

**Elementarisierte Zugänge zur Physik der regenerativen Energie
Herleitungen, Simulationen und Versuche unter besonderer
Berücksichtigung der Lehrbedingungen in Vietnam**

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Pädagogik

vorgelegt von
M. Ed. Chat Tran

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2015

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Wieland Müller

Prof. Dr. Oliver Schwarz

Tag der mündlichen Prüfung: 25.11.2015

Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der fachdidaktischen Reduktion physikalischer Prozesse, die im Zusammenhang mit den natürlichen Quellen regenerativer Energien stehen. Sie verfolgt neben der Klarlegung dieser Prozesse für den Schulunterricht auch das Ziel, die theoretischen Potentiale der meisten regenerativen Energiequellen zu verdeutlichen und physikalisch-technische Varianten der Gewinnung regenerativer Energie aufzuzeigen. Die vorgeschlagenen Modelle, Berechnungen und Simulationen wurden in erster Linie für das vietnamesische Schulsystem entwickelt.

Die Dissertationsschrift beinhaltet vereinfachte Herleitungen, die gleichzeitig durch parallele Entwicklung von neuen Versuchen und zahlreichen neuartigen digitalen Simulationen so zu einem Gesamtlehrkonzept verknüpft wurden, dass berechtigte Hoffnungen bestehen, dass durch dieses Vorgehen auch das Interesse der Lernenden angeregt werden kann. Von zentraler Bedeutung dabei ist, dass die Schüler und Schülerinnen in jeder Phase des Lernprozesses selbst aktiv in die Versuchsaufbauten und Simulationen eingreifen, ja diese sogar selbständig erweitern können. Darüber hinaus ermöglichen die aufbereiteten Lerninhalte fächerverbindende Sichtweisen auf die Disziplinen Physik, Astronomie, Mathematik, Geographie, Informatik und Technik. Insgesamt werden durch die Dissertation vor allem anwendungsorientierte und realitätsnahe Zugänge zum Komplex der regenerativen Energie geschaffen.

Abstract

Elementarized Approach to Physics of Renewable Energy Derivations, Simulations and Experiments with special reference to the teaching conditions in Vietnam

The presented doctoral thesis deals with didactic reduction of physical processes related to natural resources of renewable energies. Besides defining these processes for school teaching the second aim is to show the theoretical potential of the majority of renewable energies and illustrate the physical-technical possibilities models to actually make use of these resources. The suggested models, calculations and simulations have been designed for the Vietnamese school system.

The doctoral thesis contains simplified derivations. These could by the means of parallel development of new experiments and various digital simulations be interrelated into a complete teaching concept, giving hope that the interest of learning people could be stimulated. Most important is that pupils might intervene at every point into experimental setups and simulations, even enlarge them by themselves. Furthermore the content of teaching can possibly be expanded to related disciplines such as physics, astronomy, mathematics, geography, informatics and technics. Overall the dissertation gives an application orientated and realistic approach to renewable energy.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0: Einleitung	1
0.0 Überblick	1
0.1 Zielsetzung	2
0.2 Aufbau	3
0.3 Legitimation	5
Kapitel 1: Die theoretische eingestrahlte Sonnenenergie, ihre globale Verteilung und die Sonnenscheindauer an einem geografischen Ort	7
1.0 Einleitung	7
1.0.1 Zielsetzung des Kapitels	7
1.0.2 Legitimation des Themas	7
1.0.3 Aufbau und Voraussetzungen	8
1.1 Berechnungen mit Hilfe der elementaren Geometrie	9
1.1.0 Vorüberlegungen	9
1.1.1 Berechnung der Sonnenstunden für den 21./22.12.	10
1.1.1.1 Berechnungen für die Positionen zwischen den Breitengraden $-66,5^\circ$ und $66,5^\circ$	10
1.1.1.2 Berechnungen für die Pole für den 22.12.	13
1.1.2 Berechnung der Sonnenstunden für ein beliebiges Datum	14
1.1.2.1 Berechnung für Orte zwischen den Breiten $-66,5^\circ$ und $66,5^\circ$	14
1.1.2.2 Allgemeine Berechnung für die polnahen Gebiete	16
1.1.2.3 Zusammenfassung zur Berechnung der Sonnenstunden	19
1.1.3. Berechnung der eingestrahltten Sonnenenergie	20
1.1.4 Anwendungen der vorgestellten Ergebnisse	25
1.2 Berechnung mit Hilfe der analytischen Geometrie	28
1.2.1 Bestimmung der wichtigen Parameter	28
1.2.1.1 Der Sonnenwinkel α	28
1.2.1.2 Bestimmung von \vec{S}_n in einem festen Koordinatensystem auf die Erde	29
1.2.1.2.1 Erstes Verfahren: Projektion von \vec{S}_n auf die Koordinatenachsen	29
1.2.1.2.2 Zweites Verfahren: Koordinatentransformation von \vec{S}_n	33
1.2.1.3 Der Zenitwinkel θ	38
1.2.2 Berechnung der Sonnenstunden	39
1.2.3 Berechnung der täglich eingestrahltten Sonnenenergie	42
1.3 Sonnenstunden und eingestrahlte Sonnenenergie auf die beliebige Dachschräge	44
1.3.1 Verfahren 1	45
1.3.1.1 Betrachtungen für den Fall, dass $a=b=0$	46
1.3.1.2 Betrachtungen für den Fall, dass a oder b von 0 verschieden sind	46
1.3.1.2.1 Herleitung der Formeln zur Sonnenscheindauer auf dem Dach	46
1.3.1.2.2 Herleitung der Formeln für die eingestrahlte Sonnenenergie	48
1.3.2 Verfahren 2	49
1.3.2.1 Herleitung der Formeln zur Bestimmung der notwendigen Parameter	49
1.3.2.1.1 Der Breitengrad φ' der äquivalenten Fläche	49
1.3.2.1.2 Der Längengrad λ' der äquivalenten Fläche	51
1.3.2.2 Herleitung einer Formel zur Bestimmung der Sonnenstunden auf dem Dach	55
1.3.2.3 Herleitung der Formeln für die eingestrahlte Sonnenenergie auf dem Dach	57
1.3.3 Anwendungen der hergeleiteten Formeln	57
1.3.3.1 Direkte Berechnung	57
1.3.3.2 Berechnung durch Programmierung	61
1.3.3.2.1 Die mit Excel erstellten Ergebnisse	61

1.3.3.2.2. Berechnungen mit Matlab	64
1.3.3.2.2.1. Die Ergebnisse für den 14.8. in Siegen	65
1.3.3.2.2.2 Die Ergebnisse für die jährlichen Sonnenstunden und die jährlich eingestrahlte Sonnenenergie in Siegen	67
1.3.3.2.2.3 Die Ergebnisse für die jährlichen Sonnenstunden und die jährlich eingestrahlte Sonnenenergie an beliebigen Orten	69
1.4 Abweichungen der vereinfachten Verfahren vor dem Hintergrund exakterer Überlegungen	72
1.4.1 Die genaue Umlaufperiode der Erde um die Sonne	72
1.4.2 Die genaueren Bewegungsgleichungen des Umlaufs der Erde um die Sonne	77
1.4.3 Genauere Berechnung der Sonnenstunden und der eingestrahltten Sonnenenergie	80
1.4.3.1 Die Abweichung zum vereinfachten Verfahren in der Winkelgeschwindigkeit	80
1.4.3.2 Die Abweichung zwischem vereinfachten Verfahren und exakterer Rechnung für die Bestrahlungsleistung	82
1.4.3.3 Vergleich der Ergebnisse zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren	83
1.5 Langfristige Auswirkungen und Gültigkeitsgrenzen des vereinfachten Verfahrens	87
1.5.1 Auswirkungen der Präzession	87
1.5.2 Auswirkungen der Änderung des Neigungswinkels der Erdachse zur Erdbahnebene (Schiefe der Ekliptik)	91
1.5.3 Auswirkungen der Änderung der Exzentrizität e der Erdbahn	94
1.5.4 Gültigkeitsbereich der vereinfachten Verfahren	98
1.5.4.1 Vorläufige Abschätzung der Einflüsse auf die Erdtemperatur	98
1.5.4.2 Gültigkeitsbereich	100
Kapitel 2: Umwandlung der eingestrahltten Sonnenenergie in regenerative Energie	101
2.0 Einleitung	101
2.0.1 Zielsetzung des Kapitels	101
2.0.2 Legitimation des Themas	101
2.0.3 Aufbau und Voraussetzungen	103
2.1 Abschätzungen der Temperaturen von Planeten im Sonnensystem	104
2.1.0 Einführung	104
2.1.1 Formeln zur Abschätzung der Temperatur von Planeten	105
2.1.2 Die Verteilung der Erdtemperatur	108
2.1.2.1 Die Verteilung der täglichen mittleren Erdtemperatur	108
2.1.2.2 Verteilung der jährlichen mittleren Erdtemperatur	110
2.2 Die Albedo der Erde	112
2.2.1 Der Weg der elektromagnetischen Strahlung durch die Erdatmosphäre	113
2.2.1.1 Berechnung des Lichtwegs	113
2.2.1.2 Berechnung des minimalen Lichtwegs H_0	114
2.2.1.3 Der effektive Lichtweg in einer senkrechten Luftsäule	116
2.2.2 Absorption und Streuung der Sonnenstrahlungen in der Luft	117
2.2.3 Wolken	120
2.2.3.1 Die Bildung der Wolken	120
2.2.3.2 Verteilung der Wolken	121
2.2.3.3 Transmission und Reflektion von solarer Strahlung bei Wolken	123
2.2.3.3.1 Die Strahlungsintensität der Transmission	123
2.2.3.3.2 Die Intensität der rückgestreuten Strahlung	124
2.2.4. Die Verteilung der Albedo der Erdoberfläche	127
2.2.5 Ermittlung der allgemeinen Erdalbedo	130
2.2.5.1 Solare Bestrahlungsstärke	130
2.2.5.2 Abstrahlungsstärke der solaren Rückstrahlung	131
2.2.5.2.1 Rückstrahlung aus den Wolken	132

2.2.5.2.2 Rückstrahlung von der Erdoberfläche	135
2.2.5.2.3 Rückstrahlung lediglich aus Luft	135
2.2.5.3 Berechnung und Simulation der allgemeinen Erdalbedo	136
2.3 Wellenlängenverteilung der Strahlungsleistung	137
2.3.1 Wellenlängenverteilung der an der Erdoberfläche umgesetzten Strahlung	137
2.3.2 Die Verteilung der Strahlungsleistung an der Erdoberfläche	141
2.4 Der Treibhauseffekt der Erdatmosphäre	143
2.4.1 Vereinfachte Betrachtung	143
2.4.1.1 Qualitative Sichtweise	143
2.4.1.2 Quantitative Betrachtungsweise	146
2.4.2 Vertiefte Betrachtung	148
2.4.2.1 Erweiterte Betrachtungen zur Wechselwirkung der Sonnenstrahlung mit der Atmosphäre und der Erdoberfläche	148
2.4.2.2 Die Strahlung bei Vernachlässigung der langwelligen Wechselwirkung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre	153
2.4.2.3 Die Wechselwirkung der langwelligen Strahlung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre	155
2.4.2.4 Die Oberflächentemperatur für eine statische Atmosphäre	155
2.5 Verteilung der Erdoberflächentemperatur	156
2.5.1 Betrachtung lediglich mit vertikalem Wärmeausgleich	157
2.5.2 Betrachtung mit Wärmespeicherung	159
2.5.3 Betrachtung mit horizontaler Wärmeregulung	162
2.6 Abschätzungen der gewonnenen Energie aus regenerativen Energiequellen	165
2.6.1 Photovoltaik	165
2.6.2 Solarthermie	166
2.6.3 Wasserkraft	168
2.6.4 Energie aus Wind, Meereswellen und Meeresströmungen	169
2.6.5 Biomasse	172
2.6.6 Der Einfluss der regenerativen Energien auf das Klima	172
Kapitel 3: Entwicklung von neuen Experimenten für das Thema: regenerative Energie	174
3.0 Einleitung	174
3.0.1 Zielsetzung und Aufbau des Kapitels	174
3.0.2 Legitimation des Kapitels	174
3.1 Ein Demonstrationsversuch zur quantitativen Bestimmung der Sonnenscheindauer und der eingestrahltten Sonnenenergie	177
3.1.1 Sonnenscheindauer auf dem Erdboden	177
3.1.1.0 Einleitung	177
3.1.1.1 Darstellung des Verlaufs der Beleuchtungsverhältnisse auf der Erde	178
3.1.1.2 Die theoretische Berechnung der Sonnenscheindauer	180
3.1.1.3 Messungen der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden	181
3.1.1.4 Die Schwankung der Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Ort und Datum	183
3.1.1.5 Darstellung des Tagbogens	184
3.1.2 Sonnenscheindauer auf der beliebigen Dachschräge	185
3.1.2.0 Einleitung	185
3.1.2.1 Die Theorie zur Berechnung der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge	186
3.1.2.2 Versuchsaufbau	187
3.1.2.3 Messungen der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge	188
3.1.2.4 Veranschaulichung der örtlichen Eigenschaft der Dachschräge	189
3.1.2.5 Einschränkung und Diskussion des Modells	190
3.1.3 Bestimmung der eingestrahltten Sonnenenergie auf dem Erdboden und auf der Dachschräge	190

3.1.3.0 Einleitung	190
3.1.3.1 Die theoretische Berechnung der eingestrahlten Sonnenenergie	191
3.1.3.2 Qualitative Ergebnisse	192
3.1.3.3 Quantitative Ergebnisse	194
3.1.3.3.1 Messung mittels Fotowiderstand	194
3.1.3.3.2 Messung mittels Solarzelle	196
3.1.3.3.3 Messung mittels Kamera	199
3.2 Automatische Nachführung für Solarzellen: Modellexperimente und Simulationen	201
3.2.1. Problemstellung	201
3.2.2 Die Nachführung im Detail	203
3.2.2.1 Das Funktionsprinzip der Nachführung	204
3.2.2.2 Das Funktionsprinzip der Schaltung	205
3.2.3 Die Realisierung der Nachführung im Schülerversuch	205
3.3 Modellversuch zur Funktionsweise eines Pumpspeicherkraftwerks	207
3.3.0 Einleitung	207
3.3.1. Versuchsaufbau	207
3.3.2 Versuchsdurchführung und Ergebnisse	209
3.3.2.1 Probleme im Stromnetz ohne den Einsatz von Pumpspeicherkraftwerken	209
3.3.2.2 Die Rolle des Pumpspeicherkraftwerks	209
3.3.2.3 Messung des Wirkungsgrades eines Pumpspeicherkraftwerks im Modellversuch	210
3.4 Modellversuch für eine Windkraftanlage	212
3.4.1 Nachführung zur Windrichtung	212
3.4.2 Einkopplung des Stroms aus der Windkraftanlage ins Stromnetz	213
3.4.2.0 Einleitung	213
3.4.2.1 Versuchsaufbau	213
3.4.2.2 Versuchsdurchführung und Ergebnisse	215
Kapitel 4: Zusammenfassung	217
4.1 Zentrale Beiträge der Dissertation	217
4.2 Empfohlene Anwendungsbereiche	219
Abbildungsverzeichnis	220
Diagrammverzeichnis	223
Tabellenverzeichnis	227
Literaturverzeichnis	228
Anhang	235

Kapitel 0: Einleitung

0.0 Überblick

In den Medien erscheinen immer wieder Artikel über die Energieproblematik. Die Energiebereitstellung ist ein dringliches und globales Problem, letztlich ist sie auch die tiefere Ursache für einige Kriege, die gegenwärtig auf der Welt zu beklagen sind. Der Kern dieses Problems besteht darin, dass es zukünftig bei der Erschöpfung fossiler Energieträger einen Mangel an Energie geben wird. Wir konsumieren langfristig viel zu viel fossile Energie, die bekanntlich nur sehr langsam in Form von Kohle, Gas und Öl im Boden deponiert wird. Nach den Berichten der International Energy Agency [IEA 2014] stammt die gewonnene Energie für den allgemeinen menschlichen Energiebedarf hauptsächlich (über 80%) aus fossilen Energiequellen. Die Energiegewinnung aus regenerativer Energie deckt gegenwärtig nur unter 10% den weltweiten Energiebedarf, wobei im globalen Mittel dabei ca. 60% der gewonnenen regenerativen Energie aus Biomasse stammt. Wir verbrauchen die fossile Energie zu schnell, die letztlich ja aus Biomasse in abertausenden Jahren der Vergangenheit angehäuften wurde, und wir behindern durch diesen „bequemen“ Weg der Energiebereitstellung den Einsatz alternativer Energiequellen. Nach der Berechnung von Shafiee werden ab 2112 unsere fossilen Reserven leer sein [Shafiee 2009]. Schon zwischen ca. 2025 bis 2075 wird es keine Ölreserven mehr geben [Senior 2015].

Angesichts dieser Energieprobleme werden wir langfristig auf regenerative Energiequellen setzen müssen¹. Ob man auf sie langfristig bauen kann, kann sich nur erweisen, indem man ihr Potential sorgfältig abschätzt. Unter physikalischen Gesichtspunkten ist die Energie aus Solaranlagen, Windkraftanlagen, Wasserkraftwerken, Wellenkraftwerken, Meeresströmungen, Biomasse usw. eigentlich identisch mit der aus der Sonnenstrahlung umgewandelten Energie ([Blüthgen 1980], S. 73). Demzufolge kann man die Potentiale jeder individuellen regenerativen Quelle berechnen, indem man sie theoretisch über Wirkungsgrade auf die Solarenergie zurückführt. Selbst die fossilen Energiequellen sind in langer Vorzeit (viele Jahrhundertaussende) eigentlich aus toten Lebewesen (Pflanzen und Tieren), also aus Biomasse entstanden. In der Tat könnte man die fossilen Energieträger als regenerativ bezeichnen, wenn die Menschheit sie nur in dem Maße konsumieren würde, wie sie durch bio-geologische Prozesse auch heute noch immer wieder neu entstehen. Aber davon sind wir derzeit sehr, sehr weit entfernt... Die Energiezufuhr für die Entwicklung allen Lebens stammt natürlich letztlich aus der Sonnenstrahlung, also aus regenerativer Energie ([Boekehr 1997], S. 139). Somit ist die fossile Energie tatsächlich die in langer Vorzeit gespeicherte regenerative Energie. Außerdem hilft die Nutzung der regenerativen Energie die Belastung der Erdatmosphäre wegen Gasemissionen (hauptsächlich CO₂) aus der Nutzung der fossilen Energie zu vermindern ([Quaschnig 2013], S.34).

Wegen der Popularität und Dringlichkeit stößt das Thema „regenerative Energie“ bei den Schülern und Schülerinnen (SuS) auf großes Interesse und dieses Thema soll relevant in der Schule unterrichtet werden, weil die jetzigen SuS ja gerade diejenige Generation repräsentieren, die in der Zukunft das globale Energie-Problem lösen müssen [Jacovides 2012]. Bei der Behandlung dieses Themas sollen Lehrende auch die zentralen Fragen mit den SuS erörtern: Wie viel vom Bedarf können die einzelnen regenerativen Energiequellen decken? Kann man die heutige maximale Entstehungsrate fossiler Energie abschätzen, um zu zeigen, welchen Anteil der Erdoberfläche man eigentlich für Biomassenproduktion

¹ [Bojic 2004], [Broman 1994], [Garg 1996], [Jennings 2009], [Müller 2006] usw.

allein reservieren müsste um den Gleichgewichtszustand einer Karbonwirtschaft zu erhalten? Usw. Diese Abschätzungen werden bisher von einschlägigen Autoren mit modernen professionellen Berechnungs- und Messtechniken ausgeführt [Peixóto 1984]. Der Vorgang der Energieumwandlung von eingestrahelter Sonnenenergie in regenerative Energiequellen ist natürlich kompliziert, deshalb sind solche Techniken nicht einfach und sie eignen sich nicht für das schulische Niveau. Daher benötigt man aus physikdidaktischer Sicht die Entwicklung von elementaren Modellberechnungen und Versuchen, die diese Modellberechnungen für Lernende überprüfbar machen, damit SuS die Abschätzungen des Potentials jeder regenerativen Energiequelle verstehen und anwenden können.

Bisher hat die Menschheit schon viele technische Errungenschaften zur Erschließung regenerativer Energiequellen erreicht. Der heutige Wirkungsgrad dieser Energiegewinnungsformen ist bereits so beachtlich hoch, dass man überall speziell adaptierte regenerative Energiekraftwerke errichten kann. Diese technischen Errungenschaften sind stets sehr eng an praktische Folgerungen aus theoretischen physikalischen Kenntnissen geknüpft. Deswegen wird die Vermittlung dieser physikalischen Vorkenntnisse in der Schule bedeutungsvoll und darüber hinaus bergen die infrage stehenden Inhalte große Potentiale zur Entwicklung einschlägiger Interessen von Lernenden ([Schmidt 1986], S. 26). Allerdings können die relevanten physikalisch-technischen Inhalte zumeist nicht einfach durch entdeckendes Lernen an den Originalgegenständen wie Turbinen, Generatoren oder Solarpanelen vermittelt werden, da diese im Industrie-Design vorliegen und deshalb in irgendeiner Weise „verpackt“ sind. Dabei erscheinen diese Produkte Lernenden üblicherweise wie eine „black box“ - eine schwarze Kiste mit mysteriösem Inhalt. Deshalb sind ihre Funktionsweisen nicht einfach zu erklären. Außerdem können die Originalobjekte meist nicht direkt in der Schule zum Einsatz gelangen, weil sie gemeinhin viel zu groß sind und deshalb auch an einer Stelle fest verbaut werden müssen (z.B. echte Windkraftanlagen). Deswegen ist die Entwicklung von Versuchsmodellen, die alle wesentlichen Eigenschaften und Prozesse der regenerativen Energiegewinnung simulieren können, erforderlich.

Vietnam ist ein Entwicklungsland. Nach den Daten aus „The World Bank“ [WB 2011] ist die bislang von Vietnam noch exportierte Energie von Jahr zu Jahr schrumpfend. Anhand dieser Daten und unter Berücksichtigung des dramatischen wirtschaftlichen Wachstums des Landes kann man klar vorhersagen, dass Vietnam in naher Zukunft entweder einen Energiemangel erleiden wird oder zu einem energieimportierenden Land werden muss. In vielen vietnamesischen Regionen herrscht schon jetzt ein Mangel an Stromzufuhr, also sind die Zeichen der Energieproblematik auch in Vietnam unverkennbar. Vietnam darf im Kontext der Globalisierung dieses energetische Problem nicht ignorieren. Deshalb muss sich Vietnam zunehmend auch auf die Nutzung regenerativer Energiequellen konzentrieren. Die vietnamesische junge Generation muss deshalb unbedingt Kenntnisse über die regenerative Energie erlangen. Jedoch werden diese Kenntnisse derzeit noch nicht relevant in der aktuellen vietnamesischen Schule vermittelt – hier ist Abhilfe zu schaffen, offenbar eine grundlegende Zielstellung und Aufgabe für die Physikdidaktik [Othman 1999].

0.1 Zielsetzung

Diese Arbeit setzt sich drei hauptsächliche Ziele, die eng miteinander verknüpft sind:

Das erste Ziel dieser Arbeit besteht in der Entwicklung von neuen, elementarisierten, möglichst allgemeinverständlichen Berechnungen zur regenerativen Energie für die vietnamesische Schule. Die dabei genutzten Abschätzungen verlangen zwar fächerübergreifende Kenntnisse, die Herleitung der Berechnungen und Folgerungen soll aber so Schritt für Schritt präzise und in vereinfachter Weise dargestellt werden, dass die SuS sie mit den Mitteln der Schulmathematik verstehen können.

Das zweite Ziel ist die Entwicklung neuer digitaler Simulationen. Anhand dieser neuen Simulationen sollen die oben erwähnten theoretischen Berechnungen leichter veranschaulicht werden können. Dabei werden die abstrakten Lerngegenstände durch lebendige Animation oder durch Bilder vorgestellt. Die komplexen Herleitungen bzw. Folgerungen sollen durch Computerprogramme oder intuitiv erfassbare Diagramme veranschaulicht werden. Dadurch kann die Vermittlung der oben erwähnten Berechnungen in der Schule unterstützt werden. Außerdem erfordern einige Berechnungen inhaltlich ohnehin die Entwicklung der entsprechenden Simulationen - z.B. wenn mathematische Lösungen nicht geschlossen darstellbar sind. Ohne digitale Simulationen könnte man deshalb mit Schulmathematik allein nicht zum Ziel gelangen. Zusätzlich zur Unterstützung des Verständnisses von Berechnungen sollen diese Simulationen auch das leichte Nachvollziehen des Funktionsprinzips der neu entwickelten Schulversuche (siehe dritte Zielstellung) ermöglichen.

Das dritte Ziel der vorliegenden Schrift besteht in der Entwicklung neuer Schulversuche zur Nutzung der regenerativen Energie. Anhand dieser neuen Schulversuche sollen nicht nur die wesentlichen Phänomene veranschaulicht werden, sondern auch die Folgerungen aus den elementarisierten Berechnungen geprüft werden. Darüber hinaus unterstützen die neuen Schulversuche praktisches Wissen im Hinblick auf die Anwendung von physikalischen Kenntnissen in der Technik – eine wichtige Aufgabenstellung gerade für die vietnamesische Schule. Die Experimente sollen also auch helfen, einen Alltagsbezug herzustellen, mit dem Ziel, das Interesse der Lernenden zu wecken.

Diese Ziele der Arbeit gelten für die vietnamesische schulische Ausbildung. In Vietnam werden die vorauszusetzenden Kenntnisse über Astronomie und regenerative Energie in der Schule noch nicht so vermittelt wie in Deutschland. Die Beiträge dieser Arbeit können jedoch zum Teil auch in deutschen Schulen angewendet werden.

0.2 Aufbau

Der zentrale Inhalt der vorliegenden Arbeit wird in den Kapiteln 1, 2 und 3 dargelegt.

Im Kapitel 1 werden die Sonnenscheindauer bzw. die eingestrahlte Sonnenenergie unter Vernachlässigung der Erdatmosphäre dargestellt. Die Betrachtungen werden dazu in zwei Fälle unterteilt. Zuerst wird die Bewegung der Erde vereinfachend unter der Annahme untersucht, dass sie sich gleichmäßig um ihre Achse und um Sonne auf einer Kreisbahn dreht. Durch diese Elementarisierung kann man die Formeln für die Berechnungen der Sonnenscheindauer bzw. der eingestrahlten Sonnenenergie an beliebigen Orten und für beliebige Zeitpunkte mittels der Anwendung elementarer Geometrie vergleichsweise leicht erhalten. Damit kann die Verteilung der genannten Größen in Abhängigkeit vom geografischen Breitengrad und der Zeit auch durch vergleichsweise elementare Computerberechnung bestimmt werden. Danach werden diese Berechnungen genauer betrachtet. Dies

markiert im Lernprozess die Stelle, an der sich der Übergang hin zu tieferen physikalischen Kenntnissen vollzieht, da nunmehr die elliptische Erdbewegung, die Präzession der Erdachse und die Änderung der Neigungswinkel der Erdachse sowie die Änderung der Exzentrizität der Erdbahn beachtet werden müssen.

Das Kapitel 2 besteht aus zwei Inhalten. Zunächst werden die Verteilung der eingestrahnten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom geografischen Breitengrad und Zeit noch tiefgehender untersucht. Dabei werden auch die Erdatmosphäre in Hinsicht auf die Einflüsse der Wolken, Treibhauseffekt usw. betrachtet. Nur durch ein solches Vorgehen kann man Einstrahlungen und Abstrahlungen über alle Wellenlängenbereiche (einschließlich sichtbar Wellenlängen und thermischer Wellenlängen, also infraroter Strahlung) hinweg annähernd korrekt berechnen, denn der Wechselwirkung zwischen der Sonnenstrahlung und der Erdatmosphäre entstammen entscheidende physikalische Effekte, die nicht vernachlässigbar sind. Da alle natürlichen Wetterphänomene letztlich auf der Energiezufuhr durch die Sonnenstrahlung beruhen, werden die meisten regenerativen Energieformen, die man durch Solarzellen, Windkraft, Wellenkraft, Wasserkraft usw. gewinnen kann, letztlich immer aus der eingestrahnten Sonnenenergie umgewandelt. Aufgrund dieser Einsicht und der Ergebnisse aus den Berechnungen im Kapitel 2 kann man eine Abschätzung der Leistungspotentiale der meisten regenerativen Energiequellen vornehmen. Hier werden viele vereinfachte Modelle vorgestellt, die genau dies ermöglichen und die wahlweise mit unterschiedlichen vereinfachenden Annahmen ausgestattet sind. Damit wird die Vermittlung dieser theoretischen Inhalte auch in der Schule akzeptabel.

Das Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Vorstellung von vier neu entwickelten Schulversuchen, die alle das übergeordnete Thema der Gewinnung erneuerbarer Energie zum Inhalt haben. Der erste Versuch dient der Veranschaulichung und Überprüfung des theoretischen Inhalts im Kapitel 1. Die anderen drei Versuche sind Modellversuche zur Physik und ihrer technischen Anwendungen jeweils für die Bereiche Solarenergie, Wasserkraft und Windkraft.

Parallel zur Entwicklung der theoretischen Inhalte und Versuche wurden zahlreiche digitale Simulationen entwickelt und eingesetzt. In den Kapiteln 1 und 2 kommt es immer wieder zu iterativen mathematischen Berechnungen, die zwar im Prinzip elementar sind, die aber viele Male wiederholt werden müssen. Dies lässt sich im normalen Lehrbetrieb nur mit einem recht aufwändigen Zeiteinsatz realisieren, sodass man hier zweckmäßig eine Schleifenprogrammierung einsetzt. In solche Simulationen können Lernende die betreffenden Parameter selbst eintragen. Danach werden die gewünschten Ergebnisse (die Zahlenwerte oder ihre graphische Darstellung in Diagrammen) automatisch durch den Computer berechnet. Dadurch können die theoretischen Inhalte auch in der Schule vermittelt werden. Darüber hinaus werden bei der Entwicklung der Modellversuche im Kapitel 3 animierte Simulationen realisiert. Somit wird die komplizierte Funktionsweise der Modellversuche, insbesondere bei den Elektroschaltungen, anschaulich erläutert. Natürlich findet der Leser dieser Dissertationsschrift in der vorliegenden ausgedruckten Form nur die Screenshots der Simulationen. Die Simulationen sowohl in Form der fertigen Computerprogramme als auch in Form des Textcodes werden auf einer DVD im Dissertationsanhang gegeben, der bereits hier ausdrücklich als gemeinfrei deklariert werden soll. Damit können die Lernenden nicht nur direkt die Simulationen (in der Form der fertigen Computerprogramme) anwenden, sondern können die Simulationen auch mittels des Textcodes modifizieren, bzw. sogar neuere Simulationen mit

gleichen Zielstellungen entwickeln. Zusätzlich zu den Simulationen finden sich auf der DVD Videos, die die Durchführung der Modellversuche im Kapitel 3 beinhalten.

0.3 Legitimation

Es wurde bereits nachdrücklich darauf verwiesen, dass die Vermittlung des Themas „Regenerative Energie“ in der vietnamesischen Schule dringend durchgeführt werden muss. Deswegen sind diese neu entwickelten Inhalte der Arbeit notwendig.

Zur Legitimation des ersten Ziels: Natürlich befassen sich derzeit auch verschiedene andere fachliche¹ und fachdidaktische² Autoren mit dem Thema „Regenerative Energie“. Dabei werden empirische Zusammenhänge im Lernprozess untersucht, Lernschemata oder Varianten des Vorgehens bei der Vermittlung (z.B. durch Stationenlernen und dergleichen) empfohlen, doch bleibt der Umstand oftmals dominierend, dass die fachlichen Zusammenhänge vergleichsweise kompliziert sind, sodass verschiedene Inhalte für Lernende nicht konkret genug entwickelt werden, sondern verkürzt oder gelegentlich infolge dieser Verkürzung auch falsch³ dargestellt werden. Auch daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Entwicklung elementarisierter Inhalte für das Thema „Regenerative Energie“ für die Schule voranzutreiben. Dabei müssen allerdings auch fachdidaktische Prinzipien berücksichtigt werden und nicht nur fachliche Korrektheit. Zu den Kriterien eines förderlichen Kompetenzerwerbs gehört auch die Beachtung der herausgehobenen Bedeutung der Vermittlung von Erkenntnisstrategien, Wegen zur Auffindung neuer Erkenntnisse im konkreten Fall und die Aneignung dazugehöriger experimenteller Fertigkeiten. Die SuS sollen sich also nicht nur die wissenschaftlichen Erkenntnisse aneignen, sondern auch die Wege verinnerlichen, auf denen diese gefunden wurden⁴.

Für das Thema „Regenerative Energie“ findet man viele didaktische Beiträge, die sich mit extrem vereinfachten Berechnungen für den schulischen Unterricht befassen haben. Diese theoretischen Beiträge stehen vielfach isoliert, sind z.B. ausschließlich dem Thema Solarenergie⁵ oder nur dem Bereich Windkraft⁶ oder Wasserkraft⁷ gewidmet usw. Es gibt wenige Beiträge⁸, die die Frage stellen, wie hoch die Potentiale der regenerativen Energie insgesamt sind. Dabei werden Abschätzungen unter der

¹ [Richter 2003], [Allan 2011], [Berrisford 2011], [Blüthgen 1980], [Boekehr 1997], [Chamberlain 1996], [Fasullo 2008], [Houghton 2002], [Hupfer 2006], [Iribarne 1980], [Jacoby 2011], [Jacoby 2015], [Kiehl 1997], [Kleidon 2012], [Kraus 2004], [Lacis 1973], [Linacre 1997], [Lorenz 1967], [Lorenz 2003], [MacKay 2009], [Monteith 2013], [Murphy 2009], [Niehus 2003], [Oort 1994], [Peixóto 1984], [Porter 2010], [Quaschnig 2013], [Ricchiazzi 1998], [Roedel 2011], [Salby 1996], [Stephens 2012], [Trenberth 2004], [Trenberth 2009], [Wallace 1997]

² [Arnold 2007], [Backhaus 2013], [Bakan 1995], [Batsch 1995a], [Batsch 1995b], [Bell 2009], [Berge 1993], [Bojic 2004], [Broman 1994], [Brockmüller 2009], [Chlund 2004], [Colicchia 2010], [Damm 2004], [Duit 1996], [Engel 2009], [Garg 1996], [Graßl 2004], [Heinzerling 2006], [Henning 1995], [Hepp 2001], [Hepp 2005], [Hoppenau 1995a], [Hoppenau 1995b], [Hoppenau 1995c], [Höttecke 2009], [Höttecke 2010], [Huhn 1995], [Jennings 2009], [Keil 2006], [Kostova 2004], [Kraus 2012], [Kuhn 2001], [Kuhn 2006], [Lange 2004], [Lotze 2005], [Muckenfuß 1997], [Muckenfuß 2004], [Müller 1996], [Müller 2004], [Müller 2007], [Müller 2009], [Müller, A. 2009], [Niebert 2009], [Nitsch 2011], [Othman 1999], [Roth 1997], [Schmitz 1997], [Schoch 1986], [Schwarz 2006], [Schwarz 2009], [Stadler 1998], [Stadler 2003], [Stadler 2007], [Timmerhaus 1995]

³ [Goubeau 1991], [Huhn 1994], [Krichenbauer 2010], [Morgenstern 1996], [O'Mara 2001], [Schulze 1991]

⁴ [Born 1984] S. 271, [Strnad 1984] S. 311

⁵ [Berge 2003], [Bauer 2013], [Dahncke 1993], [Dominguez 2014], [Döbele 2007], [Duran 2014], [Eck 2011], [Hauke 1991], [Hauke 2001], [Hepp 2001], [Nguyen 2006], [Pirrung 1987], [Kramer 2001], [Raturi 2010], [Rode 2007], [Starke 2001], [Smestad 1998], [Tran 2012], [Tran 2015], [Vollmer 2006], [Volkmer 2003], [Wellington 1996], [Wünsch 2001]

⁶ [Berge 2001], [Berge 2005], [Friege 2007], [Hilbert 2009], [Herlitz 1983], [Morgenstern 2005], [Priemer 2007], [Rincke 2005], [Wilke 2005]

⁷ [Raschke 2004]

⁸ [Huhn 1997], [Schlichting 1997], [Sperlich 1987]

Berücksichtigung, dass die eingestrahlte Sonnenenergie der Ursprung der einzelnen regenerativen Energiequellen ist, vorgenommen. Dennoch gehen diese Beiträge von zu vereinfachten Annahmen aus. Diese Annahmen ergeben unzulässig verkürzte Beschreibungen der physikalischen Vorgänge, allerdings dann auch leichte mathematische Herleitungen. Dies ist gut unter Berücksichtigung der pädagogischen Absichten, doch unzulässig, wenn man zuverlässige Abschätzungen anstrebt. Manche Ergebnisse aus diesen Abschätzungen haben sogar keine wissenschaftliche Bedeutung. Deshalb werden neue Elementarisierungen zum Thema „Regenerative Energie“ benötigt.

Zur Legitimation des zweiten und dritten Zieles: Das hier vorgelegte Konzept verknüpft die Elementarisierung theoretischer Inhalte mit neu entwickelten Schulversuchen und Simulationen und hebt darauf ab, dass beides - Theorie und Experimente (einschließlich von Simulationen) - parallel durchgeführt werden. Anhand dieser Schülermaterialien sollen Lernende in die Lage versetzt werden, die theoretischen Inhalte selbständig zu prüfen und zu veranschaulichen. Wegen der typischen Eigenschaften der physikalischen Schulversuche und der Simulationen (s. Zielsetzung oben und Abschnitt 3.0) werden die Interessen der Lernenden angeregt. Man muss zudem beachten, dass seit einigen Jahrzehnten die Anwendungen der Computertechnik in Naturwissenschaft und Technik immer bedeutungsvoller wurden, was einen unmittelbaren Ausdruck im Schulfach Informatik findet. Computersimulationen spielen im wissenschaftlichen und im schulischen Erkenntnisprozess eine wesentliche Rolle¹. Sie helfen die Lösungen komplexer Probleme schnell aufzufinden und lassen abstrakte Zusammenhänge begreifbar und anschaulich werden. Heute kann man nur sehr selten wissenschaftlich-technische Teilgebiete finden, die ohne Computersimulationen auskommen. Der moderne Unterricht muss diese Entwicklung angemessen abbilden und kann sich nicht von aktuellen Arbeitsmethoden der Forschung abkoppeln. Die Entwicklung der Computersimulationen in dieser Arbeit eröffnet Lernenden viele Gelegenheiten um Simulationstechniken nachzuvollziehen.

Außerdem werden digitale Simulationen und Schulversuche so rekonstruiert, dass die SuS sie nicht nur verstehen können, sondern diese auch selbständig aufbauen, wiederholen und erweitern können. Die infrage stehenden Lerninhalte sind fächerverbindend und integrierend im Hinblick auf Physik, Astronomie, Mathematik, Geographie, Informatik, sowie Technik. Wenn diese Fächer in der Schule vermittelt werden, dann vor allem so, dass die SuS die Inhalte selbständig umsetzen können, damit ihnen der Zugang zu fächerübergreifenden Anwendungen ermöglicht wird. Die übergreifenden Fachinhalte sind wichtig². In der tatsächlichen Forschung und im realen Leben steht man eben vor komplexen Problemen, die sich nur durch Anwendung verschiedener Disziplinen überwinden lassen.

Darüber hinaus ermöglichen die hier vorgestellten Beiträge die Entwicklung von Projekten. Die wichtigste Forderung des Projektunterrichts ist, dass das Resultat des Projekts meist ein echtes Produkt, also ein konkretes und vorzeigbares „Ergebnis“ sein muss ([Seifert 2007], S. 211). Die Beiträge dieser Arbeit, vor allem die Modellversuche, können dieser Forderung gut gerecht werden.

¹ [Bethge 1992], [DeVries 1995], [Gould 1995], [Heuer 1996], [Harreis 2000], [Hübel 2005], [Langensiepen 1990], [Kuhn 1987], [Reger 1990], [Treitz 2000], [Reusch 2000], [Schneider 1993]

² [Labudde 2003], [Günther 2012]

Kapitel 1: Die theoretische eingestrahlte Sonnenenergie, ihre globale Verteilung und die Sonnenscheindauer an einem geografischen Ort

1.0 Einleitung

1.0.1 Zielsetzung des Kapitels

In diesem Kapitel soll eine Näherungsrechnung zur eingestrahnten Sonnenenergie für beliebige Orte und in beliebige Zeitpunkte vorgeführt werden. Die Herleitung wird übersichtlich Schritt für Schritt erklärt und mit zahlreichen Grafiken und einfachen Simulationen untermauert, sodass sie sowohl für Lehrerinnen und Lehrer als auch für SuS verständlich ist und eigene Anwendungen gestattet. Neben formaler Ergebnisse werden im Kapitel 1. sowohl die Herleitung der Formeln als auch viele nützliche Konsequenzen aufgezeigt, die im Unterricht verwendet werden können. Zum Beispiel werden die Formeln, mit denen man die Sonnenscheindauer, den Zeitpunkt des Sonnenauf- und Sonnenuntergangs, die genaue Richtung der Sonneneinstrahlung berechnen kann, in aktive 3-D Grafiken, Diagramme und Simulationen überführt, die die Lehrer als Unterrichtsmaterialien nutzen können (Nachfolgend können lediglich Screenshots dieser Simulationen als Abbildungen dargestellt werden.).

Außerdem werden für die Herleitung der Formeln verschiedene mathematische Zugänge angewendet. Das eröffnet den Lehrern mehr Wahlmöglichkeiten, wenn sie ihren Unterricht vorbereiten. Die auf allgemeine Art gewonnenen Erkenntnisse finden verschiedene Anwendungsmöglichkeiten: Man kann mit ihnen zum Beispiel die Besonderheiten bei der Energieumwandlung an Solarzellen verdeutlichen, aber ebenso ist es möglich, einen Zugang zur aktuellen Klimadebatte zu finden.

1.0.2 Legitimation des Themas

Die Ursachen für die lokalen Unterschiede der Temperatur auf der Erdoberfläche liegen in der täglichen und jährlichen Änderung der Sonnenstunden und der eingestrahnten Sonnenenergie. Temperaturunterschiede in der Erdatmosphäre führen zu Konvektion und zu Wind. Dadurch entstehen Meeresströmungen, die wiederum die Temperaturverteilung auf der Erde beeinflussen. Darüber hinaus bewirkt die Sonnenenergie die Entstehung von Wasserdampf aus feuchten Regionen oder Gewässern, durch welchen Wolken und danach Regen und damit der Wasserkreislauf entsteht. Aus diese Wasserkreislauf transportiert latente Wärme zwischen den Breitengraden. Letztlich ist aber immer die eingestrahlte Sonnenenergie die ursprüngliche Energiequelle für alle natürlichen Wetterphänomene und für die meisten regenerativen Energiequellen [Trenberth 2004]. Die Energie, die durch Solarzellen, Windkraft, Wellenkraft, Wasserkraft und Biomasse usw. gewonnen wird, ist immer eine umgewandelte Form der eingestrahnten Sonnenenergie. Deshalb spielt die grundlegende wissenschaftliche Beschreibung der einstrahlenden Sonnenenergie eine zentrale Rolle für das Thema regenerative Energie. Da die Menschheit schon in wenigen Jahrzehnten mit dem Erschöpfen der fossilen Energierohstoffe konfrontiert ist, werden die regenerativen Energiesysteme zwangsläufig eine sehr große Bedeutung erlangen [Müller 2006]. Diese Kenntnisse müssen deshalb als Allgemeinwissen in der Schule unterrichtet werden. Außerdem sind die Berechnungsergebnisse dieses Kapitels die Grundlage für weitere Kapitel in dieser Arbeit.

Informationen zur Sonnenenergie stoßen bei Schülerinnen und Schülern auf Interesse. Der Grund dafür ist, dass die Behandlung dieses Themas nicht nur aus Herleitungen und Berechnungen theoretischer Formeln besteht, sondern dass hier auch ein Bezug zum täglichen Leben gegeben ist. Wenn SuS die

Kenntnisse über die eingestrahle Sonnenenergie verinnerlicht, können sie beispielsweise im Alltag schnell erklären, warum auf der Nordhalbkugel der Erde die Pflanzen auf der Südseite der Berge üppiger wachsen als auf der Nordseite und warum man in Deutschland die Richtung der Solarzellen nach Süden orientiert, diese aber in Argentinien nach Norden aufstellt. Außerdem können SuS angeben, wann die Sonne an einem beliebigen Beobachtungsort aufgeht oder untergeht und welchen Betrag die auf eine Solarzelle eingestrahle Sonnenenergie auf einem beliebig ausgerichteten Dach in Relation zur Sonnenscheindauer liefern würde.

In Vietnam sind die Grundlagen der Astronomie bisher noch nicht Gegenstand des Schulunterrichts. In vietnamesischen Geographie-Schulbüchern werden diese Aspekte lediglich gestreift. Dabei geht es um die Breitengradbedingten Unterschiede der Sonnenscheindauer und der Jahreszeiten. Als erster Erklärungsansatz wird dort die Änderung des Einfallswinkels der Sonnenstrahlen aufgrund der Erdrotation angeführt. Allgemein lassen die vietnamesischen Schulbücher neben diesen qualitativen Erläuterungen den quantitativen Zusammenhang zwischen eingestrahelter Sonnenenergie und der Position auf der Erde vermissen. Die Vermittlung grundlegender wissenschaftlicher Kenntnisse über die eingestrahle Sonnenenergie ist somit notwendig für vietnamesische Schüler.

Die Berechnung der eingestrahnten Sonnenenergie ist ein fächerübergreifendes Thema. Die Betrachtungen erfordern Kenntnisse über die geometrischen Eigenschaften der Sonnenstrahlen sowie die Bewegung der Erde um die Sonne, deswegen werden SuS die Kenntnisse der Fächer Physik und Astronomie benötigen. Die eingestrahle Sonnenenergie hängt von der beobachteten Zeit, der Richtung und der Position des betrachteten Ortes auf der Erdoberfläche ab, deswegen setzt die Berechnung die Kenntnisse der Fächer Geographie und Mathematik, speziell der analytischen Geometrie, voraus. Die Bestimmung der orts- und zeitabhängigen Sonnenscheindauer verknüpft folglich vier Fächer der gymnasialen Oberstufe. Solche fächerübergreifenden Betrachtungen schulen den wissenschaftlichen Umgang mit Problemen, da sowohl bei der Beschreibung von Alltagsphänomenen als auch bei Fragestellungen im Berufsleben immer mehrere Fächer ineinandergreifen ([Topfer 1970] S. 46).

1.0.3 Aufbau und Voraussetzungen

In den Abschnitten 1.1, 1.2 und 1.3 wird die elementarisierte Darstellung des Problems abgehandelt. Die übrigen Teile des Kapitels widmen sich der genaueren Berechnung, dabei wird der Gültigkeitsbereich der auf vereinfachten Verfahren beruhenden Berechnungen aufgezeigt.

Der erste Teil (Abschnitt 1.1) präsentiert zuerst vereinfachte Verfahren zur Herleitung der Formeln, um die Sonnenstunden und die eingestrahle Sonnenenergie auf die Erdoberfläche zu berechnen. Danach wird die Anwendung der gewonnenen Formeln dargestellt. Die Herleitung der gewünschten Formeln setzt nachfolgende Kenntnisse voraus:

Aus der Physik benötigt man die geradlinige Ausbreitung des Lichtes (ab Klasse 5) und die Beschreibung der gleichmäßigen Kreisbewegung (ab Klasse 10). Als grundlegende Kenntnisse der Astronomie werden die Eigenschaften der Bewegung der Erde um ihre Achse und um die Sonne benötigt. Die Geographie geht mit den Begriffen Jahreszeit, Breitengrad, Pole, Äquator (ab Klasse 7) in die Thematik ein. Aus der Mathematik wird die elementare Geometrie (ab Klasse 9) vorausgesetzt. Des Weiteren werden für die Herleitung noch die Kenntnisse der elementaren Integralrechnung (ab Klasse 11) benötigt. Die Umsetzung der Formeln mit dem Computer setzt elementare Kenntnisse der Informatik voraus, speziell den Umgang mit den Programmen Microsoft Excel oder Turbo Pascal.

Der zweite Teil (Abschnitt 1.2) präsentiert zwei Verfahren zur Herleitung der Formeln, um die Sonnenstunden und die einstrahlende Sonnenenergie auf der Erdoberfläche zu berechnen. Neben den Voraussetzungen, die schon für 1.1 erforderlich sind, werden in 1.2 noch Kenntnisse der Analytischen Geometrie benötigt (ab Klasse 11). Für das erweiterte Verfahren sind elementare Kenntnisse der Matrizenrechnung sowie der Koordinatentransformation (ab Klasse 12) vonnöten.

Der dritte Teil (Abschnitt 1.3) beschäftigt sich mit den Sonnenstunden und der eingestrahelten Sonnenenergie auf beliebig geneigten Ebenen. In diesem Abschnitt werden zwei Verfahren zur Herleitung der Formeln angegeben. Neben den bereits genannten Voraussetzungen werden hier noch Fertigkeiten im Programmieren benötigt, denn die Anwendung der Formeln sieht das Programmieren mit Hilfe von Matlab-Software vor. In diesem Teil werden zwei Diagrammart angewendet, die heute sehr beliebt im Fach Physik und Technik sind, nämlich das orthogonale 3D-Darstellungs-Diagramm und das Heatmap-Diagramm.

Im vierten Teil (Abschnitt 1.4) werden die Fehler der einzelnen Berechnungsverfahren thematisiert. Dazu müssen Kenntnisse der Physik und Mathematik auf höherem Niveau vorausgesetzt werden, die im Allgemeinen bei SuS nicht mehr vorhanden sind. Dieser Abschnitt wendet sich deshalb hauptsächlich an die Lehrkräfte, die natürlich über die jeweiligen Gültigkeitsgrenzen ihrer Unterrichtsinhalte informiert sein müssen.

Im letzten Teil (Abschnitt 1.5.) wird die langfristige Abweichung aufgrund der Präzession der Erde und anderer Effekte, die von Einflüssen anderer Planeten herrühren, ausgeführt. Dazu wird ein vorläufiger Vergleich zwischen den Ergebnissen aus berechneten und gemessenen Werten gegeben, um die Hypothese zu veranschaulichen, nach der große Änderungen im Paläoklima (Eiszeiten) auf vergleichsweise kleine Änderungen der Erdbewegung zurückzuführen sind. Die Voraussetzungen für die Berechnungen in diesem Abschnitt sind gleich wie diejenigen für den Abschnitt 1.4.

1.1 Berechnungen mit Hilfe der elementaren Geometrie

1.1.0 Vorüberlegungen

Die exakte Berechnung der Sonnenstunden pro Tag und der eingestrahelten Sonnenenergie an einem beliebigen Ort ist komplex und erfordert das Lösen komplizierter Gleichungen. Für wissenschaftliche Auswertungen werden diese Gleichungen in Programme umgesetzt und durch Computer gelöst. Reicht jedoch bereits ein näherungsweise richtiges Ergebnis, so lassen sich die entsprechenden Formeln leicht herleiten. Für diese Näherungsrechnungen verwenden wir nachfolgende Idealisierungen: Die Umlaufbahn der Erde um die Sonne wird als kreisförmig angenommen (statt einer elliptischen Bahn), der Neigungswinkel der Erdachse wird mit $23,5^\circ$ festgelegt (statt einer langfristigen quasiperiodischen Änderung zwischen $22,1^\circ$ und $24,5^\circ$). Der Erdmittelpunkt bewege sich in täglichen Schritten diskret längs seiner Kreisbahn (statt einer kontinuierlichen Bewegung).

Mit dieser Elementarisierung sollten die SuS der Jahrgangsstufe 9 mit den bereits erwähnten mathematischen Voraussetzungen die dargestellten Gleichungen verstehen und sowohl die Sonnenstunden, als auch die eingestrahelte Energie an beliebigen Orten berechnen können.

Die Formeln werden schrittweise hergeleitet. Zuerst wird der Sonderfall abgehandelt, bei dem die Ebene, die die Erdachse und der Sonnenmittelpunkt aufspannen, senkrecht zur Bahnebene der Erde liegt, was eigentlich nur zu Sommer- und Winteranfang der Fall ist. Erst danach wird der allgemeine Fall betrachtet. Die Formeln lassen sich ohne Weiteres auf andere Planeten unsers Sonnensystems anwenden.

1.1.1 Berechnung der Sonnenstunden für den 21./22.12.

1.1.1.1 Berechnungen für die Positionen zwischen den Breitengraden $-66,5^\circ$ und $66,5^\circ$

Ausgangspunkt der Betrachtungen soll zunächst die Position der Erde am 21./22.12. eines Jahres sein, wie sie in Abbildung 1.1.1 dargestellt wird.

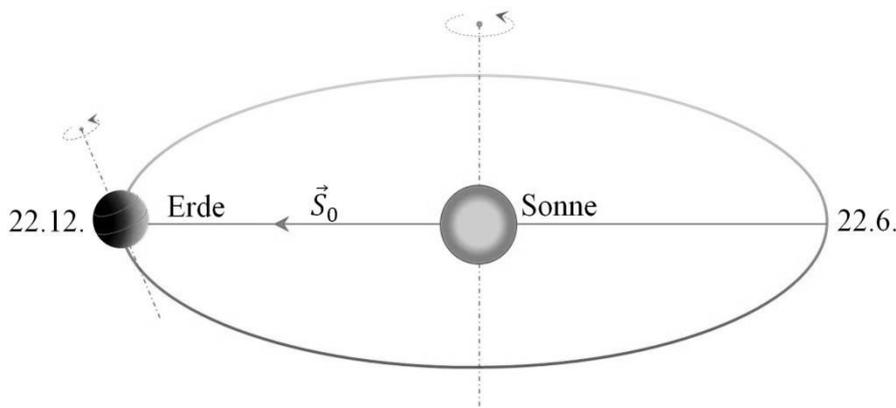


Abbildung 1.1.1: Position der Erde am 22.12.

Wir betrachten die Erde als vollkommene Kugel und nehmen die Sonnenstrahlen als parallel einfallend an. Dann markiert die Grenze zwischen der Tag- und Nachtseite eine Fläche, diese „Tag-Nacht-Ebene“ verläuft durch den Erdmittelpunkt und steht senkrecht zu den Sonnenstrahlen. Die Schnittkurve zwischen der Tag-Nacht-Ebene und der Erde bildet einen Kreis, den „Tag-Nacht-Kreis“, der durch den Erdmittelpunkt verläuft und der senkrecht zu den Sonnenstrahlen liegt. Die Tag-Nacht-Ebene und der Tag-Nacht-Kreis sind in den 3-D Perspektivzeichnungen dargestellt (Abbildung 1.1.2 und Abbildung 1.1.3 [A 1.1.1]). Auf den beiden Bildern werden sowohl Tag- und Nachtbereich auf der Erde, als auch die entsprechende Position der Erde und der Sonne im Raum gezeigt. Auf beiden Bildern ist die Erde vergrößert eingezeichnet, damit die Tag-Nacht-Ebene und der Tag-Nacht-Kreis deutlicher zu erkennen sind.

Bei einer vollständigen Drehung der Erde um ihre Achse markiert jeder Punkt (außer den Polen) auf der Erde eine Kreisbahn um die Erdachse. Auf den Abbildungen 1.1.2 und 1.1.3 sind je drei Bahnen dargestellt, die zu ausgewählten Punkten auf der Nord- und Südhalbkugel und dem Äquator gehören. Der Kreisbogen im Tagbereich ist gelb markiert, der im Nachtbereich schwarz. Der Kreis auf der Nordhalbkugel hat zwei Schnittpunkte mit der Tag-Nacht-Ebene. Der Punkt P entspricht dem Sonnenaufgang, Q dem Sonnenuntergang.

Da diese Bilder computerunterstützte 3-D Perspektivzeichnungen sind, können sie auch aus anderer Richtung dargestellt werden, zum Beispiel aus der Sicht oberhalb der Nord- bzw. der Südhalbkugel (Abbildungen 1.1.4 und 1.1.5). Auf den Bildern würden die SuS schnell qualitativ erkennen, dass am

22.12. der Tag auf der Nordhalbkugel kürzer ist als 12 Stunden, der Tag auf der Südhalbkugel jedoch länger als 12 Stunden. Der Tag am Äquator dauert genau 12 Stunden.

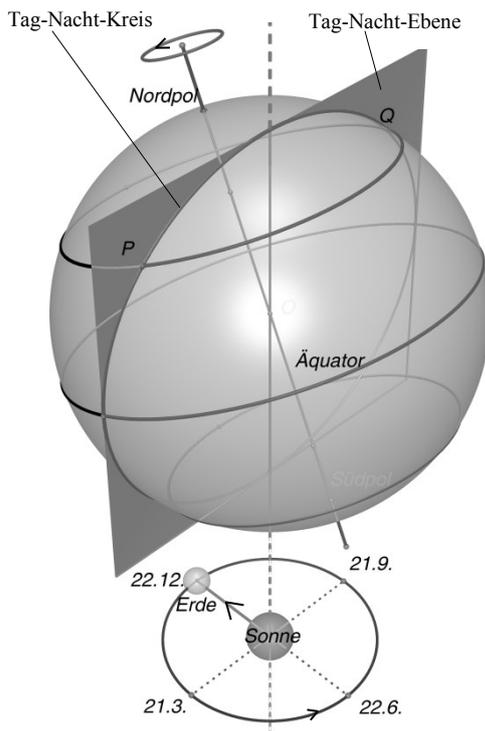


Abbildung 1.1.2: Der Erde am 22.12. von der Tagseite beobachtet.

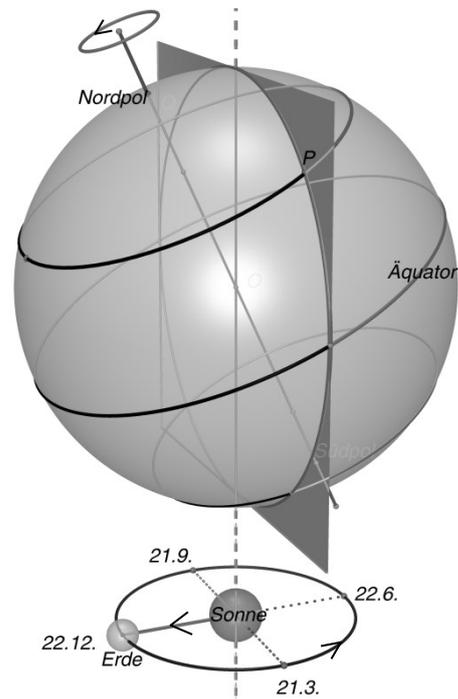


Abbildung 1.1.3: Der Erde am 22.12. von der Nachtseite beobachtet.

