde fällt vor allem der lange Weg von der „Möglichkeit C“ bis zur Definition des Teilers auf. Die Schüler hatten die Zahlen bereits sortiert nach „was durch 48 und durch 35 geteilt werden könnte“. Damit war das Sortierungsprinzip nach Teilern bereits vorgegeben, die Schüler wissen, worum es geht, auch wenn sie den Begriff ‚Teiler‘ noch nicht kennen. Nachdem aber die Zahlen in zwei Spalten aufgeschrieben wurden und die anderen Möglichkeiten von der Tafel gewischt waren, beginnt der zweite Unterrichtsabschnitt, in dem der Lehrer auffordert, „mal ganz genau (zu) erläutern, was denn dahintersteckt“. Und „wenn das nicht so klar is’, daß man’s aussprechen kann, dann darf man Fragen stellen.“ Man bekommt hier den Eindruck, daß das so einfach nicht ist, zu sagen, was dahinter steckt. Dann die Antwort von Stephan: „Ja, die Zahlen in der obersten Spalte kann man die 48 durch teilen.“ Das wird korrigiert (war aber ein „guter Anfang“, wie der Lehrer sagt), denn: „Die Zahlen kann man nicht durch 48 teilen, aber die 48 kann man durch die Zahlen teilen“, und mit einem Beispiel belegt. Der Lehrer schränkt den Blickwinkel dann ein auf eine „mögliche Geteiltaufgabe“, es werden die mathematischen Ausdrücke für die Stellen bei einer solchen Aufgabe benannt, erst dann gibt der Lehrer die Definition des Teilers (die Zahlen, die an Stelle des Divisors stehen können). Diese ersten beiden Unterrichtsabschnitte dauern ca. 20 Minuten, der nächste, in dem der Lehrer die Definition und Schreibweisen erläutert, dagegen nur ca. ein bis zwei Minuten.

Hätte der Lehrer direkt im Anschluß an das Sortieren der Zahlen die Definition eingebracht, z.B.: „Die Zahlen, die hier hinter der 48 stehen, nennt man auch Teiler der Zahl 48, weil die 48 durch diese Zahlen geteilt werden kann, so daß es ‚aufgeht‘, d.h. daß kein Rest bleibt“, wäre inhaltlich kein Bruch entstanden. Warum also der lange Weg bis zur Definition? Die Wiederholung der Begriffe Divisor, Divident, Quotient sind für das Verständnis der Teilerrelation nicht notwendig. Ich vermute etwas anderes: Es hätte der Auffassung des Lehrers von einem ‚guten Unterricht‘ widersprochen, wenn er Begriff und Schreibweisen direkt eingeführt hätte, ohne die Schüler zumindest scheinbar daran zu beteiligen. Um diese Hypothese zu erläutern, sollen einige Stellen aus den Interviews herangezogen werden.

Der Lehrer will seinen Unterricht offen gestalten:

> „für mich gesprochen: ich versuche Impulse zu geben und habe nur vor Augen das Lernziel der Stunde, äh bin relativ offen beim Weg … Die Methode, nämlich das offen zu machen, vor allem die Schüler mitdenken zu lassen, Vorschläge machen zu lassen…“

Die Schüler sollen also beteiligt werden an der Erreichung des Unterrichtsziels. Er will die Schüler dadurch zum Nachdenken anregen, sie sollen ihren eigenen Überlegungen mehr trauen als der Bestätigung des Lehrers:

> „Der Schüler ist ja nicht immer in der Situation, daß also irgendein Erwachsener oder ein Lehrer, daß der in der Nähe ist und sagt: Was du gemacht hast, ist richtig. … das Ziel des Mathematikunterrichts ist ja nicht, verkürzt gesagt, daß er … viele richtige Antworten gibt in der Stunde, sondern ist, daß er … mit Mathematik umgehen kann. Das heißt, daß er selbständig … sich entscheiden kann: o.k., das ist jetzt … richtig, aus den und den …Gründen. … Und dazu, um sicher sein

> zu können, muß man eben auch in der Lage sein, das gedanklich noch mal kurz nachzuvollziehen und sich selbst noch mal zu begründen, und dann ist man sicher in der Lösung."

Er will also möglichst wenig vorgeben, die Schüler sollen den Weg zum Unterrichtsziel maßgeblich mitbestimmen. Sie sollen dazu veranlaßt werden

> „nachzudenken, mit Hilfe von Denken zu bestimmten Lösungen zu kommen und nicht mit Hilfe von schematischem Anwenden von irgendwas Gelerntem.… Das halte ich für wichtiger als das mechanische Anwenden von irgendwelchen Regeln. Das führt eher zu unkritischem Verhalten."

Bezieht man diese Aussagen auf den oben beschriebenen Verlauf der Stunde, so wird die Vermutung gestützt, daß der Weg bis zur Definition so lang sein muß, damit der Lehrer seinen eigenen Ansprüchen an einen offenen Unterricht gerecht wird. Oder, anders herum ausgedrückt: Hätte er die Definition direkt eingeführt, wären die Schüler an der Konstitution des Unterrichtsergebnisses nicht beteiligt gewesen. Seine pädagogische Autorität, mit der er dem Ergebnis Geltung verschafft, wäre so explizit erschienen. Im Unterricht erscheint sein Monolog als eine Zusammenfassung der Schülerbeiträge (was er faktisch nicht ist), Lehrer und Schüler können so das Gefühl haben, daß das Unterrichtsergebnis gemeinsam erarbeitet wurde. Die pädagogische Autorität tritt dadurch nicht so deutlich sichtbar hervor.

Auch in den gewählten Einführungsbeispielen wird dieser ‚Konflikt' des Lehrers, einerseits als Träger pädagogischer Autorität den Schülern Vorgaben machen zu müssen, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen, andererseits seiner Vorstellung von einem offenen Unterricht gerecht zu werden, deutlich. Den Unterricht der ersten Stunde beginnt er folgendermaßen: „Eh, ich habe einige Zahlen gefunden, die offensichtlich aus zwei Spalten einer Tabelle stammen. … soviel war noch zu erkennen.… und wir müßten uns die mal in Ruhe angucken." Es ist zu bezweifeln, daß der Lehrer zufällig auf diese Zahlen gestoßen ist und nun die Schüler um Hilfe bittet, sie wieder in die Tabelle einzuordnen. So macht er sein ‚Problem' zum Problem der Schüler, seine Autorität, die ihn ermächtigt, die Schüler zur Auseinandersetzung mit einer von ihm gewählten Aufgabe zu zwingen, kann so oberflächlich verschleiert werden. Ähnliches in der Folgestunde A_1(2), in der der Begriff der Obermenge erarbeitet werden soll: „Diese Aufgabe habe ich mal in einer anderen Klasse gemacht, so ähnlich, und da kamen einige auf die Idee, daß die letzte Menge, beispielsweise, daß man die auch noch anders bezeichnen könnte, nicht nur V(8), sondern auch noch anders." Auch hier fordert der Lehrer die Schüler nicht einfach auf, die Beziehungen zwischen den Mengen zu betrachten und zu erläutern, er unterstellt ihnen ein Problem, weil die Schüler der anderen Klasse dieses Problem auch hatten. So wird die Auseinandersetzung damit legitimiert, ohne daß offensichtlich wird, daß der Lehrer das Thema kraft seiner pädagogischen Autorität vorgibt und durchsetzt.

Ein Hinweis darauf, daß es für den Lehrer tatsächlich ein Konflikt ist, die Schüler zu beteiligen und ohne seine Vorgaben, aus einem eigenen Problembewußtsein heraus, zum Unterrichtsergebnis zu kommen, andererseits aber bestimmte Vorgaben einfach machen zu müssen, findet sich im Interview zur vierten Stunde der ersten Unterrichtseinheit. Hier sollten die Schüler die Eigenschaften der Teilerrelation anhand der Teilertabelle formulieren. Die Aussage „Jede Zahl ist Vielfaches und Teiler von sich selbst" wurde im Unterricht von den Schülern zwar so erkannt, aber noch nicht ausdrücklich formuliert. Der Lehrer hilft nach und schreibt den Anfang des Satzes („Jede Zahl …") an die Tafel. Daraufhin kommt dann die Fortsetzung von einem Schüler. Zu dieser Unterrichtssequenz sagt der Lehrer im anschließenden Interview:

> „An dieser Stelle ging es mir darum, daß es genau formuliert wurde. Und da hatten die Schüler vom Sprachlichen her noch gewisse Schwierigkeiten. Das müssen sie lernen, weil das ja in der Mathematik häufiger vorkommt. Aber ich bin mir nicht schlüssig, ob man das nicht hätte abkürzen können. Die Schüler beschreiben das, ich sage: Okay. Und dann schreibe ich die Formulierung an. Oder soll man eben doch warten, bis dann der Hinweis von einem Schüler kommt, der ja dann auch tatsächlich kam und das dann formulieren als: ‚jede Zahl…'? Ich bin mir nicht schlüssig, ob das nicht vertane Unterrichtszeit war, daß ich gewartet habe."

Wiederum erscheint das Unterrichtsergebnis, die Formulierung an der Tafel, als ein von den Schülern selbständig oder zumindest gemeinsam erarbeitetes Ergebnis. Andererseits war es durch die Formulierung des Satzanfanges vom Lehrer stark vorstrukturiert, so daß auch der Lehrer zweifelt, ob er den Satz nicht gleich selbst hätte formulieren sollen. Dann aber wäre die Autorität des Lehrers explizit zum Vorschein gekommen, was offensichtlich seiner Auffassung von ‚gutem' Unterricht widerspricht.

5.1.4 Das Fach und die Schule

5.1.4.1 Die Richtlinien

Der Unterricht fand im August 1977 an einer Orientierungsstufe in Niedersachsen statt. Es handelt sich um eine integrierte Orientierungsstufe, die alle Kinder nach der Grundschule gemeinsam besuchen. 1971/72 wurden die ersten Schulen dieser Art in Niedersachsen eingeführt, die Schule, an der die Unterrichtsaufnahmen gemacht wurden, gehörte zu diesen ersten.

Die offiziellen Rahmenrichtlinien wurden erst im Oktober 1978 vom Niedersächsischen Kultusminister erlassen. Vorher waren die „Vorläufigen Handreichungen für die Orientierungsstufe" (1971) maßgeblich und zur Erprobung erschienen. Darin finden sich die wichtigsten Inhalte für die Klassenstufen 5 und 6, allgemeine Ziele der Orientierungsstufe und des Faches Mathematik sowie erste methodische Hinweise zur Differenzierung. 1975 dann erschienen die „Grundsatzpapiere für die Rahmenrichtlinien der Orientierungsstufe", auf deren Grundlage die Rahmenrichtlinien erstellt wurden. Hier findet man allerdings keine Inhalte, sondern vor allem allgemeine und fachspezifische Lernziele, die die nachfolgende inhaltliche Stoffauswahl leiten sollten.

Inhaltlich stimmt der Unterricht mit den Vorgaben der Richtlinien überein. In den „Handreichungen" wird das Thema „Teilbarkeit" zwar für die fünfte Klasse vorgesehen, im Zusammenhang mit dem Schulbuch allerdings ist eine Behandlung dieses Themas in der sechsten Klasse verständlich. Interessanter sind die allgemeinen Ziele der

„Grundsatzpapiere". Demnach soll der Schüler „nach Möglichkeiten suchen, mathematische Probleme durch eigenes Denken zu lösen" und „Freude am selbständigen Lösen mathematischer Probleme gewinnen" (Grundsatzpapiere S.49) . Die oben beschriebene Didaktik des Lehrers, den Unterricht möglichst offen zu gestalten und die Schüler den Lösungsweg selbst bestimmen zu lassen, kann auch vor dem Hintergrund dieses Lernziels interpretiert werden. Auch die Konzentration auf eine exakte Sprech- und Schreibweise von Mengenausdrücken findet ihre Entsprechung in den Lernzielen der „Grundsatzpapiere": Zwei (kognitive) Lernziele sind „Formalisieren – Fachsprache erlernen und benutzen" und „Konkrete Sachverhalte in Fachsprache darstellen" (Grundsatzpapiere, S.48).

Erwähnenswert ist an dieser Stelle noch ein weiteres kognitives Lernziel: „Mathematik anwenden – Probleme der Umwelt im Mathematikunterricht lösen; – Lösungen interpretieren; – Ergebnisse mathematische Prozesse für außermathematische Bereiche auswerten und beurteilen; – Entscheidungshilfen geben." (ebd.) Dieses Lernziel impliziert den modelltheoretischen Umgang mit Mathematik (vgl. 3.1.2.2). Dies zeigt noch einmal, daß der Anwendungsaspekt keine Erfindung der Mathematikdidaktik der letzten Jahre ist und schon unter dem Einfluß der Neuen Mathematik als wünschenswert in die Richtlinien integriert wurde. Daß dieses Ziel allerdings im Unterricht nicht verwirklicht wird, liegt nicht allein am Lehrer, sondern auch und vor allem am zu behandelnden Thema. Im Abschnitt 5.1.5 werde ich darauf noch näher eingehen.

5.1.4.2 Der Unterrichtsinhalt und der Differenzierungsaspekt

Eines der wichtigsten Prinzipien der Orientierungsstufe ist das der Differenzierung:

> „Die individuelle und optimale Leistungsförderung des einzelnen wird durch verschiedene Differenzierungsmaßnahmen erreicht. Die Förderung durch äußere Differenzierung in Leistungskursen wird dort notwendig, wo sich besonders große Leistungsunterschiede zeigen oder eine Gruppe von Schülern besonderer Förderung bedarf. Dabei sollten in den verschiedenen Kursen gleiche Lernziele mit Hilfe unterschiedlicher Unterrichtsverfahren verfolgt werden."(Vorläufige Handreichungen 1971, S.IV)

Der Mathematikunterricht an dieser Schule war in der sechsten Klasse in zwei Kursen organisiert, dem A- und dem C-Kurs. Parallel zum Unterricht im A-Kurs (A_1), der bislang hier analysiert wurde, wurde der Unterricht im C-Kurs (A_2) (ebenfalls vier Stunden) bei demselben Lehrer aufgenommen. Die Unterrichtseinheit A_2 soll nun vergleichend herangezogen werden, damit untersucht werden kann, inwieweit das Prinzip der Differenzierung den Unterricht beeinflußt. Das Thema in beiden Kursen ist gleich: Teiler und Vielfache. Wie unterscheidet sich der Unterricht (-sinhalt) im C-Kurs[83] vom A-Kurs, und wie ist das vor dem Hintergrund der äußeren Differenzierung zu erklären?

---

[83] Eine ausführlichere Analyse dieser Unterrichtsstunde findet man bei Menck (1986), S.107ff. Aus diesem Grund beschränke ich mich an dieser Stelle auf einen Vergleich unter dem Aspekt der Differenzierung.

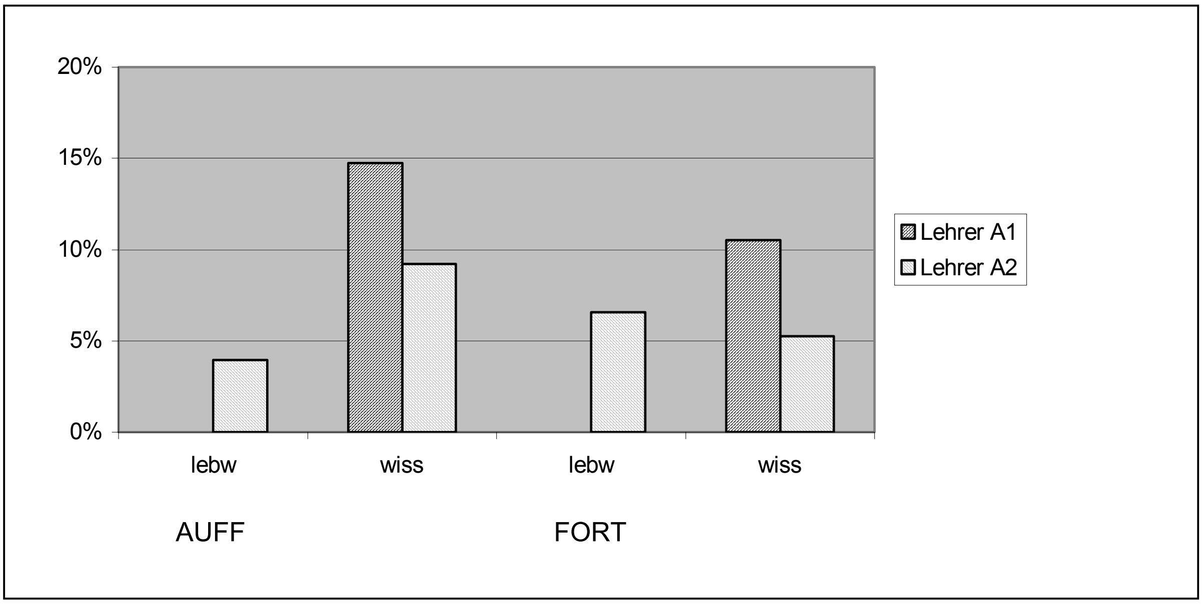

Abbildung 7: Vergleich von Lehrer-Sprechakten in A_1(1) und A_2(1) in Prozent, bezogen auf die Lehrer-Sprechakte insgesamt

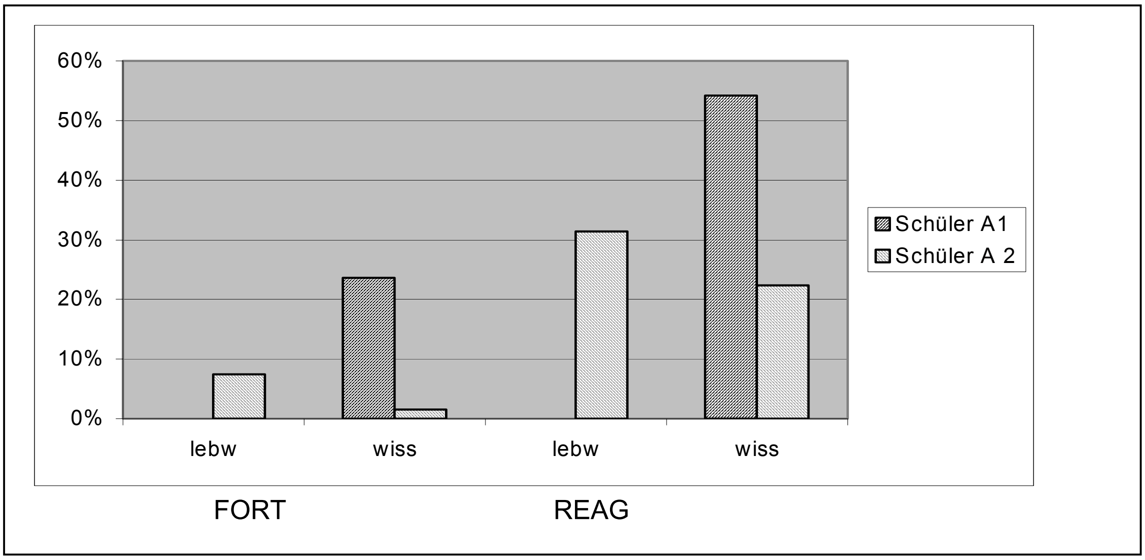

Abbildung 8: Vergleich von Schüler-Sprechakten in A_1(1) und A_2(1) in Prozent, bezogen auf die Schüler-Sprechakte insgesamt

Die obigen zwei Abbildungen zeigen die Lehrer- bzw. Schüleräußerungen der beiden Stunden im direkten Vergleich. Herangezogen wurden dazu nur die auf den Gegenstand bezogenen Sprechakte in beiden Stunden: Für den Lehrer sind dies die auffordernden und fortführenden *lebw*- und *wiss*-Äußerungen, für den Schüler die fortführenden und reagierenden *lebw*- und *wiss*-Äußerungen. Auffallend bei Lehrer wie Schülern ist zunächst, daß *lebw*-Äußerungen nur in der C-Kurs-Stunde A_2(1) vorkommen. Im A-Kurs sind alle auf den Unterrichtsgegenstand bezogenen Sprechakte auf Wissenschaft bezogen. Insgesamt jedoch ist der Anteil an auffordernden und fortführenden Spielzügen beim Lehrer, bzw. der Anteil an fortführenden und reagierenden Spielzügen bei den Schülern annähernd gleich. D.h. der größere Anteil an *wiss*-Äußerungen im A-Kurs geht fast vollständig in den entsprechenden *lebw*-Äußerungen auf. Woran liegt das? Wiederum muß die Stunde inhaltlich näher betrachtet werden.

Bei einem inhaltlichen Vergleich des Unterrichts in beiden Kursen fällt sofort die unterschiedliche Wahl des Einstiegsproblems auf. Im A-Kurs geht es um das Sortieren von Zahlen aus einer Tabelle, ein eher innermathematisches Problem also. Im C-Kurs hingegen hält sich der Lehrer, der im übrigen auch Sportlehrer ist, an die Vorgabe im Buch. Er wählt das Beispiel der Riegenbildung im Sportunterricht und beginnt seinen Unterricht wie folgt:

> „So, ich habe euch zunächst von einem kleinen Problem zu berichten. Ihr wißt, daß unsere Sportgruppen immer so ungefähr 24 Schüler umfassen. Das Problem, von dem ich euch berichten möchte, ist folgendes: Für eine ganz bestimmte Turnstunde, in der alles ganz toll und reibungslos laufen soll, hat der Lehrer vor, 24 Schüler, 24 Schüler seiner Sportgruppe, in Riegen aufzuteilen.“ Dann wird geklärt, was Riegen sind, nämlich Gruppen, „und das Besondere dabei ist, daß die Riegen alle gleich groß sein sollen. Also 24 Schüler hat der Lehrer in seiner Sportgruppe, und daraus will er gleich große Riegen bilden“, wie der Lehrer fortführt.

Im C-Kurs ist das Einführungsbeispiel an eine konkrete Situation gebunden, die Realitätsnähe wird noch dadurch verstärkt, daß der Lehrer erst einmal „unsere großen Athleten vortreten“ läßt, um den Begriff der Riege zu klären. Der Lehrer bleibt dann bei diesem konkreten Beispiel; es werden die Möglichkeiten gesucht, wie man die Sportgruppe einteilen kann. Das Unterrichtsergebnis, das am Ende dieser Einheit an der Tafel steht, ist immer noch an die Bildung von Riegen gebunden. Dort steht z.B. „4 Gruppen mit je 6 Schülern“ usw. Es folgt sogar noch eine längere Übungsphase, in der die Schüler alle Möglichkeiten, eine Klasse mit 28, 30, 32 und 36 Schülern in Riegen aufzuteilen, suchen sollen. Erst dann löst der Lehrer sich von der konkreten Situation, indem er (ähnlich wie im A-Kurs) einen Teil von der Tafel wegwischt, so daß nur noch die Zahlen übrigbleiben. Bis hierhin wurden die auf das Thema bezogenen Äußerungen von Lehrer und Schülern fast ausschließlich als *lebw*-Äußerungen codiert.

Zieht man die didaktisch-methodischen Hinweise der „Handreichungen“ (die sich nur auf Maßnahmen der Differenzierung beschränken) als Interpretationsfolie heran, wird die unterschiedliche Vorgehensweise des Lehrers verständlich. Hier werden verschiedene Differenzierungsaspekte erläutert. So heißt es:

> „Von der Motivation her: … In den unteren Leistungskursen werden Modelle im Vordergrund stehen. In höheren Leistungskursen ist auch innermathematische Motivation möglich.“ (S.38)[84]

Während im A-Kurs die Schüler durch ein innermathematisches Problem motiviert werden können, scheint im C-Kurs ein konkretes Beispiel notwendig zu sein. Der Beg-

[84] Unklar erscheint mir in diesem Zusammenhang allerdings der Begriff ‚Modell‘. Er ist hier wahrscheinlich eher im Sinne eines konkreten Beispiels zu interpretieren, anhand dessen Sachverhalte verdeutlicht werden können. Im Sinne der Modellbildung (vgl. 3.1.2.2), womit gerade ein Loslösen von einer bestimmten Situation gemeint ist, um gewisse allgemeine Strukturen zu erkennen, wird er hier vermutlich nicht verwendet.

riff des Teilers, beziehungsweise die Klärung des Zusammenhangs zwischen der Zahl 24 und ihren Teilern erfolgt erst nach einer Übungsphase. Auch diese Unterrichtsphase unterscheidet sich stark von der entsprechenden im A-Kurs. Sie soll deshalb hier zitiert werden. Hier tauchen verstärkt die *wiss*-Sprechakte auf.

Der Lehrer wischt von der Anfangsaufgabe die Worte weg, so daß von „6 Gruppen mit je 4 Schülern“ nur noch die Zahlen 6 und 4 stehenbleiben. Ebenso verfährt er mit den anderen an der Tafel festgehaltenen Möglichkeiten, 24 Schüler in Gruppen einzuteilen.

L Meine Frage ist ganz einfach…Was haben die Zahlen rechts, die vielen Zahlen rechts mit der einen großen Zahl links zu tun?…
S Braucht man bloß / braucht man bloß ja malzunehmen. …
L Lies doch die Zahlen rechts mal vor, die wir da noch stehen ham, … Pedro.
S 4,8,2,6,24,3,12,1
L Danke, machst du mal weiter, Marina.
S 6,3,12,4,1,8,2,24
L Ja, … Was ham die Zahlen nun zu tun mit der Zahl 24?
…
S Wenn man die Zahlen zusammenzieht gibt es 24, oder malnimmt.
L Kannst du’n Beispiel nennen?
S Ja, 4 mal 6.
L Andreas
S Äh, 8 mal 3.
L Ja, wir können hier also lauter Malzeichen setzten und … mit einer Malübung kommt dann immer 24 raus. Oder man kann auch andersrum sagen, die Zahlen 4,8,2,6,24,3,12,1, und das ist ein neues Wort für euch, sind Teiler von 24. … Teiler von 24 sind also Zahlen, die man teilen kann durch 24, durch die man 24 teilen kann. Beispiel, 24 geteilt durch 8 geht auf … Und so kann man das eigentlich bei allen Zahlen machen.

Obwohl die lebensweltliche Perspektive verlassen wird und es ähnlich wie im A-Kurs um Zahlen und ihre Beziehung zueinander geht, lassen sich doch einige Unterschiede ausmachen. Im Gegensatz zum Unterricht im A-Kurs ist der Weg bis zur Definition erheblich kürzer. Begriffe wie Divisor, Divident und Quotient tauchen hier gar nicht auf. Warum werden diese Begriffe im A-Kurs wiederholt, obwohl sie für die Definition des Teilers gar nicht notwendig sind, wie man an der obigen Unterrichtssequenz sieht? Inhaltlich ist die Definition jedenfalls identisch. Auch dies kann mit Hilfe der Differenzierung erklärt werden:

Differenziert werden soll auch „nach dem Grad des Verständnisses von Argumentationen: In den unteren Leistungskursen muß sich die Einsicht in mathematische Zusammenhänge im handelnden Umgang mit konkreten Modellen und an figural-anschaulichen Gegebenheiten vollziehen. In den höheren Kursen ist zunehmend eine Argumentation auf rein rechnerischer (signitiver) Grundlage möglich …“ Ein weiterer Aspekt ist die Differenzierung „nach dem Grade der Formalisierung, Verbalisierung und Reflexion: In den höheren Leistungskursen wird über die mathematischen Sachverhalte zunehmend reflektiert.“ (Handreichungen 1971, S.39)

Einerseits also im C-Kurs die enge Bindung an die konkrete Situation ‚Riegenbildung‘, die auch dann noch erhalten bleibt, wenn nur noch Zahlen an der Tafel stehen[85]. Andererseits im A-Kurs die ausführliche Begründung für das Sortieren von Zahlen nach ih-

[85] Mit den Zahlen wird genauso (multiplikativ) operiert, wie zuvor mit der Anzahl der Riegen und der Anzahl der Schüler pro Riege.

ren Teilern und Wiederholung von mathematischen Begriffen. Beides entspricht dem in den Handreichungen erläuterten Prinzip der Differenzierung in Leistungskurse.

Interessant ist noch ein weiterer Aspekt in dieser Unterrichtssequenz. Nach dem Zusammenhang zwischen den Zahlen gefragt, antworten die Schüler, man müsse die Zahlen lediglich miteinander multiplizieren, damit 24 herauskommt. Diese Antwort liegt auch nahe, denn beim Aufteilen in Riegen (6 Gruppen mit je 4 Schülern) multipliziert man 6 mit 4 und erhält die Anzahl der Schüler. Der Lehrer wiederholt dann zwar die Antwort und bestätigt damit die Richtigkeit („Wir können also hier lauter Malzeichen setzen"), bei der anschließenden Definition des Teilers bedient er sich aber wiederum, wie im A-Kurs, der Erklärung über die Division. Leicht hätte er den Vorschlägen der Schüler folgen können und die (mathematisch korrekte) Definition über das Produkt einführen können. Warum wird hier trotzdem die gleiche Definition wie im A-Kurs benutzt?

Das Verständnis für den Begriff des Teilers gehört zum Fundamentum dieser Unterrichtseinheit. Das Fundamentum „umfaßt im differenzierenden Unterricht die für die Erreichung des Groblernzieles notwendige Summe von Feinlernzielen, die von allen Schülern in unterschiedlicher Weise erreicht werden müssen." (Grundsatzpapiere 1975, S.49) Das heißt aber nichts anderes, als daß der grundlegende Begriff des Teilers, seine Definition in beiden Kursen gleich sein muß, wenn sie auch auf unterschiedliche Art und Weise erarbeitet wird. Möglicherweise verhindert diese Bedingung im C-Kurs eine Definition, die der mathematischen Konvention entspricht und außerdem auch im Schulbuch so zu finden ist. Daß es den Schülern durchaus nicht leichtfällt, diese Definition anzuwenden und sie eigentlich, wie es das Einführungsbeispiel nahelegte, eher an eine Produktbildung beim Auffinden von Teilern denken, wird auch in der Folgestunde $C_1(2)$ deutlich. Hier sollen sie Teilermengen bestimmen und gleichzeitig eine Begründung dafür angeben, warum eine bestimmte Zahl ein Teiler ist. Immer wieder schlagen die Schüler vor, man brauche nur malzunehmen, z.B. die Zahl 1 ist Teiler von 24, weil 1 mal 24 gleich 24 ist, oder 3 ist Teiler von 24, weil 3 mal 8 gleich 24 ist. Der Lehrer besteht aber darauf, daß die Begründung gemäß der von ihm gegebenen Definition anders lauten müsse: 3 ist Teiler von 24, weil 24 geteilt durch 3 aufgeht, denn das Ergebnis ist 8. Die Vorgehensweise im A-Kurs, bei der die Definition über die Division im Zusammenhang mit dem gewählten Einstiegsproblem durchaus sinnvoll ist, wird damit auch für den C-Kurs maßgeblich, obwohl hier eine andere Definition näher gelegen und den Vorstellungen der Schüler eher entsprochen hätte.

Bei der Gegenüberstellung von A- und C-Kurs fällt eine weitere Unterrichtssequenz im C-Kurs ins Auge, die man als eine offensichtliche Bruchstelle im Unterricht bezeichnen kann. Sie gehört zum ersten Unterrichtsabschnitt, in dem es um das Auffinden aller Möglichkeiten, die Schüler einer Klasse in Riegen aufzuteilen, geht. Delfi macht einen Vorschlag:

Delfi48 Gruppen und je ein Halber.

L Ja, und dann? Wie kriegst du die auf die Hälfte?
S Schneidest'se durch.
S Dann kommt der Kopf weiter.
S Aber es gibt doch halbe Portionen.
L der Lehrer kann dann so, gerade so in diese 48 Gruppen aufteilen.
Delfi Das ist vielleicht 'n Fettwanst und das so'n Dünner, und der Dünne is'n Halber.
L Aber wenn … die Schüler erstmal halbiert sind, kann er schlecht mit denen noch turnen, ne?

Der Vorschlag von Delfi, der in die Richtung einer Zahlbereichserweiterung zielt, wird so zurückgewiesen. Er paßt nicht ins Beispiel, weil man Menschen nicht teilen kann. Anders kann der Lehrer mit solchen Situationen im A-Kurs umgehen, in dem von vornherein mit Zahlen gerechnet wird. Folgende Sequenz stammt aus der vierten Stunde des A-Kurses:

Die Schüler sollen die jeweils komplementären Teiler der Zahl 144 finden. Ein Schüler schlägt vor: „10 und 14 Komma 4". Das stellt der Lehrer kurz zurück, nimmt den Vorschlag aber wieder auf. Daraufhin Monika: „Wir arbeiten ja nur mit natürlichen Zahlen."

Damit ist die Sache mathematisch geklärt. Gleichzeitig impliziert diese Begründung aber auch, daß, sobald man nicht mehr nur mit natürlichen Zahlen arbeite, dieser Vorschlag durchaus sinnvoll sein kann. Die Möglichkeit, mit Bruchzahlen zu rechnen wird im A-Kurs also offen gehalten, während sie im C-Kurs zurückgewiesen wird, weil sie bezogen auf die konkrete Situation keinen Sinn macht.

Der mit den Aspekten der Differenzierung zusammenhängende unterschiedliche Einstieg in das Thema ist also nicht nur eine andere Möglichkeit der Einführung, die letztendlich zum gleichen Ziel führt, sondern hat auch Konsequenzen für den Umgang mit weitreichenderen Sachverhalten. Die enge Bindung an eine lebensweltliche Situation im C-Kurs verbietet die Möglichkeit, auch mit ‚Halben' zu rechnen und versperrt damit den Blick auf eine Zahlbereichserweiterung, die im anderen Kurs zumindest möglich erscheint.

5.1.5 Mathematik im Unterricht

Mit Hilfe des im letzten Kapitel entwickelten Strukturgitters soll in diesem Teil der Analyse untersucht werden, welches Bild von Mathematik als ein Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis im Unterricht vermittelt wird. Dazu soll zunächst erläutert werden, welche Bedeutung das Thema „Teilbarkeit" in der (Schul-) Mathematik besitzt bzw. besitzen kann, auch in bezug auf die Begriffe des Strukturgitters.

In den traditionellen Lehrplänen wurde dieses Thema nicht gesondert behandelt. Es wurde in die Behandlung der Bruchrechnung integriert, da Teilbarkeitseigenschaften der Bestimmung von Hauptnenner und Kürzungszahlen diente.

„Die Teilbarkeitslehre stand im traditionellen Stoffaufbau zwischen dem Rechnen mit natürlichen Zahlen und dem Rechnen mit Brüchen. Dies hatte einen sachstrukturell vorgegebenen Grund: Beim Kürzen von Brüchen muß man in der Lage sein, die Teilbarkeit von Zähler und Nenner durch die Zahl, mit der gekürzt werden soll, beurteilen zu können. Demgemäß standen die Teilbarkeitsregeln im Mittelpunkt des Unterrichts, unter Umständen darüber hinaus auch deren ma-

> thematische Begründung. Insgesamt besaß das Stoffgebiet nur untergeordnete Bedeutung." (Damerow 1977, S.233)

Das heißt, ein technischer Aspekt stand hier eindeutig im Vordergrund. Teilbarkeitsregeln sollten den Umgang mit den Bruchzahlen vorbereiten, es sollten die notwendigen Techniken, die für das Rechnen mit Bruchzahlen notwendig waren, erarbeitet werden. Dies änderte sich unter dem Einfluß der Neuen Mathematik. In den auf Grundlage strukturmathematischer Erkenntnisse reformierten Lehrplänen wurde dieses Thema zu einem eigenen Gebiet umgestaltet. Die Gründe dafür sind allerdings weitgehend unklar, zumindest lassen sie sich nicht aus fachwissenschaftlichen Erneuerungen ableiten. Denn:

> „Weder besitzt die Teilbarkeitslehre eine besondere Bedeutung der Systematik und im begrifflichen Aufbau der Strukturmathematik …, noch wird überhaupt die strukturmathematische Neufassung und Verallgemeinerung der Teilbarkeitslehre in die Theorie der 'Ideale' zur Grundlage der inhaltlichen Neubestimmung der Teilbarkeitslehre im Curriculum der Schulmathematik genommen. … Die Aufwertung des Themenkreises ist eine Folge der dominierenden Reformkonzeption, derzufolge die Modernisierung auf der Grundlage des traditionellen Stoffaufbaus durch Einführung neuer Begriffe erfolgen soll. Er behält die *Funktion, auf die Bruchrechnung vorzubereiten*, fungiert nun aber darüber hinaus noch als ein isolierbares *Anwendungsgebiet für Mengen- und Relationsbegriffe*, wobei allerdings der mathematische Gewinn zweifelhaft ist und der didaktische Gewinn weitgehend undiskutiert bleibt." (ebd., S.281f , Hervorhebungen von mir, K.J.)

Es kam also noch ein weiterer Aspekt hinzu: der der Anwendung von Mengen- und Relationsbegriffen. Dabei handelt es sich natürlich um innermathematische Anwendungen, die den neuen strukturmathematischen Begriffen Rechnung tragen sollten, ohne allerdings weiter in die Strukturmathematik einzudringen. Diese traditionellen und neuen Ziele finden ihre Entsprechung auch in der didaktischen Konzeption des entsprechenden Kapitels im Schulbuch:

> „Die Teilbarkeitslehre stellt ein echtes Bindeglied zwischen dem Unterrichtsstoff der 5. und 6. Klasse dar. Sie wiederholt in vertiefender Weise die Begriffe: Menge, Ober- und Untermenge, Schnitt- und Vereinigungsmenge, wahre und falsche Aussagen. … Zugleich stellt die Teilbarkeitslehre wichtige Hilfsmittel bereit, die zur Behandlung der Bruchrechnung erforderlich sind: Teiler und Vielfache, Teilbarkeitseigenschaften, kgV und ggT, Vorbereitung des Operatorbegriffes." (Lehrerheft zu Mathematik heute 1972, S.6) Auch der Begriff der Relation, der unabhängig von der Produktbildung gesehen werden soll, wird ausdrücklich als Lernziel formuliert. (vgl. ebd., S.8)

Der Hauptaspekt liegt in der Wiederholung und Vertiefung strukturmathematischer Begriffe, die Vorbereitung auf die Bruchrechnung erscheint als ein eher zweitrangiges Lehrziel, das nebenbei verfolgt wird. Damit scheint die Teilbarkeitslehre in erster Linie den Zweck zu erfüllen, bestimmte Begriffe, die die Schüler in der Tat bereits kennen (dies wird zum Beispiel in der Stunde über Vielfachenmengen deutlich, vgl. auch S.92), anzuwenden und zu wiederholen.

Im folgenden soll der Unterricht dieser Unterrichtseinheit den im Strukturgitter entwickelten Begriffen *Modell, System* und *Überprüfung* gegenübergestellt werden.

Wir finden keine Hinweise, die die Mathematik in ihrer *modellbildenden* Funktion herausstellen. Es gibt keine lebensweltlichen Bezüge, die auf Modelle einer außermathematischen Wirklichkeit hinweisen würden. Aber auch innermathematische Modellbildung findet nicht statt. Möglich wäre es zum Beispiel gewesen, den dung findet nicht statt. Möglich wäre es zum Beispiel gewesen, den Relationsbegriff (wie die didaktischen Überlegungen zum Schulbuch, s. S.84, es nahelegen) als ein Modell für die Beziehung ‚ist Teiler von' zu behandeln.

Wie verhält es sich unter diesem Aspekt in der Stunde $A_2(1)$ im C-Kurs? Hier wählte der Lehrer den Einstieg in das Thema über das Problem der Riegenbildung im Sportunterricht. Man kann die Teilermenge als ein Modell für die Einteilung in verschieden große Gruppen interpretieren. Es ergibt sich dabei allerdings die Schwierigkeit, daß die trivialen Teiler einer Zahl zur Menge aller Teiler gehören, es im Sportunterricht aber wenig Sinn macht, eine „Riege" mit der Gesamtzahl der Schüler bzw. „Riegen" mit je einem Schüler zu bilden. Die Abbildfunktion des Modells ist dann nicht erfüllt. Im Schulbuch wird diese Unstimmigkeit zwischen Modell und realer Situation geschickt umgangen, indem einfach die Situation geändert wird: Der Lehrer „kann aber alle 20 Schüler in einer Gruppe zusammenfassen oder jeden Schüler allein üben lassen." (Mathematik heute 1971, S.7) Ganz ähnlich argumentiert auch der Lehrer:

> „Ihr habt schon gemerkt, nicht, das sind 24 Gruppen und jede Gruppe besteht aus einem Schüler, das ist eigentlich nur ´ne Möglichkeit, die man so in Gedanken haben kann, im Sportunterricht kommt das eigentlich wirklich nicht vor, nicht? .. Aber trotzdem wollen wir das aufnehmen, weil das ja denkbar ist. ...Gibt es noch andere Möglichkeiten, wenn sie auch nicht so wahrscheinlich sind? ... Aber Möglichkeiten, die zumindest denkbar sind."

Das Modell ist der Situation nicht angemessen, es verallgemeinert zu stark. Diese Problematik wird aber im Unterricht nicht explizit angesprochen, so daß auch hier die Modellfunktion der Mathematik keinen Raum findet. Das Beispiel der Riegenbildung dient lediglich zur Motivierung der Schüler, es ist kein wirkliches Problem, das einer mathematischen Lösung bedarf. Daß der Lehrer im A-Kurs ein ganz anderes Einstiegsproblem (Sortieren von Zahlen) wählt, ist außerdem ein Zeichen dafür, daß es ihm auch im C-Kurs nicht um die Modellfunktion der Mathematik geht, sondern er im Sinne der Differenzierung ein ‚alltägliches Problem' für die Einführung in dieses Thema gewählt hat, das zum gleichen Unterrichtsergebnis wie im A-Kurs führen sollte.

Die Unterrichtseinheit ist vor allem durch den Aspekt des *Systems* geprägt: Zahlen werden geordnet, das Ordnungsprinzip wird definiert, dazu wird auf bekannte Begriffe (Divisor, Divident, Quotient) zurückgegriffen, es werden Mengen gebildet und untersucht usf. Es werden also bestimmte Eigenschaften von Zahlen festgestellt und definiert, die dann weiter untersucht und in Sätzen festgehalten werden[86]. Auch die ‚Tauschaufgabe' kann dazu gerechnet werden, denn hier geht es darum, einen allgemeinen Satz aufzustellen für das systematische Auffinden aller Teiler einer Zahl.

Den Aspekt der *Überprüfung* findet man nur an einer Stelle dieser Unterrichtseinheit, und zwar in der zweiten Stunde ($A_1(2)$), in der es um Vielfache und Vielfachenmengen

[86] Dies geschieht vor allem in der vierten Stunde dieser Unterrichtseinheit ($A_1(4)$). Hier wurde eine Kreuztabelle erstellt, in der die Zahlen 1 bis 15 wechselseitig auf die Beziehung a|b bzw. aVb geprüft wurden. Daraus wurden anschließend bestimmte Eigenschaften der Relationen abgelesen, z.B. „ ‚ist Teiler von' ist die Umkehrung von ‚ist Vielfaches von'".

geht. Es ist die Unterrichtssequenz, die bereits in Abschnitt 5.1.2.2 thematisiert wurde. Hier wurde von den Schülern der Einwand eingebracht, daß 7 nicht das Vielfache von 7 sein könne, weil ‚Vielfaches' wohl gleichbedeutend mit ‚Mehrfaches' sei, 7 aber nur das ‚Einfache' von 7 sei. Er wurde zurückgewiesen mit der Begründung, daß ‚ist Vielfaches von' die Umkehrung sei von ‚ist Teiler von', und da 7|7 gilt, müsse folglich auch 7V7 gelten. Das heißt, die Vermutung der Schüler, daß ‚Vielfaches' erst ab ‚Zweifaches' sinnvoll sei, wird durch die Forderung nach mathematischer Widerspruchsfreiheit zurückgewiesen. Dadurch wird deutlich, daß mathematische Begriffe eine andere Logik besitzen können als alltägliche, daß sie ihre endgültige Form und Bedeutung oftmals erst durch Widersprüche zu ihren Voraussetzungen erhalten. Allerdings, und auch das wurde in 5.1.2.2 schon gesagt, muß bezweifelt werden, ob das im Unterricht deutlich genug herausgestellt wurde. Und es bleibt die einzige Stelle, in der dieser Aspekt zu erkennen ist.

Somit kann festgehalten werden, daß Mathematik vor allem unter dem Aspekt des Systems erscheint, während die Begriffe Modell und Überprüfung nicht oder nur ansatzweise aufgenommen werden.

Im folgenden sollen zwei weitere Stunden zur Analyse herangezogen werden, die in Abständen von sechs bzw. zehn Monaten zur ersten Unterrichtseinheit aufgenommen wurden (im Februar A_3 und im Juni A_4). Beide Unterrichtseinheiten stammen aus dem A-Kurs. Dabei sollen die Analyseabschnitte nur kurz und insofern bearbeitet werden, als sie aufschlußreich im Vergleich zur ersten Unterrichtseinheit sind. D.h., es sollen Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausgearbeitet werden, ohne daß bereits genannte Aspekte ausführlich wiederholt würden. Die leitende Fragestellung ist hier: Lassen sich die obigen Feststellungen über den Unterrichtsinhalt bei diesem Lehrer und in dieser Klasse bei der Betrachtung der folgenden Unterrichtseinheiten bestätigen oder waren es zufällige Erscheinungen und wenn ja, wie ist das zu erklären?

5.2 Die Unterrichtseinheit A_3

Es wurden im Februar 1978 drei Stunden im a-Kurs der 6. Klasse bei Lehrer A aufgenommen, die zu der Einheit A_3 gehören. In der ersten Stunde dieser Einheit wurde das Ordnen von Bruchzahlen der Größe nach eingeübt. Die zweite Stunde $A_3(2)$, die im folgenden ausführlich analysiert werden soll, hat als Thema die Multiplikationsregel für Bruchzahlen. Sie ist also als Einführungsstunde zu sehen, da den Schülern bisher keinerlei Rechenregeln für Bruchzahlen bekannt sind. In der dritten Stunde dieser Einheit wird diese Regel an einigen Beispielen, die auch als Hausaufgabe aufgegeben wurden, eingeübt. Für die zweite Stunde gibt es ein Lehrer- und ein Schülerinterview.

5.2.1 Paraphrase zu $A_3(2)$

Thema: Die Multiplikationsregel für Bruchzahlen

1. **Drei Minuten Kopfrechnen.**
2. **Multiplikation von Brüchen; zwei Beispiele ($\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}, \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{16}$).**

Der Lehrer schreibt das Ziel der Stunde (Multiplikation von Brüchen) an die Tafel und „zwei Beispiele dazu“. Die Schüler nennen zwei Ergebnisse für die erste Aufgabe: $\frac{3}{20}$ und $\frac{15}{20}$ und erläutern ihre Vorgehensweise: „der Nenner mal dem anderen Nenner und der Zähler mal dem anderen Zähler“ und „drei mal fünf mal eins“ im Zähler und vier mal fünf im Nenner. Das zweite Ergebnis stößt auf Widerspruch : „Wenn man 3 mal 5 mal 1 nimmt, dann nimmt man den halben Bruch beim ersten und den ganzen Bruch beim zweiten, das geht ja auch nich’“.

