Zusammenfassung

In den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde die α-Invariante verwendet, um sphärische Verschlingungsabbildungen zu studieren, d.h. stetige Abbildungen zweier Sphären S^p, S^q in den euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ mit disjunkten Bildern. Man beachte, dass Selbstdurchdringungen der einzelnen Komponenten durchaus erlaubt sind. Es stellte sich heraus, dass α in einem gewissen Dimensionsbereich ($2p + 2q \leq 3m - 5$) Verschlingungsabbildungen klassifiziert, d.h. bis auf Homotopie durch Verschlingungsabbildungen.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir verallgemeinerte Verschlingungsabbildungen, d.h. stetige Abbildungen zweier kompakter Mannigfaltigkeiten M^m und N^n mit disjunkten Bildern in eine Zielmannigfaltigkeit vom Typ $Q^q \times \mathbb{R}$. Die durch den zweiten Faktor gegebene affine Struktur macht es uns möglich, eine α verallgemeinernde Version α_w zu definieren, die zusätzlich eine Wichtung durch gewisse Doppelnebenklassen von $\pi_1(Q)$ für jede Zusammenhangskomponente der α repräsentierenden Schnittmannigfaltigkeit vornimmt. Wir weisen nach, dass α_w invariant ist bis auf basispunkterhaltende Verschlingungshomotopie.

Weiterhin zeigt sich, dass die Invariante α_w den basispunkterhaltenden Verschlingungshomotopietyp vollständig bestimmt, wenn $1 \leq m, n$ und $m + n = q$ gilt. Für andere Dimensionsbereiche können viele durch α_w unterscheidbare Verschlingungsabbildungen angegeben werden.

Beim Übergang zu basispunktfreier Verschlingungshomotopie, welche die natürlichere Relation bzgl. Verschlingungsabbildungen zu sein scheint, verändern sich die für die Wichtungen verwendeten Systeme von Doppelnebenklassen, so dass im Allgemeinen eine "Liftung" von α_w zu einer Invarianten bzgl. basispunktfreier Verschlingungshomotopie unmöglich ist. Allerdings treten diese Probleme nicht auf, wenn $\pi_1(M) = 1 = \pi_1(N)$ erfüllt (z.B. höherdimensionale Sphären oder geeignete Tori) oder $\pi_1(Q)$ abelsch ist. In beiden Fällen läßt sich eine Liftung $\widetilde{\alpha}_w$ definieren, die im Dimensionsbereich $m + n = q$ für $m, n \geq 1$ klassifizierend ist.

Abstract

In the eighties of the last century the generalized linking number α was used to study spherical link maps in the euclidean space $\mathbb{R}^m$, i.e. maps of two spheres S^p, S^q with disjoint images. It turned out that in a certain dimension range ($2p + 2q \leq 3m - 5$) α classifies link maps up to link homotopy, i.e. homotopy through link maps.

In the present thesis we investigate generalized link maps, i.e. continuous maps of two compact manifolds M^m and N^n, resp., with disjoint images into a manifold of type $Q \times \mathbb{R}$. Because of the affine structure given by the second factor we are able to construct a refinement α_w of α. The refinement is based on a weighting of each path component of the intersection manifold representing α by double cosets of $\pi_1(Q)$. We prove that α_w is invariant up to base point preserving link homotopy.

Furthermore we can show that in the dimension range where $1 \leq m, n$ and $m + n = q$ holds our invariant determines the link homotopy type completely. For other dimension settings we construct many examples with different link homotopy type.

Consider now the relation of base point free link homotopy, which seems to be more natural for link maps. We are faced with the problem that a (free) link homotopy changes the target group of α_w. Thus a "lifting" of α_w to an invariant concerning base point free link homotopy fails in general. But there are no problems if $\pi_1(M) = 1 = \pi_1(N)$ (i.e. for higher dimensional spheres or appropriate tori) or abelian fundamental group of Q. In both cases we can define a lifting $\widetilde{\alpha}_w$, which classifies in the dimension range where $1 \leq m, n$ and $m + n = q$ holds.