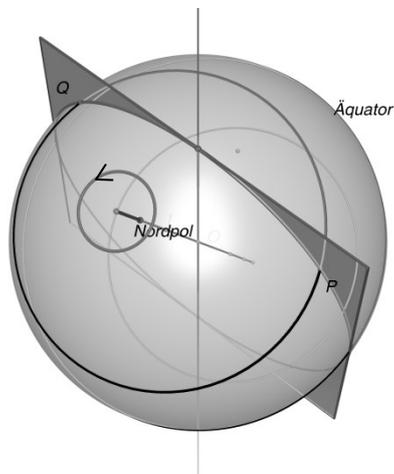


Abbildung 1.1.4: Der Erde am 22.12. über dem Nordpol beobachtet.

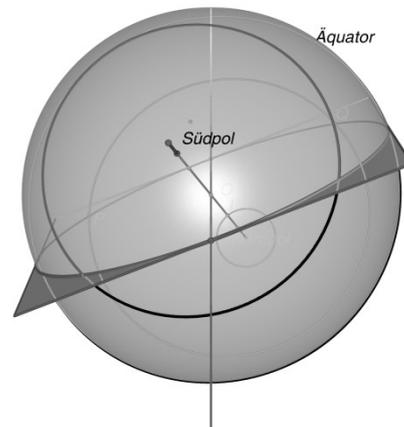


Abbildung 1.1.5: Der Erde am 22.12. über dem Südpol beobachtet.

Zur quantitativen Bestimmung wird die (in Abbildung 1.1.6 noch sichtbare Erde) in Abbildung 1.1.7 transparent dargestellt. Die grün markierte Ellipse in Abbildung 1.1.7 beschreibt den Tag-Nacht-Kreis. Die obere Ellipse durch K beschreibt die infolge der Erdrotation entstehende Kreisbahn eines Punktes auf dem Breitengrad φ . Die untere parallel dazu verlaufende Ellipse beschreibt die Kreisbahn eines Punktes am Äquator während die Erde eine Umdrehung absolviert (es genügt hier, die Umlaufdauer mit 24 h anzusetzen). \vec{S}_0 beschreibt einen Sonnenstrahl am 22.12., der zum Mittelpunkt I des zum Breitengrad φ gehörenden Kreises strahlt.

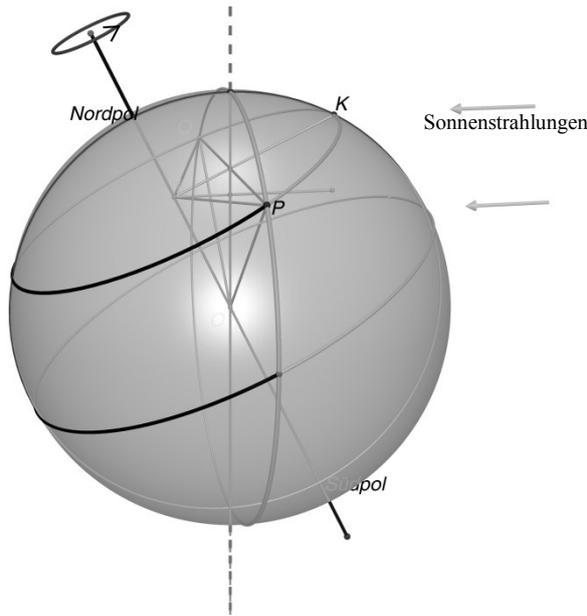


Abbildung 1.1.6: Tag- und Nachseite der Erde am 22.12. mit der gezeigten Kugel [A 1.1.2].

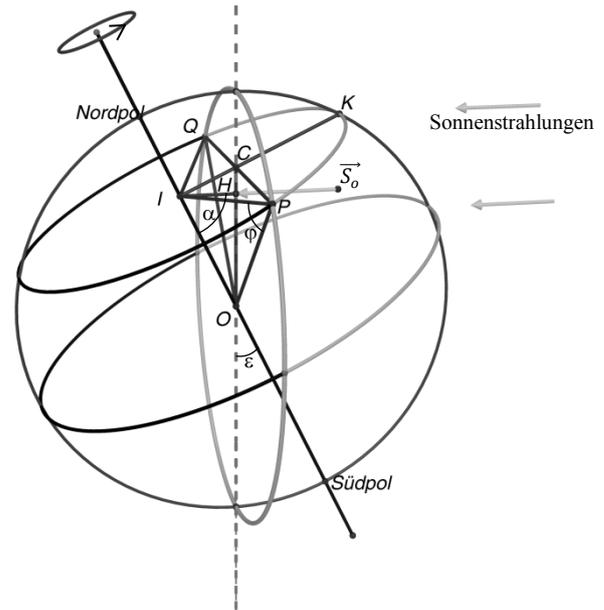


Abbildung 1.1.7: Tag- und Nachseite der Erde am 22.12. ohne die Erdkugel.

Dabei wird $\beta_{Tag} = \widehat{PIQ} = 2\widehat{CIP}$ als Tageslichtbogen bezeichnet (Im Unterschied zu dem sogenannten Tageslichtbogen der Sonne, also dem Abschnitt der scheinbaren täglichen Bahn der Sonne über dem Horizont.). Kennt man den Tageslichtbogen β_{Tag} , so lässt sich die Anzahl der Sonnenstunden t berechnen aus

$$t = 24 \cdot \frac{\beta_{Tag}}{360^\circ} \text{ (Stunden)} \quad (1.1.1a).$$

Der Winkel zwischen dem Sonnenstrahl \vec{S}_0 und Erdachse wird in dieser Arbeit Sonnenwinkel α genannt. Für den 22.12. eines jeden Jahres gilt für α

$$\alpha = 90^\circ - \varepsilon = 66,5^\circ.$$

Dabei ist $\varepsilon = 23,5^\circ$ die Neigung der Erdachse gegen die Erbahnebene (Schiefe der Ekliptik). Da ΔCPI , ΔICO , ΔHOI und ΔIPO rechtwinklig sind, gilt

$$\cos \widehat{CIP} = \frac{\overline{CI}}{\overline{PI}} \quad (1.1.1b)$$

$$CI = \overline{OI} \cdot \tan \widehat{COI} = \overline{OI} \cdot \cotan \alpha = \frac{\overline{OI}}{\tan \alpha} \quad (1.1.1c)$$

$$\overline{OI} = \overline{OP} \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \varphi \quad (1.1.1d)$$

$$\overline{PI} = \overline{OP} \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos \varphi \quad (1.1.1e).$$

(R: Erdradius)

Durch Kombination von (1.1.1b), (1.1.1c), (1.1.1d) und (1.1.1e) folgt

$$\cos \widehat{CIP} = \frac{R \cdot \sin \varphi}{R \cdot \cos \varphi \cdot \tan \alpha} = \tan \varphi \cdot \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \beta_{Tag} = 2 \cdot \widehat{CIP} = 2 \cdot \arccos(\tan \varphi \cdot \cot \alpha) \quad (1.1.1f).$$

Aus (1.1.1a) und (1.1.1f) ergibt sich

$$t = \frac{24}{180^\circ} \cdot \arccos(\tan \varphi \cdot \cot \alpha) \text{ (Stunden)} \quad (1.1.1)$$

mit $\alpha = 66,5^\circ$.

1.1.1.2 Berechnungen für die Pole für den 22.12.

Um diese Rechnung auch für die Pole durchzuführen, ist der Zusammenhang in den Abbildungen 1.1.8 und 1.1.9 anschaulich dargestellt.

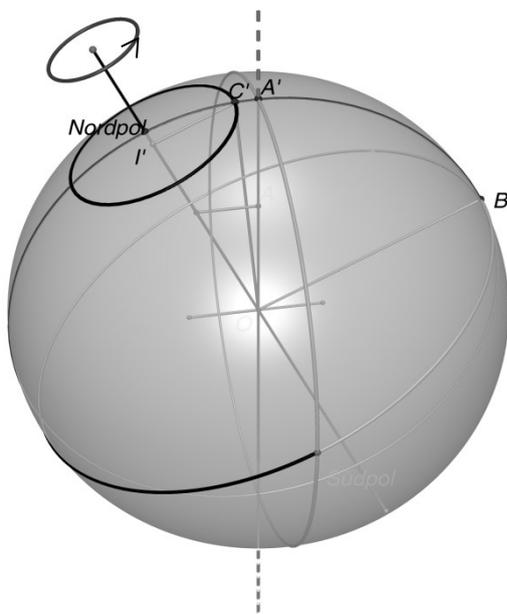


Abbildung 1.1.8: Darstellung Tag – Nacht - Verhältnisse an den Erdpolen am 22.12. mit eingezeichneter Erdkugel [A 1.1.3].

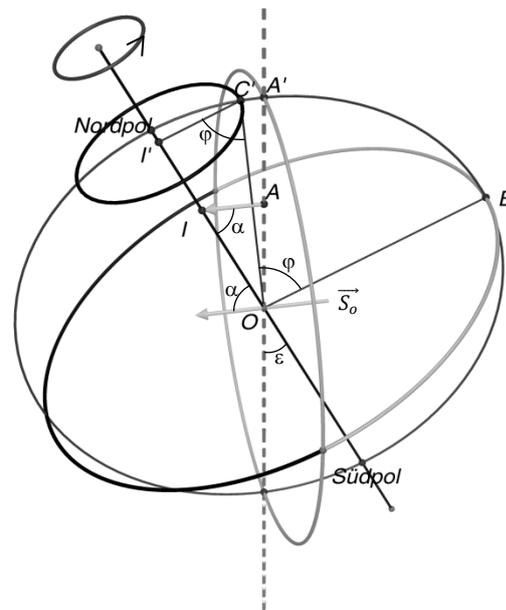


Abbildung 1.1.9: Darstellung Tag – Nacht - Verhältnisse an den Erdpolen am 22.12. ohne eingezeichnete Erdkugel.

Wenn $\widehat{BOC'} = \varphi$ (geografische Breite) größer als $\widehat{BOA'} = \alpha = 66,5^\circ$ ist, dann geht die Sonne an diesen Ort C' in der Nähe des nördlichen Pols niemals auf.

Im Gegensatz dazu steht die Sonne am Südpol gantztägig über dem Horizont, wenn φ kleiner ist als $-\alpha$ ($-66,5^\circ$).

1.1.2 Berechnung der Sonnenstunden für ein beliebiges Datum

1.1.2.1 Berechnung für Örtter zwischen den Breiten $-66,5^\circ$ und $66,5^\circ$

Im Folgenden benennt \vec{S}_n den Einheitsvektor der zur Erde strahlenden Sonnenstrahlen am Tag n (n ist die Summe der Tage ab dem 22.12.). Aus den Abbildungen 1.1.10, 1.1.11 und 1.1.12 ist ersichtlich, dass \vec{HI} parallel zum Sonnenstrahl \vec{S}_n ist. Die hervorgehobene Fläche markiert wieder den Tag-Nacht-Übergang. Aus der Abbildung 1.1.10 gilt

$$\delta = \frac{n}{365} 360^\circ \quad (1.1.2).$$

Dabei ist n als der Summe der Tage ab dem 22.12. bezeichnet.

Für beliebige Daten müssen wir den Winkel α bestimmen. Danach verwenden wir die Formel (1.1.1) um die Sonnenstunden zu berechnen.

Da \vec{HI} parallel zum Sonnenstrahl ist, muss \vec{HI} senkrecht zur Tag-Nacht-Ebene stehen. Deshalb sind ΔHAI und ΔHOI rechtwinklig. Damit gilt

$$\cos \widehat{HIA} = \frac{\overline{HI}}{\overline{AI}} \quad (1.1.2a)$$

$$\cos \widehat{HIO} = \frac{\overline{HI}}{\overline{OI}} \quad (1.1.2b)$$

Da auch ΔAOI rechtwinklig ist, ergibt sich

$$\overline{AI} = \overline{OI} \cdot \sin \varepsilon \quad (1.1.2c).$$

Durch Kombination der Gleichungen (1.1.2a), (1.1.2b) und (1.1.2c) erhält man

$$\Rightarrow \cos \widehat{HIO} = \sin \varepsilon \cdot \cos \widehat{HIA} \quad (1.1.2d).$$

Da \vec{AI} parallel zum Sonnenstrahl am 22.12. und \vec{HI} parallel zur der Sonnenstrahl des beliebig gewählten Datums sind, gibt es eine Abhängigkeit zwischen Winkel \widehat{HIA} und δ . Da $0 \leq \widehat{HIA} \leq 90^\circ$, gilt für diese Abhängigkeit

$$\widehat{HIA} = \begin{cases} \delta & | \delta \in [0^\circ, 90^\circ] \\ 180^\circ - \delta & | \delta \in [90^\circ, 180^\circ] \\ 270^\circ - \delta & | \delta \in [180^\circ, 270^\circ] \\ 360^\circ - \delta & | \delta \in [180^\circ, 360^\circ] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{HIA} = \begin{cases} \cos \delta & | \delta \in [270^\circ, 360^\circ] \cup [0^\circ, 90^\circ] \\ -\cos \delta & | \delta \in [90^\circ, 270^\circ] \end{cases} \quad (1.1.2e)$$

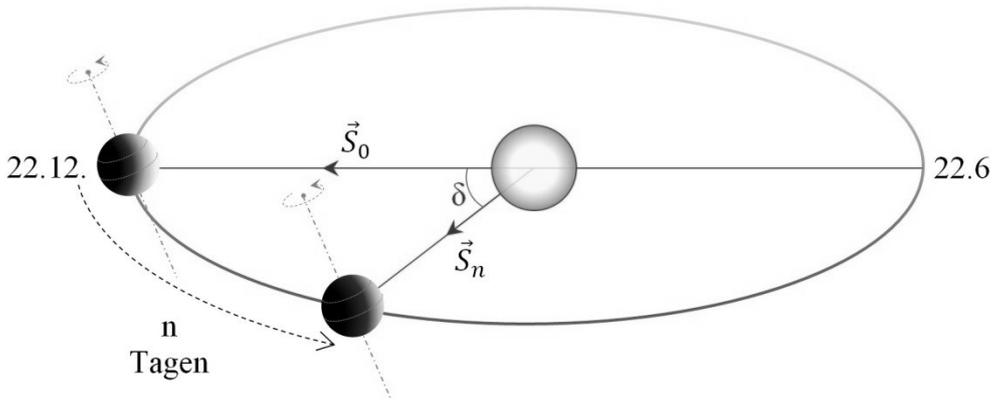


Abbildung 1.1.10: Position der Erde am Tag n ab dem 22.12.

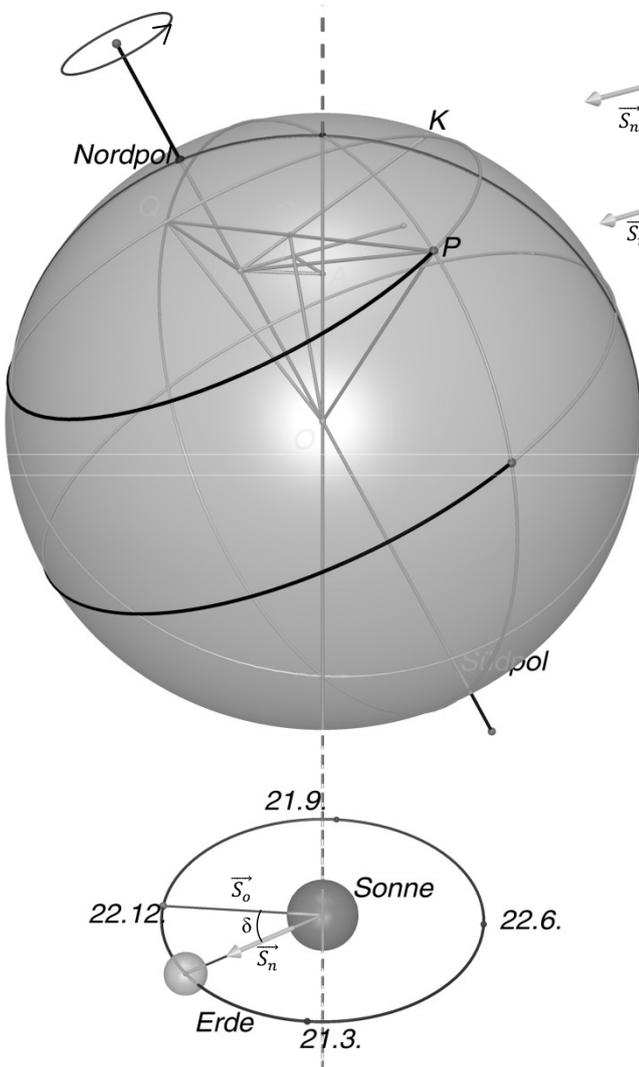


Abbildung 1.1.11: Tag- und Nachtseite der Erde am Tag n ab dem 22.12. mit der eingezeichneten Erdkugel [A 1.1.4].

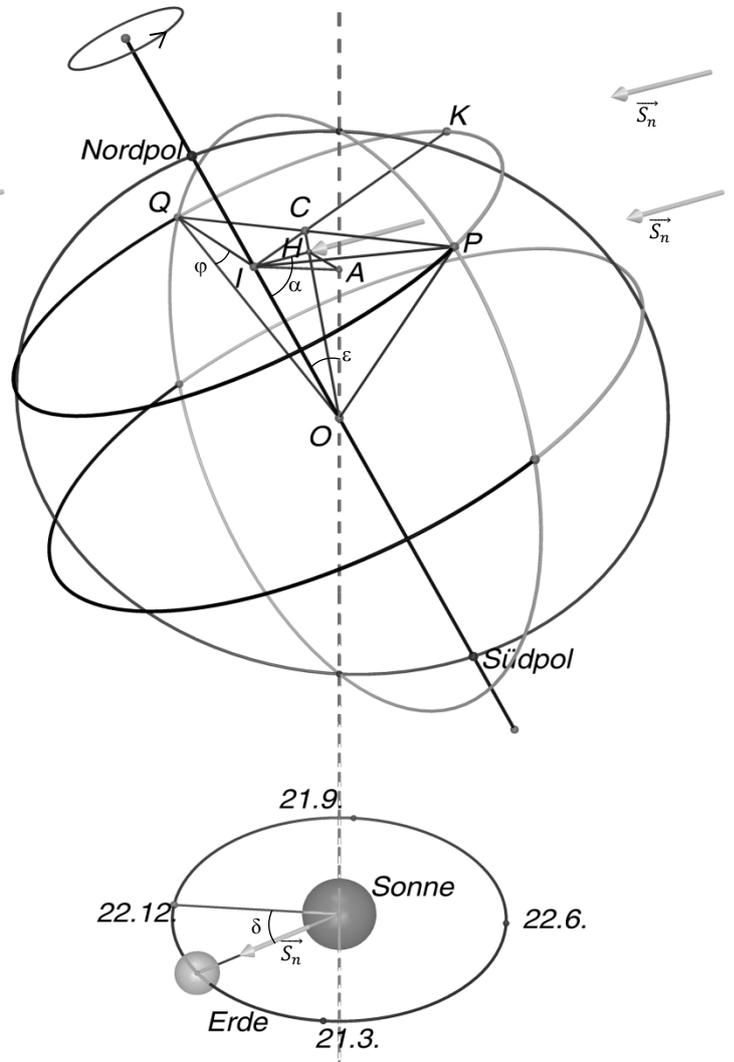


Abbildung 1.1.12: Tag- und Nachtseite der Erde am Tag n ab dem 22.12. ohne die eingezeichnete Erdkugel.

Die Abhängigkeit zwischen \widehat{HIO} und α ist

$$\widehat{HIO} = \begin{cases} \alpha & | \alpha \in [0^\circ, 90^\circ] \\ 180^\circ - \alpha & | \alpha \in [90^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{HIO} = \begin{cases} \cos \alpha & | \alpha \in [0^\circ, 90^\circ] \\ -\cos \alpha & | \alpha \in [90^\circ, 180^\circ] \end{cases} \quad (1.1.2f)$$

Aus den Abbildungen 1.1.10 und 1.1.17 kann man ableiten:

Wenn $\delta = 90^\circ$ oder $\delta = 270^\circ$, dann $\alpha = 90^\circ$.

Wenn $\delta = 0^\circ$ oder $\delta = 360^\circ$, dann $\alpha = 90^\circ - 23,5^\circ = 66,5^\circ < 90^\circ$.

Wenn $\delta = 180^\circ$, dann $\alpha = 90^\circ + 23,5^\circ = 113,5^\circ > 90^\circ$.

Insgesamt erhält man aus dieser Überlegung für α , dass wenn $\delta \in [270^\circ, 360^\circ] \cup [0^\circ, 90^\circ]$, dann $\alpha \in [66,5^\circ, 90^\circ]$ und wenn $\delta \in [90^\circ, 270^\circ]$, dann $\alpha \in [90^\circ, 113,5^\circ]$. Unter Berücksichtigung der Gleichung (1.1.2f) ergibt sich

$$\cos \widehat{HIO} = \begin{cases} \cos \alpha & | \delta \in [270^\circ, 360^\circ] \cup [0^\circ, 90^\circ] \\ -\cos \alpha & | \delta \in [90^\circ, 270^\circ] \end{cases} \quad (1.1.2g)$$

Durch Kombination der Gleichungen (1.1.2d), (1.1.2e) und (1.1.2g) erhält man allgemein

$$\Rightarrow \cos \alpha = \sin \varepsilon \cdot \cos \delta$$

$$\alpha = \arccos(\sin \varepsilon \cdot \cos \delta) \quad (1.1.3).$$

Die arccos Funktion besitzt einen Definitionsbereich von -1 bis 1 und einen Wertebereich von 0° bis 180° , genau die hier infrage stehenden Winkel sind damit erfasst, Mehrdeutigkeiten für Winkel größer als 180° kommen nicht vor.

Die weiteren Berechnungen erfolgen analog zur Berechnung für den 22.12. (Formeln (1.1.1b) bis (1.1.1f)). Somit erhält man für die Tageslichtbogen

$$\beta_{Tag} = 2 \cdot \widehat{CIP} = 2 \cdot \arccos(\tan \varphi \cdot \cot \alpha) \quad (1.1.4)$$

und für die Taglänge

$$t = \frac{24}{180} \cdot \arccos(\tan \varphi \cdot \cot \alpha) (\text{Stunden}) \quad (1.1.1).$$

Der Sonnenwinkel α kann aus (1.1.3) bestimmt werden.

1.1.2.2 Allgemeine Berechnung für die polenahen Gebiete

Für α müssen die zwei Fälle $\alpha \leq 90^\circ$ und $\alpha > 90^\circ$ unterschieden werden. Im ersten Fall gilt

$$\cos \alpha = \sin \varepsilon \cdot \cos \delta > 0$$

$$\Rightarrow \cos\delta > 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{n}{365} 360^\circ < 180^\circ$$

$$\Rightarrow n \leq 182.$$

Anhand der Abbildungen 1.1.13 und 14 lässt sich für den Nordpol folgende Situation ablesen:

Der Schnittpunkt zwischen der Kreisbahn des Punktes der Breite φ und der Ebene, die die Erdachse und die Sonnenstrahlen aufspannen sei C' und H' sei der Schnittpunkt dieser Ebene mit dem Tag-Nacht-Kreis. Wenn $\widehat{I'OC'} < \widehat{IOH'}$, dann erreicht den ganzen Tag über kein Sonnenstrahl die Erdoberfläche. Damit ist die Sonnenscheindauer $t = 0$ Stunden.

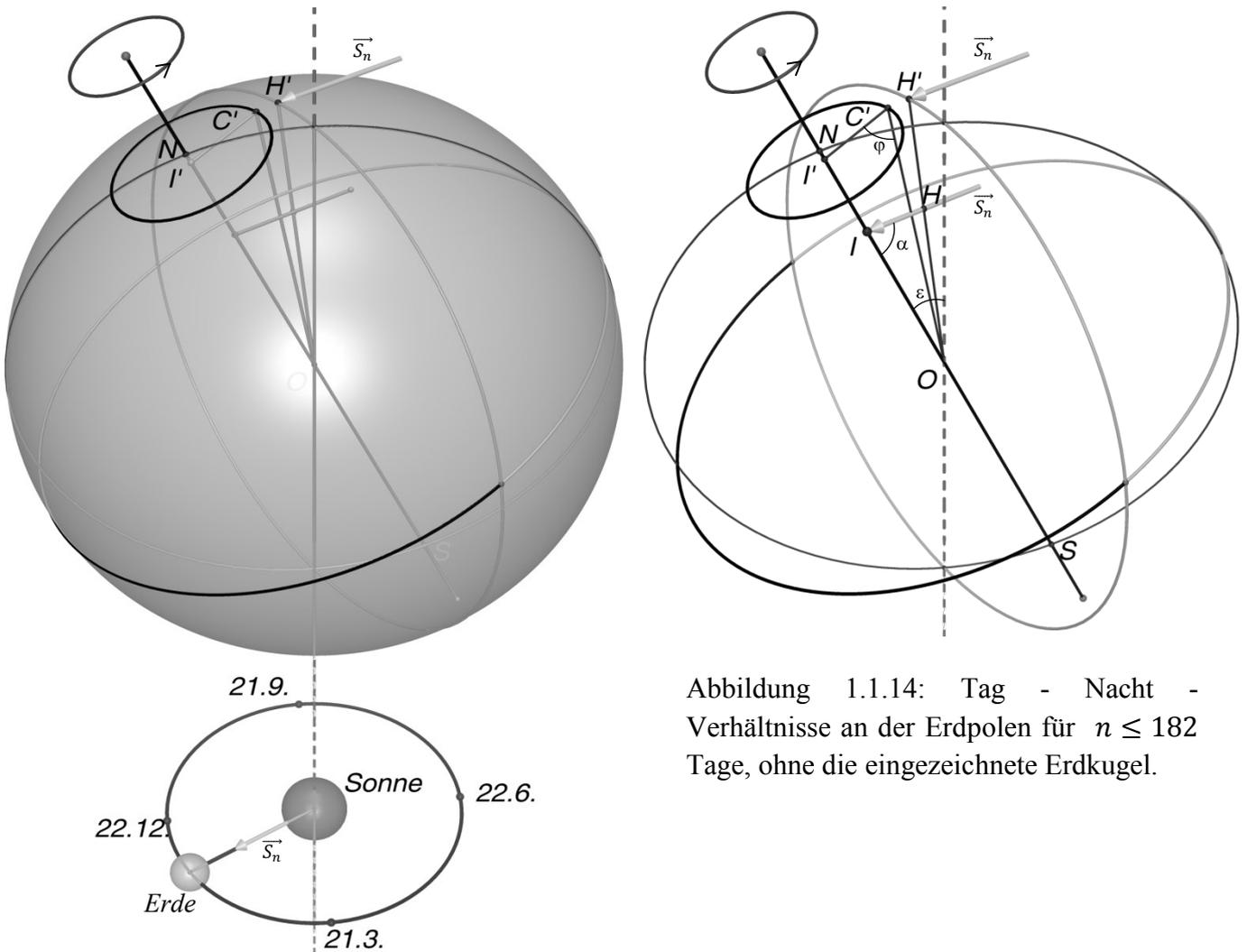


Abbildung 1.1.14: Tag - Nacht - Verhältnisse an der Erdpolen für $n \leq 182$ Tage, ohne die eingezeichnete Erdkugel.

Abbildung 1.1.13: Tag - Nacht - Verhältnisse an den Erdpolen für $n \leq 182$ Tage, mit der eingezeichneten Erdkugel [A 1.1.5].

ΔHIO und $\Delta I'C'O$ sind rechtwinklig, daher gilt

$$\widehat{I'OC'} = 90^\circ - \varphi < \widehat{IOH'} = \widehat{IOH} = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \varphi > \alpha.$$

Analog dazu gilt für den Südpol: Wenn $\varphi < -\alpha$, steht die Sonne den ganzen Tag über dem Horizont, damit ist $t = 24$ Stunden.

Im zweiten Fall ($\alpha > 90^\circ$) lassen sich folgende Zusammenhänge formulieren

$$\cos\alpha = \sin\varepsilon \cdot \cos\delta < 0$$

$$\Rightarrow \cos\delta < 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{n}{365} 360^\circ > 180^\circ$$

$$\Rightarrow n \geq 183.$$

Für die übrigen Berechnungen in Polnähe gilt das bereits Gezeigte. Zu beachten ist lediglich, dass sich die Richtung der Sonnenstrahlen \overrightarrow{IH} in den Zeichnungen (Abbildungen 1.1.15, 16 und 17 [A 1.1.6]) umgekehrt hat, daher ist $\alpha > 90^\circ$.

Wenn $\widehat{I'OC'} < \widehat{IOH'}$ ergibt sich für den Nordpol, dass die Sonne den ganzen Tag über dem Horizont steht, d.h. $t = 24$ Stunden. $\triangle OHI$ und $\triangle OI'C'$ sind rechtwinklig, deshalb ergibt sich

$$\widehat{I'OC'} = 90^\circ - \varphi < \widehat{IOH'} = \widehat{IOH} = \alpha - 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi > 180^\circ - \alpha.$$

Analog lässt sich für den Südpol zeigen, dass dort den ganzen Tag keine Sonneneinstrahlung eintrifft, d.h. $t = 0$ h, wenn $\varphi < -(180^\circ - \alpha)$.

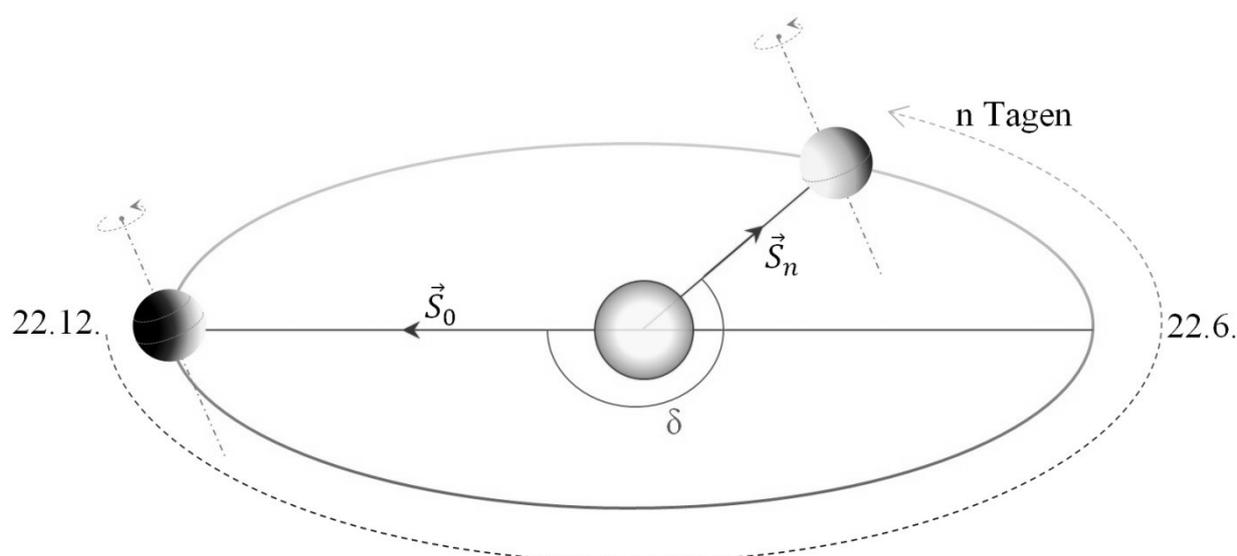


Abbildung 1.1.15: Die Position der Erde für $n \geq 183$.

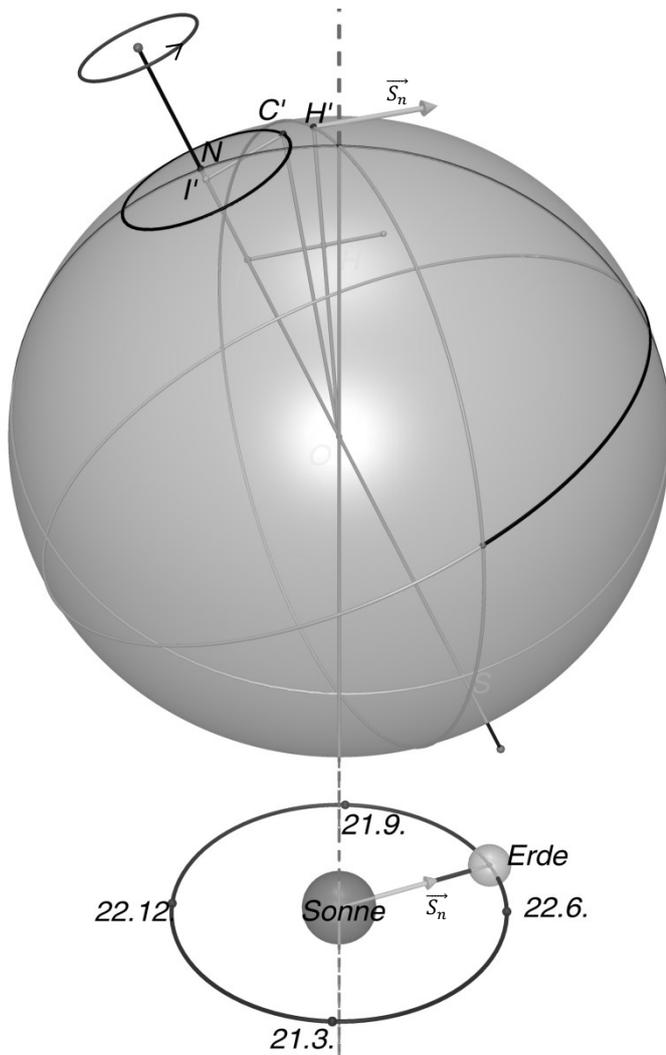


Abbildung 1.1.16: Tag - Nacht - Verhältnisse an den Polen für $n \geq 183$ Tage, mit der eingezeichneten Erdkugel.

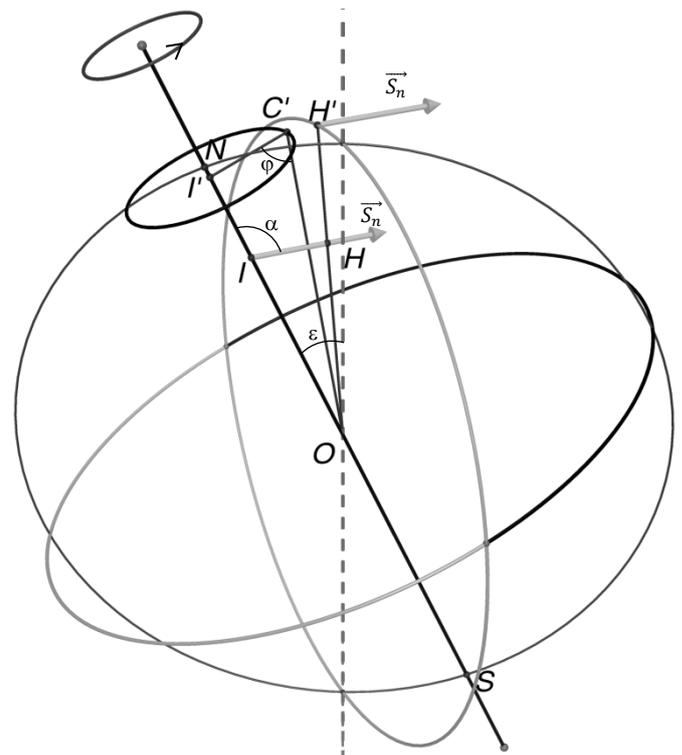


Abbildung 1.1.17: Tag - Nacht - Verhältnisse an den Polen für $n \geq 183$ Tage, ohne die eingezeichnete Erdkugel.

1.1.2.3. Zusammenfassung zur Berechnung der Sonnenstunden

Wenn φ zwischen α und $-\alpha$ liegt, d.h. $\alpha \geq \varphi \geq -\alpha$, dann gilt für die Sonnenstunden

$$t = \frac{24}{180^\circ} \cdot \arccos(\tan\varphi \cdot \cot\alpha) (\text{Stunden}) \quad (1.1.1).$$

Für $\varphi > \alpha$ oder $\varphi < -(180^\circ - \alpha)$ ist es dauerhaft dunkel, d. h. $t = 0 \text{ h}$.

Und wenn: $\varphi < -\alpha$ oder $\varphi > 180^\circ - \alpha$ ist es permanent hell, d. h. $t = 24 \text{ h}$.

Dabei ergibt sich der Sonnenwinkel α (der Winkel zwischen den Sonnenstrahlen und der Erdachse) aus

$$\alpha = \arccos \left(\sin 23,5^\circ \cdot \cos \frac{n}{365} 360^\circ \right).$$

1.1.3. Berechnung der eingestrahkten Sonnenenergie

In Abbildung 1.1.18. und 1.1.19. ist der Punkt K die Mitte des Tageslichtbogens. M ist der Standort des Beobachters auf dem Breitenkreis. Wir bezeichnen $\beta = \widehat{KIM}$ als den Zeitbogen β (nicht zu verwechseln mit dem Stundenwinkel der Sonne). An einem Tag variiert der Zeitbogen β von $-\pi$ bis π , das entspricht der Zeitänderung von 0 Uhr bis 24 Uhr. Der Zenitwinkel θ der Sonne ist der Winkel zwischen der Erdradiuslinie zum betrachteten Punkt M und dem zur Sonne gerichteten Vektor (also $-\vec{S}_n$).

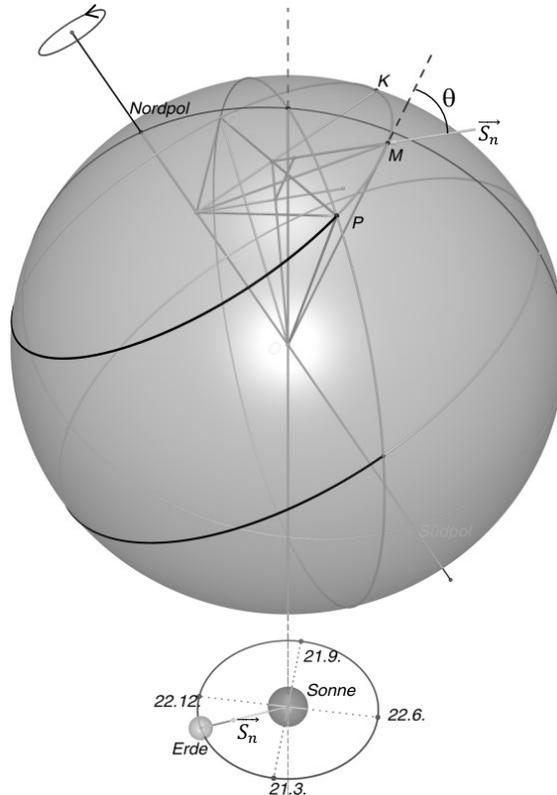


Abbildung 1.1.18: Darstellung zur Berechnung der eingestrahkten Sonnenenergie, mit eingezeichneter Erdkugel [A 1.1.7].

Zur Berechnung der Sonnenenergie an einem beliebigen Tag reicht es, sich auf den Tageslichtbogen zu beschränken. Das bedeutet man betrachtet die Änderung des Zeitbogens β während M von P bis zum Punkt Q läuft. Am Startpunkt P gilt für den Zeitbogen

$$\beta_P = \widehat{KIP} = \frac{\widehat{QIP}}{2} = -\frac{\beta_{Tag}}{2} \quad (1.1.5a)$$

und am Endpunkt

$$\beta_Q = \frac{\beta_{Tag}}{2} \quad (1.1.5b).$$

Das Vorzeichen von β_P ist negativ, weil der Punkt P vor dem Tageslichtbogenmittelpunkt K liegt, wenn der Punkt M längs der Drehrichtung der Erde läuft. Der Bezugspunkt ist Punkt K. Die zeitliche Änderung von β genügt der Formel

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = \frac{2 \cdot \pi}{24 \cdot 3600} (rad/s) \quad (1.1.5c).$$

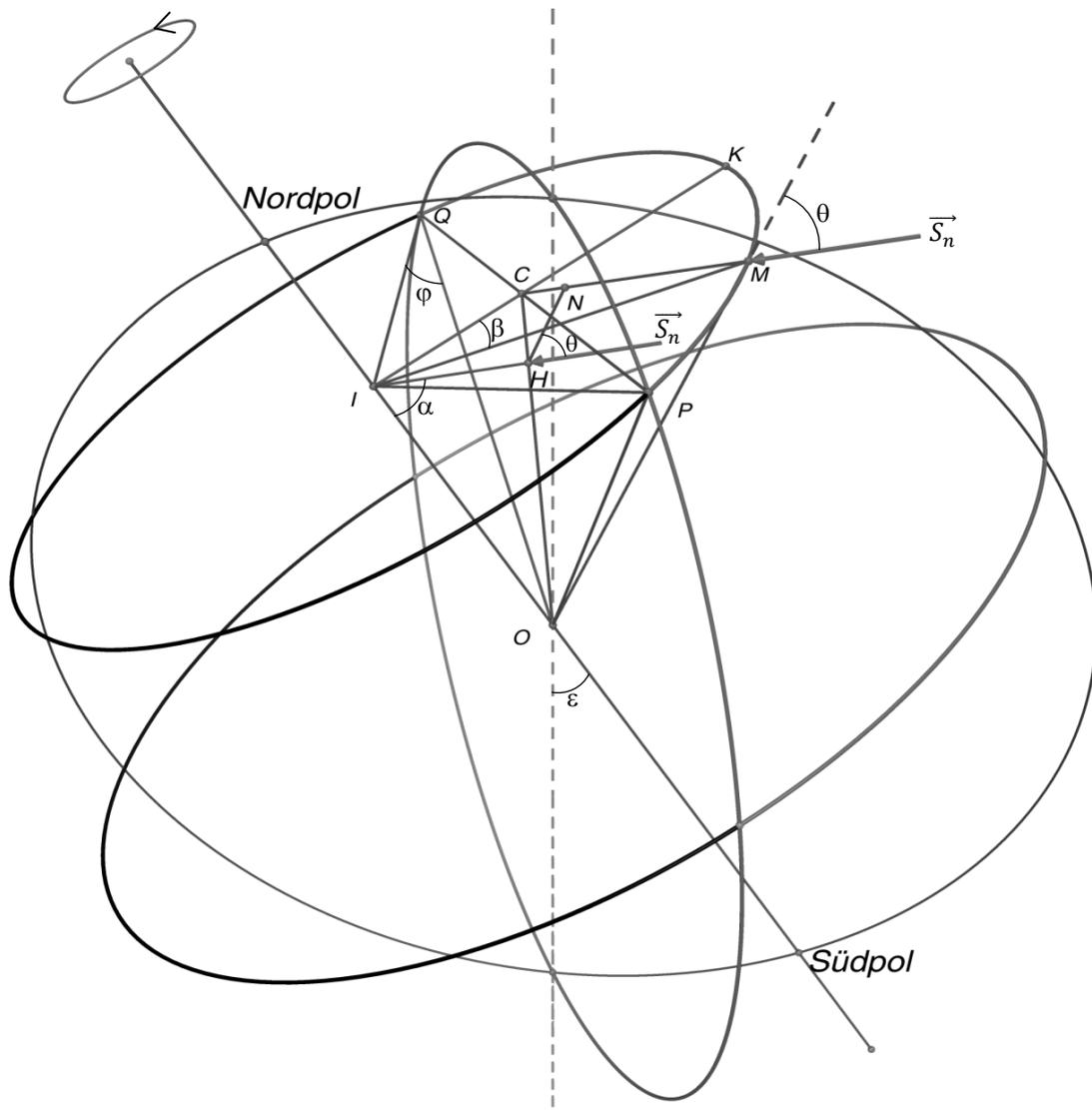


Abbildung 1.1.19: Darstellung zur Berechnung der eingestrahelten Sonnenenergie, ohne die eingezeichnete Erdkugel.

Dabei bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Drehachse. Diese kann man mit dem Sonnentag ($T_s \approx 24\text{h}=86400\text{s}$) zu $\omega = \frac{2\pi}{T_s}$ abschätzen (der Unterschied zwischen wahren Sonnentag und Sterntag wird aus didaktischen Gründen nicht berücksichtigt). Aus der Gleichung (1.1.5c) folgt

$$d\beta = \omega \cdot dt$$

$$\Rightarrow \beta = \omega \cdot t + C \quad (1.1.5d).$$

Die Integrationskonstante C kann über Randbedingungen bestimmt werden. Wenn M den Mittelpunkt K erreicht, dann ist $\beta = 0$ und $t = T_K$ ¹. Setzt man nun $\beta = 0$ und $t = T_K$ in Gleichung (1.1.5d) ein, so ergibt sich die gesuchte Konstante zu $C = \omega \cdot T_K$. Daraus folgt für den Ausdruck des Zeitbogen β

$$\beta = \omega \cdot (t - T_K) \quad (1.1.5).$$

¹ T_K bezeichnet damit den Zeitpunkt des wahren Mittags, wenn die Sonne an der höchsten Position oder am Himmelsmeridian beobachtet wird. Wegen der Zeitgleichung und wegen der diskret eingeteilten Zeitzonen ist dieser Zeitpunkt nicht mit der Mittagszeit 12:00 Uhr des allgemeinen Sprachgebrauchs zu verwechseln.

Die tägliche eingestrahlte Sonnenenergie E pro Quadratmeter wird nachfolgend mit Hilfe des Zenitwinkels berechnet, wobei natürlich zu beachten ist, dass sich dieser Winkel im laufenden Tag ständig ändert. Deshalb ist schrittweise vorzugehen, was auf eine Summenformel bzw. ein Integral führt. Es ergibt sich für E

$$E = \sum P_s \cdot \cos \theta \cdot \Delta t$$

bzw.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E = \int P_s \cdot \cos \theta \cdot dt \quad (1.1.6a).$$

(Wobei P_s die Solarkonstante meint², die mit $P_s = 1368 \text{ W/m}^2$ angegeben werden kann. Die Absorption in der Erdatmosphäre wird aus didaktischen Gründen an dieser Stelle noch nicht berücksichtigt.)

Parallel zum Erdradius \overline{OM} werden nun die Punkte H und N zur Strecke \overline{HN} verbunden. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass

$$\theta = 180^\circ - \widehat{NHI}.$$

Zunächst muss ein Ausdruck für θ gesucht werden. Dazu lässt sich der Kosinussatz für das Dreieck ΔNIH anwenden.

$$\cos \theta = \cos (180^\circ - \widehat{NHI}) = -\cos \widehat{NHI} = -\frac{\overline{HN}^2 + \overline{HI}^2 - \overline{NI}^2}{2 \cdot \overline{HN} \cdot \overline{HI}} \quad (1.1.6b)$$

Um θ zu finden, müssen zunächst \overline{HN} , \overline{HI} und \overline{NI} bestimmt werden. Im ersten Schritt sollen \overline{HN} und \overline{HI} ermittelt werden.

Da die Dreiecke ΔHNC und ΔOMC ähnlich zueinander sind, gilt

$$\frac{\overline{HN}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{HN}}{R} = \frac{\overline{HC}}{\overline{OC}} \quad (1.1.6c).$$

Des Weiteren ist \overline{HI} parallel zu den Sonnenstrahlen und deshalb muss \overline{HI} senkrecht zur Tag-Nacht Fläche stehen. Folglich sind ΔHCI und ΔHOI rechtwinklig. Damit gilt

$$\overline{HC} = \overline{CI} \cdot \cos \widehat{HCI} \quad (1.1.6d)$$

$$\overline{HI} = \overline{OI} \cdot \cos \widehat{HIO} = \overline{OI} \cdot \cos \alpha \quad (1.1.6e)$$

$$\overline{HO} = \overline{OI} \cdot \sin \widehat{HIO} = \overline{OI} \cdot \sin \alpha \quad (1.1.6f)$$

$$\widehat{HOI} = 90^\circ - \widehat{HIO} = 90^\circ - \alpha \quad (1.1.6g).$$

Da \overline{OI} die Rotationsachse der Erde ist, ist \overline{OI} auch senkrecht zum Kreis mit dem Mittelpunkt I und dem Radius IP. Damit sind die Dreiecke ΔIQO , ΔICO und ΔIMO rechtwinklig. Daraus folgt

$$\overline{OI} = \overline{QO} \cdot \sin \widehat{IQO} = R \cdot \sin \varphi \quad (1.1.6h)$$

² Üblicherweise wird die Solarkonstante mit S angegeben. Aus didaktischen Gründen wird in dieser Arbeit aber das P_s verwendet, um den Bezug zur Leistung herzustellen.

$$\widehat{HCI} = \widehat{OCI} = 90^\circ - \widehat{HOI} \quad (1.1.6i).$$

Durch Kombination von (1.1.6i) mit (1.1.6g) wird ersichtlich, dass

$$\widehat{HCI} = \widehat{OCI} = \alpha \quad (1.1.6j)$$

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OI}}{\sin \widehat{OCI}} = \frac{\overline{CI}}{\cos \widehat{OCI}} = \frac{\overline{OI}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{CI}}{\cos \alpha} \quad (1.1.6k)$$

$$\Rightarrow \overline{CI} = \frac{\overline{OI}}{\tan \widehat{OCI}} \quad (1.1.6m).$$

Durch Einsetzen von (1.1.6h) und (1.1.6j) in (1.1.6m) erhält man

$$\Rightarrow \overline{CI} = \frac{R \cdot \sin \varphi}{\tan \alpha} \quad (1.1.6n)$$

$$\overline{MI} = \overline{MO} \cdot \cos \widehat{OMI} = R \cdot \cos \varphi \quad (1.1.6o).$$

Verknüpft man nun (1.1.6c), (1.1.6d), (1.1.6j) und (1.1.6m), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\overline{HN}}{R} &= \frac{\overline{HC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CI} \cdot \cos \widehat{HCI}}{\frac{\overline{CI}}{\cos \alpha}} = \frac{\overline{CI} \cdot \cos \alpha}{\frac{\overline{CI}}{\cos \alpha}} = \cos^2 \alpha \\ \Rightarrow \overline{HN} &= R \cdot \cos^2 \alpha \quad (1.1.6p). \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen von (1.1.6e) in (1.1.6h) erhält man

$$\overline{HI} = R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha \quad (1.1.6q).$$

(1.1.6p) und (1.1.6q) ergeben die Formel für \overline{HN} und \overline{HI} .

Im nächsten Schritt wird \overline{NI} ermittelt. Dazu wird der Kosinussatz auf die Dreiecke ΔMNI und ΔMCI angewandt .

$$\begin{aligned} \cos \widehat{NMI} &= \cos \widehat{CMI} \\ \Rightarrow \frac{\overline{MN}^2 + \overline{MI}^2 - \overline{NI}^2}{2 \cdot \overline{MN} \cdot \overline{MI}} &= \frac{\overline{MC}^2 + \overline{MI}^2 - \overline{CI}^2}{2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MI}} \quad (1.1.6k) \end{aligned}$$

Aufgrund der Ähnlichkeit von ΔHNC und ΔOMC lässt sich sagen

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{HO}}{\overline{OC}} \quad (1.1.6r).$$

Aus der Kombination der Ausdrücke (1.1. –6f), (1.1.6k) und (1.1.6r) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MN}}{\overline{MC}} &= \frac{\overline{HO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OI} \cdot \sin \alpha}{\frac{\overline{OI}}{\sin \alpha}} = \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \overline{MN} &= \overline{MC} \cdot \sin^2 \alpha \quad (1.1.6s). \end{aligned}$$

Setzt man nun (1.1.6r) in (1.1.6s) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MC}^2 \cdot \sin^4 \alpha + \overline{MI}^2 - \overline{NI}^2}{2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MI} \cdot \sin^2 \alpha} &= \frac{\overline{MI}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{CI}^2}{2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MI}} \\ \Rightarrow \overline{NI}^2 &= \overline{MC}^2 \cdot \sin^4 \alpha - \overline{MC}^2 \cdot \sin^2 \alpha + \overline{MI}^2 - \overline{MI}^2 \cdot \sin^2 \alpha + \overline{CI}^2 \cdot \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \overline{NI}^2 &= \overline{MI}^2 (1 - \sin^2 \alpha) - \overline{MC}^2 \cdot \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \overline{CI}^2 \cdot \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \overline{NI}^2 &= \overline{MI}^2 \cdot \cos^2 \alpha - \overline{MC}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \overline{CI}^2 \cdot \sin^2 \alpha \quad (1.1.6t) \end{aligned}$$

Mit dem Kosinussatz im Dreieck ΔMCI lässt sich \overline{MC}^2 wie folgt bestimmen

$$\overline{MC}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{CI}^2 - 2 \cdot \overline{MI} \cdot \overline{CI} \cdot \cos \beta \quad (1.1.6u).$$

Durch die Verknüpfung von (1.1.6t) und (1.1.6u) erhält man

$$\begin{aligned} \overline{NI}^2 &= \overline{MI}^2 \cdot \cos^2 \alpha - (\overline{MI}^2 + \overline{CI}^2 - 2 \cdot \overline{MI} \cdot \overline{CI} \cdot \cos \beta) \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \overline{CI}^2 \cdot \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \overline{NI}^2 &= \overline{MI}^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) + \overline{CI}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + 2 \cdot \overline{MI} \cdot \overline{CI} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta \\ \Rightarrow \overline{NI}^2 &= \overline{MI}^2 \cdot \cos^4 \alpha + \overline{CI}^2 \cdot \sin^4 \alpha + 2 \cdot \overline{MI} \cdot \overline{CI} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta \quad (1.1.6v). \end{aligned}$$

Für \overline{NI} lässt sich durch die Terme (1.1.6n), (1.1.6o) und (1.1.6v) gewinnen

$$\begin{aligned} \overline{NI}^2 &= R^2 (\cos^2 \varphi \cdot \cos^4 \alpha + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \\ &\quad \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta) \quad (1.1.6w). \end{aligned}$$

Zum Schluss kann θ mit Hilfe der Ausdrücke (1.1.6b), (1.1.6p), (1.1.6q) und (1.1.6w) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi \cdot \cos^4 \alpha - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta}{2 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{\cos^4 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \varphi) + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta}{2 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi} \\ \Rightarrow \cos \theta &= - \frac{\cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \cos^4 \alpha - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta}{2 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \varphi} \\ \Rightarrow \cos \theta &= \sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \quad (1.1.6). \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich für die tägliche eingestrahle Sonnenenergie durch die Formeln (1.1. -5c), (1.1. -6a) und (1.1. -6) zu

$$\begin{aligned} E &= \int_{\beta_P}^{\beta_Q} P_S \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \varphi) \frac{1}{\omega} d\beta \\ \Rightarrow E &= \frac{P_S}{\omega} \cdot \left(\sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \int_{\beta_P}^{\beta_Q} \cos \beta \cdot d\beta - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \int_{\beta_P}^{\beta_Q} d\beta \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \frac{P_s}{\omega} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot (\sin\beta_Q - \sin(\beta_P)) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot (\beta_Q - \beta_P)).$$

Setzt man nun für β_Q, β_P die Ausdrücke Gleichung(1.1.5a) und (1.1.5b) ein, so ergibt sich mit der Solarkonstanten $P_s = 1368 \text{ W/m}^2$ und dem ω aus Gleichung (1.1.5c):

$$\Rightarrow E \cong \frac{33}{\pi} \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin \frac{\beta_{Tag}}{2} - \frac{\beta_{Tag}}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\varphi \right) \text{ (kWh)} \quad (1.1.7)$$

Es ist zu beachten, dass der Tageslichtbogen β_{Tag} in Radiant angegeben wird. Der Wert für β_{Tag} errechnet sich aus der Gleichung $\beta_{Tag} = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right)$ (1.1.4). Dabei ergibt sich der Sonnenwinkel (der Winkel zwischen Sonnenstrahl und Erdachse) aus $\alpha = \arccos(\sin 23,5^\circ \cdot \cos \frac{n}{365} 360^\circ)$, wobei n die Summe der Tage ab dem 22.12. ist und φ den Breitengrad bezeichnet.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass die Formeln (1.1.1) (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) und (1.1.7) die Sonnenstunden und eingestrahlte Sonnenenergie für beliebige Zeitpunkte n an jedem beliebigen Ort φ ergeben.

1.1.4 Anwendungen der vorgestellten Ergebnisse

Um die Resultate an einem Beispiel zu verdeutlichen, werden exemplarisch die Sonnenstunden und die eingestrahlte Sonnenenergie am 14. August in Siegen berechnet. Die Anzahl der Tage ab der Wintersonnenwende ist in diesem Fall $n = 235$ Tage.

Aus der Gleichung (1.1.2) erhält man

$$\delta = \frac{235}{365} 360^\circ = 231,8^\circ.$$

Der Sonnenwinkel α kann aus der Gleichung (1.1.3) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(\sin 23,5^\circ \cdot \cos 231,8^\circ) \\ &\Rightarrow \alpha = 104,3^\circ. \end{aligned}$$

Der Breitengrad für Siegen ($\varphi = 50,9^\circ$) kann mit ausreichender Genauigkeit aus einem Online-Kartendienst gewonnen werden.

Die Sonnenstunden für den 14.8. können durch Verwendung der Gleichung (1.1.1) bestimmt werden

$$\begin{aligned} t &= \frac{24}{180} \cdot \arccos\left(\frac{\tan 50,9^\circ}{\tan 104,3^\circ}\right) \\ &\Rightarrow t = 14,4 \text{ h.} \end{aligned}$$

Der Tageslichtbogen errechnet sich aus (1.1.4)

$$\begin{aligned} \beta_{Tag} &= 2 \cdot \arccos(\tan\varphi \cdot \cot\alpha) \\ &\Rightarrow \beta_{Tag} = 216,5^\circ = 3,78 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen dieser Werte in Gleichung (1.1.7) erhält man die tägliche Sonnenenergie pro Quadratmeter am 14.8.

$$E \cong \frac{33}{\pi} \left(\sin 104,3^\circ \cdot \cos 50,9^\circ \cdot \sin \frac{216,5^\circ}{2} - \frac{3,78}{2} \cdot \cos 104,3^\circ \cdot \sin 50,9^\circ \right)$$

$$\Rightarrow E = 9,9 \text{ kWh.}$$

Die vorgestellten Formeln sind in ihrer Anwendung nicht nur auf die Erde beschränkt, sondern lassen sich auch für andere Planeten nutzen. Die Berechnungen können leicht in eine Tabellenkalkulation überführt werden. Als Input für das Programm sind dann lediglich wenige Werte nötig (n , φ , ε ...). Den Output (Sonnenstunden, Sonnenenergie, Grafiken...) generiert das Programm danach automatisch.

Die Möglichkeiten der Tabellenkalkulation (z.B. Excel) können genutzt werden, um nicht nur Lernenden in der gymnasialen Oberstufe, sondern auch SuS aus dem Lernbereich der 9. bis 10. Klasse inhaltliche Vorstellungen zum Tag-Nacht-Gang und zur Sonneneinstrahlung im Jahresverlauf zu vermitteln.

Die folgende Tabellen 1.1.1 und die Diagramme 1.1.1 bis 1.1.4 zeigen beispielhaft die Ausgaben, die mit Microsoft Excel erzeugt wurden.

Damit der Leser die Berechnungen selbst für beliebige Zeitpunkte und Orte nachvollziehen kann, ist die Excel-Datei unter [A 1.1.8] zum Download bereitgestellt.