3. **Nachprüfen, welches Ergebnis richtig ist; „die Brüche nehmen wir als Bruchoperatoren“[87].**

Ein Schüler schlägt vor: Ob das Ergebnis stimmt, kann man „am besten dadurch nachprüfen, daß man da, da ’ne Eingabe nimmt und das ausrechnet“. Als Eingabe schlägt dann der Lehrer 60 Zentimeter vor, die Brüche sind jetzt als Bruchoperatoren zu lesen:

$$60 \text{ cm} \left\langle \frac{3}{4} \circ \frac{1}{5} \right\rangle 9 \text{ cm}.$$

Das Tafelbild wird vom Lehrer erweitert: Auf die rechte Tafelhälfte werden alle Ausdrücke in Operatorenschreibweise geschrieben, während auf der linken Seite der Tafel weiterhin Bruchzahlen stehen.

[87] (Bruch-) Operatoren sind Abbildungen (Funktionen) von einem Größenbereich (z.B. Strecken, Flächen) in sich selbst, die jeder Größe aus diesem Bereich eindeutig eine Größe zuordnet. Operatoren können miteinander verknüpft werden und sind bezüglich dieser Verknüpfung abgeschlossen. Die Menge der Bruchoperatoren ist bzgl. dieser Verknüpfung kommutativ, assoziativ, sie besitzt ein neutrales Element und zu jedem Element existiert ein inverses Element. Sie bildet somit eine kommutative Gruppe. Vgl. Padberg (1978).

4. Zwischenthema: „ $\frac{3}{4}$ und $\frac{15}{20}$ is' genau das Gleiche".

Diesen Einwand bringt ein Schüler ein. Nachdem geklärt ist, daß diese beiden Brüche tatsächlich gleich sind, begründet ein Schüler, warum das so sein muß: „Is' doch ganz klar. Wenn, weil se da, da $\frac{3}{4}$ nur mal 5 genommen haben. … Hätten Sie ja tatsächlich gleich mal 5 nehmen können."

5. Der Zusammenhang zwischen der Darstellung als Bruchoperatoren und der Multiplikation von Brüchen.

Die Schreibweise als Operatoren (Verkettet- statt Malzeichen) ist „praktisch nichts anderes als unsere Anfangsaufgabe". Der Lehrer erinnert an den Umgang mit verketteten Streckoperatoren, und „auch in diesem Fall suchen wir jetzt einen Operator, einen einzigen, der das Gleiche liefert, äh leistet, wie die beiden zusammen. … oder die beiden miteinander verkettet". Die Schülerantwort: der Operator $\frac{3}{20}$ leistet das Gleiche wie $\frac{3}{4} \circ \frac{1}{5}$. Der Lehrer faßt zusammen: „Ja, es scheint sich zu bestätigen, daß diese Antwort richtig ist und die falsch ist".

6. Eine mathematische Begründung für die Regel „Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner".

Die Bruchoperatoren werden zunächst in Streck- und Stauchoperatoren zerlegt. Es soll bewiesen werden, daß $3 \circ \overline{4} \circ 1 \circ \overline{5} = 3 \circ \overline{20}$. $3 \circ \overline{4} \circ 1 \circ \overline{5}$ kann man auch schreiben als $3 \circ 1 \circ \overline{4} \circ \overline{5}$. „Nach dem Kommutativgesetz ist das also möglich". Zusammengefaßt ist das dann „Streckoperator 3 mal 1, verkettet mit Stauchoperator … 4 mal 5", also Streckoperator 3 verkettet mit Stauchoperator 20, und das ist „der Bruchoperator 3/20". „Aus der Behauptung is' jetzt eine Regel geworden".

7. Beispielaufgaben

8. Wenn Brüche multipliziert werden, kann es vorkommen, daß das Produkt kleiner ist als die Faktoren.

Der Lehrer macht auf diese Tatsache aufmerksam: „Hat jemand jetzt auf die Schnelle 'ne Idee, wieso das so ist?" Die Schüler vermuten, daß das hier Zufall ist. Es soll aber an dieser Stelle nicht geklärt werden „ich wollt' auch nur darauf aufmerksam machen, daß sowas vorkommen kann, nicht daß man dann überrascht ist".

5.2.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.2.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Wie in der ersten Unterrichtseinheit wird das Schulbuch nur als Aufgabensammlung für die Hausaufgaben benutzt. Selbst die Übungsbeispiele in der Stunde entstammen nicht dem Schulbuch. Im Buch wird die Multiplikationsregel für Bruchzahlen ebenfalls unter Rückgriff auf Verkettung von Operatoren eingeführt. Allerdings wird hier auf einen Beweis verzichtet. Es handelt sich hier eher um ein Plausibel-Machen der Regel, indem, ähnlich wie im Unterricht, die Operatoren auf Eingaben angewendet werden und die Ausgaben verglichen werden (in diesem Fall werden Flächen von Rechtecken benutzt).[88] Die Lernziele dieses Abschnitts sind weiterhin eng mit der Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks, „dessen Seitenlängen mit Hilfe von Bruchzahlen beschrieben sind“ (Lehrerheft 1972, S.48), verknüpft. Die allgemeineren Lernziele zur Multiplikation von Bruchzahlen lassen sich allerdings auch in diesem Unterricht erkennen: „Anerkennen, daß man die Verkettung von Bruchoperatoren (Bruchzahlen) als Multiplikation auffassen kann“ und „Bruchzahlen multiplizieren.“ (ebd.). Eine Begründung für die gefundene Regel wird allerdings nicht verlangt. Lediglich im Nachhinein und als Zusatzstoff gekennzeichnet findet sich im Buch der Hinweis, daß die Multiplikation von Bruchzahlen als Verkettung von Bruchoperatoren zu verstehen ist und daher die gleichen Eigenschaften wie die Verkettung besitzt, nämlich unter anderem Kommutativität und Assoziativität (vgl. Mathematik heute 1971, S.122). Diese Eigenschaften werden im Unterricht beim Beweis der Regel bereits benutzt. Der Unterricht geht insofern über die Lernziele des Schulbuches hinaus, als anschließend an die Begründung durch Ein- und Ausgabe ein mathematischer Beweis folgt, der auf die bekannten Eigenschaften der Verkettung von Operatoren zurückgreift.

Im Vergleich zur ersten Unterrichtseinheit ergeben sich einige Gemeinsamkeiten im Umgang mit dem Schulbuch, aber auch Unterschiede. Gemeinsam ist in beiden Unterrichtsstunden, daß der Lehrer seinen Unterricht recht unabhängig vom Buch gestaltet. Das Buch wird nur als Quelle für Übungs- bzw. Hausaufgaben benutzt. Die Lernziele und das Prinzip, auf Operatoren zurückzugreifen, stimmen mit den Intentionen des Schulbuches im allgemeinen überein. Während allerdings in den August-Stunden das im Unterricht erscheinende Wissen gegenüber dem im Schulbuch angebotenen Wissen eher eingeschränkt ist (vgl. 5.1.2.1), geht der Lehrer jetzt darüber hinaus. Die „etwas mathematischere Begründung“ (6. Unterrichtsabschnitt), der Beweis der Regel, ist im Schulbuch nicht vorgesehen.

Woher kommt das Wissen, wenn nicht aus dem Schulbuch? Und wer verbürgt die Geltung dafür? Erste Hinweise auf Unterschiede zur August-Stunde ($A_1(1)$) geben die folgenden Vergleichsdiagramme. Aufgenommen wurden nur fortführende und reagierende (Schüler) bzw. auffordernde und fortführende (Lehrer) Sprechakte:

[88] vgl. Mathematik heute 1971, S.117ff

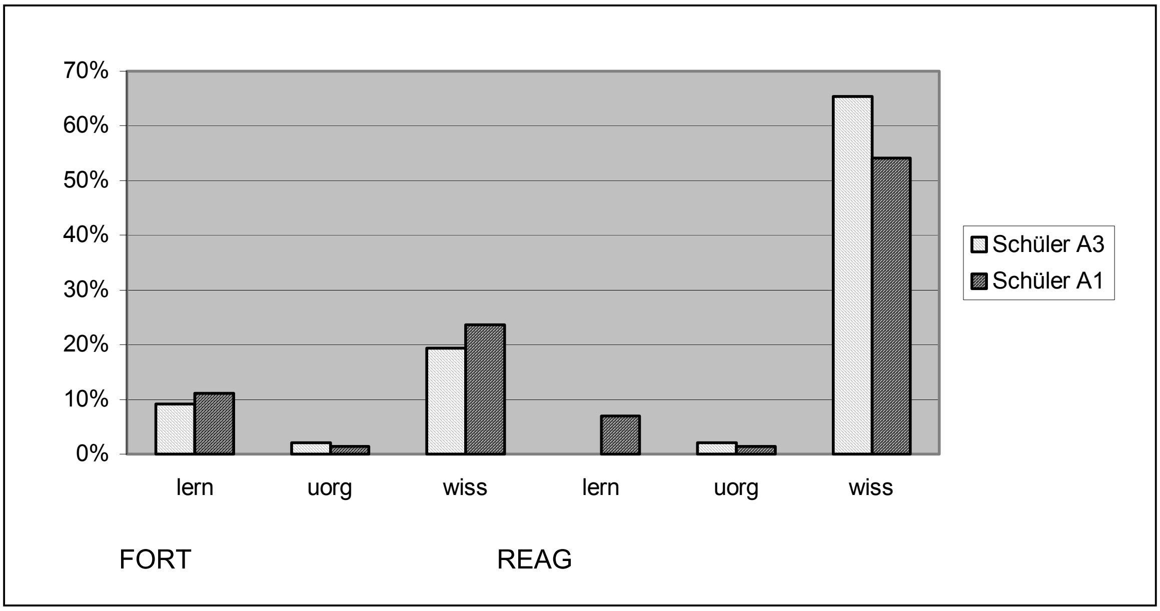

Abbildung 9: Vergleich von Schüler-Sprechakten in $A_1(1)$ und $A_3(2)$ in Prozent bezogen auf die Schüler-Sprechakte insgesamt

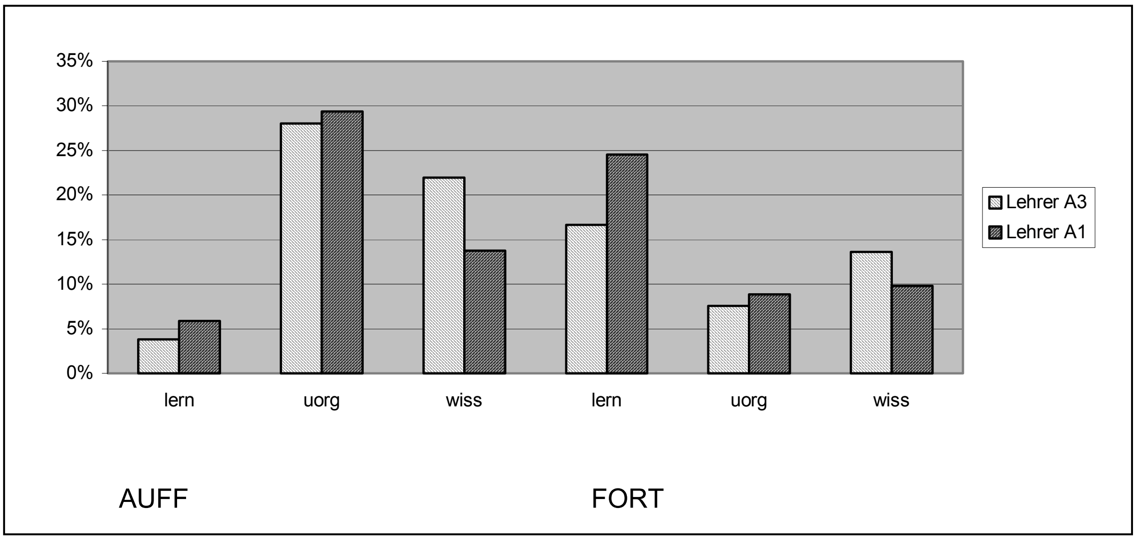

Abbildung 10: Vergleich von Lehrer-Sprechakten in $A_1(1)$ und $A_3(2)$ in Prozent bezogen auf die Lehrer-Sprechakte insgesamt

Bei den Schülern liegt der größte Unterschied in den reagierenden *wiss*-Äußerungen (ca. 10% mehr in $A_3(2)$). Beim Lehrer fallen vor allem die Unterschiede bei den auffordernden *wiss*-Äußerungen (ca. 8% mehr in $A_3(2)$) und den fortführenden *lern*-Äußerungen (fast 10% weniger in $A_3(2)$) auf. Dies läßt folgende Schlüsse zu, die inhaltlich am Verlauf der Stunde belegt werden:

Stärker noch als in der ersten Unterrichtsstunde setzt sich das Vorwissen, das die Schüler in den Unterricht einbringen, aus Schulwissen zusammen. Zu Anfang der Stunde setzt der Lehrer das Thema fest: Die Aufgabe 3/4 mal 1/5 steht im Raum und soll gelöst werden. Die anschließenden Äußerungen der Schüler (mögliche Ergebnisse und wie sie darauf gekommen sind, schließlich der Vorschlag, man könnte das „am besten dadurch nachprüfen, daß man da, da ’ne Eingabe nimmt und das ausrechnet“) sind recht eindeutig einem Wissen zuzuordnen, das aus vorherigem Unterricht stammt. Wie schon in A_1 tauchen auch hier keine lebensweltlichen Äußerungen auf. Das Vorwissen der Schüler beeinflußt außerdem entscheidend den Unterrichtsverlauf. Denn der Rückgriff auf Streck- und Stauchmaschinen war vom Lehrer nicht unbedingt geplant, wie er im anschließenden Interview bemerkt:

> „Z.B die ganze Sache mit der Maschine hätte von mir aus überhaupt nicht zu erscheinen brauchen, für mich war nur wichtig, was rechts auf der Tafel war, die verketteten Operatoren. Das Auseinanderpunkten in Streck- und Stauchoperatoren usw., das war für mich wichtig. Auf die Maschinen hätte ich auch verzichten können.“

Der Lehrer geht also auf die Vorschläge der Schüler ein und lenkt das Unterrichtsgespräch dann in die vorgegebene Richtung. Damit erscheint analog zur ersten Stunde und noch deutlicher das Sachwissen des Lehrers meist nur indirekt, indem er Aussagen der Schüler bestätigt (FORT *lern*) oder durch gezielte Fragen den Unterricht auf ein bestimmtes Ziel hinlenkt (AUFF *wiss*). Fortführende *wiss*-Äußerungen, hinter denen sich vom Lehrer direkt in den Unterricht eingebrachtes Wissen verbergen kann, findet man in $A_3(2)$ zwar häufiger als in $A_1(1)$, sie sind bei genauerem Hinsehen jedoch nur Zusammenfassungen von Unterrichts(-teil)ergebnissen, in denen er sich auf Antworten der Schüler bezieht.

Bei der Frage nach der Geltung des Wissens ergibt sich allerdings ein entscheidender Unterschied. Darauf weisen der geringere Anteil von fortführenden *lern*-Äußerungen des Lehrers und der große Anteil von auf Wissenschaft bezogenen Sprechakten insgesamt (ca. 60%) hin. Durch eine inhaltliche Betrachtung wird der Unterschied sichtbar: War es in den August-Stunden (A_1) in erster Linie der Lehrer, der die Geltung aufgrund seiner pädagogischen Autorität verbürgte, indem er die Vorschläge der Schüler als richtig legitimierte und an einigen, aber entscheidenden Stellen sein Wissen direkt in den Unterricht einbrachte, so beruft er sich hier viel deutlicher auf die Wissenschaft Mathematik als die Geltung verbürgende Instanz. Der Verlauf der Stunde soll vor diesem Hintergrund noch einmal betrachtet werden:

Zu Beginn steht die erwähnte Aufgabe, woraufhin die Schüler zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen kommen.

> Lehrer: „ …wir müßten jetzt versuchen herauszufinden, welche Vermutung sich als richtig erweisen wird.“

Die Schüler beschreiben zunächst den Rechenweg, der auf die Ergebnisse geführt hat. Dann kommt der Vorschlag von Stefan, eine Eingabe zu nehmen und die Brüche als Bruchoperatoren zu verwenden. Es wird gezeigt, daß 3/20 das gleiche leistet wie 3/4 verkettet mit 1/5.

> Lehrer: „…es scheint sich zu bestätigen, daß diese Antwort richtig ist … dadurch, daß es jetzt bei diesem Beispiel mal geklappt hat, mein ich, läßt sich das noch nich’ ganz so ohne weiteres für

> immer, für alle Fälle behaupten, und deswegen meine ich, sollten wir versuchen, 'ne etwas mathematischere Lösung zu finden."

Erst der anschließende Beweis, bei dem auf die bekannten Eigenschaften der Operatoren zurückgegriffen wird, bringt die endgültige Bestätigung für die vermutete Regel bzw. für die Richtigkeit des Ergebnisses. Der Lehrer faßt dann zusammen:

> „Ja, genau in dieser Zeile wird deutlich, was wir vorher als Behauptung aufgestellt hatten, Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner, und aus der Behauptung ist jetzt 'ne Regel geworden."

Das entscheidende Unterrichtsergebnis erhält seine Geltung ausdrücklich durch den mathematischen Beweis. Damit ist die Instanz, die für die Geltung beansprucht wird, eindeutig die Wissenschaft Mathematik. Dies ist ein wichtiger Unterschied zur ersten Unterrichtsstunde, der auch für die folgenden Interpretationen von Bedeutung sein wird.

5.2.2.2 Öffnung des Wissens

Wie in der zuvor analysierten Unterrichtsstunde tauchen auch hier so gut wie keine Bruchstellen auf, der Unterricht verläuft reibungslos. Auch im Schülerinterview lassen sich keine Hinweise auf mögliche Interpretationsdifferenzen feststellen. Im Gegenteil: Die für den Beweis wohl wichtigste Einsicht, daß Bruchoperatoren etwas anderes sind als Bruchzahlen, scheint für die Schüler scheinbar ganz einleuchtend zu sein. So sagt ein Schüler im Interview:

> „Naja, das is' eigentlich wie … ein Begriff; wie, zwei Wörter für einen Begriff sozusagen. Brüche, also das gibt es ja, ¾, das wird ja auch anders angewendet, nicht nur im Mathematischen. … Und mit Bruchoperator will man sagen, daß es also aus Operatoren besteht und daß es jetzt aber auch 'n Bruch is'."

Für diesen Schüler scheint der Unterschied zwischen den beiden Begriffen darin zu bestehen, daß die Bruchzahlen in der Alltagswelt zu finden sind und die Bruchoperatoren eher mathematische Gebilde, die für die Zahlen einen Erklärungswert besitzen. Obwohl angemerkt werden muß, daß dieser Schüler den Sachverhalt am klarsten ausdrückt, und eine andere Schülerin den Unterschied im Unterricht nicht bemerkt hat, sind sich die übrigen am Interview beteiligten Schüler doch darin einig, daß die Teilung in Bruchzahlen und -operatoren sinnvoll und notwendig war, um die Regel zu beweisen.[89]

Einerseits kann diese Tatsache als ein Indiz dafür gedeutet werden, daß Lehrer und Schüler die verbindlich gemachten Geltungsansprüche teilen und deshalb keine unterschiedlichen Interpretationen aufeinandertreffen, die eine Aushandlung nötig machen. In der ersten Analyse (5.1) wurden verschiedene mögliche Interpretationen dieses Sachverhalts angegeben, die dieser Deutung zumindest kritisch gegenüberstanden. Eine

---

[89] Daß hier keine ähnlichen Schwierigkeiten wie in A_1 auftauchen, in der die Interpretationsdifferenz aus einem Widerspruch zwischen alltäglichem und mathematischem Sprachgebrauch resultierte, liegt vermutlich an der – auch durch den Gebrauch von zwei Tafelhälften visualisierten – Diskrepanz des Operatorenbegriffs zur Wirklichkeit. Wenn die Schüler den Begriff des Operators, den sie im übrigen schon lange aus vorherigen Stunden kennen, als einen rein mathematischen Begriff interpretieren, der bestimmte Aufgaben erfüllt (strecken und stauchen von Größen), letztlich aber ein abstraktes Gebilde ist, können keine Widersprüche mit alltäglichen Begriffsinterpretationen auftauchen. Der Begriff „Operator" existiert in ihrer Alltagswelt gar nicht – anders als der Begriff „Vielfache" zum Beispiel (vgl. 5.1.2.2).

bezog sich auf die Identifizierung des von Voigt festgestellten Erarbeitungsprozeßmusters (vgl. 3.2). Auch der Verlauf dieser Stunde entspricht stark diesem Prozeßmuster. So könnte man den reibungslosen Verlauf auch hier so verstehen, daß er eben Bedingung für die erfolgreiche Erarbeitung des Themas nach diesem Muster ist, das von Schülern wie vom Lehrer stark verinnerlicht ist.

Andererseits wurde oben festgestellt, daß in dieser Stunde im Gegensatz zur ersten es nicht allein der Lehrer ist, der die Geltung des Wissens verbürgt, sondern vor allem die Mathematik an sich, der mathematische Beweis und das logische Schlußfolgern, das er mit sich bringt. Diese innere Logik ist für jeden (wenigstens prinzipiell) nachvollziehbar und erzeugt von daher wahrscheinlich weniger Widerstände. Somit könnte das Fehlen von Bruchstellen in dieser Stunde tatsächlich so gedeutet werden, daß es keine sich widersprechenden Interpretationen gibt, die eine Aushandlung über die Geltung nötig machten. Oder anders ausgedrückt: Die Aushandlung von unterschiedlichen Interpretationen, wie sie sich z.B. in den zwei verschiedenen Ergebnissen zu Anfang der Stunde ausdrücken, erfolgt durch mathematisch-logische Schlußfolgerungen, die keinen Widerspruch erzeugen. Insofern könnte man die ganze Stunde auch als Aushandlung und schließliche Einigung auf eine Interpretation, nämlich die richtige Regel für die Multiplikation, deuten.

Gleichzeitig wird durch die mathematische Begründung der Konstruktionscharakter des im Unterricht erscheinenden Wissens deutlich. Den Schülern wird die Möglichkeit gegeben, die Multiplikation auf Bekanntes zurückzuführen und dadurch zu begründen, und das heißt, die Herkunft des Wissens nachzuvollziehen. Natürlich bezieht sich der Beweis nur auf die innermathematische Begründung. Warum, und das wäre eine weiterführende Frage, überhaupt das Thema „Multiplikation von Bruchzahlen“ im Unterricht erscheint, wird nicht gesagt, das setzt der Lehrer fest und wird auch an keiner Stelle in Frage gestellt. Ob dies im Nachhinein oder eventuell schon in den vorherigen Stunden beantwortet wurde, muß hier offenbleiben. Es bleibt aber festzuhalten, daß hier der Konstruktionscharakter des verbindlich gemachten Wissens um einiges deutlicher wird und daß die Schüler die Geltung des Wissens begründen können. Somit kann abschließend gesagt werden, daß der Grad an Reflexivität in dieser Unterrichtsstunde höher ist als in A_1.

5.2.3 Die Didaktik des Lehrers

Auch wenn wir die Didaktik des Lehrers betrachten, ergeben sich in diesem Unterricht Unterschiede zum vorherigen. Im entsprechenden Analyseabschnitt der ersten Unterrichtseinheit wurde vermutet, daß der Lehrer sich in einem Konflikt befindet, der daraus resultiert, daß er einerseits bestimmte Ansprüche an einen guten Unterricht hat (offener Unterricht), anderseits den Unterricht stark lenken muß, um sein Unterrichtsziel zu erreichen. Dies führte dazu, daß er seine pädagogische Autorität nicht offensichtlich machen konnte und sie dennoch einsetzte.[90] Jetzt ergibt sich ein anderes Bild: Die Autorität des Lehrers kommt klar zum Vorschein. Er gibt das Thema der Stunde vor, ohne ein scheinbares Problem zur Motivierung zu suchen, er bestimmt also ganz klar, was gemacht werden soll und gibt das Ziel der Stunde gleich zu Anfang vor. Nachdem der Vorschlag mit der Eingabe gefallen ist, lenkt er das Unterrichtsgespräch stark in diese Richtung weiter. Schließlich die „etwas mathematischere Begründung“: „Und dazu mein Vorschlag, daß wir vielleicht hier noch mal ansetzen …“, wie der Lehrer diesen Unterrichtsabschnitt einleitet.

Gleichzeitig ist der Unterricht insofern „offen“, als der Weg über den Eingabe- Ausgabe-Vergleich von einem Schüler vorgeschlagen wurde, und der Lehrer den spezifischen Unterrichtsverlauf nicht unbedingt so geplant hatte. Außerdem entspricht der Beweis seiner Vorstellung von einem guten Unterricht, in dem die Schüler einer logischen Schlußfolgerung mehr trauen sollen, als seiner Bestätigung (s. Interviewzitate S. 97). Der Konflikt der ersten Stunde wird hier nicht sichtbar oder ist vielleicht gar nicht vorhanden.

Dieser Unterschied zur ersten Unterrichtseinheit liegt vermutlich darin begründet, daß es hier tatsächlich etwas zu erarbeiten gibt. In der ersten Stunde handelte es sich um eine Definition, die lediglich plausibel gemacht werden konnte, die aber schließlich vom Lehrer vorgegeben werden mußte. Bei der Erarbeitung der Multiplikationsregel allerdings konnten die Schüler beteiligt werden, sie konnten maßgebliche Beiträge zum Unterricht leisten, die auch thematisch weiterführten. Sein Anspruch konnte hier realisiert werden, während ihm in der August-Stunde vom Thema her Grenzen gesetzt waren. Der Sinn des Themas muß hier nicht künstlich legitimiert werden, sondern ergibt sich von selbst, weil man eben wissen will oder muß, wie man zwei Bruchzahlen miteinander multipliziert.

5.2.4 Das Fach und die Schule

Wie in A_1 ergeben sich auch hier keine Widersprüche zu den Richtlinien. Der Unterricht steht in Einklang sowohl mit den allgemeinen als auch den speziellen Lernzielen. Die Stunde ist dem Lernziel „Die Multiplikation von Bruchzahlen an einem Modell beschreiben.“ (Rahmenrichtlinien 1978, S.54) zuzuordnen. Weder in den Rahmenrichtlinien noch in den Vorläufigen Handreichungen wird allerdings festgelegt, welches Modell herangezogen werden soll. Der Rückgriff auf das Operatoren-Modell ist daher vermutlich auf das verwendete Schulbuch (Mathematik heute, 1971) zurückzuführen (vgl. S. 110).

[90] Einem Mißverständnis soll hier vorgebeugt werden: Daß ein Lehrer pädagogische Autorität einsetzt, um ein Unterrichtsziel zu verfolgen, soll keineswegs negativ verstanden werden. Es liegt vielmehr in der Natur der Sache. Der Lehrer ist per definitionem mit pädagogischer Autorität ausgestattet. Wenn kritisiert wird, dann müßte die Kritik dort ansetzen, wo diese nicht sichtbar wird und wo durch sie Geltung verbürgt wird, ohne daß es den Schülern bewußt werden kann.

5.2.5 Mathematik im Unterricht

Im Gegensatz zu A_1 kommt in diesem Unterricht der Aspekt des Modells ganz ausdrücklich zur Sprache: Die Bruchzahlen werden übertragen auf das Modell der Bruchoperatoren, mit deren Hilfe dann die Rechenregel für die Multiplikation von Bruchzahlen bewiesen wird. Die Übertragung wird im Unterricht deutlich herausgestellt, indem auf zwei Tafelhälften operiert wird: auf der einen Seite stehen die Bruchzahlen, auf der anderen die Operatoren, die nicht multipliziert, sondern verknüpft werden. Es handelt sich allerdings um eine rein innermathematische Modellierung, ein Zusammenhang mit der außermathematischen Wirklichkeit wird nicht hergestellt.

Ebenfalls kommt die Mathematik als ein System zur Sprache: Es wird eine Regel, ein Satz gesucht und auf seine Richtigkeit untersucht und bewiesen. Dazu wird der Sachverhalt in einen größeren Zusammenhang (Operatoren, die gleichzeitig als Modell fungieren) eingeordnet und anschließend zurückübertragen. Damit erscheint der Satz nicht losgelöst, sondern kann interpretiert werden im Zusammenhang mit dem System der (bekannten) Operatoren.

Schließlich wird auch der Aspekt der Überprüfung, wenn auch eher implizit, angesprochen: Zu Anfang der Stunde stehen sich zwei Vermutungen gegenüber. Der Beweis mit Hilfe der Operatoren zeigt, daß nur eine Möglichkeit die richtige sein kann, die andere wird dadurch widerlegt. Es findet sich auch ein direkter Widerspruch zur anfänglichen falschen Lösung. Ein Schüler merkt an, daß 15/20 das Gleiche ist wie 3/4 (vgl. 4. Unterrichtsabschnitt). Das wird zwar vom Lehrer aufgenommen und als richtig legitimiert, allerdings nicht als Widerspruch zur ursprünglichen Vermutung interpretiert. Damit hätte man die Lösung 15/20 bereits ausschließen können.

Zusammenfassend kann man festhalten, daß in dieser Stunde alle Aspekte der Mathematik mehr oder weniger explizit aufzufinden sind. Allerdings finden sich auch hier keinerlei Bezüge zur außermathematischen Wirklichkeit. Innermathematisch jedoch haben die Schüler die Möglichkeit, wichtige Funktionen und Eigenschaften der Mathematik zu erkennen.

5.3 Die Unterrichtseinheit A_4

Die drei Stunden der Unterrichtseinheit A_4 wurde im Juni 1978 aufgenommen, also gegen Ende des Schuljahres in der 6. Klasse des A-Kurses bei Lehrer A. Thematisch geht es in diesen Stunden um Dezimalbrüche: Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche (1. Stunde), Umwandlung von Bruchzahlen in Dezimalbrüche (2. Stunde, die im folgenden ausführlich analysiert wird) und Voraussetzungen für die Umwandlung von Bruchzahlen in Dezimalbrüche (3. Stunde). Nach der 2. Stunde wurde ein Interview mit dem Lehrer durchgeführt.

5.3.1 Paraphrase zu $A_4(2)$

Thema: Umwandlung einer Bruchzahl in einen Dezimalbruch

1. Kontrolle der Hausaufgaben.

Mathematik heute, S.192, Aufg. 6a): Umwandlung von Dezimalbrüchen in Bruchzahlen, die in mehreren Schritten so weit wie möglich gekürzt werden sollen.

2. Wiederholung: Die Bedeutung der einzelnen Stellen bei einem Dezimalbruch.

3. Umwandeln von Bruchzahlen in Dezimalbrüche.

An der Tafel steht bereits die Aufgabe: 4/25 = ?. Astrid nennt sofort das Ergebnis: 0,16. Daraufhin wird das Ergebnis von den Schülern begründet (ohne daß der Lehrer eine entsprechende Frage stellt): Man muß den Bruch so erweitern, daß im Nenner 100 steht, in diesem Fall mit 4. Auf die richtige Antwort von Astrid geht der Lehrer zunächst nicht weiter ein, er stellt zusammenfassend und verallgemeinernd fest, daß man eine Bruchzahl so erweitern müsse, daß im Nenner eine Zehnerpotenz steht, d.h. 4/25 wird im ersten Schritt auf 16/100 erweitert.

4. Eine Begründung für 16/100 = 0,16.

Der Lehrer führt fort: „So, und jetzt … der nächste Schritt: Zwei Stellen haben wir hier, irgendwo kommt ’nen Komma hin, das wissen wir schon, weil’s … ’nen Dezimalbruch werden soll … Jetzt fehlt nur noch ’ne Begründung“ für den richtigen „Vorschlag“ 0,16. Als erstes wird von einem Schüler gesagt, daß eine Null vor dem Komma stehen muß, weil der Bruch 16/100 „kein Ganzes“ enthält. „Aber das heißt ja nun nicht, daß es 0,16 sein muß, es könnte ja auch 0,016 sein“ führt der Lehrer das Gespräch fort. Eine Schülerin verweist auf das, was Petra gestern gesagt hat: daß die Anzahl der Stellen nach dem Komma gleich der Anzahl der Nullen im Nenner sei. Diese Begründung reicht noch nicht aus, denn Petra hat das „aus einer ganz bestimmten Überlegung heraus“ gesagt, wie der Lehrer anführt. Er möchte „noch einen Zwischenschritt machen, so daß … die 16 praktisch zerlegt wird, … daß im Zähler jeweils nur eine Ziffer steht“. Daraufhin antworten die Schüler: 16/100 kann man in 10/100 und 6/100 zerlegen, die 10/100 kann man kürzen zu 1/10. Jetzt kann die 1 und die 6 in die Stellentafel eingeordnet werden (was im Unterricht nicht explizit gemacht wird, „ihr habt diese Stellentafel noch vor Augen“), und daraus kann die Zahl 0,16 abgelesen werden (0 Einer, 1 Zehntel, 6 Hundertstel).

5. Übung

Der Bruch 3/500 wird gemeinsam in einen Dezimalbruch umgewandelt, wobei zur Begründung die Stellentafel herangezogen wird, vom Lehrer aber auch noch einmal explizit auf die Regel von Petra (s.o.) hingewiesen wird. Der zweite Bruch (17/40) wird nur noch mit Hilfe dieser Regel umgewandelt. Die Hausaufgabe (S.192, 5b)) wird noch in der Stunde begonnen und soll zu Hause beendet werden.

5.3.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.3.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Auch hier soll zunächst ein Vergleich mit den beiden zuvor analysierten Stunden einen ersten Einblick in Unterschiede und Gemeinsamkeiten verschaffen. Aufgenommen wurden wiederum nur die für die Konstitution des Wissens relevanten Merkmale bei Schülern und Lehrer aus $A_1(1)$, $A_3(2)$ und $A_4(2)$.

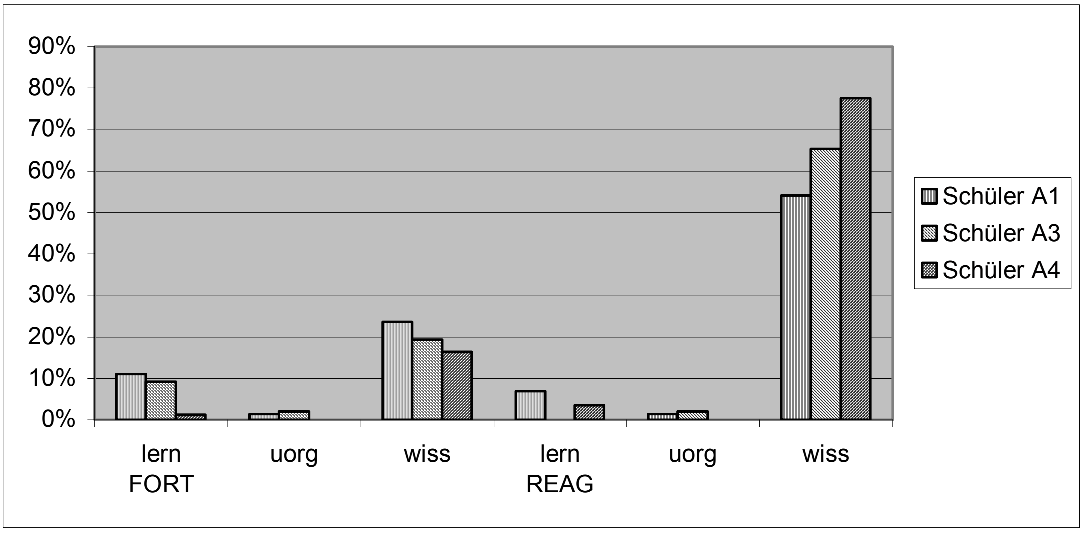

Abbildung 11: Vergleich der Schüler-Sprechakte in $A_1(1)$, $A_3(2)$ und $A_4(2)$ in Prozent bezogen auf die Schüler-Sprechakte insgesamt

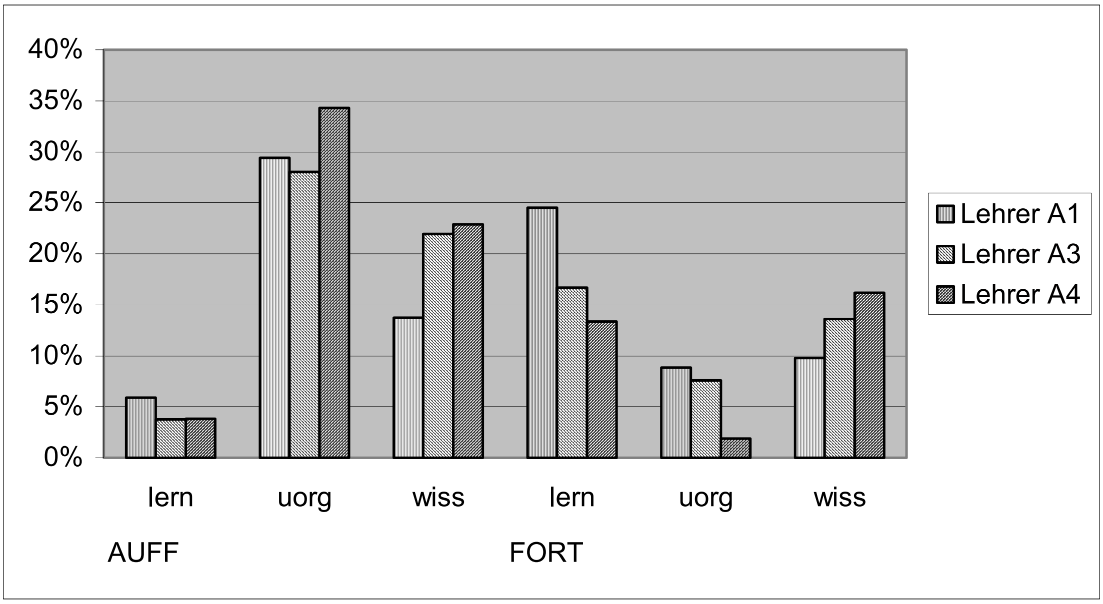

Abbildung 12: Vergleich der Lehrer-Sprechakte in $A_1(1)$, $A_3(2)$ und $A_4(2)$ in Prozent bezogen auf die Lehrer-Sprechakte insgesamt

Die Unterschiede, die im Vergleich von $A_3(2)$ zu $A_1(1)$ festgestellt wurden, zeigen sich hier noch deutlicher[91]. Demzufolge ergeben sich im Vergleich zu $A_3(2)$ sehr viele Gemeinsamkeiten und ganz ähnliche Unterschiede zu $A_1(1)$.

Auch in dieser Stunde konstituiert sich das Wissen im Unterricht vor allem aus dem Vorwissen der Schüler. Das Schulbuch jedenfalls wird erneut nur als Aufgabensammlung benutzt. Und nur an ganz wenigen Stellen erscheint das Sachwissen des Lehrers direkt im Unterricht. Das Vorwissen der Schüler ist wie in $A_3(2)$ recht eindeutig einem Schulwissen zuzuordnen (fast 80% aller Schüler-Sprechakte sind reagierende *wiss*-Äußerungen), es stammt vor allem aus der vorangegangenen Stunde, in der das Umwandeln von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche anhand einer Stellentafel erarbeitet und geübt wurde.

Eine weitere Ähnlichkeit zur Februar-Stunde: Die Geltung verbürgt wiederum ganz ausdrücklich die Wissenschaft Mathematik. Dies wird unter anderem an einer Stelle ganz offensichtlich, wo sich ein Schüler bei der Begründung des Ergebnisses 0,16 auf die Aussage von Petra aus der letzten Stunde beruft. Daraufhin der Lehrer:

> „Wenn wir jetzt wüßten, daß Petra in allen Dingen, die Mathematik betreffen recht hat, dann könnten wir jetzt weitermachen, nicht, dann wär das Problem erledigt."

Also nicht irgendeine Person steht für die Geltung ein, sondern erst der widerspruchslose mathematische Beweis. Explizit stellt der Lehrer die Geltung verbürgende Instanz (die Schülerin) in Frage und beruft sich auf eine höhere Autorität: die Mathematik.

---

[91] Eine Ausnahme bilden die auffordernden *uorg*-Äußerungen des Lehrers. Sie bilden aber wie in allen Stunden die häufigste Kategorie, ein Zeichen dafür, daß der Lehrer den Unterricht durchweg eher organisiert, als inhaltlich relevante Hinweise zu geben.

5.3.2.2 Öffnung des Wissens

Auch in dieser Stunde lassen sich keine Bruchstellen im Unterricht identifizieren. Zum einen wird auch hier das Erarbeitungsprozeßmuster deutlich sichtbar, zum anderen können vom Thema her wenig Widersprüche auftreten, da die logische Schlußfolgerung so etwas zum großen Teil ausschließt. D.h. man kann die Tatsache, daß offensichtlich keine Bruchstellen im Unterricht auftauchen, ganz ähnlich interpretieren, wie oben in der Februar- Stunde (A_3). Die Frage nach der Öffnung des Wissens kann daher nicht eindeutig beantwortet werden[92].

5.3.3 Die Didaktik des Lehrers

In dieser Stunde fällt eine Tatsache auf, die eventuell auf die in den obigen Analysen dargestellte Einstellung des Lehrers zurückzuführen ist. Schaut man sich das Unterrichtsergebnis an, das am Ende der Stunde an der Tafel steht, (4/25 = 16/100 = 10/100 + 6/100 = 1/10 + 6/100 = 0,16) und verfolgt den Weg bis dahin, so stellt man fest, daß die entscheidenden Beweisschritte schon sehr früh von einigen Schülern genannt werden. Z.B. Henning:

> „Und also, es sind nur 16/100 da. Und wenn man jetzt die Ziffer, also die Zehntel, das dadrüber schreiben könnte, is' also 1/10 und 6/100, gleich 16/100. Wie der Bruch da auch steht, wie wir das da jetzt als Dezimalstelle haben."

Und wenig später Susi:

> „Wenn man jetzt also wieder hinterm Komma in Zehner, Hunderter, Tausender usw. einteilen würde, dann steht hier 16/100, das erkennt man doch schon. Also müssen, äh, ein Zehner und 6/100 eben sein hinterm Komma."

Auch wenn Susi hier scheinbar Zehner mit Zehntel verwechselt, der Hinweis auf die Stellentafel ist korrekt, und auch von Henning wird sie implizit angesprochen. Dies ist genau das, was der Lehrer eigentlich will, er hatte zuvor die Frage aufgeworfen, warum die Dezimalzahl 0,16 lauten müsse und nicht vielleicht 0,016. Diese Frage wird auch zum Schluß mit Rückgriff auf die Stellentafel beantwortet, die die Schüler aus der letzten Stunde kannten. Auf die oben zitierten Äußerungen geht der Lehrer aber in keiner Weise ein. Sie bleiben im Raum stehen, ohne daß sie für den Unterrichtsverlauf genutzt werden. Aus Hennings Antwort zieht der Lehrer lediglich die Tatsache heraus, daß die Dezimalzahl mit Null anfangen müsse. Der Rest der Äußerung bleibt unbeachtet. Statt dessen bleibt die Frage nach der angemessenen Begründung zunächst unbeantwortet, bis der Lehrer ein „scheinbares" Problem aufwirft:

> „Ich glaube die Schwierigkeit liegt darin, daß … wir hinter dem Komma ja jeweils immer nur eine Stelle für, äh, haben, die eine ganz bestimmte Bedeutung hat. Und bei dieser Zahl hier haben wir nun zwei Ziffern, diese Zahl hier im Zähler besteht aus zwei Ziffern, die irgendwie untergebracht werden müssen. Und die können ja nicht auf derselben Stelle untergebracht werden, auf einer Stelle kann ja immer nur eine Ziffer untergebracht werden."

---

[92] Zu dieser Stunde wurden leider keine Schülerinterviews gemacht, die näheren Aufschluß darüber geben könnten.

Anschließend dann wird 16/100 zerlegt in 10/100 und 6/100, 10/100 kann man kürzen zu 1/10, und das ergibt, wenn man „die Stellentafel noch vor Augen“ hat, wie der Lehrer sich ausdrückt, die Dezimalzahl 0,16. Hier sieht man deutlich, daß diese Schritte ausdrücklich von den zitierten Schülern schon genannt wurden.

Warum also dieser lange Weg bis zum Unterrichtsergebnis, warum das Scheinproblem?[93] Das hängt wahrscheinlich wieder mit der Einstellung des Lehrers, mit seinem Anspruch an einen guten Unterricht zusammen. Die Schüler sollen ja ihren eigenen Überlegungen mehr trauen als der Bestätigung des Lehrers, sie sollen mitdenken, Begründungen liefern und den Weg zum Unterrichtsergebnis maßgeblich mitgestalten. Dazu ein weiteres Zitat aus dem Lehrerinterview:

> „Die meisten Schüler hatten also im Grunde schon akzeptiert gehabt, daß … 4/25 0,16 ist, mindestens so gefühlsmäßig: Ja das könnte hinkommen. Und wenn ‘se dann natürlich ‘n Umkehrschluß machen, das, was sie gestern gemacht … haben, nämlich … 0,16 wieder umwandeln in einen gewöhnlichen Bruch, das ham sicherlich einige insgeheim gemacht, … dann kam 4/25 gekürzt raus, und das war für sie Beweis genug.“

> „…das andere Ziel, was ich damit im Auge habe, ist …aber ein bestimmtes Verhalten…beim Schüler, daß er sich also nicht von vornherein dann zufrieden gibt, wenn der Lehrer sagt: Ja, das ist richtig, sondern daß er in seiner Haltung dahin gebracht wird, für sich kritisch zu fragen, warum das denn nun richtig ist, nicht. Das bedeutet für mich jetzt, daß ich mich eben nicht damit zufrieden gebe, wenn das eine Mädchen sagt: Das hat die Petra doch gestern schon gesagt.“

Es wird hier deutlich, wie wichtig dem Lehrer ein „kritisches“ Verhalten mathematischen Ergebnissen gegenüber ist. Angesichts des Vorwissens der Schüler aus der letzten Stunde, das sich einerseits in den oben zitierten Äußerungen der Schüler und implizit in dem richtigen Ergebnis, auf das sie wahrscheinlich durch den naheliegenden „Umkehrschluß“ gekommen sind[94], äußert, erscheint der lange Beweisweg allerdings etwas gekünstelt. Auch das scheinbare Problem, das der Lehrer aufwirft, ist vermutlich kein Problem der Schüler. Zumindest wird nirgends deutlich, daß es für die Schüler eine Schwierigkeit darstellt, die beiden Ziffern an einer Stelle der Dezimalzahl unterzubringen. Hätte der Lehrer allerdings die Äußerungen von Henning oder Susi aufgegriffen, wäre die relative Trivialität sichtbar geworden, das scheinbar Anspruchsvolle des Unterrichts wäre verlorengegangen.