Außer Excel kann man auch andere Software mit unterschiedlichen Programmiersprachen nutzen. Als Input werden Datum, φ , ε ... eingespeist und als Output werden die Zahlenwerte und graphischen Darstellungen der Sonnenstunden und Sonnenenergie ausgegeben. Im Anhang dieser Arbeit sind die Quelltexte für die Programme einzusehen, die mit Pascal ([A 1.1.9 a] bis [A 1.1.12 b]) und Matlab ([A 1.1.13] bis [A 1.1.16]) verfasst wurden. Mit diesem Code kann man die Parameter des Programms modifizieren, um die Berechnung beispielsweise auch für andere Planeten durchzuführen.

Man beachte: In den bislang vorgestellten Überlegungen zur Energieeinstrahlung wurde nicht der sogenannte Energieeintrag in den Erdboden (oder eine Solarzelle) ermittelt, sondern lediglich die auf der Flächeneinheit ankommende Energiemenge.

Input		
	Datum (1..31)	Monat (1..12)
(Datum und Monat)	14	8
Fläche (m ²)	1	
Breitengrad	50,9	
Absorptionskoeffizient der Luft (0 bis 1)	0	
Solarkonstante (W/m ²)	1375	
Strompreis pro kWh (cent) (Einspeisevergütung)	21	
Tage pro Jahr	365	
Stunden pro Tag	24	
Schiefe der Ekliptik	23,5	
Ergebnisse		
Tage ab Wintersonnenwende	235	
Sonnestunden am 14.8.	14,4	
Eingestrahlte Energie auf die Fläche von 1 m ² am 14.8. (kWh)	9,9	
Summe der Sonnenstunden in einem Jahr	4380,0	
Auf eine Fläche von 1 m ² eingestrahlte Energie pro Jahr (kWh)	2476,5	
Theoretisches Einkommen auf der Fläche von 1 m ² pro Jahr (Euro)	520,1	

Tabelle 1.1.1: Inputtabelle und Ergebnistabelle.

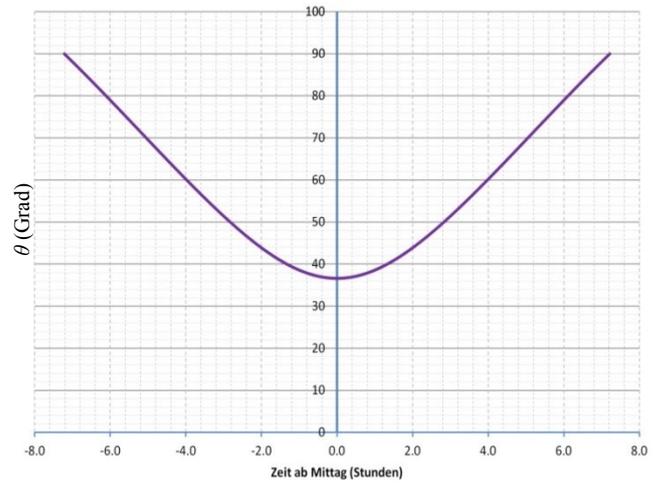
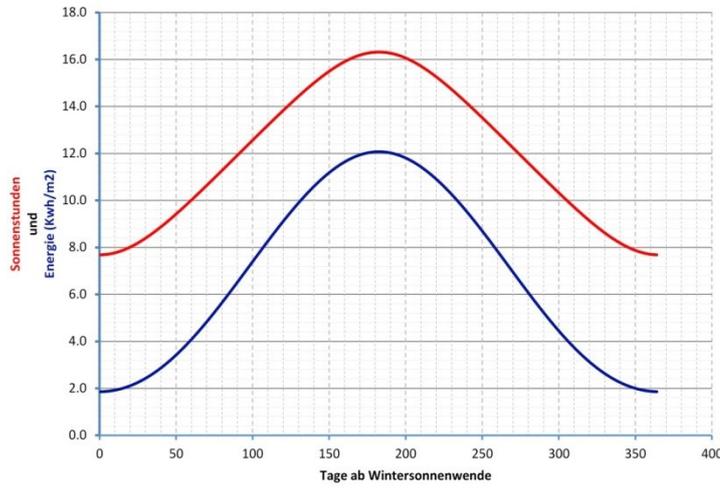


Diagramm 1.1.1.: Sonnenstunden und Sonnenenergie im Jahresverlauf für Siegen (Man beachte die Idealisierung: Das Diagramm gilt nur ohne den Einfluss der Erdatmosphäre, z.B. also auch keine Wolkenbildung!).

Diagramm 1.1.2: Zenitwinkel θ im Tagesverlauf für Siegen am 14.8.

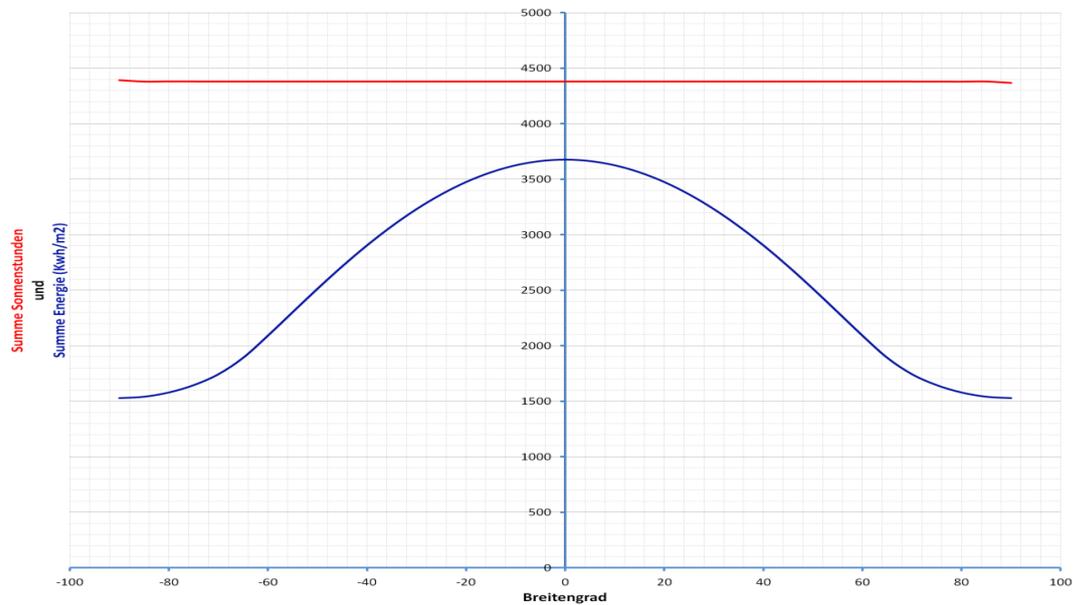


Diagramm 1.1.3: Die Verteilung der jährlichen Sonnenstunden- und Sonnenenergiesumme in Abhängigkeit vom Breitengrad.

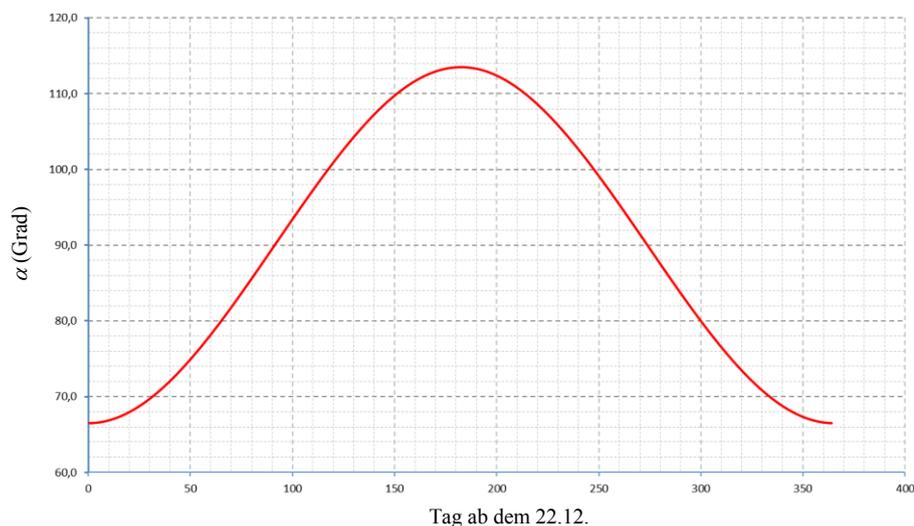


Diagramm 1.1.4: Sonnenwinkel α im Jahresverlauf.

1.2 Berechnung mit Hilfe der analytischen Geometrie

1.2.1 Bestimmung der wichtigen Parameter

1.2.1.1 Der Sonnenwinkel α

In das System Sonne-Erde wird das Koordinatensystem S_{xyz} mit drei Einheitsvektoren \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} gelegt (Abbildungen 1.2.1 und 1.2.2). \vec{n} ist der Einheitsvektor, der längs der Erdachse liegt.

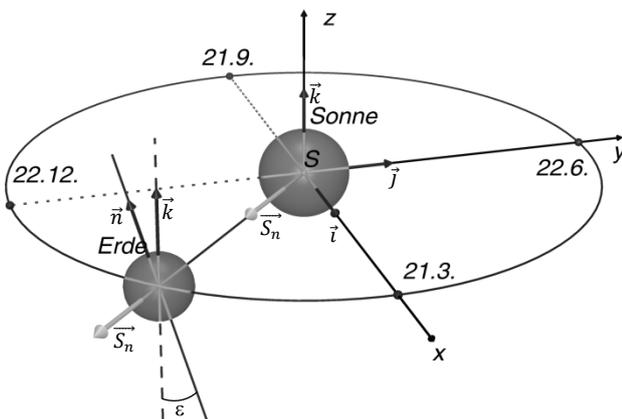


Abbildung 1.2.1: Das S_{xyz} Koordinatensystem mit Sonnen- und Erdkugel [A 1.2.1].

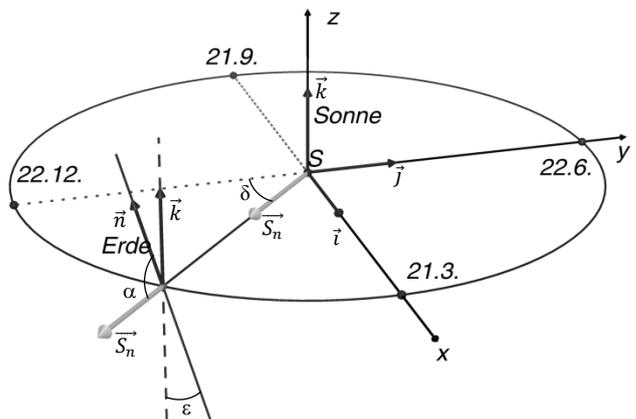


Abbildung 1.2.2: Das S_{xyz} Koordinatensystem ohne die Darstellung der Sonnen- und Erdkugel.

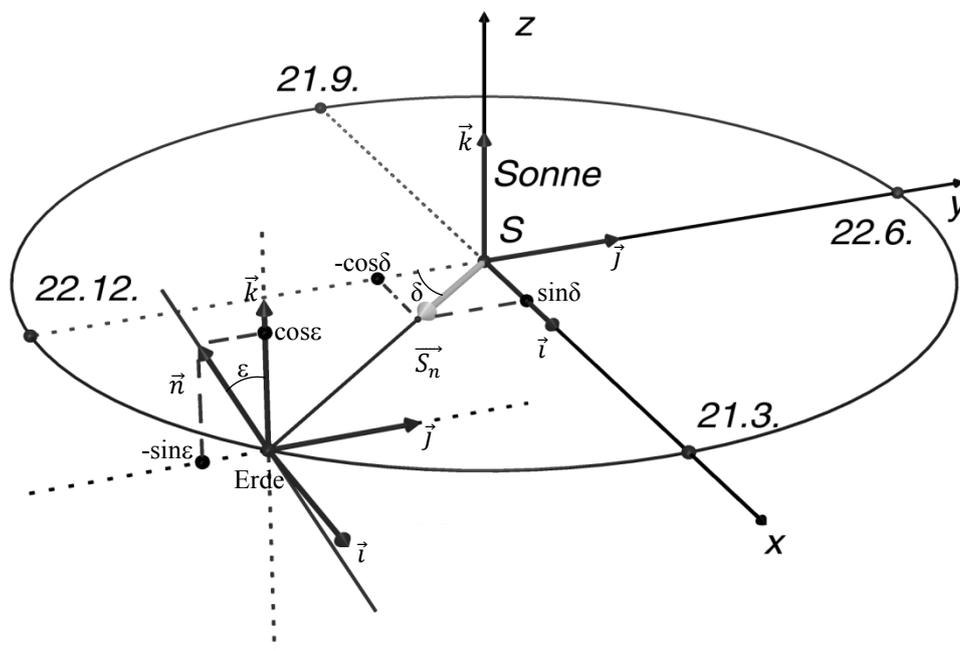


Abbildung 1.2.3: Grafik zur Berechnung der Vektoren \vec{n} und \vec{S}_n [A 1.2.2].

Aus der Abbildung 1.2.3 können die Koordinaten der Vektors \vec{n} und \vec{S}_n berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Einheitsvektoren normiert sind, also $|\vec{n}| = |\vec{S}_n| = 1$

$$\vec{n} = (0, -\sin\varepsilon, \cos\varepsilon)$$

$$\vec{S}_n = (\sin\delta, -\cos\delta, 0).$$

Der Sonnenwinkel α zwischen den Sonnenstrahlen \vec{S}_n und der Erdachse \vec{n} wird mit folgender Gleichung bestimmt:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{S}_n}{|\vec{n}| \cdot |\vec{S}_n|} = \frac{0 \cdot \sin\delta + (-\sin\varepsilon) \cdot (-\cos\delta) + \cos\varepsilon \cdot 0}{1 \cdot 1} = \sin\varepsilon \cdot \cos\delta.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir sofort wieder Gleichung (1.1.3)

$$\alpha = \arccos(\sin\varepsilon \cdot \cos\delta).$$

1.2.1.2 Bestimmung von \vec{S}_n in einem festen Koordinatensystem auf die Erde

Um die Komponenten von \vec{S}_n zu ermitteln, gibt es zwei Verfahren. Zum einen können sie über die Projektion von \vec{S}_n auf jede Achse bestimmt werden und zum andern können sie über eine Koordinatentransformation gewonnen werden.

1.2.1.2.1 Erstes Verfahren: Projektion von \vec{S}_n auf die Koordinatenachsen

Zunächst wird ein Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$ fest auf einen beliebigen Ort M auf der Erde gelegt (Abbildungen 1.2.4 und 1.2.5) ([A 1.2.3] und [A 1.2.4]). Die Koordinatenachsen MX_1 und MY_1 spannen die Tangentialebene an die Erdoberfläche im Beobachtungspunkt M auf, MZ_1 steht senkrecht auf dieser Ebene. MX_1 zeigt nach Norden, MY_1 in die Westrichtung am Beobachtungsort.

Wenn der Beobachter fest am Punkt M steht, dann dreht sich der Sonnenstrahlenvektor \vec{S}_n um die Achse \vec{n} , da sich der Wert des Winkels α an einem Tag nicht ändert. Sein Drehsinn ist dem der Erde entgegengerichtet. Deswegen überstreicht der Sonnenstrahlenvektor \vec{S}_n an einem ganzen Tag im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$ einen Kegel (im folgenden Sonnenkegel genannt). In den Abbildungen 1.2.6 und 1.2.7 [A 1.2.5] ist dieser Sachverhalt noch einmal illustriert.

In Abbildung 1.2.7 entspricht der hell dargestellte Kegelteil oberhalb der Ebene (X_1MY_1) der Sonnenscheindauer und der dunkel markierte Kegelteil unter der Ebene (X_1MY_1) der Nachtzeit. Abbildungen 1.2.8 und 1.2.9 [A 1.2.6] stellen diesen Umstand anhand einer Detailbetrachtung nochmals deutlicher dar.

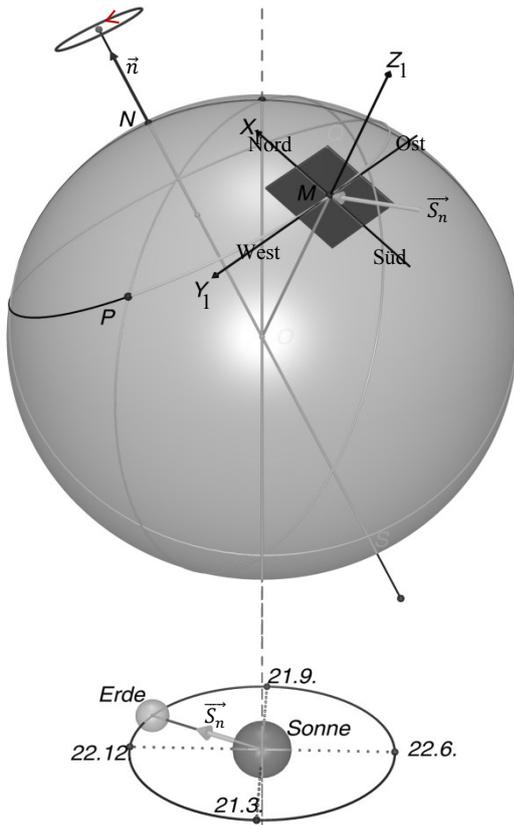


Abbildung 1.2.4: Die Lage des $MX_1Y_1Z_1$ Koordinatensystems [A 1.2.3].

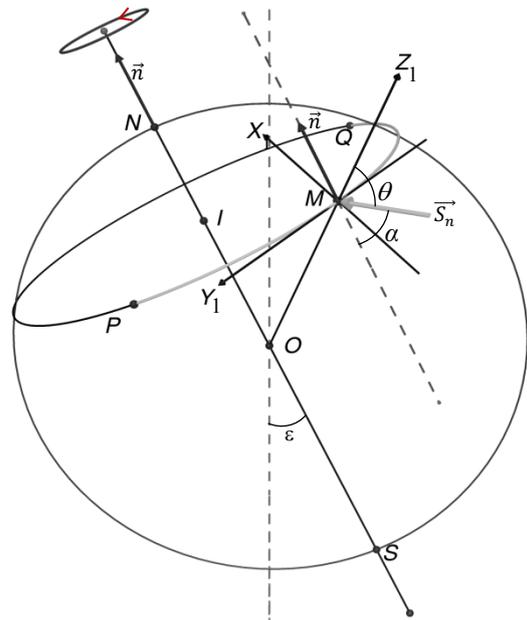


Abbildung 1.2.5: Die Lage des $MX_1Y_1Z_1$ Koordinatensystems mit dem Zenitwinkel θ und α [A 1.2.4].

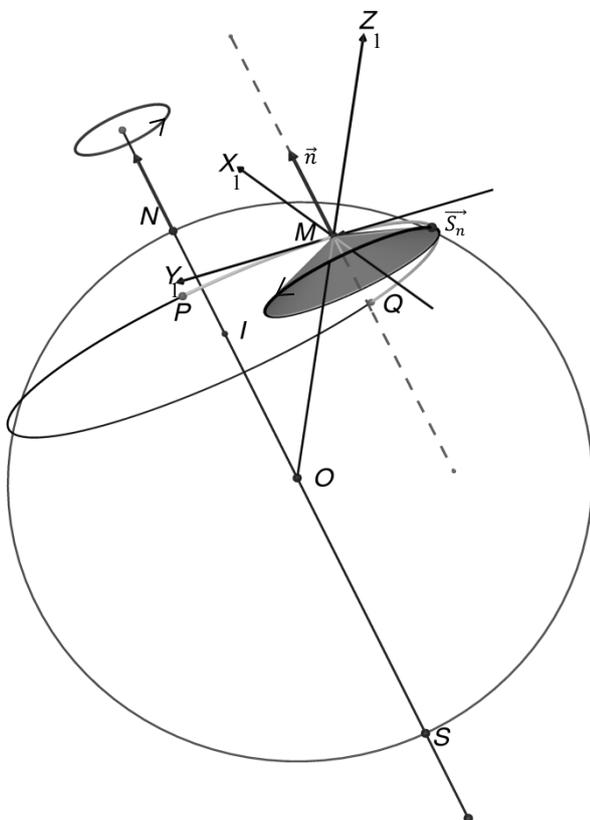


Abbildung 1.2.6: \vec{S}_n überstreicht an einem ganzen Tag einen Kegel um die Achse \vec{n} .

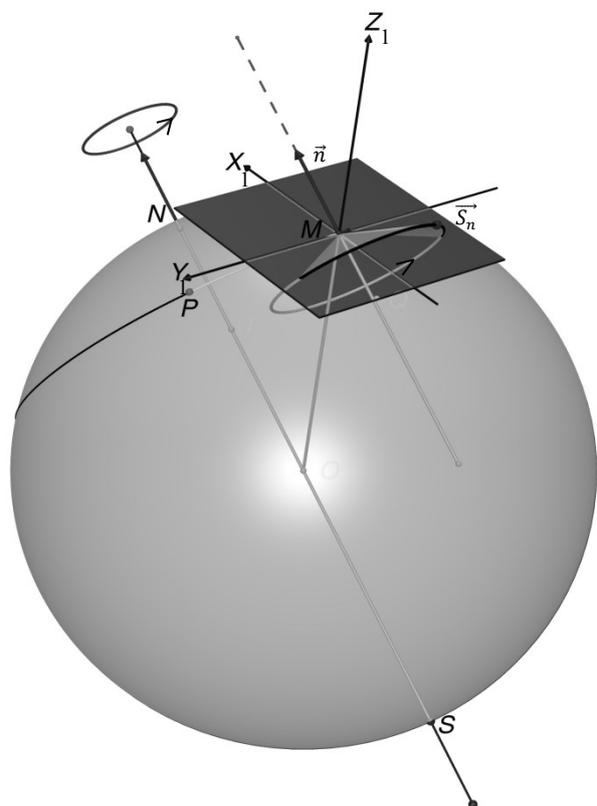


Abbildung 1.2.7: Das Tag - Nacht - Verhältnis wird deutlich, wenn man Abbildung 1.2.6 um die Horizont-Ebene erweitert, die den Kegel in zwei Teile trennt [A 1.2.5].

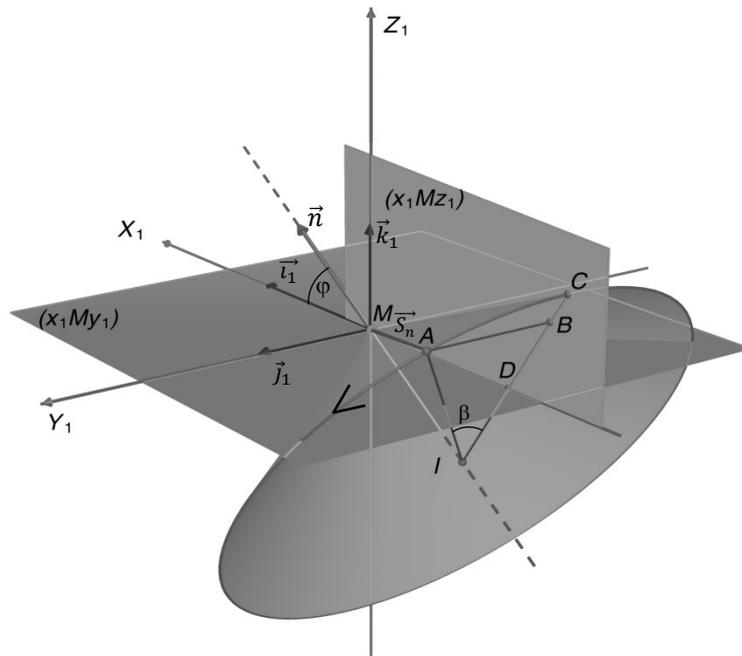


Abbildung 1.2.8: Genauere Darstellung des Tag-Nacht-Verhältnisses des Sonnenkegels (mit markierten Oberflächen) [A 1.2.6].

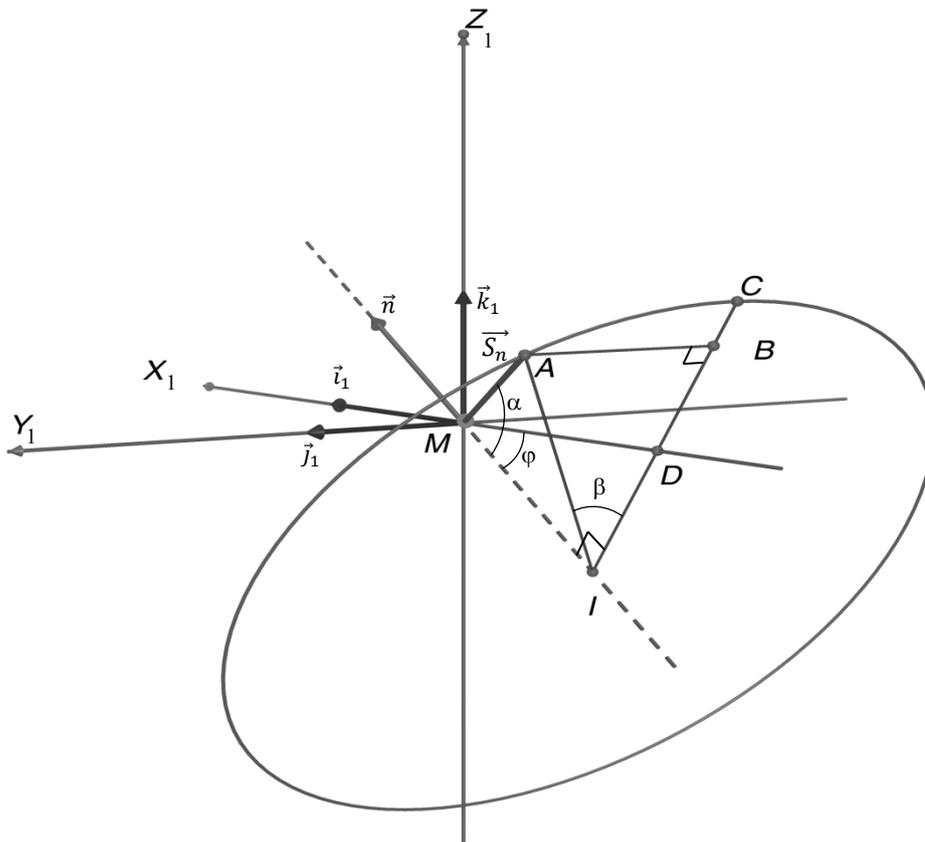


Abbildung 1.2.9: Genauere Darstellung des Tag-Nacht-Verhältnisses des Sonnenkegels (ohne die Oberflächen).

Wenn der Einheitsvektor $\vec{S}_n = \vec{AM}$ um die Achse rotiert, die längs des Einheitsvektors \vec{n} bzw. parallel zur Erdachse liegt, dann überstreicht die Spitze des Einheitsvektors \vec{S}_n einen Kreis mit dem Mittelpunkt I. Punkt C ist der Schnittpunkt des Kreises und der Ebene (X_1MZ_1) und entspricht dem Mittagszeitpunkt. Die Umlaufzeit entspricht 24 h. Deshalb hängt die Änderung des Winkels β (Tageslichtbogen), den \vec{IC} und \vec{IA} einschließen, von der Zeit t ab:

$$\beta = (t - T_K) \frac{2 \cdot \pi}{24h} (\text{rad}) \quad (1.2.1a)$$

Da ΔIAM rechtwinklig ist, gilt

$$\overline{IM} = \overline{AM} \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \quad (1.2.1b)$$

$$\overline{IA} = \overline{AM} \cdot \sin\alpha = \sin\alpha \quad (1.2.1c).$$

\overline{AB} steht senkrecht zur Ebene (x_1Mz_1). Daraus folgt

$$\overline{AB} = (0, -\overline{AB}, 0) \quad (1.2.1d).$$

Aufgrund des Ergebnisses (1.2.1c) und der Rechtwinkligkeit von ΔBAI kann man sagen, dass

$$\overline{BI} = \overline{IA} \cdot \cos\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta \quad (1.2.1e)$$

$$\overline{AB} = \overline{IA} \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (1.2.1g).$$

Durch das Einsetzen von (1.2.1g) in (1.2.1d) erhält man

$$\overline{AB} = (0, -AB, 0) = (0, -\sin\alpha \cdot \sin\beta, 0) \quad (1.2.1h).$$

Weil \overline{BI} in der Ebene (x_1Mz_1) liegt, gilt

$$y_{1\overline{BI}} = 0 \quad (1.2.1j)$$

Weil auch ΔIDM ein rechtwinkliges Dreieck ist, lässt sich der Winkel \widehat{IDM} wie folgt bestimmen

$$\widehat{IDM} = 90^\circ - \varphi \quad (1.2.1j).$$

Weil dieser Winkel gleich den Winkel zwischen \overline{BI} und \vec{i}_1 ist, kann man sagen

$$\vec{i}_1 \cdot \overline{BI} = 1 \cdot \overline{BI} \cdot \cos\widehat{IDM} = 1 \cdot x_{1\overline{BI}} + 0 \cdot y_{1\overline{BI}} + 0 \cdot z_{1\overline{BI}} = x_{1\overline{BI}}.$$

Die Verknüpfung dieses Ausdrucks mit (1.2.1e) ergibt

$$x_{1\overline{BI}} = \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\varphi \quad (1.2.1k).$$

Da \vec{i}_1 und \vec{k}_1 einen rechten Winkel einschließen, kann der Winkel zwischen \overline{BI} und \vec{k}_1 beschrieben werden durch

$$\widehat{\overline{BI}, \vec{k}_1} = 90^\circ + 90^\circ - \varphi = 180^\circ - \varphi$$

$$\vec{k}_1 \cdot \overline{BI} = 1 \cdot \overline{BI} \cdot \cos\widehat{\overline{BI}, \vec{k}_1} = 0 \cdot x_{1\overline{BI}} + 0 \cdot y_{1\overline{BI}} + 1 \cdot z_{1\overline{BI}} = z_{1\overline{BI}}.$$

Die Kombination dieses Terms mit Gleichung (1.2.1e) führt zu

$$z_{1\overline{BI}} = \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = -\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi \quad (1.2.1m).$$

Weil auch \overline{IM} in der Ebene (x_1Mz_1) liegt, kann man sagen, dass

$$y_{1\overline{IM}} = 0 \quad (1.2.1n).$$

Der Winkel zwischen \vec{IM} und \vec{i}_1 ist gleich φ , deshalb ist

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{IM} = 1 \cdot \vec{IM} \cdot \cos\varphi = 1 \cdot x_{1\vec{IM}} + 0 \cdot y_{1\vec{IM}} + 0 \cdot z_{1\vec{IM}} = x_{1\vec{IM}}.$$

Wird diese Gleichung mit Gleichung (1.2.1b) kombiniert, ergibt sich

$$x_{1\vec{IM}} = \cos\alpha \cdot \cos\varphi \quad (1.2.1o)$$

Der Winkel zwischen \vec{IM} und \vec{k}_1 ist gleich $90^\circ - \varphi$, daher ist

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{IM} = 1 \cdot \vec{IM} \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = 0 \cdot x_{1\vec{IM}} + 0 \cdot y_{1\vec{IM}} + 1 \cdot z_{1\vec{IM}} = z_{1\vec{IM}}.$$

Aus der Gleichung (1.2.1b) wird ersichtlich, dass

$$z_{1\vec{IM}} = \cos\alpha \cdot \sin\varphi \quad (1.2.1p).$$

$$\vec{s}_n = \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BI} + \vec{IM}$$

Durch die Verknüpfung dieser Gleichung mit den Gleichungen (1.2.1h), (1.2.1i), (1.2.1k), (1.2.1m), (1.2.1n), (1.2.1o) und (1.2.1p) ergibt sich für die Komponenten des Sonnenstrahlvektors

$$\vec{s}_n = (\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\varphi + \cos\alpha \cdot \cos\varphi, -\sin\alpha \cdot \sin\beta, \cos\alpha \cdot \sin\varphi - \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi) \quad (1.2.1).$$

1.2.1.2.2 Zweites Verfahren: Koordinatentransformation von \vec{s}_n

Nun wird ein weiteres Koordinatensystem $Ox_2y_2z_2$ festgelegt, dessen Mittelpunkt O im Erdmittelpunkt liegt. Dabei fällt Oz_2 mit der Erdachse zusammen (der Basisvektor \vec{k}_2 ist damit für die Achse Oz_2 identisch mit \vec{n}) und der Vektor \vec{s}_n liegt in der Ebene Oy_2z_2 . Das hat zur Folge, dass auch die Sonne in der Ebene Oy_2z_2 liegt (Abbildung 1.2.10 [A 1.2.7]).

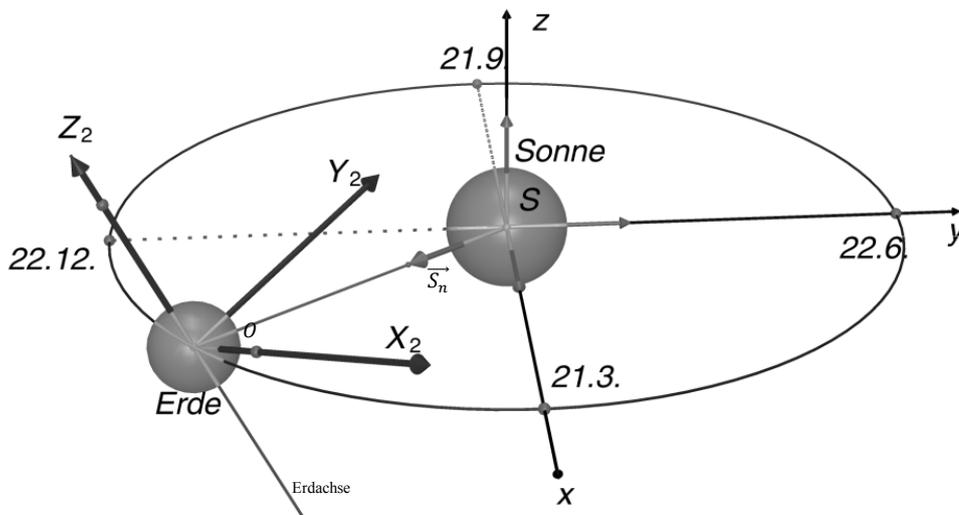


Abbildung 1.2.10: Die Lage des Koordinatensystems $Ox_2y_2z_2$ [A 1.2.7].

Ziel der folgenden Berechnung ist die Bestimmung der drei Komponenten von \vec{S}_n im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$. Diese werden in der Spaltenmatrix $\mathbf{S}_{n1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ dargestellt.

Dazu werden zuerst die Komponenten von \vec{S}_n im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$ gesucht, die in der Spaltenmatrix $\mathbf{S}_{n2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ dargestellt werden sollen. Anschließend wird die quadratische Matrix \mathbf{M} bestimmt, die das Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$ mit den Basisvektoren $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ in das Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$ mit den Basisvektoren $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ transformiert. Schließlich wird die Spaltenmatrix $\mathbf{S}_{n1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ durch die Gleichung der Koordinatentransformation (1.2.2a) berechnet.

$$\mathbf{S}_{n1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}_{n2} \quad (1.2.2a).$$

Damit ergeben sich drei Arbeitsschritte.

Erster Schritt: Bestimmung der Komponenten von \vec{S}_n im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$.

Aus der Abbildung 1.2.11 [A 1.2.8] können die drei Komponenten des Vektors \vec{S}_n im $OX_2Y_2Z_2$ abgelesen werden.

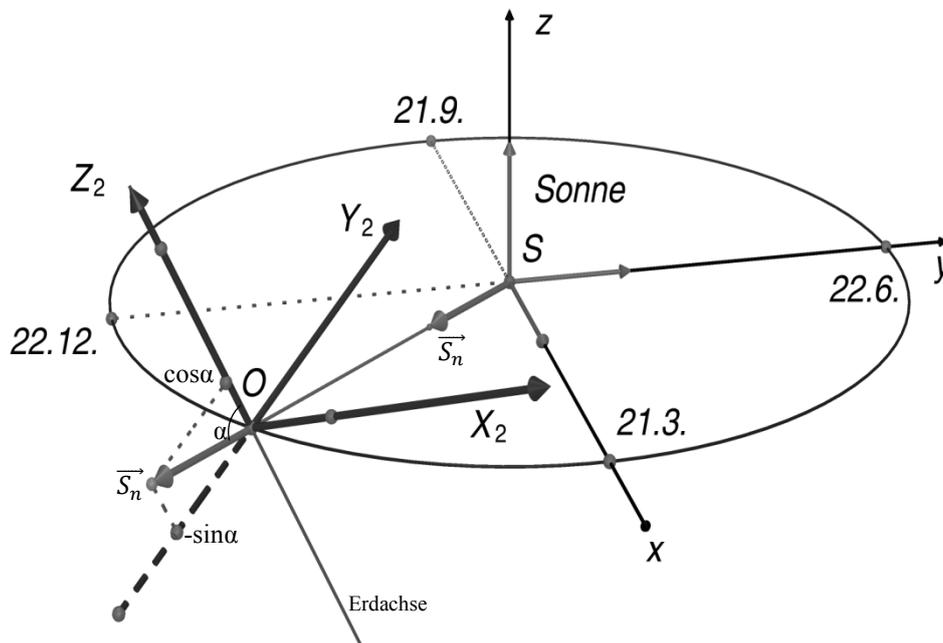


Abbildung 1.2.11: Die Komponenten \vec{S}_n in $OX_2Y_2Z_2$ [A 1.2.8].

Diese sind im einzelnen $x_2 = 0$; $y_2 = -\sin\alpha$; $z_2 = \cos\alpha$. Somit ergibt sich die Spaltenmatrix im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$

$$\mathbf{S}_{n2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1.2.2b).$$

Zweiter Schritt: Die Elemente der Transformationsmatrix

Die Elemente der Transformationsmatrix $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ergeben sich dadurch, dass jeder Basisvektor ($\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$) des Koordinatensystems $OX_2Y_2Z_2$ als Linearkombination der Basisvektoren ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) des Koordinatensystems $MX_1Y_1Z_1$ dargestellt wird

$$\vec{i}_2 = a_{11} \cdot \vec{i}_1 + a_{21} \cdot \vec{j}_1 + a_{31} \cdot \vec{k}_1 \quad (1.2.2c)$$

$$\vec{j}_2 = a_{12} \cdot \vec{i}_1 + a_{22} \cdot \vec{j}_1 + a_{32} \cdot \vec{k}_1 \quad (1.2.2d)$$

$$\vec{k}_2 = a_{13} \cdot \vec{i}_1 + a_{23} \cdot \vec{j}_1 + a_{33} \cdot \vec{k}_1 \quad (1.2.2e).$$

Das bedeutet, dass jeder Koeffizient $a_{11} \dots a_{33}$ einer Komponente des jeweiligen Basisvektors $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$ entspricht. Zur Berechnung dieser Koeffizienten benötigt man Abbildung 1.2.12 [A 1.2.9].

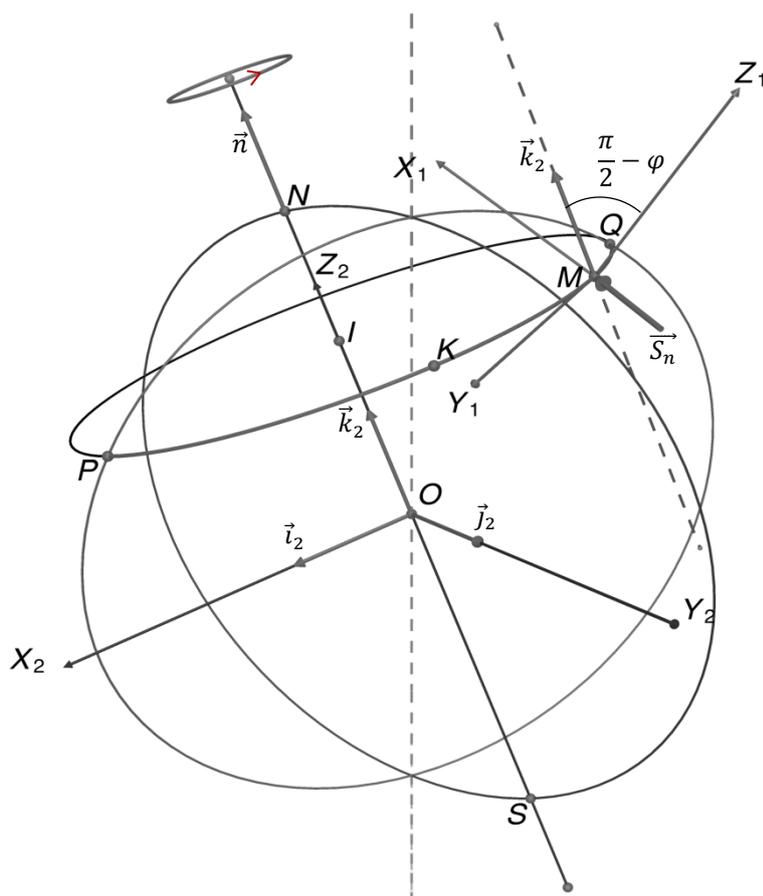


Abbildung 1.2.12: Die Lage der Koordinatensysteme $OX_2Y_2Z_2$ und $MX_1Y_1Z_1$ [A 1.2.9].

Der Ursprung M des Koordinatensystems $MX_1Y_1Z_1$ wird in den Punkt O verschoben. Danach wird $\vec{i}_2 = \vec{OA}$ auf die drei Achsen OX_1, OY_1 und OZ_1 projiziert. Dadurch erhält man die projizierten Strecken \vec{OC}, \vec{OE} und \vec{OD} (Abbildung 1.2.13a). Mit ihnen lässt sich der Basisvektor \vec{i}_2 des Koordinatensystems $OX_2Y_2Z_2$ ausdrücken als

$$\vec{i}_2 = \overline{OC} \cdot \vec{i}_1 + \overline{OE} \cdot \vec{j}_1 - \overline{OD} \cdot \vec{k}_1.$$

Aus der Abbildung 1.2.13a wird die Berechnung der drei Projektionen \overline{OC} , \overline{OD} und \overline{OE} ersichtlich. Dabei ist zu beachten, dass die Länge des Einheitsvektors \overline{OA} gleich Eins ist. Demnach muss $\overline{OC} = \sin \beta \cdot \sin \varphi$; $\overline{OE} = \cos \beta$ und $\overline{OD} = \sin \beta \cdot \cos \varphi$ gelten. Damit kann \vec{i}_2 auch ausgedrückt werden als

$$\vec{i}_2 = \sin \beta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{i}_1 + \cos \beta \cdot \vec{j}_1 - \sin \beta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{k}_1 \quad (1.2.2f).$$

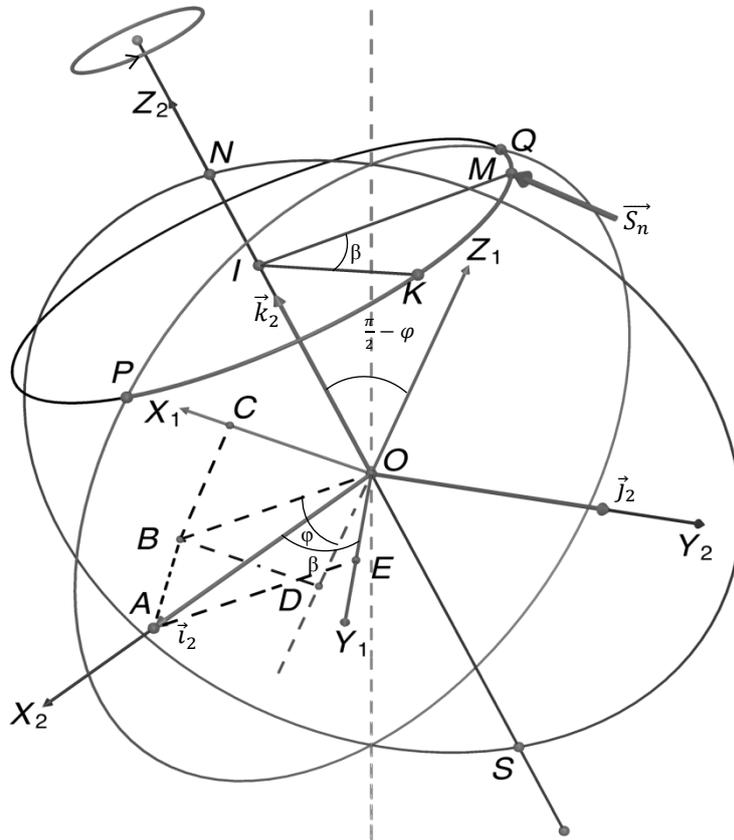


Abbildung 1.2.13a: Die drei Projektion des \vec{i}_2 im $OX_1Y_1Z_1$ [A 1.2.10].

Analog ergibt sich für den Basisvektor \vec{j}_2 in $MX_1Y_1Z_1$ mit der Abbildung 1.2.13b

$$\vec{j}_2 = -\overline{OC} \cdot \vec{i}_1 + \overline{OE} \cdot \vec{j}_1 + \overline{OD} \cdot \vec{k}_1.$$

Mit $\overline{OC} = \cos \beta \cdot \sin \varphi$; $\overline{OE} = \sin \beta$ und $\overline{OD} = \cos \beta \cdot \cos \varphi$ folgt

$$\vec{j}_2 = -\cos \beta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{i}_1 + \sin \beta \cdot \vec{j}_1 + \cos \beta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{k}_1 \quad (1.2.2g).$$

Und auch für den Basisvektor \vec{k}_2 in $MX_1Y_1Z_1$ lässt sich das gleiche Verfahren anwenden. Demnach gilt mit Abbildung 1.2.13c

$$\vec{k}_2 = \overline{OC} \cdot \vec{i}_1 + 0 \cdot \vec{j}_1 + \overline{OD} \cdot \vec{k}_1$$

und mit $\overline{OC} = \cos \varphi$ und $\overline{OD} = \sin \varphi$ ergibt sich

$$\vec{k}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{i}_1 + 0 \cdot \vec{j}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{k}_1 \quad (1.2.2h).$$

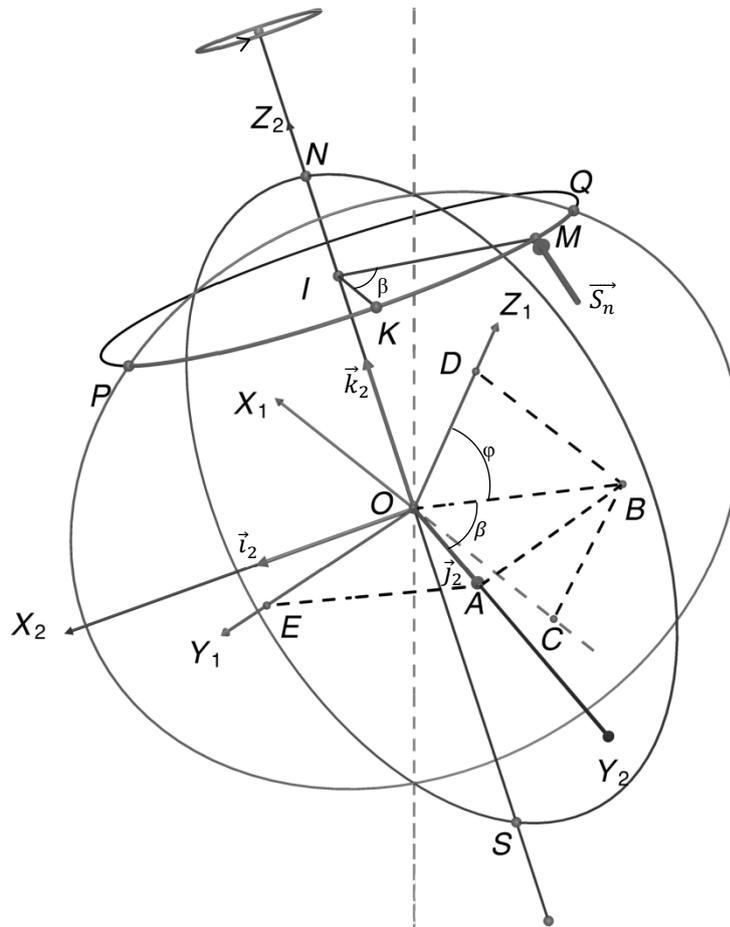


Abbildung 1.2.13b: Die drei Projektionen von \vec{j}_2 in $OX_1Y_1Z_1$.

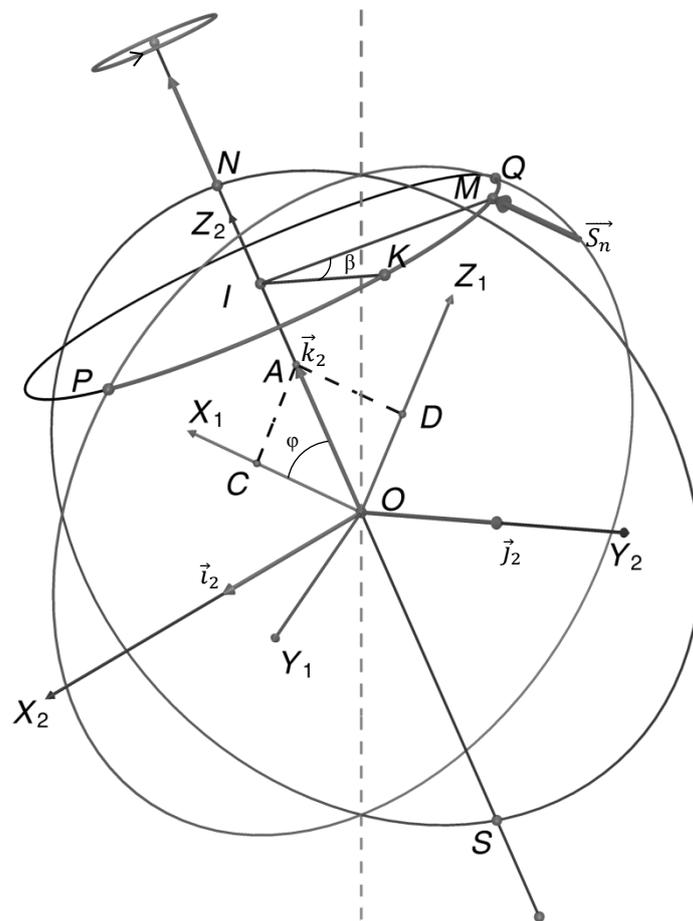


Abbildung 1.2.13c: Die drei Projektionen des Vektors \vec{k}_2 in $OX_1Y_1Z_1$.

Vergleicht man die Gleichungen (1.2.2c), (1.2.2d) und (1.2.2e) mit den Gleichungen (1.2.2f), (1.2.2g) und (1.2.2h), so ergeben sich als alle Elemente der Transformationsmatrix \mathbf{M} zu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta \cdot \cos \varphi & \cos \beta \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1.2.2i).$$

Letzter Schritt: Berechnung jeder Koordinate von \vec{S}_n im Koordinatensystem $\text{MX}_1\text{Y}_1\text{Z}_1$

Aus den Gleichungen (1.2.2a), (1.2.2b) und (1.2.2i) folgt:

$$\mathbf{S}_{n1} = \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta \cdot \cos \varphi & \cos \beta \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Diese Matrizenmultiplikation wird durchgeführt, indem man die Summe der Produkte bildet, die sich aus den Elementen jeder Zeile der ersten Matrix und den Elementen der Spalte der zweiten Matrix ergeben. Damit erhält man die Spaltenmatrix \mathbf{S}_{n1}

$$\mathbf{S}_{n1} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha + \cos \varphi \cdot \cos \alpha \\ -\sin \beta \cdot \sin \alpha \\ -\cos \beta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha + \sin \varphi \cdot \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Als Vektor geschrieben, ergibt die Matrix \mathbf{S}_{n1} den Vektor \vec{S}_n

$$\vec{S}_n = (\cos \beta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha + \cos \varphi \cdot \cos \alpha, -\sin \beta \cdot \sin \alpha, -\cos \beta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha + \sin \varphi \cdot \cos \alpha) \quad (1.2.2).$$

Dieses Ergebnis (1.2.2) ist identisch mit der Gleichung (1.2.1).

1.2.1.3 Der Zenitwinkel θ

Der Zenitwinkel θ am Punkt M schließt den zur Sonne gerichteten Vektor $(-\vec{S}_n)$ und die Normale zur Horizontebene XMY (in Abbildung 1.2.14. durch den Vektor \vec{k}_1 , als Einheitsvektor in Z-Richtung von $\text{MX}_1\text{Y}_1\text{Z}_1$ dargestellt) ein. Er lässt sich mit Hilfe des Skalarprodukts dieser beiden Vektoren bestimmen zu

$$\cos \theta = \frac{-\vec{S}_n \cdot \vec{k}_1}{|\vec{S}_n| \cdot |\vec{k}_1|}.$$

Mit (1.2.2) gilt damit

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi + \cos \alpha \cdot \cos \varphi) \cdot 0 + (-\sin \alpha \cdot \sin \beta) \cdot 0 + (\cos \alpha \cdot \sin \varphi - \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi) \cdot 1}{1 \cdot 1} \\ &\Rightarrow \cos \theta = \sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \quad (1.2.3). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit dem Resultat aus der vereinfachten geometrischen Herleitung (Gleichung (1.1.6)).

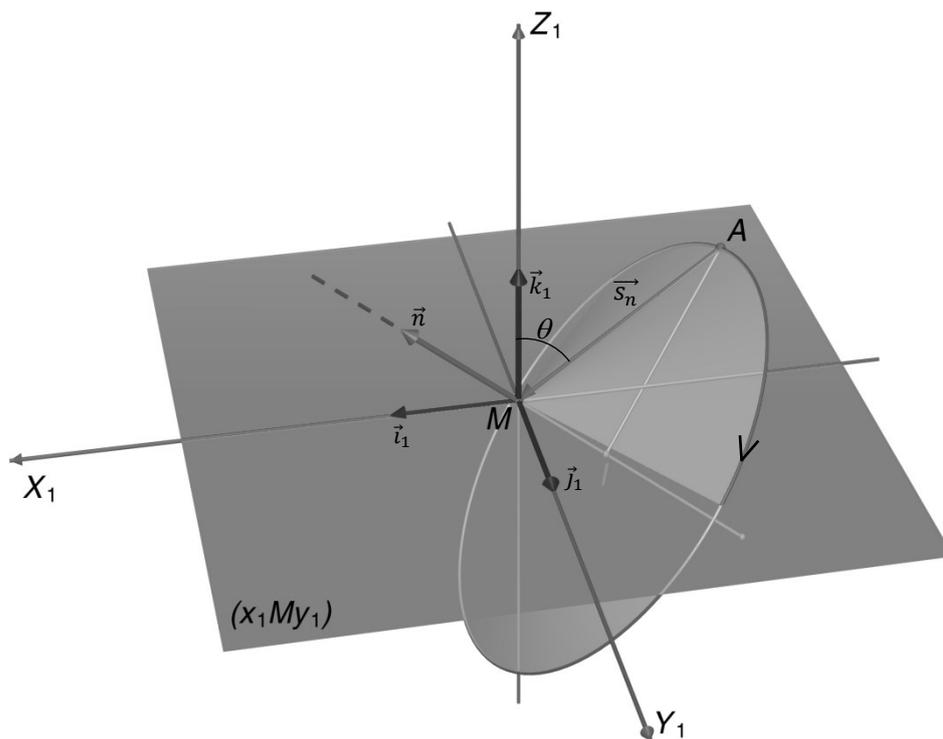


Abbildung 1.2.14: Darstellung des Zenitwinkels θ [A 1.2.11].

1.2.2 Berechnung der Sonnenstunden

In Punkt M scheint die Sonne wenn

$$0 \leq \theta < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos\theta > 0$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\varphi > 0 \quad (1.2.4a).$$

Aus der Gleichung (1.1.3) folgt

$$0 < \alpha < \pi$$

$$\Rightarrow \sin\alpha > 0$$

und darüber hinaus ist das Intervall für den Breitengrad (Die Erdpole werden nachfolgend nicht berücksichtigt.)

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi > 0.$$

Dann ist (1.2.4a) äquivalent zu

$$\cos\beta > \frac{\cos\alpha \cdot \sin\varphi}{\sin\alpha \cdot \cos\varphi} = \cot\alpha \cdot \tan\varphi \quad (1.2.4b).$$

Wenn

$$\begin{aligned} \cot\alpha \cdot \tan\varphi &> 1 \\ \Rightarrow \tan\varphi &> \tan\alpha \\ \Rightarrow \varphi &> \alpha \text{ oder } \varphi < -(180^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

und $\cos\beta$ im Bereich von -1 bis 1 liegt, hat die Ungleichung (1.2.4b) keine Lösung. Das bedeutet, dass der Punkt M nicht von der Sonne beschienen wird. Es ist dauerhaft dunkel.

Und wenn

$$\begin{aligned} \cot\alpha \cdot \tan\varphi &< -1 \\ \Rightarrow \tan\varphi &< \tan(-\alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi < -\alpha \text{ oder } \varphi > 180^\circ - \alpha,$$

dann hat die Ungleichung (1.2.4b) unendlich viele Lösungen. Dann ist es im Punkt M dauerhaft hell.

Wenn aber

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cot\alpha \cdot \tan\varphi \leq 1 \\ \Rightarrow \tan(-\alpha) &\leq \tan\varphi \leq \tan\alpha \\ \Rightarrow -\alpha &\leq \varphi \leq \alpha, \end{aligned}$$

dann ist (1.2.4a), bzw. (1.2.4b) äquivalent zu

$$-\arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi) < \beta < \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi).$$

Setzt man in diesen Ausdruck die Gleichung (1.1.5) für den Zeitbogen β ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi) &< \omega \cdot (t - T_K) < \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi) \\ \Rightarrow T_K - \frac{\arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)}{\omega} &< t < T_K + \frac{\arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)}{\omega} \quad (1.2.4c) \end{aligned}$$

Dieser Ungleichung entnimmt man den Zeitpunkt des Sonnenaufgangs:

$$t_A = T_K - \frac{\arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)}{\omega} \quad (1.2.4)$$

(dabei ist T_K der Zeitpunkt des wahren Mittags).

Entsprechend kann der Zeitpunkt des Sonnenuntergangs angegeben werden mit

$$t_U = T_K + \frac{\arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)}{\omega} \quad (1.2.5).$$

Aus den Gleichungen (1.2.4) und (1.2.5) erhält man für die Sonnenscheindauer

$$t = t_U - t_A = 2 \cdot \frac{\arccos(\cot \alpha \cdot \tan \varphi)}{\omega} = \frac{24}{\pi} \cdot \arccos(\cot \alpha \cdot \tan \varphi) (\text{Stunden}) \quad (1.2.6).$$

Dabei ist φ der Breitengrad und α der Sonnenwinkel. Dieser kann aus der Summe n der Tage ab dem 22.12. mit der Gleichung (1.1.3.) bestimmt werden

$$\alpha = \arccos \left(\sin 23,5^\circ \cdot \cos \frac{n}{365} 360^\circ \right).$$

Das Ergebnis ist identisch mit dem Ergebnis aus Abschnitt 1.1.2.3. Es ist eine Funktion für die Sonnenscheindauer t mit den zwei Variablen Breitengrad φ und der Anzahl n der Tage ab dem 22.12. Diese Abhängigkeit kann grafisch dargestellt werden (die Diagramme 1.2.1 und 1.2.2 [A 1.2.12]).

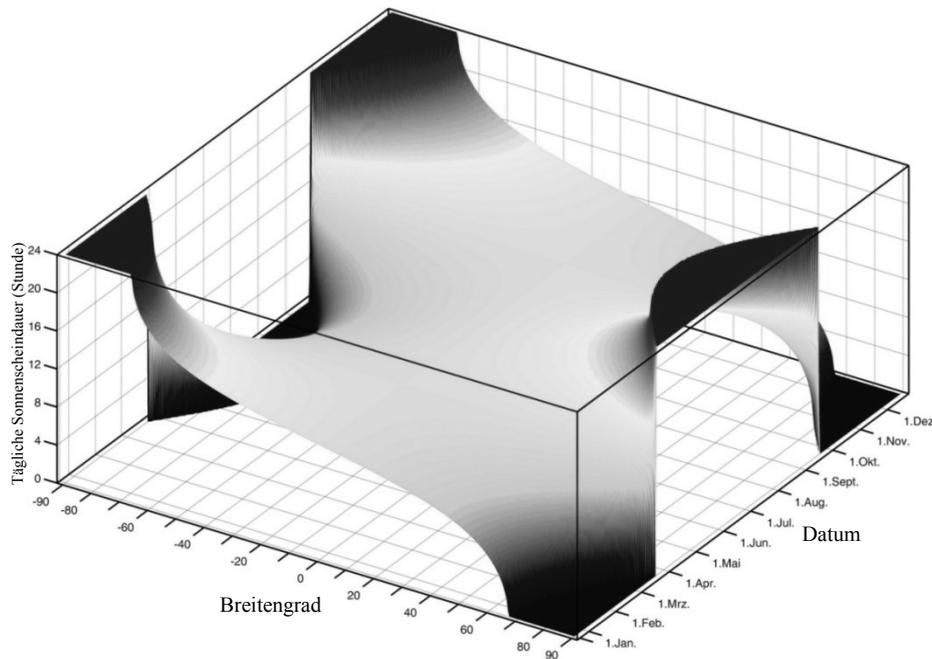


Diagramm 1.2.1: (Orthogonale 3D-Darstellung): Verlauf der täglichen Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum [A 1.2.12].

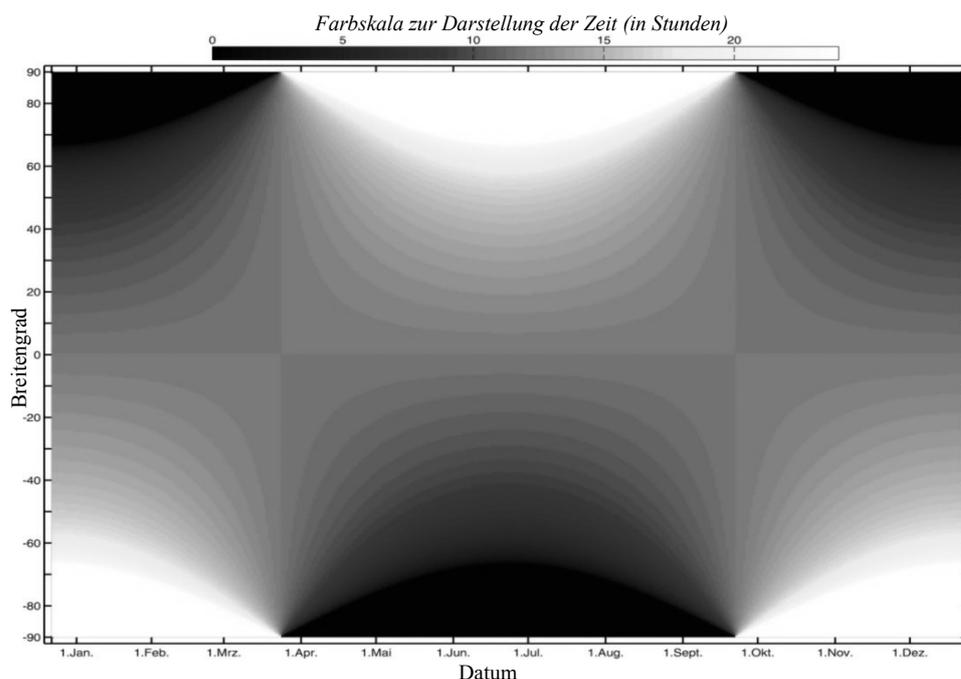


Diagramm 1.2.2: Die tägliche Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum, dargestellt mit Hilfe einer Farbskala [A 1.2.12].

1.2.3 Berechnung der täglich eingestrahltten Sonnenenergie

Die tägliche eingestrahlte Sonnenenergie pro Quadratmeter errechnet sich nach der allgemeinen Gleichung (1.1.6a) als Integral der einfallenden Strahlungsleistung über die Zeit t :

$$E = \int P_s \cdot \cos\theta \cdot dt$$

(Dabei ist $P_s=1368 \text{ W/m}^2$ die Solarkonstante).

Die Variable t aus diesem Integral läuft an einem Tag vom Zeitpunkt des Sonnenaufganges t_A bis zum Zeitpunkt des Sonnenunterganges t_U . Damit ergeben sich die Integrationsgrenzen

$$E = \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot \cos\theta \cdot dt \quad (1.2.7a).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1.1.5) und (1.2.3) kann $\cos\theta$ ersetzt werden, sodass dann gilt

$$\begin{aligned} E &= \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega \cdot (t - T_K) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi) \cdot dt \\ \Rightarrow E &= P_s \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \int_{t_A}^{t_U} (\cos\omega \cdot (t - T_K)) \cdot dt - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \int_{t_A}^{t_U} dt \right) \\ &\Rightarrow E = \\ &P_s \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\sin\omega \cdot (t_U - T_K) - \sin\omega \cdot (t_A - T_K)}{\omega} - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot (t_U - t_A) \right) \quad (1.2.7b). \end{aligned}$$

Setzt man dann für die Ausdrücke t_U , t_A die entsprechenden Terme aus den Gleichungen (1.2.4) und (1.2.5), für $P_s = 1368 \text{ W/m}^2$ und für ω den Wert aus (1.1. 5c) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= P_s \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \frac{2 \cdot \sin \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)}{\omega} - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \frac{2 \cdot \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)}{\omega} \right) \\ &\Rightarrow E = \\ &\frac{2 \cdot P_s}{\omega} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)) \quad (1.2.7c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E \cong$$

$$\frac{33}{\pi} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \arccos(\cot\alpha \cdot \tan\varphi)) (\text{kWh})$$

$$(1.2.7)$$

Dabei ist φ wieder der Breitengrad und α der Sonnenwinkel. Dieser kann mit der Gleichung (1.1.3) bestimmt werden. Das Resultat (1.2.7) ist identisch mit dem Ergebnis aus (1.1.7). Es ist eine Funktion für die täglich eingestrahlte Sonnenenergie E pro $1m^2$ mit den zwei Variablen Breitengrad φ und Anzahl n der Tage ab dem 22.12., damit kann man diese Abhängigkeit grafisch darstellen. Die Diagramme 1.2.3 und 1.2.4 [A 1.2.13] stellen diese Verteilung von E für Breitengrad und Datum dar.

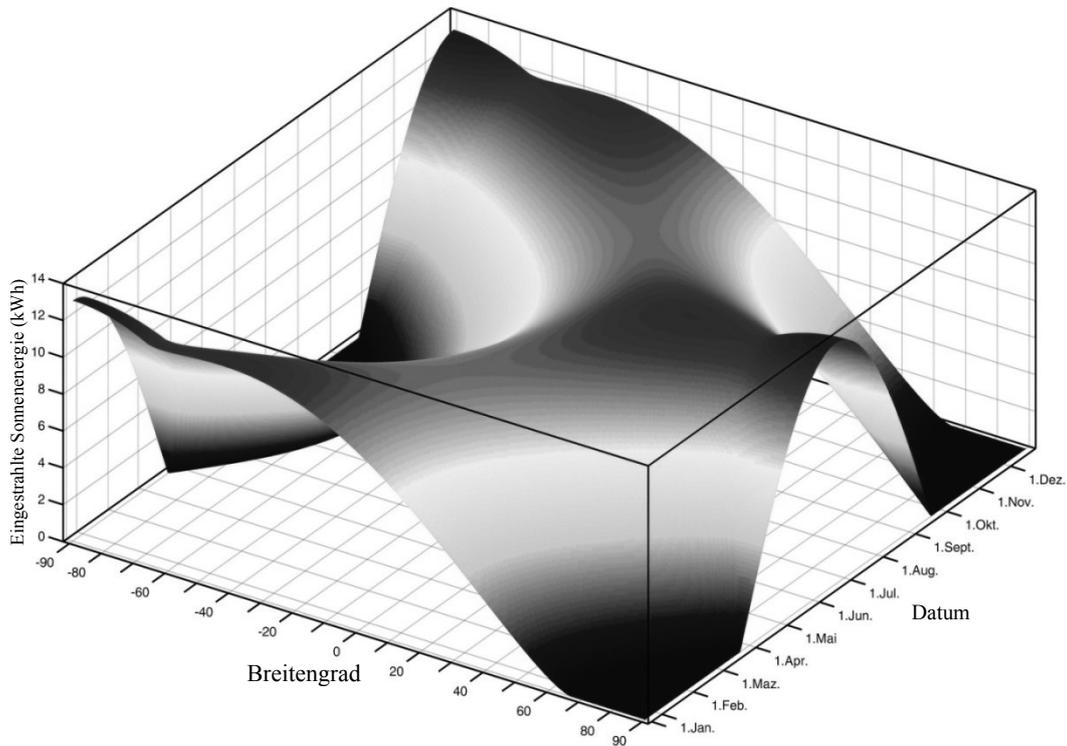


Diagramm 1.2.3: (Orthogonale 3D-Darstellung): Verlauf der täglich eingestrahnten Sonnenenergie pro $1m^2$ in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum [A 1.2.13].

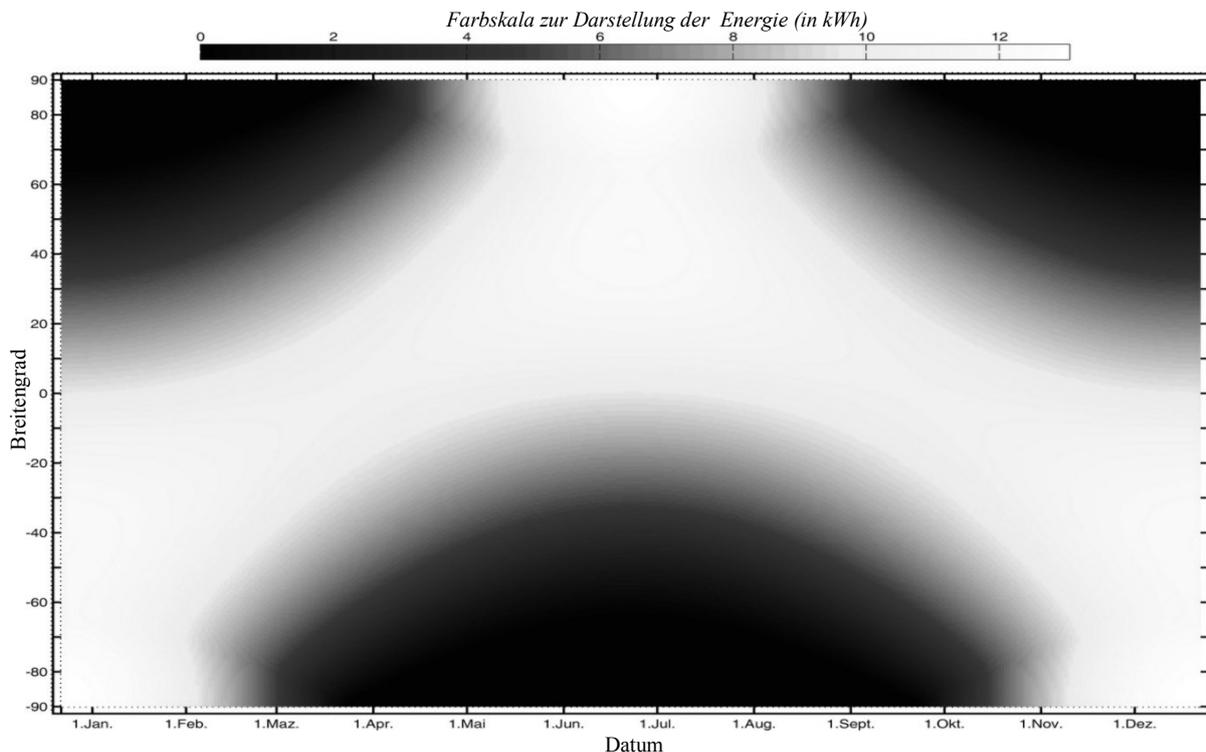


Diagramm 1.2.4: Verlauf der täglich eingestrahnten Sonnenenergie pro $1m^2$ in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum als Farbdarstellung [A 1.2.13].

1.3 Sonnenstunden und eingestrahlte Sonnenenergie auf die beliebige Dachschräge

Die Berechnung im vorangehenden Abschnitt gilt lediglich für eine Fläche auf dem Erdboden die parallel zur Horizontebene liegt. Im folgenden Abschnitt soll die Sonnenenergie auf beliebigen Dachschrägen bestimmt werden. Um die Neigung des Daches zu beschreiben, nutzt man den normierten Normalenvektor der Dachfläche \vec{n}_D und zwei Drehwinkel α_H und α_V . Der horizontale Drehwinkel α_H bezeichnet den Winkel um die horizontale Achse a_1 , um die Stellung des beobachteten Dachs bezüglich der Horizontalen anzugeben. Der vertikale Drehwinkel α_V kennzeichnet den Winkel um die vertikale Achse MZ_1 . Damit gibt α_V die Stellung der Achse a_1 bezüglich MY_1 (siehe Abbildung 1.3.1) an.

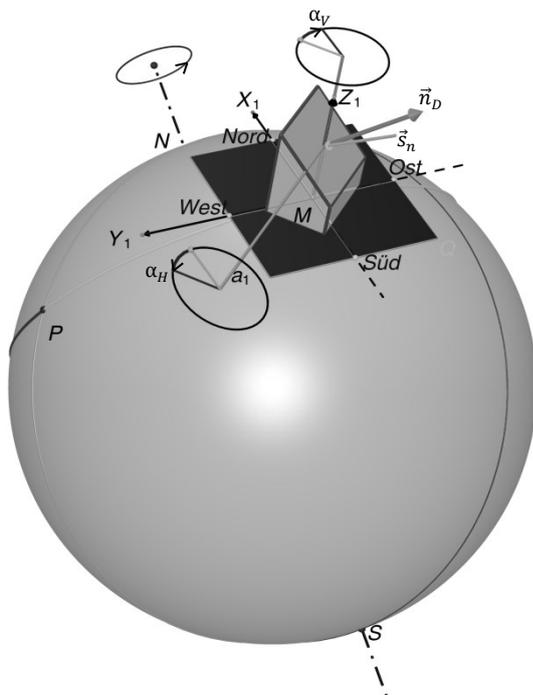


Abbildung 1.3.1: Beschreibung der Dachstellung durch den horizontalen Drehwinkel α_H und den vertikalen Drehwinkel α_V [A 1.3.1].

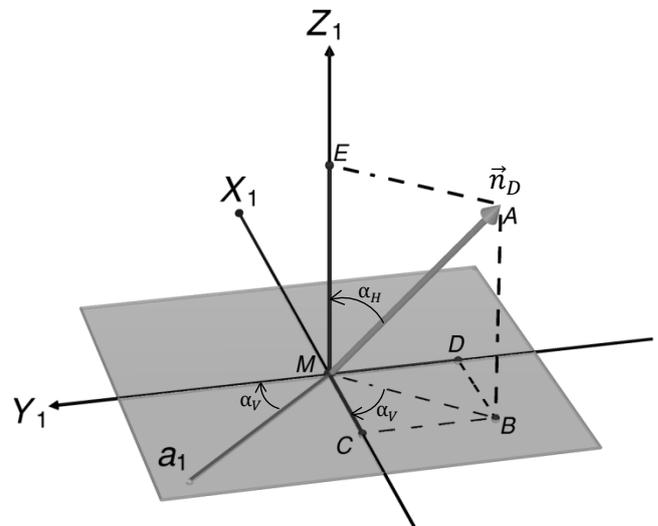


Abbildung 1.3.2: Darstellung der Lage von α_H , α_V und \vec{n}_D [A 1.3.2].

Wenn die drei Komponenten von \vec{n}_D gegeben sind, ist es mathematisch leicht, die Dachstellung zu erfassen. Diese kann auch über den horizontalen Drehwinkel α_H und den vertikalen Drehwinkel α_V bestimmt werden. In der Praxis ist es einfacher, α_H und α_V zu bestimmen, als die drei Komponenten von \vec{n}_D .

Nachfolgend wird zunächst der Zusammenhang zwischen den Komponenten von \vec{n}_D und α_H , α_V untersucht.

Aus der Abbildung 1.3.2 ergibt sich, dass das Vorzeichen von α_V negativ ist, weil die Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, wenn man längs der Drehachse MZ_1 von M nach Z_1 schaut. Das Vorzeichen von α_H ist positiv, weil die Drehrichtung dem Uhrzeigersinn entspricht, wenn man diesen Winkel längs der Drehachse a_1 (ausgehend von M als Bezugspunkt) betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{MA} &= |\vec{n}_D| = 1 \\ \Rightarrow \overline{ME} &= \overline{MA} \cdot \cos\alpha_H = \cos\alpha_H \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{MB} &= \overline{MA} \cdot \sin\alpha_H = \sin\alpha_H \\ \Rightarrow \overline{MD} &= \overline{MB} \cdot \sin(-\alpha_V) = -\sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \\ \Rightarrow \overline{MC} &= \overline{MB} \cdot \cos(-\alpha_V) = \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V.\end{aligned}$$

Damit folgt für die drei Komponenten von \vec{n}_D im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$

$$\vec{n}_D = (-\overline{MC}, -\overline{MD}, \overline{ME}) = (-\sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V, \sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V, \cos\alpha_H) \quad (1.3.1a).$$

Nun soll festgestellt werden, wie lange die betrachtete Dachfläche Sonnenlicht erhält und welche Energiemenge sie dabei empfängt. Zur Lösung werden im Folgenden zwei Verfahren vorgestellt.

1.3.1 Verfahren 1

Für den Winkel zwischen \vec{n}_D und $-\vec{S}_n$ (Abbildung 1.3.3) wird das Formelzeichen θ_D verwendet. Dieser Winkel ergibt sich aus dem Skalarprodukt von \vec{n}_D und $-\vec{S}_n$.

$$\cos\theta_D = \frac{-\vec{S}_n \cdot \vec{n}_D}{|-\vec{S}_n| \cdot |\vec{n}_D|} = \frac{-\vec{S}_n \cdot \vec{n}_D}{1 \cdot 1} = -\vec{S}_n \cdot \vec{n}_D \quad (1.3.1b).$$

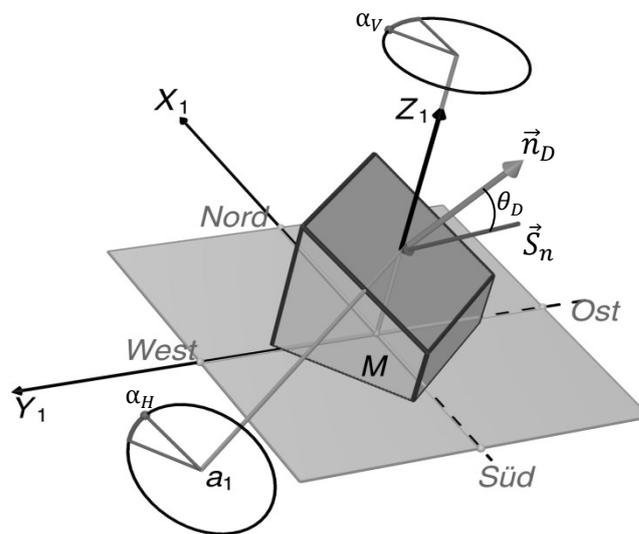


Abbildung 1.3.3: Die Lage von θ_D [A 1.3.3].

Setzt man die Gleichung (1.2.2) und Gleichung (1.3.1a) in die Gleichung (1.3.1b) ein, so ergibt sich

$$\cos\theta_D = a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta - c \quad (1.3.1c)$$

mit

$$a = \sin\alpha \cdot (\sin\varphi \cdot \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V + \cos\varphi \cdot \cos\alpha_H) \quad (1.3.1d)$$

$$b = \sin\alpha \cdot \sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \quad (1.3.1e)$$

$$c = -\cos\alpha \cdot (\cos\varphi \cdot \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V - \sin\varphi \cdot \cos\alpha_H) \quad (1.3.1f).$$

Mit gegebenen Werten für φ , α_H und α_V sind alle Größen zur Bestimmung der Parameter für a, b und c vorhanden. Demnach kann θ_D durch Gleichung (1.3.1c) als eine Funktion von β betrachtet werden.

Das Dach wird vom Sonnenlicht beschienen, wenn $\frac{\pi}{2} > \theta_D \geq 0$. Wenn $\theta_D \geq \frac{\pi}{2}$, dann zeigen die Sonnenstrahlen zur unteren Dachseite. Diese Bedingung bedeutet - anders ausgedrückt

$$\Leftrightarrow \cos\theta_D > 0 \quad (1.3.1g).$$

Nachfolgend soll diese Ungleichung gelöst werden.

1.3.1.1 Betrachtungen für den Fall, dass $a = b = 0$

Wenn $a = b = 0$ ist, dann gilt $\cos\theta_D = -c$. Wenn $c \geq 0$, dann existiert für die Variable β (1.3.1g) keine Lösung. Das Dach wird in diesem Fall nicht vom Sonnenlicht bestrahlt.

Wenn $c < 0$, dann lösen unendlich viele Werte für β die Gleichung (1.3.1g). Das bedeutet, dass das Dach über den ganzen Tag hinweg von Sonnenauf- (t_A) bis Sonnenuntergang (t_U) von Sonnenlicht beschienen wird.

Somit erhält man für die eingestrahle Sonnenenergie

$$E = \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot \cos\theta_D \cdot dt = \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot (-c) \cdot dt =$$

$$\Rightarrow E = P_s \cdot c \cdot (t_A - t_U).$$

Dabei ist $P_s=1370$ (W/m²) die Solarkonstante. Die Integrationsgrenzen t_U und t_A werden mit den Gleichungen (1.2.4) und (1.2.5) ermittelt. Der Parameter c wird aus der Gleichung (1.3.1f) bestimmt.

1.3.1.2 Betrachtungen für den Fall, dass a oder b von 0 verschieden sind

1.3.1.2.1 Herleitung der Formeln zur Sonnenscheindauer auf dem Dach

Aus Gleichung (1.3.1c) und Ungleichung (1.3.1g) folgt, dass

$$a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta - c > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos\beta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin\beta > \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1.3.1h).$$

Die Ausdrücke $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ werden mit $\cos\beta_1 := \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\sin\beta_1 := \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ substituiert, wobei $\beta_1 \in [-\pi, \pi]$. Damit gilt

$$\beta_1 = \begin{cases} \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & b < 0 \end{cases} \quad (1.3.1i).$$

Somit ergibt sich für die Ungleichung (1.3.1h)

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 \cdot \cos\beta + \sin\beta_1 \cdot \sin\beta &> \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \Rightarrow \cos(\beta - \beta_1) &> \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (1.3.1j).$$

Wenn $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 1 \Leftrightarrow c > \sqrt{a^2 + b^2}$ dann hat (1.3.1g) keine Lösung für die Variable β . Das Dach wird nicht vom Sonnenlicht bestrahlt.

Wenn $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} < -1 \Leftrightarrow c < -\sqrt{a^2 + b^2}$, dann hat (1.3.1h) unendlich viele Lösungen für β . Das bedeutet, dass das Dach über den ganzen Tag hinweg von der Sonne beschienen wird.

Somit erhält man für die eingestrahle Sonnenenergie

$$E = \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot \cos\theta_D \cdot dt = \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot (a \cdot \cos\beta + b \cdot \sin\beta - c) \cdot dt.$$

Setzt man für β den Ausdruck aus der Gleichung (1.1.5) in die obere Gleichung ein, dann gilt für Sonnenenergie E

$$\begin{aligned} E &= \int_{t_A}^{t_U} P_s \cdot (a \cdot \cos\omega \cdot (t - T_K) + b \cdot \sin\omega \cdot (t - T_K) - c) \cdot dt \\ \Rightarrow E &= \frac{P_s}{\omega} \cdot (a \cdot \sin\omega \cdot (t_U - t_A) - b \cdot \cos\omega \cdot (t_U - t_A)) - P_s \cdot c \cdot (t_U - t_A) \end{aligned} \quad (1.3.1k).$$

Die Faktoren a , b und c werden aus den Gleichungen (1.3.1d), (1.3.1e) und (1.3.1f) berechnet.

Wenn $\sqrt{a^2 + b^2} \geq c \geq -\sqrt{a^2 + b^2}$, ist es zweckmäßig einen neuen Winkel β_2 einzuführen, sodass gilt

$$\beta_2 := \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1.3.1l),$$

also $\cos\beta_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Dann ist Ungleichung (1.3.1j) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \beta_1) &> \cos\beta_2 \\ \Rightarrow \beta_2 &> \beta - \beta_1 > -\beta_2 \\ \Rightarrow \beta_2 + \beta_1 &> \beta > -\beta_2 + \beta_1. \end{aligned}$$

Setzt man für β den Ausdruck aus der Gleichung (1.1.5) in die obere Ungleichung ein, dann gilt

$$\begin{aligned} \beta_2 + \beta_1 &> \omega \cdot (t - T_K) > -\beta_2 + \beta_1 \\ \Rightarrow \frac{\beta_2 + \beta_1}{\omega} + T_K &> t > \frac{-\beta_2 + \beta_1}{\omega} + T_K. \end{aligned}$$

Die Zeitpunkte des „Sonnenauf- und Untergangs“ für die Dachfläche sollen mit t_{A1} und t_{U1} bezeichnet werden. Diese ergeben sich aus obiger Ungleichung zu

$$t_{U1} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{\omega} + T_K \quad (1.3.1m)$$

und

$$t_{A1} = \frac{-\beta_2 + \beta_1}{\omega} + T_K \quad (1.3.1n).$$

Damit gilt

$$\Leftrightarrow t_{U1} > t > t_{A1} \quad (1.3.1o).$$

Es ist klar, dass dieses Zeitfenster innerhalb des Zeitraums liegt, der vom Sonnenaufgang t_A und vom Sonnenuntergang t_U begrenzt wird, also

$$t_U > t > t_A \quad (1.3.1p).$$

Die Schnittmenge zwischen (1.3.1o) und (1.3.1p) ist die Zeit, in der das Dach Sonnenlicht empfängt. Die beiden Grenzen dieser Schnittmenge sollen nachfolgend als t_1 und t_2 bezeichnet werden, also

$$]t_1; t_2[=]t_{A1}; t_{U1}[\cap]t_A; t_U[\quad (1.3.1q).$$

Die Zeit des Sonnenscheins auf dem Dach wird im Folgenden als T_{hell} bezeichnet. Sie ergibt sich aus

$$T_{hell} = t_2 - t_1 \quad (1.3.1).$$

Die Werte für t_2 und t_1 werden aus der Gleichung (1.3.1q) bestimmt. Sie hängen von α_H , α_V des Daches so wie dem Breitengrad φ und dem Datum ab.

1.3.1.2.2 Herleitung der Formeln für die eingestrahlte Sonnenenergie

Die Herleitung eines Ausdrucks für die tägliche eingestrahlte Sonnenenergie erfolgt analog zur Bestimmung der Gleichung (1.3.1k) mit dem Unterschied, dass hier andere Integrationsgrenzen $t_2 > t > t_1$ verwendet werden. Mit der Solarkonstante $P_S = 1370 \text{ (W/m}^2\text{)}$ ergibt sich

$$E = \frac{P_S}{\omega} \cdot (a \cdot \sin\omega \cdot (t_2 - t_1) - b \cdot \cos\omega \cdot (t_2 - t_1)) - P_S \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \quad (1.3.2).$$

Dabei sind t_1 und t_2 aus dem Ausdruck (1.3.1q) zu ermitteln und die Parameter a , b und c werden aus den Gleichungen (1.3.1d), (1.3.1e) und (1.3.1f) bestimmt.

1.3.2 Verfahren 2

Bei diesem Verfahren wird auf der Erdoberfläche eine äquivalente Fläche am Punkt M' gesucht, die parallel zum betrachteten Dach am Punkt M liegt (Abbildung 1.3.4). Grundlage dieser Idee ist die Annahme, dass die Sonnenstrahlen parallel verlaufen und zwei gleichgroße Flächen dieselbe Sonnenenergie empfangen, wenn sie parallel zueinander sind. Das Verfahren zur Berechnung der eingestrahnten Sonnenenergie beliebiger Flächen auf der Erde ist aus der Gleichung (1.2.7) oder aus Gleichung (1.1.7) bekannt. Ist nun eine solche äquivalente Fläche gefunden, so kann sowohl die Sonnenscheindauer als auch die eingestrahlte Sonnenenergie auf dem Dach berechnet werden.

Das Kernproblem dieses Verfahrens liegt folglich in der Auffindung des Ortes M' auf der Sphäre (Abb. 1.3.4) [A 1.3.4], die die Position der äquivalenten Fläche zum Dach angibt. Konkret geht es um die Bestimmung des äquivalenten Breitengrads φ' und des äquivalenten Längengrads λ' für den Punkt M' .

Das Formelzeichen \vec{k}'_1 bezeichnet im Folgenden den Normaleneinheitsvektor an dieser äquivalenten Fläche. Die Bedingung dabei ist, dass \vec{k}'_1 parallel zu \vec{n}_D liegen muss, weil die äquivalente Fläche parallel zum betrachteten Dach ist.

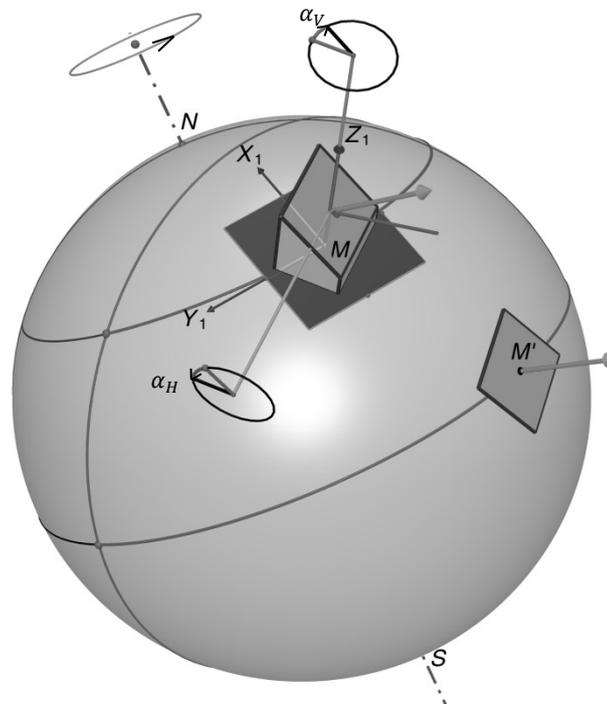


Abbildung 1.3.4: Zur Veranschaulichung der äquivalenten Fläche [A 1.3.4].

1.3.2.1 Herleitung der Formeln zur Bestimmung der notwendigen Parameter

1.3.2.1.1 Der Breitengrad φ' der äquivalenten Fläche

In der Abbildung 1.3.5 stellt (X_2OY_2) die Äquatorebene dar. OA' ist die Projektion des Radius OM' auf diese Ebene (X_2OY_2) , deswegen entspricht der Winkel $\widehat{A'OM'}$ genau dem Breitengrad des Punktes M' . Es gilt

$$\varphi' = \widehat{A'OM'} = \frac{\pi}{2} - \widehat{I'OM'}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi' = \cos\widehat{I'OM'} = \cos(\vec{k}'_1, \vec{k}_2) = \cos(\vec{n}_D, \vec{k}_2).$$

Im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$ (Abbildungen 1.2.4. und 1.2.5.) gilt

$$\sin\varphi' = \cos(\vec{n}_D, \vec{k}_2) = \frac{x_{\vec{n}_D} \cdot x_{\vec{k}_2} + y_{\vec{n}_D} \cdot y_{\vec{k}_2} + z_{\vec{n}_D} \cdot z_{\vec{k}_2}}{|\vec{n}_D| \cdot |\vec{k}_2|}$$

Unter Berücksichtigung dass \vec{n}_D und \vec{k}_2 Einheitsvektoren sind und damit $|\vec{n}_D| = |\vec{k}_2| = 1$ gilt, wird

$$\sin\varphi' = x_{\vec{n}_D} \cdot x_{\vec{k}_2} + y_{\vec{n}_D} \cdot y_{\vec{k}_2} + z_{\vec{n}_D} \cdot z_{\vec{k}_2}.$$

$(x_{\vec{n}_D}, y_{\vec{n}_D}, z_{\vec{n}_D})$ und $(x_{\vec{k}_2}, y_{\vec{k}_2}, z_{\vec{k}_2})$ sind die Komponenten von \vec{n}_D und \vec{k}_2 im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$. Sie werden aus den Gleichungen (1.3.1a) und (1.2.2h) bestimmt. Aus diesen folgt

$$\sin\varphi' = -\sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \cos\varphi + \cos\alpha_H \cdot \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi' = \arcsin(\cos\alpha_H \cdot \sin\varphi - \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \cos\varphi) \quad (1.3.3),$$

wobei α_H und α_V der horizontale und der vertikale Drehwinkel des betrachteten Daches (Abbildung 1.3.1) und φ der Breitengrad des betrachteten Daches sind.

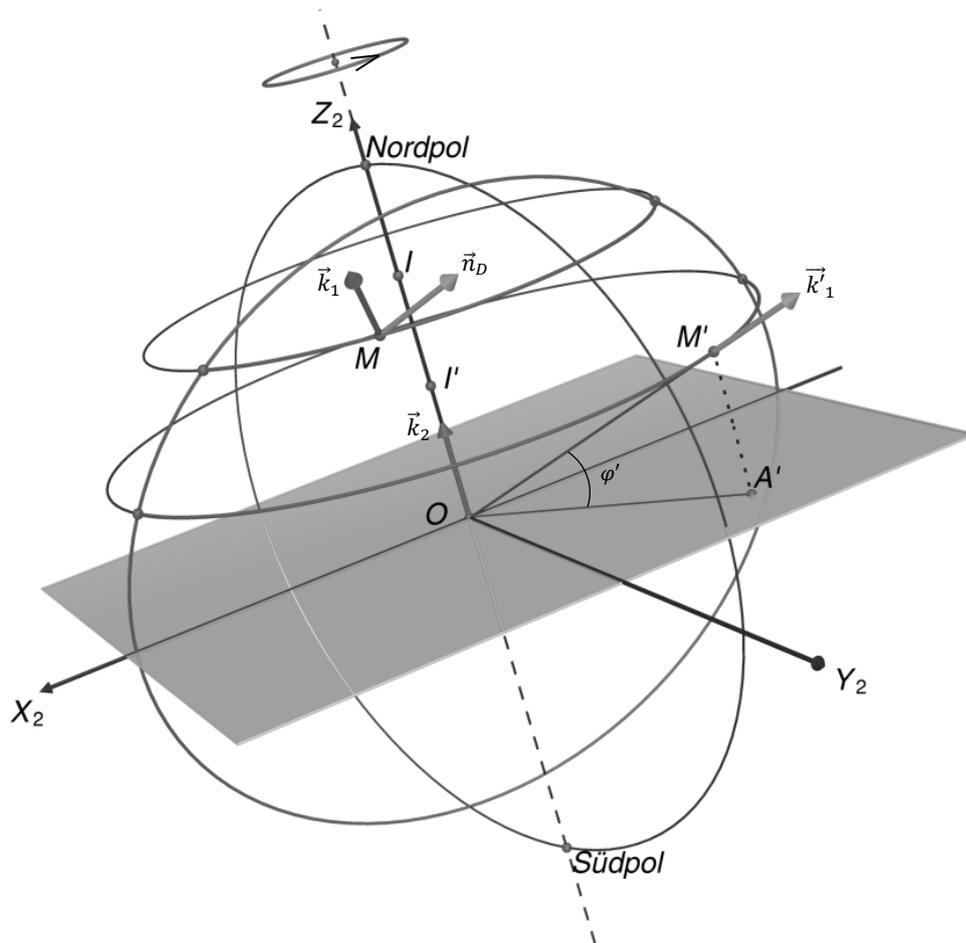


Abbildung 1.3.5: Skizze zur Bestimmung des Breitengrads φ' der äquivalenten Fläche [A 1.3.5].

1.3.2.1.2 Der Längengrad λ' der äquivalenten Fläche

Der Zusammenhang zwischen Längengrad und Zeitbogen¹ ist durch

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \beta' - \beta \\ \Rightarrow \lambda' &= \Delta\beta + \lambda \quad (1.3.4a) \end{aligned}$$

gegeben (λ' und λ sind die Längengrade der Punkte M' und M , entsprechend sind auch die Zeitbögen β' und β festgelegt). $\Delta\beta = \beta' - \beta = \lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ wird als die Längengradauslenkung des Daches bezeichnet. Mit der Position des Daches ist auch sein Längengrad λ bekannt. Das bedeutet, dass es ausreicht, wenn die Längengradauslenkung $\Delta\beta$ des Daches gefunden wird.

Dabei ist zu beachten, dass der Vektor \vec{k}'_1 in Abbildung 1.3.6 zum Punkt O verschoben wird. Außerdem ist $\vec{k}'_1 = \vec{n}_D$, weil sie parallel zueinander sind und ihre Länge jeweils gleich 1 ist.

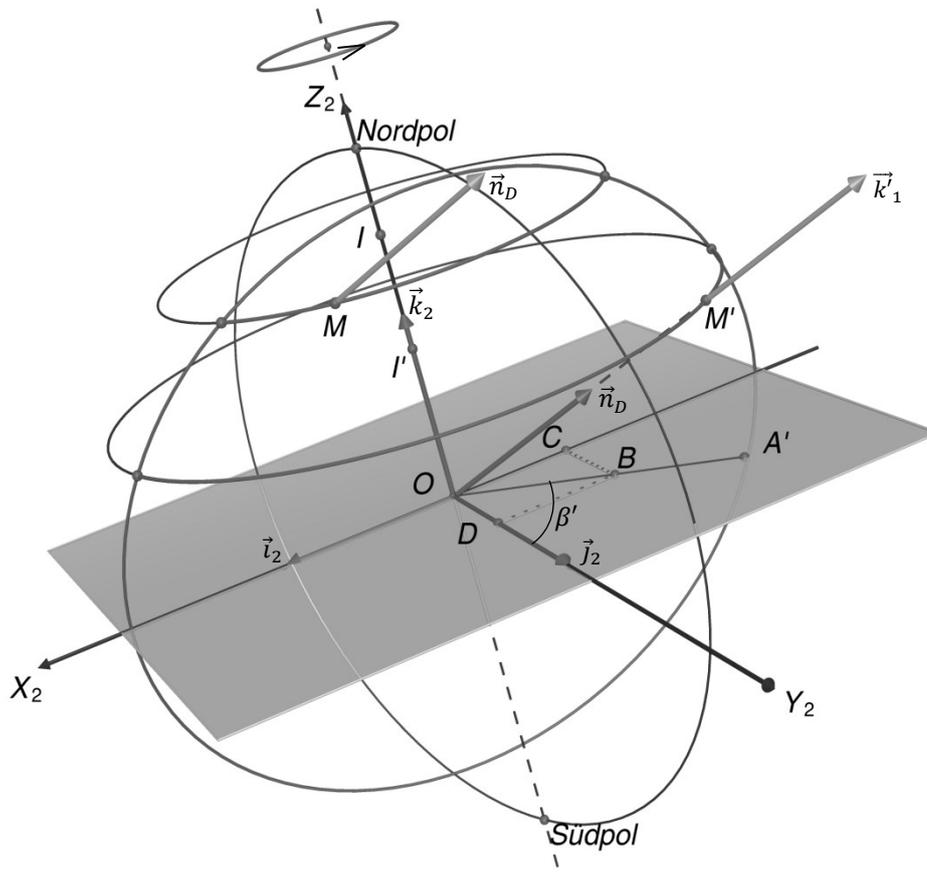


Abbildung 1.3.6: Darstellung der Position des äquivalenten Zeitbogens β' [A 1.3.6].

Aus der Abbildung 1.3.6 wird ersichtlich, dass

$$\beta' = \widehat{BOD} = \widehat{OB, \vec{j}_2} \quad (1.3.4b)$$

wobei der Vektor \vec{OB} die orthogonale Projektion von \vec{n}_D in die Ebene (X_2OY_2) ist.

¹ Die Definition des Zeitbogens wird im Abschnitt 1.1.3 gegeben.

Dieser kann beschrieben werden durch

$$\overline{OB} = (\vec{n}_D \cdot \vec{i}_2) \cdot \vec{i}_2 + (\vec{n}_D \cdot \vec{j}_2) \cdot \vec{j}_2 \quad (1.3.4c).$$

Wenn die Komponenten des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$ gegeben sind, können mit dieser Gleichung die Komponenten des Vektors \overline{OB} im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$ bestimmt werden. Die Gleichung (1.3.1a) gibt die Komponenten des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$ (System 1) an. Für die Komponenten des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$ (System 2) wird die Koordinatentransformation aus Abschnitt 1.2.1.2.2 angewandt

$$\mathbf{n}_{D1} = \mathbf{M}_1^2 \cdot \mathbf{n}_{D2} \quad (1.3.4d).$$

Dabei ist \mathbf{n}_{D1} die Spaltenmatrix-Form des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $MX_1Y_1Z_1$, der sich aus Gleichung (1.3.1a) zu

$$\mathbf{n}_{D1} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \\ \sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \\ \cos\alpha_H \end{bmatrix} \quad (1.3.4e)$$

ergibt. Entsprechend ist $\mathbf{n}_{D2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ ist die Spaltenmatrix-Form des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$. Die quadratische Transformationsmatrix \mathbf{M}_1^2 zwischen $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ des Koordinatensystems $OX_2Y_2Z_2$ und $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ in $MX_1Y_1Z_1$ wird bestimmt mit Hilfe der Gleichung (1.2.2i).

Aus der Gleichung (1.3.4d) folgt

$$\mathbf{n}_{D2} = \mathbf{M}_2^1 \cdot \mathbf{n}_{D1} \quad (1.3.4f),$$

wobei $\mathbf{M}_2^1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ die inverse Matrix von \mathbf{M}_1^2 ist, also $\mathbf{M}_2^1 = \mathbf{M}_1^2^{-1}$.

Wie die lineare Algebra lehrt gilt für die Elemente der inversen Matrix

$$\mathbf{M}_2^1 = \frac{1}{\det\mathbf{M}_1^2} \cdot \mathbf{C} \quad (1.3.4g).$$

Dabei ist $\det\mathbf{M}_1^2$ die Determinante der Matrix \mathbf{M}_1^2 und $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ die adjungierte Matrix von

\mathbf{M}_1^2 . Mit (1.2.2i) ergibt sich

$$\begin{aligned} \det\mathbf{M}_1^2 &= \sin^2\beta \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\beta \cdot \cos^2\varphi + 0 - \sin^2\beta \cdot (-\cos^2\varphi) - (-\cos^2\beta) \cdot \sin^2\varphi - 0 \\ &\Rightarrow \det\mathbf{M}_1^2 = 1 \quad (1.3.4h). \end{aligned}$$

Die Matrixelemente der adjungierten Matrix ergeben sich aus

$$c_{ij} = (-1)^{j+i} \cdot d_{ji},$$

wenn d_{ji} die Werte der Unterdeterminanten der Matrizen \mathbf{M}_1^2 bezeichnen, die durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte entstehen.

Anhand der Gleichung (1.2.2i) gilt für jedes Element der Matrix \mathbf{C} :

$$c_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 \\ \cos \beta \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} = \sin \beta \cdot \sin \varphi$$

$$c_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \beta \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} = \cos \beta$$

$$c_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \sin \beta & 0 \end{bmatrix} = -\sin \beta \cdot \cos \varphi$$

$$c_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 \\ -\sin \beta \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} = -\cos \beta \cdot \sin \varphi$$

$$c_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sin \beta \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} = \sin \beta$$

$$c_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \beta & 0 \end{bmatrix} = \cos \beta \cdot \cos \varphi$$

$$c_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta \cdot \cos \varphi & \cos \beta \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} = \cos \varphi$$

$$c_{32} = (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & -\cos \beta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \beta \cdot \cos \varphi & \cos \beta \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} = 0$$

$$c_{33} = (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & -\cos \beta \cdot \sin \varphi \\ \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} = \sin \varphi$$

Daraus ergibt sich die Matrix \mathbf{C} zu

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & \cos \beta & -\sin \beta \cdot \cos \varphi \\ -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \sin \beta & \cos \beta \cdot \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Setzt man diesen Ausdruck und die Gleichung (1.3.4h) in die Gleichung (1.3.4g) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{M}_2^1 = \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & \cos \beta & -\sin \beta \cdot \cos \varphi \\ -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \sin \beta & \cos \beta \cdot \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (1.3.4i).$$

Dabei fällt die besondere Eigenschaft auf, dass die Matrix \mathbf{M}_2^1 identisch ist zur transponierten Matrix von \mathbf{M}_1^2 . Formal ausgedrückt kann man sagen, dass $\mathbf{M}_2^1 = \mathbf{M}_1^2^T$.

Setzt man die Ergebnisse aus den Gleichungen (1.3.4i) und (1.3.4e) in die Gleichung (1.3.4d) ein, so gilt für die Koordinaten des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta \cdot \sin \varphi & \cos \beta & -\sin \beta \cdot \cos \varphi \\ -\cos \beta \cdot \sin \varphi & \sin \beta & \cos \beta \cdot \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \alpha_H \cdot \cos \alpha_V \\ \sin \alpha_H \cdot \sin \alpha_V \\ \cos \alpha_H \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi + \sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \cdot \cos\beta - \cos\alpha_H \cdot \cos\varphi \cdot \sin\beta \\ \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \sin\varphi \cdot \cos\beta + \sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \cdot \sin\beta + \cos\alpha_H \cdot \cos\varphi \cdot \cos\beta \\ -\sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \cos\varphi + 0 + \cos\alpha_H \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Zur Vereinfachung werden die zwei Parameter p und q eingeführt, die folgendermaßen definiert sind

$$p := -\sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \quad (1.3.4j)$$

und

$$q := \cos\alpha_H \cdot \cos\varphi + \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \sin\varphi \quad (1.3.4k).$$

Dann gilt für die Komponenten des Vektors \vec{n}_D im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \cdot \sin\beta - p \cdot \cos\beta \\ -p \cdot \sin\beta + q \cdot \cos\beta \\ -\sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V \cdot \cos\varphi + \cos\alpha_H \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (1.3.4l)$$

Anhand der Gleichungen (1.3.4l) und (1.3.4c) können die Komponenten des Vektors \overline{OB} im Koordinatensystem $OX_2Y_2Z_2$ bestimmt werden zu

$$x_{\overline{OB}} = -q \cdot \sin\beta - p \cdot \cos\beta$$

$$y_{\overline{OB}} = -p \cdot \sin\beta + q \cdot \cos\beta.$$

Aus der Abbildung 1.3.6 ergibt sich für den Zeitbogen β'

$$\begin{aligned} \tan\beta' &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{-x_{\overline{OB}}}{y_{\overline{OB}}} = \frac{q \cdot \sin\beta + p \cdot \cos\beta}{-p \cdot \sin\beta + q \cdot \cos\beta} \\ \Rightarrow \tan\beta' &= \frac{\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \sin\beta + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \cos\beta}{-\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \sin\beta + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \cos\beta} \quad (1.3.4m). \end{aligned}$$

Nachfolgend wird ein neuer Winkel mit dem Formelzeichen β_3 eingeführt, der folgenden Bedingungen genügt

$$\begin{cases} \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos\beta_3 \\ \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin\beta_3 \end{cases} \quad (1.3.4n).$$

Damit kann (1.3.4m) umgeschrieben werden zu

$$\tan\beta' = \frac{\cos\beta_3 \cdot \sin\beta + \sin\beta_3 \cdot \cos\beta}{-\sin\beta_3 \cdot \sin\beta + \cos\beta_3 \cdot \cos\beta}$$

$$\Leftrightarrow \tan\beta' = \frac{\sin(\beta + \beta_3)}{\cos(\beta + \beta_3)}$$

$$\Leftrightarrow \tan\beta' = \tan(\beta + \beta_3)$$

$$\Rightarrow \beta' = \beta + \beta_3$$

$$\Leftrightarrow \beta_3 = \beta' - \beta = \Delta\beta.$$

Aus den Bedingungen (1.3.4n) ergibt sich für die Längengradauslenkung $\Delta\beta$:

$$\begin{cases} \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos\Delta\beta \\ \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin\Delta\beta \end{cases}$$

Da die Längengradauslenkung $\Delta\beta$ von $-\pi$ bis π variieren kann, gilt

$$\Delta\beta = \Delta\lambda = \begin{cases} \arccos \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & p \geq 0 \\ -\arccos \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & p < 0 \end{cases} \quad (1.3.4).$$

Die Ausdrücke (1.3.3) und (1.3.4) geben an, wo die zum Dach äquivalente Fläche lokalisiert ist.

1.3.2.2 Herleitung einer Formel zur Bestimmung der Sonnenstunden auf dem Dach

Um die Sonnenscheindauer (Sonnenstunden) auf dem Dach zu bestimmen, werden zunächst die Punkte P und Q betrachtet, die den Zeitpunkten des Sonnenaufgangs und Sonnenuntergangs am Breitengrad φ des Daches am Punkt M entsprechen.

Aus den Abbildungen 1.3.7 und 1.3.8 wird ersichtlich, dass es am Breitengrad φ nur zwischen den Zeitpunkten t_P und t_Q hell ist. Für eine Zeit t , zu der die Sonne scheint gilt damit

$$t_P < t < t_Q$$

$$\Rightarrow t_A < t < t_U \quad (1.3.5a)$$

(t_A und t_U können aus den Gleichungen (1.2.4) und (1.2.5) bestimmt werden).

Die Punkte P_1 und Q_1 entsprechen dem Sonnenaufgang und dem Sonnenuntergang am Breitengrad φ' der äquivalenten Fläche am Punkt M' . Für die Helligkeitsdauer am Breitengrad φ' gilt

$$t_{P_1} < t' < t_{Q_1}$$

$$\Rightarrow t'_A < t' < t'_U \quad (1.3.-5b)$$

(t'_A und t'_U können auch aus den Gleichungen (1.2.4) und (1.2.5) unter Berücksichtigung von φ' , das aus der Gleichung (1.3.3) bestimmt wird, ermittelt werden).

Bei der Verschiebung der Position des Daches von M zu M' (der Position der äquivalenten Fläche) ändert sich nicht nur der Breitengrad ($\varphi \rightarrow \varphi'$), sondern auch der Längengrad ($\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta\lambda$). Die Punkte P_2 und Q_2 entsprechen dem Sonnenaufgang und Sonnenuntergang (Punkte P und Q am Breitengrad φ) nach der Verschiebung zum Breitengrad φ' der äquivalenten Fläche am Punkt M' .

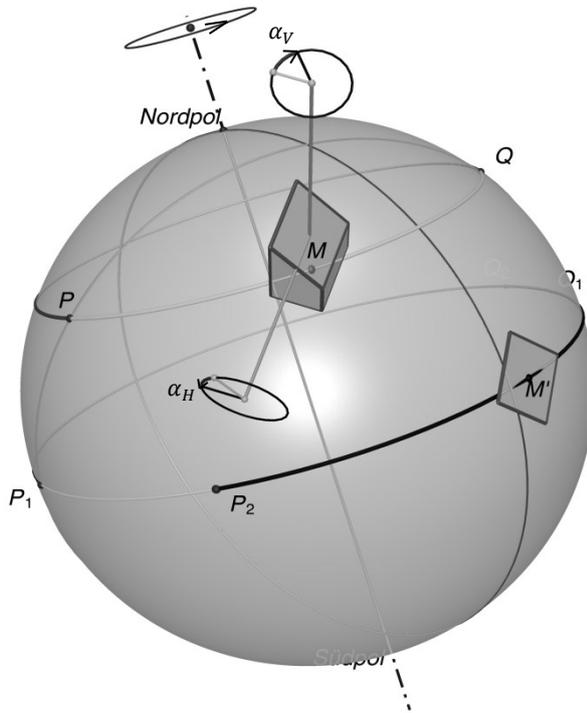


Abbildung 1.3.7: Die gelben Bögen entsprechen der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden am Breitengrad des Daches φ und des Breitengrades φ' der äquivalenten Fläche. Die Sonnenstunden auf dem Dach sind durch den blauen Bogen zwischen P_2 und Q_1 dargestellt [A 1.3.7].

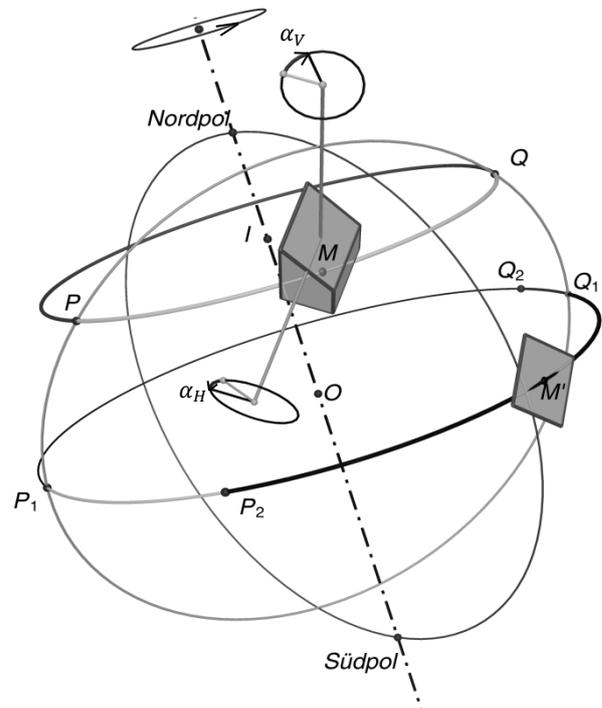


Abbildung 1.3.8: Darstellung wie in Abbildung 1.3.7; nur ohne die Erdoberfläche [A 1.3.8].

Durch die Längengradauslenkung $\Delta\lambda$ ändert sich auch die Uhrzeit. Weil jeder Punkt auf der Erde im Zeitintervall von 24 h eine komplette Umdrehung (2π rad) überstreicht, gilt für den Zusammenhang zwischen Längengradauslenkung und Zeitauslenkung Δt .

$$\Delta t = t' - t = \frac{24h}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta\lambda \quad (1.3.5c)$$

$$\Leftrightarrow t = t' - \Delta t.$$

Nach Einsetzen in Ungleichung (1.3.5a) erhält man

$$t_A + \Delta t < t' < t_U + \Delta t \quad (1.3.5d).$$

Der Schnittbereich zwischen (1.3.5b) und (1.3.5d) ergibt die Helligkeitsdauer der äquivalenten Fläche. Aus Abbildung (1.4.8) wird deutlich, dass sich die Helligkeitsdauer (dort als blauer Bogen dargestellt) aus dem Schnitt des gelben Bogens P_1Q_1 mit dem roten Bogen P_2Q_2 ergibt.

Die Grenzpunkte des Schnittbereiches zwischen der Menge $]t'_A, t'_U[$ und der Menge $]t_A + \Delta t, t_U + \Delta t[$ werden mit t'_1 und t'_2 bezeichnet. Es gilt folglich

$$]t'_1, t'_2[=]t'_A, t'_U[\cap]t_A + \Delta t, t_U + \Delta t[\quad (1.3.5e).$$

Dann ergibt sich die Helligkeitsdauer T'_{hell} der äquivalenten Fläche aus

$$T'_{hell} = t'_2 - t'_1.$$

Die Zeitauslenkung Δt zwischen dem betrachteten Dach und der äquivalenten Fläche hat keine Auswirkungen auf das Zeitintervall, da

$$\begin{aligned} T'_{hell} &= (t'_2 - \Delta t) - (t'_1 - \Delta t) \\ &\Rightarrow T'_{hell} = t_2 - t_1 = T_{hell} \\ &\Rightarrow T_{hell} = t'_2 - t'_1 \quad (1.3.5). \end{aligned}$$

Die Zeitpunkte t'_2 und t'_1 können aus der Gleichung (1.3.5e) bestimmt werden. Sie ergeben sich aus α_H , α_V des Daches, sowie dem Breitengrad φ und dem Datum.

1.3.2.3 Herleitung der Formeln für die eingestrahlte Sonnenenergie auf dem Dach

Die eingestrahlte Sonnenenergie auf dem Dach ist gleich derjenigen auf der äquivalenten Fläche. In Abschnitt 1.1.3 oder 1.2.3 wurde bereits gezeigt, wie eine solche für beliebige Flächen bestimmt werden kann. Als Grundlage kann in diesem Abschnitt also die Gleichung (1.2.7b) verwendet werden. Wenn nun für φ der Ausdruck für φ' eingesetzt wird und als Integrationsgrenzen t'_2 und t'_1 verwendet werden, ergibt sich für die tägliche eingestrahlte Sonnenenergie des Daches:

$$E = P_S \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi' \cdot \frac{\sin\omega \cdot (t'_2 - T_K) - \sin\omega \cdot (t'_1 - T_K)}{\omega} - \cos\alpha \cdot \sin\varphi' \cdot (t'_2 - t'_1) \right) \quad (1.3.6)$$

Dabei ist $P_S = 1370 \text{ (W/m}^2\text{)}$ Solarkonstante und $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{24 \cdot 3600} \text{ (rad/s)}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Drehachse. Der Sonnenwinkel ergibt sich aus $\alpha = \arccos(\sin 23,5^\circ \cdot \cos \frac{n}{365} 360^\circ)$ (dabei ist n die Summe der Tage ab dem 22.12.). Der äquivalente Breitengrad φ' kann aus der Gleichung (1.3.3) berechnet werden und t'_1 und t'_2 ergeben sich aus (1.3.5e).

1.3.3 Anwendungen der hergeleiteten Formeln

1.3.3.1 Direkte Berechnung

In diesem und dem nächsten Abschnitt soll beispielhaft die Anzahl der Sonnenstunden und die eingestrahlte Sonnenenergie am 14. August auf zwei Flächen á 1 m^2 an einem Haus (Abbildung 1.3.9) in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$, $\lambda = 8,05^\circ$) berechnet werden, dabei handelt es sich um eine schräge Fläche auf dem Dach und eine weitere auf dem geraden Giebel des Gebäudes. Zunächst wird die schräge Fläche untersucht und im Abschnitt 1.3.3.2 dann die gerade Fläche.

In Abschnitt 1.1.4 wurden die Ergebnisse für eine Fläche von 1 m^2 auf dem Erdboden oder auf einem waagerechten Dach parallel zum Erdboden bestimmt. In unserem Beispiel ist die Anzahl der Tage ab der

Wintersonnenwende $n = 235$ Tage. Des Weiteren gilt hier

$$\delta = 231,8^\circ$$

$$\alpha = 104,3^\circ.$$



Abbildung 1.3.9: Untersuchung der Sonnenstunden und eingestrahltten Sonnenenergie auf einem bestimmten Dach.