Der Einfluß der Sache, die im Unterricht bearbeitet wird, auf die Umsetzung eines im Sinne des Lehrers guten Unterrichts, tritt hier noch einmal klar hervor. Während es in $A_3(2)$ sinnvoll und notwendig erscheint, die Vermutung zu beweisen und dies in einer sehr anspruchsvollen Weise geschieht, die sich aber aus der Sache selbst ergibt, erscheint das Bestehen auf einer mathematischen Begründung auf ähnlich hohem Niveau in $A_1(1)$ und $A_4(2)$ eher gekünstelt. In der August-Stunde ($A_1(1)$) gab es nichts zu be-

[93] Der Lehrer selbst sagt dazu im Interview: „… das Problem, was ich scheinbar … dort aufgebaut habe, daß nämlich also die Eins und die Sechs, weil’s ja sich um Hundertstel handelt, auf dieselbe Stelle müssen, das existiert ja gar nicht, weil die Eins ja gar nicht auf der Hundertstel Stelle steht, das sind ja 10/100.“

[94] Dieser ist in der Tat Beweis genug , denn es entsteht ja die gleiche Gleichungskette, nur andersherum aufgeschrieben.

gründen, da es sich um die Erarbeitung einer Definition handelte. In der Stunde jetzt hätte der „Umkehrschluß“ ausgereicht, er unterscheidet sich qualitativ nicht vom Unterrichtsergebnis, bzw. wäre das „Scheinproblem“ nicht notwendig gewesen, da entscheidende Hinweise schon sehr viel früher kamen.

Ich möchte an dieser Stelle noch auf eine weitere Unterrichtssequenz aufmerksam machen, die sich in der vorhergehenden Stunde $A_4(1)$ findet. Hier erkennt man recht deutlich das „Muster der inszenierten Alltäglichkeit“ (Voigt 1984), das in 2.5 unter dem Gesichtspunkt der Vermittlung zwischen objektiven und subjektiven Bedürfnissen der Schüler interpretiert wurde.

Die Dynamik dieses Interaktionsmusters beschreibt er wie folgt:

- „ Der Lehrer stellt eine offene Frage, deren Antwort außerschulische Alltagsvorstellungen der Schüler beinhalten muß.
- Wegen der vom Lehrer geschaffenen Notwendigkeit, aus den subjektiven außerschulischen Erfahrungen heraus zu argumentieren, ergeben sich Schülerantworten, die den Zielen des Lehrers nicht dienen oder sogar entgegenstehen.
- Um seinen Anspruch aufrechtzuerhalten, an Alltagsvorstellungen der Schüler anzuknüpfen und ein vorab bestimmtes Ziel zu erreichen, ändert der Lehrer spontan die Bedingungen der Aufgabe.
- Die Schüler müssen die Änderung der Aufgabe akzeptieren.“ (Voigt 1984, S.180)

Dazu nun ein Unterrichtsausschnitt:

Der Lehrer schreibt als Thema dieser und der folgenden Stunden an die Tafel: Dezimalzahlen (-brüche).

L: Meine Frage ist zunächst einfach mal, was ihr für’ne Vorstellung vom Thema habt, bzw. was ihr denkt, was im Laufe der Zeit, bis das Thema abgeschlossen ist, alles behandelt werden sein muß, so daß zum Schluß jeder für sich sagen kann: Naja, das hab’ ich jetzt einigermaßen drauf. … Vielleicht fällt es euch leichter schon mal zu vermuten, was alles behandelt werden muß an Unterthemen.

Lehrer schreibt an die Tafel: Beispiele für Dezimalzahlen

S: Zehnerzahlen.

L: Richtig lustig. Jeden Tag habt ihr damit zu tun, und trotzdem kann sich keiner was darunter vorstellen. Für die Fahrt nach Anderten, was habt ihr denn da bezahlt?

Gerd: 3 Mark 70.

Dagmar: Ich wüßte noch ’ne Zahl. 5 Komma und 60 oder so.

L: Vielleicht mal ’ne Zahl, die anders aussieht, als diese beiden.

Arno: 11 Mark 11.

L: Vergiß mal die DM, es gibt ja noch andere Dezimalzahlen oder andere Größen, bei denen Dezimalzahlen verwendet werden. …

S: 1 Meter 30.

L: Ohne Größe bitte.

S: 1 Komma 30.

Hier fällt folgendes auf: Der Lehrer fordert die Schüler zunächst ausdrücklich auf, ihre eigenen Vorstellungen zum Thema in den Unterricht einzubringen. Die Schüler wissen aber anscheinend gar nicht, was mit dem Begriff „Dezimalzahlen“ genau gemeint sein könnte. Erst nach dem Hinweis des Lehrers auf einen Geldbetrag, kommen verschiedene Dezimalzahlen, die immer mit einer Größe verbunden sind. Dann jedoch wird deutlich, worauf der Lehrer hinaus will: Er will die Zahlen ohne Größeneinheit genannt haben und abstrahiert damit von den konkreten Erfahrungen der Schüler, die er zu Beginn doch gerade herausgefordert hat. Denn: Die Schüler haben nicht jeden Tag mit den Zahlen an sich zu tun, sondern in ihrer Alltagswelt kommen sie als Bezeichnung von konkreten Größen vor, sie sind Maßzahlen für Größeneinheiten (DM, Meter, Liter usw.).

Die Akzeptanz der vom Lehrer geänderten Sichtweise durch die Schüler wird im nachfolgenden Unterrichtsabschnitt sehr deutlich. Im Anschluß an den obigen Ausschnitt nennen die Schüler nur noch Dezimalzahlen ohne Größeneinheiten. Als es aber darum geht, die Bedeutung der einzelnen Stellen vor und nach dem Komma herauszuarbeiten, bleiben die Schüler weiterhin auf der mathematischen Ebene, obwohl der Lehrer anscheinend im Sinn hat, das durch ein Größenbeispiel zu begründen. Er fragt viermal nach einer Begründung dafür, daß die Stellen hinter dem Komma Zehntel und Hundertstel angeben. Dann der indirekte Hinweis von ihm:

> „Ja, ihr habt schon recht. Nur so wie's bislang gesagt worden ist, war's schlicht 'ne Behauptung, ohne daß man das annähernd belegt hat durch Beispiele, die alle kennen, oder auch durch regelrechte Begründungen."

„Durch Beispiele, die alle kennen", damit legitimiert er wieder die Sichtweise, die schon zu Anfang von den Schülern eingenommen wurde, er zeigt damit an, daß nun wieder die Alltagsvorstellungen eingebracht werden dürfen, die er vorher ausgeschlossen hatte. Und prompt lautet die nächste Antwort eines Schülers:

> „Z.B. bei Geld, wenn man da null Komma null eins Mark hätte, das wäre dann ein Pfennig. Ein Pfennig ist ein Hundertstel von einer Mark."

Es folgen weiter ähnliche Beispiele von den Schülern. Hier wird deutlich: Die Perspektiven der Schüler, die zunächst vom Lehrer direkt gefordert werden, sind für die Bearbeitung des Themas, so wie der Lehrer es vorgesehen hat, eigentlich nicht notwendig. Die Schüler wissen das und spielen das Spiel mit, indem sie sofort bereitwillig davon ablassen und die mathematische Perspektive des Unterrichts einnehmen. Ist dieser Perspektivenwechsel einmal vollzogen, ist es schwer, sich wieder auf Alltagsvorstellungen einzulassen, die Schüler erwarten das scheinbar nicht. Diese Erwartungshaltung, die man aus dem oben beschriebenen Verlauf des Unterrichts ablesen kann, spricht dafür, daß es sich hier tatsächlich um ein Interaktionsmuster handelt, das von Schülern und Lehrer internalisiert wurde (wie auch das Erarbeitungsprozeßmuster) und das wiederum mit dazu beiträgt, daß der Unterricht so reibungslos abläuft.

Wie schon angedeutet, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, daß dieses Muster typisch für diesen Unterricht ist. Es ist die einzige Stelle, in allen Unterrichtsprotokollen, die dieses Muster – zumindest im A-Kurs[95] – derart sichtbar macht. Aber so viel kann festgehalten werden: Es deckt sich insofern mit der Didaktik des Lehrers, als er die Schüler einbeziehen möchte in den Verlauf des Unterrichts, sie sollen selbst „Vorschläge machen" können. Andererseits verfolgt er insbesondere im A-Kurs das Ziel, daß die

---

[95] Im C-Kurs stellt sich die Sache etwas anders dar. Die Einführung in das Thema ‚Teiler und Vielfache' kann ebenfalls vor dem Hintergrund dieses Interaktionsmusters interpretiert werden (vgl. 5.1.4.2).

Schüler „mit Mathematik umgehen“ können; an keiner Stelle der Interviews jedenfalls wird deutlich, daß der Bezug zum Alltag in seinem Unterricht eine besondere Rolle spielt. Dies zeigt sich auch in dem Fehlen von lebensweltlichen Äußerungen in allen drei ausführlich analysierten Unterrichtsstunden. Die Perspektiven der Schüler auf die behandelte Sache werden nur oberflächlich thematisiert, selbst hier, wo sie direkt angesprochen werden, tragen sie nicht notwendig zur Konstitution des Unterrichtsergebnisses bei. Denn selbst wenn schließlich die Begründung mit Hilfe von Größen erarbeitet wird, so stellt dies im Unterricht nur einen kurzen Perspektivenwechsel dar, dem die Schüler mit der Gewißheit folgen, daß diese Vorstellung von Dezimalzahlen letztlich nicht mehr gefragt ist. Am Ende steht die Stellentafel, unabhängig von Größeneinheiten und auch die Übungen und Hausaufgaben bestehen darin, Dezimalzahlen in Bruchzahlen umzuformen, ohne daß dabei die alltägliche Vorstellung davon noch zum Tragen kommt.

Da der Unterricht auch in dieser Stunde in Einklang mit den Richtlinien steht[96], wird der entsprechende Analyseabschnitt ausgelassen. Ich gehe direkt über zur Analyse von

5.3.4 Mathematik im Unterricht

In dieser Stunde kommt der Aspekt des Modells praktisch nicht vor. Lediglich in der vorangegangenen Stunde dieser Unterrichtseinheit ist er ansatzweise zu erkennen. Hier werden die Dezimalzahlen erstmals eingeführt und die Bedeutung der Dezimalstellen vor und nach dem Komma erläutert. Dazu wird eine Stellentafel erstellt, in die die einzelnen Ziffern der Stellen eingetragen werden. Diese Stellentafel kann als ein Modell für Dezimalzahlen interpretiert werden. Wiederum handelt es sich aber auch hier um ein rein innermathematisches Modell, anhand dessen die ‚neuen‘ Zahlen veranschaulicht werden. Denn im Unterricht wird zwar anfangs auf Dezimalzahlen als Maßzahlen für konkrete Größen zurückgegriffen, diese Perspektive wird aber nicht lange eingehalten (s.o.); letztlich bleiben die Zahlen ohne Größeneinheit an der Tafel stehen, die dann in die Tabelle eingetragen werden (siehe dazu auch Abschnitt 0).

Während der ganzen Unterrichtseinheit steht dagegen der Aspekt des Systems sehr stark im Vordergrund. Die erste Stunde beginnt damit, daß der Lehrer als neues Thema vorgibt: ‚Dezimalzahlen (-brüche)‘. Nachdem geklärt ist, wie Dezimalzahlen aussehen, werden die Unterthemen für die nächsten Stunden (von den Schülern) genannt und an die Tafel geschrieben: Umwandeln in gewöhnliche Brüche, Umwandeln in Dezimalbrüche, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. Es sollen also die ‚neuen‘ Zahlen systematisch untersucht werden: ihr Zusammenhang mit den gewöhnlichen Bruchzahlen, die Rechenregeln. Die einzelnen Unterthemen sollen nach und nach abgearbeitet werden, das Ziel ist der sichere mathematische Umgang mit Dezimalzahlen.

[96] Vgl. Rahmenrichtlinien 1978, S. 53

Der Aspekt der Überprüfung taucht in dieser Stunde nur einmal auf, in den anderen beiden Stunden ist er nicht zu erkennen. Es ist die Stelle, die im Abschnitt 0 bereits zur Sprache kam, in der der Lehrer das ‚Scheinproblem' aufwirft, daß die Dezimalzahl zu 4/25 auch 0,016 anstatt 0,16 lauten könnte. Er widerspricht damit der Vermutung der Schüler, die eigentlich eine Erkenntnis ist (siehe ebenfalls 0). Das heißt, die Notwendigkeit der Überprüfung wird hier vom Lehrer provoziert, sie ergibt sich für die Schüler nicht zwangsläufig aus der Sache heraus. Das Verhalten des Lehrers wurde oben als Konsequenz seiner didaktischen Einstellung interpretiert. Hier wird dadurch deutlich, daß es sich nicht um einen echten Widerspruch handelt, in dem Sinne, daß eine Vermutung aus sachlichen und einsichtigen Gründen widerlegt würde, sondern um einen Trick des Lehrers, die Schüler dazu aufzufordern, ihre Erkenntnis auf anderem Wege zu begründen.

5.4 Die Unterrichtseinheit B

Die Unterrichtseinheit B wurde im August 1977 in einer 6. Klasse eines Gymnasiums in Niedersachsen aufgenommen. Sie besteht aus insgesamt drei Stunden, von denen die erste im folgenden ausführlich analysiert wird. Wie schon bei der ersten Einheit bei Lehrer A ist auch diese Stunde die erste nach den Sommerferien, allerdings ist die Klasse nicht neu zusammengesetzt worden, weil an dieser Schule nicht differenziert wurde. Die beiden folgenden Unterrichtseinheiten bei Lehrer C (5.5 und 5.6) wurden in derselben Klasse durchgeführt.

Thematisch geht es in den drei Stunden um die Einführung und die Addition von Bruchzahlen (erste Stunde) und um das Ordnen von Bruchzahlen der Größe nach (zweite und dritte Stunde). Interviews wurden leider keine durchgeführt.

5.4.1 Paraphrase B(1)

Thema: Einführung der Bruchzahlen und Addition von gleichnamigen Brüchen

1. Zwei Reihen von Zahlen: Wieviel Schokolade bekommt jedes Kind?

Der Lehrer schreibt zu Beginn der Stunde Zahlen in zwei Reihen an die Tafel. Die erste Reihe soll die „Anzahl von Tafeln Schokolade“ darstellen, die zweite Zahlenreihe „ist ’ne Anzahl von Kindern“. Die Frage dazu sollen die Schüler selbst stellen: „Wieviel Schokolade auf jedes Kind fällt.“ Die Antworten, in denen auch Bruchzahlen vorkommen, werden an der Tafel notiert.

2. 1/3 ist ein Bruch.

Die Ergebnisse sollen näher untersucht werden: „Was ist denn das eigentlich, was da steht?“ Die Schüler machen verschiedene Vorschläge: „Zahlen“, „Brüche“, „Bruchteile“. Eine Schülerin sagt: „Wenn man eine Tafel Schokolade in drei Teile schneidet, ist das eine Teil ein Drittel.“ Der Lehrer notiert an der Tafel die Stichworte „Teile“, „Bruch“, „Bruchteile“. Auf den Vorschlag eines Schülers wird eine „Tafel Schokolade“, also ein Rechteck, an die Tafel gemalt und ein Drittel davon markiert. Der Lehrer will „zwischendurch noch was festlegen“ und schreibt den Satz: „1/3 ist ein Bruch.“ an die Tafel.

3. Rückgriff auf die bislang bekannten natürlichen Zahlen

Nachdem der Begriff „Bruch“ feststeht, soll dieser näher bestimmt werden: „was ist denn so’n Bruch?“ Der Lehrer fragt weiter: „Womit haben wir uns denn vorher immer beschäftigt?“ Die Schüler antworten darauf: „mit Rechnen“, mit „Dividieren, Multiplizieren“ und ähnliches. Der Lehrer faßt zusammen und ergänzt: „Und das haben wir mit Zahlen gemacht“. Er schließt die Frage an: Die Brüche, „sind das auch Zahlen?“, die von den Schülern mit „Ja“ beantwortet wird.

4. Wenn Brüche Zahlen sind, muß man damit auch rechnen können: Mögliche Ergebnisse für die Addition zweier Brüche.

Die Frage des Lehrers, ob man „damit auch rechnen“ könne, wird ebenfalls mit „Ja“ beantwortet. „Wenn man damit rechnen kann, müßten wir auch Ergebnisse angeben.“: Für die Aufgabe 1/3 + 1/3 werden von den Schülern zwei verschiedene Ergebnisse genannt: 2/6 oder 2/3. Die dritte Möglichkeit, die zusammen mit den vorherigen an der Tafel festgehalten wird, stammt vom Lehrer: „Ich könnte mir vorstellen, statt der oberen Zahl, daß ich die addiere, könnt ich auch die unteren addieren.“ Er schlägt damit als weiteres Ergebnis 1/6 vor.

5. Ein Drittel plus ein Drittel ist gleich zwei Drittel.

Es soll nun überprüft werden, „wer recht hat, so daß es jeder einsieht“. Dies geschieht wiederum mit Hilfe einer Zeichnung: Von zwei gleich großen Rechtecken wird jeweils ein Drittel markiert und diese Stücke bilden zusammengesetzt zwei Drittel des Rechtecks. Anschließend wird das gleiche Verfahren mit Sechsteln durchgeführt, damit wird das zweite Ergebnis widerlegt. Das richtige Ergebnis 2/3 wird an der Tafel eingerahmt, die beiden anderen werden durchgestrichen.

6. Übungen und Hausaufgaben

Im letzten Unterrichtsabschnitt sollen die Schüler Aufgaben zur Addition von Brüchen von der Tafel abschreiben und mit der Lösung beginnen. Eine weitere Hausaufgabe besteht in der Formulierung einer Regel für die Addition gleichnamiger Brüche.

5.4.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.4.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Im folgenden gehe ich die einzelnen Abschnitte des Unterrichts durch und befrage sie nach der Herkunft des hier erscheinenden Wissens sowie nach den Geltung verbürgenden Instanzen.[97] Die Tabellen beziehen sich jeweils auf die einzelnen Unterrichtsabschnitte, da die Verteilung der Sprechakte unterschiedlich ist, was Konsequenzen für den Unterrichtsinhalt hat.

[97] Die zur Verfügung stehenden Unterlagen geben keine Auskunft darüber, ob der Lehrer in irgendeiner Form ein Schulbuch verwendet oder nicht. Die Unterrichtsprotokolle der hier zugrunde liegenden Stunden jedenfalls geben keinerlei Hinweise auf ein verwendetes Schulbuch. Als Wissensquellen kommen daher nur das Vorwissen der Schüler und das Wissen des Lehrers in Betracht.

Spielzüge	lebw	wiss	lern	uorg	usys	Summe
AUFF				2	1	3
FORT	8	3	3	2		16
REAG	7	3	2			12
Summe	15	6	5	4	1	31

Tabelle 3 :Sprechakte Schüler aus B(1), 1. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	lebw	wiss	lern	uorg	usys	Summe
AUFF	1			10	7	18
FORT	2	1	9	2		14
STRK	3			3	2	8
Summe	6	1	9	15	9	40

Tabelle 4: Sprechakte Lehrer aus B(1), 1. Unterrichtsabschnitt

Bei der Auszählung der Sprechakte im ersten Abschnitt fällt zunächst auf, daß der Schwerpunkt bei den Schülern auf dem lebensweltlichen Aspekt liegt, beim Lehrer hingegen auf dem unterrichtsorganisatorischen. Dies legt die Vermutung nahe, daß sich das Wissen im Unterricht vor allem aus dem Alltagswissen der Schüler zusammensetzt, während der Lehrer den Unterrichtsablauf im wesentlichen nur strukturiert und organisiert und sich mit inhaltlich bedeutsamen Äußerungen zurückhält. Die inhaltliche Betrachtung bestätigt diese Vermutung:

Der Lehrer schreibt zunächst einige Zahlen in zwei Reihen an die Tafel und fragt die Schüler nach einer entsprechenden Frage: „So, wer fragt denn jetzt mal, was das werden soll, warum ich die Zahlen angeschrieben habe." Es fallen die Antworten: „'ne Tabelle" und „wieviel mal die Zahl da reinpaßt". Die erste Antwort wird vom Lehrer zurückgewiesen, die zweite mit: „so was ähnliches isses, gar nicht schlecht", kommentiert. Dann erst bestimmt der Lehrer, was diese Zahlen bedeuten sollen und stellt damit einen lebensweltlichen Bezug her: Anzahl von Tafeln Schokolade und Anzahl von Kindern. Deutlich wird dieser Bezug in der überwiegenden Anzahl von *lebw*-Äußerungen der Schüler. Der Lehrer fordert die Schüler auf, die passende Frage zu stellen. Ein Schüler vermutet: „Ich glaube, wieviel Schokolade auf jedes Kind fällt." Die Antworten, die im folgenden auf diese Frage gesammelt werden, beziehen sich auf das Problem der (gerechten) Verteilung von Schokolade auf eine bestimmte Anzahl von Kindern, z.B.: „jeder kriegt 'n Drittel." Die Bruchzahlen, die bei den letzten drei Zahlenpaaren auftauchen, werden hier also lebensweltlich interpretiert. Das Wissen, das im Unterricht erscheint, setzt sich daher vor allem aus dem Alltagswissen der Schüler zusammen. Sie wissen, daß, wenn man eine Tafel Schokolade gerecht an drei Kinder verteilen will, jedes Kind genau ein Drittel bekommen muß[98].

Ihre Geltung erhalten die Antworten einerseits vom Lehrer, der sie positiv bewertet („Prima!") oder gar nicht kommentiert, nachdem sie an der Tafel festgehalten wurden,

[98] Daß die Verteilung gerecht sein soll, d.h. also, daß ausgeschlossen werden soll, daß ein Kind mehr als ein anderes erhält, wurde im Unterricht übrigens nicht explizit erwähnt. Das scheint für die Schüler selbstverständlich zu sein.

und sie dadurch implizit als richtig gelten läßt. Andererseits können auch die Schüler mit ihrer Alltagsvorstellung als legitimierende Instanz angesehen werden. An einer Stelle wird dies besonders deutlich:

Eine Tafel Schokolade soll an drei Kinder verteilt werden, das ist der erste Fall, bei dem eine Bruchzahl auftaucht.

S: Das ist aber, das geht ja kaum noch.
S: Doch, das geht.
S: Das geht zwar, aber … so viel könn' wa/
S: Doch das geht, jeder kriegt 'n Drittel. (wird von mehreren Schülern wiederholt)

Hier erhält die Antwort „1/3" ihre Geltung durch die mehrheitliche Übereinstimmung unter den Schülern (und durch das Schweigen des Lehrers).

Im zweiten Unterrichtsabschnitt sieht die Verteilung wie folgt aus:

Spielzüge	*lebw*	*wiss*	*lern*	*prak*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF			1	1	6	1	9
FORT	2	1	2				5
REAG	3	6	2	1			12
Summe	5	7	5	2	6	1	26

Tabelle 5 : Sprechakte Schüler aus B(1), 2. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*prak*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF	4	3	4	6	5	22
FORT		5	1	1	1	8
REAG				3		3
STRK				2		2
Summe	4	8	5	12	6	35

Tabelle 6: Sprechakte Lehrer aus B(1), 2. Unterrichtsabschnitt

Während im ersten Unterrichtsabschnitt das Alltagsverständnis von einer gerechten Verteilung im Vordergrund stand und somit die lebensweltlichen Äußerungen überwogen, lenkt der Lehrer im zweiten Abschnitt von diesem Bezug ab. Mit seiner Frage: „Was ist denn das eigentlich, was da steht?", ändert er zunächst die Perspektive auf den Gegenstand. Die Schüler reagieren darauf mit auf Wissenschaft bezogenen Antworten. Ohne daß der Lehrer es also ausdrücklich betont, scheint es für die Schüler logisch zu sein, daß nun eine „mathematische" Betrachtung des Sachverhalts folgt. Sie bringen verschiedene Vorschläge in den Unterricht ein: „Brüche", „Bruchrechnung", „Bruchteile". Woher sie diese Ausdrücke kennen, kann nicht beantwortet werden. Da das Thema jedoch neu ist, ist zu vermuten, daß es einem Alltagswissen im weitesten Sinne entstammt. Die Begriffe „Bruch" und „Bruchteile" werden vom Lehrer an die Tafel geschrieben und damit vorläufig legitimiert. Die Begriffe „Bruchrechnung" hingegen und auch „Zahlen", ein weiterer Schülervorschlag, werden nicht kommentiert und erhalten somit keine Geltung. Ein Schüler antwortet auf die eingangs gestellte Frage: „Wenn man eine Tafel Schokolade in drei Teile schneidet, ist das eine Teil ein Drittel." Der Lebenswelt-Bezug wird damit wieder hergestellt. Der Lehrer legitimiert jedoch nur einen Teil dieser Aussage: „Also, es sind Teile." Der Begriff „Teile" wird ebenfalls an die Tafel geschrieben. Der Lehrer weist den Vorschlag des Schülers zwar nicht zurück, schränkt ihn aber so weit ein, daß der lebensweltliche Bezug verloren geht. So ist es zu erklären, daß lebensweltliche Äußerungen nur bei den Schülern auftauchen. Der Lehrer möchte von dem konkreten Problem abstrahieren und eine Möglichkeit finden, diese neuen „Gebilde" in mathematischer Sprache auszudrücken (er hätte ja auch „Teile einer Schokolade" gelten lassen können).

Dann kommt der Vorschlag von einem Schüler, eine Tafel Schokolade zu zeichnen und in drei Stücke zu teilen (in diesem Teil des zweiten Abschnitts tauchen die *prak*-Spielzüge auf). Er wird vom Lehrer aufgenommen: „Is' ja kein schlechter Vorschlag, das mit 'ner Zeichnung zu machen." Er selbst zeichnet ein Rechteck an die Tafel, von dem ein Schüler ein Drittel markiert. Das Rechteck soll eine Tafel Schokolade symbolisieren, damit wird der Bezug zum Ausgangsproblem wieder hergestellt. Die Geltung dieses Wissens, in diesem Falle also das Wissen um die Größe eines Drittels von einer gegebenen Fläche, wird durch das Alltagsverständnis der Schüler verbürgt.

Am Ende dieses Abschnitts will der Lehrer „zwischendurch noch was festlegen". Er legitimiert nun ausdrücklich den Ausdruck „Bruch" für die Zahl 1/3, indem er als Definition den Satz : „1/3 ist ein Bruch." an die Tafel schreibt. Hier erscheint sein Wissen explizit im Unterricht und es wird auch nur von ihm, aufgrund seines Sachwissens, verbürgt. Er wählt aus den anfangs gemachten Vorschlägen aus und verschafft so diesem Begriff seine Geltung.

Im dritten Abschnitt zeigen die Tabellen, daß nun eindeutig die auf Wissenschaft bezogenen Äußerungen überwiegen:

Spielzüge	*lebw*	*wiss*	*priv*	*Summe*
AUFF			2	2
FORT		1	7	8
REAG	2	15	2	19
Summe	2	16	11	29

Tabelle 7: Sprechakte Schüler aus B(1), 3. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF	7	1	2	3	13
FORT	1	6			7
STRK	1				1
Summe	9	7	2	3	21

Tabelle 8: Sprechakte Lehrer aus B(1), 3. Unterrichtsabschnitt

Der Wechsel der Perspektive von dem konkreten Problem der Teilung einer Tafel Schokolade zu einer mathematischen Betrachtung der Bruchzahlen, der sich im letzten Abschnitt bereits andeutete, scheint nun vollständig vollzogen zu sein.

Der Begriff ‚Bruch', der ja nun feststeht und benutzt werden darf, soll noch näher betrachtet werden. Der Lehrer faßt zusammen und fragt dann weiter: „Wir haben jetzt festgelegt, das ist ein neuer Name, is'n Bruch. Womit haben wir uns denn vorher immer beschäftigt?". Die Logik seiner Vorgehensweise besteht nun darin, daß er wie folgt argumentieren möchte: Kann man diese neuen Gebilde, die Brüche, auch als Zahlen bezeichnen? Wenn ja, dann müßte man mit ihnen genauso rechnen können wie mit den bekannten natürlichen Zahlen. Gemäß dieser Logik sind die meisten (inhaltlich relevanten) Äußerungen von Schülern und Lehrer auf Wissenschaft bezogen.

Die Schüler allerdings scheinen zunächst nicht zu wissen, worauf der Lehrer hinarbeitet. Sie zählen die vier Grundrechenarten auf („normal rechnen" eben, das sagen gleich mehrere Schüler), so daß der Lehrer schließlich selbst zusammenfaßt, freilich mit Bezug auf die gefallenen Äußerungen der Schüler: „Ganz richtig … wir haben vorher Addieren geübt, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Und das haben wir mit Zahlen gemacht." Auch hier erscheint das Wissen des Lehrers direkt im Unterricht. Es wird von ihm indirekt legitimiert durch das Schulwissen der Schüler, die in den genannten Äußerungen deutlich wurden.

Die nächste Frage folgt der erwähnten Logik: „Und was ist denn hier mit den Brüchen? Sind das auch Zahlen?" Es folgen zwei untereinander recht ähnliche Schülerantworten:

S: Das ist'n Bruchteil von 'ner Zahl. … Das ist'n Stück von 'ner Zahl.
L: Hm, so könnte man's sagen, ja. … Meinst du das Gleiche?
S: Also ein Drittel ist der dritte Teil von einer Menge, also … die in drei gleiche Teile gegliedert wurde.

Es stellt sich die Frage nach der Herkunft dieses Wissens. Ich vermute hier, daß es durch Übertragung der Ergebnisse des Einstiegsproblems entstanden ist. Das ‚Stück Schokolade' wird zu einem ‚Stück von einer Zahl' oder einem ‚Teil von einer Menge'. Man sieht hier die Ähnlichkeit in der Formulierung. Der Wechsel der Perspektive von einem konkreten Problem zu einer mathematischen Betrachtung wird hier in der Änderung der Begriffe deutlich; die entsprechenden Sprechakte wurden deshalb als *wiss*-Äußerungen codiert, obwohl sie auch einer lebensweltlichen Betrachtung entstammen könnten.

Der Lehrer nimmt den ersten Vorschlag auf (der zweite bleibt unkommentiert) und leitet den nächsten Unterrichtsabschnitt ein: „Wenn's Teile von Zahlen sind … dann könnten wir uns ja mal überlegen, können wir damit auch rechnen?"

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*priv*	*Summe*
AUFF				1	1	2
FORT	15	1	1		1	18
REAG	5	1		1		7
Summe	20	2	1	2	2	27

Tabelle 9: Sprechakte Schüler aus B(1), 4. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF	1		1	3	5
FORT	6	3	2		11
STRK	1				1
Summe	8	3	3	3	17

Tabelle 10: Sprechakte Lehrer aus B(1), 4. Unterrichtsabschnitt

Dieser Unterrichtsabschnitt zeichnet sich durch eine große Anzahl von fortführenden *wiss*-Äußerungen der Schüler aus. Dementsprechend wenig Aufforderungen lassen sich beim Lehrer feststellen. Insgesamt überwiegen die auf Wissenschaft bezogenen Äußerungen. Das Wissen setzt sich vor allem aus Fortführungen der Schüler zusammen. Inhaltlich geht es um das Sammeln von verschiedenen Möglichkeiten, wie man zwei Bruchzahlen (hier: 1/3 + 1/3) addieren könnte: Man addiert die Zähler und die Nenner und erhält 2/6, oder man addiert nur die Zähler und behält den Nenner bei, so daß das Ergebnis 2/3 lautet. Diese beiden Vorschläge machen die Schüler. Ein Schüler scheint sogar schon das Erweitern zu beherrschen: „2/6 sind genau das gleiche wie 1/3." Woher die Schüler das wissen, wie sie auf diese Ergebnisse kommen, wird nicht klar. Wiederum eine Vermutung von mir: Das (richtige) Ergebnis 2/3 leiten die Schüler aus dem Schokoladenbeispiel ab, die im zweiten Abschnitt angefertigte Zeichnung steht immer noch an der Tafel. Dafür würde auch der Erklärungsversuch eines Schülers sprechen, in dem das Wort ‚Drittel' ganz ähnlich wie das Wort ‚Stück (von einer Tafel Schokolade)' gebraucht wird: „Es ist doch ganz logisch, daß es 2/3 sind, denn … ein Drittel und noch'n Drittel, das sind zwei Drittel." Explizit taucht aber ein solcher lebensweltlicher Bezug nicht auf, die Äußerungen der Schüler sind zum größten Teil auf Wissenschaft bezogen. Der andere Vorschlag (2/6) könnte als eine Übertragung der bekannten Rechenregeln für natürliche Zahlen gedeutet werden: Man addiert alle Zahlen, die nebeneinander stehen. Es wäre in diesem Falle also einem Schulwissen zugeordnet.

Der Lehrer hält sich in diesem Unterrichtsabschnitt sehr zurück, was an der Anzahl von Äußerungen insgesamt abzulesen ist. Er bewertet keines der Ergebnisse in irgendeiner Form, sie werden vorläufig an die Tafel geschrieben, wobei er die Vorläufigkeit durch Kreise um das Operationszeichen ‚Plus' und durch ein Fragezeichen über dem Gleichheitszeichen symbolisiert. Die Äußerung, daß 2/6 = 1/3 sei, bleibt völlig unkommentiert, obwohl dies ja eigentlich schon ein Widerspruch zum Ergebnis 2/6 wäre. Der Lehrer selbst schlägt noch ein weiteres (ebenfalls falsches) Ergebnis vor (1/6) , worauf sich das folgende Unterrichtsgespräch entwickelt:

L: Ich könnte mir vorstellen, statt der oberen Zahl, daß ich die addiere, könnt' ich auch die unteren addieren.

S: Ja, das könnte man machen.… Das könnte man machen, denn 2/3 sind ja genauso viel wie 1/6. (Unruhe)

S: Das stimmt nicht … denn 1/6 sind ja genau die Hälfte von 1/3, also kann das nicht das gleiche sein. Da muß man schon 2/6 hinschreiben, dann wär das das gleiche.

L: Du sagst also schon viel mehr als die andern. Achim hatte eben schon mal so'n Vergleich gezogen, hatte gesagt, 2/6 ist 1/3. … 1/6 ist nur die Hälfte. Wir wollen uns nicht lange darüber streiten. Wie können wir das überprüfen, wer recht hat, so daß es jeder einsieht?

In der zweiten Schüler-Äußerung stecken gleich mehrere Argumente: Zunächst wendet sie sich gegen die Begründung des anderen Schülers, der das neue vom Lehrer vorgeschlagene Ergebnis als richtig bewertet. 1/6 ist eben nicht gleich 2/3, und damit ist die Begründung falsch. Implizit wird dadurch auch das Ergebnis 1/6 als falsch herausgestellt, auch unter Hinzunahme der Feststellung, daß 1/6 die Hälfte von 1/3 sei. Da 1/3 aber auch das gleiche wie 2/6 ist, kann man die Äußerung weiterhin als ein Gegenargument zum Ergebnis 2/6 interpretieren. Der Lehrer nimmt diese Argumente daraufhin teilweise auf, geht aber anschließend direkt zum nächsten Unterrichtsabschnitt über und fragt nach einer anderen Strategie, die Richtigkeit der Ergebnisse zu prüfen. Die Vermutungen (oder das Wissen?) der Schüler über die Gleichwertigkeit verschiedener Bruchzahlen, die sie möglicherweise ihrer Anschauung anhand der Zeichnung entnehmen, werden von ihm nicht legitimiert, sie erhalten (zunächst) keine Geltung.

Die folgenden Tabellen für den fünften Unterrichtsabschnitt zeigen, daß das Wissen sich jetzt wieder stärker aus Aufforderungen des Lehrers und entsprechenden Reaktionen der Schüler zusammensetzt:

Spielzüge	*lebw*	*wiss*	*lern*	*prak*	*uorg*	*usys*	*priv*	*Summe*
AUFF		1		1	5	1	2	10
FORT	1	9	6	2	4	2	8	32
REAG		15	1		1		2	19
Summe	1	25	7	3	10	3	12	61

Tabelle 11: Sprechakte Schüler aus B(1), 5. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	*lebw*	*wiss*	*lern*	*prak*	*uorg*	*usys*	*priv*	*Summe*
AUFF	1	8	2	6	15	8	1	41
FORT		4	17	5	5	2		33
REAG					3			3
STRK	1	2	2		2			7
Summe	2	14	21	11	25	10	1	84

Tabelle 12: Sprechakte Lehrer aus B(1), 5. Unterrichtsabschnitt

Das richtige Ergebnis wird durch weitere Zeichnungen an der Tafel gefunden, daher erscheinen auch hier wieder *prak*-Äußerungen. Auf diese Methode weist der Lehrer indirekt hin, indem er auf die bereits angefertigte Zeichnung an der Tafel zeigt. Erst daraufhin macht ein Schüler den Vorschlag, noch einmal eine Tafel Schokolade zu zeichnen und davon Stücke ‚abzuschneiden' und anschließend zu vergleichen. Es wird jeweils ein Drittel der Fläche von zwei (gleich großen) Rechtecken untereinander gezeichnet und dann zu einer Fläche von zwei Dritteln des Rechtecks zusammengesetzt. Das zweite Ergebnis (2/6) wird widerlegt, indem das gleiche Verfahren mit Flächenstücken wiederholt wird, die 1/6 der gesamten Fläche ausmachen. Das Wissen, das die Schüler hier in den Unterricht einbringen, entstammt der direkten Anschauung, die auch die Geltung des Wissens verbürgt. Das Ergebnis 2/6 wird durch den Vergleich von Flächen widerlegt, während das dritte Ergebnis (1/6) nicht mehr explizit mit dem richtigen Ergebnis verglichen wird.

Am Ende dieses Abschnitts schleicht sich noch ein Fehler ein, der scheinbar nicht bemerkt wird:

L: Unsere Aufgabe hieß: 1/3 + 1/3 entweder 2/3 oder 2/6, 1/6.
S: 2/3 / 2/3 … (mehrere Schüler)
L Jetzt ist Karsten dran bitte.
S: 2/3
L: Ja, und 2/6, wieviel Drittel wär'n das der Zeichnung nach?
S: Je zwei.

Die letzte Antwort bleibt so im Raume stehen und erhält damit auch Geltung, obwohl sie offensichtlich falsch ist. Vielleicht bemerkt der Lehrer diesen Fehler nicht, da er bei seiner letzten Frage damit beschäftigt ist, das richtige Ergebnis an der Tafel hervorzuheben und die anderen beiden durchzustreichen, vielleicht interpretieren er und die anderen Schüler die Antwort auch in dem Sinne, daß ‚je zwei' Sechstel das gleiche ist wie ein Drittel der Fläche. Jedenfalls wird der Sachverhalt weder von ihm noch von anderen Schülern richtiggestellt und es muß offenbleiben, ob er von den Schülern richtig interpretiert wird.

Im letzten Unterrichtsabschnitt wird kein neues Wissen konstituiert, hier geht es um Übungen und Hausaufgaben.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß der Lehrer nur an wenigen Stellen sein Wissen direkt in den Unterricht einbringt. In den meisten Fällen entstammt es dem Alltagswissen der Schüler; eher selten ist es eindeutig einem Schulwissen zuzuordnen. Die Geltung für dieses Wissen verbürgt vor allem die Anschauung und das Alltagsverständnis der Schüler vom gerechten Teilen. Nur an einigen Stellen (z.B. im 2. Abschnitt) ist es allein die pädagogische Autorität des Lehrers, die die Geltung verbürgt.

5.4.2.2 Öffnung des Wissens

In diesem Abschnitt wird es um die Analyse von Bruchstellen im Unterricht gehen, also solchen Stellen, in denen explizit oder implizit unterschiedliche Interpretationen aufeinandertreffen, sowie um den Grad der Herausstellung des Konstruktionscharakters des im Unterricht erscheinenden Wissens. Leider liegen mir zu dieser Unterrichtseinheit weder Lehrer- noch Schülerinterviews vor, so daß sich die Interpretation allein auf die Unterrichtsprotokolle stützen muß.

Die erste Bruchstelle findet sich im ersten Unterrichtsabschnitt. Hier hat ein Schüler die Frage falsch verstanden und antwortet zur ersten Aufgabe: „Vier Kinder bekommen jeder 12 Tafeln Schokolade." Diese Antwort, die der Intention des Lehrers entgegensteht, wird verständlich, wenn man sich die Frage, die von einem Schüler formuliert wurde, und die entsprechenden Zahlenpaare anschaut, die der Lehrer zu Anfang der Stunde an die Tafel schreibt. Hier steht jeweils eine Anzahl von Tafeln (12) und eine Anzahl von Kindern (4). Die Frage zu diesen Zahlen stellt ein Schüler: „Ich glaube, wieviel Schokolade auf jedes Kind fällt." Gemeint ist: Man soll berechnen, wieviel Schokolade jedes Kind erhält, wenn 12 Tafeln Schokolade gerecht zu verteilen sind.

Man kann die ‚Frage‘ des Schülers aber auch so verstehen: Die obere Zahl gibt an, ‚wieviel Schokolade auf jedes Kind fällt‘. In diesem Falle wäre freilich nichts mehr zu berechnen, sondern nur noch abzulesen. Aber genau so versteht es vermutlich dieser Schüler. Er sieht hinter dem Zahlenpaar nicht eine Verteilungsaufgabe, sondern interpretiert die obere Zahl als Anzahl von Tafeln pro Kind. Dieses Mißverständnis wird vom Lehrer durch eine erneute und klarere Aufgabenstellung aus dem Weg geräumt: „Wenn wir 12 Tafeln haben und vier Kinder, dann soll die Frage sein: Wieviel Tafeln bekommt jedes Kind?“ In dieser Formulierung wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Anzahl von Tafeln eine feste Größe ist, die gleichmäßig aufgeteilt werden soll. Das Mißverständnis wird damit geklärt. Bezüglich der Aufgabenstellung treten im folgenden keine unterschiedlichen Interpretationen mehr auf, so daß davon ausgegangen werden muß, daß diese Schwierigkeit durch die erneute Formulierung der Aufgabe behoben wurde.

Eine weitere Bruchstelle befindet sich im zweiten Unterrichtsabschnitt. Ein Schüler hat einen Einwand, der sich auf das Teilen einer Schokolade auf drei Kinder bezieht: „Wenn man ’ne Tafel Schokolade hat, wenn ich die durch drei teilen soll oder eins oder sowas, das is’, das macht immer ungerade, also so, daß irgendwer mehr kriegt als der andere.“ Er ist offensichtlich der Meinung, daß eine gerechte Teilung durch drei nicht möglich sei, und scheinbar spielt bei der Begründung die Assoziation ‚ungerade = ungerecht‘ eine Rolle. Diese Assoziation könnte von der alltäglichen Erfahrung herrühren, daß eine Aufteilung in eine gerade Anzahl von Stücken immer einfacher (und damit gerechter) ist, als in eine ungerade Anzahl, da man bei ersterer immer nur Hälften zu bilden braucht. Diese Interpretation kann jedoch nur eine Vermutung bleiben, auch deshalb, weil der Lehrer auf dieses Problem explizit nicht weiter eingeht. Im Anschluß an diese Bruchstelle wird die Zeichnung angefertigt, und es muß offenbleiben, ob durch die Veranschaulichung der Bruchzahl das Problem geklärt wird.

Eine dritte Bruchstelle taucht im fünften Unterrichtsabschnitt auf. Sie bezieht sich auf die Zeichnungen, die zur Überprüfung des richtigen Ergebnisses der Aufgabe 1/3 + 1/3 angefertigt wurden: „Aber wenn das so aussieht, wenn die zwei Drittel/ aber wenn die zwei Drittel eine Tafel bilden sollen, dann müßten das doch eigentlich zwei Hälften sein.“ Es wird nicht ganz klar, warum der Schüler meint, 2/3 müßten eine Tafel bilden. Die Äußerung könnte unter Rückbezug zu der zu Anfang der Stunde gestellten Aufgabe verständlich werden: Hier sollte eine ganze Tafel aufgeteilt werden, also müßte, wenn man die einzelnen Stücke wieder zusammensetzt, wieder eine ganze Tafel entstehen. Der Schüler übersieht nun, daß es in dieser Unterrichtsphase nicht mehr um das Teilen einer Tafel geht, sondern um die Überprüfung einer mathematischen Aufgabe, die aber unter Zuhilfenahme des Zusammensetzens von Stücken einer Schokolade plausibel wird. Ähnlich interpretiert wohl auch der Lehrer die Schwierigkeit des Schülers. Sein Erklärungsversuch: „Ja, guck mal, ich hab das da abgebrochen, hier hingelegt, da abgebrochen, hier daneben gelegt, so müssen wir’s uns vorstellen.“ Er versucht zu verdeutlichen, daß von der ‚Schokolade' zwei Stücke ‚abgebrochen' und zusammengelegt wurden, so daß diese zwei Stücke also nicht die ganze Tafel bilden können. Er läßt sich auf die lebensweltliche Perspektive des Schülers ein, indem er sich auf das Anfangsproblem bezieht.

Sowohl die zweite als auch die dritte Bruchstelle können als ein Aufeinandertreffen von lebensweltlicher und mathematischer Perspektive interpretiert werden. In beiden Fällen interpretieren die Schüler die Situation weiterhin lebensweltlich, während der Lehrer die Perspektive bereits auf eine mathematische Betrachtung gelenkt hat. Bei der letzten Bruchstelle geht der Lehrer auf diese Interpretationsdifferenz ein, und das Wissen erhält insofern eine Öffnung, als es dem Schüler ermöglicht wird, seine Interpretation zu berichtigen und damit die Grundlage für das Verständnis der mathematischen Interpretation zu schaffen.

Es lassen sich neben diesen offensichtlichen Bruchstellen aber auch Stellen aufweisen, die eher implizit auf eine Interpretationsdifferenz hindeuten. Während des ganzen Unterrichtsverlaufs wird von verschiedenen Schülern immer wieder geäußert, daß zwei unterschiedliche Bruchzahlen denselben Wert haben können. Z.B.: „2/6 ist ja genau das gleiche wie 1/3.", oder: „1/3 und 1/3 sind 4/6." Diese Äußerungen werden vom Lehrer an keiner Stelle direkt aufgenommen oder thematisiert. Sie werden meist übergangen oder auf einen späteren Zeitpunkt verschoben. Schaut man sich die zwei nachfolgenden Stunden an, so wird das verständlich. Die Tatsache, daß Bruchzahlen beliebig oft erweitert werden können, ist erst in der übernächsten Stunde ein Thema des Unterrichts. Erst dort erhält das Wissen der Schüler seine Geltung. Somit ist es im Sinne der Unterrichtsplanung des Lehrers, daß diese Momente übergangen werden[99].

Ein weiteres Indiz für die Öffnung des Wissens ist die Verdeutlichung des Konstruktionscharakters. Das Thema ‚Bruchrechnung' erhält seine Legitimation implizit durch das Anfangsproblem: Wenn man eine Tafel Schokolade auf drei Kinder verteilen will, braucht man neue Zahlen, die Bruchzahlen, um den jeweiligen Anteil pro Kind ausdrücken zu können. Die Notwendigkeit dieser neuen Zahlen, die den Schülern allerdings schon längst bekannt sind, wird so verdeutlicht. Durch die verschiedenen Zeichnungen haben die Schüler weiterhin die Möglichkeit, die Herkunft und die Geltung der Rechenregel nachzuvollziehen und zu verfolgen. Die Konstruktion der Rechenregel wird offengelegt.

Es läßt sich zusammenfassend sagen, daß das Wissen im Unterricht vor allem durch die Verdeutlichung des Konstruktionscharakters eine Öffnung erfährt. Die Bruchstellen werden teilweise genutzt, unterschiedliche Interpretationen zu thematisieren. Bei der zweiten Bruchstelle bleiben Zweifel, ob die Schüler anschließend ihre eher lebenswelt-

[99] Im ersten Abschnitt hatte ich bereits angedeutet, daß eine Thematisierung dieses Aspekts eine weitere Möglichkeit der Überprüfung der Ergebnisse geboten hätte.

lich bestimmte Interpretation des Gegenstandes überwinden und zu der vom Lehrer eingenommenen mathematischen Sichtweise gelangen.

5.4.3 Die Didaktik des Lehrers

Auch hier muß zunächst angemerkt werden, daß die Datengrundlage sehr beschränkt ist, da keine Lehrerinterviews vorliegen. Ich gehe daher so vor, daß ich anhand des Stundenverlaufs einige auffällige Momente des Lehrerverhaltens herausstelle, von denen zu vermuten ist, daß sie typisch für diesen Lehrer sind. Anschließend werden die folgenden zwei Unterrichtsstunden (B(2) und B(3)) herangezogen, um diese Hypothesen zu stützen. Dennoch muß darauf hingewiesen werden, daß die folgenden Interpretationen nur Vermutungen bleiben können.

In dieser ersten Unterrichtsstunde B(1) fällt folgendes Schema auf:

1. Der Lehrer beginnt mit einer alltäglichen Situation, mit einem Problem, das den Schülern bekannt ist (Teilen einer Tafel Schokolade). Er knüpft damit an das Vorwissen der Schüler im Umgang mit Bruchzahlen direkt an.
2. In einem zweiten Schritt sollen diese neuen ‚Gebilde' näher untersucht werden, wobei er auch hier zunächst das Vorwissen der Schüler aktiviert und anschließend einen Schülervorschlag als Definition legitimiert.
3. Nachdem eher intuitiv von den Schülern mögliche Ergebnisse für die Addition genannt wurden, werden diese Ergebnisse überprüft, und zwar durch die Visualisierung von entsprechend großen Flächenstücken.
4. Erst nach dieser Überprüfung, die unabhängig vom Vorwissen oder dem Sachwissen des Lehrers durchgeführt wurde, wird das richtige Ergebnis der Addition legitimiert und als Unterrichtsergebnis festgehalten.

Man findet somit die folgende Vorgehensweise: Anknüpfen an Alltagswissen, Lösungsvorschläge aufgrund des Alltagswissens, mathematische Überprüfung der Lösung. Die folgenden Stunden sollen zeigen, daß man tatsächlich von einem Schema, d.h. einem relativ stetigen Unterrichtsablauf bei diesem Lehrer sprechen könnte.

Die zweite Stunde B(2) beginnt mit einer Wiederholung der Ergebnisse der letzten Stunde. Dann führt der Lehrer eine weitere Möglichkeit ein, die Richtigkeit der Addition von zwei gleichnamigen Brüchen zu überprüfen: Man interpretiert die Bruchzahlen als Maßzahlen der Größeneinheit ‚Meter' und rechnet diese Größen in Zentimeter um. Dazu schreibt er eine entsprechende Aufgabe an die Tafel. Die Schüler sollen nach der Umrechnung ihre Vorgehensweise darstellen und begründen. Die Methode des Zeichnens von Flächenstücken wird damit um eine zusätzliche Methode ergänzt, die den Schülern ebenfalls schon bekannt ist. Als nächstes werden die Hausaufgaben besprochen. Neben einigen Übungsaufgaben sollten die Schüler eine Regel für die Addition gleichnamiger Brüche formulieren. Ein Schüler schlägt vor: „Wir addieren den Nenner und schreiben das Ergebnis als neues auf. Dann schreiben wir den Teiler unter den Nenner. So ist die Aufgabe gelöst." Davon ausgehend wird zunächst geklärt, was der Begriff ‚Nenner' und ‚Zähler' zu bedeuten hat; einige Schüler wissen das schon. Die Definition wird vom Lehrer an die Tafel geschrieben. Dann wird der Inhalt der vom

Schüler formulierten Regel interpretiert und am Beispiel einer Aufgabe auf seine Richtigkeit geprüft. Die Regel wird verbessert und an die Tafel geschrieben. Im nächsten Unterrichtsabschnitt geht es um das Vergleichen von Bruchzahlen. Der Lehrer beginnt wie folgt:

> „So, wir haben jetzt gesehen, wie man Brüche addiert. Bevor wir anfangen, uns Gedanken zur Subtraktion zu machen und zu den anderen Rechenoperationen, … wollen wir uns überlegen, was man denn mit den sonst bekannten natürlichen Zahlen noch alles machen kann, außer den normalen Rechenarten."

Er schreibt zwei natürliche Zahlen an die Tafel, worauf die Schüler ‚ist größer als' bzw. ‚ist kleiner als' vorschlagen. Anschließend werden dann Bruchzahlen verglichen und die Ergebnisse mit Hilfe der Methode des Umrechnens in Zentimeter begründet.

Man sieht hier: Die neue Methode des Umrechnens in eine kleinere Größeneinheit wird zwar vom Lehrer initiiert, sie wird aber von den Schülern aufgrund ihres Vorwissens erarbeitet und begründet. Bei der Definition von ‚Nenner' und ‚Zähler' ergibt sich eine direkte Parallele zur ersten Stunde: So wie dort der Begriff ‚Bruch' von den Schülern in den Unterricht eingebracht und vom Lehrer definiert wurde, werden auch die Begriffe ‚Nenner' und ‚Zähler' zunächst von den Schülern benutzt und dann vom Lehrer definiert, d.h. zur Geltung gebracht. Die von einem Schüler vorgeschlagene Regel wird mit Hilfe des Vorwissens aus der ersten Stunde überprüft. Das Vergleichen von Bruchzahlen folgt der gleichen Logik wie das Addieren von Bruchzahlen in der ersten Stunde: Erst wird ein mögliches Ergebnis von den Schülern genannt, dann die Überprüfung auf Richtigkeit durch Umrechnen in eine kleinere Einheit.

In der folgenden Stunde B(3) werden auch für den Vergleich von Bruchzahlen Regeln formuliert (Vergleich von Bruchzahlen mit gleichen Nennern, Vergleich von Bruchzahlen mit gleichen Zählern). Somit läßt sich das oben formulierte Schema ergänzen, wenn man die Unterrichtseinheit insgesamt betrachtet:

> Anknüpfen an das Vorwissen der Schüler (Teilen einer Schokolade – Vergleich von natürlichen Zahlen).
>
> Lösungsvorschläge auf der Basis des Vorwissens der Schüler (Addieren – Vergleichen).
>
> Mathematische Überprüfung der Vorschläge durch eine bestimmte, von den Schülern eingeübte und bekannte Methode.
>
> Formulierung einer allgemein gültigen Regel (diese wird in beiden Fällen erst von den Schülern vorgeschlagen und dann unter Rückbezug auf das bislang erarbeitete Wissen überprüft).

Sicherlich ist diese Zusammenfassung eine starke Reduzierung der Didaktik des Lehrers, und es kann, wie oben erwähnt, nicht ausgeschlossen werden, daß die drei vorliegenden Stunden zufällig diese Struktur aufweisen. Nimmt man jedoch an, daß sie geradezu typisch für diesen Lehrer ist, werden einige Feststellungen aus dem ersten Analyseabschnitt verständlicher:

Das im Unterricht erscheinende Wissen entstammt zum großen Teil dem Vorwissen der Schüler. Der Lehrer bringt sein Sachwissen nur selten direkt in den Unterricht ein. Selbst bei Definitionen, deren Geltung letztlich allein der Lehrer durch sein Sachwissen verbürgt, bezieht er sich auf das Vorwissen der Schüler. Legitimiert wird das Wissen vor allem durch eine Überprüfung, die einer bestimmten mathematischen Methode folgt. Dies ist nach den vorigen Überlegungen auf die didaktischen Vorstellungen des Lehrers zurückzuführen.

5.4.4 Das Fach und die Schule

Der Unterricht fand in einer sechsten Klasse einer Orientierungsstufe in Niedersachsen statt. Die Orientierungsstufe ist an ein Gymnasium angeschlossen, das heißt, anders als in den Stunden bei Lehrer A, gab es hier keine äußere Differenzierung in unterschiedlichen Kursen. Es galten aber auch hier die gleichen Richtlinien bzw. Vorläufigen Handreichungen für die Orientierungsstufe.

Das Thema ‚Bruchzahlen' wird in den Vorläufigen Handreichungen unter den Themenkreis: „Erweiterung der Menge **N** der natürlichen Zahlen zur Menge $\mathbf{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen." (Vorl. Handreichungen 1971, S.43) gestellt. Diese Formulierung legt eine Sichtweise fest, die auch in diesem Unterricht eingenommen wird: Die Menge **N** wird *erweitert* zu einer neuen Menge, die bestimmte Eigenschaften aus **N** erbt. Im Unterricht wird die Einsicht in die Mengenstrukturen von **N** und $\mathbf{Q}^+$ realisiert, indem festgestellt wird, daß die neugefundenen Objekte dieselben Eigenschaften besitzen wie die natürlichen Zahlen und demnach auch zu einer Menge von *Zahlen* zusammengefaßt werden können.

Diese Sichtweise, die die Eigenschaften von Verknüpfungen in Mengen in den Vordergrund stellt, deckt sich weiterhin mit den allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts, wie sie in den Vorläufigen Handreichungen formuliert werden. So heißt es über den Beitrag des Faches Mathematik zu den allgemeinen Zielen der Orientierungsstufe:

> „Ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts ist es, dem Schüler Verständnis für mathematische Strukturen zu vermitteln, da unsere moderne rationalisierte Welt das Denken in Strukturen erfordert." (ebd., S.IX)

Zu den spezifischen Zielen des Mathematikunterrichts heißt es dann:

> „Neue Erkenntnisse gewinnt der Schüler bei der Erweiterung der Menge **N** zur Menge $\mathbf{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen bzw. zur Menge **Z** der ganzen Zahlen.
>
> Dabei erfährt er ferner, daß Eigenschaften von Verknüpfungen auch in umfassenderen Mengen erhalten bleiben können." (ebd., S.37)

Die inhaltliche Logik, die der Lehrer in diesem Unterricht verfolgt, ist damit nicht allein Option des Lehrers, sondern deckt sich darüber hinaus mit den Vorgaben der geltenden Richtlinien.

5.4.5 Mathematik im Unterricht

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welches Bild der ‚Mathematik' im Unterricht zur Sprache kommt. Dazu werden die im Strukturgitter entwickelten Begriffe benutzt. Im folgenden soll die hier interpretierte Unterrichtsstunde im Zusammenhang mit den ihr folgenden Stunden untersucht werden.

Die erste inhaltlich abgeschlossene Einheit bilden die erste und der Anfang der zweiten Stunde, d.h. der Weg vom Teilen einer Schokolade bis hin zur Formulierung einer allgemeinen Regel für die Addition von gleichnamigen Brüchen. Verfolgt man diesen Weg bis zum Unterrichtsergebnis, so findet man unterschiedliche Mathematisierungen:

Ausgangspunkt sind die Zahlenpaare, die je eine Anzahl von Tafeln Schokolade und eine Anzahl von Kindern symbolisieren. Das Problem, die Frage, wird von den Schülern formuliert: Wieviel Schokolade erhält jedes Kind? Wie man das ausrechnet, also mit mathematischen Mitteln löst, wissen die Schüler schon: Man dividiert die entsprechenden Zahlen. Dabei entstehen neue Zahlen, die Bruchzahlen. Das Problem, eine Tafel an drei Kinder zu verteilen wird durch eine Zeichnung visualisiert, indem 1/3 der Fläche eines Rechtecks markiert wird. Damit steht das Modell für Bruchzahlen fest: Sie werden interpretiert als Teil einer Größe.

Dieses Modell wird dann für den ‚Beweis' einer Rechenregel für die Addition zweier gleichnamiger Brüche nochmals herangezogen. Die Addition der Bruchzahlen wird modelliert durch das Zusammensetzen von Teilen eines Rechtecks.

Der Aspekt des Systems kommt ebenfalls zur Sprache: Der Lehrer stellt die Frage, ob Brüche überhaupt Zahlen sind. Wenn das zutrifft, müßte man mit ihnen genauso rechnen können, wie mit den bekannten natürlichen Zahlen. D.h., die neuen Ausdrücke, die durch die Lösung des Ausgangsproblems gefunden wurden, werden nun in einen größeren Zusammenhang eingeordnet: Damit wird die Mathematik als ein System angesprochen, in dem bestimmte Regeln bereits bekannt sind und in das sich neue Strukturen widerspruchsfrei einordnen lassen müssen. Die eingangs gestellte Frage kann am Ende der Unterrichtseinheit noch nicht als beantwortet angesehen werden. Sie bestimmt insgesamt das weitere Vorgehen und wird in der nächsten Stunde, wo es um das Vergleichen der Bruchzahlen geht, explizit wieder angesprochen. Sie kann damit als übergeordnete Frage gedeutet werden: Wenn Brüche Zahlen sind, so muß man sie addieren können, sie der Größe nach vergleichen können, und die anderen Grundrechenarten mit ihnen durchführen können.

Im letzten Schritt wird eine allgemeine Regel für die Addition von gleichnamigen Brüchen formuliert. Das Ausgangsproblem wird verallgemeinert. Unabhängig von der Interpretation der Bruchzahl (als Stück einer Tafel Schokolade oder als Teil eines Meters) wird eine mathematische Gesetzmäßigkeit aufgestellt, die wiederum eine Abstraktion von der konkreten Ausgangssituation darstellt.

Gleichzeitig bleiben die neu gefundenen Zahlen und die Regeln für den mathematischen Umgang mit ihnen nicht abstrakt, sondern sie werden immer wieder inhaltlich gefüllt, indem sie als Größen interpretiert werden. Die Bedeutung der Zahlen wird damit sowohl innermathematisch (man muß mit ihnen rechnen können) als auch außermathematisch (man braucht sie, um Teile einer Größe bezeichnen zu können) hervorgehoben.

Schließlich finden wir auch den Aspekt der Überprüfung: Zu Anfang stehen sich unterschiedliche Möglichkeiten einer Lösung für die Addition gegenüber. Zwei Vorschläge machen die Schüler, eine dritte Möglichkeit wird vom Lehrer genannt. Aber nur eine kann richtig sein. Das richtige Ergebnis wird durch die Zeichnung gefunden, und damit werden die anderen widerlegt. Die Lösung 2/6 wird zusätzlich noch durch ein Gegenbeispiel widerlegt: Weil 1/6 + 1/6 nach der neu gefundenen Regel 2/6 ist, kann 2/6 nicht auch gleichzeitig das Ergebnis von 1/3 + 1/3 sein.

Zusammengefaßt läßt sich für diese Unterrichtseinheit sagen, daß alle Aspekte der Mathematik zur Sprache kommen. Die Schüler erhalten so die Möglichkeit, die Mathematik als eine Wissenschaft zu erfahren, die ihren Ausgangspunkt bei einem konkreten Problem nimmt, die sich als ein System auszeichnet, das bestimmten Regeln folgt und erweiterbar ist, dessen Begriffe und Sätze aus Vermutungen und Beweisen hervorgehen, die so lange widerlegt werden, bis vorläufige Widerspruchsfreiheit gesichert ist.

5.5 Die Unterrichtseinheit C_1

Lehrer C war zur Zeit der Unterrichtsaufnahmen Referendar und hatte die Klasse 6 von Lehrer B im zweiten Halbjahr des Schuljahres 1977/78 übernommen. Die Unterrichtseinheit C_1 wurde im Februar 1978 aufgenommen und umfaßt insgesamt drei Stunden, von denen die dritte im folgenden ausführlich analysiert werden soll.

In allen drei Stunden geht es thematisch um das Umwandeln von Dezimalbrüchen in Brüche und umgekehrt. Im Anschluß an die dritte Stunde $C_1(3)$ wurde ein Lehrer- und ein Schülerinterview erstellt.

5.5.1 Paraphrase zu $C_1(3)$

Thema: Umwandeln von gewöhnlichen Brüchen in Dezimalbrüche

1. Umwandeln von Zehnerbrüchen
Es werden die Hausaufgaben der letzten Stunde an der Tafel gerechnet: Drei Aufgaben zum Umwandeln von Zehnerbrüchen in Dezimalbrüche (Beispiel: 712/10). Es wird herausgestellt, daß dies unechte Brüche seien, die man zunächst in eine gemischte Zahl und dann in eine Dezimalzahl umwandeln kann. Anschließend werden noch sieben weitere Aufgaben des gleichen Typs, allerdings schon als gemischte Zahl geschrieben, bearbeitet.[100]

2. Brüche umwandeln, die keine Potenz von 10 im Nenner haben: durch Erweitern
Der Lehrer beginnt diesen Unterrichtsabschnitt: „Jetzt wird man ja nicht immer Brüche vorfinden, die im Nenner eine Potenz von 10 haben. Beispiel: 1/5.“ Die Bruchzahl 1/5 wird zunächst als Größe interpretiert: „Angenommen, ihr habt ausgemessen, ein Karton ist ein Fünftel Meter.“ 1/5 m wird in Zentimetern ausgedrückt (20cm) und dann in eine Dezimalzahl verwandelt. Die anschließenden Aufgaben erscheinen ohne Größeneinheit. Sie werden gelöst, indem die Bruchzahl auf die „nächsthöhere Zehnerpotenz“ im Nenner erweitert wird, wie ein Schüler zusammenfaßt.

3. Brüche umwandeln: durch Kürzen
Die nächste Aufgabe (21/300) ist von einem anderen Typ: Hier muß durch 3 gekürzt werden, um auf eine Zehnerpotenz im Nenner zu kommen. Diesen Vorschlag machen auch die Schüler, nachdem sie mit dem Prinzip des Erweiterns nicht zum Ziel kamen. Es bleibt die einzige Aufgabe zu diesem Typ.

4. Brüche, die weder durch Erweitern noch Kürzen auf einen Zehnerbruch gebracht werden können: „1/3 läßt sich nicht als Dezimalbruch darstellen.“

[100] Diese Aufgaben stammen aus dem hier verwendeten Schulbuch *Einführung in die Mathematik* (1974), S.113, Aufg. 3.

Der Lehrer schreibt den Bruch 1/3 an die Tafel. Es kommen verschiedene Vorschläge, wie diese Bruchzahl in einen Dezimalbruch umzuwandeln sei: Durch Erweitern mit 10 oder mit 100 und anschließend kürzen, mit dem Kehrwert malnehmen. Andere sagen gleich zu Anfang, daß das nicht geht. Das soll dann begründet werden, denn „Carola hat erstmal recht“, wie der Lehrer die Aussage, daß der Bruch nicht umzuwandeln sei, bestätigt. Dann wirft ein Schüler ein: „Natürlich geht das.… Brauchen Sie nur anschreiben, Herr C: drei drei drei drei drei drei drei …“ Darauf geht der Lehrer nicht ein, er leitet den nächsten Unterrichtsabschnitt ein.

5. Eine Vermutung: Man kann nur Brüche umwandeln, deren Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5 enthalten.

Der Lehrer beginnt diesen Abschnitt: „Wie sehen bisher Dezimalbrüche aus, die wir kennen?“ Ein Schüler sagt, daß der Nenner immer durch 5 teilbar sein müsse. Daraufhin ein Gegenbeispiel von einem anderen Schüler: „Wenn man jetzt Fünfundvierzigstel hat, wie will man das denn machen?“ Dann ein weiterer Schülervorschlag: Der Nenner darf nicht durch 3 teilbar sein. Dies widerlegt der Lehrer: 1/7 sei auch nicht umzuwandeln. Schließlich kommt vom Lehrer die Aufforderung: „Dann wollen wir uns noch mal diese Brüche hier ansehen (gemeint sind die zuvor gelösten Aufgaben aus dem 2. Abschnitt, K.J.) und jeweils vom Nenner eine Primfaktorzerlegung machen.“ Dabei wird wiederholt, was Primfaktoren sind und festgestellt, daß immer nur die Zahlen 2 und 5 auftauchen. „Und welche Vermutung können wir denn vielleicht äußern, die wir dann nächste Stunde untersuchen müßten?“ Martin faßt zusammen: „Daß sich nur Brüche in Dezimalzahlen verwandeln lassen, wenn ihre Primfaktorzerlegung nur 2 und 5 enthält.“

5.5.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.5.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Im folgenden gehe ich die fünf Unterrichtsabschnitte durch und befrage sie nach der Herkunft des hier erscheinenden Wissens und nach den Geltung verbürgenden Instanzen. Die Unterrichtsabschnitte werden einzeln untersucht, da sie sich in einigen Hinsichten voneinander unterscheiden, was Konsequenzen für den Unterrichtsinhalt hat.

Es gibt in dieser Unterrichtsstunde drei mögliche Wissensquellen: Das Vorwissen der Schüler (Alltags- oder Schulwissen), das Sachwissen des Lehrers und das Schulbuch. Letzteres dient lediglich als Aufgabensammlung; die zu Anfang besprochenen Hausaufgaben und die anschließenden Übungsaufgaben, die gemeinsam an der Tafel gelöst werden, stammen aus diesem Buch. Ansonsten wird es in keiner Weise genutzt, so daß es als Wissensquelle außer acht gelassen werden kann.

Auch hier sollen zunächst die Äußerungen von Schülern und Lehrer in tabellarischer Form und nach Unterrichtsabschnitten differenziert dargestellt werden, um einen ersten Zugang zur Konstitution des Wissens im Unterricht zu erhalten.

Spielzüge	wiss	lern	priv	uorg	usys	Summe
AUFF		2	1	6	3	12
FORT	10	17	4	1		32
REAG	40	5	1	1		47
Summe	50	24	6	8	3	91

Tabelle 13: Sprechakte Schüler aus $C_1(3)$, 1. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	wiss	lern	priv	uorg	usys	Summe
AUFF	24	16		17	9	66
FORT	1	19				20
REAG	1		1	2		4
STRK	4			4		8
Summe	30	35	1	23	9	98

Tabelle 14: Sprechakte Lehrer aus $C_1(3)$, 1. Unterrichtsabschnitt

In Tabelle 13 fällt die überwiegende Anzahl von *wiss*-Sprechakten auf: 50 von insgesamt 91. Der nächstgrößere Anteil sind *lern*-Äußerungen (24). Hier handelt es sich zumeist um Zwischenrufe wie „Ja ich hab's richtig!" oder: „Das kann ich nicht." Die 50 *wiss*-Sprechakte teilen sich wiederum auf in 40 reagierende und 10 fortführende Spielzüge. Dementsprechend groß ist die Anzahl der auffordernden Sprechakte beim Lehrer (66 von 98). Diese Aufteilung macht zunächst deutlich: Der Unterricht ist stark durch die Fragen des Lehrers bestimmt, auf die die Schüler antworten. Gleichzeitig besteht das Wissen, das die Schüler auf diese Weise in den Unterricht einbringen ausschließlich aus Schulwissen, das sich in den *wiss*-Äußerungen manifestiert: Bei den Aufgaben zur Umwandlung von Zehnerbrüchen (Brüche, die im Nenner eine Potenz von 10 enthalten) handelt es sich um eine Wiederholung aus der letzten Stunde. Hier wurde eine Stellentafel angelegt, in die die Zähler solcher Brüche eingetragen und anschließend in einen Dezimalbruch umgewandelt werden konnten. Die ersten vier der insgesamt acht Übungsaufgaben werden dementsprechend so bearbeitet, daß sie zunächst als Summe von Zehnerbrüchen mit einstelligem Zähler geschrieben und dann in einen Dezimalbruch umgewandelt werden. Die anderen vier Brüche bzw. gemischten Zahlen werden direkt als Dezimalbruch geschrieben.

Betrachtet man in Tabelle 14 zunächst nur die Summe der Spielzüge des Lehrers, so sieht man, wie oben bereits festgestellt, ein großes Übergewicht an auffordernden Spielzügen. Insbesondere die *wiss*-Äußerungen sind in diesem Zusammenhang nun interessant, denn hier sind die Äußerungen zusammengefaßt, in denen sich das Wissen, das im Unterricht erscheint, dokumentiert. Von 30 Äußerungen insgesamt finden sich hier 24 auffordernde Spielzüge. Die vier strukturierenden Spielzüge beziehen sich jeweils auf eine zu bearbeitende Aufgabe. Die verbleibenden zwei Spielzüge (ein reagierender und ein fortführender) bezeichnen genau die beiden Stellen im Unterricht, an denen der Lehrer sein Wissen direkt einbringt. Einmal beantwortet der Lehrer selbst eine von ihm gestellte Frage, das andere Mal führt er eine Antwort eines Schülers fort und ergänzt sie.

Man sieht hier deutlich: Das Wissen, das im Unterricht erscheint, konstituiert sich hauptsächlich durch Fragen des Lehrers und entsprechende Antworten der Schüler. Selten finden sich fortführende *wiss*-Äußerungen der Schüler, die das Einbringen von Vorwissen unabhängig von den Fragen des Lehrers charakterisieren. Noch seltener bringt der Lehrer sein Wissen direkt in den Unterricht ein. Es zeichnet sich in diesem Unterrichtsabschnitt ein recht starres Frage-Antwort-Schema ab, das sich, wie wir sehen werden, in den nächsten Abschnitten fortsetzt.

Es stellt sich nun die Frage nach den Geltung verbürgenden Instanzen. Für die Beantwortung dieser Frage ist die nähere Betrachtung der *lern*-Äußerungen des Lehrers interessant. Hier findet man bestätigende, korrigierende usw. Äußerungen oder weiterführende Fragen nach Begründungen u.ä., allgemein: auf Lernprozesse der Schüler bezogene Aussagen, die Aufschlüsse auf die Art und Weise der Legitimation und damit auf die Geltung des Wissens geben können.

Aus Tabelle 14 wird ersichtlich, daß sich die *lern*-Äußerungen relativ gleichmäßig in auffordernde und fortführende Spielzüge aufteilen. In den fortführenden Spielzügen finden wir zumeist bestätigende Aussagen. Der Lehrer wiederholt die richtige Antwort oder bestätigt mit: „Ja.“, oder: „Jawoll.“. In vielen Fällen allerdings bestätigt er nonverbal eine richtige Antwort, indem er das Ergebnis (es geht im ersten Abschnitt um das Lösen von Aufgaben) an die Tafel schreibt und damit die Antwort des Schülers legitimiert. Diese nonverbalen Bestätigungen sind nicht eigens codiert worden und tauchen in der Tabelle nicht auf. Nur zweimal korrigiert er direkt bzw. äußert er sich negativ zu einer Schüler-Antwort. In diesen Fällen ist es also der Lehrer, der dem Wissen seine Geltung verschafft. In den anderen Fällen einer falschen Schüler-Antwort reagiert der Lehrer mit einer Gegenfrage, die die Falschheit herausstellt und zum richtigen Ergebnis führen soll. Diese wurden meist als auffordernde *wiss*-Sprechakte codiert. Hier wird also auch die Wissenschaft Mathematik als Legitimationsinstanz in Anspruch genommen.

Betrachtet man die auffordernden *lern*-Äußerungen, so tritt die Mathematik als Geltung verbürgende Instanz noch deutlicher hervor. Der Lehrer fragt bei fast allen (bis auf zwei) Aufgaben nach einer Begründung oder einer Erläuterung der Vorgehensweise. Diese Fragen verbergen sich hinter den oben genannten Sprechakten. Ein Beispiel dazu:

$27\frac{12}{10000}$ soll in einen Dezimalbruch umgewandelt werden:

S: 27 Komma 00…
L: Null … erzähl noch mal. (L schreibt mit.)
S Null eins zwei.
L: So, dann mußt du jetzt mal erklären, wie du darauf gekommen bist.
S: Naja, das sind 27 Ganze, 0 Zehntel, 0 Hundertstel, 1 Tausendstel, 2 Zehntausendstel.
L: Wie bist du denn auf 1 Tausendstel gekommen?

S: Tausend Zehntel, … Naja, vielleicht wenn man, wenn man …
L: Na, du mußt doch irgendwie drauf gekommen sein.
S: … Also, aus 12 macht man 10, also 12 sagt man nicht, man nimmt 10, äh, 10 Zehntausendstel und 2 Zehntausendstel, und 10 Zehntausendstel kann man kürzen, und zwar durch 10, und das sind dann 1 Tausendstel.
L: Ein Tausendstel, richtig.

Der Lehrer bestätigt also zunächst die Lösung des Schülers, indem er das richtige Ergebnis an die Tafel schreibt. Nachträglich werden dann die einzelnen Schritte näher erläutert, so daß das Ergebnis nachvollziehbar wird. Die Geltung verbürgt damit die Mathematik, nach deren Regeln und Gesetzmäßigkeiten man zur richtigen Lösung kommt.

Der zweite Unterrichtsabschnitt ergibt ein ganz ähnliches Bild: Die Tabellen 15 und 16 zeigen, daß auch hier auf Lehrer-Seite die Aufforderungen und auf Schüler-Seite die Reaktionen überwiegen. Das Frage-und-Antwort-Schema ist also auch hier zu finden. Insbesondere bei den *wiss*-Äußerungen lassen sich große Ähnlichkeiten feststellen.

Spielzüge	*lebw*	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF			1	2	3	6
FORT	2	13	7	1		23
REAG		34	6	1		41
SUMME	2	47	14	4	3	70

Tabelle 15: Sprechakte Schüler aus $C_1(3)$, 2. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	*lebw*	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF		19	14	14	1	47
FORT	2	10	12	0	0	25
REAG		0	0	1	1	2
STRK		3	1	0	0	4
SUMME	2	32	27	15	2	78

Tabelle 16: Sprechakte Lehrer aus $C_1(3)$, 2. Unterrichtsabschnitt

Ein Unterschied fällt allerdings bei dem Vergleich von erstem und zweitem Unterrichtsabschnitt auf: Hier tauchen zum ersten Mal auch *lebw*-Äußerungen auf. Dies liegt daran, daß der Lehrer den Abschnitt mit einem zunächst lebensweltlich geprägten Satz beginnt:

> „Angenommen, ihr habt ausgemessen, ein Karton ist ein Fünftel Meter. … Nun, ihr habt das herausbekommen, ihr habt ein Stück Pappe von ein Meter Länge in fünf gleich große Teile zerlegt und wißt damit, daß der Kasten 20 cm / ein Fünftel Meter lang ist."

Dieser Satz wurde als *lebw*-Äußerung codiert, da der Lehrer die Perspektive auf ein praktisches, lebensweltliches Problem lenkt. Allerdings ist dies ein stark konstruiertes Problem (denn wer mißt schon „ein Fünftel Meter"?). Außerdem verspricht er sich offenbar, als er das Ergebnis (1/5m sind 20cm) schon vorwegnimmt. Auch dies macht deutlich, daß es dem Lehrer nicht um das ‚Problem' an sich geht, sondern nur um eine etwas andere Art und Weise, eine Bruchzahl, in deren Nenner keine Zehnerpotenz steht, in eine Dezimalzahl umzuwandeln. In diesem Sinne scheinen auch die Schüler das ‚Problem' zu interpretieren, denn ohne daß der Lehrer dazu auffordert, geben einige Schüler direkt die entsprechende Dezimalzahl an, und zwar ohne eine Größeneinheit. Die folgenden Schüler-Äußerungen sind daher auch wieder als *wiss*-Äußerungen codiert. Charakteristisch ist dafür die Erklärung eines Schülers, wie die 20cm in einen Dezimalbruch umgewandelt werden:

> „Das macht man am besten, wenn man 1/5 auf 2/10 erweitert, dann hat man null Komma zwei, null Komma zwei Meter."

Er bezieht sich nur nachträglich auf die Größeneinheit Meter, ansonsten rechnet er mit Bruchzahlen, die mit dem Karton oder dem Stück Pappe nichts mehr zu tun haben. Insofern ist auch in diesem Abschnitt das Wissen der Schüler recht eindeutig einem Schulwissen zuzuordnen.

Das Wissen des Lehrers erscheint auch in diesem Unterrichtsabschnitt nur selten direkt im Unterricht. Von 10 fortführenden *wiss*-Äußerungen sind es nur zwei, in denen der Lehrer sein Wissen direkt einbringt: Einmal löst er selbst eine einfache Rechenaufgabe (Erweitern des Zählers), das andere Mal faßt er Schüler-Antworten zusammen, die noch nicht richtig formuliert waren. Die anderen Sprechakte sind Gegenargumente oder weiterführende Hinweise. Die Mehrzahl der *wiss*-Äußerungen sind wiederum Aufforderungen, d.h. zumeist Fragen an die Schüler, durch deren Antworten das Wissen konstituiert wird.

Schaut man sich nun die *lern*-Äußerungen des Lehrers an, so findet man auch hier ungefähr gleich viele Aufforderungen wie Fortführungen. In den fortführenden Spielzügen bestätigt der Lehrer Antworten der Schüler, wiederholt er sie, und an einigen Stellen bewertet er sie auch negativ. In den auffordernden Spielzügen finden sich wie im ersten Abschnitt Gegenfragen und Aufforderungen zur weiteren Erläuterung der Vorgehensweise (z.B.: „Warum nimmst du denn gerade 100?"). Das Wissen verbürgen damit der Lehrer, der die Aussagen als richtig legitimiert, und die Mathematik, die im Vorwissen der Schüler verankert ist und durch die Fragen des Lehrers ‚hervorgelockt' wird.

Der relativ kurze dritte Unterrichtsabschnitt (32 Zeilen) zeichnet sich im Unterschied zu den vorherigen dadurch aus, daß der Anteil der Schüleräußerungen insgesamt etwas größer ist als der des Lehrers, der Lehrer hier nur wenige Fragen stellt und sich das Wissen im Unterricht vor allem aus fortführenden Beiträgen der Schüler konstituiert, wie die folgenden zwei Tabellen verdeutlichen:

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*uorg*	*Summe*
AUFF		1	1	2
FORT	6	5		11
REAG	4	1		5
SUMME	10	7	1	18

Tabelle 17: Sprechakte Schüler aus $C_1(3)$, 3. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	wiss	lern	uorg	Summe
AUFF	1	2	4	7
FORT	3	2	1	6
STRK	1			1
SUMME	5	4	5	14

Tabelle 18: Sprechakte Lehrer aus $C_1(3)$, 3. Unterrichtsabschnitt

Andererseits werden hier keine weiteren Erklärungen zum Unterrichtsergebnis gegeben. Auf den Vorschlag eines Schülers, daß man den Bruch 21/300 durch 3 teilen könne (er meint wohl kürzen, wird aber vom Lehrer nicht verbessert), fragt der Lehrer zwar: „Warum denn das?“, er beantwortet anschließend seine Frage jedoch indirekt selbst, indem er die gekürzte Bruchzahl an die Tafel schreibt und zusammenfaßt: „Ja, jetzt haben wir also erst gekürzt.“ Die darauf folgende Umwandlung in einen Dezimalbruch wird dann wie vorher durchgeführt. Das Wissen wird damit vor allem vom Lehrer verbürgt, die Mathematik wird implizit dadurch in Anspruch genommen, daß das Kürzen ein (vom Lehrer berechnetes) Ergebnis bringt, das sich problemlos in einen Dezimalbruch umwandeln läßt.

Der vierte Abschnitt zeigt ein ähnliches Bild wie der vorherige:

Spielzüge	wiss	lern	uorg	usys	Summe
AUFF	1	1	8		10
FORT	8	16	1		25
REAG	6	3	2	1	12
SUMME	15	20	11	1	47

Tabelle 19: Sprechakte Schüler aus $C_1(3)$, 4. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	wiss	lern	uorg	usys	Summe
AUFF		5	13	3	21
FORT	2	7	5		14
STRK	1				1
SUMME	3	12	18	3	36

Tabelle 20: Sprechakte Lehrer aus $C_1(3)$, 4. Unterrichtsabschnitt

Auch in diesem Unterrichtsabschnitt finden wir mehr Schüler- als Lehreräußerungen. Bei den Schüleräußerungen in Tabelle 19 fällt auf, daß mehr als die Hälfte fortführende und nur ungefähr ein Viertel reagierende Spielzüge sind. Auch bei der Betrachtung des Bedeutungsaspekts ergeben sich Unterschiede zu den vorherigen Abschnitten: Es tauchen mehr *lern*-Äußerungen als *wiss*-Äußerungen auf. Der große Anteil an fortführenden *lern*-Äußerungen besteht ausschließlich aus Kommentaren wie: „Das geht ja nicht.“, oder: „Klar geht das.“ Die Schüler sind sich offenbar uneinig, ob man den Bruch 1/3 in einen Dezimalbruch umwandeln kann oder nicht. In den fortführenden *wiss*-Äußerungen findet man Vorschläge, was man machen könne, damit aus 1/3 ein Zehnerbruch wird: „Vielleicht mal 10 nehmen und dann durch drei teilen.“, oder: „Mit dem Kehrwert malnehmen!“ Dies sind alles Vorschläge, die ohne direkte Aufforderung des Lehrers in den Unterricht eingebracht werden. Die vielen Fortführungen der Schüler sind durch den relativ geringen Anteil an Aufforderungen des Lehrers zu erklären. Zwar sind die meisten Lehreräußerungen immer noch Aufforderungen (vgl Tabelle 20), die Mehrzahl sind aber unterrichtsorganisatorischer Art, keine Aufforderung wurde als *wiss*-Sprechakt codiert. Die unterrichtsorganisatorischen Aufforderungen sind Fragen wie: „Und was soll ich jetzt hiermit machen?“, oder: „Moment Moment, was soll ich da hinschreiben?“ Es sind Rückfragen auf Vorschläge der Schüler, die dem Lehrer damit die nächsten Schritte vorgeben. Begründungen werden vom Lehrer nur selten gefordert. Erst nach mehreren Versuchen, die nicht zum gewünschten Ziel führten, nimmt der Lehrer die Aussage eines Schülers explizit auf, , die auch vorher schon mehrere Male gefallen ist („Das geht gar nicht.“), und fragt nach einer Begründung:

L: Warum meinst du denn, daß das nicht geht?
S: Weil’s nicht geht.
L: Ja, das ist keine Begründung. … So, Carola hat also erstmal, mal recht.

Anschließend schreibt er an die Tafel: *„1/3 läßt sich nicht als Dezimalbruch darstellen.“* Damit wird das, was einige Schüler schon längst vermutet hatten, endgültig vom Lehrer legitimiert. Interessanterweise sind damit aber noch nicht alle Schüler einverstanden. Die folgende Unterrichtssequenz folgt noch nachdem der Lehrer den obigen Satz an die Tafel geschrieben hat:

S: Das geht Herr C, das geht. Herr C, ich hab es.
S: Ich hab es auch!
S: Mit dem Kehrwert malnehmen!
S: Herr C, das geht!
S: Steht doch schon dran, daß es nicht geht.
S: Natürlich geht das … Brauchen Sie nur anschreiben, Herr C drei, drei, drei, drei, drei, drei, drei …

Der Lehrer geht auf keine dieser Aussagen ein. Insbesondere der letzte Satz des Schülers zeigt, daß er schon so etwas wie eine periodische Darstellung im Sinn hat. Wie er darauf gekommen ist, läßt sich nicht sagen. Dies ist die einzige Stelle, bei der das Vorwissen der Schüler nicht eindeutig einem Schulwissen zuzuordnen ist. Es erhält jedoch, wie gesagt, keine Geltung.

Zusammenfassend kann für diesen Abschnitt gesagt werden, daß das Vorwissen der Schüler bis auf eine Ausnahme recht eindeutig einem Schulwissen zugeordnet werden kann und daß der Lehrer sein Wissen nicht direkt in den Unterricht einbringt, aber die Geltung des Unterrichtsergebnisses allein verbürgt. Das wird vor allem daran deutlich, daß weitere Vorschläge, vor allem der oben zitierte, durch den indirekt auf periodische Dezimalbrüche hingewiesen wird, vom Lehrer nicht mehr aufgenommen werden. Er bleibt unkommentiert im Raume stehen und erhält somit keine Geltung, obwohl er mathematisch richtig und vollkommen berechtigt ist[101]. Auch werden keine weiteren ma-

[101] Es ist hier anzumerken, daß der Satz, so wie ihn der Lehrer aufschreibt, mathematisch nicht richtig ist. Der Bruch 1/3 läßt sich sehr wohl in einen Dezimalbruch umwandeln, nur nicht in einen endlichen. Das ist es, was hinter der Aussage des Schülers am Schluß dieses Abschnitts vermutet werden kann. Der Un-

thematischen Begründungen angegeben, warum der Bruch nicht umgewandelt werden kann. Die Wissenschaft Mathematik erscheint somit in dieser Phase des Unterrichts nicht als die Geltung verbürgende Instanz.

Die fehlende Begründung des vierten Unterrichtsabschnitts folgt nun im fünften, in dem die bereits (durch Erweitern) umgewandelten Bruchzahlen betrachtet werden und eine Vermutung darüber formuliert wird, wie die Nenner eines umwandelbaren Bruches aussehen müssen (sie dürfen nur die Teiler 2 und 5 haben). Zunächst sollen jedoch wiederum die Sprechakte von Schülern und Lehrer betrachtet werden.

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF			2		2
FORT	13	7		1	21
REAG	31	2		2	35
SUMME	44	9	2	3	58

Tabelle 21: Sprechakte Schüler aus $C_1(3)$, 5. Unterrichtsabschnitt

Spielzüge	*wiss*	*lern*	*uorg*	*usys*	*Summe*
AUFF	19	1	22	3	45
FORT	8	12	3		23
STRK	2		2		4
SUMME	29	13	27	3	72

Tabelle 22: Sprechakte Lehrer aus $C_1(3)$, 5. Unterrichtsabschnitt

Hier ergeben sich wieder große Ähnlichkeiten zu der Verteilung der Sprechakte im ersten und zweiten Unterrichtsabschnitt: Die meisten Schüleräußerungen sind reagierend und auf Wissenschaft bezogen; dem entspricht die hohe Anzahl von auffordernden Spielzügen des Lehrers (*wiss* und *uorg*). Es gibt außerdem wieder mehr Lehrer- als Schüleräußerungen. Insgesamt lassen diese Verteilungen den Schluß zu, daß das ‚Frage-Antwort-Schema' sich hier wieder durchsetzt. Bei genauerer inhaltlicher Betrachtung wird das noch deutlicher. Der folgende Ausschnitt, in dem allerdings nur auffordernde und reagierende *wiss*-Spielzüge zusammengefaßt sind, ist typisch für die Konstitution des Wissens in diesem Unterrichtsabschnitt.

L: Welche Primfaktoren enthält hier der Nenner?
S: Das sind die 1 und die 5.…
S: Eins und 5,
L: 20, wie sieht das da aus?
S: Die 5.
L: Und welche Primzahl taucht noch auf?
S: Vier.
S: Sonst keine.
L: Durch welche Zahlen ist denn 10 teilbar?
S: Ach so, 20.
L: Was verstehen wir denn unter Primzahlen?
S: Unter Primzahlen … die sich nur durch sich selbst und durch eins teilen lassen.

---

terschied zwischen endlichen und unendlichen Dezimalbrüchen wird aber nicht thematisiert. Auch das Unterrichtsergebnis des nächsten Abschnitts ist nur richtig unter der Voraussetzung, daß endliche Dezimalbrüche behandelt werden.

L Wie lauten also die Primzahlen, deren Produkt 20 ergibt?
S: 5
S: 2

Der Lehrer fragt, die Schüler antworten auf der Grundlage ihres Schulwissens. Der Lehrer bringt sein Wissen nicht direkt in den Unterricht ein, indirekt jedoch dadurch, daß er in den *lern*-Äußerungen Schülerantworten bestätigt (oft auch non-verbal, indem er die richtige Antwort an die Tafel schreibt). Oder, bei falschen Antworten, meist Gegenfragen stellt. Durch die Gegenfragen oder Gegenbeispiele wird als Geltung verbürgende Instanz auch wieder die Mathematik als Wissenschaft in Anspruch genommen: Nicht der Lehrer bewertet eine Antwort als falsch, sondern ein mathematisches Gegenbeispiel führt zu der Einsicht. Z.B. vermutet ein Schüler, daß ein Bruch in einen Dezimalbruch umgewandelt werden könne, wenn der Nenner nicht durch drei teilbar sei. Daraufhin führt der Lehrer das Gegenbeispiel 1/7 an: Dieser Bruch ist auch nicht umzuwandeln, obwohl der Nenner nicht durch drei teilbar ist (so explizit wird es im Unterricht zwar nicht gesagt, es ist vom Lehrer aber wohl so gemeint). Das Wissen, das in diesem Unterrichtsabschnitt erscheint, wird also ganz ähnlich wie im ersten und zweiten Abschnitt konstituiert, und wiederum durch den Lehrer und teilweise durch die Mathematik verbürgt.

Insgesamt läßt sich festhalten, daß das Wissen im ersten, zweiten und fünften Unterrichtsabschnitt durch relativ enge Fragen des Lehrers und entsprechende Antworten der Schüler konstituiert wird. Dies zeigt die hohe Anzahl von Aufforderungen des Lehrers bzw. Reaktionen der Schüler. Seine Geltung erhält es einerseits durch den Lehrer, der die Antworten bestätigt, andererseits auch durch die Mathematik, die immer wieder und meist zusätzlich zur Bestätigung durch den Lehrer durch Fragen nach Begründungen oder Gegenfragen herangezogen wird. Ausnahmen bilden der dritte und vierte Abschnitt. Hier setzt sich das Wissen hauptsächlich aus fortführenden Äußerungen der Schüler zusammen, die nicht durch Aufforderungen des Lehrers initiiert sind. Dies hat zur Folge, daß insbesondere im vierten Abschnitt die Mathematik nicht als Geltung verbürgende Instanz in Anspruch genommen wird, sondern allein der Lehrer die Geltung garantiert.