Damit ergeben sich die Sonnenstunden zu $t = 14,43$ Stunden und die eingestrahlte Sonnenenergie zu $E = 9,9$ kWh.

Nachfolgend sollen die Sonnenstunden und die eingestrahltten Sonnenenergie auf der markierten Fläche durch Anwendung des Verfahrens 2 aus Abschnitt 1.3.2 berechnet werden. Danach vergleichen wir die Ergebnisse für dieses Dach mit den obigen Ergebnissen für Erdboden.

Aus den Abbildungen (1.3.10) und (1.3.11) können wir den horizontalen Drehwinkel α_H und den vertikalen Drehwinkel α_V bestimmen. Für diese ergibt sich

$$\alpha_H = 48^\circ \text{ und } \alpha_V = 51^\circ.$$

Aus der Gleichung (1.3.3) folgt für den Breitengrad der äquivalenten Fläche

$$\begin{aligned} \varphi' &= \arcsin(\cos 48^\circ \cdot \sin 51^\circ - \sin 48^\circ \cdot \cos 51^\circ \cdot \cos 50,9^\circ) \\ &\Rightarrow \varphi' = 12,95^\circ. \end{aligned}$$

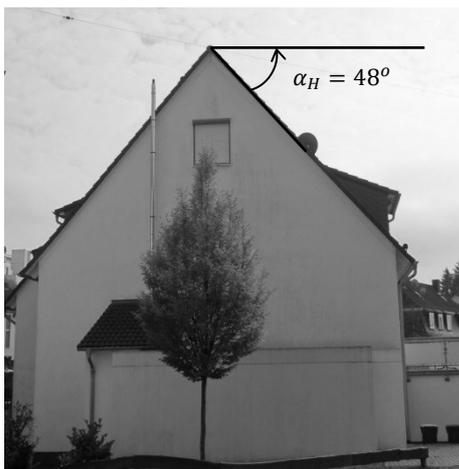


Bild 1.3.10: Der horizontale Drehwinkel α_H wird mit Hilfe einer Fotografie des Hausgiebels gemessen.

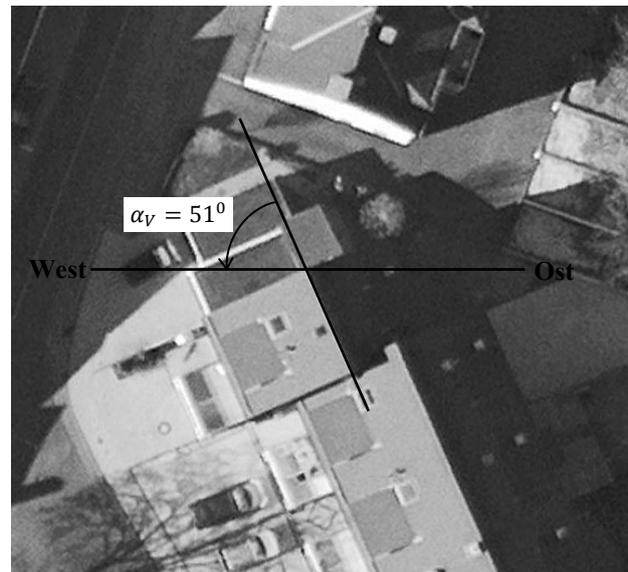


Bild 1.3.11: Der vertikale Drehwinkel α_V wird mit Hilfe eines Satellitenbildes aus Google Earth ermittelt (© 2009 GeoBasis-De/BKG Image © 2014 AeroWest).

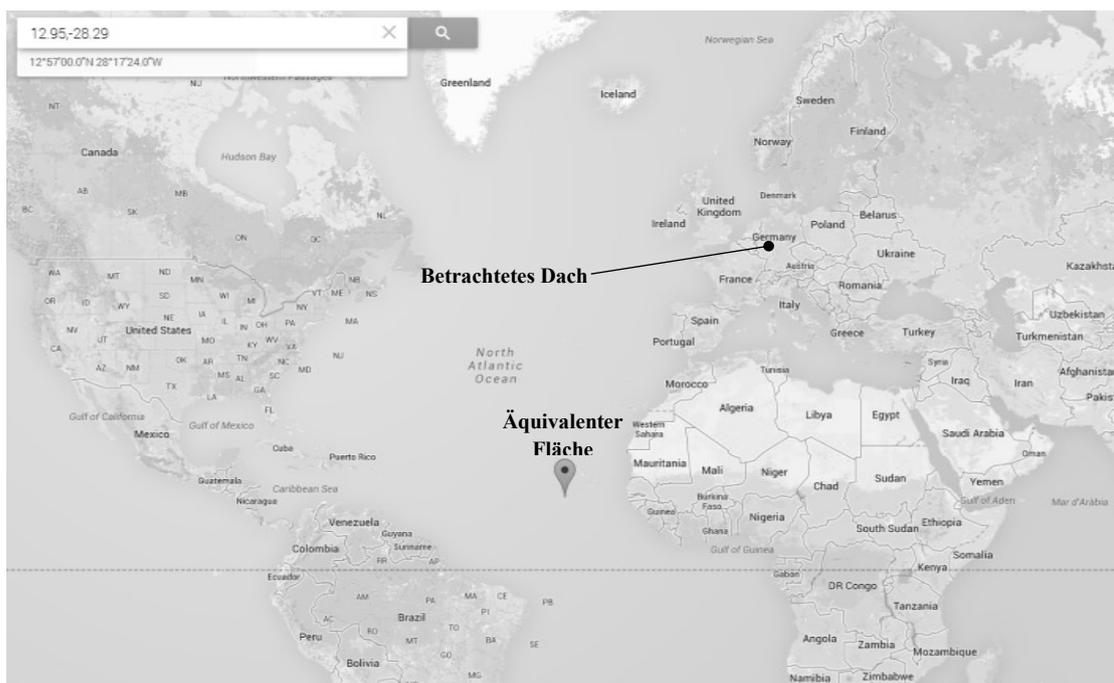


Abbildung 1.3.12: Die Lage der äquivalenten Fläche des betrachteten Daches (Bildquelle: Map data © 2014 Google, INEGI).

Die Parameter p und q werden aus den Gleichungen (1.3.4j) und (1.3.4k) berechnet:

$$p = -\sin 48^\circ \cdot \sin 51^\circ = -0,4677$$

$$q = \cos 48^\circ \cdot \cos 50,9^\circ + \sin 48^\circ \cdot \cos 51^\circ \cdot \sin 50,9^\circ = 0,8702.$$

Aus Gleichung (1.3.4) folgt für die Längengradauslenkung zwischen diesem Dach und seiner äquivalenten Fläche

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = -\arccos \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = -36,34^\circ$$

$$\Rightarrow \lambda' = -28,29^\circ.$$

Die äquivalente Fläche dieses Daches ist lokalisiert am Breitengrad $\varphi' = 12,95^\circ$ und am Längengrad $\lambda' = -28,29^\circ$, also im nördlichen Atlantische Ozean (Abbildung 1.3.12).

Aus der Gleichung (1.2.4) erhält man den Zeitpunkt des Sonnenaufganges am betrachteten Haus

$$t_A = T_{Mittag} - \frac{\arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right)}{\omega} = T_{Mittag} - 7,21 \text{ (h)}$$

und aus Gleichung (1.2.5) folgt für den Zeitpunkt des Sonnenunterganges

$$t_U = T_{Mittag} + \frac{\arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right)}{\omega} = T_{Mittag} + 7,21 \text{ (h)}.$$

Für die äquivalente Fläche des betrachteten Daches folgt analog

$$t'_A = T_{Mittag} - \frac{\arccos\left(\frac{\tan\varphi'}{\tan\alpha}\right)}{\omega} = T_{Mittag} - 6,23 \text{ (h)}$$

$$t'_U = T_{Mittag} + \frac{\arccos\left(\frac{\tan\varphi'}{\tan\alpha}\right)}{\omega} = T_{Mittag} + 6,23 \text{ (h)}.$$

Aus der Gleichung (1.3.5c) ergibt sich für die Zeitauslenkung zwischen der Lage der äquivalenten Fläche und der des betrachteten Daches

$$\Delta t = t' - t = \frac{24h}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta\lambda = -2,42 \text{ (h)}.$$

Anhand der Gleichung (1.3.5e) lässt sich der Anfang t'_1 und das Ende t'_2 des Zeitintervalls bestimmen, in welchem das Dach von Sonnenlicht bestrahlt wird

$$]t'_1, t'_2[=]t'_A, t'_U[\cap]t_A + \Delta t, t_U + \Delta t[$$

$$\Rightarrow]t'_1, t'_2[=]T_{Mittag} - 6,23, T_{Mittag} + 6,23) \cap (T_{Mittag} - 9,63, T_{Mittag} + 4,79[$$

$$\Rightarrow]t'_1, t'_2[=]T_{Mittag} - 6,23, T_{Mittag} + 4,79[$$

$$\Rightarrow t'_1 = T_{Mittag} - 6,23 \text{ (h)}$$

$$\Rightarrow t'_2 = T_{Mittag} + 4,79 \text{ (h)}.$$

Daraus folgt

$$T_{hell} = t'_2 - t'_1 = 11,02 \text{ (h)}.$$

Die eingestrahlte Sonnenenergie wird durch Einsetzen der obigen Werte in die Gleichung (1.3.6) berechnet

$$E = P \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi' \cdot \frac{\sin\omega \cdot (t'_2 - T_K) - \sin\omega \cdot (t'_1 - T_K)}{\omega} - \cos\alpha \cdot \sin\varphi' \cdot (t'_2 - t'_1) \right)$$

$$\Leftrightarrow E = 10,50 \text{ (kWh)}.$$

Zusammenfassung für dieses Schrägdach am 14. August

Obwohl das schräge Dach nur eine kürzere Zeit von der Sonne beschienen wird, als ein waagerechtes Dach am selben Ort (11,02 Stunden beim schrägen Dach und 14,43 Stunden bei einer waagerechten Fläche) empfängt das Schrägdach mit 10,50 kWh mehr Sonnenenergie als ein waagerechtes Dach mit 9,90 kWh.

1.3.3.2 Berechnung durch Programmierung

Die obige Berechnung zeigt beispielhaft, wie man die hergeleiteten Formeln zur Bestimmung von Sonnenstunden und Sonnenenergie auf beliebige schräge Dächer anwenden kann. Sofern der horizontale Drehwinkel α_H , der vertikale Drehwinkel α_V , das Datum, der Breitengrad φ und der Längengrad λ gegeben sind, kann man die Sonnenstunden und die eingestrahlte Sonnenenergie auf dasselbe Dach direkt berechnen. Für Berechnungen mit anderen Werten müsste man dieselben Schritte immer wieder neu durchlaufen. Das legt die Programmierung mit einer Software wie Excel, Pascal, C, Matlab usw. nahe. Als Input müssen in ein solches Programm nur wenige Werte (α_H , α_V , φ ...) eingespeist werden um die gewünschten Ergebnisse als Output zu erhalten. Im Anhang steht der Matlab-Code eines solchen Programms zur Verfügung, dessen Ergebnisse nachfolgend exemplarisch zunächst an einem weiteren Beispiel, nämlich einer Tabellenkalkulation mit Excel (Abschn. 1.3.3.2.1), anschließend dann mit Matlab (Abschn. 1.3.3.2.2) aufgezeigt werden.

1.3.3.2.1 Die mit Excel erstellten Ergebnisse

In dem Diagramm (1.3.1) ist erkennbar, dass die Anzahl der Sonnenstunden auf dasselbe Schrägdach immer geringer ist, als die auf einem waagerechten Dach.

Aus Abbildung (1.3.2) ist abzuleiten, dass die Summe der eingestrahkten Sonnenenergie auf dasselbe Schrägdach in einem Jahr (die Fläche unter der roten Kurve) größer ist als jährliche Sonnenenergie auf einem waagerechten Dach (die Fläche unter der blauen Kurve), obwohl die eingestrahlte Sonnenenergie auf das Schrägdach vom 145. Tag bis zum 225. Tag (also vom 16. Mai bis zum 04. August) geringer ist, als die auf dem waagerechten Dach.

Input		Ergebnisse	
Datum (1..31)	14	Tage ab Wintersonnenwende	235
Monat (1..12)	8	Sonnenstunden am 14.8.	14,43
Dachfläche (m ²)	1	Eingestrahlte Sonnenenergie auf dem Erdboden von 1 (m ²) am 14.8 (kWh)	9,90
Breitengrad des Daches	50,88	Summe der Sonnestunden in einem Jahr	4380
Längengrad des Daches	8,05	Auf einem Erdboden von 1 (m ²) eingestrahlte Sonnenenergie pro Jahr (kWh)	2478
Solarkonstante (W/m ²)	1375	Theoretisches Einkommen auf dem Erdboden von 1 (m ²) pro Jahr (Euro)	719
Kosten pro kWh (Cent) (Einspeisevergütung)	29	Breitengrad der äquivalenten Fläche	12,95
Tage pro Jahr	365	Längengrad der äquivalenten Fläche	-28,29
Stunden pro Tag	24	Die Verschiebung vom Längengrad der äquivalenten Fläche (Grad)	-36,34
Neigung der Erdachse (Grad)	23,5	Sonnenstunden am 14.8. auf dem Dach	11,02
Der vertikale Drehwinkel α_V des Daches (Grad)	51	Eingestrahlte Sonnenenergie auf der Dachfläche von 1 (m ²) am 14.8 (kWh)	10,50
Der horizontale Drehwinkel α_H des Daches (Grad)	48	Summe der Sonnenstunden in einem Jahr	3496
		Auf einer Dachfläche von 1 (m ²) eingestrahlte Sonnenenergie pro Jahr (kWh)	3183

Tabelle 1.3.1: Input- und Ergebnistabelle [A 1.3.9].

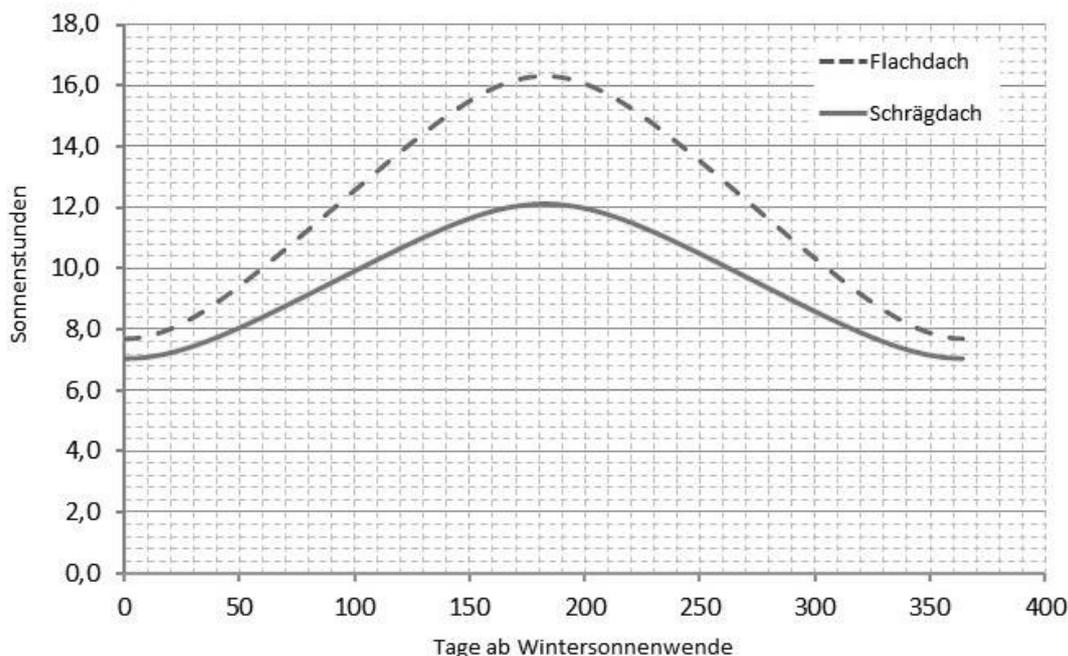


Diagramm 1.3.1: Sonnenstunden im Jahresverlauf für das betrachtete Schrägdach mit $\alpha_H = 48^\circ$ und $\alpha_V = 51^\circ$ [A 1.3.9].

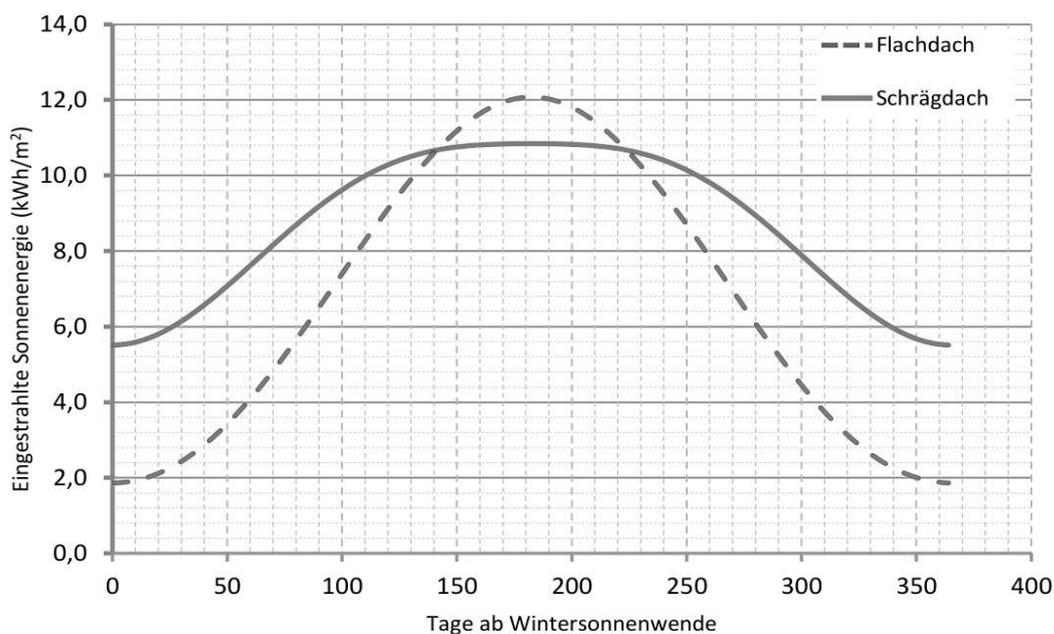


Diagramm 1.3.2: Eingestrahlte Sonnenenergie im Jahresverlauf für das betrachtete Schrägdach mit $\alpha_H = 48^\circ$ und $\alpha_V = 51^\circ$ [A 1.3.9].

Daraus ergibt sich die Konsequenz, dass man die Solarzelle vom 16. Mai bis 04. August nicht schräg, sondern waagrecht montieren sollte, wenn man einen möglichst hohen Energieertrag erzielen möchte.

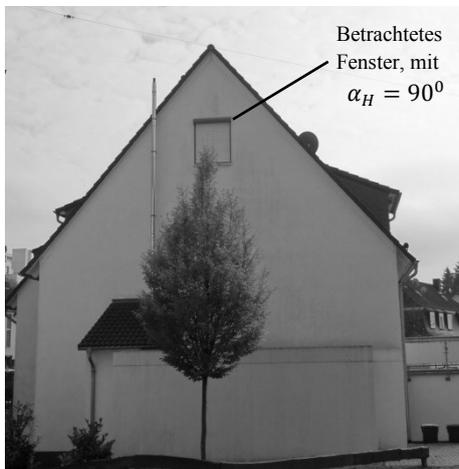


Abb. 1.3.13: Bestimmung der Sonnenstunden und der eingestrahltten Sonnenenergie für ein Fenster.

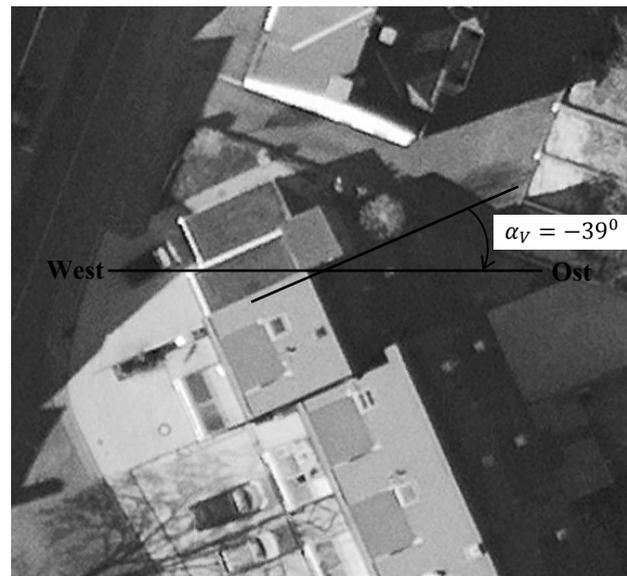


Abb. 1.3.14: Der vertikale Drehwinkel α_V wird durch Satellitenbilder aus Google Earth ermittelt (© 2009 GeoBasis-De/BKG Image © 2014 AeroWest).

Mit Hilfe dieses Programms kann die Berechnung für jeden beliebigen Drehwinkel des Daches ausgeführt werden. So ließe sich beispielsweise auch die Anzahl der Sonnenstunden und der Betrag der eingestrahltten Sonnenenergie für ein Fenster, eine Wand des Hauses oder eine Fläche eines Berges oder Hügels bestimmen. Die nachfolgenden Diagramme 1.3.3 und 1.3.4 demonstrieren beispielhaft die Ergebnisse des Programm für die zweite Fläche am betrachteten Haus (ein Fenster am Giebel).

Aus den Abbildungen 1.3.13 und 1.3.14 kann man ableiten, dass $\alpha_H = 90^\circ$ und $\alpha_V = -39^\circ$. Nach Einsetzen beider Werte in das Programm erhält man folgende Ergebnisse.

Die Anzahl der Sonnenstunden und die täglich eingestrahlte Sonnenenergie auf das betrachtete Fenster sind jeweils kleiner als dieselben Größen auf dem Schrägdach. Das Flachdach erfährt 11,02 Sonnenstunden pro Tag und das Fenster nur 9,59 Stunden und entsprechend liegt auch die eingestrahlte Sonnenenergie mit 10,50 kWh höher als die am Fenster mit 6,71 kWh.

Aus den Diagrammen 1.3.3 und 1.3.4 kann man erkennen, dass die Sonnenstunden auf dem Fenster immer kleiner sind, als die Sonnenstunden auf einem normalen waagerechten Dach. Das betrachtete Fenster empfängt jedoch in der Jahressumme fast genau so viel Sonnenenergie (die Fläche unter der roten Kurve), wie ein waagerechtes Dach (die Fläche unter der blauen Kurve).

Die täglich eingestrahlte Sonnenenergie auf dem Flachdach ist vom 105. Tag bis etwa zum 265. Tag nach der Wintersonnenwende (also vom 6. April bis zum 13. September) höher, als die auf dem betrachteten Fenster. Für die anderen Tage des Jahres ist es umgekehrt. Das Fenster wurde folglich wohl überlegt am Haus platziert. In der warmen Jahreszeit weist das Fenster erheblich weniger eingestrahlte Sonnenenergie auf als ein waagerechtes Dach, während es in der kalten Jahreszeit erheblich mehr eingestrahlte Sonnenenergie als ein waagerechtes Dach bekommt.

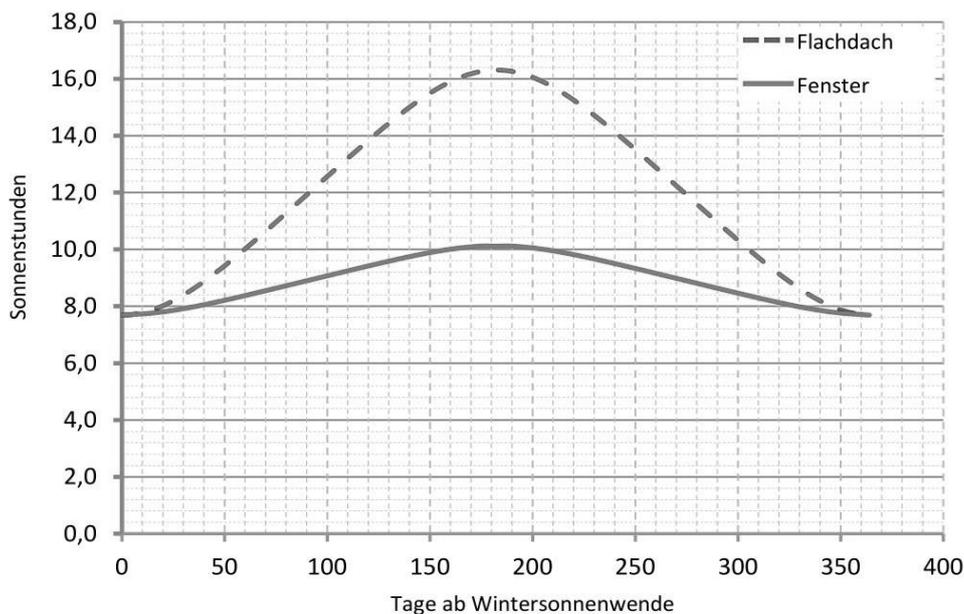


Diagramm 1.3.3: Sonnenstunden im Jahresverlauf für das betrachtete Fenster mit $\alpha_H = 90^\circ$ und $\alpha_V = -39^\circ$ [A 1.3.9].

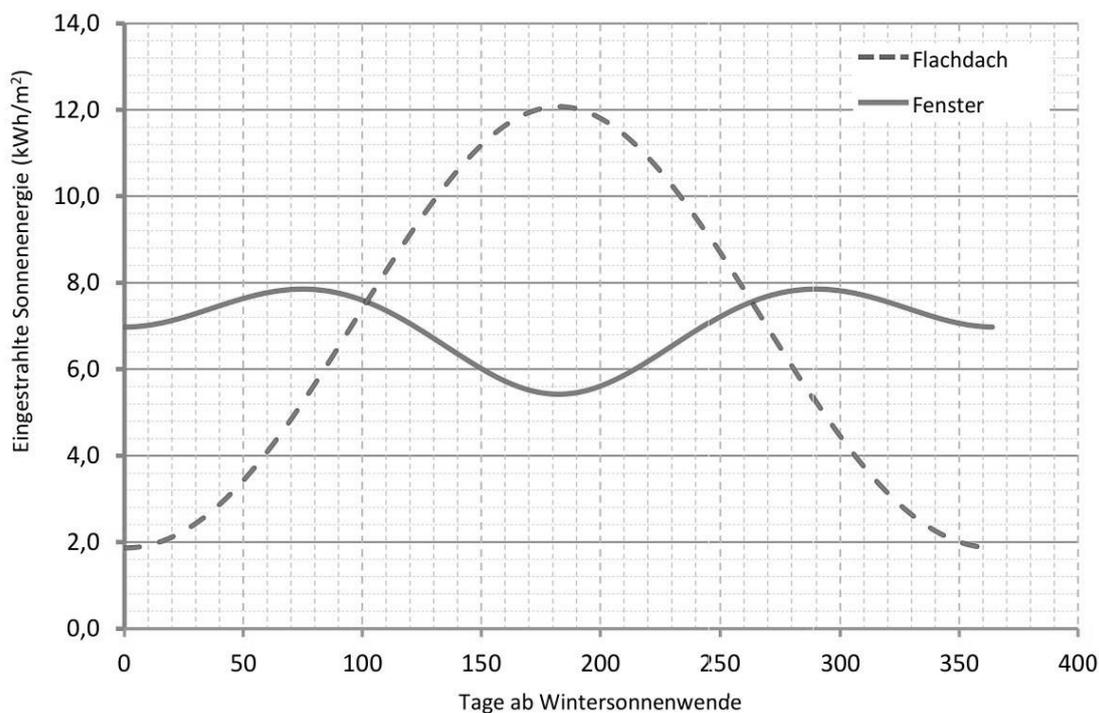


Diagramm 1.3.4: Eingestrahlte Sonnenenergie im Jahresverlauf für das betrachtete Fenster mit $\alpha_H = 90^\circ$ und $\alpha_V = -39^\circ$ [A 1.3.9].

1.3.3.2.2. Berechnungen mit Matlab

Die vorgestellten Berechnungen wurden auch in ein Matlab-Programm überführt (der Quellcode kann im Anhang [A 1.3.10] ... [A 1.3.21] eingesehen werden). Die Ergebnisse des Programms sollen im Folgenden anhand von Grafiken dargestellt werden.

1.3.3.2.2.1. Die Ergebnisse für den 14.8. in Siegen

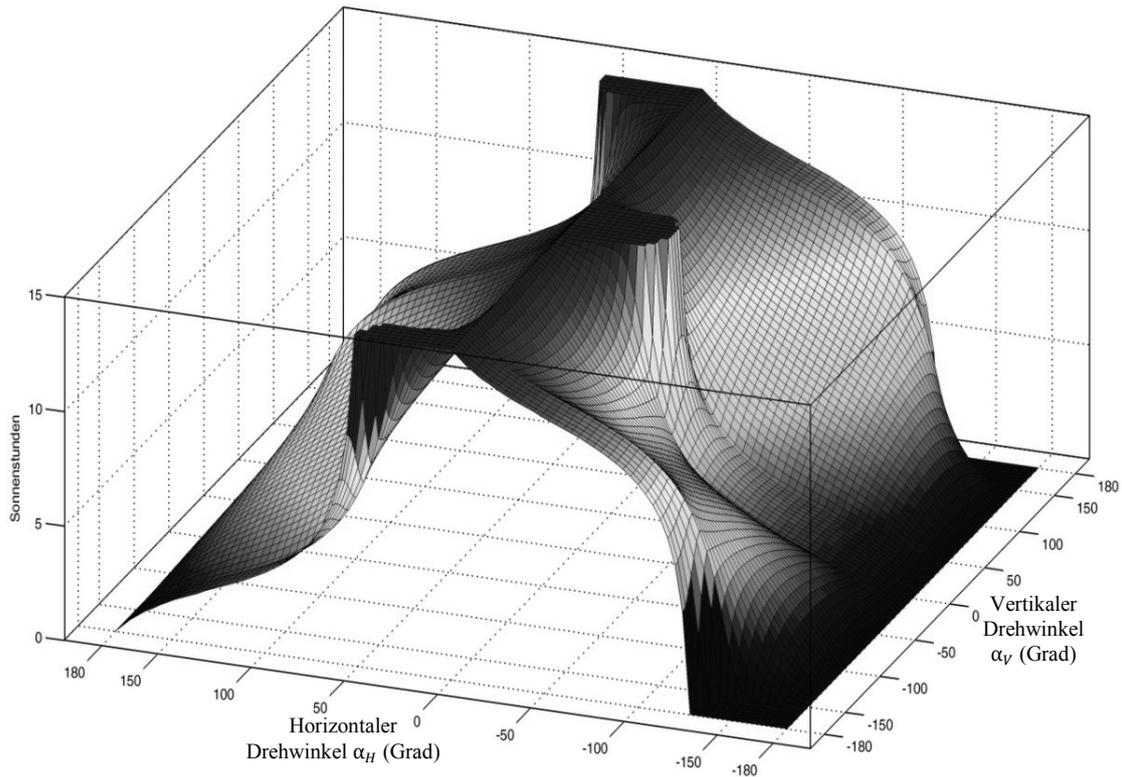


Diagramm 1.3.5a (Orthogonale 3D-Darstellung): Die Zusammenhänge zwischen den Sonnenstunden und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.10] und [A 1.3.11]).

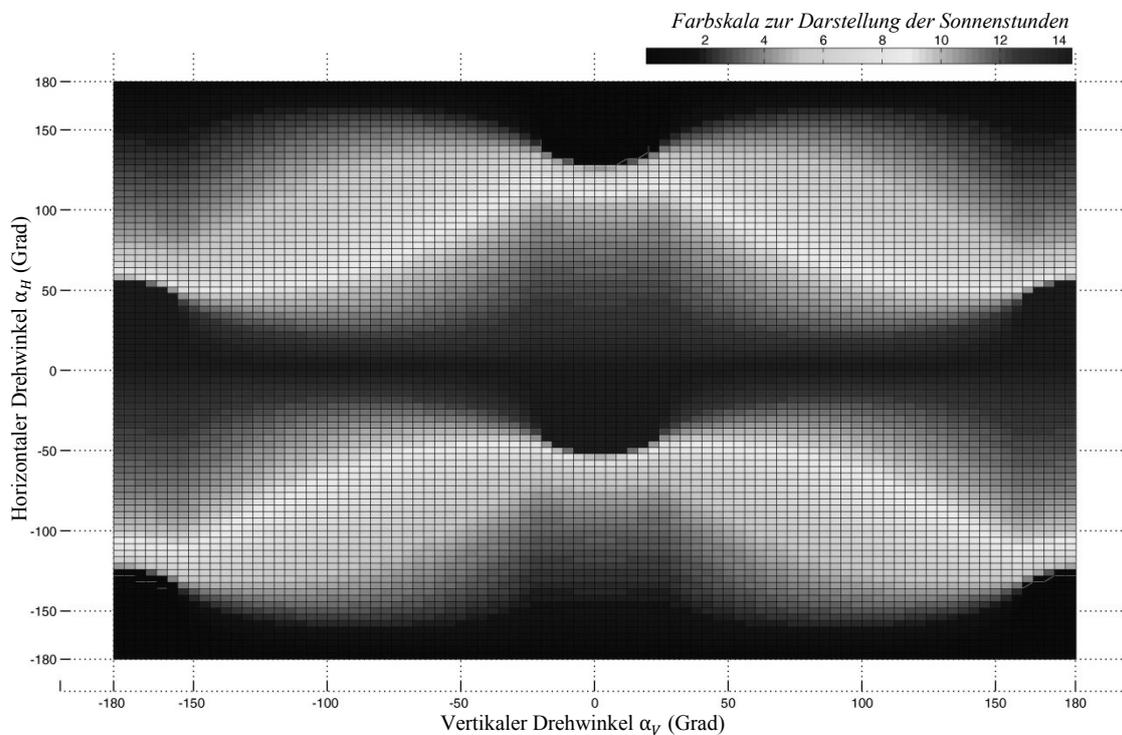


Diagramm 1.3.5b (Das durch Farben repräsentierte Diagramm): Die Zusammenhänge zwischen den Sonnenstunden und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.10] und [A 1.3.11]).

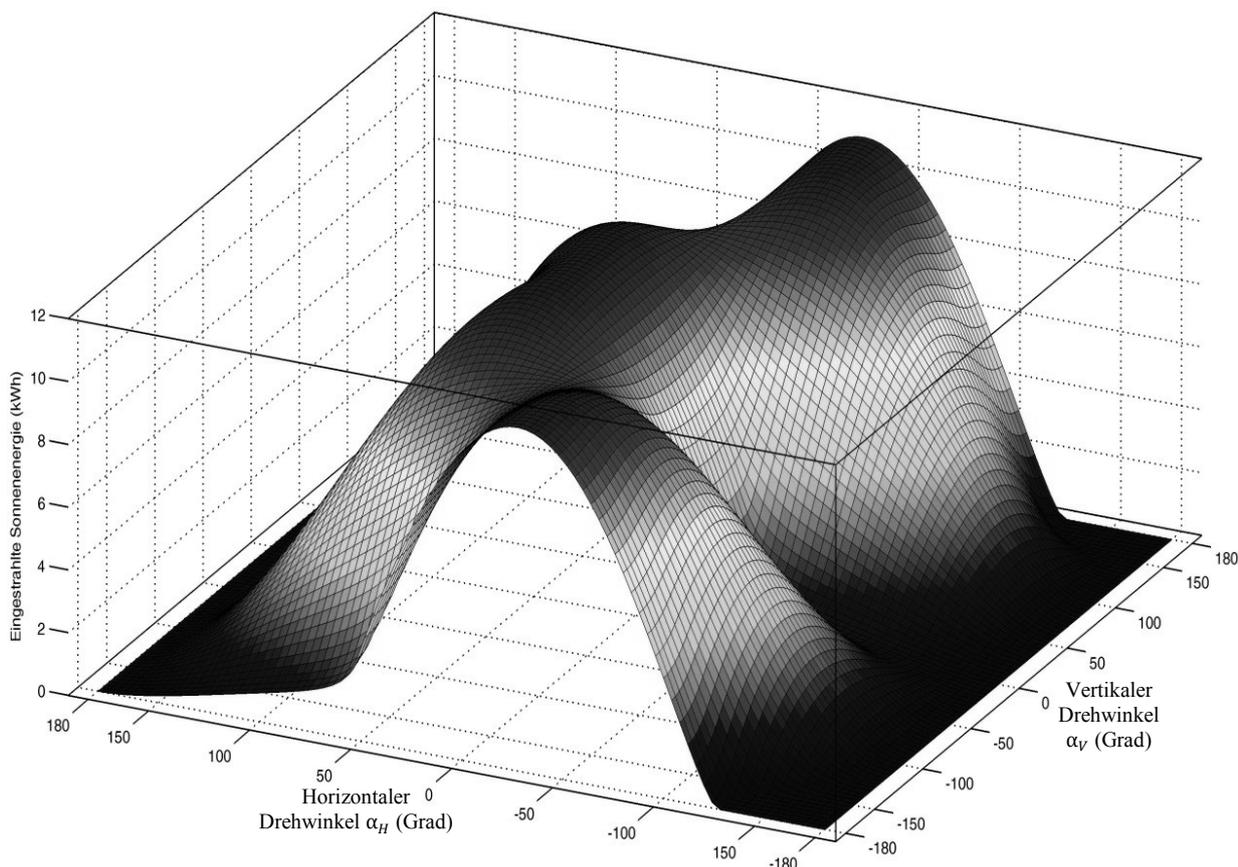


Diagramm 1.3.6a (Orthogonale 3D-Darstellung): Die Zusammenhänge zwischen der täglich eingestrahltten Sonnenenergie und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.12] und [A 1.3.13]).

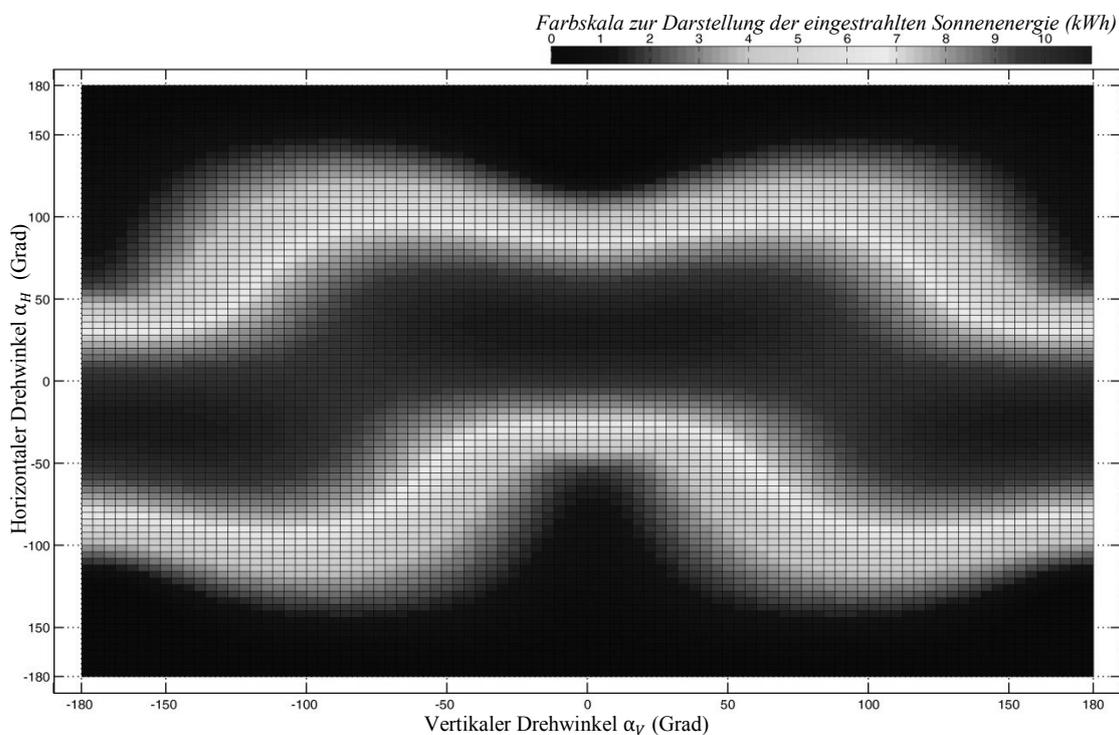


Diagramm 1.3.6b (Das durch Farben repräsentierte Diagramm): Die Zusammenhänge zwischen der täglich eingestrahltten Sonnenenergie und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.12] und [A 1.3.13]).

1.3.3.2.2 Die Ergebnisse für die jährlichen Sonnenstunden und die jährlich eingestrahlte Sonnenenergie in Siegen

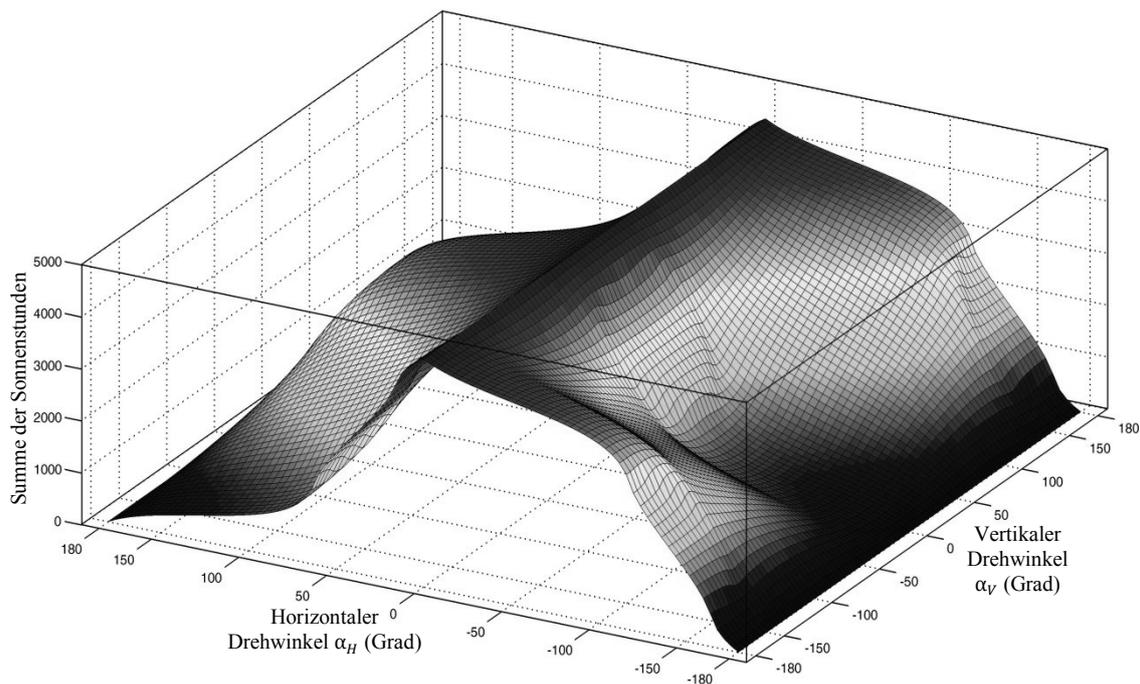


Diagramm 1.3.7a (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.14] und [A 1.3.15]).

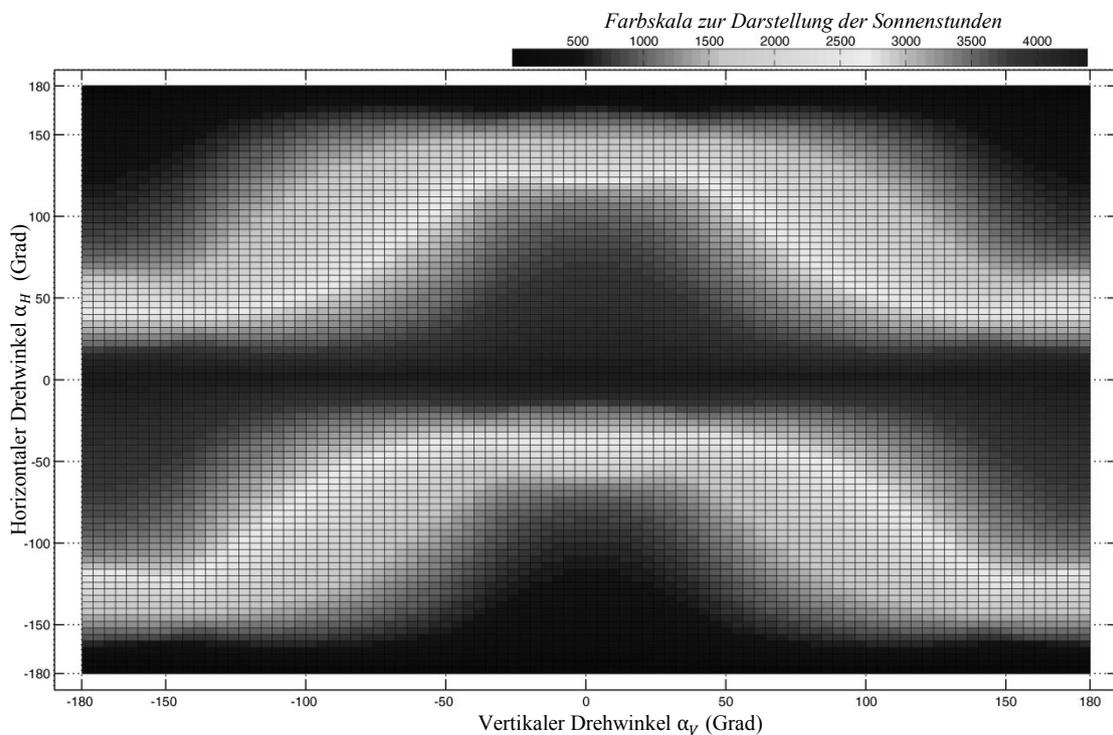


Diagramm 1.3.7b (*Das durch Farben repräsentierte Diagramm*): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.14] und [A 1.3.15]).

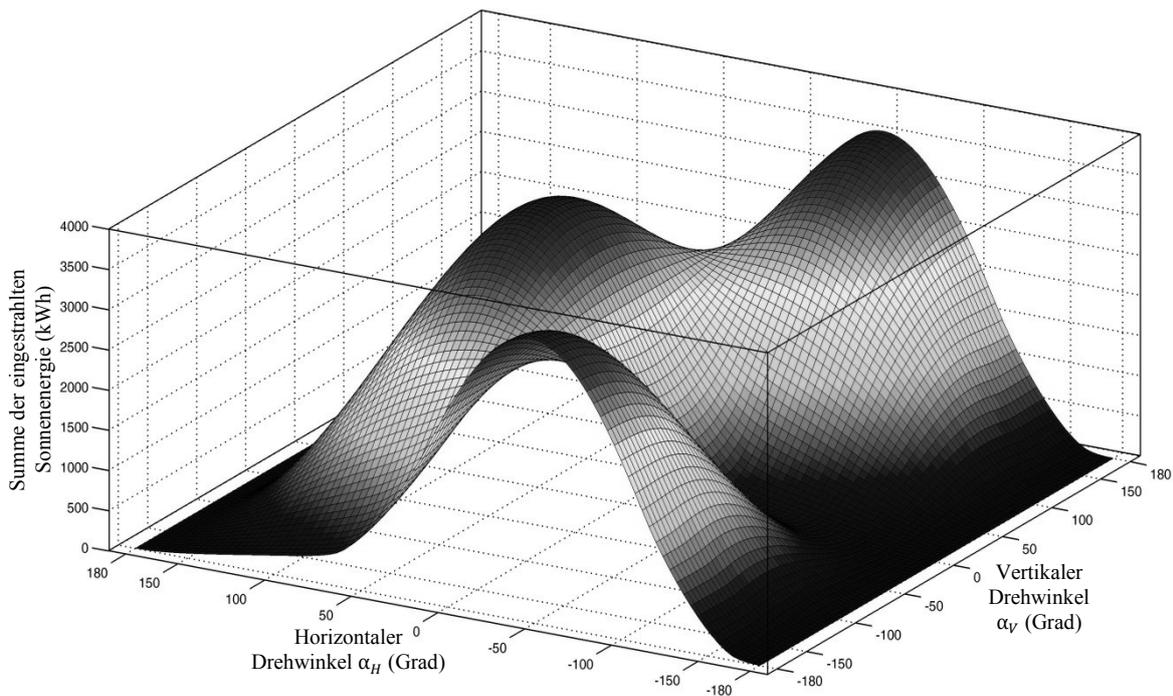


Diagramm 1.3.8a (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahlichten Sonnenenergie in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.16] und [A 1.3.17]).

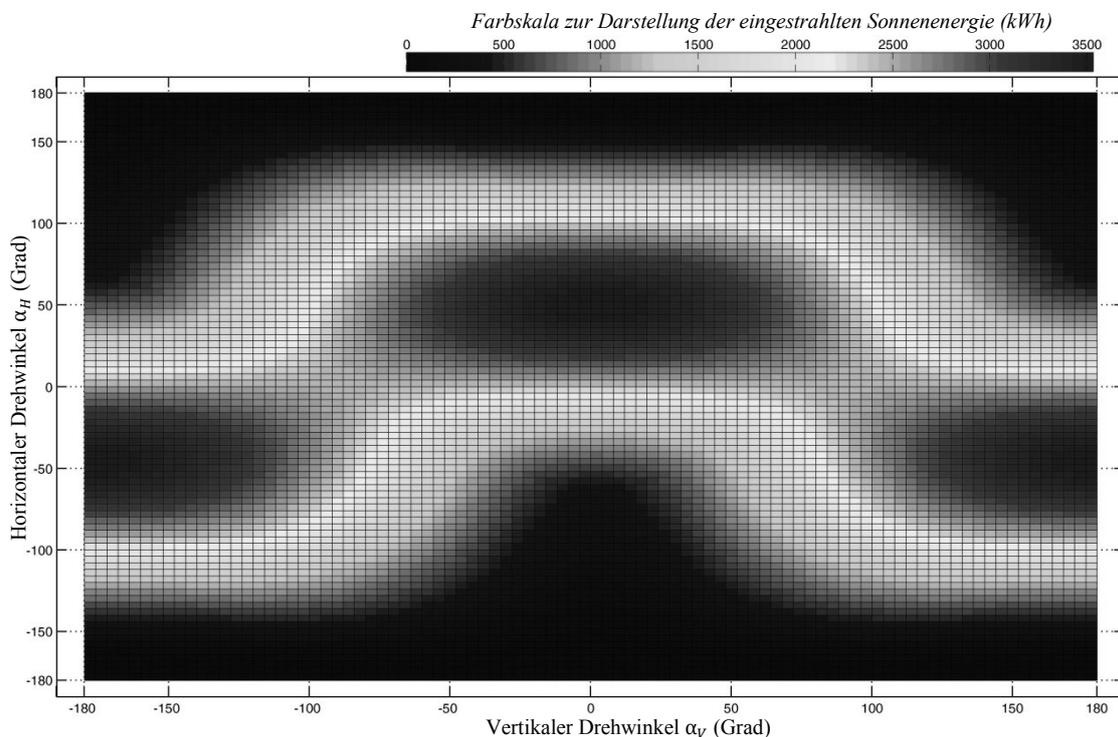


Diagramm 1.3.8b (*Das durch Farben repräsentierte Diagramm*): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahlichten Sonnenenergie in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.16] und [A 1.3.17]).

1.3.3.2.2.3 Die Ergebnisse für die jährlichen Sonnenstunden und die jährlich eingestrahlte Sonnenenergie an beliebigen Orten

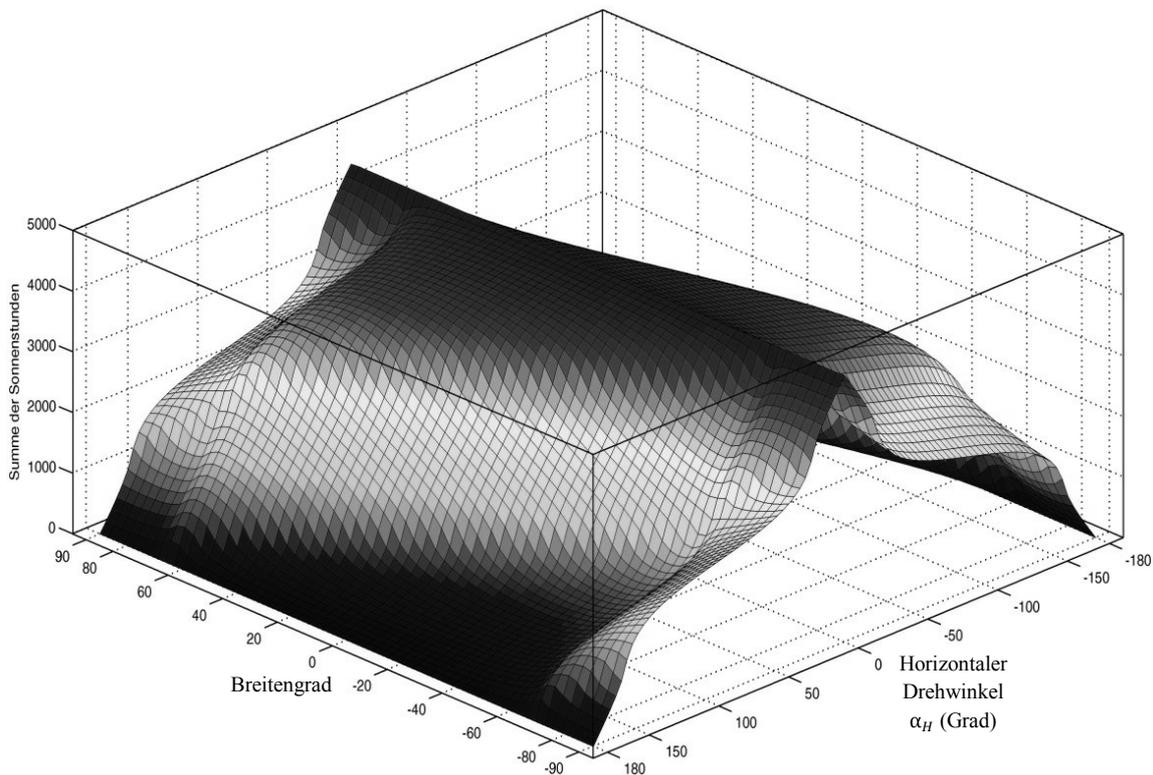


Diagramm 1.3.9a (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.14] und [A 1.3.18]).

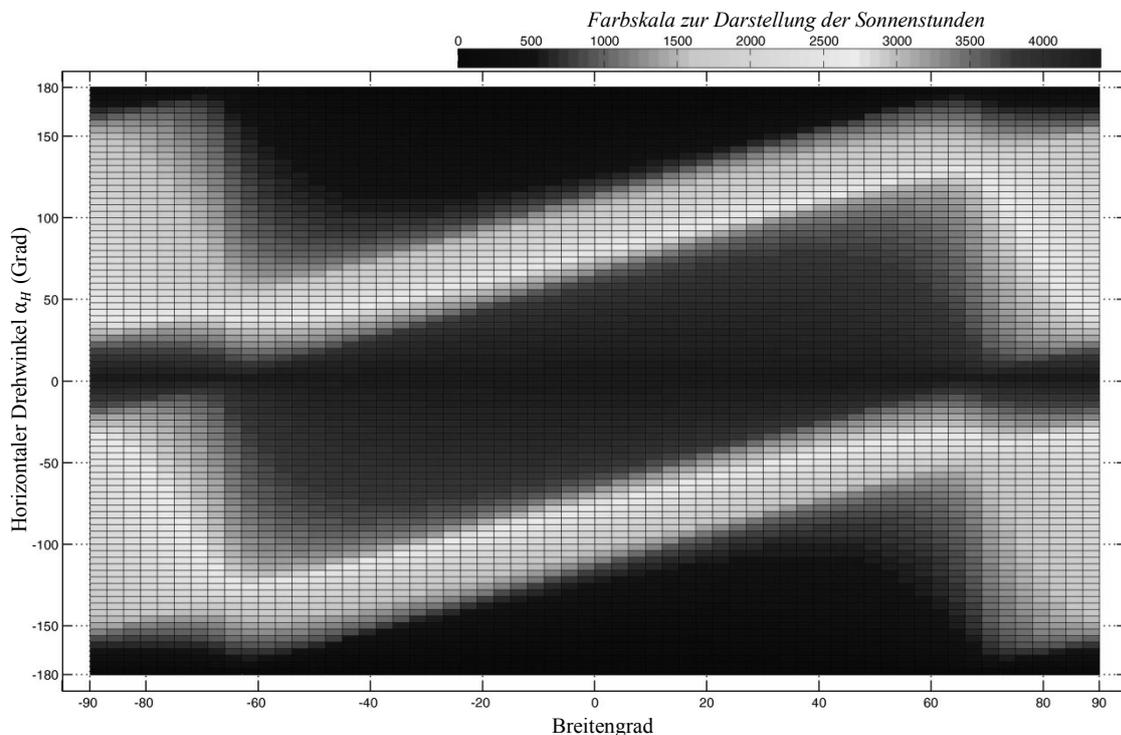


Diagramm 1.3.9b (*Das durch Farben repräsentierte Diagramm*): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.14] und [A 1.3.18]).

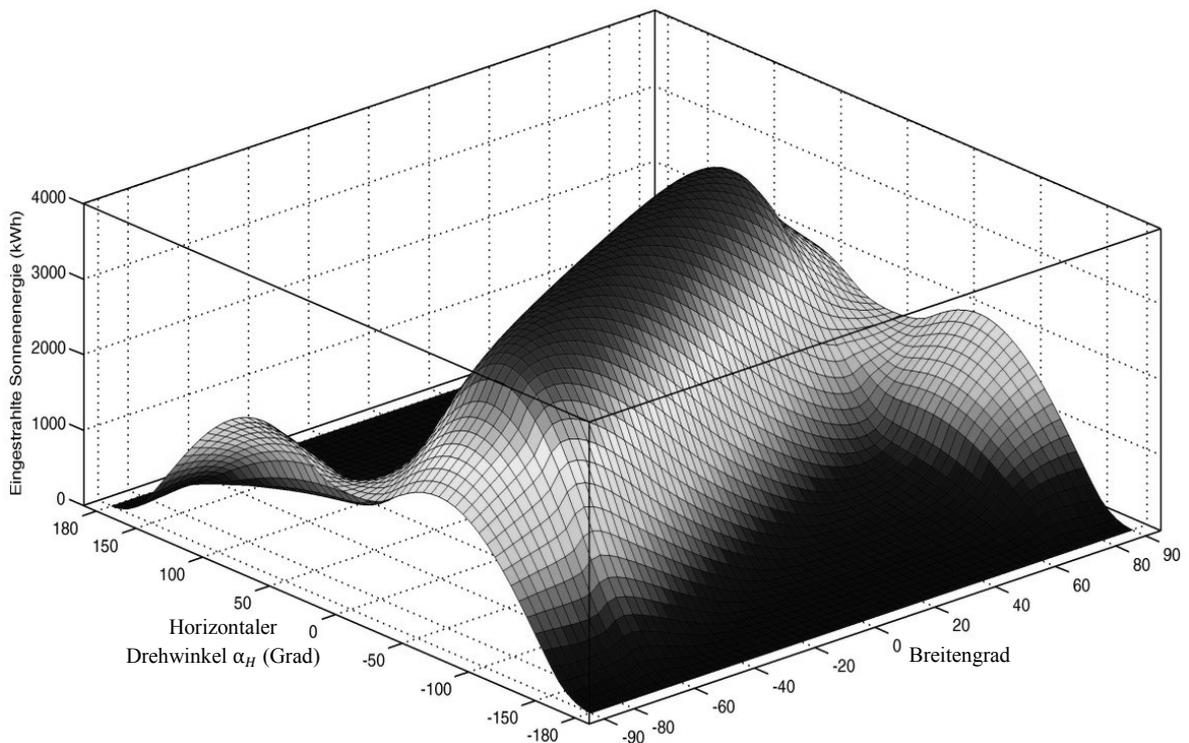


Diagramm 1.3.10a (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahnten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.16] und [A 1.3.19]).