5.5.2.2 Öffnung des Wissens

Nachdem nun herausgearbeitet wurde, welcher Art das im Unterricht erscheinende Wissen ist, wie es im Unterricht konstituiert wird und welche Instanzen die Geltung dafür verbürgen, soll es nun um die Frage der Öffnung des Wissens gehen. Der Grad der Öffnung läßt sich am Umgang mit sogenannten Bruchstellen und an der Verdeutlichung des Konstruktionscharakters festmachen. Zunächst zu den Bruchstellen im Unterricht:

Wir finden hier eine sehr explizite Bruchstelle, die oben schon zitiert wurde: Die Stelle im vierten Unterrichtsabschnitt, in der ein Schüler anmerkt, daß der Bruch 1/3 sehr wohl in einen Dezimalbruch umzuwandeln sei: „Brauchen Sie nur anschreiben, Herr C, drei, drei, drei, drei, drei, drei, drei." Es wurde bereits erwähnt, daß der Lehrer diese Äußerung nicht aufnimmt, sondern direkt zum nächsten Unterrichtsabschnitt übergeht. Wie ist dieses Verhalten zu interpretieren? Eine Thematisierung hätte durchaus zu interessanten Aspekten führen können, die so unausgesprochen bleiben. Zunächst wäre es aufschlußreich gewesen, zu erfahren, wie der Schüler zu dieser Aussage kommt. Die vorangegangenen Vorschläge lassen vermuten, daß er durch Erweitern und anschließendes Kürzen bzw. Dividieren zu seinem Ergebnis kam[102]. Das Problem der Unendlichkeit hätte so angesprochen werden können, denn es scheint so zu sein, daß man dieses Verfahren unendlich lange fortführen kann. So hätte es zu einer Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Dezimalbrüchen kommen können, und das Unterrichtsergebnis, das der Lehrer zuvor an die Tafel geschrieben hatte, hätte korrigiert werden müssen (s. Fußnote 101). So aber wird der Bruch 1/3 als nicht umwandelbar interpretiert, was mathematisch nicht korrekt ist. Im Lehrerinterview nach dieser Stunde wurde diese Unterrichtsszene angesprochen:

> I: Da bei der drei hat dann auch jemand/ bei den ein Drittel – mal gesagt: Null Komma drei drei drei drei, hast du das mitgekriegt?
>
> L: Mmh, das habe ich mitgekriegt. Aber das hätte in dem Augenblick nicht geholfen, denn dann hätte ich wirklich noch mal weiterfragen müssen, denn der hat das nämlich wahrscheinlich nur rausbekommen, indem er das gleich/ 'n Bruchstrich durch 'n Divisionszeichen ersetzt hat und dann irgendwo geteilt hat, oder er hat das auch schon im Buch nachgeguckt. …
>
> I: Aber jetzt sagst du ja, daß du denen das im Grunde genommen nicht zutraust, ne, zu sagen 0,3333.
>
> L: Ja, ich hätte ja, wenn ich das jetzt aufgenommen hätte, die Schüler noch mehr verwirrt. … Ne, ich glaube, aus dem Momentanen hätte er nicht darauf kommen können.

Hier werden drei Dinge deutlich: Erstens hat der Lehrer den Vorschlag des Schülers sehr wohl (akustisch) verstanden, zweitens glaubt er, daß der Schüler das Ergebnis wahrscheinlich aus dem Buch hat (er scheint sich allerdings in diesem Punkt nicht ganz sicher zu sein), jedenfalls ist er drittens der Meinung, daß eine Thematisierung bei den anderen Schülern nur Verwirrung gestiftet und nicht dazu gedient hätte, den Sachverhalt aufzuklären. Es kann hier nicht entschieden werden, woher der Schüler sein Wissen nimmt. Dadurch aber, daß es nicht im Unterricht aufgenommen wird und der Lehrer aufgrund seiner pädagogischen Autorität entscheidet, daß es der Sache nicht dienlich ist, wird eine Öffnung des Wissens verhindert. Das Unterrichtsergebnis beinhaltet somit eine verkürzte Interpretation des Sachverhalts.

Schaut man sich noch einmal die im letzten Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse zur Konstituierung und Geltung des Wissens an, so scheint es kein Zufall zu sein, daß die einzige explizite Bruchstelle sich im 4. Unterrichtsabschnitt befindet. Dieser nämlich zeichnete sich im Unterschied zu den anderen dadurch aus, daß das Wissen hauptsächlich durch Fortführungen der Schüler konstituiert wurde[103] und damit nicht so stark

---

[102] $\frac{1}{3} = \frac{1000}{3000} = \frac{999}{3000} + \frac{1}{3000} = \frac{333}{1000} + \frac{1}{3000} = 0{,}333 + \frac{1}{3000}$ u.s.w.

[103] Eine weitere Ausnahme bildet der 3. Abschnitt, der sich allerdings in der Länge wiederum stark vom 4. unterscheidet.

durch Fragen des Lehrers gelenkt wurde (vgl. Tabelle 19). Vor dem Hintergrund des von Voigt entwickelten Erarbeitungsprozeßmusters (vgl. Voigt 1984, S.120ff) kann die angesprochene Szene weiter interpretiert werden. Das Erarbeitungsprozeßmuster gliedert sich in drei Phasen: In der ersten stellt der Lehrer eine sehr offene Frage, auf die die Schüler zunächst relativ beliebige Vorschläge machen, bis ein „vorläufiges Aufgabenverständnis hergestellt" ist (ebd., S.128). Dann wird ‚fragend-entwickelnd' die Lösung erarbeitet und in der dritten Phase schließlich im nachhinein interpretiert. Auf diese Stunde bezogen, kann nun der vierte Abschnitt als erste und zweite Phase dieses Musters interpretiert werden:

Die einleitende Frage („Jetzt möchte ich gern mal ein Drittel haben.") ist insofern offen, als sie inhaltlich nicht in das zuvor erarbeitete Schema paßt. Es wird relativ schnell klar, daß dieser Bruch sich nicht mit den herkömmlichen Methoden (erweitern oder kürzen) in einen Zehnerbruch umwandeln läßt. Nun beginnt eine Phase, in der die Schüler willkürlich Vorschläge machen, die der Lehrer zunächst aufnimmt und an der Tafel durchführt. Er nimmt dann den Hinweis auf, daß das gar nicht umzuwandeln sei. Das wird an die Tafel geschrieben und als Unterrichtsergebnis festgehalten[104]; und erst danach kommt der Vorschlag, der sich auf die periodische Darstellung bezieht. Er kommt vielleicht einfach zu spät, denn die Routine (vgl. dazu auch Voigt 1984) im Umgang mit diesem Muster legt fest, daß das Raten, das Einbringen von relativ unverbindlichen Vorschlägen mit der Fixierung der Lösung ein Ende hat. Neue, dem widersprechende, Ergebnisse können jetzt nicht mehr berücksichtigt werden. Dies macht auch der Kommentar eines anderen Schülers deutlich: „Steht doch schon dran, daß es nicht geht!" Was an der Tafel steht, das gilt, die Schüler haben ihre Pflicht in diesem Fall getan.

Die dritte Phase kann mit dem letzten Unterrichtsabschnitt identifiziert werden, denn hier wird (wenn auch eher implizit) eine Begründung dafür geliefert, warum man den Bruch nicht umwandeln konnte. Hier haben die Schüler per definitionem nicht mehr die Möglichkeit, willkürlich Vorschläge zu machen, sondern sie müssen sich an den klar umrissenen Erwartungen des Lehrers orientieren[105]. Dies verhindert weitere Interpretationsdifferenzen weitgehend.

Auch in dem anschließenden Schülerinterview ist diese Unterrichtsstelle ein Thema. Dazu zwei Zitate:

S: Bei dem 1/3, da hat er uns natürlich ganz schön reingelegt, weil das nicht klappte. Er wußte das alles, bloß er sagt's uns nicht.
S: Das macht er öfters so.
I: Dann schreibt er irgendwas an und ihr rätselt erst mal rum, oder wie?

---

[104] Die zweite Phase des Voigtschen Musters, in der die Lösung entwickelt wird, ist von der ersten hier nicht klar zu trennen. Das mag daran liegen, daß es hier keine Lösung gibt, die irgendwie berechnet werden müßte, sie besteht darin, daß festgestellt wird, daß die Aufgabe nicht lösbar ist.

[105] ‚Klar umrissen' sind seine Erwartungen allerdings erst, als der Lehrer zu der Primfaktorzerlegung übergeht. Die einleitende Frage des 5. Abschnitts ist zunächst offen, woraus sich die zweite Bruchstelle dieser Stunde entwickelt (s.u.).

S: Er läßt uns 10 Minuten grübeln, wir brüllen alle/ wir rufen rein, was uns gerade einfällt, ob es nun stimmt, was uns gerade einfällt, und dann nach 10 Minuten sagt er, es geht überhaupt nicht.

Wenig später geht es noch einmal um diesen Abschnitt. Ein Schüler kritisiert, daß der Lehrer auf seinen Vorschlag, den Kehrwert zu nehmen nicht eingegangen ist:

S1: Ja, er hätt's machen können, aber er will's ja nicht. Er läßt nämlich immer uns probieren, sagt meistens immer schon: nein, das geht nicht.

S2: Ja, was hätt er denn da noch groß sagen sollen? Also mit dem Kehrwert, das wär ja auch nicht gegangen.

S1: Er hätte uns ja beweisen können, daß er/ daß das nicht mit dem Kehrbruch malgeht.

Hier wird deutlich, daß die Schüler die Vorgehensweise des Lehrers sehr genau durchschauen. Sie spielen das Spiel mit, in dem es darum geht, die Antwort, die der Lehrer genau kennt, herauszufinden. Dabei ist der Inhalt dessen, was die Schüler einbringen, relativ unwichtig, es wird so lange geraten, bis der Lehrer eine Antwort als richtig herausstellt[106]. Bei dem zuletzt zitierten Schüler scheint es nun aber so zu sein, daß er seinen Vorschlag ernst nimmt und von seiner Untauglichkeit für die Lösung des Problems noch nicht überzeugt war. Er kritisiert die Spielregeln und fühlt sich nicht ernst genommen, er möchte davon überzeugt werden, daß sein Vorschlag falsch war. Davon ist im Unterricht selbst freilich nichts zu spüren. Hier wird das Spiel voll akzeptiert und routinemäßig weitergespielt, im Unterricht stößt dieses Vorgehen bei den Schülern nicht auf Widerspruch. Das muß aber, wie man sieht, nicht unbedingt heißen, daß die Schüler ihren eigenen Beiträgen keinerlei Bedeutung zumessen.

Vor diesem Hintergrund kann auch das Fehlen weiterer expliziter Bruchstellen noch einmal gedeutet werden: Wenn im Unterricht die Ideen der Schüler eingefordert werden, so werden sie nur unter der Zielperspektive der vom Lehrer angestrebten Lösung gesehen. Dient ein Vorschlag diesem Ziel nicht (so wie der Vorschlag, 1/3 als periodischen Dezimalbruch zu schreiben), so wird er ausgesondert, eine Begründung dafür ist nicht unbedingt notwendig; und das wird im Unterricht von den Schülern akzeptiert. Sie wünschen sich zwar offensichtlich, daß der Lehrer auf ihre Vorschläge näher eingeht und eine Zurückweisung auch begründet, andererseits verstehen sie selbst ihre Vorschläge als Mittel zum Zweck: „wir rufen rein, was uns gerade einfällt" , und dies scheinbar mit der Erwartung, daß der Lehrer schon sagen wird, was richtig ist und was falsch. Daß das Wissen nicht geöffnet wird und die Geltung hinterfragt und ausgehandelt wird, liegt also auch an der Erwartungshaltung der Schüler. Eine Aushandlung von divergierenden Interpretationen wird so erschwert, wenn nicht gar unmöglich gemacht.

Eine zweite, jedoch eher implizite Bruchstelle befindet sich im fünften Abschnitt. Der Lehrer fragt danach, wie „bisher Dezimalbrüche aus(sehen), die wir kennen?". Diese relativ offene Frage, die eigentlich keinen Hinweis darauf enthält, daß es im folgenden um eine Betrachtung der Nenner gehen soll, wird so beantwortet: „Der Nenner, der muß

[106] Vgl. dazu Voigt 1984, S.145: Er schreibt zur Routine in der zweiten Phase des Erarbeitungsprozßmusters: „Die Antworten der Schüler werden zunehmend beliebiger, willkürlicher und sinnloser. (Ihr Verhalten erinnert an das Verhalten der Kandidaten in der Fernsehsendung ‚Die Montagsmaler'.) Sie folgen einer Handlungsroutine, die man *Versuch-Irrtum-Verfahren* nennen könnte."

durch fünf teilbar sein.“ Das ist eine richtige Antwort, sie wird allerdings nicht akzeptiert, denn ein Schüler widerlegt sie durch ein Gegenbeispiel, das der Lehrer aufnimmt:

S	Wenn man jetzt ein Fünfundvierzigstel hat, wie will man das dann machen? …
L	Wie sieht denn die Zerlegung für ein Fünfundvierzigstel aus? …
S	Geht nicht. …
L	Gibt es trotzdem ‘ne Darstellung? … Denn wenn wir Katja hier richtig verstanden haben, so ist hier die 5 enthalten, also können wir das in einen Zehnerbruch verwandeln.
S	Nein, können wir nicht.

Dann ein weiterer Versuch eines Schülers: „Man kann nur Brüche als Dezimalzahl darstellen, die nicht durch drei teilbar sind.“ Auch das ist richtig, wird aber wiederum nicht akzeptiert. Diesmal führt der Lehrer ein Gegenbeispiel an: „Wie sieht das mit 1/7 aus?“ Dieser Bruch sei auch nicht umzuwandeln, obwohl der Nenner nicht durch drei teilbar sei.

Wie ist es zu erklären, daß der Lehrer den richtigen Antworten der Schüler keine Geltung verschafft? Eine mögliche Erklärung ist ein unterschiedliches Aufgabenverständnis. Während der Lehrer auf eine hinreichende Bedingung hinaus will, geben die Schüler notwendige Bedingungen an. Diese allein reichen natürlich für eine allgemeine Bestimmung der umwandelbaren Bruchzahlen nicht aus, sind aber, wie gesagt, nicht falsch. Sie passen nur nicht zum Aufgabenverständnis des Lehrers – das wie erwähnt durch seine Frage nicht zum Ausdruck kommt – und werden deshalb zurückgewiesen. Die Antworten der Schüler erhalten keine Geltung, weil der Lehrer anscheinend die unterschiedliche Interpretation der Aufgabe nicht bemerkt. Hätte er die Antworten der Schüler legitimiert und die Gegenbeispiele dazu genutzt herauszustellen, daß die von den Schülern genannten Bedingungen noch nicht ausreichend sind, wäre diese Interpretationsdifferenz möglicherweise deutlich geworden. So aber werden die Interpretationen der Schüler als falsch zurückgewiesen, und eine Öffnung des Wissens wird auch hier verhindert.

Ein weiterer Maßstab für die Öffnung des Wissens war die Verdeutlichung des Konstruktionscharakters des Wissens. Dieser wird in Ansätzen im letzten Unterrichtsabschnitt deutlich, in dem es um eine Begründung dafür geht, welche Bruchzahlen sich in einen Dezimalbruch (richtig müßte es heißen: in einen Zehnerbruch) umwandeln lassen und welche nicht. Dazu werden die Nenner der Brüche des 2. Abschnitts untersucht und durch Primfaktorzerlegung festgestellt, daß die Nenner nur die Zahlen 2 und 5 als Teiler enthalten dürfen. Damit werden Voraussetzungen angesprochen, die notwendig für eine Umwandlung sind. Innermathematisch haben die Schüler die Möglichkeit, die Geltung der ‚Vermutung‘ nachzuvollziehen und zu überprüfen, sie sind nicht auf ‚Probieren‘ angewiesen, sondern können vorher entscheiden, ob ein Bruch als Zehnerbruch darstellbar (und damit umwandelbar) ist oder nicht.

Verdeutlichung des Konstruktionscharakters meint jedoch mehr: Unter diesem Gesichtspunkt tauchen z.B. Fragen nach der Zweckmäßigkeit von Dezimalbrüchen auf, auch im Gegensatz zu gewöhnlichen Brüchen, nach dem Dezimalsystem im allgemeinen (das nicht von Natur aus gegeben, sondern von Menschen konstruiert wurde) und Vor- und Nachteilen dieses Systems gegenüber anderen (z.B. dem Sexagesimalsystem). Derartige Fragen werden in diesem Unterricht nicht gestellt[107]. Vor allem aber wird im Unterricht die Chance nicht genutzt, auf Grenzen der Gültigkeit von mathematischen Aussagen einzugehen, wie es im 4. Abschnitt möglich gewesen wäre, als es um die Darstellung von 1/3 als Dezimalbruch ging.

5.5.3 Die Didaktik des Lehrers

Es ist oben bereits einiges zur Didaktik des Lehrers angeklungen, das nun etwas ausführlicher betrachtet werden soll. Es wurde insbesondere festgestellt, daß der Lehrer den Unterricht sehr stark durch relativ enge Fragen lenkt und daß er darauf bedacht ist, mathematische Begründungen einzufordern. Ein weiteres Charakteristikum dieses Lehrers, das bisher noch nicht betrachtet wurde, ist die im Unterricht verwendete Sprache bzw. der von ihm geforderte Umgang mit ihr. Er legt großen Wert auf die Benutzung der Fachausdrücke, wie das folgende etwas ausführlichere Beispiel aus dem 2. Unterrichtsabschnitt zeigt:

L Warum nimmst du denn gerade 100?
S weil das/weil das
L Warum meinst du gerade, daß wir auf Hundertstel erweitern müssen?
S Das schätz ich
S Oder auf ein Viertel.
S Mensch, ist doch ganz einfach
L Katrin, warum meinst du das …
S Weil, das ist nämlich so: wenn man das mit Hundertstel rechnet, dann wird das alles viel einfacher …
S Da könnt man ja alle in die Tabelle da eintragen und so …
L Sie hätte doch auch … sie hätte auch Tausend nehmen können.
S Ja, aber Hundert ist das nächstkleinste.
S Das nächstniedrigste ist das.
L Das ist die nächste…
S nächst Niedrigste
L Nächst Niedrigste, das ist aber ungenau formuliert.
S Naja, die nächst Niedrigste mit ’ner eins vorne.
S Das nächst Niedrigste, was es gibt
L Naja, du meinst bestimmt das richtige, aber so mathematisch ausgedrückt ist das nicht.
S Ich bin ja auch kein Mathematiker.
L Wer kann also auch das noch, was Katrin hier eben angeführt hat, ’n bißchen genauer formulieren?
S Nächst niedrigste Zehner…
L Was meint sie denn mit nächst Niedrigste?
S Hundertstel, Zehntel …
S Ah, jetzt weiß ich, was sie gemeint hat.
L Ja, dann verbesser sie doch mal.
S Das ist das nächst niedrigste, was man in der Tabelle eintragen kann.
L Und welche Zahl kann man in die Tabelle eintragen?
S 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, eine Million Hunderttausendstel

[107] In der vorangegangenen Stunde wird beiläufig das Wort ‚Dezimalsystem‘ erklärt, indem auf den Wortstamm eingegangen und auf den Unterschied zum Sexagesimalsystem aufmerksam gemacht wird, das die Schüler aus der Zeitmessung kennen.

L Und was sind das alles für Zahlen? Was sind das alles für Zahlen? Sascha.
S Die kann man alle durch 10 teilen.
L 20 kann ich auch durch 10 teilen und trotzdem kommt das nicht hin.
S Aber sie können oben nicht die zwei durch 10 teilen.
L So weit waren wir ja noch gar nicht.
S Herr C, sagen Sie uns doch'n Trick, wie's geht, dazu.
L Martin.
S Das is ganz einfach: weil Hundert die nächsthöhere Zehnerpotenz ist.
L Jawoll! Kannst du das nochmal laut und deutlich wiederholen?
S Hundert ist die nächsthöhere Zehnerpotenz!

Diese Unterrichtssequenz bildet ca. ¼ des gesamten 2. Abschnitts. Es hat den Charakter eines Ratespiels, in dem der Lehrer die Antwort weiß und die Schüler die Ratenden sind. Der Begriff ‚Zehnerpotenz' ist in den vorangegangenen Stunden zwar schon einmal gefallen, trotzdem wissen die Schüler lange nicht, worauf der Lehrer hinaus will, was er hören will. Den Sachverhalt haben sie jedoch anscheinend sehr wohl verstanden. Warum also drängt der Lehrer darauf, genau diesen Begriff zu benutzen, und warum sagt er ihn nicht direkt, nachdem klar ist, daß die Schüler ihn nicht mehr parat haben?

Schauen wir uns daraufhin einige Ausschnitte aus dem Lehrerinterview an:

> „Aber, was für mich viel wichtiger ist, deshalb konzentriere ich mich meistens auf den Ton, ob ich präzise und deutlich genug spreche. Das ist nämlich für Schüler sehr wichtig, daß der Lehrer deutlich und vor allem für sie auch verständlich spricht, und man kann viele Fehler von vornherein vermeiden, oder Undeutlichkeiten vermeiden, wenn man genau genug formuliert, die Fragen und, äh, die Hilfen exakt genug gibt. …
>
> Einerseits versuche ich, mich selbst präzise auszudrücken, andererseits aber auch von Schülern durch – das wird vielleicht in diesen Stunden nicht ganz deutlich – äh, zu erreichen, daß sie in ihrer eigenen Sprache noch mal das erläutern, was hier als Definition vielleicht steht.…
>
> Das ist vielleicht auch 'n eigenes Problem. Ich bin im Examen so auf die Nase gefallen, daß ich nicht genau genug mathematische Formulierungen gegeben habe, und, äh, das passiert mir auch immer wieder in Prüfungen, das kann man auch im Abi nachvollziehen, daß Schülern angekreidet wird, daß sie nicht mathematisch genau formuliert haben, daß sie Dinge in ihrer Formulierung nicht beachtet haben, die man bei genauer mathematischer Betrachtung hätte sehen müssen."

Aus diesen Zitaten wird deutlich: Dem Lehrer ist die Sprache im Unterricht sehr wichtig. Insbesondere versucht er, deutlich und präzise zu sprechen, damit keine Mißverständnisse auftreten. Andererseits ist auch die Umgangssprache im Unterricht von Bedeutung, die Schüler sollen den Zusammenhang zwischen der alltäglichen und der mathematischen Sprache erkennen können, und nur wenn sie in der Lage sind, mathematische Formulierungen zu ‚übersetzen', scheint für ihn das Verständnis gesichert zu sein. Schließlich finden wir noch eine Begründung für die ausgeprägte Sprachbetonung im Unterricht: Einerseits möchte er die Schüler auf Prüfungen vorbereiten, in denen der richtige Umgang mit der mathematischen Sprache besonders wichtig zu sein scheint, andererseits resultiert sie aus seinen wohl eher schlechten eigenen Erfahrungen aus der Examensprüfung (die vermutlich noch nicht so weit zurückliegt, denn Lehrer C ist wie gesagt Referendar an der Schule).

Vor diesem Hintergrund wird die oben zitierte Unterrichtssequenz verständlicher, sie findet ihre Entsprechung in der Didaktik des Lehrers, oder besser: in der „subjektiven

Unterrichtstheorie“ (vgl. Heymann 1984, S. 100ff). Allerdings mit einem Unterschied: Er selbst spricht davon, daß es wichtig sei, daß die Schüler die mathematischen Ausdrücke „noch mal in ihre Umgangssprache ersetzen können“. Der Weg, der im Unterricht beschritten wird, verläuft genau andersherum. Umgangssprachlich wissen die Schüler, warum der Bruch auf Hundertstel erweitert werden muß. Diese Formulierung läßt der Lehrer jedoch so nicht gelten, er will den mathematischen Ausdruck dafür hören. D.h., er verlangt von den Schülern die Übersetzung von der Umgangssprache in die mathematische Sprache. Diese Formulierung bleibt am Ende der Szene stehen, wird sogar noch einmal wiederholt, was die Wichtigkeit unterstreicht. Das Erlernen der präzisen Fachsprache steht dabei eindeutig im Vordergrund. Der Lehrer nimmt dabei in Kauf, daß es möglich sei,

> „daß die Schüler sich … vergewaltigt ist zwar der falsche Ausdruck dafür, vielleicht etwas zu stark, aber daß sie aber hier etwas lernen müssen, was ihnen gar nicht so klar ist.“

Dies wiederum liegt seiner Meinung nach daran, daß es in der Mathematik nur wenig unterschiedliche Perspektiven gibt, „mit denen man Lösungen betrachten kann/ Probleme betrachten kann.“ Es gibt immer nur eine Zugriffsweise, „die letztendlich richtig ist.“ Und mit dieser Zugriffsweise meint er die über die mathematische Symbolsprache vermittelte, die mit Hilfe der formalen Regeln zur eindeutig richtigen Lösung führt, wie er im weiteren Verlauf des Interviews an einem Beispiel erläutert.

Er sieht die Mathematik also eher als ein statisches Gebäude, in dem eine bestimmte Fachsprache benutzt wird, die man erlernen und beherrschen muß, um sich darin zurechtzufinden. Der Weg dorthin führt zwar über die Umgangssprache, diese muß aber überwunden werden. Die Rückübersetzung sollte seiner Meinung nach freilich auch beherrscht werden, das wird aber in diesem Unterricht nicht sichtbar[108]. Die Tendenz, immer wieder mathematische Begründungen einzufordern – der oben zitierte Unterrichtsausschnitt ist gerade ein Beispiel dafür – kann nun interpretiert werden als Einübung in die mathematische Sprache. Denn es ist auffallend, daß er bei allen Begründungen eine korrekte fachsprachliche Formulierung einfordert. Daraus resultiert zum großen Teil auch starke Lenkung des Unterrichtsgesprächs, das gleichzeitig Bestandteil des Erarbeitungsprozeßmusters ist.

5.5.4 Das Fach und die Schule

Der Unterricht fand in einer sechsten Klasse einer Orientierungsstufe in Niedersachsen statt. Im folgenden sollen die ‚Rahmenrichtlinien für die Orientierungsstufe‘ von 1978[109] und die ‚Grundsatzpapiere für die Rahmenrichtlinien der Orientierungsstufe‘ von 1975 herangezogen werden.

[108] Es wird zu prüfen sein, inwieweit er seinen eigenen Ansprüchen in den anderen Stunden gerecht wird, oder ob er nicht vielmehr eindeutig den Schwerpunkt auf die mathematische Sprache legt.

[109] Es ist nicht sicher, ob diese Richtlinien dem Lehrer schon zur Verfügung standen, da sie erst im Oktober 1978 in Kraft traten, der Unterricht fand im Februar 1978 statt. Ich habe an anderer Stelle (5.1.4.1)

Das Thema dieser Stunde ist dem Themenkreis „Bruchzahlen“ zuzuordnen. In den Rahmenrichtlinien tauchen die Dezimalbrüche als dritter Unterabschnitt auf: „Dezimalbrüche und gewöhnliche Brüche als verschiedene Bezeichnungsweisen von Bruchzahlen“. Es folgen drei Lernziele, die verbindlich gelten:

- Wissen, daß Dezimalbrüche Zeichen für Bruchzahlen sind
- Den Aufbau von Dezimalbrüchen erläutern
- Brüche in Dezimalbrüche und abbrechende Dezimalbrüche in Brüche umwandeln

Als zusätzliches Lernziel wird angegeben:

- Periodische Dezimalbrüche in Brüche verwandeln. (vgl. Rahmenrichtlinien 1978, S.52f)

Es geht aus der Formulierung nicht klar hervor, ob in diesen Lernzielen auch das Umwandeln von Brüchen in periodische Dezimalbrüche enthalten ist. Einerseits spricht dafür, daß im dritten Lernziel Brüche im allgemeinen in Dezimalbrüche umgewandelt werden sollen und Differenzierung nach abbrechenden und nicht-abbrechenden nur in umgekehrter Richtung erfolgt, andererseits taucht der Begriff ‚periodischer Dezimalbruch‘ nur im zusätzlichen Lernziel auf. Jedenfalls sollte laut Rahmenrichtlinien der Begriff ‚abbrechender Dezimalbruch‘ auf jeden Fall im Unterricht zur Sprache kommen. Es bleibt die Frage, wie er ohne die Gegenbegriffe ‚nicht-abbrechender‘ oder ‚periodischer Dezimalbruch‘ thematisiert werden soll. Diese Schwierigkeit scheint auch der Lehrer zu haben, der die Möglichkeit nicht nutzt, den Unterschied zu verdeutlichen, auf den ein Schüler aufmerksam macht. Dies mag nun daran liegen, daß der Lehrer, hätte er den Vorschlag aufgenommen, den Begriff ‚periodischer Dezimalbruch‘ hätte nennen müssen. Dieser wiederum ist aber als Zusatz in den Richtlinien gekennzeichnet und schien ihm von daher vielleicht ungeeignet im Unterricht zu thematisieren. Kurz: Vor dem Hintergrund der Richtlinien wird die Zurückweisung verständlicher.

Ein weiteres auffälliges Moment war die Betonung der mathematischen Sprache im Unterricht. Auch dazu lassen sich Parallelen in den Richtlinien und den Grundsatzpapieren feststellen. Als erstes allgemeines Lernziel wird in den Richtlinien „Sachgerechtes Sprachverhalten“ (S.38) genannt. Erläuternd heißt es:

- Sprechbereitschaft entwickeln
- Sachgerechte mathematische Ausdrucksweisen entwickeln
- Notwendigkeit anerkennen, eindeutige Formulierungen zu verwenden

In den Grundsatzpapieren, in denen die allgemeinen Ziele noch ausführlicher dargestellt werden, heißt es außerdem:

Formalisieren

- Fachsprache erlernen und benutzen (vgl. Grundsatzpapiere 1975, S.48)

---

jedoch gezeigt, daß sie sich in den Inhalten und Zielen nicht wesentlich von den zuvor erschienenen Grundsatzpapieren und Handreichungen unterscheiden.

Die Betonung der Sprache findet also ihre direkte Entsprechung nicht nur in der Didaktik des Lehrers, sondern darüber hinaus in den Richtlinien. In den Grundsatzpapieren wird noch ein weiterer Akzent gesetzt:

Konkrete Sachverhalte in Fachsprache darstellen

- Übergang von einer Darstellungsform zur anderen (auch von formalisierter zu umgangssprachlicher Darstellung, von symbolischer zu graphischer, usw.) (vgl. ebd.)

Dieses Lernziel (Übergang von formalisierter zu umgangssprachlicher Darstellung) ist zwar in den Vorstellungen des Lehrers von einem ‚guten' Unterricht verankert, es wird im Unterricht aber, wie oben gezeigt, nicht realisiert. Warum das nicht geschieht kann hier nicht beantwortet werden. Möglicherweise, weil die Übersetzungsfähigkeit ‚in die andere Richtung' sowohl in den Richtlinien als auch in den Grundsatzpapieren weitaus stärker betont wird.

5.5.5 Mathematik im Unterricht

Das im Unterricht erscheinende Wissen soll nun den gesamten Möglichkeiten der Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis gegenübergestellt werden. Im Strukturgitter wurden dazu die Begriffe *Modell, System* und *Überprüfung* bereitgestellt. Lassen sich im Unterricht Hinweise finden, daß das Wissen unter diese Begriffe subsumiert werden kann oder wird etwas systematisch außer acht gelassen?

An keiner Stelle im Unterricht wird deutlich, daß Mathematik eine *modellbildende* Funktion hat. Es erscheinen abstrakte Zahlen, die umgewandelt werden können in Dezimalzahlen, aber es erscheint kein Bezug zur außermathematischen Wirklichkeit. Das ist selbst dort nicht der Fall, wo der Bruch 1/5 als Maßzahl für eine Größe benutzt wird (im 2. Abschnitt, s. S.147). Auch innermathematisch kommt der Aspekt des Modells nicht zum Vorschein.

Der Schwerpunkt dieser Unterrichtsstunde liegt ganz eindeutig auf dem Begriff des *Systems*. Das wird deutlich in der Betonung der mathematischen Sprache, an der Verwendung der mathematischen Ausdrücke, auf die der Lehrer besteht (vgl. 5.5.3). Was darf man mit den Zahlen machen und was nicht (z.B. erweitern und nicht multiplizieren), was sind Primzahlen, wie sieht die Primfaktorzerlegung aus, welche Brüche lassen sich umwandeln und welche nicht, – all dies sind Fragen, die die Mathematik als ein formales System berühren. Eins wird allerdings auch hier nicht deutlich: daß jeder mathematische Satz immer bestimmte Voraussetzungen hat, unter denen der gültig ist. Die Sätze: „1/3 läßt sich nicht als Dezimalbruch darstellen." und „Es lassen sich nur Brüche in Dezimalzahlen umwandeln, deren Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5 enthält.", sind nur richtig unter der Voraussetzung, daß man nur von abbrechenden Dezimalzahlen spricht. Sie erscheinen im Unterricht jedoch als uneingeschränkt gültig.

Ein Widerspruch hätte darauf aufmerksam machen können: der Vorschlag eines Schülers, daß der Bruch 1/3 doch umzuwandeln sei. Dadurch hätte die eingeschränkte Gültigkeit sichtbar werden können, und die unausgesprochenen Voraussetzungen hätten formuliert werden müssen. Dieser Widerspruch wird vom Lehrer nicht aufgenommen, das Unterrichtsergebnis wird dadurch weder *überprüft* noch korrigiert.

An anderer Stelle, im fünften Unterrichtsabschnitt, werden Gegenbeispiele aufgenommen: Die Aussagen, daß die Nenner der Brüche, die in Dezimalzahlen umzuwandeln seien, durch 5 bzw. nicht durch 3 teilbar seien, werden durch Gegenbeispiele widerlegt. Ein Gegenbeispiel gibt der Lehrer selbst an. Dadurch werden die Aussagen jedoch vollständig zurückgewiesen, obwohl sie richtig sind – wenn auch nicht hinreichend (vgl. 5.5.2.2).

Insgesamt zeigt sich hier ein deutlich eingeschränktes Bild der Mathematik. Hinweise auf Aspekte des Modells oder die Notwendigkeit der Überprüfung zugrundeliegender Voraussetzungen findet man nicht oder sie werden nicht aufgenommen, was zur Konsequenz hat, daß das Unterrichtsergebnis mathematisch nicht korrekt ist. Die Mathematik erscheint vor allem als ein System. Es ist wichtig ist, die ihm eigene Sprache zu beherrschen. Es erscheinen aber nur wenig Hinweise auf den Sinn und Nutzen eines solchen Systems und darauf, daß Aussagen und Sätze immer an bestimmte Voraussetzungen gebunden sind.

5.6 Die Unterrichtseinheit C_2

Die folgende Analyse einer weiteren Unterrichtsstunde bei Lehrer C, jetzt aus der Unterrichtseinheit C_2, soll nun vor dem Hintergrund der obigen Ergebnisse dargestellt werden. Sie wird auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede aufmerksam machen, die die bisherigen Interpretationen stützen oder widerlegen können.

Die Unterrichtseinheit C_2 wurde im Juni 1978 aufgenommen, also zum Ende des Schuljahres. Die hier ausführlich zu analysierende zweite Stunde von insgesamt drei Stunden behandelt wie die erste Stunde dieser Einheit die Einführung in die Prozentrechnung. In der dritten Stunde folgen Übungen zum Berechnen des Prozentwertes. Nach der dritten Stunde wurde ein gemeinsames Interview mit dem Lehrer und einigen Schülern durchgeführt.

5.6.1 Paraphrase zu $C_2(2)$

Thema: Einführung in die Prozentrechnung und Berechnung des Prozentwerts

1. Wiederholung: Die Begriffe „Prozentwert, Grundwert, Prozentsatz" und die Zahl 100

Auf die Frage des Lehrers: „Wer kann mir bitte noch mal die Begriffe nennen, die letzte Stunde gefallen waren?", antworten die Schüler: „Grundwert.", „Prozentwert." und „Prozentsatz.". Diese werden an die Tafel geschrieben, aber „da fehlt jetzt noch eine Größe". Daraufhin ein Schüler: „Grundsatz." „Das wäre zwar logisch, aber man hat für den Begriff Grundsatz etwas anderes gesetzt." Es wird geklärt, daß 1% gleich 1/100 ist, worauf wiederum die Frage folgt, wie groß der „Grundsatz" sei. „1/100", antwortet ein Schüler. „Nein, nicht 1/100, sondern nur die …" „100", wie ein Schüler den Satz des Lehrers beendet.

2. Ordnen der Begriffe nach mathematischen Gesichtspunkten: $\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100}$.

Die vier Begriffe sollen dann „nach mathematischen Gesichtspunkten" geordnet werden. Dazu wird eine Aufgabe aus der letzten Stunde herangezogen: 8/25 = 32/100. Den einzelnen Zahlen werden die entsprechenden Begriffe zugeordnet. Diese werden neben die jeweiligen Zahlen geschrieben. Mit den Worten: „So, habe ich denn jetzt nicht die Brüche im Grunde genommen aus diesen vier Begriffen hergestellt?" schließt der Lehrer diesen Unterrichtsabschnitt ab.

3. Der Prozentsatz gibt den Anteil von 100 an, der Prozentwert den Anteil vom Grundwert.

Es soll herausgearbeitet werden, „wie sich der Prozentwert und Grundwert zueinander verhalten". Die Schülerantworten beziehen sich wieder auf die Beispielaufgabe: Man hat erweitert, multipliziert und ähnliches. Auf die Frage des Lehrers, warum man „hier z.B. auf Hundertstel erweitert“ habe, antwortet ein Schüler: „Also wenn man die Prozente ausrechnen will, muß man immer auf Hundert kommen.“ „Also was gibt jeweils der Prozentsatz an?“, fragt der Lehrer weiter. Die Frage wird von Martin beantwortet: „…den Teil von 100.“ Anschließend soll geklärt werden, was der Prozentwert in der Aufgabe angibt. Die entsprechende Frage, die der Lehrer insgesamt dreimal wiederholt, wird nach einiger Zeit von Hans-Jürgen beantwortet: „Den Anteil von 25 am Grundwert.“

4. Es handelt sich um quotientengleiche Paare: Der Prozentwert verhält sich zum Grundwert wie der Prozentsatz zu 100.

Das im vorherigen Unterrichtsabschnitt erarbeitete Ergebnis sollen die Schüler „noch mal versuchen, …in eigenen Worten darzustellen.“ Es wird wieder auf das Zahlenbeispiel 8/25 = 32/100 zurückgegriffen. Der Lehrer gibt weitere Hinweise: „Was drücken denn die beiden Zahlen aus?“ ; „was drückt denn eigentlich hier der Bruchstrich aus?“ Von einem Schüler fällt daraufhin das Stichwort „Quotient“. „Könnt ihr jetzt mit dem Begriff Quotient was anfangen?“, führt der Lehrer fort. „Quotientengleich“, antwortet ein Schüler. Der Lehrer fordert dazu auf, Zahlenpaare aufzustellen: Die Paare (8;25), (32;100) werden an die Tafel geschrieben, und es soll die Eigenschaft dieser Paare genannt werden. Es handelt sich um quotientengleiche oder, „ein anderer Ausdruck“, um verhältnisgleiche Paare. Dann die nächste Frage: „Wie kann man den Zusammenhang zwischen Grundwert, Prozentwert, der Zahl 100 und Prozentsatz ausdrücken?“ Weil keine Antworten von den Schülern kommen, beantwortet der Lehrer selbst seine Frage: „Der Prozentwert verhält sich zum Grundwert wie der Prozentsatz zu 100.“

5. Übungen, Besprechung der Hausaufgaben

Es werden anschließend einige Aufgaben zur Berechnung des Prozentwertes gemeinsam bearbeitet, ein Teil dieser Aufgaben gehört zu den Hausaufgaben aus der letzten Stunde. Die erste Aufgabe (4% von 300DM) haben die Schüler bereits richtig berechnet (4 mal 300 geteilt durch 100). Der Lehrer möchte aber wissen, wie man „auf diese Gleichung kommt“. Die Schüler beschreiben in ihren Antworten den Rechenweg. Schließlich beantwortet der Lehrer wieder selbst seine Frage: „So, … dann muß ich’s wieder selbst machen, quotientengleiche Paare aufstellen. Die 4 verhält sich zu 100 wie x zu 300. … Und wenn ich jetzt hier nach x auflöse, steht genau diese Gleichung hier.“ An der Tafel stehen am Schluß dieser Aufgabe die folgenden Lösungsschritte: 4/100 = x/100; x = 4/100 · 300; x = 12DM. Die folgenden drei Aufgaben werden nach dem gleichen Schema bearbeitet.

6. Eine Formel zur Berechnung des Prozentwertes.

„Wir wollen jetzt diesen Zahlen wieder Begriffe zuordnen“, beginnt der Lehrer diesen Unterrichtsabschnitt und bezieht sich auf die letzte Aufgabe (x = (6 · 150)/100): Die 6 entspricht dem Prozentsatz usf. Schließlich steht an der Tafel:

$\text{Prozentwert} = \frac{\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert}}{100}$. Diese Formel wird von den Schülern dreimal vorgelesen.

5.6.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

Diese Stunde ist die zweite aus einem Komplex von drei aufgenommenen Unterrichtsstunden im Juni. Es ist einleitend anzumerken, daß diese Stunde zum großen Teil eine Wiederholung der ersten ist. Der Inhalt von $C_2(1)$ ist wie folgt zusammenzufassen[110]:

- Wiederholung: Zwei Brüche können nur verglichen werden, wenn die Nenner gleich sind, zwei Beispiele.
- Aufgabe: Wenn auf 300DM 9DM Rabatt gewährt werden, so würden auf 100DM 3DM Rabatt gewährt werden, (300;9) und (100;3) sind verhältnisgleiche Paare.
- Aufgabe: „Zwei Klassen haben gleichzeitig eine Arbeit geschrieben. In der einen Klasse mit 20 Schülern sind 7 Arbeiten mit gut, in der anderen mit 25 Schülern 8 Arbeiten mit gut bewertet worden. Wollen wir nun wissen, welche Klasse den größeren Anteil guter Arbeiten hat, so müssen wir die Brüche 7/20 und 8/25 miteinander vergleichen." (Einführung in die Mathematik, 1975, S.191) Die beiden Brüche werden auf den Nenner 100 gebracht.
- Festlegung der Begriffe der Prozentrechnung, Übung und Hausaufgaben.

5.6.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Es soll in diesem Abschnitt der Frage nachgegangen werden, wie das Wissen im Unterricht konstituiert wird und wer die Geltung dafür verbürgt. Es wird vor allem auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten im Vergleich mit der Februar-Stunde eingegangen. Dazu werden zunächst die Sprechakte von Schülern und Lehrern dieser beiden Stunden gegenübergestellt. Aufgenommen wurden nur die für die Herkunft und Geltung des Wissens entscheidenden Sprechakte. Die *lebw*-Äußerungen wurden sowohl bei den Schülern als auch beim Lehrer fortgelassen, da sie insgesamt nur ca. 1% oder weniger von allen Äußerungen ausmachen.

[110] Die Gliederung der Stunde ist fast identisch mit der Einführung in die Prozentrechnung in : Einführung in die Mathematik 1975, S.191f. Wahrscheinlich lag dieses Buch im Unterricht den Schülern aber nicht vor, denn im Februar wurde noch ein anderes Buch benutzt. Außerdem schreibt der Lehrer die Aufgaben an die Tafel und wandelt die Textaufgaben in kleine ‚Geschichten' um: „Zwei Lehrer treffen sich im Lehrerzimmer, und wie das immer so bei Lehrern ist, sie behaupten, jeder hat die bessere Klasse.…"

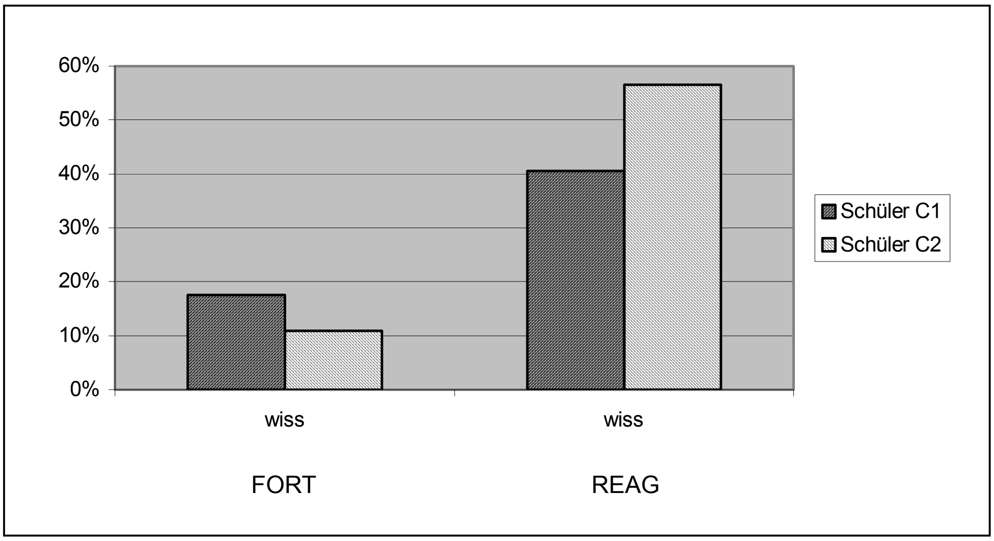

Abbildung 13: Vergleich der Schüler-Sprechakte in $C_1(3)$ und $C_2(2)$ in Prozent bezogen auf die Schüler-Sprechakte insgesamt

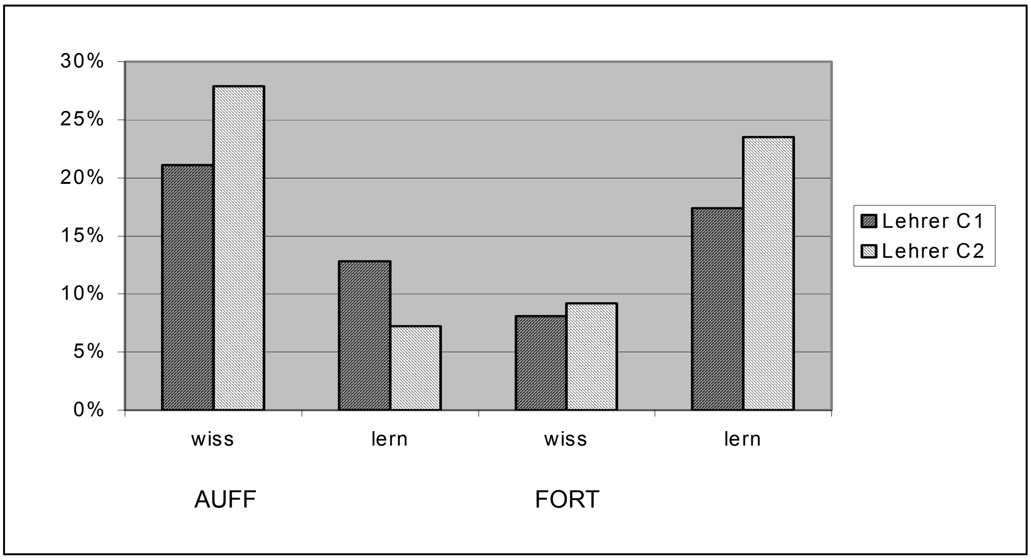

Abbildung 14: Vergleich der Lehrer-Sprechakte in $C_1(3)$ und $C_2(2)$ in Prozent bezogen auf die Lehrer-Sprechakte insgesamt

Zu den Schülern (Abbildung 13): Betrachtet man zunächst nur die Spielzüge, so fällt auf, daß in $C_2(2)$ die reagierenden Äußerungen ca. 10% mehr ausmachen als in $C_1(3)$, dementsprechend weniger häufig treten fortführende Spielzüge auf. Dies ist ein erster Hinweis darauf, daß der Unterricht noch stärker als im Februar durch Reaktionen der Schüler und Aufforderungen des Lehrers bestimmt ist. Schaut man sich nun die Bedeutungsdimensionen an, so stellt man fest, daß die reagierenden *wiss*-Äußerungen mehr als die Hälfte aller Schüleräußerungen ausmachen (in $C_1(3)$ bilden sie ebenfalls die am häufigsten auftretende Kategorie, es sind dort jedoch nur 40,5%). Dies ist Anlaß zu der Vermutung, daß das *Wissen* im Unterricht in erster Linie durch die Reaktionen der

Schüler konstituiert wird. Fortführende *wiss*-Äußerungen treten weniger häufig als in $C_1(3)$ auf, d.h. die Schüler bringen ihr Wissen weniger oft von sich aus in den Unterricht ein.