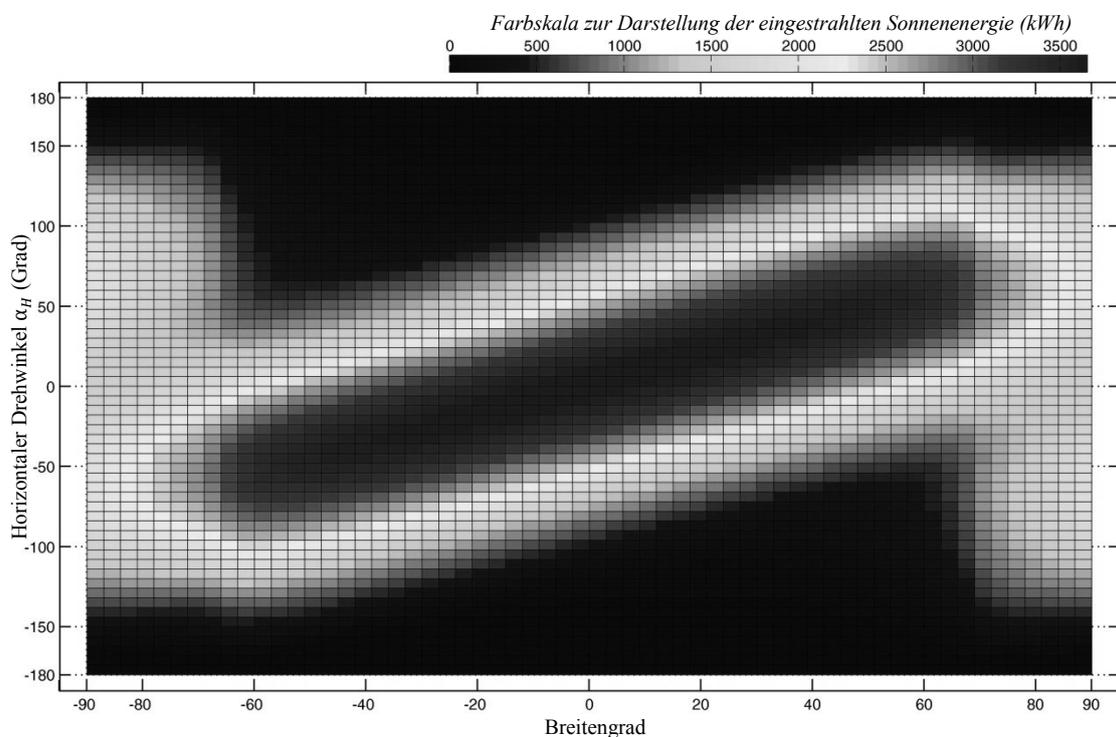


Diagramm 1.3.10b (*Das durch Farben repräsentierte Diagramm*): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahnten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.16] und [A 1.3.19]).

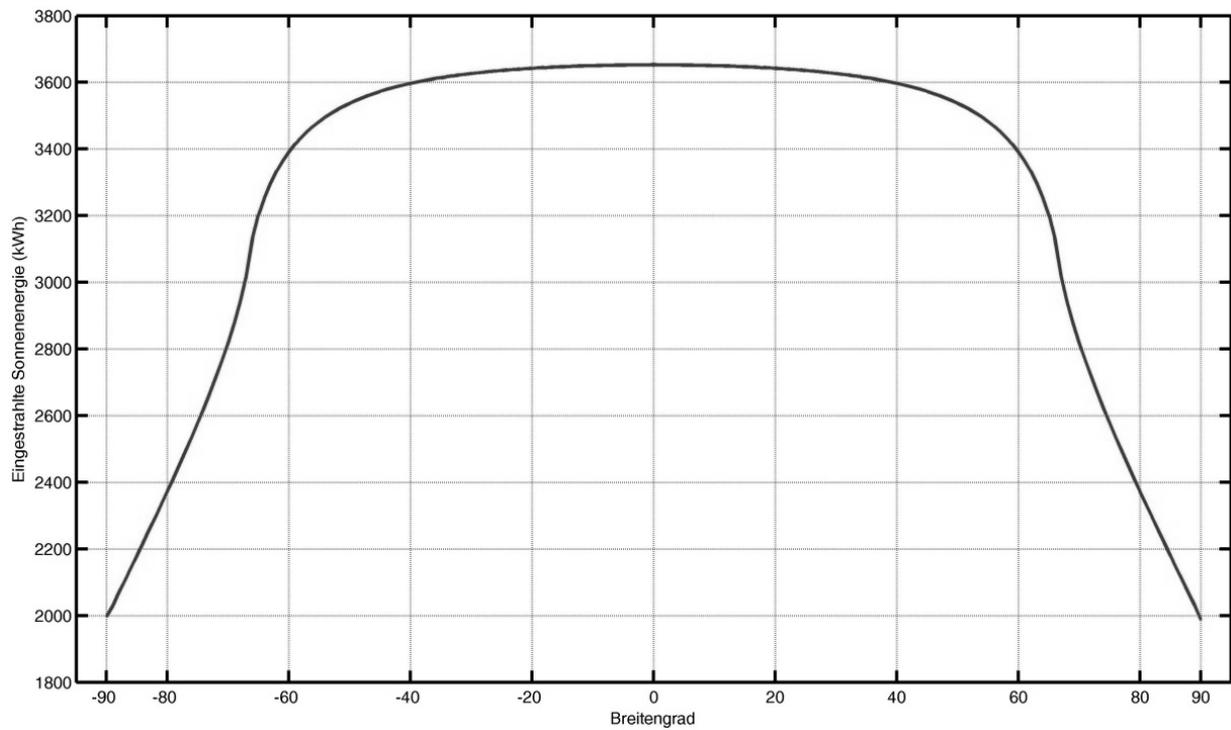


Diagramm 1.3.10c: Der Zusammenhang zwischen dem Maximum der jährlich eingestrahltten Sonnenenergie auf einem Schrägdach und dem Breitengrad ([A 1.3.16], [A 1.3.19] und[A 1.3.20]).

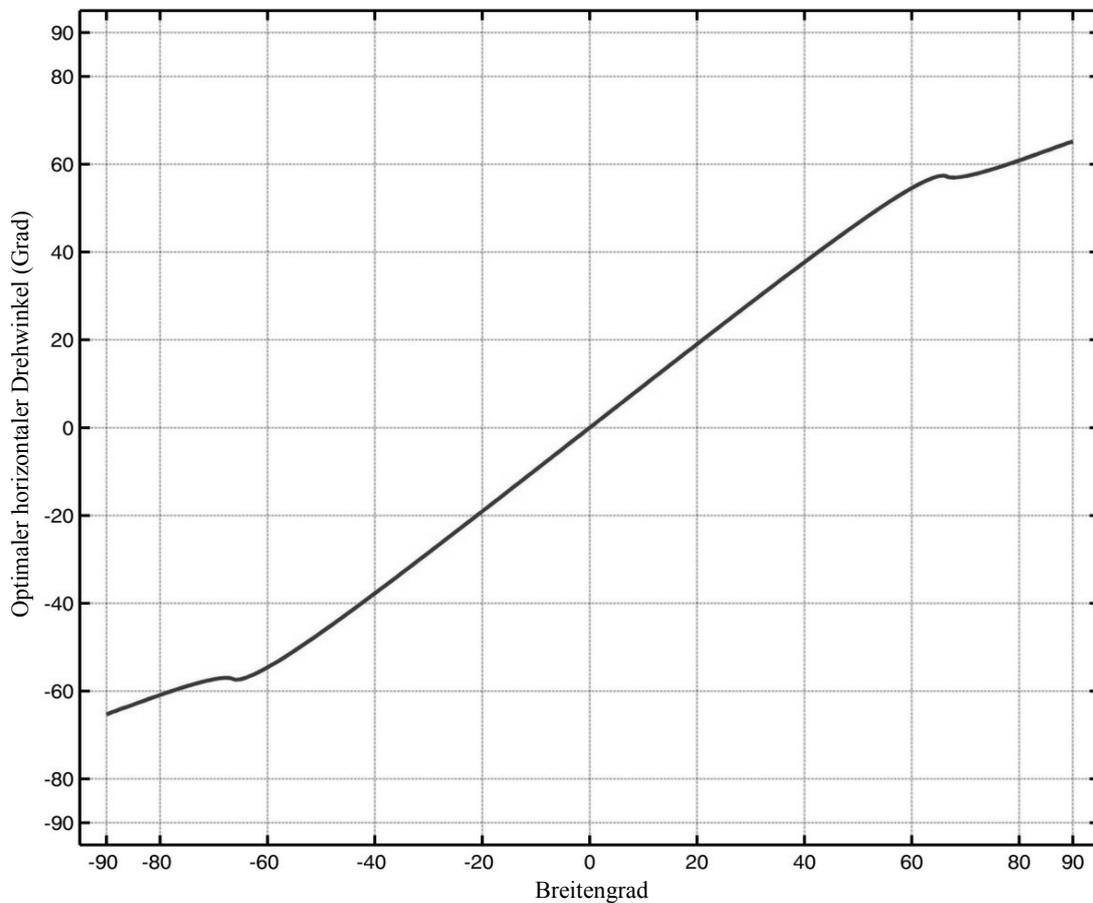


Diagramm 1.3.10d: Die Abhängigkeit des optimalen horizontalen Drehwinkels eines Schrägdaches vom Breitengrad ([A 1.3.16], [A 1.3.19] und[A 1.3.21]).

1.4 Abweichungen der vereinfachten Verfahren vor dem Hintergrund exakterer Überlegungen

Für die obigen Berechnungen wurde angenommen, dass sich der Erdmittelpunkt nicht kontinuierlich um die Sonne bewegt, sondern diskret. Seine Position ändert sich bei dieser Annahme innerhalb eines Tages nicht und der Winkel δ bleibt im Tagesverlauf damit konstant. Außerdem wurde die Erdbahn als Kreis und nicht als Ellipse genähert, woraus sich auch ergibt, dass die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne als konstant angenommen wurde, die Änderungen nach dem zweiten keplerschen Gesetz also nicht berücksichtigt wurden.

In diesem Abschnitt werden genauere Ergebnisse berechnet, die auf den Gesetzen der klassischen Mechanik beruhen. Da diese Betrachtungen zu Formeln führen, die analytisch nicht lösbar sind, werden sie numerisch mit Programmen gelöst. Danach werden die mit dem vereinfachten Verfahren gewonnenen Ergebnisse mit den genaueren Ergebnissen verglichen. Dieser Vergleich ermöglicht insbesondere eine Aussage über die Güte der gemachten Abschätzungen und deren Gültigkeitsbereich.

1.4.1 Die genaue Umlaufperiode der Erde um die Sonne

Aufgrund des Gravitationsgesetzes gilt für die Wechselwirkung zwischen Erde (Masse m_E) und Sonne (Masse m_S)

$$F_E = F_S = G \frac{m_E \cdot m_S}{r^2}$$

(G : Gravitationskonstante, r : Abstand Erde-Sonne).

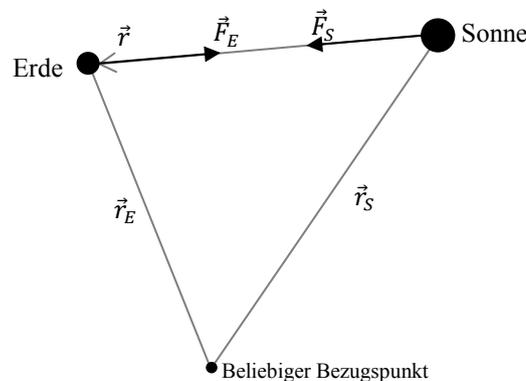


Abbildung 1.4.1: Zum Gravitationsgesetz, Bezeichnungen der Größen und Orientierung der Vektoren.

Unter Berücksichtigung des Vektorcharakters der Kräfte (Abbildung 1.4.1) wird die obige Gleichung zu

$$\vec{F}_E = -G \frac{m_E \cdot m_S}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{F}_S = G \frac{m_E \cdot m_S}{r^3} \vec{r}.$$

Wegen des 2. newtonschen Gesetzes gilt für die Gravitationsbeschleunigungen \vec{a}_E und \vec{a}_S :

$$\vec{a}_E = \ddot{\vec{r}}_E = \frac{\vec{F}_E}{m_E} = -G \frac{m_S}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{a}_S = \ddot{\vec{r}}_S = \frac{\vec{F}_S}{m_S} = G \frac{m_E}{r^3} \vec{r}.$$

Aus der Abbildung (1.4.1) wird ersichtlich

$$\vec{r} = \vec{r}_E - \vec{r}_S$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_E - \ddot{\vec{r}}_S = -G \frac{m_E + m_S}{r^3} \vec{r} \quad (1.4.1)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = -G \frac{m_E + m_S}{r^3} \vec{r} \times \vec{r}.$$

Da das Vektorprodukt zweier gleichgerichteter Vektoren stets verschwindet, gilt

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = -G \frac{m_E + m_S}{r^3} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Damit ist auch $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0}$ und

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}.$$

Aufgrund der Produktregel (für die Ableitung einer Produktfunktion) kann die linke Seite dieser Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{K}_1 = \overline{const} \quad (1.4.2)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = |\vec{K}_1|.$$

Dabei ist α der Winkel zwischen Vektor \vec{r} und dem Vektor $d\vec{r}$ (Skizze 1.4.2).

$$\Rightarrow \frac{dr \cdot r \cdot \sin\alpha}{dt} = K_1 = const$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2} dr \cdot r \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} dr \cdot r \cdot \sin(\pi - \alpha)$ ist das Flächenelement dA , das vom Vektor \vec{r} in der Differentialzeit dt überstrichen wird (Skizze 1.4.2). Dann gilt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{K_1}{2} = const \quad (1.4.3).$$

Die Gleichung (1.4.3) gibt das 2. keplersche Gesetz wieder.

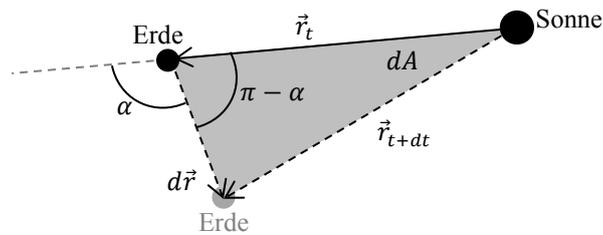


Abbildung 1.4.2: Bezeichnungen der Größen.

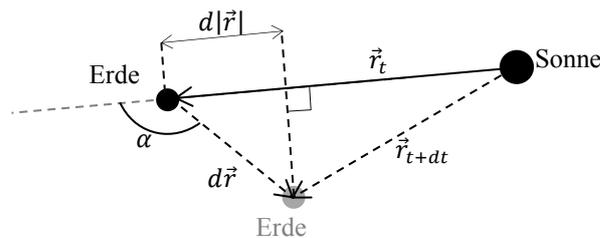
Nun soll das Vektorprodukt $(\vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}})$ betrachtet werden. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.4.1) und (1.4.2) erhält man

$$\vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_E + m_S}{r^3} [(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) \times \vec{r}].$$

Für das Vektorprodukt dreier Vektoren gilt stets $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} &= -G \frac{m_E + m_S}{r^3} [(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}] \\ \Rightarrow \vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} &= -G \frac{m_E + m_S}{r^3} \left(\frac{|d\vec{r}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos\alpha}{dt} \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \dot{\vec{r}} \right) \\ \Rightarrow \vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} &= -G \cdot (m_E + m_S) \left(\frac{|d\vec{r}| \cdot \cos\alpha}{dt} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $|d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$ ist die Differenziallänge $|d\vec{r}|$ des Vektors \vec{r} in der Differenzialzeit dt . Die Skizze (1.4.3) veranschaulicht diese Differenziallänge $|d\vec{r}|$.


 Abbildung 1.4.3: Darstellung der Differenziallänge $|d\vec{r}|$.

Aus der Skizze (1.4.3) ist erkennbar

$$|d\vec{r}| = \lim_{dt \rightarrow 0} (|\vec{r}_{t+dt}| - |\vec{r}_t|) = |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha.$$

Damit folgt

$$\vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} = -G \cdot (m_E + m_S) \cdot \left(\frac{|d\vec{r}|}{dt} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} &= -G \cdot (m_E + m_S) \cdot \left(-\frac{d}{dt} \frac{1}{r} \cdot \dot{\vec{r}} - \frac{1}{r} \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \right) \\ &\Rightarrow \vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} = G \cdot (m_E + m_S) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1.4.2) ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{K}_1 \times \ddot{\vec{r}} &= \vec{K}_1 \times \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{K}_1 \times \dot{\vec{r}}) = G \cdot (m_E + m_S) \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &\Rightarrow d(\vec{K}_1 \times \dot{\vec{r}}) = G \cdot (m_E + m_S) \cdot d \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &\Rightarrow \int d(\vec{K}_1 \times \dot{\vec{r}}) = G \cdot (m_E + m_S) \int d \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &\Rightarrow \vec{K}_1 \times \dot{\vec{r}} = G \cdot (m_E + m_S) \frac{\vec{r}}{r} + \vec{K}_2.\end{aligned}$$

Dabei ist \vec{K}_2 ein Integrationskonstanten-Vektor. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit \vec{r} ergibt sich:

$$(\vec{K}_1 \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r} = \left(G \cdot (m_E + m_S) \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{K}_2 \right) \cdot \vec{r}.$$

Für Vektorprodukte gilt stets $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{K}_1 \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) &= G \cdot (m_E + m_S) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + \vec{K}_2 \cdot \vec{r} \\ \Rightarrow \vec{K}_1 \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) &= G \cdot (m_E + m_S) \cdot r + K_2 \cdot r \cdot \cos\delta.\end{aligned}$$

Wobei δ der Winkel zwischen \vec{K}_2 und \vec{r} ist.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1.4.2) lässt sich ableiten, dass

$$\begin{aligned}K_1^2 &= G \cdot (m_E + m_S) \cdot r + K_2 \cdot r \cdot \cos\delta \\ \Rightarrow r &= \frac{\frac{K_1^2}{G \cdot (m_E + m_S)}}{1 + \frac{K_2}{G \cdot (m_E + m_S)} \cdot \cos\delta} \\ \Rightarrow r &= \frac{p}{1 + e \cdot \cos\delta} \quad (1.4.4).\end{aligned}$$

Die Parameter $p := \frac{K_1^2}{G \cdot (m_E + m_S)} = \text{const}$ und $e := \frac{K_2}{G \cdot (m_E + m_S)} = \text{const}$ werden dabei zur Vereinfachung definiert.

Die Gleichung (1.4.4) gibt das 1. keplersche Gesetz wieder, denn es beschreibt die Bahnform einer Ellipse der Exzentrizität e (sofern gilt: $e < 1$ ist), siehe Skizze 1.4.4).

Wir bezeichnen U als die Umlaufszeit für das vollständige Durchlaufen der Ellipsenbahn. Aus der Gleichung (1.4.3) wird damit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_0}{U} = \frac{K_1}{2}.$$

Dabei ist A_0 die Fläche der Ellipse die sich durch $A_0 = \pi a \cdot b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ bestimmen lässt. a ist die Länge der großen Halbachse, b ist die der kleinen Halbachsen (Skizze 1.4.4).

Somit ergibt sich als die Umlaufszeit U zu

$$U = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{K_1} \quad (1.4.5).$$

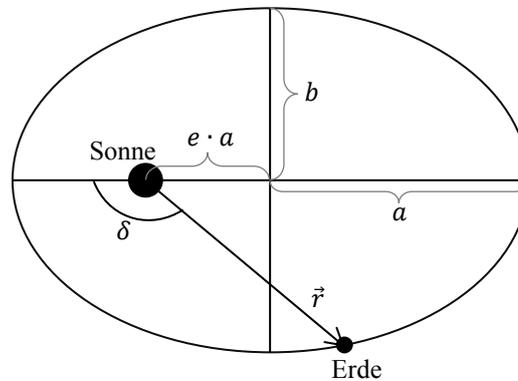


Abbildung 1.4.4: Darstellung der Ellipsenbahn.

Aus der Skizze (1.4.4) folgt, dass $r = a - e \cdot a$ wenn $\delta = 0^\circ$. Setzt man dies in die Gleichung (1.4.4) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} a - e \cdot a &= \frac{p}{1 + e \cdot \cos 0^\circ} \\ \Rightarrow p &= a \cdot (1 - e^2) = \frac{K_1^2}{G \cdot (m_E + m_S)} \\ \Rightarrow K_1 &= \sqrt{G \cdot a \cdot (m_E + m_S)(1 - e^2)}. \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen des obigen Ausdrucks von K_1 in die Gleichung (1.4.5.) ergibt sich

$$U = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G \cdot (m_E + m_S)}} \quad (1.4.6).$$

Mit der Gravitationskonstante $G = 6,674215 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, der Erdmasse $m_E = 5,97 \cdot 10^{24} kg$, der Sonnenmasse $m_S = 1,988435 \cdot 10^{30} kg$ [Gundlach 2000] und der Länge der großen Halbachsen der Erdbahn-Ellipse $a = 1,49597870701 \cdot 10^{11} m$ ([Petit 2010] S. 18) erhält man für Umlaufszeit U der Erde um die Sonne

$$U = 31558237 \text{ Sekunde} = 365,25637 \text{ Tage} \quad (1.4.7).$$

1.4.2 Die genaueren Bewegungsgleichungen des Umlaufs der Erde um die Sonne

Die bisher gewonnenen Gleichungen beschreiben die Eigenschaften der Erdbahn. Nun wird eine Bewegungsgleichung des Umlaufs der Erde um die Sonne gesucht, also eine Gleichung, die die Position der Erde bei gegebener Zeit angibt.

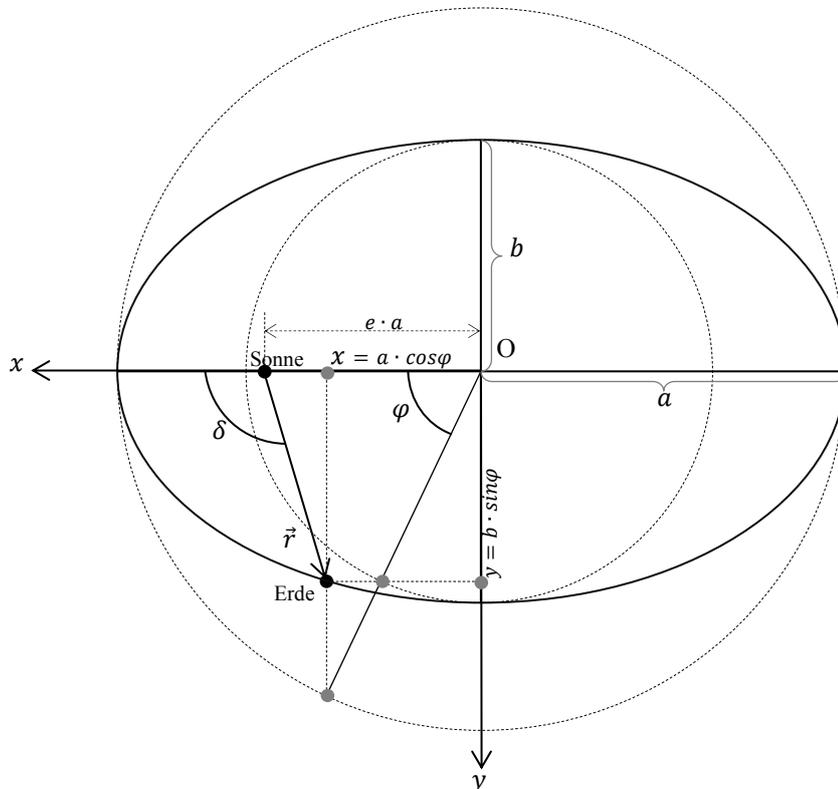


Abbildung 1.4.5: Darstellung zur Festlegung des Koordinatensystems Oxy und des Parameters φ .

Als Bezugszeitpunkt t_0 wird die Zeit gewählt, wenn die Erde im Perihel steht. Das ist der Zeitpunkt, bei dem die Umlaufbahn der Erde die positive x-Achse unseres Koordinatensystems schneidet (Skizze 1.4.5). Im Koordinatensystem Oxy wird die Ellipse durch die Gleichung beschrieben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nun wird ein neuer Parameter φ definiert (Skizze 1.4.5), der folgende Gleichungen erfüllt

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\varphi \\ y = b \cdot \sin\varphi \end{cases} \quad (1.4.8)$$

Der Zusammenhang zwischen φ und δ ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (1.4.4), die mit dem Ausdruck $p = a(1 - e^2)$ umgeschrieben werden kann zu

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\delta} \quad (1.4.9).$$

Aus der Skizze (1.4.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \delta) &= \frac{e \cdot a - x}{r} \\ \Rightarrow -\cos\delta &= \frac{e \cdot a - x}{r}.\end{aligned}$$

Setzt man $r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\delta}$ und $x = a \cdot \cos\varphi$ in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}-\cos\delta &= \frac{e \cdot a - a \cdot \cos\varphi}{\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\delta}} \\ \Rightarrow \cos\delta &= \frac{\cos\varphi - e}{1 - e \cdot \cos\varphi}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\cos\varphi - e}{1 - e \cdot \cos\varphi}\right), & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos\varphi - e}{1 - e \cdot \cos\varphi}\right), & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (1.4.10).$$

Die Fläche A (Skizze 1.4.6), die vom Vektor \vec{r} im Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ überstrichen wird, ergibt sich aus der Differenz der Fläche A_1 (Skizze 1.4.7.) (die von der Ellipsenkurve und der Achse Ox beschränkt wird) und der Fläche A_2 (Skizze 1.4.8), also $A = A_1 - A_2$.

Die Fläche A_1 entspricht dem Integral der Funktionsgleichung y der Ellipse mit der Variablen x

$$A_1 = I = \int_{x_0}^x y \cdot dx.$$

Aus der Gleichung (1.4.8) ergibt sich $dx = -a \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$. Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhält man mit Hilfe von der Gleichung (1.4.8)

$$\begin{aligned}A_1 &= a \cdot b \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi \\ \Rightarrow A_1 &= a \cdot b \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{a \cdot b}{2} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{a \cdot b}{2} \left(\varphi - \varphi_0 - \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0}{2}\right).\end{aligned}$$

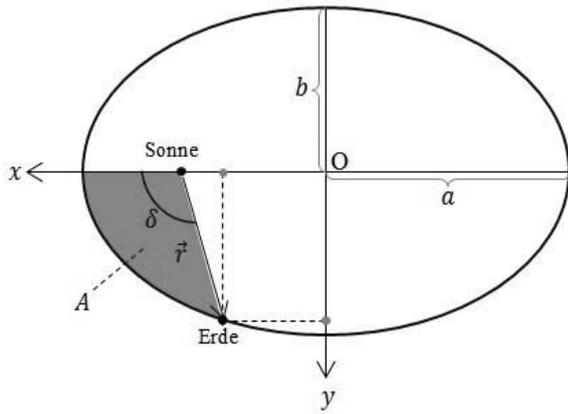


Abbildung 1.4.6: Darstellung der von Vektor \vec{r} überstrichenen Fläche A .

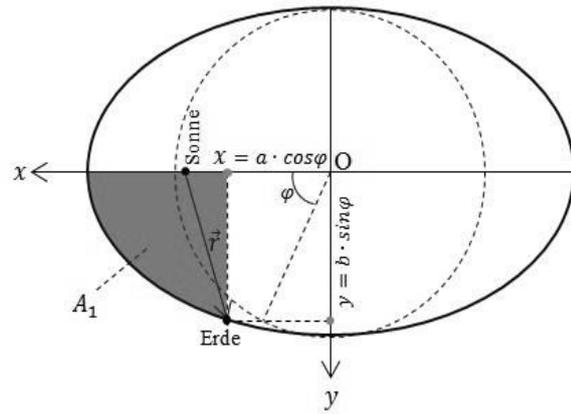


Abbildung 1.4.7: Darstellung der von der Ellipsenkurve und der Achse Ox beschränkten Fläche A_1 .

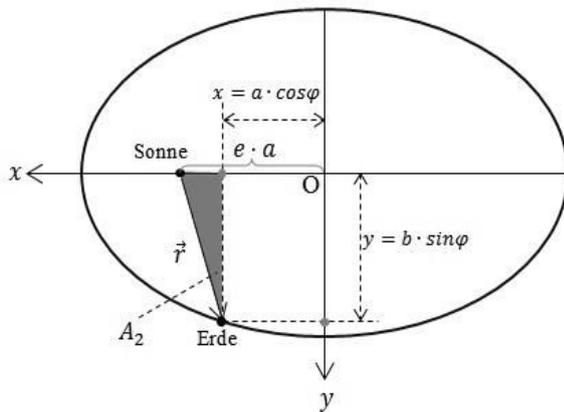


Abbildung 1.4.8: Darstellung der Fläche A_2 .

Zum Zeitpunkt t_0 liegt die Erde auf der Achse Ox , damit ist der Wert von φ_0 gleich 0. Daraus folgt für A_1 :

$$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \varphi}{2} - \frac{a \cdot b \cdot \sin 2\varphi}{4} \quad (1.4.1).$$

Mit Hilfe der Skizze (1.4.8) kann man die Dreiecksfläche A_2 berechnen

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{b \cdot \sin \varphi \cdot (ea - a \cdot \cos \varphi)}{2} \\ \Rightarrow A_2 &= \frac{e \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi}{2} - \frac{a \cdot b \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{2} \\ \Rightarrow A_2 &= \frac{e \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi}{2} - \frac{a \cdot b \cdot \sin 2\varphi}{4} \quad (1.4.12). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1.4.11) und (1.4.12) ergibt sich für die überstrichene Fläche A

$$A = A_1 - A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \varphi}{2} - \frac{e \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a \cdot b}{2} (\varphi - e \cdot \sin\varphi).$$

Aus dem 2. keplerschen Gesetz (Gleichung (1.4.3)) folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A_0}{U} = \frac{\pi a \cdot b}{U}$$

wobei A_0 die Fläche der Ellipse ist, die sich aus $A_0 = \pi ab$ ergibt. U ist die Umlaufzeit der Erde um die Sonne. Dann ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a \cdot b}{2} (\varphi - e \cdot \sin\varphi) \right) = \frac{\pi a \cdot b}{U}$$

$$\Rightarrow d\varphi - e \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{U} dt$$

$$\Rightarrow \int (d\varphi - e \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi) = \int \frac{2\pi}{U} dt$$

$$\Rightarrow \varphi - e \cdot \sin\varphi = \frac{2\pi}{U} (t + K_3).$$

mit der Integrationskonstanten K_3 . Wenn $t = t_0$, dann ist $\varphi = 0$. Daraus folgt

$$0 - e \cdot \sin 0 = \frac{2\pi}{U} (t_0 + K_3)$$

$$\Rightarrow K_3 = -t_0.$$

Somit ergibt sich

$$\varphi - e \cdot \sin\varphi = \frac{2\pi}{U} (t - t_0) \quad (1.4.13).$$

Die Exzentrizität der elliptischen Erdbahn beträgt $e = 0.01671123$ [NASA 2012] und die Umlaufzeit der Erde um die Sonne wird mit Gleichung (1.4.7) ermittelt.

Die Gleichung (1.4.13) beschreibt den Zusammenhang zwischen φ und der Zeit t . Wenn t gegeben ist, dann kann φ aus dieser Gleichung ermittelt werden. Aus der Gleichung (1.4.9) kann man die entsprechenden Koordinaten x und y berechnen und aus (1.4.10) den Winkel δ . Anschließend kann man den Wert von r durch Einsetzen des Winkels δ in die Gleichung (1.4.9) bestimmen.

1.4.3 Genauere Berechnung der Sonnenstunden und der eingestrahltten Sonnenenergie

1.4.3.1 Die Abweichung zum vereinfachten Verfahren in der Winkelgeschwindigkeit

Zur Herleitung der Formeln in den Abschnitten 1.1, 1.2 und 1.3 wurde angenommen, dass ein Punkt auf der Erdoberfläche stets nach der gleichen Zeit eine identische relative Lage zur Sonne einnimmt. Wir haben uns also damit begnügt, die konstante Winkelgeschwindigkeit ω um die Erdachse von rund $\omega =$

$\frac{2\pi}{24}$ rad/h für die Berechnungen zu verwenden. Diese Betrachtung ist streng genommen fehlerhaft, da die Erdbahn kein Kreis, sondern eine Ellipse ist. Nachfolgend soll ω genauer bestimmt werden.

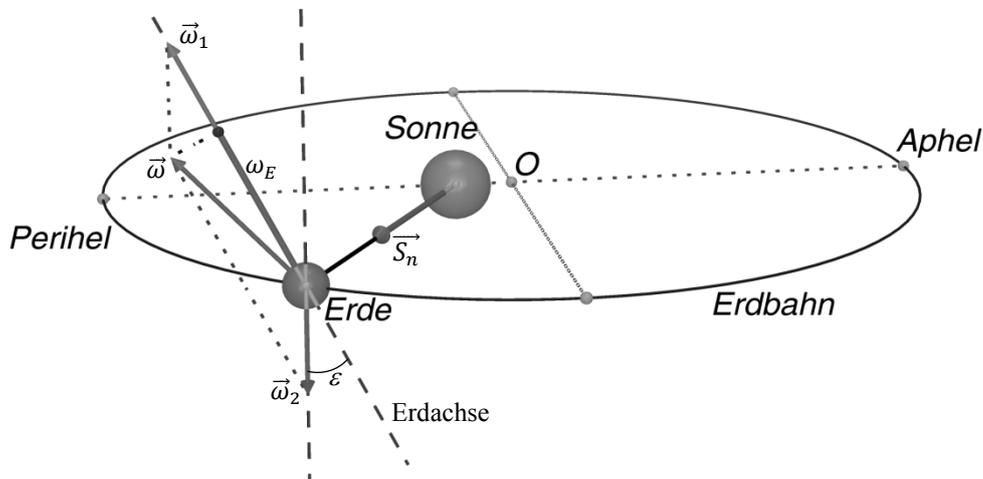


Abbildung 1.4.9: Darstellung der Winkelgeschwindigkeiten.

In Abbildung 1.4.9 bezeichnet $\vec{\omega}_1$ die Winkelgeschwindigkeit vom beobachteten Punkt um die Erdachse und gibt damit die Winkelgeschwindigkeit vom beobachteten Punkt um den Erdmittelpunkt an. Weil das Drehmoment M der Gravitationskraft zwischen Sonne und der Erde gleich 0 ist, gilt

$$\begin{aligned} M &= I \frac{d\omega_1}{dt} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d\omega_1}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \omega_1 &= \text{const} = \frac{2\pi}{T_{\text{stern}}} \quad (1.4.14) \end{aligned}$$

Dabei ist $T_{\text{stern}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4,091 \text{ s}$ die Rotationsperiode, die in der Astronomie als siderischer Tag bezeichnet wird. Bezugspunkt ist ein sehr ferner Stern. ([Weigert 1989] S. 11)

Der Vektor $\vec{\omega}_2$ gibt die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Sonne an, deren Betrag natürlich identisch mit der Winkelgeschwindigkeit $-\vec{\omega}_2$ ist, mit der sich die Sonnenstrahlen relativ zum Erdmittelpunkt zu drehen scheinen. Dabei ist $-\vec{\omega}_2$ in der Abbildung 1.4.9 nach oben gerichtet, weil die Drehrichtung der Erde um die Sonne gleich der Drehrichtung der Erde um ihre Achse ist. Demnach ist $\vec{\omega}_2$ nach unten gerichtet. Der Betrag von $\vec{\omega}_2$ wird mit folgender Gleichung beschrieben:

$$\omega_2 = \frac{d\delta}{dt}$$

Unter Berücksichtigung der Skizze (1.4.2) und des Ausdrucks $dr = r d\delta$ erhält man

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r \cdot dr}{2 dt} = \frac{r^2 \cdot d\delta}{2 dt}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{d\delta}{dt} = 2 \frac{1}{r^2} \frac{dA}{dt}$$

Aus Überlegungen zur Ellipsengeometrie ergibt sich

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi a \cdot b}{U} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{U} = \text{const.},$$

r wird nun aus der Gleichung (1.4.9) entnommen und eingesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_2 &= 2 \left(\frac{1 + e \cdot \cos\delta}{a \cdot (1 - e^2)} \right)^2 \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{U} \\ \Rightarrow \omega_2 &= \frac{2\pi}{U} \cdot \frac{(1 + e \cdot \cos\delta)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.4.15). \end{aligned}$$

Die relative Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zwischen dem beobachteten Punkt und den Sonnenstrahlen ist die Vektorsumme zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ vom beobachteten Punkt um den Erdmittelpunkt und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ vom Erdmittelpunkt um die Sonnenstrahlen. Somit gilt

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Bei Betrachtung der in Richtung der Erdachse projizierten Komponente ω_E von $\vec{\omega}$ ergibt sich unter Berücksichtigung der Skizze (1.4.9)

$$\omega_E = \omega_1 - \omega_2 \cdot \cos\varepsilon.$$

Mit den Gleichungen (1.4.14) und (1.4.15) erhält man

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_{\text{Stern}}} - \frac{2\pi \cdot \cos\varepsilon}{U} \cdot \frac{(1 + e \cdot \cos\delta)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.4.16).$$

1.4.3.2 Die Abweichung zwischen vereinfachten Verfahren und exakterer Rechnung für die Bestrahlungsleistung

Die von der Sonne bewirkte Bestrahlungsleistung – in der Fachastronomie als „Solarkonstante“ bezeichnet, im Folgenden mit P abgekürzt – meint die Leistung der Sonnenstrahlen, die im Abstand Erde–Sonne (ohne den Einfluss der Atmosphäre) senkrecht pro Flächeneinheit auf die Erdoberfläche auftreffen. Die Bezeichnung Solarkonstante ist natürlich nur als Näherung zu verstehen, denn mit dem sich ändernden Abstand Erde–Sonne variiert ja gerade die Bestrahlungsleistung und auf genau diesen Zusammenhang konzentriert sich die nun folgende Betrachtung.

Bei dem vereinfachten Verfahren entspricht die Bestrahlungsleistung P_1 exakt der Solarkonstanten

$$P_1 = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{L}{4\pi a^2}.$$

Dabei ist $L = 3,846 \cdot 10^{26} \text{W}$ ist Leuchtkraft der Sonne [NASA 2013].

Das genauere Verfahren ergibt die Bestrahlungsleistung P_2 als Funktion nicht des mittleren, sondern des tatsächlichen Abstandes Erde-Sonne zu

$$P_2 = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{L}{4\pi \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos\delta} \right)^2}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{L}{4\pi a^2} \cdot \left(\frac{1 + e \cdot \cos\delta}{1 - e^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 \cdot \left(\frac{1 + e \cdot \cos\delta}{1 - e^2} \right)^2$$

1.4.3.3 Vergleich der Ergebnisse zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren

Die nachfolgende Tabelle zeigt den Hauptunterschied zwischen dem vereinfachten Verfahren und der genaueren Berechnung.

vereinfachtes Verfahren	genaueres Verfahren
$\delta = \frac{n}{365} 360^\circ$ <p>n ist die Summe der Tage ab dem 22.12.</p>	$\delta = \frac{\sin\varphi}{ \sin\varphi } \cdot \arccos\left(\frac{\cos\varphi - e}{1 - e \cdot \cos\varphi}\right)$ <p>φ ist die Lösung der Gleichung</p> $\varphi - e \cdot \sin\varphi = \frac{2\pi}{U}(t - t_0)$
$\omega_E = \frac{2\pi}{24} \text{rad/h}$	$\omega_E = \frac{2\pi}{T_{\text{stern}}} - \frac{2\pi \cdot \cos\varepsilon}{U} \cdot \frac{(1 + e \cdot \cos\delta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$
$P = \frac{L}{4\pi a^2}$	$P = \frac{L}{4\pi a^2} \left(\frac{1 + e \cdot \cos\delta}{1 - e^2} \right)^2$

Tabelle 1.4.1: Vergleich der Formeln zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren

Dabei ist zu beachten, dass der Winkel δ nicht analytisch zu bestimmen ist, obwohl er in Gleichung (1.4.13) einem einfachen Ausdruck genügt. Grund dafür ist der transzendente Zusammenhang zwischen φ und t . Man kann φ als Nullstelle der Funktion $f(\varphi)$ betrachten:

$$f(\varphi) = \varphi - e \cdot \sin\varphi - \frac{2\pi}{U}(t - t_0)$$

Die Nullstelle kann näherungsweise mit dem Newton-Verfahren schrittweise numerisch berechnet werden. Der Zusammenhang zwischen einem Argument φ_n und dem im nächsten Iterationsschritt $n + 1$

berechneten Argument φ_{n+1} lautet dabei ($f(\varphi_n)$: Funktionswert von φ_n , $f'(\varphi_n)$: erste Ableitung von f an der Stelle φ_n)

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{f(\varphi_n)}{f'(\varphi_n)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{\varphi_n - e \cdot \sin\varphi_n - \frac{2\pi}{U}(t-t_0)}{1 - e \cdot \cos\varphi_n} \quad (1.4.14).$$

Je größer n ist, desto genauer ist die Lösung für φ .

Durch Einsetzen der genaueren Ausdrücke für δ und ω in die Gleichungen (1.2.3) erhält man die genaueren Ergebnisse für $\cos\theta$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t . Wenn $\cos\theta > 0$, dann fällt der Zeitpunkt t auf den Tag, wenn $\cos\theta < 0$, dann liegt dieser Zeitpunkt t in der Nacht.

Mit einem gewählten Zeitintervall von einer Sekunde muss man als Erfahrungswert mindestens rund 31 Millionen Iterations- und Rechenschritte vornehmen, um die Summe der Sonnenstunden in einem Jahr zu bestimmen und eine noch höhere Anzahl an Rechenoperationen ist zur Ermittlung der eingestrahnten Sonnenenergie vonnöten. Deswegen muss diese Aufgabe mit dem Computer gelöst werden (Anhang [A 1.1.14], [A 1.1.16] und [A 1.4.1] ... [A 1.4.6]).

Nachfolgend werden die Resultate von Berechnungen vorgestellt, die mit den Ephemeriden der Erdbewegung für das Jahr 2014 erzielt wurden ([AA 2014]).

$t = 0$ ist der Zeitpunkt der Winterwende (17:11 Uhr am 21.12.2013).

$t = t_0$ ist der Zeitpunkt, an dem sich die Erde im Perihel befindet (12:00 Uhr am 4.1.2014).

Dann gilt für t_0

$$t_0 = 13 \text{ Tage} + 18 \text{ Stunde} + 49 \text{ Minuten}$$

$$\Rightarrow t_0 = 1190940s \quad (1.4.15).$$

Die Ergebnisse werden nachfolgend grafisch dargestellt.

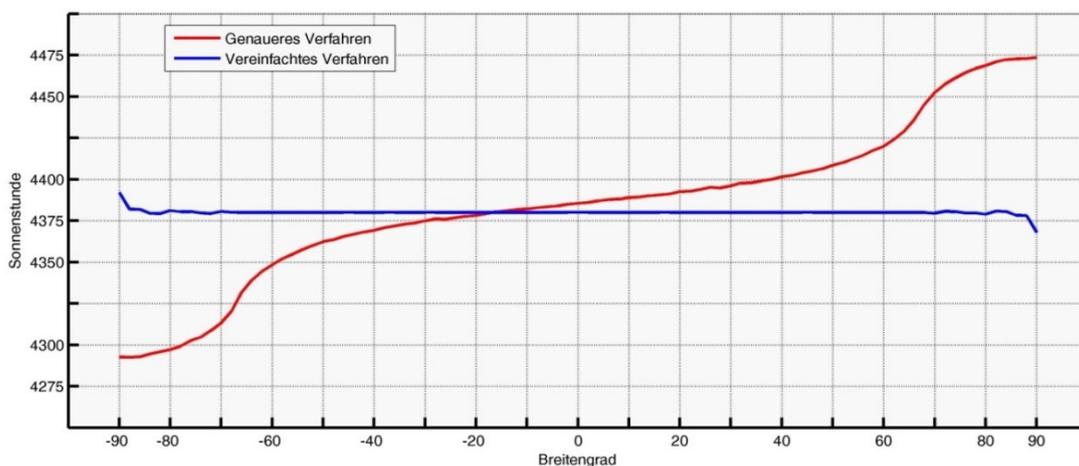


Diagramm 1.4.1: Verlauf der jährlichen Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.1.14], [A 1.4.1] und [A 1.4.2]).

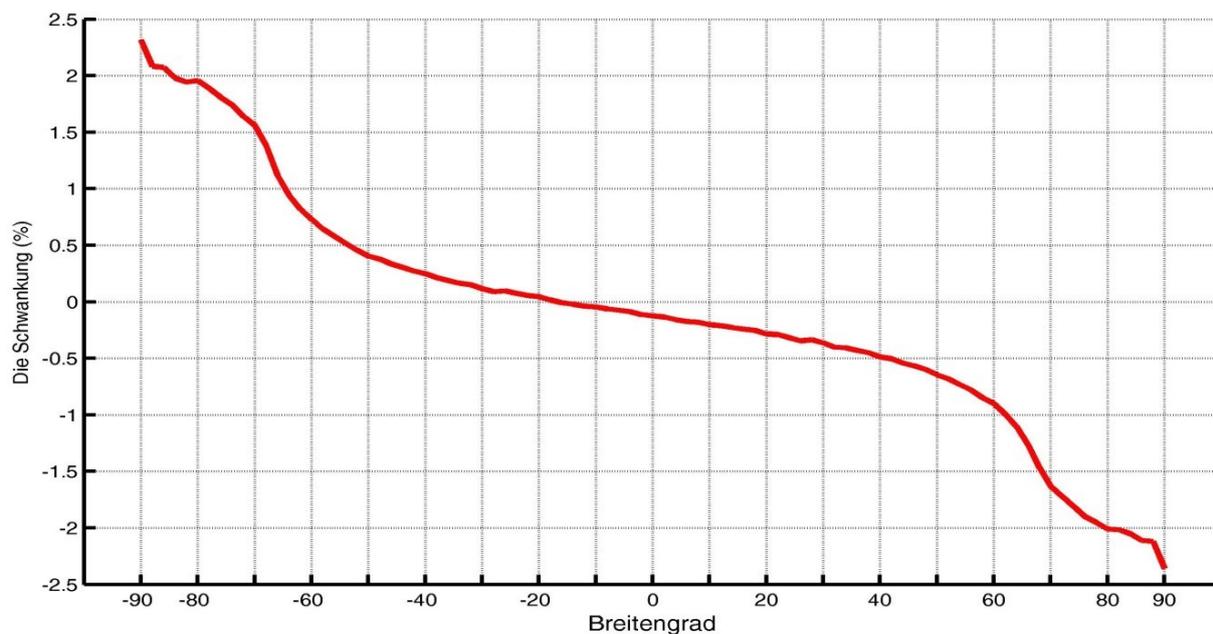


Diagramm 1.4.2: Verlauf der Abweichung der jährlichen Sonnenstunden zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.4.2] und [A 1.4.3]).

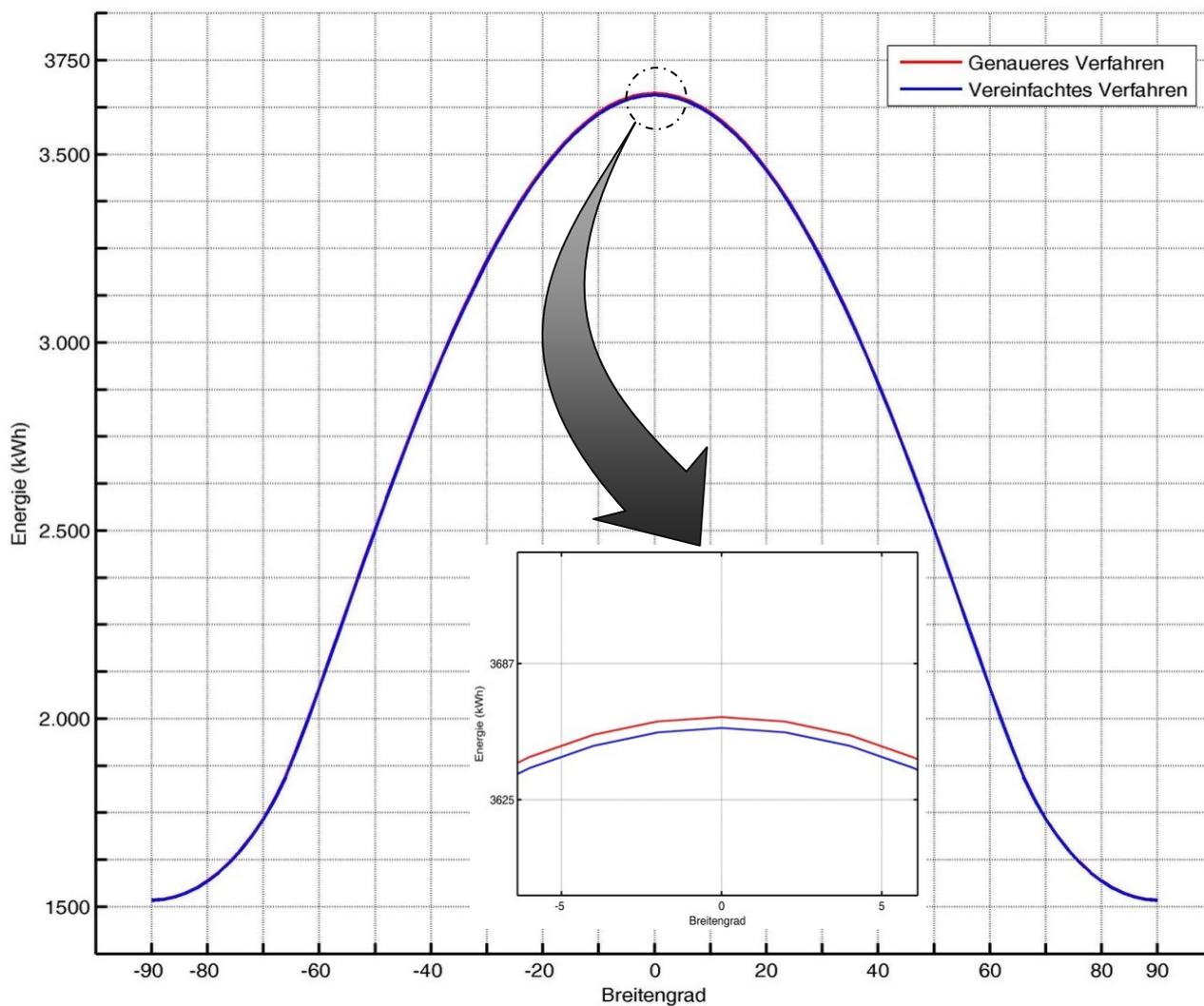


Diagramm 1.4.3: Verlauf der jährlichen eingestrahnten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.1.16], [A 1.4.4] und [A 1.4.5]).

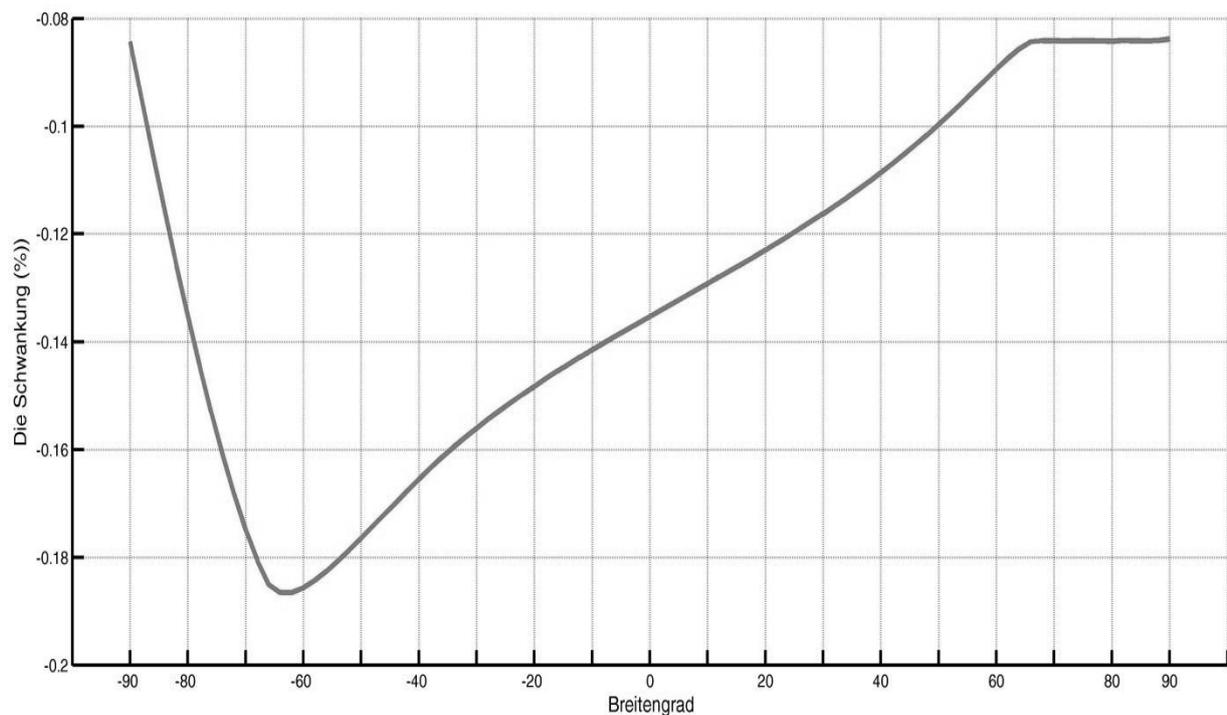


Diagramm 1.4.4: Verlauf der Abweichung der jährlichen eingestrahlichten Sonnenenergie zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.4.5] und [A 1.4.6]).

Den obigen Diagrammen ist zu entnehmen, dass das Maximum der Auslenkung zwischen den zwei Verfahren ca. 2,5 % beträgt. Die Abweichung der beiden Verfahren für die Bestimmung der Sonnenstunden ist dabei größer als die Abweichung der Methoden für die Bestimmung der eingestrahlichten Sonnenenergie. Dieser Unterschied wird nachfolgend erklärt.

Beim genaueren Verfahren ist die Erdbahn eine Ellipse. Die Erde bewegt sich schneller, wenn sie nahe des Perihels ist, also während des Sommers auf der südlichen Halbkugel. Wenn die Erde nahe dem Aphel ist, bewegt sie sich langsamer, dies also während des Sommers auf der nördlichen Halbkugel. Das hat zur Folge, dass der Sommer auf der nördlichen Halbkugel länger dauert, als der Sommer auf der südlichen Halbkugel. Nach dem obigen Ergebnis beträgt der Sonnenstundenunterschied zwischen Südpol und Nordpol ca. 180 Stunden pro Jahr. Im Gegensatz dazu gibt es im vereinfachten Verfahren keine Zeitunterschiede in den Sonnenstunden zwischen Südpol und Nordpol, weil die Erdbahn als ein Kreis betrachtet wird. Deshalb ist die Abweichung der Sonnenstunden zwischen beiden Verfahren relativ groß (ca. 2,5%).

Bei der eingestrahlichten Sonnenenergie ist die Abweichung zwischen den zwei Verfahren vergleichsweise gering (ca. 0,19%), weil der Abstand zwischen Sonne und Erde am Perihel kleiner ist als am Aphel. Demnach ist die Bestrahlungsleistung P der Sonne in der Nähe des Perihels größer als im Aphel. Die nördliche Halbkugel hat einen längeren Sommer, empfängt aber eine kleinere Strahlungsleistung. Die südliche hat einen kürzeren Sommer, „gewinnt“ aber durch eine größere Bestrahlungsleistung. Betrachtet man die Erde als Ganzes, so heben sich diese Unterschiede fast auf. Deswegen kann statt des genaueren Verfahrens auch das vereinfachte Verfahren in sehr guter Näherung angewendet werden.

In der Schulausbildung kann man das vereinfachte Verfahren anwenden, weil es deutlich einfacher zu erklären ist und die Abweichungen zur exakten Betrachtung nur gering ausfallen.

1.5 Langfristige Auswirkungen und Gültigkeitsgrenzen des vereinfachten Verfahrens

Die obige Berechnung hat nur das System Erde-Sonne berücksichtigt und die Erde als ideale Kugel genähert. Werden andere Einflüsse berücksichtigt, z.B. die Gravitationswechselwirkung mit anderen Planeten oder auch die hauptsächlich von Mond und Sonne verursachte Präzession der Erdachse usw., dann müssen Änderungen der Bewegungsparameter der Erde im Laufe der Zeit mit in Rechnung gestellt werden, so wie es als erster der serbische Wissenschaftler Milutin Milanković in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts getan hat [Milankovitch 1930].

Der Zyklus der Präzession der Erdachse liegt bei ca. 26.000 Jahren. Neben der Erdachsenpräzession rotiert auch die Apsidenlinie mit einer Periode von ca. 150.000 Jahren.

Der Neigungswinkel ε der Erdachse schwankt im Laufe der Zeit zwischen $22,1^\circ$ und $24,5^\circ$. Die Periode dieses Effekts ist ca. 41.000 Jahre. Derzeit beträgt die Achsenneigung $\varepsilon = 23.4393^\circ$.

Die numerische Exzentrizität e der Erdbahn ist nicht konstant. Der Betrag von e liegt zwischen 0,0058 und 0,05. Die Hauptkomponente des Änderungszyklus ist ca. 400.000 Jahre. Die Nebenkomponekte dieses Zyklus variiert um ca. 100.000 Jahren. Zurzeit beträgt die Exzentrizität $e = 0.01671123$ [NASA 2012].

In der neuesten Forschung wird für die Änderung der Neigung der Erdbahnebene gegen den Himmelsäquator (Schiefe der Ekliptik) noch ein anderer Effekt aufgezeigt. Der Zyklus dieser Änderung beträgt etwa 100.000 Jahre.

Alle diese Einflüsse müssten bei der Bestimmung der Sonnenstunden und der eingestrahelten Sonnenenergie berücksichtigt werden, jedenfalls dann, wenn man Veränderungen der lokalen und der globalen Einstrahlung ermitteln will, die sich über sehr lange Zeiträume hinweg ergeben.