Bei der Analyse von $C_1(3)$ hatten wir festgestellt, daß das Wissen dort ebenfalls durch Reaktionen der Schüler konstituiert wird, wobei allerdings zwei Unterrichtsabschnitte aus dem Rahmen fielen, in denen die Schüler Vermutungen äußerten und Vorschläge machen konnten, die zum großen Teil nicht durch entsprechende Fragen des Lehrers initiiert wurden. Solche Ausnahmen gibt es in dieser Stunde nicht. Die reagierenden und fortführenden *wiss*-Äußerungen verteilen sich relativ gleichmäßig auf die einzelnen Unterrichtsabschnitte, so daß man festhalten kann, daß sich das Frage-Antwort-Schema in dieser Stunde noch stärker durchsetzt.

Betrachtet man nun entsprechend die Sprechakte des Lehrers (Abbildung 14), so findet man hier erwartungsgemäß mehr auffordernde *wiss*-Äußerungen als in $C_1(3)$, während die fortführenden *wiss*-Äußerungen in beiden Stunden annähernd gleich häufig sind. Es läßt sich dennoch ein nicht unerheblicher Unterschied feststellen, der nur bei der inhaltlichen Betrachtung der Sprechakte deutlich wird: Der Lehrer bringt in dieser Stunde sein Wissen zwar nicht häufiger direkt in den Unterricht ein, aber an sehr entscheidenden Stellen. Er allein ist es, der das Unterrichtsergebnis des 4. und 5. Unterrichtsabschnitts formuliert. Er muß es seiner Ansicht nach tun, weil auf seine Fragen nicht die gewünschten Antworten kommen:

> 4. Abschnitt:
>
> Also, dann muß ich's wohl machen, damit wir heute noch zu den Hausaufgaben kommen. Also, wie … Monika, jetzt reichts aber langsam. Bleib mal sitzen da! Achim …dreh dich nach vorne um. Wir haben hier nun , das ist richtig herausgearbeitet worden von euch, verhältnisgleiche Paare, das heißt diese beiden … diese beiden Worte: der Prozentwert verhält sich zu dem Grundwert, wie der Prozentsatz zu 100.
>
> 5. Abschnitt:
>
> Wie kommt man hierdrauf? Und das muß ja wohl möglich sein, ohne daß ihr …also lange überlegen müßt. … Ich habe doch in der …angeschrieben …Möglicherweise hast du das auch im Heft stehen, da. … Ich seh das nicht, daß das hier irgend jemand hier stehen hat … So, ich kann jetzt aus, dann muß ich's wieder selbst machen, quotientengleiche Paare aufstellen. …Die 4 verhält sich zu 100 wie x zu 300. Und wenn ich jetzt hier nach x auflöse, steht genau diese Gleichung hier.

Das Wissen im Unterricht setzt sich also zu einem großen Teil aus reagierenden *wiss*-Äußerungen der Schüler und an entscheidenden Stellen durch ein Sachwissen des Lehrers zusammen.

Die nächste Frage ist die nach der Geltung des erscheinenden Wissens. Geltungsansprüche verbergen sich vor allem hinter den *lern*-Äußerungen des Lehrers. Bei ungefähr gleich vielen *lern*-Äußerungen insgesamt, finden wir hier mehr fortführende und weniger auffordernde *lern*-Äußerungen als in $C_1(3)$. In den fortführenden finden wir wie in $C_1(3)$ bestätigende, korrigierende oder zurückweisende Bemerkungen. Hier ist es der Lehrer, der die Geltung verbürgt bzw. nicht bestätigt und damit zurückweist. In $C_1(3)$

hatten wir darüber hinaus festgestellt, daß der Lehrer auch die Mathematik als Geltung verbürgende Instanz in Anspruch nimmt, vor allem dadurch, daß er Gegenfragen oder Fragen nach der Begründung einer Aussage stellt. Letztere finden sich in den auffordernden *lern*-Äußerungen. In dieser Stunde lassen sich davon jedoch nur wenige ausmachen. Lediglich im 5. Abschnitt fragt der Lehrer zweimal nach einer Begründung für die Berechnung des Prozentwertes, die Antwort darauf gibt er schließlich selbst (s.o.). Er zieht in diesem Fall zwar die Mathematik als Geltungsinstanz heran (Lösen einer Gleichung), setzt die Begründung jedoch allein durch seine pädagogische Autorität durch.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, daß sich das Wissen in noch stärkerem Maße als in der Februar-Stunde durch Fragen des Lehrers und Antworten der Schüler zusammensetzt, daß der Lehrer an entscheidenden Stellen sein Wissen direkt in den Unterricht einbringt und die Geltung des Wissens hauptsächlich durch die pädagogische Autorität des Lehrers verbürgt wird. Wurde in der Februar-Stunde noch an einigen Stellen die Mathematik als legitimierende Instanz herangezogen, so erscheint sie in dieser Stunde nur noch implizit.

5.6.2.2 Öffnung des Wissens

Zunächst zu den Bruchstellen: Es lassen sich in dieser Stunde drei mehr oder weniger explizite Bruchstellen ausmachen. Die erste befindet sich ganz zu Anfang der Stunde: Der Lehrer fordert die Schüler dazu auf, die Begriffe aus der letzten Stunde zu nennen. Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz sind schnell gefunden und werden an die Tafel geschrieben. Es fehlt noch die vierte Größe, die Zahl 100:

L So, da fehlt jetzt noch eine Größe. Was fehlt jetzt hier noch? Achim
S Grundsatz … Grundwert, Grundsatz
L Naja, das wäre zwar logisch, aber, äh, man hat für den Begriff Grundsatz etwas anderes gesetzt. …Ja, welches wäre das für Achims Grundsatz gesetzte?
S Prozent oder so.
L Worauf bezieht man denn eigentlich Prozent immer wieder?
S Auf Hundert.
L Wenn ich sage 1 Prozent. … Wieviel ist das eigentlich?
S Immer von 100.
L 1 Prozent, wieviel ist das eigentlich? Martin.
S 100 geteilt durch irgendwas.
L Also, das ist gleich 1 Hundertstel. …So groß … Wie groß ist also jetzt, wie Achim sagte, der Grundsatz?
S 1 Hundertstel.
L Nicht 1 Hundertstel, sondern?
S Ein Prozent.
L Nein, nicht 1 Hundertstel, sondern nur die
S 100
S 100
L Jawohl, die 100.

Achim bringt ein neues Wort in den Unterricht ein: ‚Grundsatz' sei die noch fehlende Größe. Dieses Wort ist in der Tat logisch: Es entspricht der Wortbildung der anderen

Begriffe: Prozent*wert*, Prozent*satz*, Grund*wert* und eben: Grund*satz*. Außerdem ist es auch semantisch sinnvoll: Grundsatz könnte die zugrundeliegende gesetzte Größe bedeuten, und das ist die Zahl 100. Daß es um die Zahl 100 geht, scheint den Schülern ohnehin klar zu sein, wie die folgenden Antworten zeigen (Prozent bezieht man auf 100). Was ihnen vermutlich nicht einleuchtend ist, ist die Tatsache, daß es für die Zahl 100 keinen eigenen Begriff gibt, obwohl doch für alle anderen Zahlen mathematische Ausdrücke existieren. Auch die einleitende Frage des Lehrers: „So, wer kann mir bitte noch mal die Begriffe nennen…?“ erweckt den Anschein, als ob es für alles einen bestimmten Ausdruck gäbe.

Wie geht der Lehrer nun mit dieser Antwort um? Er nimmt den neuen Begriff zunächst ausdrücklich auf, betont, daß er zwar logisch wäre, daß man die fehlende Größe jedoch anders nennt. Auf seine Frage, worauf man ‚Prozent‘ eigentlich beziehe, kommt die Antwort: „Auf Hundert“. Damit wäre die Frage eigentlich beantwortet, jedoch lenkt der Lehrer mit seinen folgenden Fragen die Aufmerksamkeit zunächst auf ein anderes Problem, das zwischendurch noch geklärt wird: 1% = 1/100. Danach nimmt er wieder den ‚Grundsatz‘ auf, die Antwort folgt auf die suggestive Frage: „…nicht ein Hundertstel, sondern?“

Zwei Dinge fallen hier auf: Erstens gelangt das ursprüngliche Problem, die vierte Größe zu finden, durch seinen oben erwähnten Einschub aus dem Blick; der Zusammenhang wird auseinandergerissen, so daß am Ende offenbleiben muß, ob das Unterrichtsergebnis dieses ersten Unterrichtsabschnitts für die Schüler nachvollziehbar ist. Die gesuchte Zahl 100 wird zwar neben die übrigen Begriffe an die Tafel geschrieben, so daß der Zusammenhang visuell erhalten bleibt, durch die Vorgehensweise im Unterricht wird er jedoch nur implizit verdeutlicht. Zweitens wird nicht geklärt, warum der Begriff ‚Grundsatz‘ durchaus sinnvoll wäre, und warum man dennoch diesen Begriff nicht benutzt (z.B. weil Hundert eine feste Größe ist, die unabhängig von der jeweiligen Aufgabe ist, und man deshalb auf einen eigenen Begriff verzichten kann). Die Interpretation des Schülers wird nicht zum Anlaß genommen, eine gemeinsame Interpretationsbasis wiederherzustellen.

Die zweite Bruchstelle befindet sich im 3. Unterrichtsabschnitt. Hier wurde festgestellt, daß die beiden Brüche $\frac{8}{25}$ und $\frac{32}{100}$ quotientengleich sind. Der Lehrer fordert dann dazu auf, Zahlenpaare aufzustellen:

L	Ja gut, das ham wir erstmal festgestellt. Beide haben den gleichen Quotienten, man könnte jetzt auch Zahlenpaare aufstellen. Thomas, vielleicht stellst du mal aus den 4 Begriffen oder vielleicht vorher mal aus den 4 Zahlen im Zähler und Nenner mal Paare zusammen.
S	(schreibt: (8;32), (25;100))
L	Carola, hättest du die gleichen Paare aufgestellt?
S	Ja.
L	Gibt es noch ’ne andere Möglichkeit, Paare aufzustellen? Nahib.
S	8/25 und 32/100.
L	Dann schreib bitte mal.
S	(schreibt: (8;25), (32;100))
L	Aber bitte nicht zu klein.

L So, äh, warum ist es nun geschickter, dieses Zahlenpaar hier aufzustellen. Wichtig sind beide, aber warum ist es vorteilhafter dieses untere hier aufzustellen? … Wenn wir dieses Beispiel da oben haben?
L … Katja.
S Weil 8/25 der Bruch ist, also 8/25 …
L Ja, Heiko, hast du das verstanden eben?
S nein.
L Ja, dann paß auch auf. Katja, wiederhol das bitte noch mal.
S Also, 8/25 …
S Was? Lauter!
L Ich habe ehrlich gesagt hier hinten auch nichts verstanden.…Also Katja sagte beim ersten Mal jedenfalls 8/25 sei der Bruch …

Thomas schreibt zunächst zwei Zahlenpaare auf, die, wie sehr schnell klar wird, nicht der Erwartung des Lehrers entsprechen. Er handelt aber dennoch im Sinne der Aufforderung des Lehrers, der ja nur sagte, er solle aus diesen vier Zahlen (quotientengleiche) Paare zusammenstellen. Beide Bedingungen sind erfüllt, sein Vorschlag ist nur nicht ‚geschickt' oder ‚vorteilhaft', aber, wie der Lehrer betont, trotzdem ‚wichtig'. Warum nun die anderen beiden Paare ‚vorteilhafter' sind, wird, mit Verweis „auf das Beispiel da oben" dadurch begründet, daß 8/25 der Bruch sei, der an der Tafel stehe, und nicht 8/32. Dies scheint mir für eine Begründung nicht ausreichend. Der Sinn der zweiten Zahlenpaare wird nur dadurch deutlich, daß die Zahlen eine bestimmte Bedeutung haben: 8 entspricht dem Prozentwert usw., und der Prozentwert gibt den Anteil vom Grundwert an (das ist in diesem Falle also 25): Deshalb gehören diese beide Zahlen zusammen. Vor dem Hintergrund ihrer inhaltlichen Bedeutung und mit Bezug auf das Thema ‚Prozentrechnung' sind die Paare von Thomas nicht nur nicht ‚vorteilhaft', sondern in der Tat unwichtig. Die Geltung des zweiten Zahlenpaares kann also nur durch den Verweis auf den Bedeutungsgehalt der Zahlen legitimiert werden. Daß dieser zumindest von Thomas anscheinend noch nicht durchschaut wurde, zeigen seine dem widersprechenden Zahlenpaare. Der Hinweis auf den Bruch, der an der Tafel steht, hat nur einen impliziten Erklärungswert. Letztlich erfährt das Wissen nur eine teilweise Öffnung, die Bedeutung der Zahlen, die für das Aufstellen der Zahlenpaare unerläßlich ist, wird explizit nicht geklärt. Es bleibt daher zweifelhaft, ob die offensichtliche Interpretationsdifferenz, die hier zum Ausdruck kommt, überwunden wird.

Im 5. Abschnitt schließlich finden wir eine dritte Bruchstelle: Die Aufgabe ‚4% von 300DM' war Hausaufgabe aus der letzten Stunde und soll nun gemeinsam gelöst werden. Die Schüler haben das Ergebnis bereits richtig berechnet ($300/100 \cdot 4 = 12$). Das wird auch an die Tafel geschrieben, doch der Lehrer möchte wissen, was man „am besten zweckmäßigerweise vorher" noch macht: quotientengleiche Paare aufstellen und dann nach x auflösen. Es entwickelt sich nun folgendes Unterrichtsgespräch (leicht gekürzt), in dem nachvollziehbar wird, wie sich ein Mißverständnis zwischen Lehrer und Schüler entwickelt und erhalten bleibt[111]:

L Was macht man am besten zweckmäßigerweise vorher noch? Peter.

[111] Die entscheidenden Äußerungen sind hervorgehoben.

S 300 geteilt durch 100
L Und weiter ?
S Mal 4.
…
S Es geht aber doch aber viel einfacher, wenn man einfach rechnet 4 mal 300 und das Ergebnis dann durch 100.
L Wenn ich hier jetzt zum Beispiel Nahib frage, wie man auf…
S 300 durch 100 ist 3 mal 4 ist 12
L diese Gleichung kommt … dann weiß sie das nicht, also offensichtlich ist das wohl nicht klar. Davon ist das ja nicht abhängig, ob das richtig oder falsch ist.
S Bei mir aber.
S das ist richtig.
L Wie kommt man denn hierauf? Das ist ja nicht falsch, aber irgendwie muß man doch dahinkommen. …Stephanie.
S Also, von dem Bruch der Zähler ist die … das sind die 300 DM und ähm, mal 4 das … sind die 4 Prozent und, und die 100 … der Nenner, also die 100 ist äh … 100 Pro… sind 100 Prozent und das rechnet man dann eben.
L Der Richtige, das Richtige war da jetzt bei dir enthalten, nur kannst du das bitte noch mal so schreiben … so nennen, daß ich's hier nachschreiben kann. …Du hast also Begriffe Zähler und Nenner gebraucht, die mußte jetzt natürlich noch mal richtig, noch mal ordnen.
S Zähler und Nenner sind 300 und 100.
L Also so soll ich das hinschreiben?
S Nein, erst kommt ja die Punktrechnung.
L Na, dann nenn mir das doch richtig.
S Also 300 mal 4 …
S oh, Mensch, das habe ich die ganze Zeit gesagt …
S 300 mal 4 und dann das Ergebnis 1200 … durch 100, meinetwegen Bruchstrich …
L Das ist aber immer noch nicht das, was ich hören wollte, ich habe gesagt, du möchtest ganz gern das, was du richtig gesagt hast, den Begriff Zähler und Nenner, so zusammenstellen, daß ich … genauso aufstellen kann, wie da drüben.
S Im Nenner 'ne 100.
S Warum wischen'se das alles wieder weg?
S Und in dem Zähler 'ne 1200.
L Das ist doch das Ergebnis der Rechenart.
S Oh, Mensch!
L Ich möchte ganz gern den Schritt davor haben.
S Sie haben selbst gesagt, Punktrechnung vor Strichrechnung.… und im Nenner 'ne 100.
L Ich möchte ganz gerne den Schritt haben, der davor gehört. Wie kommt man hierdrauf? Und das muß ja wohl möglich sein, ohne daß ihr …also lange überlegen müßt. … Ich habe doch in der …angeschrieben … Möglicherweise hast du das auch im Heft stehen, da. … Ich seh das nicht, daß das hier irgendjemand hier stehen hat … So, ich kann jetzt aus, dann muß ich's wieder selbst machen, quotientengleiche Paare aufstellen. …Die 4 verhält sich zu 100 wie x zu 300. Und wenn ich jetzt hier nach x auflöse, steht genau diese Gleichung hier.
S Sie machen das so umständlich!

Zunächst ist festzuhalten, daß die Schüler überhaupt nicht wissen, worauf der Lehrer hinaus will (ein Zeichen dafür, daß der Sinn der quotientengleichen Paare nicht deutlich wurde?). Die Schüler scheinen das Problem darin zu sehen, in welcher Reihenfolge man die Rechnung am besten ausführt: Erst 300 mal 4 und dann geteilt durch 100 oder erst 300 geteilt durch 100 und dann mal 4. Die erste Möglichkeit wird favorisiert, denn, und hier entsteht das Mißverständnis, Punktrechnung geht vor Strichrechnung – die *Strich*rechnung wird dabei ganz offenbar mit dem Bruch*strich* identifiziert. Diese Regel, die ein Schüler nennt, wird vom Lehrer implizit bestätigt: „Na, dann nenn mir das doch richtig!“ Die folgenden Antworten beziehen sich dann auf die Rechenschritte nach der ersten Möglichkeit. Der Lehrer ist trotzdem noch nicht zufrieden, woraufhin ein Schüler protestierend einwirft: „Sie haben selbst gesagt, Punktrechnung vor Strichrechnung!“ Spätestens hier wird deutlich, daß Lehrer und Schüler aneinander vorbei reden. Die Schüler wollen das Ergebnis der Aufgabe berechnen, dem Lehrer scheint es vor allem um das Aufstellen verhältnisgleicher Paare zu gehen, aus denen die Rechnung dann zwangsläufig folgt. Daß sich dabei neben das unterschiedliche Aufgabenverständnis noch ein inhaltlicher Fehler einschleicht, scheint er nicht zu bemerken. Er geht in keiner Weise auf diese Interpretationsdifferenz ein und beantwortet seine Frage schließlich selbst. Eine Öffnung des Wissens wird auch hier verhindert, und das vom Lehrer formulierte Unterrichtsergebnis wird, wie in 5.6.2.1 bereits vermutet, von den Schülern nur schwer nachvollziehbar sein, da sie die Unterrichtssituation anders definierten.

Bei einem Vergleich dieser Bruchstellen fällt auf, daß die Fragen des Lehrers, aus denen heraus die Mißverständnisse entstehen, in allen drei Fällen relativ offen sind. Offen in dem Sinne, daß der Lehrer wenig oder keine Anhaltspunkte dafür gibt, worauf er hinaus will. Die Interpretationsrichtung ist nicht eindeutig, bzw., wie im ersten Fall, weisen seine Fragen in eine andere Richtung (ein ‚Begriff‘ ist gesucht). Ähnliches konnte auch in $C_1(3)$ beobachtet werden. Die erste Bruchstelle tauchte dort in einem Unterrichtsabschnitt auf, in dem die Bearbeitung der Aufgabe zunächst ausdrücklich offengehalten und erst nach mehreren Schülervorschlägen eingeschränkt wurde, die zweite Bruchstelle entwickelte sich aus einer nicht eindeutig formulierten, aber mit eindeutigen Erwartungen des Lehrers verknüpften Aufforderung.

In der Analyse der Februar-Stunde wurde festgestellt, daß die Schüler im Unterricht das ‚Spiel‘[112] zwar mitspielen, im anschließenden Interview aber Kritik übten, da sie sich nicht ernst genommen fühlten. Die Unzufriedenheit mit dem Unterricht tritt in dieser Stunde noch deutlicher hervor, teilweise schon während des Unterrichts und ganz klar in einem Interview, das im Anschluß an die Folgestunde – sie war von der inhaltlichen Strukturierung eine fast vollständige Kopie dieser Stunde – mit dem Lehrer und einigen Schülern aufgezeichnet wurde. Im Interview wird Bezug auf diese Stunde genommen, im folgenden Zitat auf den 5. Unterrichtsabschnitt, in dem es um eine Begründung der Gleichung $x = 300/100 \cdot 4$ geht:

S Alle haben es nämlich viel einfacher gerechnet, nicht so wie Sie.
S Eben.
S Ja, eben.
L Ich glaube, ihr habt nichts davon, wenn ich euch einfach Formeln gebe, hier, nun setzt da ein, das und das wird gemacht. … Das ist lediglich eine Mathematisierung des Sachverhalts ja und
S Den kennen wir aber so wenig.
S Herr C, Sie sind ja auch Mathematiker, Sie können das ja auch alles, aber wir können das doch gar nicht.
S Richtig.
S Sie müssen es uns doch erklären.
L (unverständlich)

[112] Gemeint war damit, daß die Schüler zwar Vorschläge in den Unterricht einbringen dürfen, diese aber nur Mittel zum Zweck sind und ohne Begründung vom Lehrer zurückgewiesen werden können, wenn sie der Sache seiner Meinung nach nicht dienlich sind.

S Ja deswegen wir kapieren das aber nicht. Sie erklären es ja nie. Sie schreiben immer nur an die Tafel, bla bla bla, und dann erklären Sie es uns nicht mehr dazu.
L Liegt das nicht vielleicht auch zum Teil daran, daß du dich mit anderen Dingen beschäftigst?
S Ja.
S Wir langweilen uns.
S Das liegt aber auch daran, daß ich sowieso nicht kapier, was Sie da erklären.
S Also ist es ganz egal, mit was man sich beschäftigt.
S Manchmal nehmen Sie auch zu wenig dran. Dann rechnen Sie allein an der Tafel und dann schreiben Sie irgendwas an
S Doch das stimmt.
S und fragen: stimmt das nun oder nicht.

Ganz klar betonen die Schüler hier, daß ihnen die Vorgehensweise des Lehrers undurchsichtig bleibt, und das liege daran, daß der Lehrer nicht genügend erkläre und ihnen nicht die Möglichkeit gebe, selbst etwas zum Unterrichtsergebnis beizutragen. Die Vermutung, die in 5.6.2.1 zu diesem Unterrichtsabschnitt formuliert wurde, daß nämlich die Begründung, die der Lehrer zur Umformung der Gleichung angibt, nur durch seine pädagogische Autorität Geltung erhält und nicht durch die Mathematik, wird hier durch die Schüler bestätigt. Wiederum finden wir aber auch hier im Unterricht selbst eher wenig Hinweise auf die Unzufriedenheit der Schüler. Wie gesagt, sie spielen das ‚Spiel' mit und folgen dem Interaktionsmuster, das eine Öffnung im Unterricht mit verhindert.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß in allen drei Unterrichtsauszügen die Bruchstellen nicht dazu genutzt werden, das Wissen zu öffnen, d.h. unterschiedliche Interpretationen zuzulassen, zu klären und zu begründen, welche angemessen ist und welche nicht, kurz: die Interpretationsdifferenzen auszuräumen und eine gemeinsame Basis wiederherzustellen. Die Schüler sind gezwungen, sich auf die Interpretation des Lehrers einzulassen, ohne daß geklärt wird, warum ihre Sichtweise auf die behandelte Sache im Sinne des Lehrers nicht zweckmäßig bzw. zwar ‚logisch' oder ‚wichtig', aber nicht angebracht ist.

Auch der Konstruktionscharakter wird, wie schon in der Februar-Stunde, nicht deutlich. Dies liegt vor allem daran, daß es in erster Linie der Lehrer ist, der die Geltung des Wissens verbürgt. Auch die oben analysierte Art und Weise des Umgangs mit Bruchstellen im Unterricht verhindert eine Verdeutlichung dieses Aspekts. Insbesondere die erste Interpretationsdifferenz hätte Anlaß dazu sein können, zu zeigen, warum der Begriff ‚Grundsatz' zwar logisch, aber nicht unbedingt nötig ist, warum die Zahl 100 keinen eigenen Begriff braucht. All diese Fragen werden im Unterricht nicht gestellt.

Es ist allerdings anzumerken, daß in der ersten Stunde der Unterrichtseinheit im Juni $C_2(1)$ auf diesen Aspekt ansatzweise eingegangen wurde. Nachdem verschiedene Bruchzahlen miteinander verglichen wurden, indem man sie auf den gemeinsamen Nenner 100 erweitert hatte und dieses Vorgehen anhand von zwei Textaufgaben geübt wurde (s. S.165), definiert der Lehrer den Begriff ‚Prozent' wie folgt:

> „Genau den gleichen Schritt hat man gemacht, als man/ genau diesen gleichen Schritt, nämlich im Verhältnis zu 100/ genau den gleichen Schritt hatte man unternommen, als man Prozente definierte. Man hat nämlich vereinbart, ein Prozent als 1/100 zu sehen."

Hier wird deutlich, daß es sich bei dem Begriff ‚Prozent' um eine menschliche ‚Erfindung' handelt, die nicht von Natur aus gegeben ist. Warum nun aber gerade die Zahl 1/100 von Bedeutung ist, wird lediglich implizit dadurch deutlich, daß man die durch die Aufgaben gegebenen Brüche nur vergleichen konnte, indem man sie auf 100 erweiterte[113]. Daß eine Erweiterung auf den Nenner 100 für einen Vergleich von Bruchzahlen nicht unbedingt notwendig ist, dieser Nenner aber bestimmte Vorteile bietet (Einheitlichkeit, einfache Berechnung, Dezimalsystem …) wird nicht deutlich. So fehlen auch hier weitgehend Hinweise auf die Herkunft und Begründungen für das Heranziehen bestimmten Wissens.

5.6.3 Die Didaktik des Lehrers

Bei der Analyse von $C_1(3)$ hatten wir als auffälligstes Merkmal der Didaktik des Lehrers seine Betonung der mathematischen Fachsprache im Unterricht festgestellt. Daraus und aus einigen Äußerungen im Interview wurde gefolgert, daß er die Mathematik eher als ein statisches System und weniger als ein dynamisches, induktiv gewonnenes Gedankengebäude betrachtet. Darauf war es zurückzuführen, daß die Umgangssprache der Schüler, sofern sie im Unterricht überhaupt erschien, überwunden und durch die Fachsprache ersetzt werden mußte. Im Interview betonte der Lehrer zwar wie wichtig auch die umgekehrte Übersetzung (also von der Fachsprache in die Umgangssprache) sei, wir konnten im Unterricht selbst jedoch keinen Anhaltspunkt für eine Realisierung dafür finden.

Hier, in der Stunde $C_2(2)$, lassen sich einige Hinweise finden, die diese Interpretation bestätigen. Am auffälligsten ist dazu der 4. Unterrichtsabschnitt, der im folgenden ausschnittweise zitiert wird:

L Aber wir wollen jetzt noch mal versuchen, das, was jetzt hier so abstrakt in mathematischen Ausdrücken steht, in eigenen Worten darzustellen. Also, es war eben gesagt worden: der Anteil vom Grundwert wird vom Prozentwert angegeben und der Prozentsatz gibt den Anteil an der Zahl 100 an.…

L Könnte man vielleicht dieses äh, was dort an der Tafel steht, noch mal anders ausdrücken?

…

S Sie können das bestimmt am besten.

Der Lehrer betont, daß das zuvor erarbeitete Unterrichtsergebnis ‚abstrakt' sei und fordert die Schüler ausdrücklich auf, den Sachverhalt mit eigenen Worten, also umgangssprachlich auszudrücken. Dies entspricht zunächst der oben erläuterten Vorstellung des Lehrers, daß es für das Verständnis notwendig sei, auch den ‚umgekehrten' Übersetzungsprozeß zu beherrschen. Gleichzeitig gibt er keinerlei Hinweise darauf, wie diese Übersetzung zu bewerkstelligen ist. Meines Erachtens ist sie nur möglich, wenn Bezug auf eine konkrete Situation genommen wird, wie sie das Einführungsbeispiel aus der

[113] Ein anderer gemeinsamer Nenner war aber auch nicht möglich, die Zahl 100 war bei allen zuvor gelösten Aufgaben das kleinste gemeinsame Vielfache.

letzten Stunde bieten könnte[114]. Anscheinend sind auch die Schüler mit dieser Aufgabe überfordert, wie es die letzte Äußerung oben vermuten läßt. Der Lehrer gibt nun weitere Hinweise, die allerdings weiterhin abstrakt bleiben:

L Will ich aber nicht machen. Ihr sollt das ja mit euren eigenen Worten ausdrücken. …Wir ham noch dazu ein … Beispiel hier. 8/25 und 32/100 beide sind gleich. Warum sind die beiden denn eigentlich gleich?
S Naja, wenn man … wenn man 8/25 mal vier nimmt, den Zähler und den Nenner, dann kommt 32/100 raus.
L Wo … dann?
S Wenn man beides malgenommen hat, hat man erweitert.
L Ja gut, aber was äh … drücken denn die beiden Zahlen aus?
S Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz.

Die Schüler bleiben beim mathematischen Sprachgebrauch und entsprechen damit der Interpretationsrichtung des Lehrers. Er sagt wohl noch einmal, daß die Schüler ‚eigene Worte' benutzen sollen, seine anschließenden Fragen verweisen aber ganz eindeutig auf eine mathematische Formulierung. Die Antworten entsprechen jedoch nicht seinen Erwartungen, und so zieht er doch explizit das Beispiel aus der letzten Stunde heran. Die folgende Frage schränkt den Bezug auf dieses Problem jedoch sofort wieder ein, sie zielt wiederum auf eine rein mathematische Interpretation:

L Seht mal, wir sind doch auf solche Brüche gekommen mit Hilfe von Textaufgaben. Da sollte ermittelt werden, welcher … Da sollte ermittelt werden, welche Klasse nun die größeren Anteile an Arbeiten, an guten Arbeiten hat.…. Dazu hatten wir zwei Brüche auf den gleichen Nenner gebracht. Was drückt denn nun eigentlich … das haben wir schon vorher beim Dreisatz gesehen, was drückt eigentlich hier der Bruchstrich aus?
S Für das Geteiltzeichen.
L Geteiltzeichen.
S Divisionszeichen.
L Wie lautet das Ergebnis der Division?…
S Quotient.
S Nene, so ähnlich.
S Produkt, Wert.
S Wert des Quotienten.
L Ja, aber nicht Wert des Quotienten, sondern schlichtweg Quotient. So, könnt ihr jetzt mit dem Begriff Quotient was anfangen? … Vielleicht fällt euch bei dem Stichwort Quotient noch mal was ein.…
S Ach, quotientengleich.
L Kannst du das mal 'n bißchen anders formulieren, …
S Quotientengleich ist, wenn der Bruch … wenn die beiden geteilt, die gleichen Quotienten haben. Und bei beiden Aufgaben, meinetwegen, da wäre es ja auch, also 8 geteilt durch 35, 25. In diesem Fall kommt das gleiche Ergebnis raus wie bei, wie bei äh 32 get/
L Ja gut, das ham wir erstmal festgestellt. Beide haben den gleichen Quotienten, man könnte jetzt auch Zahlenpaare aufstellen.

Die ursprüngliche Absicht des Lehrers, den Sachverhalt umgangssprachlich ausdrücken zu lassen, ist nun völlig aus dem Blick geraten. Es folgt die Unterrichtsszene, die oben (5.6.2.2, S. 169) bereits zitiert und unter dem Aspekt der Bruchstellen interpretiert wurde. Die Zahlen 8, 25, 32 und 100 aus der Anfangsaufgabe werden zu Paaren geordnet.

[114] Beispielsweise könnte die umgangssprachliche Übersetzung dann lauten: „Der Bruch 8/25 bedeutet, daß von insgesamt 25 Schülern 8 Schüler eine gute Arbeit geschrieben haben, die 8 gibt also den Anteil von guten Arbeiten bezogen auf alle Arbeiten an. Wenn man sich vorstellt, daß nicht 25 sondern 100 Schüler in der Klasse wären, so hätten 32 Schüler eine gute Arbeit geschrieben."

Nachdem die Zahlenpaare an der Tafel festgehalten wurden, fragt der Lehrer nach den Eigenschaften, eine Frage, die wohl nur mit Hilfe der mathematischen Fachsprache zu beantworten ist. So werden dann auch im folgenden die Eigenschaften der Zahlenpaare durch die zwei Adjektive ‚quotientengleich' und ‚verhältnisgleich' ausgedrückt.

L Welche Eigenschaft haben diese Zahlenpaare?
S Sie … sind gleichwertig.…
L Torsten, welche Eigenschaft haben diese Zahlenpaare?
S Ja, also die sind alle identisch.
L Identisch?
S Was is'n das?
L Also, ich seh da 'ne 8 und 'ne 32.
S Naja, Sie können ja noch 'ne 8 hinmachen.
L Mach ich aber nicht.…
S Zahlenpaare.
L Ja, das hatte ich vorher schon gesagt, aber ich möchte ganz gern die Eigenschaft hören.
S Die Eigenschaft. Also … wie soll ich das sagen? Die 8 Komma … 8/32 Quotienten…
S Quotientengleich.
L Was sind das nun für Zahlenpaare?… Ich will nicht immer da vorne jemanden haben. …
L Angela, was sind das für Zahlenpaare?
S Ganz normale…
L Also, Angela spricht ja immer sehr leise … Also Angela sagte richtig, aber wieder mal ganz leise, das sind quotientengleiche Paare.
…
L So, ein anderer Ausdruck nun für quotientengleiche Paare … anderer Ausdruck für quotientengleiche Paare.
S Verhältnisgleich.
S Quotientengleiche Brüche.
L Eben war das Wort gefallen hier irgendwo. Steffi.
S Verhältnisgleich.
S Verhältnisgleich.
L Ja, die Wortwahl ist hier sehr beschränkt, ich hör immer die gleichen Ausdrücke. (schreibt) So, jetzt wieder die gleiche Frage.… Wie kann man den Zusammenhang zwischen Grundwert, Prozentwert , der Zahl 100 und Prozentsatz ausdrücken? Wenn man weiß, daß es sich hier um quotientengleiche oder verhältnisgleiche Paare handelt?
…
L Also noch mal. Ich möchte das ganz von … gern von euch formuliert haben und zwar in euren Worten, und wenn das nicht von vornherein geht, machen wir das noch'n bißchen mit Hilfe der Begriffe verhältnisgleich und quotientengleich.

Die erneute Aufforderung an die Schüler, ‚eigene Worte' zu benutzen, wird wiederum eingeschränkt, aber offengehalten. Es stellt sich allerdings die Frage, ob der ‚Zusammenhang' leichter in eigenen Worten auszudrücken ist, wenn man ihn zunächst ‚mit Hilfe der Begriffe verhältnisgleich und quotientengleich' beschreibt. Im folgenden Satz, der den Abschluß dieses Unterrichtsabschnittes bildet, wird dann deutlich, daß es dem Lehrer letztlich um eine mathematische Formulierung geht.

L Also, dann muß ich's wohl machen, damit wir heute noch zu den Hausaufgaben kommen.…Wir haben hier nun , das ist richtig herausgearbeitet worden von euch, verhältnisgleiche Paare, das heißt diese beiden … diese beiden Worte: der Prozentwert verhält sich zu dem Grundwert, wie der Prozentsatz zu 100.

Er kommt auch im Anschluß daran nicht mehr auf eine umgangssprachliche Übersetzung zurück. Das von ihm selbst formulierte Unterrichtsergebnis erscheint in einer abstrakten mathematischen Sprache, ohne daß irgendein Bezug zur Sprache der Schüler geschaffen wird.

Noch deutlicher als in $C_1(3)$ wird an diesem Beispiel klar, daß der Lehrer seinen eigenen Ansprüchen an den Unterricht nicht gerecht wird. Sein Schwerpunkt liegt ganz eindeutig auf der Verwendung der mathematischen Sprache, eine Rückübersetzung wird nur scheinbar von ihm gefordert, die einleitende Aufforderung scheint nicht wirklich ernst gemeint zu sein, sonst hätte er sicherlich mehr Hilfen gegeben und seine weiterführenden Fragen anders formuliert. Die Interpretation der Stunde $C_1(3)$ kann hier eindeutig bestätigt werden.

Zusammengefaßt treten die Merkmale des Unterrichts bei diesem Lehrer und in dieser Klasse, die schon im Februar konstatiert wurden, hier noch klarer hervor: Das Wissen wird in erster Linie durch die Aufforderungen und entsprechende Antworten der Schüler, an einigen Stellen auch direkt durch das Sachwissen des Lehrers konstituiert. Er ist es auch, der dem Wissen seine Geltung verleiht. Die Wissenschaft Mathematik als Geltung verbürgende Instanz wird nur oberflächlich herangezogen. Dies äußert sich in seinem Umgang mit sogenannten Bruchstellen, die er nicht zum Anlaß nimmt, divergierende Interpretationen in den Unterricht einzubeziehen, und so eventuelle Mißverständnisse auszuräumen oder andere Perspektiven auf die Sache zuzulassen, und hängt wiederum eng zusammen mit seiner Didaktik und seiner Sicht auf die Mathematik als ein in sich abgeschlossenes Gedankengebäude, in dem es letztlich nur eine richtige Interpretation gibt.

Auf die Richtlinien möchte ich nicht mehr gesondert eingehen. Zum einen möchte ich Wiederholungen vermeiden, da die allgemeinen Lehrziele, die zum Beispiel den Sprachgebrauch im Unterricht betreffen, auch in diesem Unterricht ihre Gültigkeit haben. Zum anderen wird das Thema ‚Prozentrechnung‘ oder allgemeiner: ‚Schlußrechnung‘ in den Richtlinien für die Orientierungsstufe und auch in den Vorgängern nicht genannt. Warum dieses Thema trotzdem behandelt und dafür wahrscheinlich (s. Fußnote110) sogar ein anderes Schulbuch als im Februar benutzt wurde, läßt sich nicht mehr sagen.

Als letzter Punkt folgt nun die Gegenüberstellung des hier erscheinenden Wissens mit den gesamten Möglichkeiten der Mathematik als Teil der gesellschaftlichen Praxis.

5.6.4 Mathematik im Unterricht

Unter Berücksichtigung der vorangegangenen Stunde ($C_2(1)$) aus dieser Unterrichtseinheit C_2 erscheint der Aspekt des *Modells* im Unterricht bei der Mathematisierung des Ausgangsproblems (Welche Klasse ist besser?). Dieses Problem wurde auf den Vergleich von Bruchzahlen zurückgeführt, was nur bei gleichen Nennern möglich ist. In einem weiteren Abstraktionsschritt wurden den konkreten Zahlen allgemeine mathematische Begriffe (Prozentwert, Grundwert, Prozentsatz) zugeordnet. Allerdings taucht dieses Ausgangsproblem dann nie wieder auf, es wird im weiteren Verlauf nicht mehr sichtbar, was das Thema ‚Prozentrechnung' mit der außermathematischen Wirklichkeit zu tun hat. Das wird auch dort deutlich, wo der Lehrer versucht, auf die Aufgabe der letzten Stunde zurückzukommen:

> L Seht mal, wir sind doch auf solche Brüche gekommen mit Hilfe von Textaufgaben. Da sollte ermittelt werden, welcher … Da sollte ermittelt werden, welche Klasse nun die größeren Anteile an Arbeiten, an guten Arbeiten hat.…. Dazu hatten wir zwei Brüche auf den gleichen Nenner gebracht. Was drückt denn nun eigentlich … das haben wir schon vorher beim Dreisatz gesehen, was drückt eigentlich hier der Bruchstrich aus?

Die Antworten der Schüler beziehen sich in keiner Weise auf die Einführungsaufgabe, der Bezug zu einer außermathematischen Realität scheint für sie gar nicht mehr zu existieren; und der Lehrer scheint mit den Antworten der Schüler zufrieden zu sein, denn auch er kommt anschließend nicht mehr darauf zurück.

Wie erscheint der zweite Aspekt der Mathematik im Unterricht? Das Verständnis der Mathematik als ein formales *System* entspricht am ehesten der Auffassung des Lehrers, das hatten wir insbesondere in 5.6.3 gesehen. Es ist insofern nicht verwunderlich, daß dieser Aspekt – wie schon in der Februar-Stunde – besonders stark zum Ausdruck kommt. Dies macht sich zum einen in der Betonung des mathematischen Sprachgebrauchs bemerkbar (Begriffe der Prozentrechnung, quotienten- und verhältnisgleiche Zahlenpaare), zum anderen in der deduktiven Vorgehensweise des Lehrers (quotientengleiche Paare, daraus folgt: Prozentwert verhält sich zum Grundwert wie der Prozentsatz zu 100, daraus folgt: $\text{Prozentwert} = \frac{\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert}}{100}$). An keiner Stelle wird jedoch deutlich, welchen Sinn und Nutzen dieses System bietet, daß die benutzten Begriffe nie bedeutungsleer sind. Dies wird unter anderem dort sichtbar, wo der Vorschlag, den Begriff ‚Grundsatz' für die Zahl 100 zu benutzen, zurückgewiesen wird, oder im dritten Unterrichtsabschnitt, in dem es darum geht, ‚sinnvolle' verhältnisgleiche Zahlenpaare aufzustellen. Warum das eine Paar sinnvoller ist als das andere, wird nicht geklärt. Mathematik erscheint somit vor allem als ein Sprachspiel, bei dem man bestimmte Begriffe benutzen muß, die man nach bestimmten festgelegten Regeln verwenden darf, die aber praktisch keine Bedeutung besitzen.

Der Aspekt der *Überprüfung* schließlich taucht gar nicht auf. An keiner Stelle wird das Wissen in Frage gestellt, kritisiert oder auf seine Voraussetzungen geprüft. Dies hätte zum Beispiel gerade durch Verweise auf die außermathematische Bedeutung geschehen können.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß der Aspekt des Modells nur rudimentär und der der Überprüfung gar nicht zur Sprache kommen. Gerade dadurch wird die Möglichkeit verschenkt, Sinn und Nutzen der systematischen Darstellung zu verdeutlichen und inhaltlich zu füllen. Fragen wie: Was leisten die Begriffe der Prozentrechnung? Warum ist es sinnvoll, hier zu abstrahieren und die Rechenschritte systematisch darzustellen? Warum bezieht man sich immer auf die Zahl 100 und warum kann man keinen beliebigen ‚Grundsatz' nehmen? – diese und ähnliche Fragen bleiben unausgesprochen und unbeantwortet.

5.7 Die Unterrichtseinheit D

Die folgenden zwei Kapitel zu den Unterrichtseinheiten D und E wurden im Mai 1998 in zwei 6. Klassen eines Gymnasiums in Nordrhein-Westfalen aufgenommen. Es wurde ein Interview mit Lehrer D im Anschluß an die erste von insgesamt drei Stunden durchgeführt. Diese erste Stunde wird im folgenden ausführlich analysiert werden.

Grundsätzlich folgen auch diese Analysen demselben Untersuchungsschema wie die vorangegangenen. Insbesondere aber interessiert hier die Frage, ob es wesentliche Unterschiede im Vergleich zu den 20 Jahre älteren Unterrichtsstunden gibt, die sich auf veränderte didaktische Grundsätze zurückführen lassen.

5.7.1 Paraphrase zu D(1)

Thema: Flächenberechnung von Rechtecken mit Bruch- und Dezimalzahlen als Maßzahlen

1. **Der Grundriß eines Wasserschlosses: Was kann man berechnen und in welcher Reihenfolge?**

Der Lehrer verteilt ein Arbeitsblatt, auf dem der Grundriß eines Wasserschlosses dargestellt ist. Der zugehörige Text: „Ein Wasserschloß ist von einem überall 7 1/2m breiten und 3 1/2m tiefen Graben umgeben.", wird von einem Schüler vorgelesen. Auf die Frage des Lehrers: „Was fällt dir denn dazu ein?", werden drei verschiedene Fragen formuliert: Wieviel Wasser ist im Graben, wie groß ist das Schloß, und wie groß ist die Fläche? Der Lehrer fragt nach der Reihenfolge der Bearbeitung. Von verschiedenen Möglichkeiten wird vom Lehrer die Reihenfolge „von unten nach oben" festgelegt.

2. **Die Fläche eines Rechtecks berechnet man durch Länge mal Breite.**

Der Lehrer fragt, wie man Flächen berechnet. „Länge mal Breite", ist die Antwort eines Schülers. „Für was?", fragt der Lehrer weiter. Es kommen verschiedene Antworten, ehe das Wort „Rechteck" fällt.

3. **„Man rechnet die Fläche vom Schloß aus, und dann minus den Wassergraben, der noch im Schloß drin ist."**

Der Lehrer wiederholt die ersten beiden Aufgaben (siehe 1.). Die Schüler sollen sich mit ihrem „Nachbarn überlegen, wie man's macht." Für die Berechnung der Fläche des Schlosses werden unterschiedliche Möglichkeiten genannt: Gesamtfläche minus Fläche des Wassergrabens, die Schloßfläche in einzelne Teile zerlegen, oder: „Man rechnet die Fläche vom Schloß aus, und dann minus den Wassergraben, der noch im Schloß drin ist." Der letzte Vorschlag ist „eine ganz kluge Lösung, da hat man nicht so viele Stücke … Ich glaube, das ist der schnellste Weg.", wie der Lehrer kommentiert.

4. Lösung der Aufgabe

Die Schüler berechnen mit ihren Nachbarn zusammen die Lösung der ersten beiden Aufgaben. Die Lösungswege werden am Overhead-Projektor erklärt und an die Tafel geschrieben.

5.7.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.7.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Das Schulbuch (LS 6, 1996) wird – wie in auch in den anderen Parallelklassen – als Aufgabensammlung benutzt. Auch die ‚Schloßaufgabe' stammt aus diesem Buch, sie wurde vom Lehrer auf eine Folie kopiert. Als Wissensquelle kann es jedoch außer acht gelassen werden.

Als Wissensquellen kommen daher nur das Vorwissen der Schüler und das Sachwissen des Lehrers in Betracht. Die folgenden Tabellen geben weitere Hinweise[115]:

Spielzüge	*lebw*	*lern*	*uorg*	*wiss*	*Summe*
FORT	2	3		8	13
REAG	6	1	4	31	42
SUMME	8	5	4	40	58

Tabelle 23 : Sprechakte Schüler aus D(1)

Spielzüge	*lebw*	*lern*	*uorg*	*wiss*	*Summe*
AUFF	1	6	33	12	59
FORT		21	9	3	34
STRK		2		1	3
SUMME	1	29	43	16	97

Tabelle 24: Sprechakte Lehrer aus D(1)

Den weitaus größten Anteil bei den Schülern bilden die reagierenden *wiss*-Äußerungen. Beim Lehrer sind es die auffordernden *uorg*-Äußerungen. Daraus ist zu schließen, daß sich das Wissen im Unterricht fast ausschließlich aus dem Vorwissen der Schüler zusammensetzt. Dieses Vorwissen ist einem Schulwissen zuzuordnen, es stammt aus vorangegangenem Unterricht, denn die Flächenberechnung von Rechtecken ist eine Wiederholung aus der 5. Klasse und wurde bei Lehrer D auch in diesem Schuljahr zu Anfang des zweiten Halbjahres schon behandelt.