Solche Abweichungen können nachfolgend mit Hilfe der erstellten Programme grafisch dargestellt werden. Dazu werden die gegenwärtigen Daten als Bezugsdaten ausgewählt. Für technische Untersuchungen, z.B. an Solarzellen, sind die Resultate freilich belanglos. Reizvoll an der Diskussion ist aber, dass nun Lernende einen vergleichsweise einfachen Zugang zu einigen Aspekten der Klimadebatte erhalten – etwa die Frage der Entstehung von Eis- und Zwischeneiszeiten.

1.5.1 Auswirkungen der Präzession

Wegen dieses Effekts verändert sich die Stellung der Erde relativ zur Sonne bei Sommer- und Winteranfang. Fällt z.B. der Sommeranfang auf der Nordhalbkugel derzeit auf eine Bahnposition der Erde, bei der sich unser Heimatplanet relativ weit von der Sonne entfernt befindet, so wird die Präzession der Erdachse langfristig bewirken, dass in diesem Beispiel der Sommeranfang auf der Nordhalbkugel in relativer Nähe zur Sonne auf der Erdbahn erfolgt. Es gibt also eine Veränderung in der Lage des Perihels und der Lage des Winteranfangs entlang der Erdbahn im Laufe der Zeit. Das bedeutet, dass dieser Effekt zu einer Änderung der Zeit t_0 führt, also genau dem Zeitintervall, in dem sich die Erde von der Winterwende bis zum Perihel bewegt (s. Gleichung (1.4.15)). Diese Änderung liegt im Zeitintervall von 0 Sekunden bis zu einem Jahr = 365,25 Tage.

Die Ergebnisse, die sich durch das Einsetzen dieser Grenzen für t_0 in das Programm (s. Anhang [A 1.5.1] ... [A 1.5.5]) ergeben, sollen nachfolgend grafisch dargestellt werden.

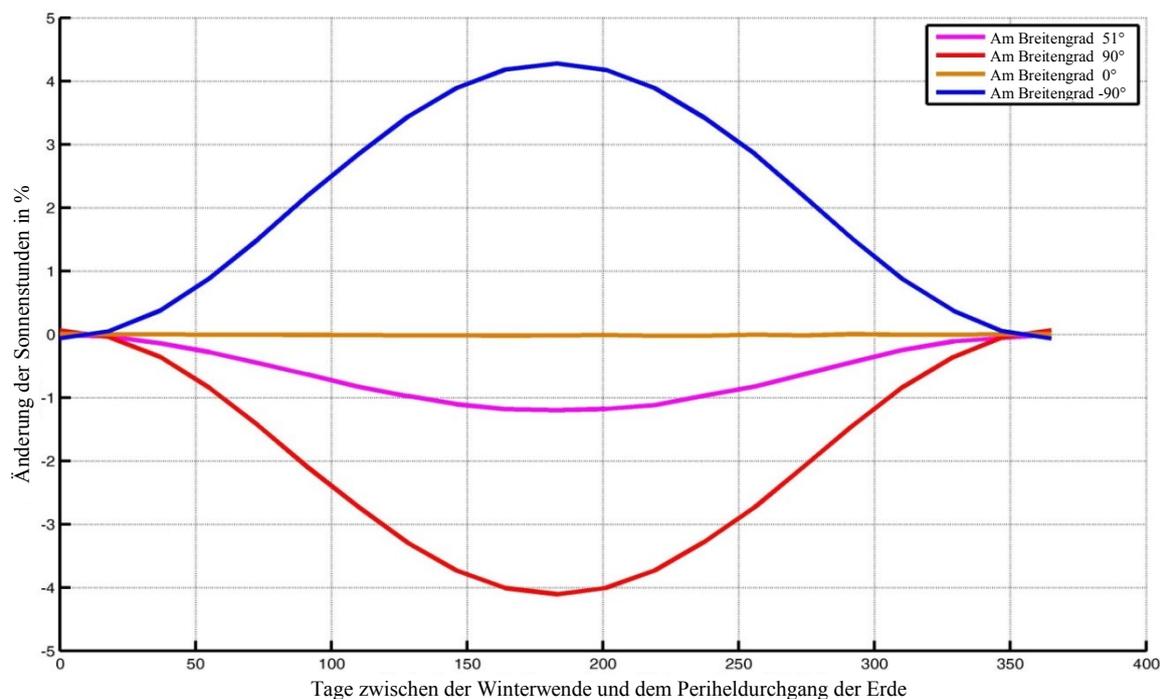


Diagramm 1.5.1: Die relative Änderung der jährlichen Sonnenstunden in Prozent aufgrund der Präzession für einige Breitengrade, bezogen auf den heutigen Wert $t_0 = 13 \text{ Tage} + 18 \text{ Stunde} + 49 \text{ Minuten}$ ([A 1.5.1] und [A 1.5.2]).

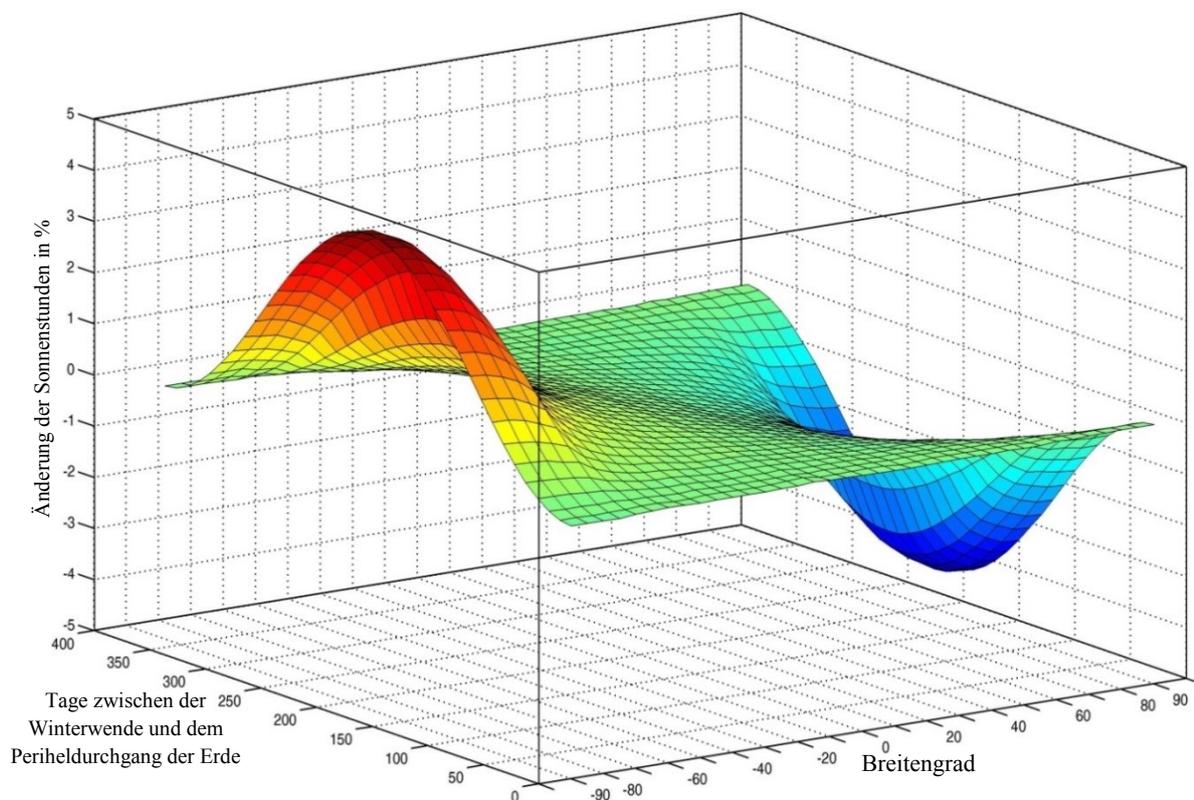


Diagramm 1.5.2: (Orthogonale 3D-Darstellung) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad aufgrund der Präzession und Tage zwischen der nördlichen Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.1] und [A 1.5.3]).

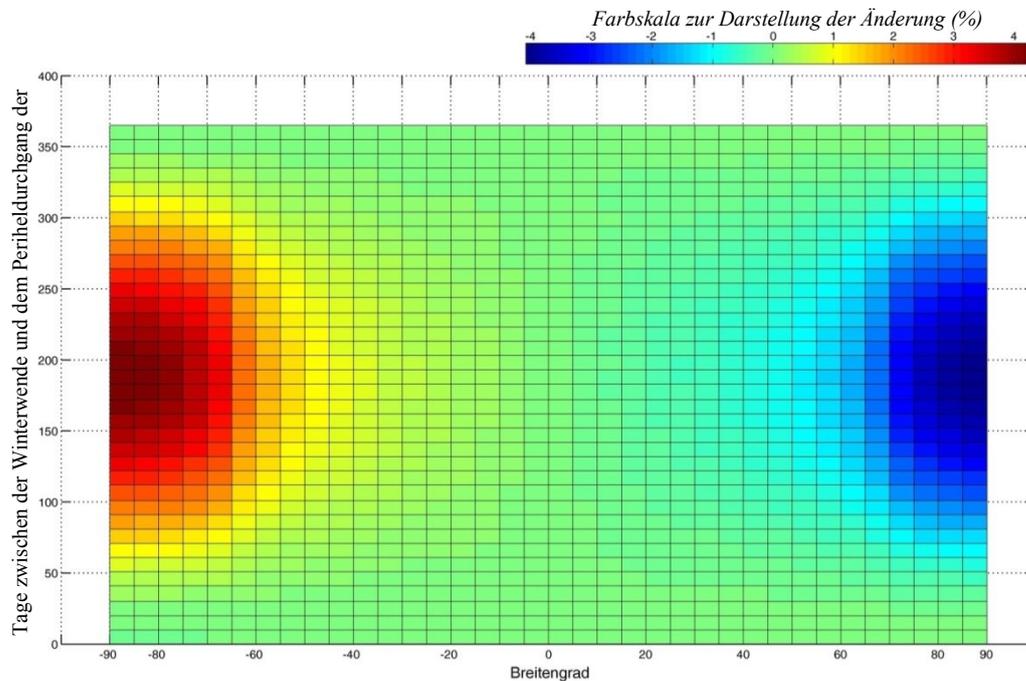


Diagramm 1.5.3: (Diagramm 1.5.2 als Farbdigramm) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden aufgrund der Präzession in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Tage zwischen der nördlichen Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.1] und [A 1.5.3]).

Aus den Diagrammen (1.5.1), (1.5.2) und (1.5.3) ist erkennbar, dass die Änderung der Sonnenstunden zu den beiden Polen hin immer größer wird. In Äquatornähe bewirkt die Präzession nahezu keine Änderung. Die Summe der Sonnenstunden pro Jahr nimmt für die südliche Halbkugel der Erde zu, während sie für die nördliche Halbkugel der Erde abnimmt.

Das Maximum des Anstiegs der Sonnenstunden beträgt ca. 4,2 % am Südpol und das Minimum beträgt ca. -4 % am Nordpol. Beide Extreme treten auf, wenn die Abweichung der Tage zwischen der Winterwende und dem Periheldurchgang wegen der Präzession ca. 183 Tage (ein halbes Jahr) beträgt. Die Erde wird folglich einen halben Zyklus der Präzession (ca. 13000 Jahre) ausgeführt haben und sich dann während der nördlichen Winterwende am Aphel befinden.

Zurzeit befinden sich die Position die Erde bei der nördlichen Winterwende und das Bahnperihel relativ nahe beieinander.

Die Diagramme (1.5.4) und (1.5.5) zeigen, dass die Auswirkung der Präzession der Erde auf die eingestrahlte Sonnenenergie ganz geringfügig ist. Das Minimum der Änderung beträgt ca. -0,03 % am Breitengrad von etwa -50° , wenn die Erde einen halben Zyklus der Präzession (ca. 13000 Jahren) ausgeführt haben wird.

Zusammenschau auf die Abweichungen, die von der Präzession herrühren

Wie die Berechnungen zeigen, wird durch die Präzession der Erde vor allem die Anzahl der Sonnenstunden beeinflusst, die am Südpol relativ stark zunehmen und am Nordpol vergleichsweise stark abnehmen. Der Effekt auf die eingestrahlte Sonnenenergie kann hingegen vernachlässigt werden. Der Grund hierfür ist einfach einzusehen; die durchschnittliche Intensität der Sonnenstrahlung wird in der Nähe des Südpol abnehmen, weil aber die Intensität proportional zur Energie und umgekehrt proportional zur Zeit ist, wird die eingestrahlte Sonnenenergie fast konstant bleiben, da, wie gezeigt wurde, die Sonnenstunden am Südpol ansteigen. Gerade umgekehrt verhält es sich am Nordpol.

Aus diesen Erwägungen können aber noch keine Schlussfolgerungen für die langfristige Klimaentwicklung gezogen werden. Die hier vorgestellten Überlegungen gelten für die Sonneneinstrahlung auf Solarzellen. Für den Erdkörper müsste man unbedingt Betrachtungen zur mittleren Albedo auf der Nord- und Südhalbkugel unseres Heimatplaneten einbeziehen.

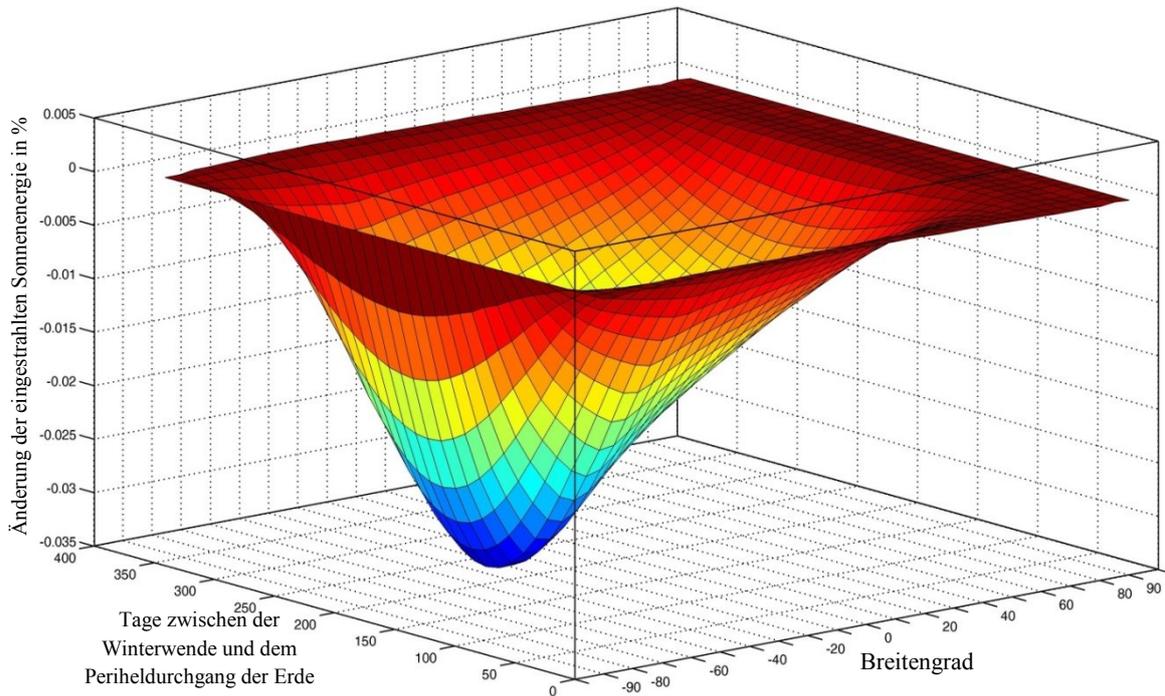


Diagramm 1.5.4: (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahltten Sonnenenergie aufgrund der Präzession in Abhängigkeit vom Breitengrad und Tage zwischen der nördlichen Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.4] und [A 1.5.5]).

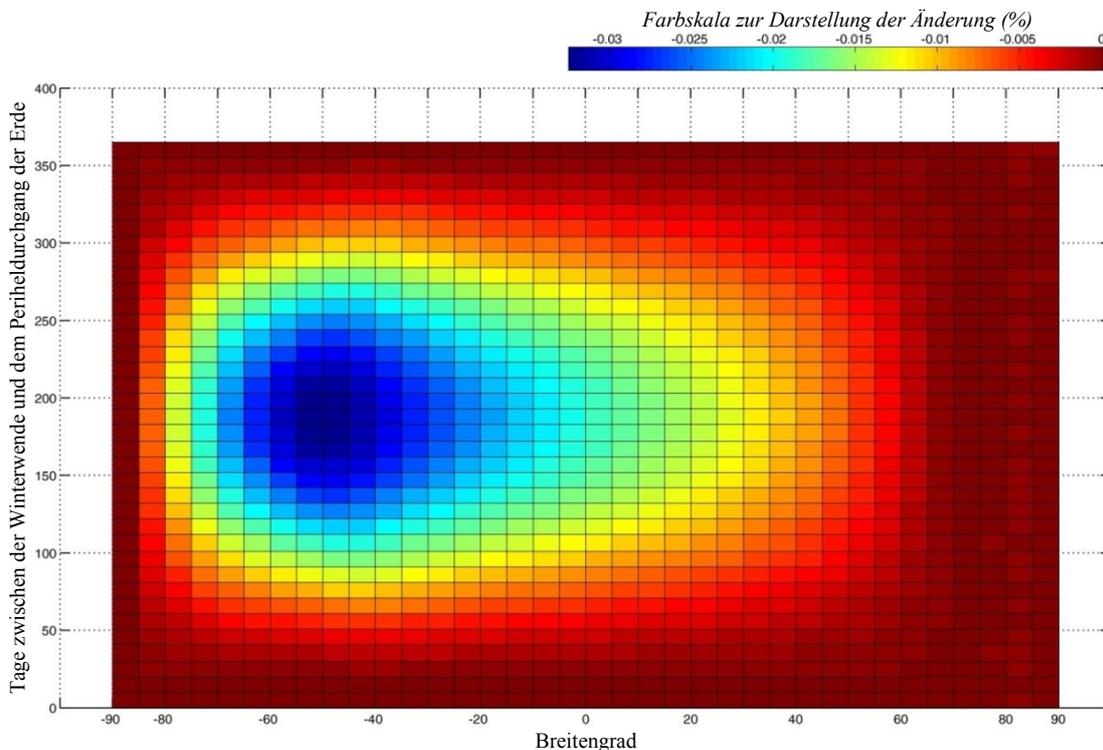


Diagramm 1.5.5: (*Diagramm 1.5.5 als Farbdigramm*) Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahltten Sonnenenergie aufgrund der Präzession in Abhängigkeit vom Breitengrad und Tage zwischen der Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.4] und [A 1.5.5]).

1.5.2 Auswirkungen der Änderung des Neigungswinkels der Erdachse zur Erdbahnebene (Schiefe der Ekliptik)

Legt man den Bereich der Änderung des Neigungswinkels zwischen $22,1^\circ$ und $24,5^\circ$ in der Simulation fest (s. Anhang [A 1.5.6] ... [A 1.5.11]), so erhält man nachfolgende Diagramme.

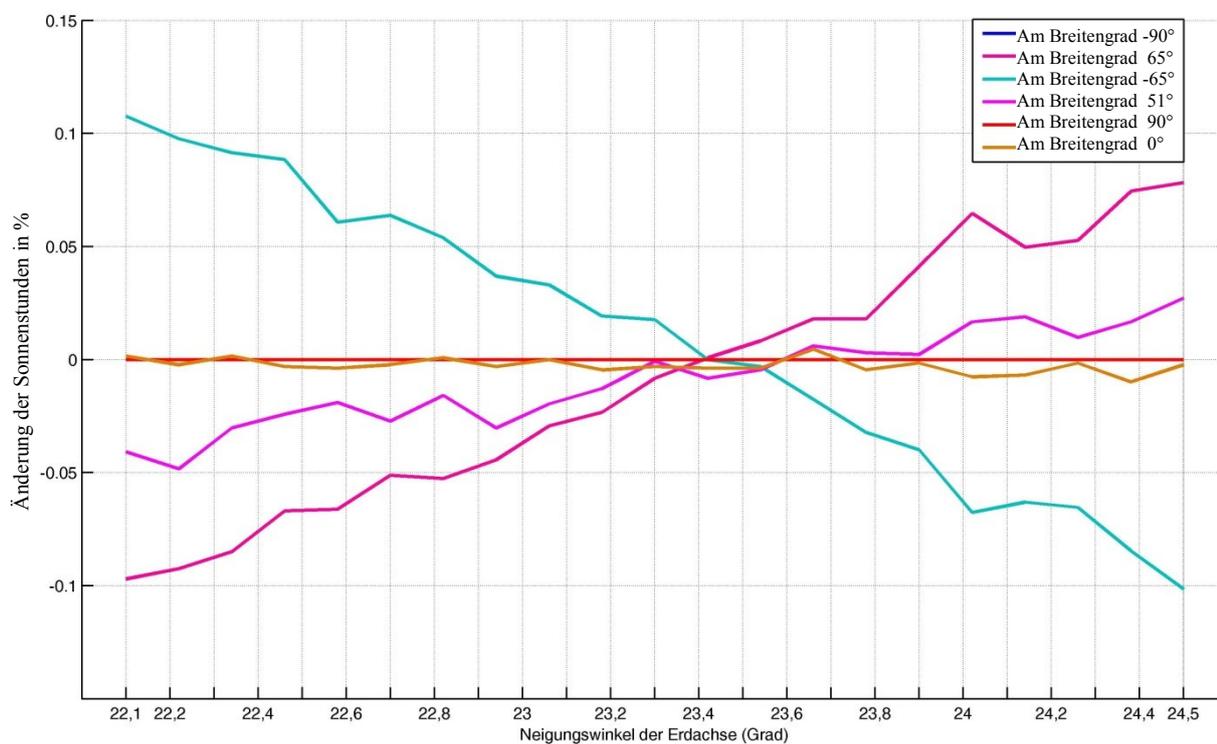


Diagramm 1.5.6: Verlauf der prozentualen Änderung der jährlichen Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Neigungswinkel der Erdachse an einigen Breitengraden, bezogen auf den heutigen Wert $\varepsilon = 23,44^\circ$. Man beachte: die Auflösung der %-Achse ist so hoch, dass die Kurven aufgrund von Rundungsfehlern nicht bei $\varepsilon = 23,44^\circ$ exakt zusammenfallen ([A 1.5.6] und [A 1.5.7]).

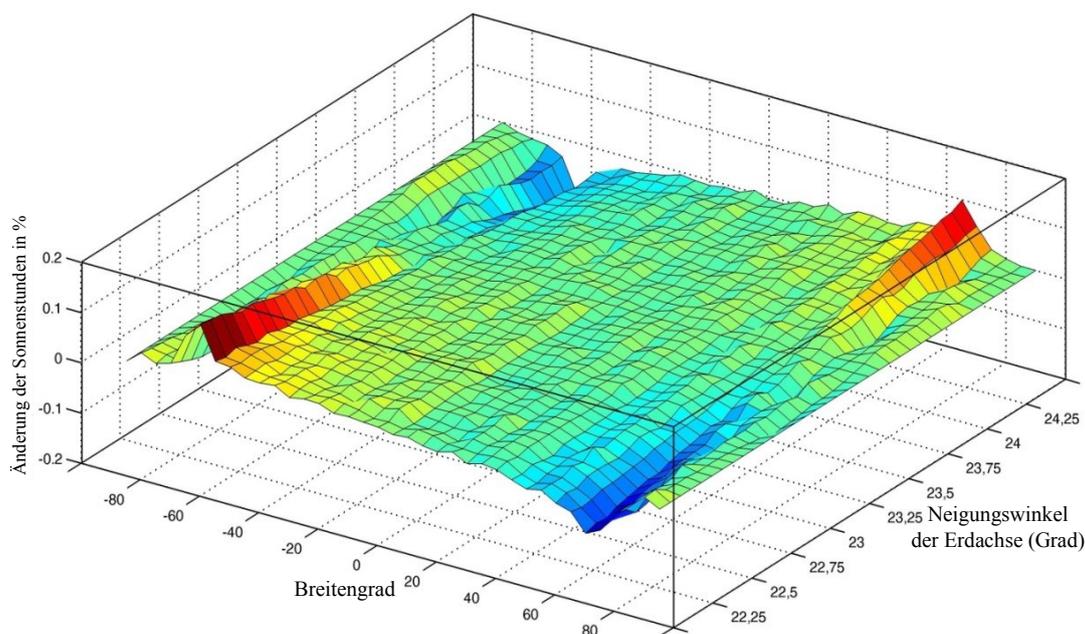


Diagramm 1.5.7: (Orthogonale 3D-Darstellung) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.6] und [A 1.5.8]).

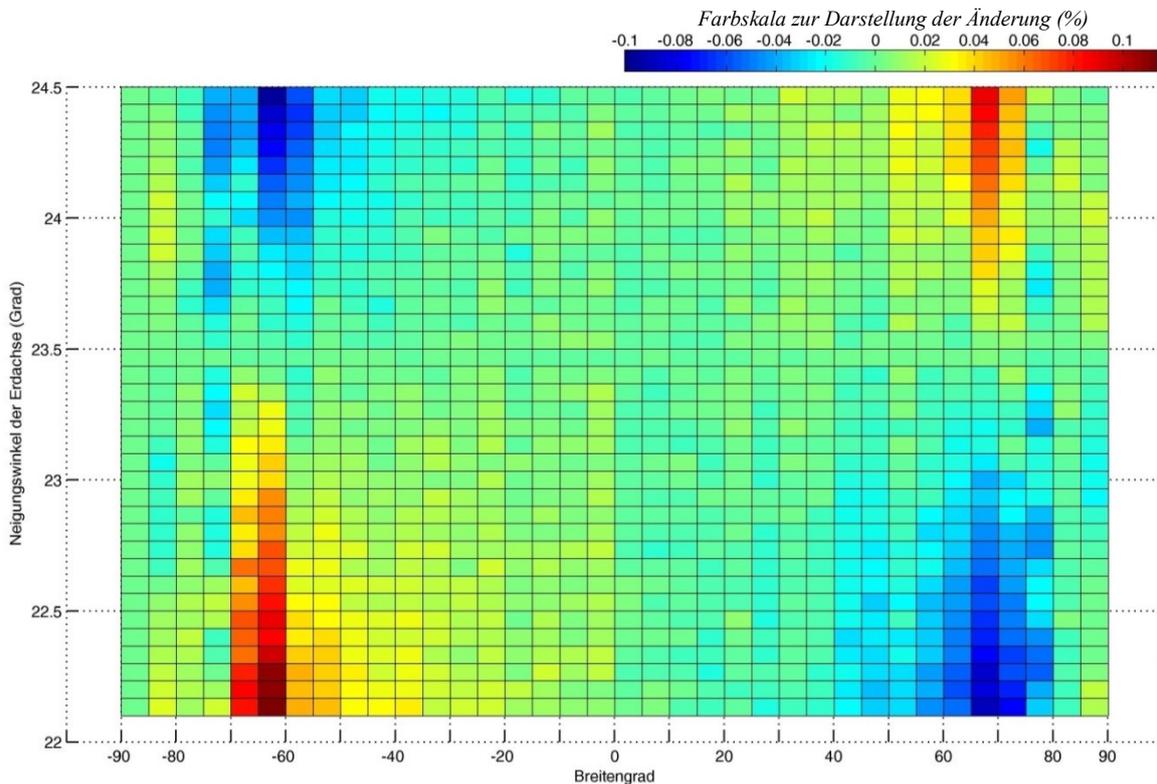


Diagramm 1.5.8: (Diagramm 1.5.7 als Farbdigramm) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.6] und [A 1.5.8]).

Wie aus den Diagrammen (1.5.6), (1.5.7) und (1.5.8) zu entnehmen ist, ist die Änderung der Sonnenstunden pro Jahr nur sehr geringfügig. Die größte relative Abweichung erfolgt nahe der Breitengrade -65° und 65° in den Extrema des Neigungswinkels der Erdachse. Die größte Zunahme der Sonnenstunden beträgt ca. 0,11 % und die größte Abnahme der Sonnenstunden ist ca. $-0,1$ %.

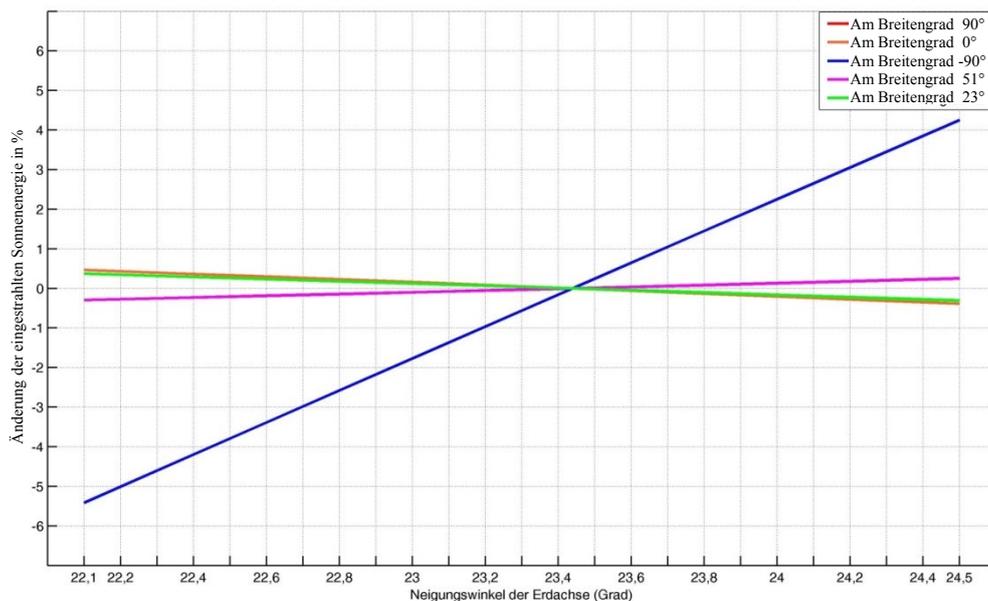


Diagramm 1.5.9: Verlauf der prozentualen Änderung der jährlich eingestrahlichten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Neigungswinkel der Erdachse, bezogen auf den heutigen Wert $\varepsilon = 23,44^\circ$ ([A 1.5.9] und [A 1.5.10]).

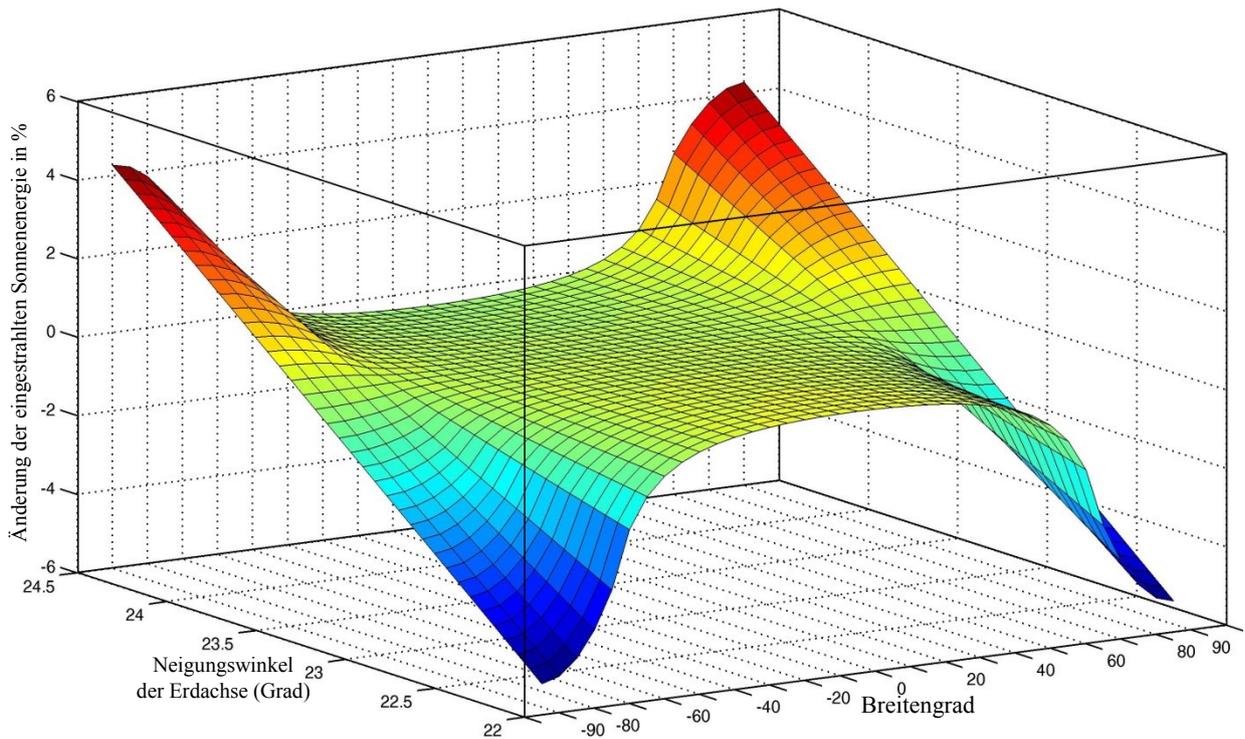


Diagramm 1.5.10: (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahlichten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.9] und [A 1.5.11]).

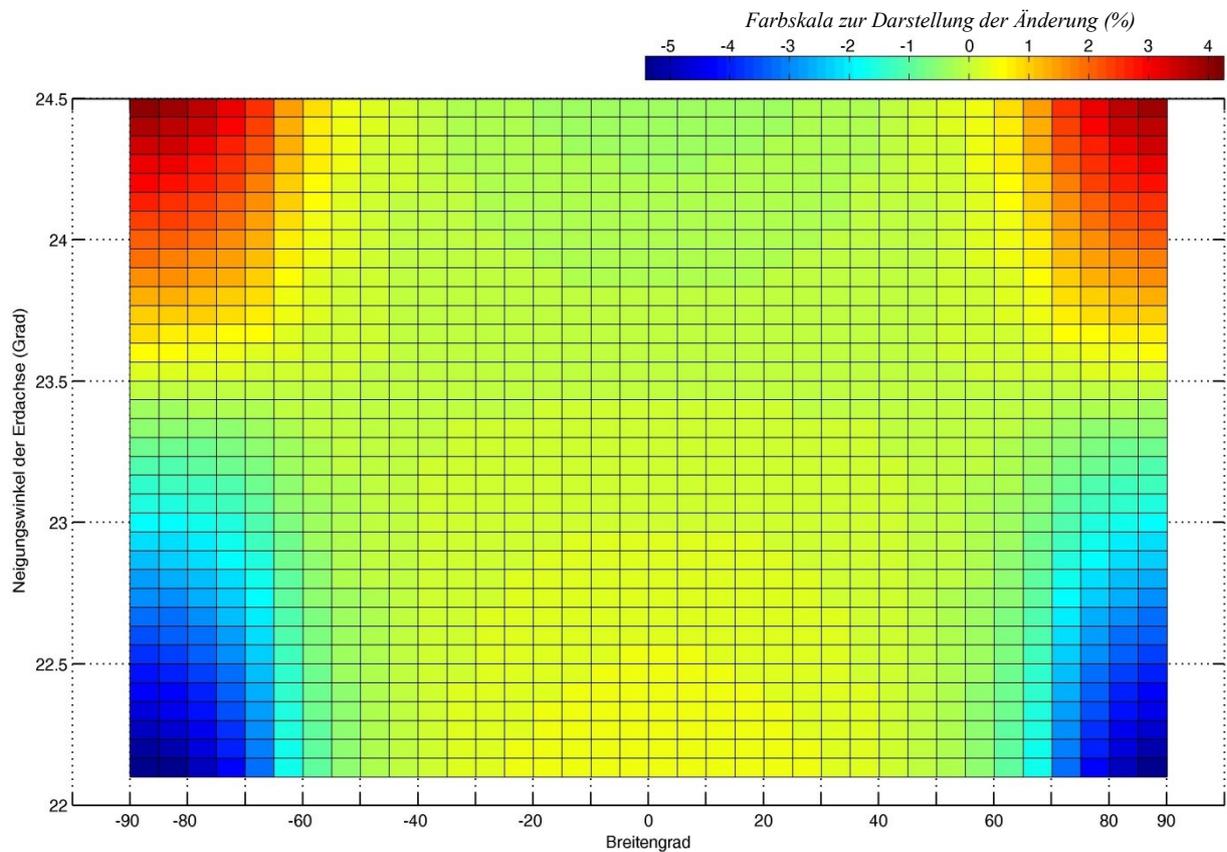


Diagramm 1.5.11: (Diagramm 1.5.10 als *Farbdiagramm*) Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahlichten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.9] und [A 1.5.11]).

Aus den Diagrammen (1.5.9), (1.5.10) und (1.5.11) ist abzuleiten, dass die prozentuale Änderung der eingestrahlichten Sonnenenergie in Polnähe in guter Näherung proportional zum Neigungswinkel der Erdachse ist, während diese Änderung nahe dem Äquator umgekehrt proportional zum Neigungswinkel der Erdachse erfolgt. Mit der zeitlichen Änderung des Neigungswinkels der Erdachse steigt diese Abweichung an den Polen, während sie vom -55 bis 55 Grad geografischer Breite gering ist. Der größte Anstieg der eingestrahlichten Sonnenenergie von ca. 4,2 % wird an beiden Erdpolen erfolgen, wenn der Neigungswinkel den größten Wert von ca. 24,5° erreicht. Und wenn der Neigungswinkel den niedrigsten Wert von ca. 22,1° erreicht, dann tritt die größte relative Abnahme der eingestrahlichten Sonnenenergie mit ca. -5,2 % an den Erdpolen auf.

Zusammenschau auf Abweichungen, die von der Änderung des Neigungswinkels herrühren

Wie sich aus der Berechnung ergibt, ist die Auswirkung aufgrund der Änderung des Neigungswinkels der Erdachse lediglich auf die eingestrahlte Sonnenenergie erheblich. Die Änderung der Sonnenstunden kann vernachlässigt werden. Die durchschnittliche Intensität der eingestrahlichten Sonnenenergie in Polnähe wächst mit dem Neigungswinkel der Erdachse. Am Äquator ist dieser Zusammenhang gerade umgekehrt. Die Änderung der Intensität der eingestrahlichten Sonnenenergie erfolgt damit erheblich an den Polen und geringfügig am Äquator.

1.5.3 Auswirkungen der Änderung der Exzentrizität e der Erdbahn

Der Bereich, in dem sich die numerische Exzentrizität ändert, liegt zwischen 0,0058 und 0,05. Nach dem Einsetzen dieser Werte in die Simulation (s. Anhang [A 1.5.2] ... [A 1.5.17]), erhält man nachfolgende Diagramme.

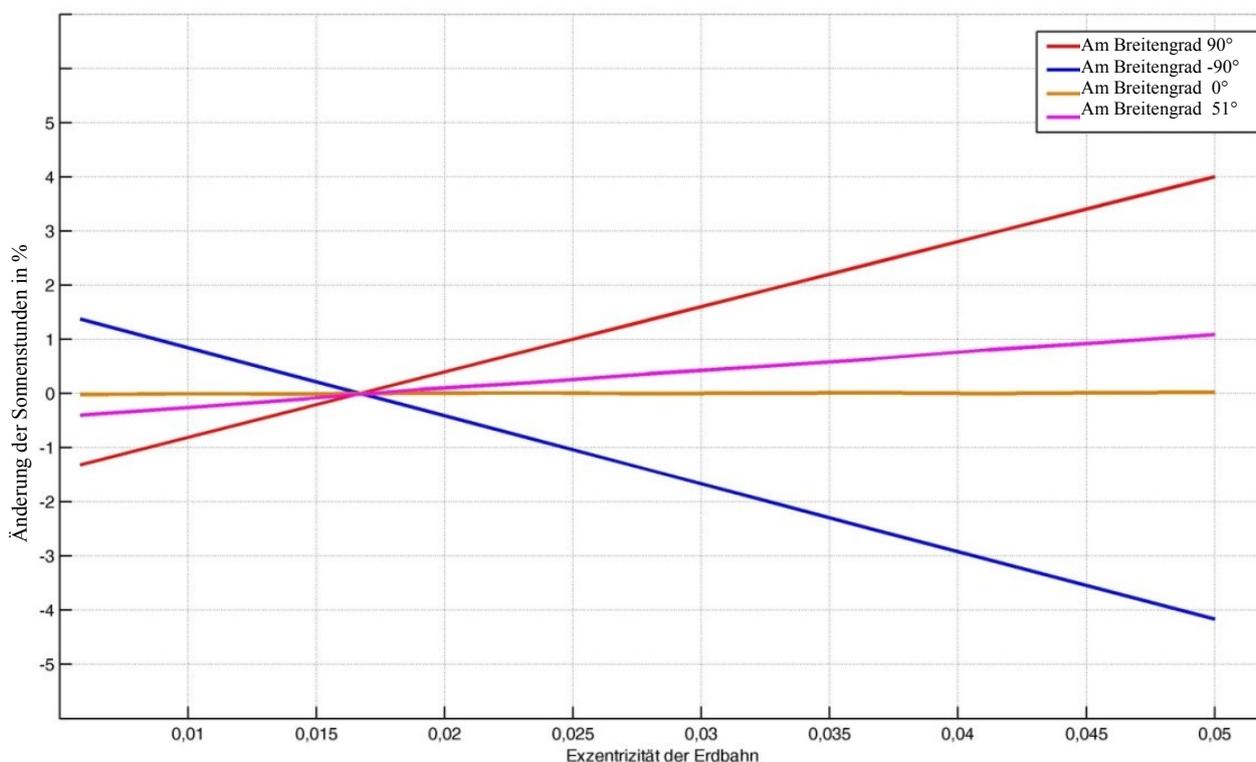


Diagramm 1.5.12: Verlauf der prozentualen Änderung der jährlichen Sonnenstunden in Abhängigkeit von der Exzentrizität der Erdbahn an einigen Breitengraden, bezogen auf die gegenwärtige Exzentrizität von $e = 0,017$ ([A 1.5.12] und [A 1.5.13]).

Aus den Diagrammen (1.5.12) bis (1.5.14) ist abzuleiten, dass eine positive prozentuale Änderung der Sonnenstunden für die nördliche Halbkugel in Übereinstimmung mit der Zunahme der Exzentrizität der Erdbahn erfolgt, während dieser Zusammenhang für die südliche Halbkugel gerade umgekehrt ist. Diese Änderung erfolgt vor allem an den Polen, während sie am Äquator nur klein ausfällt. Der größte Zuwachs der Sonnenstunden von ca. 4% wird am Nordpol erfolgen und die größte Abnahme der Sonnenstunden von ca. -4% am Südpol, wenn die Exzentrizität der Erdbahn den Maximalwert von ca. $e = 0,05$ erreicht.

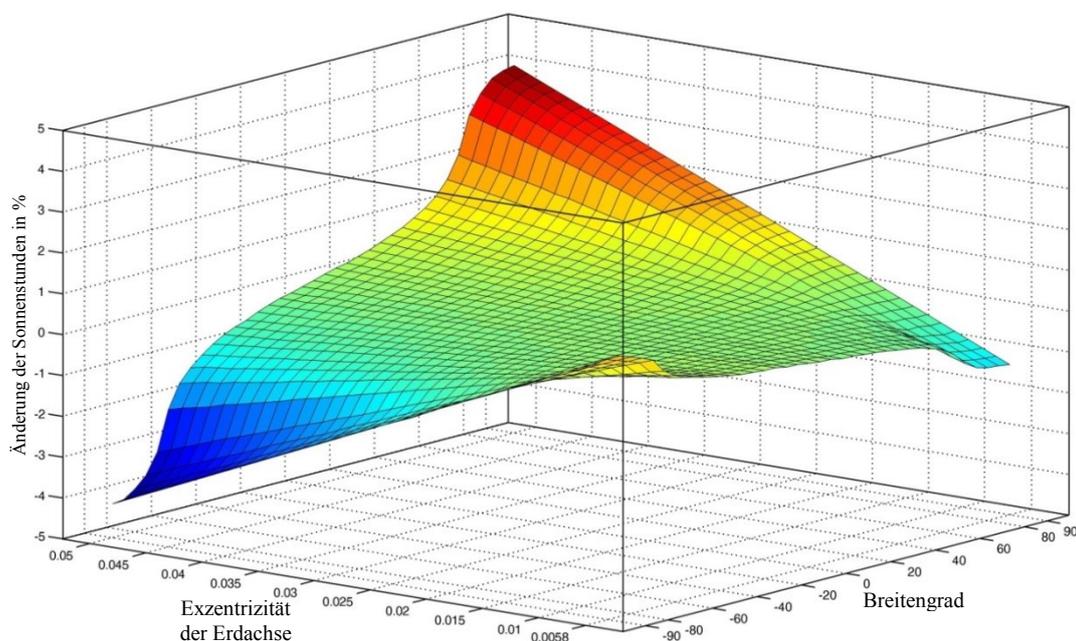


Diagramm 1.5.13: (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn ([A 1.5.12] und [A 1.5.13]).

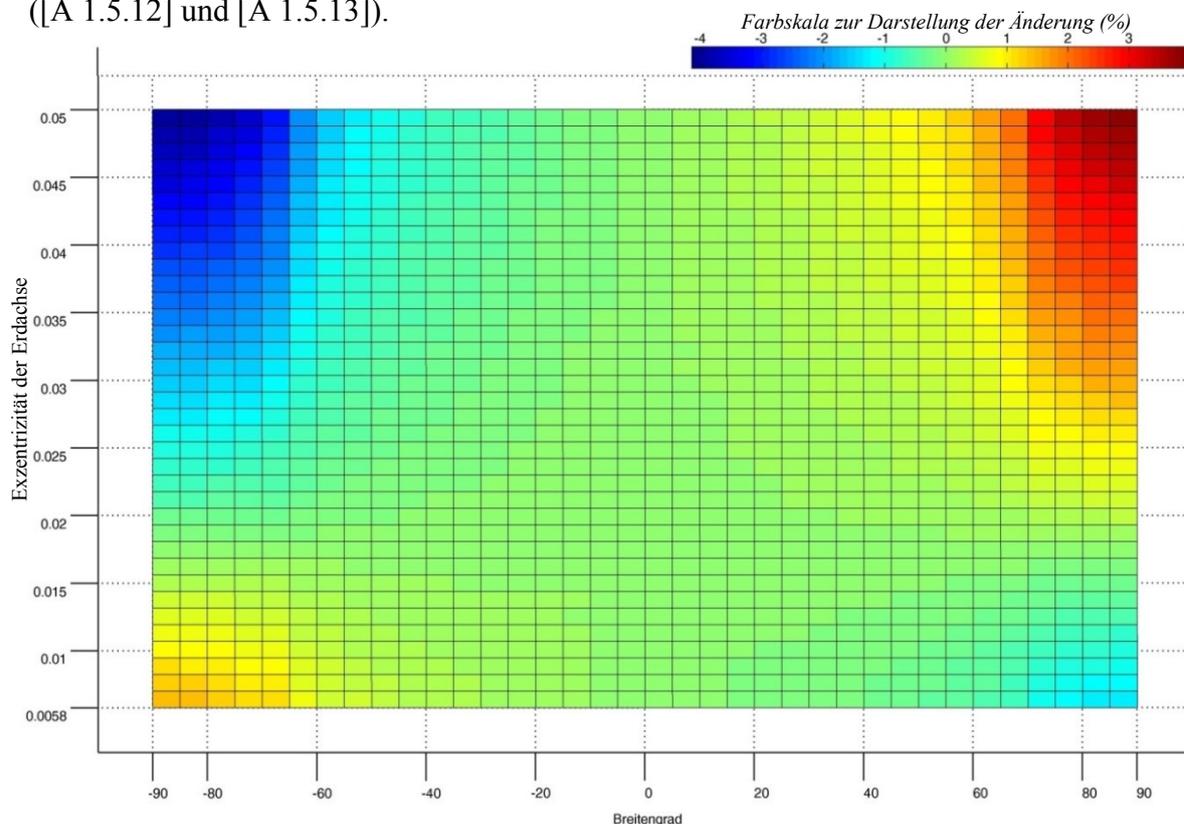


Diagramm 1.5.14: (*Diagramm 1.5.13 als Farbdigramm*) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn.

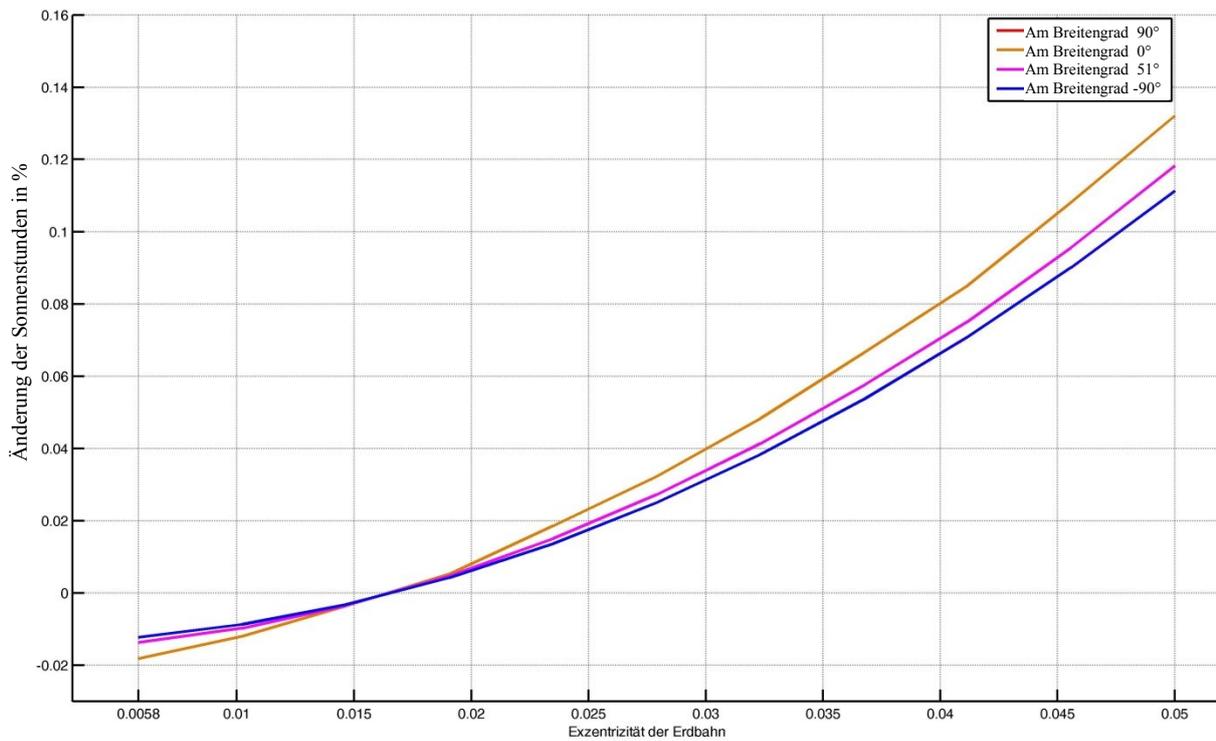


Diagramm 1.5.15: Verlauf der prozentualen Änderung der jährlichen eingestrahltten Sonnenenergie in Abhängigkeit von der Exzentrizität der Erdbahn an einigen Breitengraden, bezogen auf die gegenwärtige Exzentrizität von $e = 0,017$ ([A 1.5.15] und [A 1.5.16]).

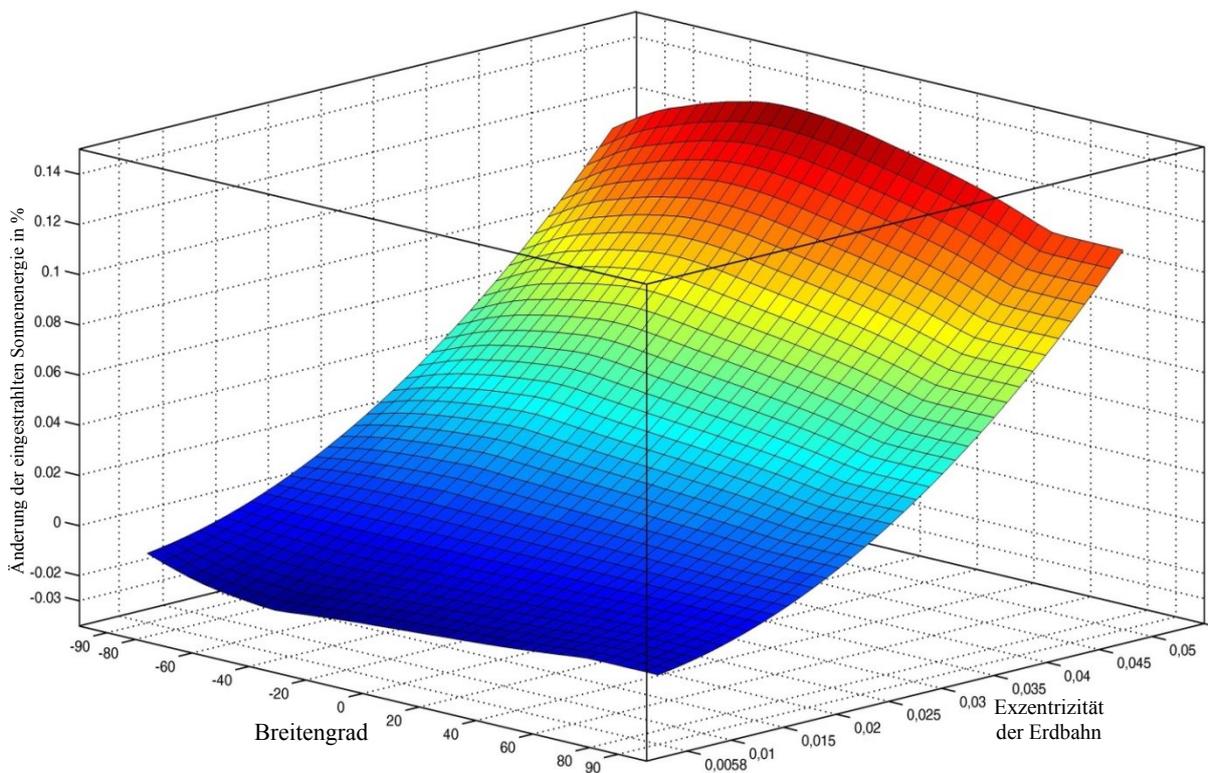


Diagramm 1.5.16: (*Orthogonale 3D-Darstellung*): Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahltten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn ([A 1.5.15] und [A 1.5.17]).

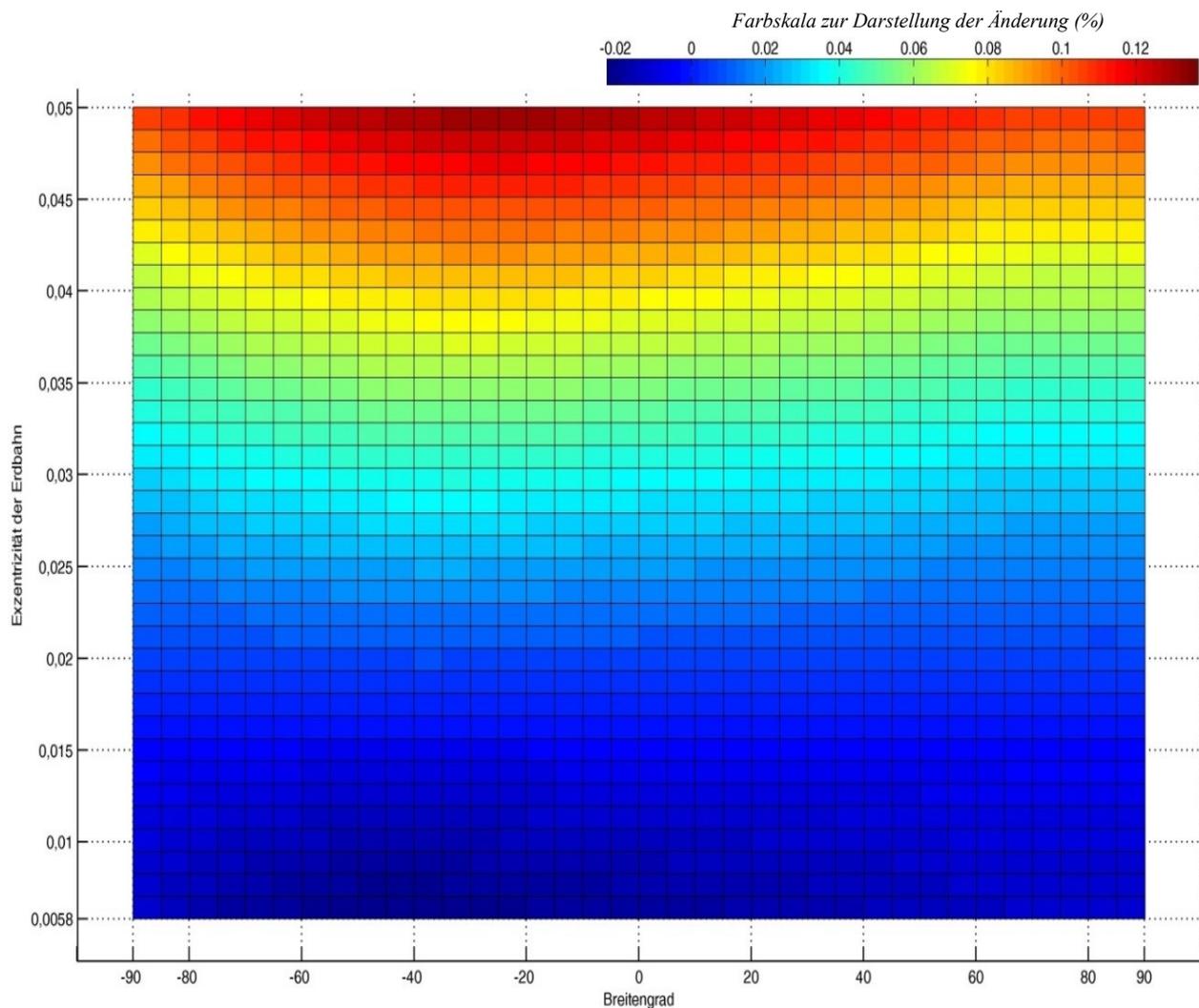


Diagramm 1.5.17: (Diagramm 1.5.16 als Farbdigramm) Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahnten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn [A 1.5.15] und [A 1.5.17]).

Aus den Diagrammen (1.5.15), (1.5.16) und (1.5.17) kann man erkennen, dass sich die Änderung der eingestrahnten Sonnenenergie streng monoton wachsend zur Änderung der Exzentrizität verhält. Die Auswirkung auf die eingestrahlte Sonnenenergie ist jedoch klein. Das Maximum der Änderung der eingestrahnten Sonnenenergie beträgt ca. 0,13% in der Nähe des Breitengrads -30° , wenn die Exzentrizität den Maximalwert $e = 0,05$ erreicht. Die größte Veränderung der eingestrahnten Sonnenenergie beträgt nur ca. -0,02%, wenn die Exzentrizität den Minimalwert $e = 0,0058$ erreicht.