Schwierig ist eine eindeutige Zuordnung bei den lebensweltlich geprägten Äußerungen der Schüler. Diese tauchen vor allem im ersten Unterrichtsabschnitt auf. Hier verteilt der Lehrer das Arbeitsblatt, auf dem der Grundriß eines Wasserschlosses dargestellt ist. Die anschließende Frage des Lehrers: „Was fällt dir denn dazu ein?", wurde als lebens-

[115] Nicht aufgenommen wurden *prak*- und *usys*-Äußerungen sowie bei den Schülern die auffordernden und beim Lehrer die reagierenden Spielzüge, die in nur sehr geringer Anzahl identifiziert wurden und für die Herkunft und Geltung des Wissens unerheblich sind. Die Randsummen beziehen sich jedoch auf *alle* Sprechakte.

weltliche Aufforderung codiert, da die Fragestellung keinen mathematischen Bezug aufweist und sich auf ein ‚alltägliches'[116] Problem bezieht. Daraufhin wurden auch die Antworten der Schüler als lebensweltliche Äußerungen codiert, da sie sich ebenfalls auf dieses Problem beziehen. Es ist allerdings anzumerken, daß die Antworten der Schüler, trotz der offenen Aufgabenstellung, alle innerhalb des durch den Mathematikunterricht abgesteckten Rahmens bleiben. Die erste Antwort lautet zum Beispiel: „Da soll man ausrechnen, ja, wieviel m^3 Wasser, also wieviel Liter … in dem Graben drin sind." Die Frage des Lehrers wird von den Schülern ganz offensichtlich verstanden als: „Was könnte man da berechnen?" – und so ist sie vom Lehrer wohl auch gemeint. Somit sind auch die lebensweltlichen Äußerungen mit großer Wahrscheinlichkeit einem Schulwissen zuzuordnen.

Der Lehrer hingegen organisiert den Unterrichtsverlauf und bringt sein Sachwissen nicht direkt in den Unterricht ein. Aber er verbürgt die Geltung für das durch die Schüler eingebrachte Wissen, indem er die Antworten bestätigt oder ablehnt. Dies wird vor allem in den fortführenden *lern*-Äußerungen deutlich, die den zweitgrößten Anteil aller Sprechakte des Lehrers ausmachen. Zum Beispiel im zweiten Unterrichtsabschnitt, in dem der Lehrer nach „Flächenberechnung" fragt. „Länge mal Breite" ist die schnelle Antwort eines Schülers. Dann entwickelt sich ein längeres Unterrichtsgespräch, in dem die Schüler viele Vorschläge machen, „von was" diese Formel die Fläche liefert: „Quadrat", „Rechtecke", „irgendwelche eckigen", „rechtwinklige Vierecke". Alles wird vom Lehrer zurückgewiesen bzw. als nicht ausreichend bewertet, bis schließlich das Wort „Rechteck" fällt. „Aha, endlich!", ist der Kommentar des Lehrers und damit ist der Abschnitt abgeschlossen. Ein Frage-und-Antwort-Spiel, bei dem die Verantwortung für die Richtigkeit der Lösung allein beim Lehrer liegt.

Auch im ersten und dritten Unterrichtsabschnitt finden wir ein ähnliches Muster. Im ersten Abschnitt wird nach einer „sinnvollen" Reihenfolge für die Lösung der einzelnen Teilaufgaben gefragt. Fast alle Kombinationen werden von den Schülern genannt, bis der Lehrer schließlich festlegt: „Gibt sicher mehrere Möglichkeiten. Ihr sollt jetzt mal die, die hier an der Tafel vorgeschlagen ist, ruhig die erste nehmen." Warum diese Möglichkeit – in der Tat – sinnvoll ist und andere von den Schülern vorgeschlagene nicht, wird hingegen nicht gesagt. Es erscheint durch die Formulierung des Lehrers fast eine willkürliche Entscheidung zu sein, die sie faktisch nicht ist. Dadurch aber, daß sie ihre Geltung allein durch den Lehrer erhält und keine weiteren Geltungsinstanzen herangezogen werden, bleibt das ‚Sinnvolle' der gewählten Reihenfolge verborgen.

[116] ‚Alltäglich' ist die Aufgabe zumindest im Sinne des Schulbuches. Alle Kapitel sind hier so aufgebaut, daß nach der Einführung in ein neues Themengebiet zunächst einige Rechenaufgaben ohne jeglichen Anwendungsbezug gestellt werden, und im Anschluß daran Textaufgaben, die teilweise mit der Überschrift „Aufgaben aus dem Alltag" gekennzeichnet sind. Dieses Schema ist durchgängig zu finden, und obwohl die genannte Überschrift in diesem Abschnitt zu „Raum- und Oberflächeninhalt von Quadern" nicht explizit erscheint, kann man davon ausgehen, daß auch die ‚Schloßaufgabe' im Sinne des Buches zu den „Aufgaben aus dem Alltag" gehört. Inwiefern diese Aufgabe wirklich eine alltägliche Aufgabe ist, wird später behandelt (siehe 5.7.5)

Im dritten Abschnitt, in dem nach Lösungsmöglichkeiten für die einzelnen Teilaufgaben gefragt wurde, ist es der Lehrer, der eine Möglichkeit als die beste festlegt. Auch hier bringen die Schüler verschiedene Vorschläge in den Unterricht ein, der Lehrer bewertet sie und legt dann eine (‚klügste') Lösung fest. Er liefert auch eine Begründung: „Da hat man nicht so viele Stücke." Dennoch ist auch hier der Lehrer, der aus den Vorschlägen der Schüler die beste und „schnellste" Lösung auswählt und festlegt.

5.7.2.2 Öffnung des Wissens

In dieser Stunde finden wir keine sichtbaren Bruchstellen, das heißt, es lassen sich keine Interpretationsdifferenzen feststellen, die einer Klärung bedürften. Auch in den folgenden zwei Stunden finden wir ein ähnliches Bild, auch hier wird an keiner Stelle offensichtlich die Geltung des Wissens in Frage gestellt. Ein Grund dafür dürfte in der Tatsache liegen, daß es vor allem – wie oben festgestellt – der Lehrer ist, der für die Geltung einsteht. Andererseits ist das Thema dieser und der nächsten Stunden im Grunde eine Wiederholung, so daß von daher vermutlich weniger Interpretationsdifferenzen auftauchen. Da keine Schülerinterviews vorliegen, die näheren Aufschluß über eventuelle implizite Bruchstellen geben könnten, bleibt als einziges Kriterium für die Öffnung des Wissens der Grad der Herausstellung des Konstruktionscharakters.

Der Unterricht beginnt mit möglichen Fragen an die Aufgabe. Wie oben bereits erwähnt, wird die Reihenfolge vom Lehrer festgelegt, und zwar ohne Begründung. Es wird nicht geklärt, warum diese Reihenfolge sinnvoll ist, obwohl der Lehrer danach fragte. Die mathematische Grundlage dieser Stunde ist die Formel für die Berechnung eines Rechtecks. Diese ist den Schülern bereits bekannt und wird wahrscheinlich deshalb weder begründet noch hergeleitet. Auch die verschiedenen Möglichkeiten, die Grundfläche des Schlosses auszurechnen (Zerlegung in einzelne Flächen oder Gesamtfläche minus Fläche des innen liegenden Wassergrabens) erhalten unhinterfragt Geltung. Warum die zweite Möglichkeit besser ist als die erste, wird vom Lehrer mit einem kurzen Hinweis darauf, daß die Rechnung einfacher ist, begründet („Da hat man nicht so viele Stücke."). Die anschließende Rechnung wird dann aber ausführlich dargelegt; die einzelnen Rechenschritte werden an die Tafel geschrieben, erklärt und wiederholt. Dieser letzte Unterrichtsabschnitt ist der längste der Unterrichtsstunde.

Das heißt zusammenfassend, lediglich die Rechnung wird ausführlich offen gelegt und begründet, die anderen Unterrichtsschritte werden gar nicht oder nur ansatzweise in einen Begründungszusammenhang gestellt.

Weiterhin fehlen Fragen, die den Konstruktionscharakter der Aufgabe betreffen. Diese Aufgabe wurde zu dem Zweck konstruiert, die Berechnung von Flächen und Volumina einzuüben, und genau so wird sie im Unterricht auch behandelt. Die Tatsache, daß die zu berechnende Fläche den Grundriß eines Schlosses darstellt, ist für diesen Zweck unerheblich. Das ist lediglich schmückendes Beiwerk und für den Unterrichtsverlauf nicht entscheidend. Gerade dadurch aber wird die Möglichkeit verschenkt, auf Möglichkeiten und vor allem Grenzen der Flächenberechnung aufmerksam zu machen. So könnte man zum Beispiel fragen, inwiefern die Maßangaben realistisch sind oder ob sie nicht vielmehr nur Näherungen darstellen; ob es überhaupt möglich ist, so genau zu messen, und wenn ja, wie; was passiert, wenn die Wände ‚krumm' sind? usw. So könnte deutlich werden, daß der Grundriß nur ein Modell sein kann, das die reale Situation vereinfacht, und die mathematische Berechnung deshalb nur eine Annäherung an die gegebene Situation sein kann.

Auch in den beiden Folgestunden findet man nur selten Begründungen. Auch hier liegt der Schwerpunkt ganz eindeutig auf der Rechnung, hier werden jedoch auch keine eingekleideten Aufgaben zugrunde gelegt. In D(2) wird ebenfalls Fläche und Umfang berechnet, allerdings von abstrakten Figuren. Und auch hier sollen mehrere Möglichkeiten aufgezeigt werden. Auf Hinweise darauf, welche Möglichkeit besser wäre und warum, wird auch hier verzichtet. Im Gegenteil, diese Frage wird geradezu ausgeklammert:

L: J. guckt so ungläubig. Hast du's noch nicht verstanden?
S: Ja, also das bei der S. war eben viel einfacher!
L: Ja, das ist ja nicht die Frage jetzt. Ich hab ja nur gefragt, wie man's anders machen kann. Ob dir das jetzt klar ist, wie er's machen jetzt will?
S: Jaja.

Warum also sollen die Schüler mehrere Möglichkeiten für die Berechnung einer Fläche nennen, wenn es scheinbar nicht wichtig ist, welche Möglichkeit einfacher ist? Diese Frage wird im Unterricht weder gestellt noch beantwortet.

In D(3) kommt der Aspekt des Einübens in sicheres Rechnen noch deutlicher zum Ausdruck. Hier wird das Vorgehen auch begründet – mit dem Hinweis auf die anstehende Klassenarbeit:

L: Was eben einige von euch schon so toll im Kopf lösen konnten, aber mit Sicherheit nicht alle, machen wir jetzt mal schriftlich. Weil es auch sehr wichtig ist für die Arbeit … Das ist aber auch wirklich 'ne ganz wichtige Angelegenheit hier.

Warum das wichtig ist (außer für die Klassenarbeit) wird auch hier nicht gesagt. Insgesamt fehlt in allen Stunden ein Begründungszusammenhang, der sich auf Bereiche außerhalb der Schule erstreckt. Das Wissen wird insofern nicht geöffnet, als nicht deutlich wird, daß

– die Aufgaben mit dem Ziel konstruiert wurden, das Rechnen mit Dezimalzahlen und Bruchzahlen einzuüben; es wird vor allem bei der ersten Aufgabe (Schloßaufgabe) ein lebensweltlicher Zusammenhang suggeriert, der faktisch nicht vorhanden ist;

– das Wissen, das in diesen Stunden Geltung erhält (Berechnung von rechteckigen Flächen nach verschiedenen Verfahren), spezifische Möglichkeiten (z.B. Übertragbarkeit auf andere, aus Rechtecken zusammengesetzte Flächen, Entscheidung über den ‚günstigsten' Rechenweg) und Beschränkungen (ungenaue Ergebnisse durch Meßfehler und Notwendigkeit der Vereinfachung in einem Modell) bietet;

- es für das im Unterricht zur Geltung gebrachte Wissen auch andere Begründungen als die Vorbereitung auf die Klassenarbeit geben kann (Anwendungsmöglichkeiten im ‚Alltag' oder einfach nur sicheres Rechnen mit Bruch- und Dezimalzahlen, selbst das wird nicht explizit gesagt).

5.7.3 Die Didaktik des Lehrers

Nach der ersten protokollierten Unterrichtsstunde (D(1)) wurde ein Interview mit Lehrer D durchgeführt, das weiteren Aufschluß über den Unterrichtsinhalt geben kann.

Das Ziel dieser Stunde war nach Auskunft des Lehrers, „daß die die Fläche berechnen können". Das Thema ‚Flächenberechnung' wurde in dieser Klasse bereits im Januar kurz wiederholt, so daß er auf grundlegende Begriffe zurückgreifen konnte und „nicht neu in den Flächeninhalt einsteigen mußte". Hier wird noch einmal die Interpretation bestätigt, daß es im Unterricht in erster Linie um das Einüben der Rechentechnik geht. Es ist auf das vom Lehrer gesetzte Unterrichtsziel zurückzuführen, daß die Rechnung zur Schloßaufgabe so ausführlich besprochen wurde.

Im Rückblick auf den Verlauf der Stunde hebt Lehrer D den Unterrichtsabschnitt 2 hervor:

> „… aber man hat dann wieder gesehen, wie schnell die durch die Reizüberflutung alles wieder vergessen. Wenn Sie nämlich im Vergleich sehen, dieses Kopfrechnen am Anfang der Stunde[117], da sind die jetzt eigentlich relativ gut schon, nicht alle, aber da bin ich eigentlich mit zufrieden. … Aber dann lag das halt jetzt wieder weiter zurück, Januar, dann kam natürlich nicht der Begriff Rechteck. Da hing's dran, 'ne. … Ja, rechtwinklig hat hat einer gesagt, rechtwinklig und Quadrat, war ja nicht falsch, aber das dauerte halt 'n Weilchen, aber ich wollte da auch nicht weg in dem Fall, 'ne. Das war mir da egal, ich mußte die Zeit opfern, um auf den Begriff Rechteck wieder zu kommen. Ich hätte jetzt, wenn's immer noch nicht gekommen wär, notfalls auch 'ne Skizze an die Tafel gemalt von Vierecken, weil nämlich der Begriff Viereck fiel."

Daß dieser Abschnitt so lange dauerte, war vom Lehrer also nicht geplant, dennoch war es ihm wichtig, auf den Begriff zu warten. Dabei geht es nur um den Begriff an sich, um die korrekte mathematische Benennung der geometrischen Figur. Wie oben bereits angesprochen, bricht er den Abschnitt sofort ab, nachdem eben der Begriff ‚Rechteck' von einem Schüler genannt wurde. Damit ist er zufrieden, er bestätigt die Antwort des Schülers und leitet den nächsten Abschnitt ein. Nur „notfalls", wenn der Begriff nicht gefallen wäre, hätte er noch eine Skizze „an die Tafel gemalt von Vierecken". Er interpretiert also die falschen Antworten der Schüler nicht als inhaltlichen Fehler, sondern als ‚Vergeßlichkeit', die durch die Nennung des richtigen Begriffs aufgehoben wird.

Wie wichtig es ihm war, hier ‚nicht locker zu lassen' und auf den korrekten Begriff zu warten, wird noch deutlicher, wenn man seine Selbstkritik zum Abschnitt 3 hört, denn während ihm im obigen Abschnitt die Zeit nicht zu schade war, verweist er hier auf Zeitknappheit:

---

[117] Lehrer D beginnt jede Stunde mit einer mündlichen Übung im Kopfrechnen.

> „Dann sind natürlich auch mehrere Wege gefunden worden. Das ist natürlich jetzt die Frage, wenn ich mir mehr Zeit genommen hätte, aber da unsere Arbeit ja auch Ende Mai wieder ansteht, hätte ich wahrscheinlich die andere Methode auch noch genommen, aber vielen war schon klar, daß das schneller geht, 'ne, wenn ich jetzt dieses Innengewässer abziehe. Andere hatten ja gesagt, okay, ich berechne die Schloßstücke. Wenn der Weg nicht gekommen wär mit dem Binnengewässer, wär ich den schwierigeren Weg sicherlich gegangen."

In dieser Situation nahm er sich nicht die Zeit, auch die andere Möglichkeit ausführlich durchführen zu lassen und verweist auf die anstehende Arbeit. Er selbst ist es im Unterricht, der festlegt, daß die Lösung durch Ergänzung und Subtraktion der innen liegenden Fläche die einfachere sei. Hier begründet er diese Entscheidung durch die Zeitknappheit im Hinblick auf die anstehende Klassenarbeit und die Vermutung[118], daß es den Schülern „schon klar (war), daß das schneller geht".

5.7.4 Das Fach und die Schule

Die Aufnahmen dieser und der Unterrichtsstunden bei Lehrer E fanden in zwei Parallelklassen am Ende der 6. Jahrgangsstufe eines Gymnasiums in Nordrhein-Westfalen statt. Als Folge der Ergebnisse, die die TIMS-Studie (vgl. Baumert 1997) geliefert hat, wurde an dieser Schule beschlossen, erstmals in allen drei Parallelklassen[119] die gleiche Arbeit zur gleichen Zeit zu schreiben. Dies sollte als Maßnahme zur Qualitätssicherung verstanden werden, und hatte notwendig zur Folge, daß sich die drei Lehrer vorher über die zu behandelnde Thematik einigen mußten. Es wurden dazu bestimmte Seiten aus dem Schulbuch festgelegt (Seite 158 bis 166, das sind die Kapitel zu „Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken" und „Rauminhalt und Oberflächeninhalt von Quadern"). Die Klassenarbeit und der Bewertungsmaßstab wurden von den beteiligten Lehrern gemeinsam erarbeitet und festgelegt. Aus diesen Gründen stand der Termin für die anstehende Klassenarbeit bereits fest.

Der feste Termin und die Tatsache, daß die Klassenarbeit dem Vergleich der Unterrichtsqualität und des Leistungsstands der Schüler dienen sollte, trägt sicher mit dazu bei, daß Lehrer D an mehreren Stellen die Bedeutung der Klassenarbeit als Begründung für die im Unterricht behandelte Sache heranzieht. Die Maßnahmen der Qualitätssicherung sind seiner Meinung nach außerdem der Grund dafür, daß einiges nur kurz angesprochen wurde, wie er im Interview sagt und wie er selbst kritisiert (s. o.):

> „… die andere (Maßnahme, K.J.) liegt ja jetzt Ende des Monats nahe, deshalb kann ich mich hier jetzt nicht so intensiv auf manche Dinge einlassen wie ich möchte, das ist der Nachteil von Qualitätssicherung, Ergebnissicherung, wir haben verabredet, am gleichen Tag, zur gleichen Stunde am Ende der Erprobungsstufe jetzt 'ne Arbeit zu schreiben, gleichen Inhalts, damit wir innerhalb unserer Schule wenigstens schon mal vergleichen können den Leistungsstand der einzelnen Schüler."

---

[118] Im Unterrichtsmitschnitt jedenfalls lassen sich keine Hinweise finden, daß den Schülern das „schon klar war".

[119] Insgesamt gibt es an dieser Schule drei Parallelklassen in der Jahrgangsstufe 6. Auch die dritte Klasse, deren Unterricht hier nicht analysiert wurde, nahm an den Maßnahmen teil.

Thematisch ist der Unterricht nicht eindeutig den in den Richtlinien vorgegebenen obligatorischen Inhalten zuzuordnen. Einerseits ist das Thema dem Bereich Bruch- und Dezimalzahlen zuzuordnen, andererseits dem Bereich Längen, Flächen- und Rauminhalte. Auch der schulinterne Lehrplan gibt darüber keine weitere Auskunft. Hier werden lediglich die obligatorischen Inhalte der Richtlinien wörtlich wiedergegeben.

Das Schulbuch behandelt dieses Thema unter dem Aspekt der Anwendung der Bruchrechnung bei Flächen- und Rauminhalten. Außer daß man dem benutzten Schulbuch gerecht werden wollte, ist dieses Thema aber auch vor dem Hintergrund der beschlossenen Maßnahmen im Rahmen der Qualitätssicherung zu interpretieren. Es wurde festgelegt, bestimmte Themengebiete regelmäßig zu wiederholen. Wie aus dem Interview mit Lehrer E hervorgeht (vgl. 5.8.4) gehört auch das Thema ‚Flächenberechnung' zu den Wiederholungsschwerpunkten.

5.7.5 Mathematik im Unterricht

Abschließend soll der Unterrichtsinhalt nun den im Strukturgitter entwickelten Begriffen gegenübergestellt werden. Die leitende Frage unter diesem Aspekt ist hier: Verweist der Unterrichtsinhalt auf die gesellschaftliche Praxis und wenn ja, inwiefern?

Unter dem Aspekt des *Modells* ist zunächst die einführende ‚Schloßaufgabe' auffällig. Der dargestellte Grundriß ist ein Modell eines Schlosses, in dem ganz bestimmte Aspekte zur Geltung kommen und von anderen abgesehen wird. Diese Tatsache wird im Unterricht jedoch nicht angesprochen. Die Aufgabe und ihre Behandlung im Unterricht erscheinen ohne einen Bezug zur Realität. So hätte man zum Beispiel fragen können, ob es realistisch ist, von einem überall gleich breiten Graben auszugehen, ob es Gründe dafür gibt, warum das Schloß so symmetrisch gebaut ist oder ähnliches. Das alles wird ausgespart, im Unterricht wird nur die Berechnung des Flächeninhalts thematisiert. Die Aufgabe hätte denselben Zweck erfüllt, wenn die ‚Einkleidung'[120] als Grundriß gefehlt hätte, denn sie spielt im Unterricht für die Konstituierung des Inhalts keine Rolle. Damit wird die Möglichkeit vergeben, den Aspekt des Modells aufzuzeigen.

Auch in den anderen zwei Unterrichtsstunden wird der Aspekt des Modells nicht thematisiert. Hier wird auf eingekleidete Aufgaben verzichtet, wodurch das Ziel des Unterrichts, die Rechentechniken einzuüben, deutlicher zum Vorschein kommt.

Wesentlich sichtbarer sind hingegen Aspekte, die den Begriff des *Systems* betreffen. In der ersten Stunde wird auf die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts bei Rechtecken eingegangen, wobei der Lehrer Wert auf die exakte Formulierung legt. In der dritten Stunde soll aus einem gegebenen Umfang und einer gegebenen Seitenlänge die

[120] Zum Begriff der ‚eingekleideten Aufgaben' vergl. Heymann 1996, S.195f: „Als ‚eingekleidete Aufgaben' seien solche bezeichnet, die gegeben werden, um ein zuvor im Unterricht behandeltes Lösungsverfahren zu üben. … Durch die üblichen eingekleideten Aufgaben wird ein außermathematisches Problem seines (potentiellen) lebensweltlichesn Kontextes weitgehend beraubt; es wird isoliert präsentiert, damit das anstehende mathematische Verfahren in Reinform zum Zuge kommen kann."

Länge der anderen Seite eines Rechtecks berechnet werden. Hierzu wird auf die Formel für die Berechnung des Umfangs zurückgegriffen, die schrittweise nach einer Seitenlänge umgeformt wird. Dabei wird deutlich, inwiefern die allgemeine Formulierung in mathematischer Symbolsprache für die Berechnung konkreter Aufgaben hilfreich sein kann.

Der Aspekt des *Überprüfung* ist hingegen nicht festzustellen. An keiner Stelle im Unterricht wird etwas kritisch hinterfragt oder widerlegt. Dies mag zum einen daran liegen, daß die im Unterricht behandelte Sache eine Wiederholung ist: sowohl das Rechnen mit Bruch- und Dezimalzahlen, als auch die Berechnung von Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken wurde bereits behandelt. Zum anderen werden gerade solche Fragen ausgespart, die Anlaß zum kritischen Überdenken geben könnten: Interpretation der Lösung vor dem Hintergrund eines realistischen Zusammenhangs (das Ergebnis kann nur eine Annäherung an den tatsächlichen Flächeninhalt des Schlosses sein), oder Thematisierung der Frage, ob die bekannte Formel zur Berechnung des Flächeninhalts auch gilt, wenn die Maßzahlen Bruch- oder Dezimalzahlen sind.

Der Unterricht ist zusammenfassend gekennzeichnet durch die Einübung in das sichere Beherrschen der Rechentechniken. Dabei wird ansatzweise die Mathematik als System in Anspruch genommen, das für die Berechnung allgemein gültige Formeln liefert. Ein außermathematischer Zusammenhang wird nur oberflächlich hergestellt, der Aspekt des Modells kommt dabei nicht zur Sprache. Das führt unter anderem dazu, daß der Unterricht keine Gelegenheit bietet, Lösungswege und Ergebnisse kritisch zu hinterfragen.

5.8 Die Unterrichtseinheit E

Die drei aufgenommenen Unterrichtsstunden bei Lehrer E fanden in der gleichen Woche wie die von Lehrer D statt, also ebenfalls im Mai 1998. Lehrer E unterrichtet in der Parallelklasse von Lehrer D. Auch hier wird die erste von drei Unterrichtsstunden ausführlich analysiert, die in das Thema „Flächenberechnung“ neu einführt, wobei den Schülern die Berechnung von Rechtecken an einfachen Beispielen bereits aus der fünften Klasse bekannt ist. Das Lehrerinterview wurde im Anschluß an die zweite Stunde (eine Doppelstunde) durchgeführt.

5.8.1 Paraphrase zu E(1)

Thema: Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

1. Eine Aufgabe und zwei Lösungsvorschläge

Die zu bearbeitende Aufgabe liest ein Schüler aus dem Buch vor: „Eine Tischplatte hat die Ausmaße 1 Meter 25 mal 78 cm. Sie soll mit einer Tischdecke bedeckt werde, die an jeder Seite 15cm überhängt. Wieviele Quadratmeter ist die Tischdecke groß?“ Es werden von den Schülern zwei Lösungsvorschläge gemacht und an der Tafel erläutert:

1.Vorschlag: A = 1,25m · 0,78m + 4 · 15cm

2.Vorschlag: B = 1,40m · 0,93m

Die beiden Vorschläge werden von anderen Schülern kommentiert, sie werden aber noch nicht bewertet.

2. Flächeninhalt eines Rechtecks ist a · b

Die Tischdecke ist rechteckig, „in Klasse 5 haben wir uns mit Rechtecken befaßt. Flächeninhalt eines Rechtecks?“ „Länge mal Breite“ oder „a · b“.

3. Beide Lösungsvorschläge sind falsch.

Zum ersten Vorschlag wird festgestellt: 1,25m · 0,78m ist der „Flächeninhalt der Tischdecke“; 4 · 15cm ist der Umfang eines Quadrats. „Das kann sicherlich nicht stimmen. … hier hast du ’ne Fläche, da haste ’n Umfang, wie willst du die addieren?“

Der zweite Vorschlag wird widerlegt, indem gezeigt wird, daß die Längen 1,40m und 0,93m nur einen Teil der Seitenlängen der Tischdecken ausmachen.

4. Die richtige Lösung

Der zweite Vorschlag wird verbessert, „so falsch liegt der P. ja hier nicht.“ :

A = (1,25m + 30cm) · (0,78m + 30cm) = 1,08m · 1,55m

5. Der Umfang der Tischdecke und von Rechtecken allgemein.

Die Aufgabe wird vom Lehrer erweitert: „Jetzt soll rundherum … so ’n Band aufgesäumt werden. … Meine Frage: Wieviel muß sie von der Rolle abschneiden?“ Die Lösung (1,55m · 2 + 1,08m · 2) wird an die Tafel geschrieben.

„Wie könnten wir das nennen, was K. hier berechnet?“ „Umfang.“ Die „allgemeine Definition“ lautet: 2 · a + 2 · b. Das Ergebnis und die Formel werden an die Tafel geschrieben und sollen anschließend von den Schülern ins Heft übertragen werden.

6. Eine andere Möglichkeit den Flächeninhalt zu berechnen: Durch Zerlegung in einzelne Rechtecke.

„Hat jemand noch ’ne andere Idee, diese Aufgabe, dieses Problem mit der Tischdecke da zu lösen?“ Man kann das Rechteck in einzelne Rechtecke „zerlegen“. Diese werden in der Tafelskizze schraffiert und mit A_1 bis A_4 gekennzeichnet. Die Fläche berechnet man dann: $A= A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 4A_4$. Auch das schreiben die Schüler ab.

7. Hausaufgabe

Die Hausaufgabe besteht in der vollständigen Berechnung des Flächeninhalts der Tischdecke nach der zweiten Möglichkeit und der Aufgabe 16a, S. 160.

5.8.2 Das im Unterricht erscheinende Wissen

5.8.2.1 Herkunft und Geltung des Wissens

Zunächst wird die Auswertung der Sprechakte in tabellarischer Form dargestellt, um Hinweise auf die Wissensquellen zu erhalten[121]:

Spielzüge	*lebw*	*lern*	*prak*	*uorg*	*wiss*	*Summe*
FORT	4	9	1	2	18	38
REAG	19	4	4	11	57	97
Summe	23	14	5	20	75	144

Tabelle 25 : Sprechakte Schüler aus E(1)

Spielzüge	*lebw*	*lern*	*prak*	*uorg*	*wiss*	*Summe*
AUFF	5	7	10	49	46	120
FORT	2	39	2	19	4	67
STRK	1	2		7	1	11
Summe	8	48	13	80	52	205

Tabelle 26: Sprechakte Lehrer aus E(1)

Bei den Schülern überwiegen deutlich die auf Wissenschaft bezogenen Reaktionen, beim Lehrer sind die auf Wissenschaft und Unterrichtsorganisation bezogenen Aufforderungen annähernd gleich häufig. Er organisiert den Unterricht demnach und lenkt ihn

[121] Auch hier wurden die *priv*- und *usys*-Äußerungen sowie bei den Schülern die auffordernden und beim Lehrer die reagierenden Sprechakte ausgelassen. Die Randsummen beziehen sich wiederum auf *alle* Sprechakte (vgl. Fußnote 115)

durch auf den Gegenstand des Unterrichts bezogene Fragen, bringt sein Wissen aber nicht direkt in den Unterricht ein. Das Wissen, das die Schüler durch die reagierenden *wiss*-Äußerungen in den Unterricht einbringen, ist durchgängig einem Schulwissen zuzuordnen. Hier gilt das gleiche, was zuvor schon in der Analyse von D(1) festgestellt wurde, daß das Thema eine Wiederholung aus der fünften Klasse ist. Die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken ist den Schülern auch hier bereits bekannt.

Bei der Frage nach der Geltung sind zunächst die fortführenden *lern*-Äußerungen des Lehrers interessant. Diese kommen nach den oben genannten Aufforderungen am dritthäufigsten vor. Meistens bestätigt der Lehrer hier Beiträge der Schüler, in selteneren Fällen weist er sie auch zurück. Dennoch ist es nicht allein der Lehrer, der die Geltung des Wissens verbürgt. Vor allem in den ersten vier Unterrichtsabschnitten, in denen es um die Lösung der eingangs gestellten Aufgabe geht, wird die Mathematik zur Begründung herangezogen: Am Anfang der Stunde steht eine Aufgabe, zu deren Lösung von den Schülern zwei Vorschläge an die Tafel geschrieben werden. Daraufhin werden beide Vorschläge diskutiert. Es wird herausgestellt, daß beide Vorschläge nicht stimmen können, was mathematisch begründet wird: Im ersten Fall kann die Lösung nicht richtig sein, weil hier eine Strecke (genauer: der Umfang eines Quadrates) zu einer Fläche addiert wird, das ist mathematisch nicht möglich. Im zweiten Fall wird herausgestellt, daß die Längen nicht den tatsächlichen Längen der Skizze entsprechen, es wurden Teilabschnitte nicht berücksichtigt. Die Lösung wird den Voraussetzungen der Aufgabe gegenübergestellt und begründet zurückgewiesen. Die dadurch gewonnenen Erkenntnisse werden genutzt, um den Vorschlag zu verbessern und zu einer richtigen Lösung zu kommen.

In den folgenden zwei Abschnitten (Berechnung des Umfangs und Berechnung des Flächeninhalts durch Zerlegung) wird in erster Linie auf das Vorwissen der Schüler zurückgegriffen. Die Geltung verbürgende Instanz ist damit vor allem der vorangegangene Mathematikunterricht: Die Formel für die Berechnung des Umfangs ist bekannt sowie die Möglichkeit der Zerlegung mit anschließender Addition der Teilrechtecke. Festzuhalten bleibt abschließend, daß es an keiner Stelle allein der Lehrer ist, der mittels seiner pädagogischen Autorität die Geltung des Wissens verbürgt. Er greift entweder auf das (mathematische) Vorwissen der Schüler oder auf die Mathematik zurück.

5.8.2.2 Öffnung des Wissens

Wir finden in dieser und der Folgestunde keine offensichtlichen Bruchstellen in dem Sinne, daß die Geltung des Wissens in irgendeiner Art von den Schülern in Frage gestellt und dadurch der Unterrichtsablauf gestört würde. Die Frage nach der Geltung des Wissens wird allerdings vom Lehrer selbst gestellt. Wie im obigen Abschnitt gezeigt wurde, ist es charakteristisch, daß die Geltung mit mathematischen Mitteln – und vom Lehrer geleitet – hinterfragt wird. Die Vorschläge der Schüler werden dazu zunächst aufgenommen und anschließend kritisch betrachtet. Die Begründungen werden also vom Lehrer explizit eingefordert und die letzte Geltungsinstanz ist die Mathematik. Dadurch wird der Konstruktionscharakter insofern deutlich, als im Unterrichtsergebnis zugleich die mathematische Begründung mit aufgehoben ist.

Neben der innermathematischen Begründung für die einzelnen Lösungen, findet man insbesondere in der folgenden Doppelstunde E(2) eine Begründung für die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten. Hier sollten Fläche und Umfang verschiedener Figuren berechnet werden. Zwei Möglichkeiten werden genannt: durch Zerlegung oder Ergänzung der Fläche zu einem Rechteck und anschließendem Subtrahieren der zuviel berechneten Teilflächen. Folgendes Gespräch schließt sich an die Übungsaufgaben an:

L: Herrschaften, kurze Schlußbewertung. Drei Lösungen haben wir vorgeführt bekommen. Welcher würdet ihr den Vorzug geben? M.
S: Die hier. … der letzten. (durch Ergänzung, K.J.)
L: Warum?
S: Geht schneller.
S: Weil da keine doofe Kante ist.
L: Keine doofe Kante?
S: (unverständlich)
S: Jetzt wissen wir immer noch nicht das Ergebnis.
L: O., das ist erst mal gar nicht das Problem, sondern das Problem ist, sich klar zu machen, wie krieg ich das Ganze. Das bißchen rechnen nachher, das ist kein Problem. Ich denke, wer jetzt aufgepaßt hat, stellt fest, hier in dem Fall lohnt es sich tatsächlich, so ’ne Ergänzungslösung zu machen, d.h ’n großes Rechteck zu produzieren und abzuziehen. Erstens spar ich eine Rechnung, und D. hat eben sehr schön klar gemacht, eigentlich haben wir alles, was wir brauchen für diese Rechnung sofort gegeben, ohne Probleme. Also die Lösung gelb, denk ich, ist hier die bessere.

Nicht das Rechnen steht hier im Vordergrund, sondern das zweckmäßige Anwenden der unterschiedlichen Lösungsverfahren. Auch die Berechnung der Fläche der Tischdecke durch Zerlegung (E(1)) erhält so rückwirkend eine Begründung: Es ist notwendig verschiedene Verfahren zu kennen, damit man sich je nach Aufgabenstellung für die einfachere entscheiden kann.

Freilich reicht auch diese Begründung nicht über den Mathematikunterricht hinaus. Hinweise auf Begründungen für das im Unterricht erscheinende Wissen, die sich auf Bereiche außerhalb des Unterrichts beziehen findet man nur implizit. In E(2) soll die Anzahl der Mosaiksteinchen eines Mosaikmotivs im Aachener Dom berechnet werden (Aufg. 13, S.160 im Schulbuch). Die gemeinsam an der Tafel berechnete Lösung lautet 5500 Steinchen. Daraufhin kommentiert der Lehrer:

> „Herrschaften, 5500 Mosaiksteinchen, ich weiß nicht, ob von euch schon mal einer sich so ein Kirchenmosaik sich angeguckt hat. Normalerweise gucken sich Schüler das mit eher weniger Interesse an. Nur, stellt euch mal bitte folgendes vor, welche Leistung es ist, ein Mosaikbild von etwas mehr als drei m² herzustellen, nicht einfach so ’n paar Scherben reinzudrücken, sondern tatsächlich ein Bild zu erzeugen aus 5500 Mosaiksteinchen. Bei den Stundenlöhnen, die wir heute haben, wäre das, was wir heutzutage in Italien sehen, überhaupt nicht mehr zu bezahlen. Da denkt vielleicht mal ab und zu dran, wenn ihr so ’n Mosaik seht.“

Er weist mit diesen Bemerkungen darauf hin, daß die Mathematik die Mittel bereitstellt, bestimmte menschliche Leistungen besser einschätzen und würdigen zu können. Damit macht er aufmerksam auf die Bedeutung der Mathematik für das Verstehen der Wirklichkeit. Die implizite Begründung, die in seiner Aussage steckt, könnte man so formulieren: Wenn ihr die Leistung, die in der Herstellung eines solchen Kunstwerkes steckt, einschätzen wollt, müßt ihr die Flächenberechnung von Rechtecken und das Rechnen mit Bruch- und Dezimalzahlen beherrschen. Dies ist allerdings die einzige Stelle, in der ein Begründungszusammenhang, der sich auf die außerschulische Wirklichkeit bezieht, ansatzweise angesprochen wird.

Weiterhin finden wir auch hier keine Hinweise, die den Konstruktionscharakter der Aufgaben ansprechen. Daß die Aufgaben mit dem Ziel konstruiert wurden, das Rechnen mit Bruch- und Dezimalzahlen einzuüben, wird nicht deutlich. Im Gegenteil, das Rechnen an sich wird als weniger bedeutsam eingestuft. Dies hat zum Beispiel zur Folge, daß bei der ‚Mosaikaufgabe' die unübliche und nur durch die genannte Zwecksetzung der Aufgabe zu begründende Seitenlängenangabe des Mosaikbildes (1,25m und *2 ¾ m*) nicht diskutiert wird.

Ebensowenig wird auf Möglichkeiten und Grenzen des Wissens eingegangen. Diese liegen bei diesem Thema vor allem in den Möglichkeiten und Grenzen des Messens (vgl. Analyse zu D(1)). Daß die Größenangaben und Ergebnisse immer nur Annäherungen sein können, wird nicht thematisiert.

Insgesamt zeigt sich in dieser Unterrichtseinheit der Konstruktionscharakter vor allem innermathematisch. Hinweise auf einen größeren Begründungszusammenhang lassen sich nur ansatzweise feststellen, und Angaben zur didaktischen Transformation des Wissens fehlen ganz.

5.8.3 Die Didaktik des Lehrers

Im Anschluß an die Doppelstunde E(2) wurde ein Interview mit Lehrer E durchgeführt. Es soll nun herangezogen werden, um bestimmte Gesichtspunkte weiter zu erklären.

Ein Aspekt, der in diesem Unterricht auffällig ist, ist die Bearbeitung von Textaufgaben. Während in den Stunden bei Lehrer D nur eine Textaufgabe (die ‚Schloßaufgabe') behandelt wurde, sind es bei Lehrer E drei Textaufgaben, die ausführlich bearbeitet werden. Auch das steht für Lehrer E im Zusammenhang mit der Qualitätssicherung:

> „Ja, und dann grundsätzlich sowieso Textaufgaben, der Umgang mit Textaufgaben ist uns in diesem Zusammenhang 'n Anliegen. … Ja, die andere Überlegung ist einfach so aus der Erfahrung heraus, wenn Sie in der Klasse 6 zum Beispiel 'ne Klassenarbeit stellen zum Multiplizieren von Dezimalzahlen, dann können die Schüler das in der Regel mehr oder weniger einwandfrei. Kleiden Sie das Ganze in eine Textaufgabe, das heißt also, aus 'nem gegebenen Flächeninhalt ist eine Seitenlänge zu berechnen oder ähnliches, dann haben Sie vielleicht noch 'n Drittel oder die Hälfte, hat die Hälfte der Schüler die Aufgabe gelöst. Einfach, weil der Zugang 'n anderer ist. Also, wir wollen 'n bißchen weg von diesem Einpauken der Rechenverfahren, die ja ohnehin nach der 6 nichts mehr bringen, weil keiner mehr 1,375 mal 0, 265 per Hand ausrechnet."

Nicht nur, daß Textaufgaben im Mittelpunkt des Unterrichts stehen, wird aus diesen Aussagen verständlich, sondern auch die Art und Weise, wie im Unterricht mit ihnen umgegangen wird. Durchgängig steht nicht das Rechnen, das Ergebnis der Aufgaben im

Vordergrund, sondern der Lösungsweg. Das Berechnen der Ergebnisse wird in zwei Fällen als Hausaufgabe aufgegeben, und auch bei der ‚Mosaikaufgabe', die in der Stunde gelöst wird, wird zuerst der Lösungsweg diskutiert und anschließend an der Tafel gerechnet. Dies wird vor dem Hintergrund verständlich, daß es dem Lehrer um den ‚Zugang' und nicht um das ‚Einpauken der Rechenverfahren' geht.

Die Betonung der verschiedenen Möglichkeiten bei der Berechnung des Flächeninhaltes findet ebenfalls ihre Entsprechung in den didaktischen Vorstellungen des Lehrers. Auf die Frage nach dem Ziel der Stunde E(2) sagt er:

> „Ja, ganz wichtig bei diesen Figuren, oder einfach bei der Berechnung dieser Flächeninhalte von diesen Figuren, daß die Schüler nicht eingleisig da gucken, sondern bewußt durch Perspektivenänderung einen Zugang zu der Aufgabe bekommen. … ja, und das frühzeitig anzutrainieren, daß das Ganze keine Einwegstraße ist, denke ich, ist ganz wichtig. Ja, also nicht in dem Sinne, aha, wir haben 'ne Aufgabenlösung, fertig, zufrieden. Sondern nachgucken und neu sehen, können wir noch weiteres erfahren über die Figur oder über die Lösung."

Insgesamt zeigt sich, daß die ausführliche Diskussion verschiedener Lösungswege, die Behandlung von Textaufgaben und das Zurückstellen der Rechentechniken auf die didaktischen Überlegungen des Lehrers zurückzuführen sind.

5.8.4 Das Fach und die Schule

Es wurde oben (5.7.4) bereits festgehalten, daß das Thema „Flächen- und Rauminhalte" nicht eindeutig den in den Richtlinien angegebenen Themengebieten zuzuordnen ist (vgl. Richtlinien Mathematik, 1993). Das Schulbuch weist das Thema als Anwendung von Bruch- und Dezimalzahlen aus. Im Interview mit Lehrer E wird darüber hinaus deutlich, daß es in einem weiteren Zusammenhang mit den Maßnahmen der geforderten Qualitätssicherung steht. Denn eine Maßnahme, die von den Lehrern dieser Schule getroffen wurde, ist die Wiederholung bestimmter Themengebiete:

> „Wir waren darüber hinaus der Meinung, daß es sicherlich sinnvoll ist, verstärkt auf wiederholende Phasen zu achten, das heißt zum Beispiel jetzt, was wir in der sechsten Klasse machen, Flächeninhalte, Rauminhalte, ist ja ein praktischer und auch sehr zentraler Gegenstand, der sich ja durch die, ja, gesamte Unter- und Mittelstufe hinzieht, und wir waren der Meinung, daß wir auch hier verstärkt darauf achten sollten, immer wieder in Klassenarbeiten Aufgaben dazu, wenn es sich anbietet, mit rein zu nehmen. Einfach, um das wieder aufzufrischen."

5.8.5 Mathematik im Unterricht

Als letzter Punkt der Analyse soll auch hier der Unterrichtsinhalt den Begriffen des Strukturgitters gegenübergestellt werden. Der Aspekt des Modells kommt bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe in E(1) zum Ausdruck. Hier wird eine Skizze angefertigt, die die Tischdecke modelliert. Dabei wird darauf geachtet, daß „das Wesentliche da auch vorhanden ist", wie der Lehrer formuliert. Anhand dieser Skizze werden dann die Lösungsvorschläge geprüft („das gibt 'ne komische Tischdecke") bzw. berichtigt. Anders als bei der ‚Schloßaufgabe' von Lehrer D ist das Modell in dieser Aufgabe noch nicht explizit enthalten und muß erst entwickelt werden.

Mathematik als System kommt in den Formeln für die Berechnung von Fläche und Umfang zur Sprache sowie im korrekten Umgang mit diesen Formeln (so wird zum Beispiel das Kommutativgesetz zur Begründung der Umstellung der einzelnen Faktoren in der Formel für den Flächeninhalt herangezogen).

Schließlich finden wir auch den Aspekt der Überprüfung. Die beiden zu Anfang der Stunde genannten (falschen) Lösungsansätze werden zunächst aufgenommen und werden dann einer kritischen Prüfung unterzogen. Auf der Basis der so gewonnenen Einsichten wird ein neuer Vorschlag gemacht, der alte wird verbessert.

Insgesamt zeigt sich hier ein recht ausgewogenes Bild der Mathematik. In dieser Unterrichtseinheit werden alle drei Aspekte *Modell, System* und *Überprüfung* mehr oder weniger explizit angesprochen.

6 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Die Ergebnisse der Unterrichtsanalysen sollen nun abschließend zusammengefaßt werden. Es werden im folgenden vor allem Gemeinsamkeiten dargestellt, die eine vorsichtige Verallgemeinerung erlauben. Die Zusammenfassung gliedert sich nach drei Aspekten:

1. *Wissen und Geltung*: Hier wird danach zu sehen sein, welche Wissensquellen im Unterricht herangezogen wurden, und wer die Geltung für das Wissen verbürgt.
2. *Öffnung des Wissens*: Gemäß Abschnitt 3.2 wird es hier um die Frage gehen, inwiefern im Unterricht deutlich wurde, daß das Wissen immer eine Auswahl darstellt, das für Schule transformiert wurde; ob es Hinweise auf andere Interpretationsmöglichkeiten – insbesondere von Schülern – gibt; ob den Schülern dadurch Gelegenheit gegeben wird, das Wissen zurückzubeziehen auf sich. Methodisch wurde dieser Aspekt durch die Untersuchung des Konstruktionscharakters und den Umgang mit Bruchstellen im Unterricht verdeutlicht.
3. *Mathematik im Unterricht*: In diesem Analyseabschnitt, der jeweils eine Einzelanalyse abschloß, ging es darum, das Bild oder das Verständnis von Mathematik im Unterricht zu untersuchen. Als Maßstab wurden die drei Begriffe des Strukturgitters (*Modell, System* und *Überprüfung*) an den Unterricht angelegt. Diese Ergebnisse werden hier ebenfalls mit Hilfe der genannten Begriffe zusammengefaßt.

Außer einer übersichtlichen Darstellung der Ergebnisse, wird es auch um die Prüfung der im Abschnitt 4.1 aufgestellten Arbeitshypothese gehen. Als Nullhypothese wurde aufgestellt:

> *Nullhypothese*: Im Unterricht (in dem dieser Analyse zugrundeliegenden Unterricht) wird auf einen Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis verwiesen, der diese Praxis vollständig repräsentiert; und das im Unterricht erscheinende Wissen wird in dem Sinne geöffnet, daß die Auswahl für den Unterricht sichtbar wird und unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten erhalten bleiben.

Gleichzeitig hatte ich die Frage aufgenommen, ob es Unterschiede zwischen dem Unterricht der 70er Jahre und heutigem Unterricht gibt. In einem weiteren Abschnitt (6.4) wird dieser Frage nachgegangen werden. Dazu werde ich mich nicht nur auf die hier analysierten Unterrichtsstunden beziehen, sondern außerdem noch die von Baumert (1997) vorgelegten deskriptiven Ergebnisse der TIMSS-Video Studie zum Vergleich heranziehen. Mit TIMSS-Video liegen typische Merkmale des heutigen Mathematikunterrichts vor, die mit den Ergebnissen dieser Arbeit verglichen werden können und sicherere Schlußfolgerungen zulassen.

6.1 Zusammenfassung unter dem Aspekt von Wissen und Geltung

In keiner der analysierten Stunden wurde das verwendete Schulbuch als Wissensquelle in Anspruch genommen. Zwar lag allen Klassen ein Schulbuch vor[122], ausnahmslos wurde es jedoch, wenn überhaupt, ausschließlich als Aufgabensammlung für Stillarbeitsphasen und Hausaufgaben benutzt. Es konnte für die Analyse der Wissensquellen deshalb außer acht gelassen werden.

Bei der Auswertung der codierten (vgl. 4.3) Sprechakte zeigten sich sehr viele Gemeinsamkeiten. In allen Stunden überwiegen bei den Schülern die auf Wissenschaft bezogenen Reaktionen. Beim Lehrer sind es die Aufforderungen, die in der Mehrzahl entweder unterrichtsorganisatorisch oder ebenfalls auf Wissenschaft bezogen sind. Daraus wurde geschlossen, daß sich das Wissen vor allem aus dem Vorwissen der Schüler konstituiert; der Lehrer bringt sein Wissen durchgängig nur sehr selten explizit in den Unterricht ein. Die genauere inhaltliche Analyse hat jedoch gezeigt, daß es für das Unterrichtsergebnis sehr entscheidende Stellen sein können, in denen als Wissensquelle ausschließlich das Wissen des Lehrers in Betracht kommt. Zum Beispiel war es in $A_1(1)$ die Definition des Teilers, in $C_2(2)$ die Gleichung für die Berechnung des Prozentwertes.

Darüber hinaus wurde untersucht, welcher Art das Vorwissen der Schüler ist: Ist es einem Schulwissen zuzuordnen, das heißt einem Wissen, das mit großer Wahrscheinlichkeit aus vorherigem Unterricht stammt, oder ist es Alltagswissen in dem Sinne, daß alltägliche, lebensweltliche Vorstellungen aktualisiert werden?[123] Mit Ausnahme des Unterrichts bei Lehrer B wurde für alle Stunden dazu festgestellt, daß das Vorwissen der Schüler zum großen Teil einem Schulwissen zuzuordnen ist.

Dies führt auf den Aspekt der Geltung verbürgenden Instanzen. Dadurch, daß das Vorwissen der Schüler zu einem großen Teil dem Schulwissen zugerechnet werden kann, scheiden in diesen Fällen das Subjekt, die subjektiven Erfahrungen des Einzelnen als Geltung verbürgende Instanz aus. Es ist zunächst der Schulunterricht, der für die Geltung in Anspruch genommen wird. Es hat sich in den Analysen allerdings gezeigt, daß zwar die Schüler aufgefordert werden, ihr Vorwissen in den Unterricht einzubringen, es dann aber häufig allein dem Lehrer zukommt, aus den Antworten auszuwählen und die offizielle Interpretation zur Geltung zu bringen (vergleiche zum Beispiel A_1 oder D). Das heißt, der Lehrer ist es, der dasjenige aus den Antworten der Schüler auswählt, was letztlich im Unterrichtsergebnis zur Geltung kommt.

In einigen Fällen ist das die letzte Geltungsinstanz, die in Anspruch genommen wird (so zum Beispiel in C_2 und D), in anderen Fällen wird nachträglich die Mathematik zur Begründung der so im voraus festgelegten offiziellen Interpretation herangezogen (zum

[122] Nur in Klasse B konnten keinerlei Hinweise auf ein Schulbuch festgestellt werden.
[123] Eine Unterscheidung zwischen Schul- und Alltagswissen kann ohne Langzeitbeobachtungen und Intensivinterviews immer nur hypothetisch sein.

Beispiel in C_1). Hier zeigte sich auch am deutlichsten das Erarbeitungsprozeßmuster (Voigt 1984, vgl. auch 3.2).

In einigen Stunden (so vor allem in A_3 und E) konnte jedoch auch festgehalten werden, daß der Lehrer als Geltung verbürgende Instanz nahezu ganz zurücktritt. Hier wurde die Mathematik ganz explizit in Anspruch genommen, ohne daß der Lehrer zunächst die gültige Interpretation ausgewählt hätte. Der Unterricht zeichnete sich im Gegensatz zu den anderen Stunden dadurch aus, daß sich zu Anfang zwei oder mehr unterschiedliche Lösungen der gestellten Aufgabe gegenüberstanden, die dann mit mathematischen Mitteln überprüft wurden. Das führte letztlich zur einzig richtigen und damit zur offiziellen Lösung. Die Richtigkeit dieser Lösung wurde hier also allein durch die Mathematik erklärt und nicht erst durch den Lehrer und nachträglich durch die Mathematik.

Eine Ausnahme zu diesen beiden Vorgehensweisen stellt der Unterricht bei Lehrer B dar. Auch hier standen sich zwar zwei Vermutungen gegenüber, doch wurde in der Analyse festgestellt, daß die Überprüfung vor allem mit Hilfe des Alltagsverständnisses und weniger der Mathematik durchgeführt wurde. Dies zeigte sich insbesondere in der Bezugnahme zum lebensweltlichen Ausgangsproblem.

Es hat sich also gezeigt, daß dadurch, daß das Vorwissen der Schüler maßgeblich zur Konstitution des Unterrichtsinhalts beiträgt, noch nicht gesagt ist, wer die Geltung für das im Unterricht erscheinende Wissen verbürgt. In allen Stunden, mit Ausnahme des Unterrichts bei Lehrer B, war es der Lehrer oder die Mathematik, die für die Geltung in Anspruch genommen wurden. Das Alltagsverständnis der Schüler wurde ersichtlich nur für das Unterrichtsergebnis in der Stunde B(1) herangezogen.

6.2 Zusammenfassung unter dem Aspekt der Öffnung des Wissens

Die Frage nach den Geltung verbürgenden Instanzen hängt eng mit dem Grad des Konstruktionscharakters zusammen. In den Analysen wurde deutlich, daß in den Stunden, in denen die Mathematik für die Geltung in Anspruch genommen wurde, der Konstruktionscharakter zumindest innermathematisch herausgestellt wurde (vgl. A_3 und A_4 oder E). Diese Stunden zeichneten sich gerade dadurch aus, daß die Geltung – vom Lehrer – in Frage gestellt und das Wissen mit mathematischen Mitteln begründet wurde. In den Stunden hingegen, in denen es vor allem der Lehrer ist, der für das Wissen einsteht, finden sich kaum Hinweise darauf, daß das Wissen eine menschliche Konstruktion mit bestimmten Mitteln und zu einem bestimmten Zweck ist.

Hinweise allerdings, die einen außerschulischen oder außermathematischen Begründungszusammenhang betreffen, findet man praktisch in keiner der vorliegenden Unterrichtsstunden. Im Wissen, das im Unterricht konstituiert wird und das im Unterrichtsergebnis aufgehoben ist, lassen sich, wenn überhaupt (so in B und E), nur Spuren davon finden, inwiefern es Möglichkeiten und Grenzen der Beherrschung der – außerschulischen – Praxis liefert, inwiefern es für Schule transformiert wurde. Es ist insofern ‚Schulwissen', das hier konstituiert wurde, denn es hat seinen Sinn und Zweck vor allem im Unterricht selbst. Diese Feststellung schließt nicht die Möglichkeit aus, daß die Schüler das im Unterricht erworbene Wissen nicht auch in außerschulischen Zusammenhängen anwenden könnten. Sie ist lediglich so zu lesen, daß sich im Unterricht selbst kaum Hinweise auf die spezifischen Möglichkeiten für die Beherrschung der Praxis finden lassen. Diese Möglichkeiten zu entdecken bleibt den Schülern damit selbst überlassen.

Ein weiterer Indikator für die Öffnung des Wissen waren die Bruchstellen und die Art und Weise ihrer Aushandlung im Unterricht. Durchgängig hat sich gezeigt, daß explizite Bruchstellen relativ selten, in einigen Stunden (zum Beispiel $A_3(2)$ oder D und E) gar nicht aufzufinden waren. Fast immer findet man das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch, dessen typisches Merkmal unter anderem das Erarbeitungsprozeßmuster (Voigt 1984) ist. Mehrmals wurde darauf hingewiesen, daß es auch in diesen Unterrichtsstunden nachzuweisen war. Dieses Interaktionsmuster ist aber gerade so angelegt, daß es divergierende Interpretationen und Geltungsansprüche unterdrückt, weil man zu einer – zumindest oberflächlich – geteilten Interpretation kommen muß.

In den Stunden, wo sich explizite Bruchstellen fanden, kamen zum Teil offensichtlich Interpretationsdifferenzen zum Ausdruck. Bei einigen dieser Bruchstellen wurde festgestellt, daß sie vermutlich auf eine Differenz zwischen alltäglicher und mathematischer Sichtweise zurückzuführen waren (vgl. $A_1(2)$ und B). In diesen Fällen wurde das ‚Mißverständnis' (so interpretierten es die Lehrer) zwar thematisiert, es wurde aber dadurch ausgeräumt, daß der Lehrer die mathematische, das heißt die offizielle Sichtweise hervorhob, erklärte oder noch einmal wiederholen ließ. An keiner Stelle wurde der Unterschied zwischen alltäglichem und mathematischem Denken herausgestellt, indem auf die Notwendigkeit der mathematischen Interpretation eingegangen wurde (zum Beispiel indem auf die Notwendigkeit der Widerspruchsfreiheit hingewiesen wurde). Die mathematische Interpretation erlangte damit als einzig mögliche Geltung. Daß man die Sache – unter anderen Voraussetzungen zwar – auch anders interpretieren kann, diese Möglichkeit wurde nicht offengehalten. Die Schüler waren in diesen Fällen gezwungen, die mathematische Perspektive einzunehmen, ohne daß ihre Interpretation der Sache zumindest prinzipiell erhalten blieb. Die gemeinsame Basis der unterrichtlichen Arbeit wurde vom Lehrer festgelegt und nicht ausgehandelt.

Andere explizite und auch implizite Bruchstellen, die identifiziert wurden (sehr deutlich bei Lehrer C) wurden überhaupt nicht thematisiert, sondern einfach beiseite geschoben. Dadurch wurden zum Teil auch weiterführende oder korrigierende mathematische Sachverhalte ignoriert (vgl. $C_1(3)$) oder mathematische Fehlinterpretationen übersehen (wie zu $C_2(2)$ ausführlich dargestellt wurde). Auch dieses Verhalten paßt zum Interaktionsmuster im fragend-entwickelnden Unterricht. Das Erarbeitungsprozeßmuster erlaubt den Schülern nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ihre Interpretationen der Sache in den Unterricht einzubringen; sobald der Lehrer die offizielle Interpretation festgelegt hat, müssen sie sich darauf einlassen (vgl. 5.6.2.2). Auf die Gefahr, daß Schüler im Unterricht dieses ‚Spiel' zwar mitspielen, sich jedoch übergangen und nicht ernst genommen fühlen, wurde ebenfalls in der Analyse zu C_2 hingewiesen.

Insgesamt zeigte sich in den Analysen, daß das Wissen im Unterricht nur ansatzweise eine Öffnung erfährt. Es fehlen weitgehend direkte Hinweise auf den Konstruktionscharakter, vor allem fehlen außerschulische Begründungszusammenhänge, die verdeutlichen könnten, wo Möglichkeiten und Grenzen des Wissens liegen könnten. Weiterhin wurde darauf aufmerksam gemacht, daß es sehr wohl Möglichkeiten zum Aufbrechen der offiziellen Interpretation gibt, diese Möglichkeiten, sofern sie auftauchen, aber nicht in dem Sinne genutzt werden, daß abweichende Interpretationen zumindest prinzipiell erhalten bleiben. Sie werden nicht als Chance genutzt, die Voraussetzungen sowohl für die mathematische Sichtweise als auch für andere, im weitesten Sinne alltägliche Sichtweisen offenzulegen. Im Unterricht wird die mathematische Interpretation als die einzig gültige herangezogen, und nicht geklärt, unter welchen Voraussetzungen oder in welchen Zusammenhängen auch andere Auslegungen der Sache Geltung erlangen und sinnvoll sein könnten.

6.3 Das Bild von Mathematik im Unterricht

Im Kapitel 3.1 wurde ein sogenanntes Strukturgitter für den Mathematikunterricht entwickelt, das drei Begriffe festlegte, von denen angenommen wird, das sie die Mathematik als der Teil der gesellschaftlichen Praxis möglichst vollständig beschreiben. Diese Begriffe wurden dazu genutzt, das im Unterricht erscheinende Bild von Mathematik zu beschreiben. Die Ergebnisse der vorangegangenen Analysen sollen nun unter diesem Gesichtspunkt zusammengefaßt werden. Es wird also der Frage nachgegangen, ob der Unterricht gemäß den Kategorien *Modell, System* und *Überprüfung* die gesellschaftliche Praxis vollständig abbildet oder bestimmte Aspekte (eventuell systematisch) außer acht läßt.

Unter dem Aspekt des *Modells* sollten Hinweise erfaßt werden, die auf einen Bezug der Mathematik zur außermathematischen oder allgemeiner: zur individuellen Realität hindeuten. Unter diesem Aspekt werden mathematische Sachverhalte als ein Modell zur Beschreibung von Bereichen verstanden, die quasi ‚unterhalb' der Modellebene liegen. Diese Bereiche können sowohl eine reale Situation erfassen, als auch ein mathematisches Problem auf einer unteren Abstraktionsebene. Im letzteren Fall handelt es sich dann um ein innermathematisches Modell.

Hinweise auf Mathematik als Modell zur Beschreibung und Bearbeitung außermathematischer Situationen lassen sich nur in den Stunden der Lehrer B und E finden. In beiden Stunden wird aber die Modellierungstätigkeit und das Modell an sich nicht reflektiert. Eine innermathematische Modellierung wurde in A_3 festgestellt (Operatorenmodell). Hier wurde der Modellbildungsprozeß auch recht ausführlich hervorgehoben.

In allen weiteren Stunden fehlt dieser Aspekt nahezu ganz. Dies ist auch der Fall in der Stunde von Lehrer D, in der durch die Textaufgabe die Möglichkeit vorhanden gewesen wäre, auf ihn aufmerksam zu machen.

Ein weiterer Begriff, mit dessen Hilfe die Mathematik beschrieben wurde, war der des *Systems*. Darunter sollte die Mathematik als ein in sich geschlossenes System von Sätzen und Beweisen verstanden werden, das sich einer eigenen Sprache bedient und bestimmten formalen Regeln bei der systematischen Erfassung von Sachverhalten folgt.

Dieser Aspekt, das haben die Analysen gezeigt, ist durchgängig in allen Stunden aufzufinden, häufig ist er am stärksten ausgeprägt. Auffällig ist die Betonung der korrekten Fachsprache, die man in allen Stunden findet. In fast allen Stunden werden Unterrichtsergebnisse in Form eines mathematischen Satzes oder einer Definition festgehalten, die zuvor hergeleitet oder bewiesen wurden (Ausnahmen sind die Stunden bei den Lehrern D und E, hier handelte es sich bei den Formeln zur Berechnung von Fläche und Umfang um eine Wiederholung). Dabei wurde aber nur ganz selten (am ehesten noch bei Lehrer B) auf die Notwendigkeit dieser speziellen Sprache hingewiesen. Sie darin besteht, daß die Sprache möglichst eindeutig ist und damit eine intersubjektive Verständigung erleichtert. Damit hängt eng die Tatsache zusammen, daß eher selten explizit auf die inhaltliche Bedeutung mathematischer Ausdrücke hingewiesen wurde. In den Stunden bei Lehrer C wurde das besonders deutlich; hier erschien die Mathematik als ein Sprachspiel, das nahezu jeglicher inhaltlicher Bedeutung entbehrte. Implizit erhalten die Sätze und Definitionen jedoch ihre Bedeutung durch das Anfangsproblem und den Beweis, sofern ein Beweis im Unterricht durchgeführt wurde (zum Beispiel in A_3).

Als dritter Begriff wurde schließlich die *Überprüfung* genannt. Darunter wurde die kritische Prüfung auf (Modell-) Voraussetzungen verstanden, das heißt das Aufmerksammachen auf Voraussetzungen, unter denen die Sätze oder mathematischen Lösungen gelten, kurz und vereinfacht gesagt: Hinweise darauf, daß die Mathematik nicht frei von Widersprüchen ist bzw. diese oftmals nur unter Hinzunahme bestimmter Annahmen ausgeschlossen werden können, die wiederum nicht selten erst im nachhinein entwickelt werden.

Wenn Hinweise auf diesen Aspekt der Mathematik auftauchten, so betrafen sie ausschließlich die Mathematik als System.[124] Aber auch das geschieht relativ selten. In den Stunden bei den Lehrern C und D tauchte der Aspekt der Überprüfung praktisch nicht auf, in A_1 und A_4 nur an ganz wenigen Stellen im Unterricht. In den Stunden, in denen

[124] Das liegt natürlich daran, daß der Aspekt des Modells so selten aufzufinden war. Doch selbst dort, wo er identifiziert wurde (s.o.), wurden die mathematischen Ergebnisse nicht auf die Ausgangssituation zurückübertragen und auf ihre Tauglichkeit und Aussagekraft überprüft.

sich zu Anfang unterschiedliche Vermutungen zur Lösung der gestellten Aufgabe gegenüberstanden (A_3, B und E), wurden die ganze Stunde bzw. ein ganzer Unterrichtsabschnitt als eine Überprüfung der Lösungsvorschläge interpretiert. Wenn aber nur eine Lösungsmöglichkeit – vom Lehrer – zugelassen wird, scheint sich eine Überprüfung vielfach zu erübrigen.

Es kann daher abschließend festgehalten werden, daß in den hier analysierten Stunden die Mathematik vor allem unter dem Aspekt des Systems erscheint. Mathematik als Modell zur Beschreibung und Bearbeitung außerschulischer Situationen und Problemfelder kommt nur selten zur Sprache, und es fehlt die Rückübertragung der mathematisch gefundenen Ergebnisse. Ein innermathematisches Modell wurde nur einmal nachgewiesen. Zum Aspekt der Überprüfung ergibt sich hingegen ein zweigeteiltes Bild. Entweder scheint er schon in der Erarbeitung des Unterrichtsergebnisses angelegt zu sein oder er kommt praktisch nicht vor. Insgesamt wurden in nur drei von neun Unterrichtseinheiten alle drei Aspekte mehr oder weniger explizit festgestellt (A_3, B und E). In allen weiteren Stunden zeigte sich ein eher eingeschränktes Bild der Mathematik, dessen Schwerpunkt beim Begriff des Systems lag.

6.4 Zur Aussagekraft der Unterrichtsanalysen

Die zusammenfassende Auswertung hat bereits gezeigt, daß es bezüglich der hier zugrunde liegenden Maßstäbe kaum Unterschiede zwischen den älteren Aufnahmen (A-C) und den neueren (D und E) festzustellen sind. Weder unter dem Aspekt der Öffnung des Wissens noch bezüglich des Bildes der Mathematik können aufgrund der Analyseergebnisse sichere Unterscheidungen festgestellt werden. Auch die Ergebnisse zur Herkunft und Geltung des Wissens zeigen keine Unterschiede.

Ich möchte im folgenden die deskriptiven Ergebnisse der TIMSS-Video Studie heranziehen, die repräsentativ das Bild heutigen Mathematikunterrichts beschreiben. Wenn sich im Vergleich der hier zugrunde gelegten Stunden mit den Ergebnissen von TIMSS-Video wenig Unterschiede belegen lassen, so kann das die Vermutung stützen, daß es in der Tat kaum oder keine Unterschiede bezüglich der in dieser Arbeit ausgewerteten Analysepunkte gibt.

Auf der Grundlage einer großen Anzahl von viedeographierten Mathematikstunden der 8. Jahrgangstufe[125] wurde für den durchschnittlichen Mathematikunterricht in Deutschland ein sogenanntes ‚kulturelles Skript' entwickelt. Es beschreibt den typischen Verlauf einer Mathematikstunde in Deutschland:

> „In Deutschland lassen sich zwei Varianten des modalen Mathematikunterrichts unterscheiden:
> – Die Stunde beginnt mit der Durchsicht und Besprechung der Hausaufgaben.
> – Es folgt eine kurze Wiederholungsphase.

[125] Datengrundlage waren Videoaufnahmen einer oder mehrerer Stunden aus 100 8. Klassen. Diese Videostichprobe ist eine Zufallsstichprobe aus der TIMSS-Hauptuntersuchung (vgl. Baumert 1997, S.216ff)

- Variante 1: Der neue mathematische Stoff wird im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch, das auf eine einzige Lösung hinführt, relativ kurzschrittig erarbeitet und vom Lehrer an der Tafel dokumentiert.
- Variante 2: Wenn das Thema schon in der vorhergegangenen Stunde vorbereitet wurde, entwickelt ein Schüler – unterstützt von der Klasse und dem Lehrer – eine Aufgabe an der Tafel.
- Es werden in Stillarbeit ähnliche Aufgaben zur Einübung des Verfahrens gelöst.“ (Baumert 1997, S.226)

Einzelne Elemente und Faktoren eines solchen Unterrichtsverlaufs werden bei Baumert (1997, S.226ff) differenzierter betrachtet.[126] So zeigt sich, daß in knapp 60% der videographierten Stunden das Erlernen mathematischer Fertigkeiten im Vordergrund steht, mathematisches Verständnis hingegen nur in annähernd 30%.[127] Das kann im Zusammenhang mit dem Ergebnis gesehen werden, daß fast 90% der Zeit in Schülerarbeitsphasen für die Übung von Routineprozeduren verwendet wird. Alternative Lösungswege werden relativ selten entwickelt – weder vom Lehrer (ca. 12% der Unterrichtsstunden) noch vom Schüler (ca. 14% der Unterrichtsstunden). Unterrichtsstunden, in denen Beweise geführt werden, machen weniger als 10% aller Unterrichtsstunden aus (und man findet sie praktisch nur am Gymnasium). Aufgaben, die durch explizite Hinweise miteinander verknüpft werden, lassen sich in knapp 40% aller Stunden auffinden. Die *Entwicklung* neuer Konzepte kommt dabei deutlich häufiger vor als das *Vorstellen* neuer Konzepte (durch Schüler oder Lehrer).

Vergleicht man dieses Skript und die einzelnen Ergebnisse mit den Unterrichtsverläufen der Stunden der Lehrer A-E, so findet man – trotz einiger Unterschiede – sehr viele Gemeinsamkeiten: In allen Stunden wird das Unterrichtsergebnis im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch erarbeitet. Am Ende steht eine einzige Lösung.[128] Die Erarbeitung erfolgt kurzschrittig, was man unter anderem an der großen Anzahl von Aufforderungen des Lehrers und Reaktionen der Schüler ablesen kann. Die einzelnen Äußerungen bestehen dabei häufig nur aus wenigen Worten. In fast allen Stunden findet man außerdem Stillarbeitsphasen, in denen der vorher entwickelte Stoff eingeübt wird. Eine Anwendung der Konzepte auf andere Sachverhalte findet man nicht. Teilweise wird die Übung auf die Hausaufgaben verlegt. Die Besprechung der Hausaufgaben zu Beginn des Unterrichts findet man vor allem in den Folgestunden der hier analysierten Unterrichtsstunden.[129]

In Bezug auf den ‚typischen‘ Unterrichtsverlauf, so kann man festhalten, ergeben sich zwischen den älteren Aufnahmen aus den 1970er Jahren und den neueren Aufnahmen

[126] Vergl. auch Schümer 1998, die stärker den japanischen Unterricht in den Vordergrund stellt, wodurch die Unterschiede und typischen Merkmale des deutschen Mathematikunterrichts noch deutlicher werden.
[127] Dieses Ergebnis deckt sich übrigens nicht mit den Vorstellungen der Lehrer, die im Rahmen der TIMSS-Hauptuntersuchung befragt wurden. Es besteht bei den befragten Lehrern „weitgehend Einigkeit darüber …, daß für gute Schulleistungen Memorieren, konvergentes und divergentes Denken sowie Kontextunabhängigkeit bei der Anwendung ähnlich wichtig seien.“ (Baumert 1997, S.209)
[128] Die einzige Ausnahme ist Stunde E. Hier werden zwei Lösungsmöglichkeiten erarbeitet, diese werden aber nacheinander, deutlich voneinander abgegrenzt entwickelt. Hier wird zweimal die Variante 1 durchgespielt.
[129] Aus den Unterrichtseinheiten wurden meistens gerade die Stunden ausgewählt, die als Einführung in ein neues Thema gewertet werden konnten.

von 1998 keine sichtbaren Unterschiede. Ich vermute, daß die einzigen erkennbaren Unterschiede, wenn überhaupt, im behandelten Stoff liegen. So wird zum Beispiel die Verwendung von Streck- und Stauchmaschinen im Zusammenhang mit der Einführung des Operatorenmodells, wie es in den Stunden zu A_3 vorkam, heute wahrscheinlich nicht mehr so häufig vorkommen.[130] Die Stunde B(1) hingegen, in der die Bruchzahlen mit Hilfe des Größenmodells eingeführt wurden, dürfte sich auch von der Sache her kaum von heutigem Unterricht unterscheiden.

Andererseits, und das deckt sich mit den Ergebnissen der TIMSS-Studie, sind in den neueren Stunden nur sehr rudimentär Spuren einer Didaktik der Anwendungsorientierung zu finden. Auch in den Stunden D und E wird beispielsweise der Modellbildungsprozeß gar nicht bzw. nur ansatzweise sichtbar. Die behandelten Aufgaben sind oberflächlich zwar eher anwendungsorientiert in dem Sinne, daß sie auf einen außerschulischen Verwertungszusammenhang hinweisen, dieser Bezug verdeckt aber nicht die Tatsache, daß es im Unterricht vor allem um das sichere Rechnen, um die Einübung von Routineprozeduren geht. Es handelte sich um mehr oder weniger eingekleidete[131] Aufgaben.

Wie ist nun die Aussagekraft der Analyseergebnisse für den Stand des heutigen Mathematikunterrichts zu bewerten? – Sowohl die Ergebnisse zu Herkunft und Geltung (vgl. 6.1) als auch zur Öffnung des Wissens (vgl. 6.2) zeigen eine recht einheitliche Gestalt aller analysierten Mathematikstunden. Etwas differenzierter zeigte sich das Bild der Mathematik in den einzelnen Stunden (vgl. 6.3). Die Unterschiede sind jedoch nicht auf das Jahr der Aufnahmen zurückzuführen, denn sie waren nicht nur zwischen den älteren und den neueren Aufnahmen festzustellen. Gleichermaßen zeigten sie sich auch bei den älteren Aufnahmen insgesamt. Sogar innerhalb einzelner Unterrichtsreihen bei demselben Lehrer (z.B. bei Lehrer A) ergaben sich Differenzen im Erscheinungsbild der Mathematik im Unterricht. Der Vergleich mit den Ergebnissen der TIMSS-Video Studie bestätigt daher die Vermutung, daß sich der Unterricht bei den Lehrern A-C nicht wesentlich von den neueren Unterrichtsaufnahmen unterscheidet.

Es liegt daher nahe, die Hypothese zu formulieren, daß sich in der Unterrichtspraxis in den letzten 25 Jahren nicht viel geändert hat. Abgesehen von einigen Veränderungen im Stoffplan scheint sich bezüglich der Herkunft und Geltung, der Öffnung des Wissens und des im Unterricht repräsentierten Bildes der Mathematik nicht viel getan zu haben.

Folglich kann die Nullhypothese verworfen und die Alternativhypothese angenommen werden, und zwar nicht nur ausschließlich für die analysierten Stunden. Ich möchte sie nach dem Vergleich mit den Ergebnissen der TIMS-Studie verallgemeinernd formulieren: *Im Mathematikunterricht erscheint ein (systematisch) beschränktes Bild der gesell-*

---

[130] In den Richtlinien (1993) wird zum Bereich ‚Bruchzahlen' allerdings angemerkt, daß in „Anwendungen … sowohl das Größen- als auch das Operatorenmodell berücksichtigt werden (sollten)." (S.40)
[131] Vgl. Fußnote 120

schaftlichen Praxis, und eine Öffnung des Wissens findet, wenn überhaupt, nur ansatzweise statt.

7 Schluß

Die vorliegende Arbeit sollte unter zwei Aspekten gelesen werden: Zunächst ging es unter *methodischen* Gesichtspunkten darum, den von Menck und Wierichs vorgelegten Ansatz zur Beschreibung und Analyse des Unterrichtsinhalts weiterzuführen und fachdidaktisch für den Mathematikunterricht zu konkretisieren. Es hat sich gezeigt, daß die Analyse des Beziehungsgefüges, in dem der Unterrichtsinhalt steht, in weiten Teilen auf den Mathematikunterricht übertragbar ist. Fachdidaktische Überlegungen waren vor allem für den Analysepunkt ‚Mathematik im Unterricht' notwendig. Es sollte außerdem deutlich geworden sein, wie die zusätzliche Codierung der Sprechakte und die quantitative Auswertung derselben die Analyse sinnvoll ergänzen kann, indem sie auf Besonderheiten und Vergleichbares aufmerksam machen und die interpretative Analyse anleiten.

Ein weiterer Schwerpunkt lag in den Analysen selbst. Sie sollten nicht Selbstzweck sein, sondern auch inhaltlich bedeutsame Ergebnisse liefern. Diese wurden in Kapitel 6 zusammengefaßt und zeigten, daß die in 4.1 aufgestellte Nullhypothese[132] für die meisten Stunden widerlegt werden konnte. Es konnte darüber hinaus festgehalten werden, daß es Anlaß zu der Vermutung gibt, daß sich die Aufnahmen aus den 1970er Jahren nicht wesentlich von heutigem Mathematikunterricht unterscheiden. Insofern konnte plausibel gemacht werden, daß die Alternativhypothese vermutlich für den ‚durchschnittlichen' Mathematikunterricht gilt. Weitere Untersuchungen müßten dann zeigen, inwiefern die Ergebnisse wirklich zu verallgemeinern sind. Mit TIMSS-Video steht vielleicht erstmals eine repräsentative Stichprobe von videographierten und vielfältig dokumentierten Unterrichtsaufnahmen zur Verfügung. Es wäre wünschenswert, wenn diese auch dazu genutzt würden, den bislang in empirischen Forschungsarbeiten vernachlässigten Unterrichtsinhalt näher zu untersuchen.

[132] : Im Unterricht (in dem dieser Analyse zugrundeliegenden Unterricht) wird auf einen Ausschnitt aus der gesellschaftlichen Praxis verwiesen, der diese Praxis vollständig repräsentiert; und das im Unterricht erscheinende Wissen wird in dem Sinne geöffnet, daß die Auswahl für den Unterricht sichtbar wird und unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten erhalten bleiben

Literatur

Autorenkollektiv der Karl-Marx-Universität Leipzig: Die Wissenschaft von der Wissenschaft. Berlin 1968.

Adick, Christel/ Bonne, Lothar/ Menck, Peter: Didaktik des Pädagogikunterrichts. Entwicklung und Begründung einer Fachdidaktik im gesellschaftswissenschaftlichen Aufgabenfeld. Stuttgart 1978.

Arnold, Wilhelm/ Eysenck, Hans Jürgen/ Meili, Richard: Lexikon der Psychologie. Freiburg 1980.

Baumert, Jürgen: Befunde der internationalen Leistungsvergleiche zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht und fachdidaktische Konsequenzen. In: Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Stuttgart 1999.

Baumert, Jürgen: TIMSS - Mathematisch-naturwissenschftlicher Unterricht im internationalen Vergleich – Anlage der Studie und ausgewählte Befunde. In: List, Juliane (Hrsg.): TIMSS: Mathematisch-naturwissenschaftliche Kenntnisse deutscher Schüler auf dem Prüfstand. Köln 1998(a).

Baumert, Jürgen u.a.: TIMSS/III. Schülerleistungen in Mathematik und den Naturwissenschaften am Ende der Sekundarstufe II im internationalen Vergleich. Zusammenfassung deskriptiver Ergebnisse. Berlin 1998(b).

Baumert, Jürgen u.a.: TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen 1997.

Baumert, Jürgen/ Köller, Olaf: Nationale und internationale Schulleistungsstudien. Was können sie leisten, wo sind ihre Grenzen? In: Pädagogik, Heft 6, 1998.

Beck, Uwe: Mathematikunterricht zwischen Anwendung und Reiner Mathematik. Beispiele und pädagogische Grundlagen. Frankfurt am Main 1982.

Becker, Georg E.: Planung von Unterricht. Handlungsorientierte Didaktik Teil I. Weinheim, Basel 1993[5].

Bellack, Arno A. u.a.: Die Sprache im Klassenzimmer. Düsseldorf 1974.

Blankertz, Herwig: Theorien und Modelle der Didaktik. München 1972.

Bildungskommission NRW: Zukunft der Bildung – Schule der Zukunft. Denkschrift der Kommission „Zukunft der Bildung – Schule der Zukunft“ beim Ministerpräsidenten des Landes Nordrhein-Westfalen. Neuwied, Kriftel, Berlin 1995.

Blum, Werner u.a. (Hrsg.): TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen. Hannover 1998.

Courant, Richard: Die Mathematik in der modernen Welt. In: Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin, Heidelberg, New York 1974.

Damerow, Peter: Mathematikunterricht und Gesellschaft. In: Heymann (Hrsg.): Mathematikunterricht zwischen Tradition und neuen Impulsen. Köln 1984, S.9 - 48.

Damerow, Peter: Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Eine Fallstudie zum Einfluß gesellschaftlicher Rahmenbedingungen auf den Prozeß der Curriculum-Reform. Stuttgart 1977.

Damerow, Peter u.a.: Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne Allgemeinbildende Schulen (II). Schriftenreihe des IDM 24/1981. Bielefeld 1981.

Davis, Philip J., Hersh, Reuben: Erfahrung Mathematik. Basel, Boston, Stuttgart 1986.

de Lange, Jan: Mathematics – insight and meaning. Utrecht 1987.

Derbolav, Josef: Was heißt „wissenschaftsorientierter Unterricht“? In: Zeitschrift für Pädagogik 1977, S.937-945.

Deutscher Bildungsrat: Empfehlungen der Bildungskommission. Strukturplan für das Bildungswesen. Stuttgart 1972[4].

Durner, Heinz: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Deskriptive Befunde. In: List, Juliane (Hrsg.): TIMSS: Mathematisch-naturwissenschaftliche Kenntnisse deutscher Schüler auf dem Prüfstand. Köln 1998.

Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen. 6. Schuljahr. Herausgegeben von Schröder/Uchtmann. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a.M. 1974[3].

Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen. Rechnen und Geometrie 2. Herausgegeben von Schröder/Uchtmann. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a.M. 1975[9].

Faust-Siehl, Gabriele: Themenkonstitution als Problem von Didaktik und Unterrichtsforschung. Weinheim 1987.

Finley, Moses I.: Die Griechen. Eine Einführung in ihre Geschichte und Zivilisation. München 1983.

Finley, Moses I.: Die Sklaverei in der Antike. Geschichte und Probleme. München 1981.

Freudenthal, Hans: Theoriebildung zum Mathematikunterricht. In: ZDM 3, 1987, S.96 - 103.

Grundsatzpapiere für die Rahmenrichtlinien der Orientierungsstufe. Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium. 1975.

Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient. Wiesbaden 1996[4].

Habermas, Jürgen: Vorbereitende Bemerkungen zu einer Theorie der kommunikativen Kompetenz. In: Habermas/ Luhmann: Theorie der Gesellschaft oder Sozialtechnologie – Was leistet die Systemforschung? Frankfurt am Main 1971.

Habermas, Jürgen: Technik und Wissenschaft als „Ideologie“. Frankfurt am Main 1970[4].

Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis. Teil 2. Stuttgart 1990.

Heymann, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Bildungstheoretische Reflexionen zum Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen. Weinheim, Basel 1996.

Heymann, Hans Werner: Mathematikunterricht als schulischer Alltag. Neuere fachdidaktische Forschungsansätze vor dem Hintergrund der Alltagsorientierung in der Erziehungswissenschaft. In: Heymann (Hrsg.): Mathematikunterricht zwischen Tradition und neuen Impulsen. Köln 1984, S.80 - 115.

Heymann, Hans Werner: Didaktisches Handeln im Mathematikunterricht aus Lehrersicht. Bericht über zwei Fallstudien zu subjektiven Hintergründen des Lehrerhandelns. In: Bauersfeld u.a.: Analysen zum Unterrichtshandeln. Köln 1982, S.141 - 167.

Horkheimer, Max: Traditionelle und kritische Theorie. In: Horkheimer, Max: Kritische Theorie. Eine Dokumentation. Band II. Frankfurt a.M. 1968.

Kaiser, Arnim: Unterrichts- und Veranstaltungsanalyse in der Weiterbildung (RUS-Verfahren). In: Grundlagen der Weiterbildung – Praxishilfen 19, 1995.

Kaiser, Gabriele: Die Bedeutung von Anwendungen in der Lietzmannschen Didaktik. In: Steiner/Winter (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Bildungsgeschichte – Wissenschaftsgeschichte. Köln 1985, S. 161 - 167.

Kaiser-Messmer, Gabriele: Aktuelle Richtungen innerhalb der Diskussion um Anwendungen im Mathematikunterricht. In: JMD 10, 1989, S. 309 - 347.

Kell, Adolf: Strukturgitter, didaktisches. In: Lenzen, Dieter (Hrsg.): Enzyklopädie Erziehungswissenschaft. Band 3, S.584-593. Stuttgart 1995.

Klafki, Wolfgang: Zum Verhältnis von Didaktik und Methodik. In: Klafki, W./ Otto, G./ Schulz, W.: Didaktik und Praxis. Weinheim/ Basel 1977.

Kline, Morris: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Volume 1. New York 1990.

Kraus, Josef: Bildungspolitische Schlußfolgerungen aus der TIMSS-Studie Deutschland – 15 Thesen. In: List, Juliane (Hrsg.): TIMSS: Mathematisch-naturwissenschaftliche Kenntnisse deutscher Schüler auf dem Prüfstand. Köln 1998.

Krummheuer, G./Voigt, J.: Interaktionsanalysen von Mathematikunterricht. Ein Überblick über Bielefelder Arbeiten. In: Maier, Hermann/ Voigt, Jörg: Interpretative Unterrichtsforschung. Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag. Köln 1991.

Lakatos, Imre: Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie. Braunschweig 1982.

Lakatos, Imre: Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig 1979.

Lenné, Helge: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart 1969.

Lenzen, Dieter/ Meyer, Hilbert L.: Das didaktische Strukturgitter – Aufbau und Funktion in der Curriculumentwicklung. In: Lenzen (Hrsg.): Curriculumentwicklung für die Kollegschule. Der obligatorische Lernbereich. Frankfurt a.M. 1975.

List, Juliane (Hrsg.): TIMSS: Mathematisch-naturwissenschaftliche Kenntnisse deutscher Schüler auf dem Prüfstand. Köln 1998.

LS 6. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Nordrhein-Westfalen. Stuttgart 1994.

Luckmann, Thomas: Einige Überlegungen zu Alltagswissen und Wissenschaft. In: Pädagogische Rundschau 1981, S.91- 109.

Mackert, Norbert: Inhalte in schulischen Interaktionen. Ein Beitrag zu einer Methode inhaltsspezifischer Unterrichtsanalyse anhand von Unterrichtsdokumenten. München 1983.

Malle, Günther: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig, Wiesbaden 1993.

Mathematik heute. Mathematisches Unterrichtswerk. 6. Schuljahr, Orientierungsstufe. Herausgegeben von Athen/Griesel. Schroedel Verlag, Hannover 1971.

Mathematik heute. Mathematisches Unterrichtswerk. Lehrerheft. 6. Schuljahr, Orientierungsstufe. Herausgegeben von Athen/Griesel. Schroedel Verlag, Hannover 1972.

Menck, Peter: Was ist Erziehung? Eine Einführung in die Erziehungswissenschaft. Donauwörth 1998.

Menck, Peter: Lehrplanentwicklung nach Robinsohn. In: Zeitschrift für Pädagogik 1987, S.363-380.

Menck, Peter: Unterrichtsinhalt oder ein Versuch über die Konstruktion von Wirklichkeit im Unterricht. Frankfurt am Main 1986.

Menck, Peter: Ein Unterrichtsthema wird interpretiert. In: Ehlich, Konrad/ Rehbein, Jochen (Hrsg.): Kommunikation in Schule und Hochschule. Tübingen 1983, S.177-185.

Menck, Peter: Der Gegenstand alltäglichen Unterrichts. In: Lenzen, Dieter (Hrsg.): Pädagogik und Alltag. Methoden und Ergebnisse alltagsorientierter Forschung in der Erziehungswissenschaft. Stuttgart 1980, S.113-124.

Menck, Peter: Unterrichtliches Handeln. Überlegungen zu einer Analyse. In: Benner, Dietrich (Hrsg.): Aspekte und Probleme einer pädagogischen Handlungswissenschaft. Kastellaun 1977, S.223 - 234.

Menck, Peter: Unterrichtsanalyse und didaktische Konstruktion. Studien zu einer Theorie des Lehrplans und des Unterrichts. Frankfurt am Main 1975.

Menck, Peter: Allgemeine Didaktik – Fachdidaktik. Unveröffentlichtes Manuskript. Siegen, ohne Jahr.

Meschkowski, Herbert: Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik. Mannheim 1976.

Meyer, Hilbert: Leitfaden zur Unterrichtsvorbereitung. Frankfurt a.M. 1989[9].

Mollenhauer, Klaus: Theorien zum Erziehungsprozeß. München 1972.

Münzinger, Wolfgang: Moderne Mathematik, Gesellschaft und Unterricht. Zur soziologischen Begründung der modernen Mathematik in der Schule. Weinheim, Basel 1971.

Niegemann, Helmut M.: Lehrinhaltsbezogene Unterrichtsanalyse. Zur Operationalisierung einiger hypothetisch bedeutsamer Variablen in Lehr-Lern-Prozessen. In: Bauersfeld, H./ Heymann H.W./ Lorenz J. (Hrsg.): Forschung in der Mathematikdidaktik. Köln 1981.

OECD: Synopsis für moderne Schulmathematik. Frankfurt am Main 1974[2].

Otte, Michael (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin, Heidelberg, New York 1974.

Padberg: Didaktik der Bruchrechnung. Freiburg 1978.

Pereira, Peter/ Keitel, Christine: Nachdenken über den Inhalt von Mathematikunterricht. In: Hopmann, Stefan/ Riquarts, Kurt (Hrsg.): Didaktik und, oder Curriculum. Grundprobleme einer international vergleichenden Didaktik. Zeitschrift für Pädagogik. Beiheft, 33. Weinheim 1995.

Popper, Karl R. / Eccles, John C.: Das Ich und sein Gehirn. München 1982[2].

Ratzki, Anne: BIJU und die Gesamtschule. In: Pädagogik, Heft 6, 1998.

Rahmenrichtlinien für die Orientierungsstufe. Mathematik. Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium. 1978.

Richtlinien und Lehrpläne für das Gymnasium – Sekundarstufe I – in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Herausgeber: Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen. Frechen 1993.

Rumpf, Horst: Belebungsversuche. Ausgrabungen gegen die Verödung der Lernkultur. München 1987.

Rumpf, Horst: Inoffizielle Weltversionen - Über die subjektive Bedeutung von Lehrinhalten. In: Zeitschrift für Pädagogik 1979, 209-230.

Schümer, Gundel: Mathematikunterricht in Japan. Ein Überblick über den Unterricht in öffentlichen Grund- und Mittelschulen und privaten Ergänzungsschulen. In: Unterrichtswissenschaft. Zeitschrift für Lernforschung. 26. Jg, Heft 3, 1998.

Schütz, Alfred: Das Problem der Relevanz. Frankfurt am Main 1971.

Schupp, Hans: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. In: MU 6, 1988, S.5 - 16.

Stachowiak, Herbert: Allgemeine Modelltheorie. Wien 1973.

Terhart, Ewald: Unterrichtsforschung: Einflüsse, Entwicklungen, Probleme. In: Hopmann, Stefan/ Riquarts, Kurt (Hrsg.): Didaktik und, oder Curriculum. Grundprobleme einer international vergleichenden Didaktik. Zeitschrift für Pädagogik. Beiheft, 33. Weinheim 1995.

Tietze, Uwe-Peter: Eine Untersuchung zum Analogisieren und strukturellen Transfer. In: Bauersfeld, H./ Heymann H.W./ Lorenz J. (Hrsg.): Forschung in der Mathematikdidaktik. Köln 1981.

Treffers, Adrian: Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht 1987.

Voigt, Jörg: Die mikroethnographische Erkundung von Mathematikunterricht – Interpretative Methoden der Interaktionsanalyse. In: Maier, Hermann/ Voigt, Jörg: Interpretative Unterrichtsforschung. Heinrich Bauersfeld zum 65. Geburtstag. Köln 1991.

Voigt, Jörg: Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim, Basel 1984.

Von Neumann, John: Der Mathematiker. In: Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin, Heidelberg, New York 1974.

Vorläufige Handreichungen für die Orientierungsstufe. Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium. 1971.

Wexler, Philip: Struktur, Text und Subjekt: Eine kritische Soziologie des Schulwissens. In: Zeitschrift für Sozialisationsforschung und Erziehungssoziologie 1981, S.55-74.

Weniger, Erich: Didaktik als Bildungslehre. Teil 1: Theorie der Bildungsinhalte und des Lehrplans. Weinheim 1963[5].

Wierichs, Georg: Unterrichtsinhalte und ihre Analyse. Untersuchungen am Beispiel des schulischen Pädagogikunterrichts. Frankfurt am Main 1989.

Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979.

Verzeichnis der Abbildungen

Verzeichnis der Tabellen