Zusammenschau für die Abweichung infolge der Änderung der Exzentrizität

Obwohl die Änderung der eingestrahnten Sonnenenergie mit der Exzentrizität klein ist, ist die Auswirkung auf die Anzahl der Sonnenstunden aber erheblich. Dies führt dazu, dass sich die durchschnittliche Intensität der eingestrahnten Sonnenenergie erheblich ändert. Sie ist auf der südlichen Hemisphäre proportional zur Exzentrizität, während sie sich auf der nördlichen Hemisphäre umgekehrt proportional dazu verhält.

1.5.4 Gültigkeitsbereich der vereinfachten Verfahrens

1.5.4.1 Vorläufige Abschätzung der Einflüsse auf die Erdtemperatur

In der nachfolgenden Einschätzung soll betrachtet werden, ob die Änderungen der eingestrahnten Sonnenenergie auf die Erde aufgrund der Schwankungen der Parameter der Erdbewegung zu großen Auswirkungen auf die Erdtemperatur führen.

Exemplarisch wird auf den Fall eingegangen, dass sich nur der Neigungswinkel ändert (vgl. dazu Diagramm 1.5.11). Das Maximum der Änderung der eingestrahnten Sonnenenergie am Südpol der Erde erreicht dabei ca. $\frac{\Delta E}{E} = 10\%$. Zu welcher Temperaturänderung am Südpol würde dieser Umstand führen?

Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz strahlt ein Körper mit Temperatur T die Strahlungsleistung P pro Quadratmeter Oberfläche ab. Es gilt

$$P = k \cdot T^4 \quad (1.5.1).$$

Dabei ist k eine Konstante.

Nach dem Energieerhaltungssatz entspricht die ausgesendete Strahlungsleistung P der Leistung, die von der eingestrahnten Sonnenenergie umgewandelt wird (Abb. 1.5.11).

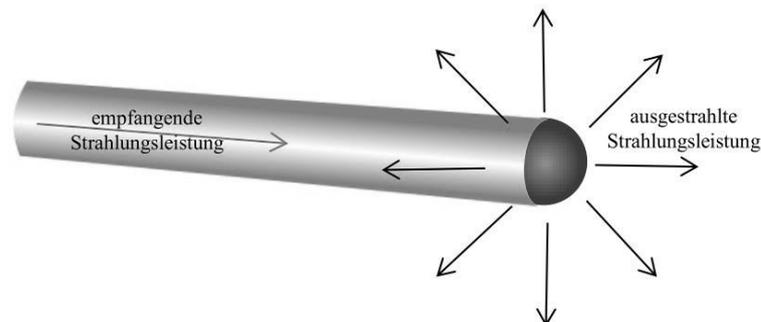


Abbildung 1.5.1: Illustration zum Strahlungsgleichgewicht der Erde.

Da sich die eingestrahlte Sonnenenergie am Südpol ändert, muss dies auch die Änderung der ausgestrahlten Strahlungsleistung gleichermaßen betreffen. Es gilt:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta E}{E} = 10\% \quad (1.5.2).$$

Aus Gleichung (1.5.1) folgt

$$dP = 4k \cdot T^3 dT$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{4k \cdot T^3 \cdot dT}{k \cdot T^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{4 \cdot dT}{T}$$

$$\Leftrightarrow dT = \frac{T}{4} \cdot \frac{dP}{P}$$

Für Abschätzungen kann man näherungsweise annehmen, dass $dT \approx \Delta T$ und $dP \approx \Delta P$. Damit folgt

$$\Rightarrow \Delta T \approx \frac{T}{4} \cdot \frac{\Delta P}{P} \quad (1.5.3)$$

$$\Leftrightarrow \Delta T \approx \frac{T}{4} \cdot 10\%.$$

Nimmt man die Temperatur am Südpol mit $T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{K}$ an, so ergibt sich die Änderung

$$\Delta T \approx \frac{273}{4} \cdot 10\% \approx 7\text{K}$$

$$\Leftrightarrow \Delta T \approx 7^\circ \text{C}.$$

Zusammenfassung und Kommentar: Die Änderung um 10% der eingestrahkten Sonnenenergie aufgrund der Änderung des Neigungswinkels führt zu einer Änderung von ca. 7°C am Südpol der Erde. Allerdings ist die oben genutzte elementarisierte Betrachtung nur unter dem Aspekt der Größenordnung zu verstehen. Für eine detaillierte Berechnung würde man deutlich mehr Informationen verarbeiten müssen, z.B. wie sich die Absorption der einfallenden Strahlung mit dem Einfallswinkel ändert, denn die Erde ist eben kein schwarzer Strahler.

Bei der obigen vorläufigen Berechnung wurde lediglich ein einzelner Effekt betrachtet, obwohl bei der Bewegung der Erde tatsächlich gleichzeitig gleich drei Effekte auftreten. Die Überlagerung der Auswirkungen dieser drei Effekte ist sehr kompliziert. Weil die Periode jedes Effekts unterschiedlich ist, können diese Effekte die Änderung der Sonnenstunden bzw. der eingestrahkten Sonnenenergie aufeinander verstärken oder abschwächen bzw. auslöschen. Zum Beispiel nimmt in einem bestimmten Jahr die Anzahl der Sonnenstunden aufgrund der Präzession am Nordpol um 4% zu. Wenn in demselben Jahr wegen der Änderung der Exzentrizität die Sonnenstunden auch um 4% ansteigt, dann verstärken sich diese Effekte und die gesamte Änderung der Sonnenstunden beträgt 8%. Aber wenn die Sonnenstunden aufgrund der Änderung der Exzentrizität um 4% abnehmen, dann führt die Überlagerung dieser beiden Effekte insgesamt zur gegenseitigen Auslöschung. Es gibt dann keine Änderung für die Sonnenstunden. Das gleichzeitige Auftreten dieser drei Effekte führt zu äußerst komplexen Änderungen im Erdklima. Die Diagramm (1.5.18) zeigt die komplizierte Variation der Temperatur, die auf der Messreihe der Isotope D_2 und O_{18} in Eisbohrkernen an der Vostok Station (in der Ostantarktis) beruht [Petit 1999].

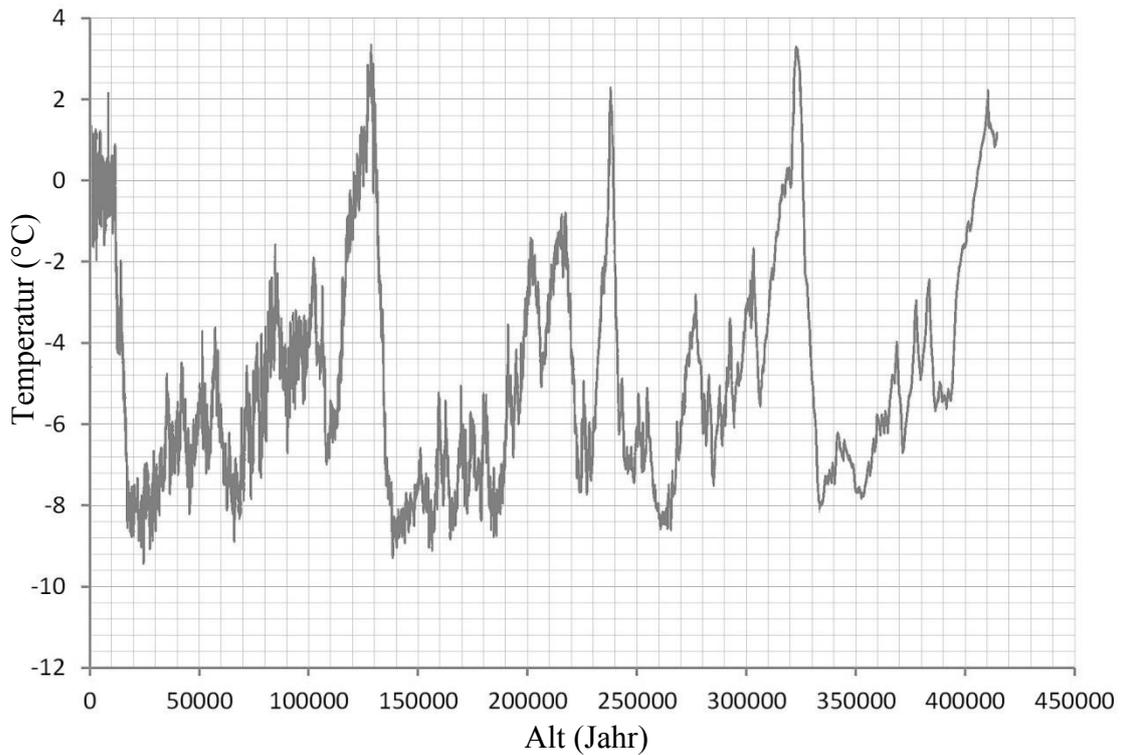


Diagramm 1.5.18: Die Daten aus Eisbohrkernen an der Vostok Station – Antarktis.

1.5.4.2 Gültigkeitsbereich

Dieses Kapitel hat gezeigt, dass die langfristige Änderung der Parameter der Erdbewegung eine erhebliche Änderung der Sonnenstunden und der eingestrahlt Sonnenenergie bewirkt. Auf lange Sicht gilt das vereinfachte Verfahren (Abschnitte 1.1, 1.2 und 1.3) allerdings nicht mehr. Die Gültigkeit dieser Vereinfachungen ist demnach auf relativ kurze Zeiträume beschränkt.

Aus der Diagramm 1.5.18 kann man erkennen, dass das Zeitintervall ca. 10.000 Jahre beträgt, in dem es große Änderungen der Erdtemperatur gab. Das bedeutet, dass die eingestrahlt Sonnenenergie im Zeitintervall von ca. ein paar Jahrhunderten (viel kleiner als 10.000 Jahre) durchaus mit dem vereinfachten Verfahren abgeschätzt werden kann. Die nachfolgenden Kapitel dieser Arbeit beruhen auf den mit dem vereinfachten Verfahren formulierten Ergebnissen.

Gleichzeitige Auswirkungen aller drei Effekte werden im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht berücksichtigt. Außerdem wird in diesem Kapitel die Rolle, die natürlich die Erdatmosphäre für die globale Temperatur spielt, noch vernachlässigt. Die angeführten Berechnungen dienen nur dem Ausbildungsziel. Sie helfen Lernenden schneller zu verstehen, wie sich die einzelnen Effekte auf die Erde auswirken.

Kapitel 2: Umwandlung der eingestrahnten Sonnenenergie in regenerative Energie

2.0 Einleitung

2.0.1 Zielsetzung des Kapitels

Alle natürlichen Wetterphänomene beruhen letztlich auf der Energiezufuhr durch die Sonnenstrahlung. Das bedeutet, die meisten regenerativen Energieformen, die man durch Solarzellen, Windkraft, Wellenkraft, Wasserkraft usw. gewinnen kann, werden immer aus der eingestrahnten Sonnenenergie umgewandelt. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Abschätzungen, wie die eingestrahlte Sonnenenergie in regenerative Energie umgewandelt wird. Zuerst werden die Verteilung der eingestrahnten Sonnenenergie unter Berücksichtigung der Auswirkung zwischen Erdatmosphäre und Strahlung festgestellt. Danach kann die Verteilung der Temperatur auf der Erdoberfläche gefunden werden. Zum Schluss wird damit die Abschätzung der Potentiale der regenerativen Energiequellen möglich.

Dieses Kapitel verfolgt auch didaktische Zielsetzungen. Durch die Abschätzungen in diesem Kapitel werden zahlreiche Zwischenergebnisse gefunden. Diese sind ziemlich genau und oftmals mit den gemessenen Ergebnissen vergleichbar, denn in die Modelle, auf denen die Abschätzungen beruhen, gehen zahlreiche geschickt gewählte Annahmen ein. Eine möglichst gute numerische Übereinstimmung zwischen Realität und theoretischer Vorhersage ist aber gar nicht das primäre Ziel, denn die Abschätzungen sollen vor allem für Lernende eine sehr gut nachvollziehbare qualitative Erläuterung bieten. Die Modelle wurden so vernünftig fundiert, dass sie Lernenden nachvollziehbar helfen können, zu erkennen, wie die eingestrahlte Sonnenenergie in die regenerativen Energiequellen umgewandelt wird - und vor allem -, wie die Potentiale regenerativer Energiequellen quantitativ abgeschätzt werden können. Dementsprechend werden diese Modelle Schritt für Schritt, basierend auf einem elementaren Ansatz, immer komplizierter gebaut. Alle Erläuterungen und Herleitungen der Modelle werden übersichtlich dargestellt und werden mit zahlreichen Grafiken und einfachen Simulationen untermauert, so dass sie für Lernende verständlich sind.

2.0.2 Legitimation des Themas

Quantitative Abschätzungen der regenerativen Energie finden sich in der Literatur von mehreren Autoren¹. Darunter gibt es Berechnungen aus der Perspektive der Grundlagenforschung, die außerordentlich kompliziert sind, höhere Mathematik erfordern und sich auf die Nutzung komplizierter Algorithmen und großer Datenmengen aus professionellen Messgeräten stützen. Solche Vorgehensweisen sind allerdings ungeeignet für den schulischen Unterricht. Im Gegensatz dazu findet man auch vereinfachte Abschätzungen, bei denen die Erdoberfläche als idealisiertes thermodynamisches System angesehen wird². Daher kann die maximale mittlere regenerative Gewinnenergie E_r sofort nach dem Carnot-Wirkungsgrad berechnet werden: $E_r = \frac{\Delta T}{T_0} \cdot B_s$, wobei $B_s \approx 340 \text{ (W/m}^2\text{)}$ die mittlere solare Bestrahlungsstärke auf die Erdoberfläche ist, $\Delta T = 10\text{K}$ der mittlere Temperaturunterschied zwischen Tag und Nacht und $T_0 = 288\text{K}$ die mittlere Temperatur der Erdoberfläche. Die physikalischen Vorgänge auf der Erdoberfläche verhalten sich im konkreten Sinn natürlich anders. Die solare Bestrahlungsstärke fließt natürlich nicht zu 100%, sondern nur anteilig in die Geosysteme ein. Außerdem hat diese

¹ [Richter 2003], [Blüthgen 1980], [Boekehr 1997], [Houghton 2002], [Linacre 1997], [Monteith 2013], [Murphy 2009], [Peixóto 1984], [Ricchiazzi 1998], [Roedel 2011], [Salby 1996], [Stephens 2012], [Trenberth 2004], [Trenberth 2009], [Wallace 1997], [Kleidon 2012]

² [Jacoby 2015], [Schwarz 2009]

vereinfachte Abschätzung den Nachteil, dass sie nicht näher hinterfragt, wie man die Zahlenwerte der obigen Größen berechnen kann.

Die Akzeptanz einer neuen Kenntnis ohne Erläutern ihrer Gewinnung sollte nicht in den naturwissenschaftlichen Unterricht eingebracht werden ([Knoll 1971] S. 35). Um diese didaktische Herausforderung zu lösen benutzt man ein Bilanzverfahren, das zwei weiter oben erläuterte Verfahren einbezieht. Diese Aufgabe wird in diesem Kapitel ausgeführt. Dabei wendet man zwar Erfolge aus der aktuellen Grundlagenforschung an, es sei aber nochmals betont, dass Gesetze, Annahmen, Modelle und Berechnungen in elementarisierter Weise dargestellt werden. Damit können diese Abschätzungen im Unterricht verwendet werden.

Die Abschätzung zur Leistungsfähigkeit regenerativer Energiequellen hat durchaus großes Potential für die Interessensentwicklung der Lernenden, weil sich die Kenntnisse deutlich auf die Praxis beziehen. Zurzeit und in Zukunft wird das Thema der regenerativen Energie zwangsläufig immer mehr auf das Interesse weiterer Bevölkerungsschichten treffen. Da man das globale Problem lösen muss, wie man die sich erschöpfenden fossilen Energiequellen substituiert, und da die Lösung dieses Problems bereits in naher Zukunft erfolgen muss, wird die Antwort auf die Frage zunehmend bedeutsam, welche Leistungsmengen man aus regenerativer Energie beziehen kann und ob diese den menschlichen Energiebedarf decken können. Diese Probleme kennen die Lernenden vielfach aus den Medien. Wenn solche Probleme im Unterricht aufgegriffen werden, wobei sie klarer und vor allem quantitativ dargelegt werden, wird dies den Lernenden unbedingt positive Effekte bringen.

Vietnam ist ein Entwicklungsland, daher ist der Energiebedarf sehr groß. Tatsächlich muss die vietnamesische Wirtschaft derzeit jedoch mit einem Mangel an Energiezufuhr zurecht kommen – und das, obwohl sich die wirtschaftliche Entwicklung zukünftig dramatisch beschleunigen wird. Die Erschließung neuer Energiequellen, auch der regenerativen Energiequellen, steht deshalb im Mittelpunkt des Interesses. Zurzeit ist der hauptsächliche Anteil der Stromgewinnung in Vietnam tatsächlich regenerativ, nämlich die Wasserkraft [EVN 2013]. Deswegen müssen Kenntnisse über die regenerative Energie unbedingt in der Schule vermittelt werden. In der aktuellen vietnamesischen Schule werden diese Kenntnisse jedoch noch nicht relevant berücksichtigt. Sie werden vorwiegend im geografischen Schulunterricht erwähnt und sie werden vor allem meistens mit statistischen Daten beschrieben. Völlig unklar bleiben die physikalisch-mathematischen Berechnungsgrundlagen für die Ermittlung solcher Daten, z.B. über die potentielle Leistungsabgabe der Kraftwerke. Erläuterungen erreichen allenfalls die Ebene der qualitativen Form. Deshalb sollen nachfolgend quantitative Abschätzungen der Potentiale der regenerativen Energiequellen dargelegt werden, die in der vietnamesischen Schule zum Einsatz kommen sollen.

Der aktuell deutlich favorisierte fächerübergreifende Unterricht wird dabei berücksichtigt, denn bei diesen Abschätzungen werden Kenntnisse von mehreren Fächern wie Physik, Mathematik, Astronomie, Geographie oder Informatik angewendet. Die Verwendung dieser Abschätzungen in der Schule erfordert von den Lernenden deshalb die fließende Anwendung der Kenntnisse aus mehreren Fächern. Das ist eine in Vietnam verfolgte didaktische Zielsetzung des Schulunterrichtes, bei dem es darum gehen soll, Lernende so mit Fähigkeiten auszustatten, dass sie in der beruflichen Praxis und im Alltag Lösungen finden können, die sich eben erst durch Kombination von Kenntnissen aus mehreren Fächern ergeben.

2.0.3 Aufbau und Voraussetzungen

Das Kapitel besteht aus 6 Abschnitten. Dazu müssen Kenntnisse der physikalischen Gesetze auf höherem Niveau vorausgesetzt werden, die im Allgemeinen bei SuS nicht mehr vorhanden sind. Daher werden diese Gesetze in elementarisierter Weise erklärt, bevor sie bei den Abschätzungen angewendet werden. Die Herleitungen der Formeln setzen das schulische mathematische Niveau der Oberstufe voraus, darunter die Integralrechnung und die Zahlfolgenrechnung. Die Vorkenntnisse aus den anderen Fächern bestehen lediglich aus elementarem schulischem Wissen.

Die örtliche und zeitliche Verteilung der eingestrahnten Sonnenenergie ohne Betrachtung der Anwesenheit der Erdatmosphäre wurde in Kapitel 1 eindeutig und präzise dargestellt (s. Diagramm 1.2.17). Diese ungleichmäßige Verteilung ruft eine ungleichmäßige Verteilung der Temperatur auf der Erdoberfläche hervor. Die Temperaturverteilungen werden in den folgenden Abschnitten immer genauer bestimmt. Aufgrund dieser Verteilungen kann man die Potentiale der regenerativen Energie abschätzen.

Im Abschnitt 2.1 geht man von der Annahme aus, dass der Treibhauseffekt in der Luft nicht auftritt und die Erdalbedo konstant ist. Sie soll auch unabhängig vom betreffenden Ort und der Zeit sein. Zusätzlich zu diesen Annahmen werden die Wärmeaustauschprozesse infolge der Luftbewegungen noch nicht betrachtet. Deswegen kann man die Verteilung der Temperatur der Erdoberfläche leicht finden, indem man das Stefan-Boltzmann-Gesetz anwendet. Im Vergleich mit der realen Temperaturverteilungskurve (Orange Kurve – Diagramm 2.0.1) ist diese Temperatur zu niedrig geschätzt (Grüne Kurve – Diagramm 2.0.1).

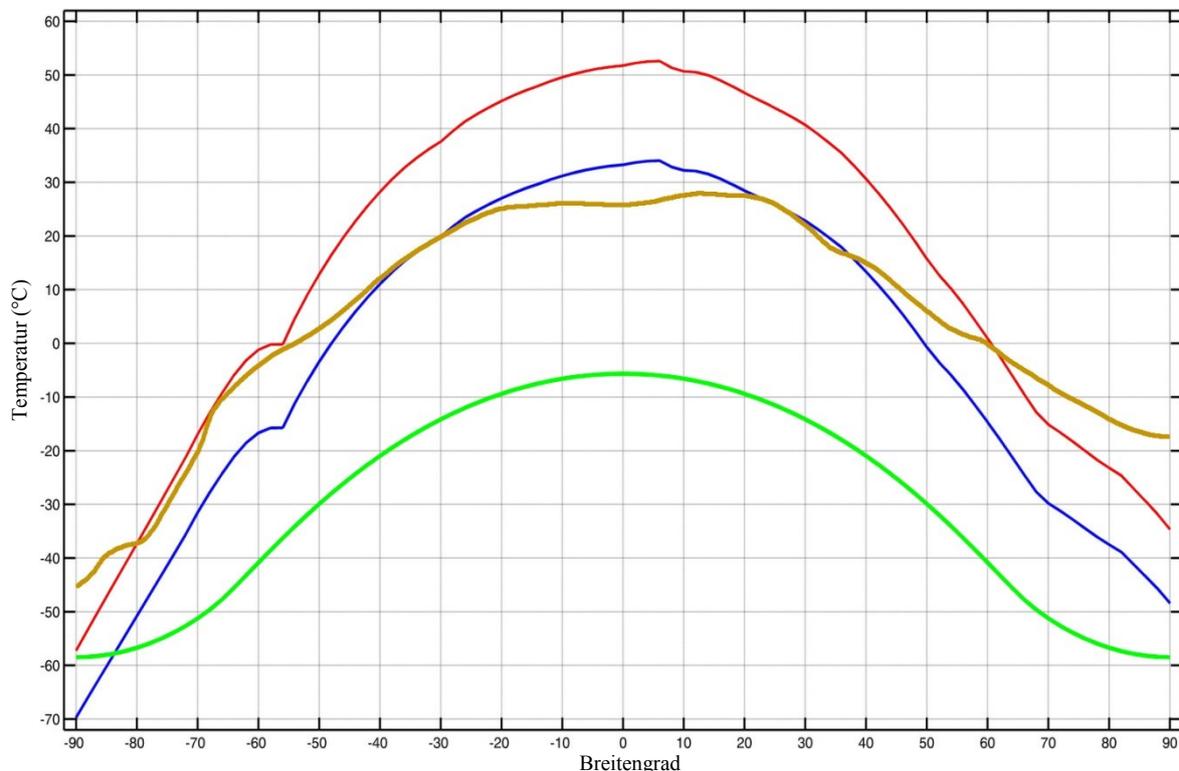


Diagramm 2.0.1: Verteilung der jährlichen mittleren Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit vom Breitengrad: Vereinfachte Betrachtung mit konstanter Albedo und ohne Treibhauseffekt, ohne Wärmetransport (grün); Betrachtung mit realer Verteilung der Albedo, mit Treibhauseffekt aber ohne Wärmetransport (rot); Betrachtung mit realer Verteilung der Albedo, mit Treibhauseffekt und mit lediglich vertikalem Wärmetransportierung (Blau); und die echten Werte (orange) aus [ISCCP 2014].

Die Abschnitte 2.2 und 2.3 liefern die notwendigen Grundkenntnisse für den Abschnitt 2.4, auf dem wiederum der Abschnitt 2.5 beruht. Im Abschnitt 2.2 werden die hauptsächlichsten Einflüsse auf die Erdalbedo untersucht. Bei Abschnitt 2.3 handelt es sich um die Verteilung der Strahlungsleistung in Abhängigkeit von Wellenlänge anhand des planckschen Strahlungsgesetzes. Aufgrund der Ergebnisse aus den Abschnitten 2.2 und 2.3 kann im Abschnitt 2.4 der Treibhauseffekt in der Erdatmosphäre deutlich analysiert werden. Dementsprechend erhält man aus Abschnitt 2.4 die Verteilung der Temperatur der Erdoberfläche (Rote Kurve – Diagramm 2.0.1), die aber überschätzt wird.

Diese Abweichung der abgeschätzten Temperatur aus Abschnitt 2.4 wird in Abschnitt 2.5 aufgeklärt, indem man die Wärmeaustauschprozesse in der Luft (durch Materiebewegung) berücksichtigt. Die Ergebnisse aus Abschnitt 2.5 lauten: Wenn man lediglich die vertikale Wärmeregulierung wegen der vertikalen Luftbewegung betrachtet, so ist die mittlere Temperatur der Erdoberfläche gleich mit der realen mittleren Temperatur der Erdoberfläche ($T_0 = 15^\circ\text{C}$). Die Verteilung dieser Temperatur (Blaue Kurve – Diagramm 2.0.1) ist aber noch nicht identisch mit der tatsächlichen Temperatur. Wenn man zusätzlich die horizontale Wärmeregulierung wegen der horizontalen Luftbewegung in die Betrachtung hinzufügt, so erhält man endlich die Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche fast identisch mit der wirklichen Temperaturverteilung.

Durch die Berechnungen innerhalb der Abschnitte 2.4 und 2.5 erhält man mehrere wichtige Zwischenergebnisse, z.B. die mittlere kurzwellige und langwellige Bestrahlungsstärke durch die Sonnenstrahlung, die mittlere vertikale und horizontale Wärmeregulierung usw. Aufgrund dieser Resultate kann man in Abschnitt 2.6 die Leistungsfähigkeit der meisten regenerativen Energiequellen abschätzen.

2.1 Abschätzungen der Temperaturen von Planeten im Sonnensystem

2.1.0 Einführung

In diesem Abschnitt wird das Stefan-Boltzmann-Gesetz für den schwarzen Körper angewendet, um die durchschnittliche Temperatur T_{OA} der Planeten im Sonnensystem zu finden. Darunter soll diejenige Temperatur verstanden werden, die sich ergibt, wenn man allein das Strahlungsgleichgewicht von global einfallender und global emittierter Strahlung des jeweiligen Himmelskörpers betrachtet. T_{OA} kann direkt aus der Bilanzgleichung zwischen der Summe der Strahlungsabsorption und –emission berechnet werden. Dabei erhält man als Resultat eine Art Gesamtintegral über viele Strahlungsvorgänge an der Oberfläche und in der Atmosphäre, d.h. die Ergebnisse würden der Temperatur entsprechen, die sich ergäbe, wenn man den jeweiligen Planeten aus weiter Entfernung beobachtet. Diese Ergebnisse sind jedoch annähernd so wie die Temperaturen der Oberflächen T_0 der Planeten, jedenfalls dann, wenn der Treibhauseffekt in der Atmosphäre nur eine kleine oder gar keine Rolle spielt - z.B. bei den Planeten Merkur oder Mars. Merkur besitzt bekanntlich keine nennenswerte Atmosphäre, bei Mars sind die Menge sowie die Dichte der Treibhausgase sehr gering. Dort sind also die Temperaturen T_{OA} annähernd so wie die Temperaturen T_0 . Trotz dieser Einschränkungen ist die Betrachtung für Lernende wichtig, denn nur so können sie zunächst die prinzipielle Bedeutung des Strahlungsgleichgewichtes für die Aufrechterhaltung einer konstanten mittleren Temperatur auf den Planeten nachvollziehen.

2.1.1 Formeln zur Abschätzung der Temperatur von Planeten

Ein Planet absorbiere die Leistung P_{abso} aus der eingestrahnten Sonnenleistung $P_{P \leftarrow S}$. Für sich allein betrachtet würde durch diesen Absorptionsprozess eine Zunahme der Temperatur T_{OA} bewirkt. Die Temperatur T_{OA} sorgt aber ebenfalls dafür, dass der Planet die Strahlungsleistung P_{emis} in Form thermischer Strahlung (infrarot) ins Weltall abgibt, wodurch – wieder für sich allein betrachtet - die Temperatur T_{OA} abnehmen müsste. Im Gleichgewichtszustand muss die aufgenommene Leistung P_{abso} genau identisch mit der abgegebenen Leistung P_{emis} sein und die Temperatur T_{OA} folglich konstant sein. Nachfolgend wird T_{OA} im Gleichgewichtszustand gesucht. Dafür gilt:

$$P_{emis} = P_{abso} \quad (2.1.1a).$$

Die eingestrahlte Sonnenenergie wird von der Oberfläche des Planeten jedoch nur zum Teil aufgenommen, weil das Sonnenlicht zu einem gewissen Prozentsatz sofort von der Oberfläche reflektiert wird. Wir bezeichnen den Reflexionskoeffizient (Albedo) der Oberfläche (hier natürlich auch den der Atmosphäre) des Planeten mit A . Dann gilt für den Zusammenhang zwischen der aufgenommenen Leistung P_{abso} und der eingestrahnten Sonnenleistung $P_{P \leftarrow S}$ auf den Planeten

$$P_{abso} = (1 - A) \cdot P_{P \leftarrow S} \quad (2.1.1b).$$

Die Sonne emittiert ihre Leuchtkraft $L = 3,846 \cdot 10^{26} W$ in Form elektromagnetischer Strahlung gleichmäßig in allen Richtungen. Dies führt zu einer gleichmäßigen Verteilung der Sonnenleistung auf einer Kugelfläche C (Skizze 2.1.1).

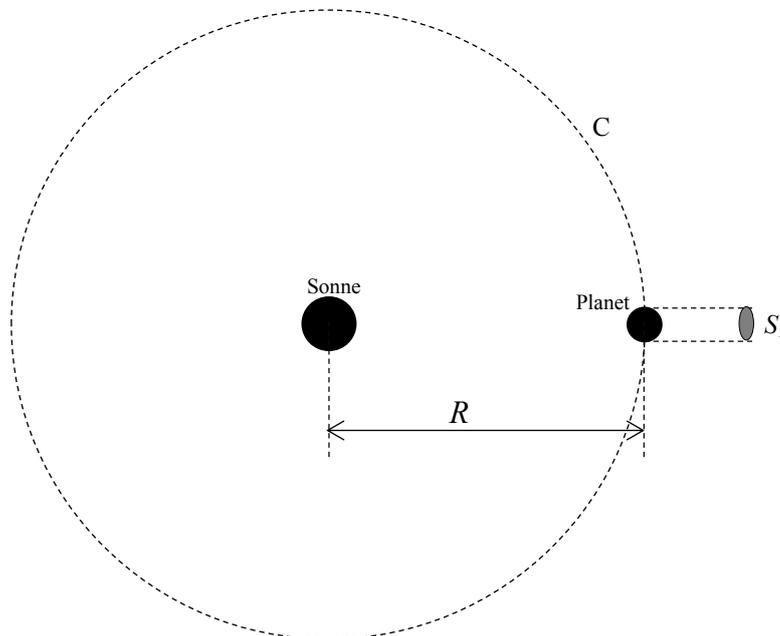


Abbildung 2.1.1: Illustration zur Berechnung der eingestrahnten Sonnenleistung $P_{P \leftarrow S}$ auf einen Planeten.

Deshalb gilt für die eingestrahlte Sonnenleistung $P_{P \leftarrow S}$ auf den Planet

$$P_{P \leftarrow S} = \frac{S_1}{S_C} \cdot L \quad (2.1.1c).$$

In der Gleichung (2.1.1b) ist $S_C = 4\pi R^2$ die Oberfläche der Kugel C, deren Radius R der Abstand zwischen Sonne und Planet ist. S_1 ist die Schnittfläche zwischen der Kugelfläche C und dem Planeten. S_1 ist ein Kreis. Da der Radius r des Planeten viel kleiner als der Abstand R ist, kann man näherungsweise den Radius der Fläche S_1 als Kreisflächenradius ansehen und mit dem Radius des Planeten identifizieren. Somit gilt: $S_1 = \pi r^2$.

Durch Einsetzen der Ausdrücke für S_C und S_1 in die Gleichung (2.1.1c) ergibt sich

$$P_{P \leftarrow S} = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} \cdot L = \frac{r^2}{4R^2} \cdot L \quad (2.1.1d).$$

Nach einer Energieumwandlung der eingestrahnten Sonnenenergie sendet der Planet die Leistung P_{emis} letztlich ausschließlich in Form thermischer Strahlung wieder in das Weltall zurück. Wir gehen nachfolgend von der Annahme aus, dass der Planet einer vergleichsweise schnellen Eigenrotation unterliegt, so dass die einfallende Strahlung gleichmäßig auf die gesamte Oberfläche des Himmelskörpers verteilt werden kann. Dann wird auch die Reemission der Strahlung allseitig erfolgen, wobei es sich um thermische Strahlung handelt. Vereinfachend kann man davon ausgehen, dass die Abstrahlung des Planeten (so wie auch die einfallende Strahlung von der Sonne) als Schwarzkörperstrahlung behandelt werden kann. Deshalb gehorcht die Leistung P_{emis} der Ausstrahlung des Planeten dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für den schwarzen Körper. Dann gilt

$$P_{emis} = \sigma \cdot S_P \cdot T_{OA}^4 \quad (2.1.1e).$$

Dabei ist $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} (Wm^{-2}K^{-4})$ die Stefan-Boltzmann-Konstante und $S_P = 4\pi \cdot r^2$ die Oberfläche des kugelförmigen Planeten.

Durch Kombinationen der Gleichungen (2.1.1a), (2.1.1b), (2.1.1d) und (2.1.1e) folgt das Ergebnis

$$T_{OA} = \left((1 - A) \cdot \frac{L}{16\pi \cdot \sigma \cdot R^2} \right)^{1/4} (K) \quad (2.1.1).$$

Die Gleichung (2.1.1) gibt an, wie die Temperatur T_{OA} eines Planeten von der Albedo A und vom Abstand R Planet-Zentralgestirn abhängt. Dieser Zusammenhang kann grafisch dargestellt werden. Durch Programmieren mit der Matlab-Software wird das folgende Heatmap-Diagramm (Diagramm 2.1.1) erzeugt. Dabei wird beachtet, dass die Einheit von R als in AE¹ (Astronomie Einheit) gewählt wird.

Sind die Albedo A des Planeten und der Abstand R vom Planet zur Sonne bekannt, so kann die Temperatur T_{OA} bestimmt werden. Die Tabelle (2.1.1) gibt die Daten für A und R aller Planeten des Sonnensystems an [NASA 2012].

Planet	Abstand zur Sonne (AE)	Albedo
Merkur	0,387	0,068
Venus	0,723	0,90
Erde	1,000	0,306
Mars	1,524	0,250
Jupiter	5,204	0,343
Saturn	9,582	0,342

¹ 1AE = Der durchschnittliche Abstand von der Erde zur Sonne = $1,4959787069 (6) \times 10^{11} m$ [SI - 2007]

Uranus	19,201	0,300
Neptun	30,047	0,290

Tabelle 2.1.1: Daten für Albedo und Abstand zur Sonne der Planeten

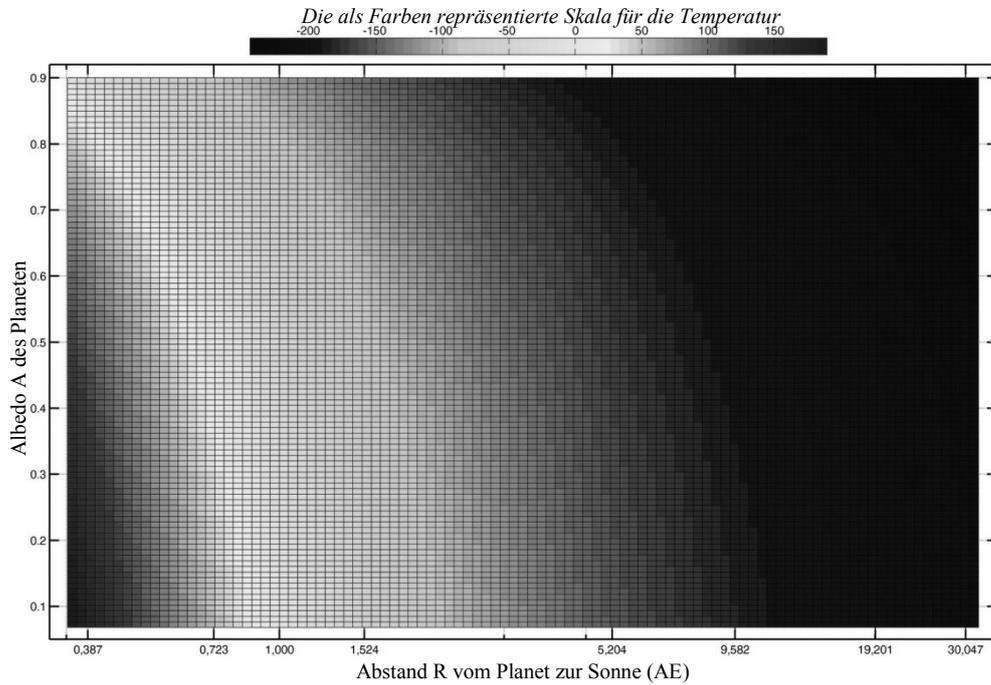


Diagramm 2.1.1: (*Heatmap-Art*) Darstellung der Abhängigkeit der mittleren Oberflächentemperatur T_{OA} eines Planeten von den zwei Variablen Albedo A und Abstand R zwischen Planet und Sonne [A 2.1.1].

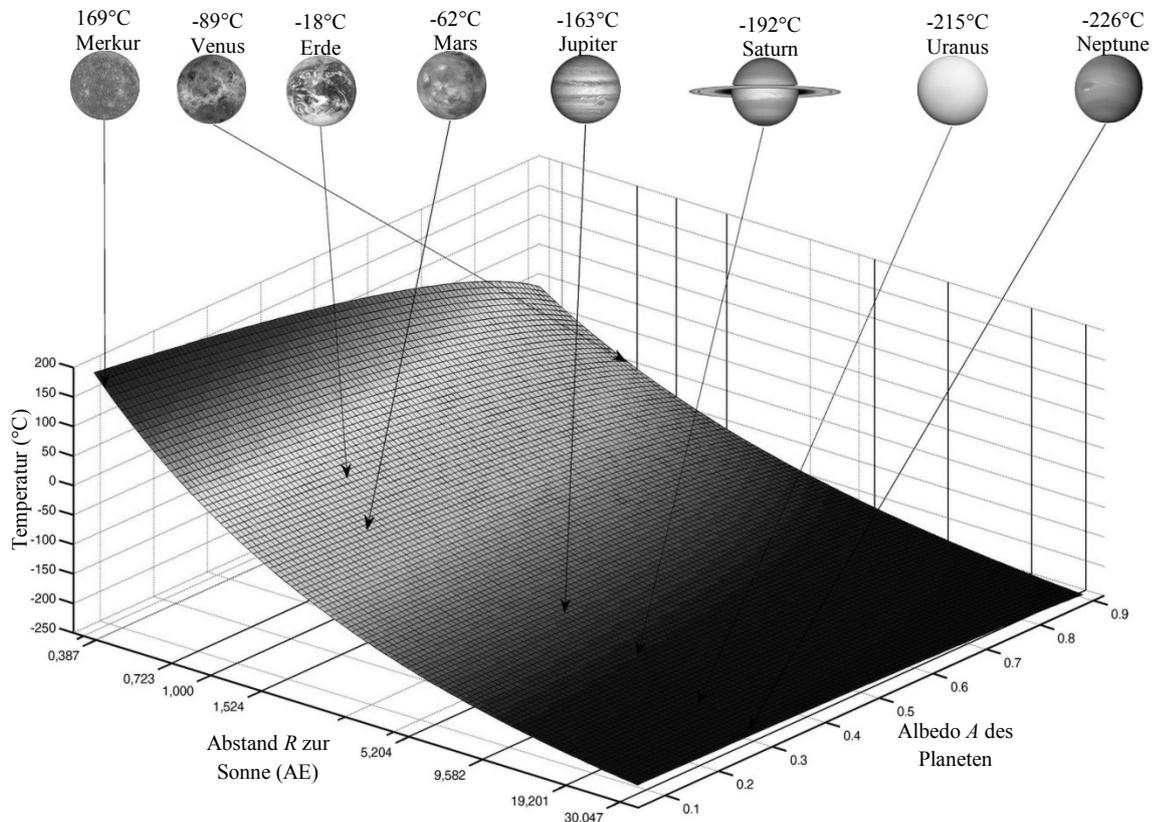


Diagramm 2.1.2: Position der Planeten in einem orthogonalen 3D-Diagramm, das den Zusammenhang zwischen den Temperaturen, den Albedowerten und dem Abstand zur Sonne vom jeweiligen Planeten darstellt [A 2.1.1].

Durch Einsetzen von A und R in die Gleichung (2.1.1) werden die mittleren Oberflächentemperaturen der Planeten gefunden. Das Diagramm (2.1.2) veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den Temperaturen, der jeweiligen Albedo und den Abstand Sonne-Planet.

2.1.2 Die Verteilung der Erdtemperatur

Im Kapitel 1 wurde die Verteilung der jährlich eingestrahnten Sonnenenergie für die Erde gefunden. Diese ist an den Polen geringer als am Äquator. Daraus kann man für die Abhängigkeit der Temperatur in Bodennähe T_{OA} (Oberfläche und Atmosphäre zusammen) von Breitengrad sofort den qualitativen Zusammenhang ableiten, dass diese Temperatur T_{OA} vom Äquator zum Pol abnehmen muss. Der quantitative Zusammenhang wird mit Hilfe der nachfolgenden Berechnung hergestellt. Analog zu Abschnitt 2.1.1 lässt sich die Gleichung für die Bilanz von Ein- und Ausstrahlung schreiben:

$$(1 - A) \cdot P = \sigma \cdot S \cdot T_{OA}^4 \quad (2.1.2a).$$

In der Gleichung (2.1.2a) beschreibt die linke Seite die Strahlungsabsorption des Sonnenlichtes am betreffenden geografischen Breitengrad φ , und die rechte Seite ist die thermische Strahlungsemission an diesem Breitengrad. P ist die eingestrahlte Sonnenleistung auf eine Fläche S am Breitengrad φ .

Durch das Umformen der Gleichung (2.1.2a) nach der gesuchten Temperatur T_{OA} folgt

$$T_{OA} = \left(\frac{(1 - A) \cdot P}{\sigma \cdot S} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{(1 - A) \cdot B}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.1.2b).$$

Dabei wird mit $B = P/S$ die solare Bestrahlungsstärke auf der betrachteten Erdoberfläche bezeichnet. (Die Bestrahlungsstärke B ist der Quotient aus der auf einer Fläche S auftretenden Strahlungsleistung P und der Fläche S). Nachfolgend werden nur 2 Spezialfälle für die Verteilung dieser Temperatur an einem Breitengrad untersucht, nämlich die für die tägliche mittlere Erdtemperatur (T_{OA_t}) und die für die jährliche mittlere Erdtemperatur (T_{OA_j}).

2.1.2.1 Die Verteilung der täglichen mittleren Erdtemperatur

Die tägliche mittlere solare Bestrahlungsstärke B_t an der Erdoberfläche wird folgt berechnet:

$$B_t = \frac{E_{tag}}{S} = \frac{1}{t_{tag}} \cdot \frac{E_{tag}}{S}.$$

Dabei sind E_{tag} und $t_{tag} = 24h$ jeweils die Summe der eingestrahnten Sonnenenergie an einem Tag

und die Dauer eines Tages. Der Ausdruck $\frac{E_{tag}}{S}$ ist die täglich mittlere eingestrahlte Sonnenenergie pro Einheitsfläche ($1m^2$), diese ist identisch mit Ausdruck E , der aus Gleichung (1.2.7c) oder (1.1.7) bestimmt werden kann. Daraus gilt

$$B_t = \frac{E}{t_{tag}} = \frac{2 \cdot P_S}{\omega \cdot t_{tag}} \cdot \left(\sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow B_t = \frac{2 \cdot P_S}{2\pi \cdot t_{tag}} \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow B_t = \frac{P_S}{\pi} \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right) \right) \quad (2.1.2c).$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks $B = B_t$ aus Gleichung (2.1.2c) in Gleichung (2.1.2b) ergibt sich für die tägliche mittlere Erdtemperatur T_{OAt}

$$T_{OAt} = \left(\frac{(1-A) \cdot P_S}{\sigma \cdot \pi} \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \sin \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \cdot \arccos\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.1.2).$$

Die Formelzeichen dieser Gleichung bedeuten:

A ist die Erdalbedo. Für diese prinzipielle Betrachtung verwenden wir modellhaft die durchschnittliche Erdalbedo $A = 0,306$.

$P_S = 1368 \text{ W/m}^2$ ist die Solarkonstante.

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ist Stefan-Boltzmann-Konstante.

$\alpha = \arccos(\sin 23,5^\circ \cdot \cos \frac{n}{365} 360^\circ)$ ist der Sonnenwinkel, wobei n die Summe der Tage ab dem 22.12. ist.

φ ist der Breitengrad.

Aus der Gleichung (2.1.2) ist ersichtlich, dass die Temperatur T_{OAt} eine Funktion von zwei Variablen φ und n ist. Um die Verteilung dieser Temperatur zu visualisieren, wird diese Funktion grafisch dargestellt (Diagramm 2.1.3 a und b).

Aus dem Diagramm 2.1.3 ist ersichtlich, dass die berechneten Temperaturen allgemein unterschätzt werden. Die Temperatur bei niedrigen Breitengraden ist z.B. nicht ganz so niedrig wie hier im vereinfachten Modell ermittelt. An den Polregionen kommt es sogar zu größeren Abweichungen. Die kälteste tägliche mittlere Temperatur am Südpol beträgt ca. -65°C [Dutton 1991], wohingegen die berechnete hier bei -273°C liegt. Dagegen ist die wärmste tägliche mittlere Temperatur am Südpol (ca. 10°C) laut Berechnung, sie beträgt aber tatsächlich ca. -26°C . Diese Abweichungen sind eine Folge der im vereinfachten Modell vernachlässigten Wärmespeicherung in den Geosystemen, der nicht in Rechnung gestellten Wärmetransporterscheinungen in Atmosphäre und Wassermasse der Ozeane und der nicht berücksichtigten Wechselwirkung zwischen Atmosphäre und Strahlung (z.B. Treibhauseffekt). Diese Mängel der Betrachtungen werden Schritt für Schritt in den nächsten Abschnitten beseitigt.

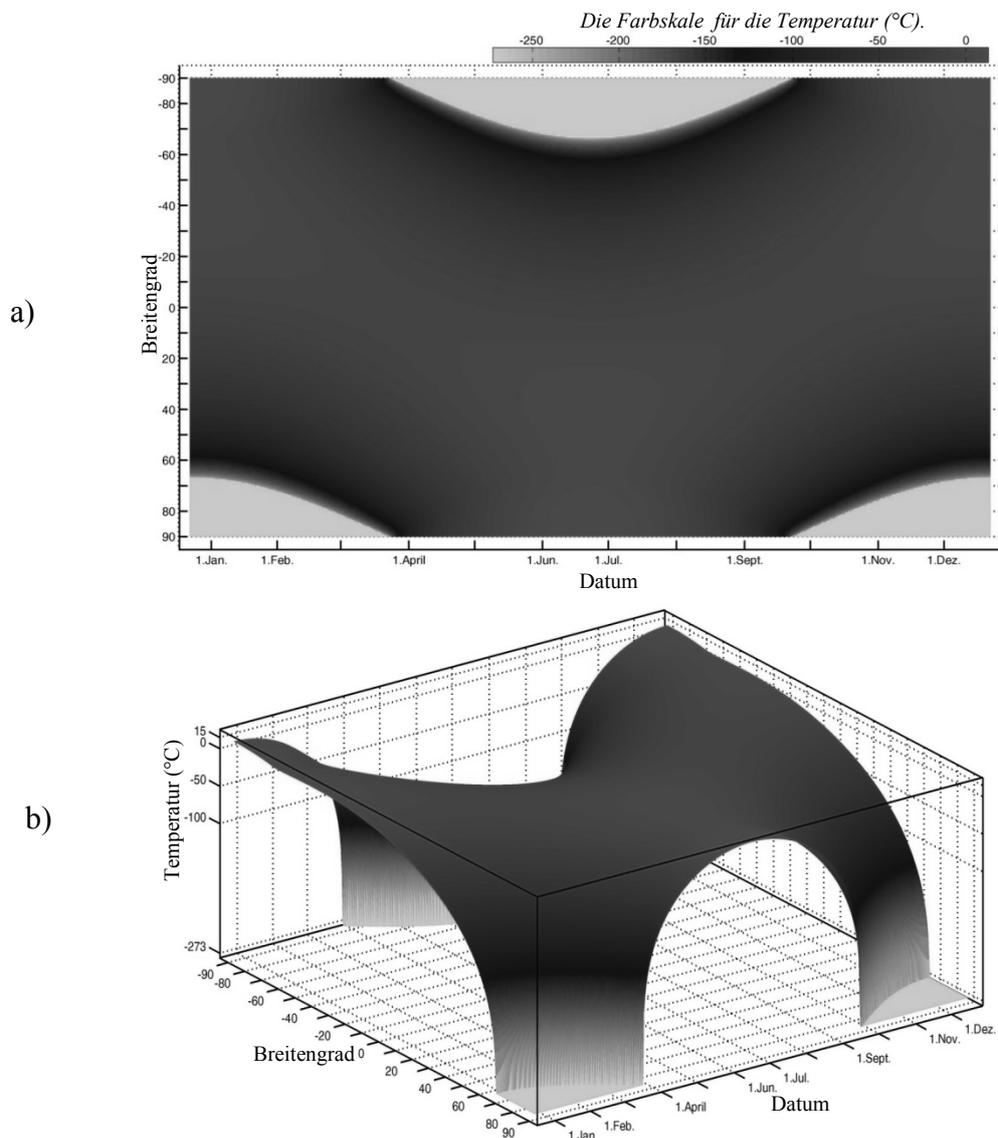


Diagramm 2.1.3: (a Heatmap- und b orthogonale 3D-Art) Verteilung der täglichen mittleren Erdtemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum [A 2.1.2].

2.1.2.2 Verteilung der jährlichen mittleren Erdtemperatur

In der analogen Weise zum Abschnitt 2.1.2.1 erhält man für die jährliche mittlere solare Bestrahlungsstärke B_j an der Erdoberfläche

$$B_j = \frac{E_{\text{jahr}}}{t_{\text{jahr}}} = \frac{1}{t_{\text{jahr}}} \cdot \frac{E_{\text{jahr}}}{S} \quad (2.1.3a).$$

Dabei sind E_{jahr} und $t_{\text{jahr}} = 365 \cdot t_{\text{tag}} = 365 \cdot 24h = 8760h$ jeweils die Summe der eingestrahnten Sonnenenergie in einem Jahr und die Dauer eines Jahres. Es gilt

$$E_{\text{jahr}} = \sum_{n=1}^{365} E_{\text{tag}} \quad (2.1.3b).$$

Dabei ist n die Summe der Tage ab dem 22.12. Durch Einsetzen von der Gleichung (2.1.3b) in die Gleichung (2.1.3a) ergibt sich

$$B_j = \frac{1}{t_{\text{jahr}}} \cdot \frac{1}{S} \cdot \sum_{n=1}^{365} E_{\text{tag}} = \frac{1}{t_{\text{jahr}}} \cdot \sum_{n=1}^{365} \frac{E_{\text{tag}}}{S} \quad (2.1.3c).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichheit der Ausdrücke $\frac{E_{\text{tag}}}{S}$ und E aus Gleichung (1.2.7c) (Analogie zum Abschnitt 2.1.2.1) folgt

$$B_j = \frac{1}{t_{\text{jahr}}} \cdot \sum_{n=1}^{365} E$$

$$\Leftrightarrow B_j = \frac{1}{t_{\text{jahr}}} \cdot \sum_{n=1}^{365} \frac{2 \cdot P_s}{\omega} \cdot \left(\sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow B_j =$$

$$\frac{P_s}{365 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^{365} \left(\sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) \right) \quad (2.1.3d).$$

Durch Einsetzen von Ausdruck $B = B_j$ aus Gleichung (2.1.3d) in Gleichung (2.1.2b.) ergibt sich für die jährliche mittlere Erdtemperatur T_{OAj}

$$T_{OAj} =$$

$$\left(\frac{(1-A) \cdot P_s}{\sigma \cdot 365 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=1}^{365} \left(\sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) - \cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \arccos \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right) \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.1.3).$$

Die Formelzeichen dieser Gleichung bleiben wie die bei Gleichung (2.1.2).

Aus der Gleichung (2.1.3) ist ersichtlich, dass die Temperatur T_{OAj} lediglich eine Funktion der Variablen φ ist. Die Verteilung dieser Temperatur kann grafisch dargestellt werden (Diagramm 2.1.4).

Im Vergleich mit der grafischen Kurve von jährlicher mittlerer Erdtemperatur (s. Abb. 2.5.2) kann man auf dem Diagramm 2.1.4 wieder erkennen, dass diese berechnete Temperatur allgemein unterschätzt wird. Die Abweichung für die jährliche mittlere Temperatur ist jedoch kleiner als für die tägliche mittlere Temperatur, weil bei der jährlichen Berechnung durch Annahme eines Mittelwertes für die Sonneneinstrahlung die jahreszeitlichen Unterschiede (also gerade die Extrema) automatisch wegfallen. Aber auch die hier noch vorkommenden Abweichungen zwischen Modell und Realität werden in den nächsten Abschnitten aufgelöst, indem die Beeinflussung der Atmosphäre Stufe für Stufe in die Betrachtung eingebracht wird.

Im realen Lehr- oder Unterrichtsgeschehen, wird die Lehrperson nach Maßgabe des Lernumfeldes entscheiden, wie weit der Weg einer immer weiter verbesserten Modellbildung mit den Lernenden

fortgegangen werden kann bzw. bis zu welchem Elementarisierungsgrad in der Modellbildung die Unterrichtsziele noch erreicht werden können.

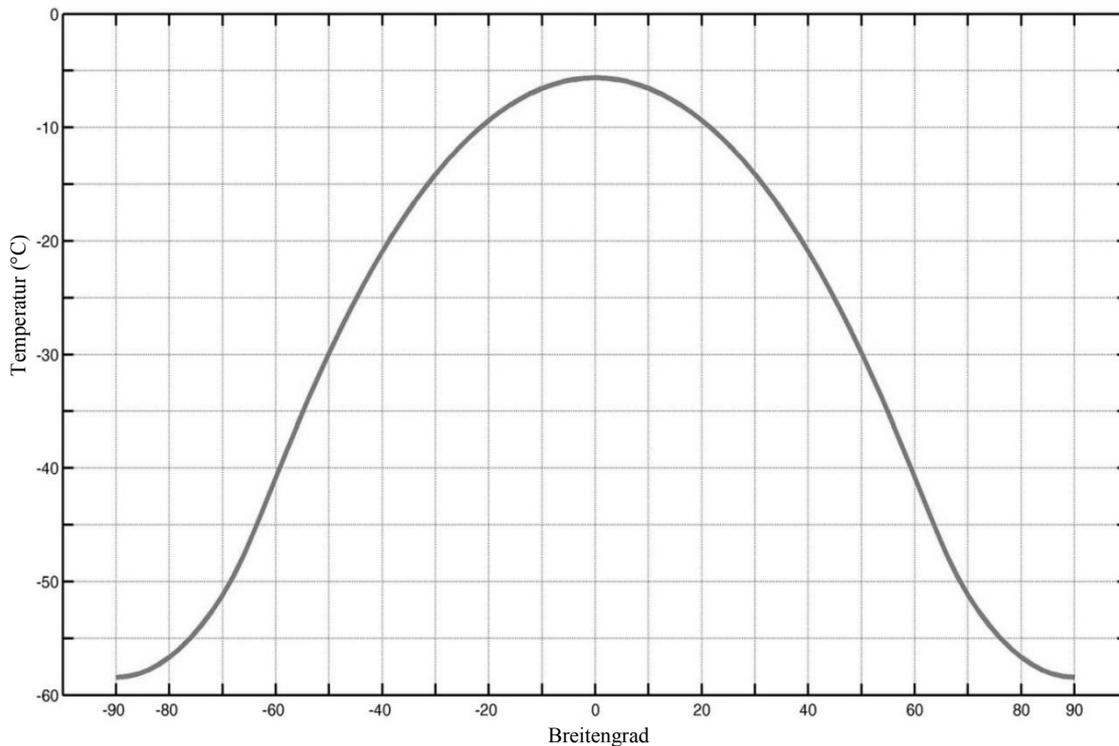


Diagramm 2.1.4: Verteilung der jährlichen mittleren Erdtemperatur in Abhängigkeit vom Breitengrad [A 2.1.3].

2.2 Die Albedo der Erde

Heute kann man die Erdalbedo mit Hilfe von Satelliten bestimmen oder durch komplexe Modelrechnung ermitteln. Das Ziel dieses Abschnittes ist nicht die Bestimmung der genauen Erdalbedo in diesem Sinn, sondern vielmehr die Identifizierung entscheidender Faktoren, die sich auf die Erdalbedo auswirken und die Klärung der Frage, wie man mit Hilfe einer vereinfachten Modellrechnung die Erdalbedo bestimmen kann. Damit können die Lernenden die Prozesse und Mechanismen, die bei der Untersuchung der solaren Einstrahlung und Rückstrahlung auf der Erde wesentlich sind, erfassen.

Die Albedo der Erde A (planetare Albedo) charakterisiert das Rückstreuungsvermögen der Erde. Sie wird durch

$$A = \frac{D_R}{B_{in}}$$

definiert. Dabei sind D_R und B_{in} jeweils die Abstrahlungsstärke der zurückgestreuten Strahlung und die Bestrahlungsstärke der solaren Einstrahlung. Die Abstrahlungsstärke D ist die gesamte Leistung P_{ab} der Abstrahlung pro $1m^2$ der betreffenden Fläche S , also $D = P_{ab}/S$. Die Bestrahlungsstärke B ist die gesamte Leistung P_{in} der Einstrahlung pro $1m^2$ von betreffenden Fläche S , also $B = P_{in}/S$. Nach dem Energieerhaltungssatz muss die von der Erde absorbierte Bestrahlungsstärke durch

$$B_{abs} = B_{in} - D_R = (1 - A) \cdot B_{in}$$

berechnet werden. Somit ist A umso kleiner, je größer die absorbierte Bestrahlungsstärke der Erde ist. Dieser Zusammenhang könnte eine Veränderung der mittleren Erdtemperatur durch Änderung der Albedo bedeuten. Deshalb sind Untersuchungen zur Albedo der Erde notwendig.

Die Albedo A hängt von vielen Faktoren ab. Nachfolgend werden die hauptsächlichsten Einflüsse auf diese Größe untersucht. Dies sind z.B. solche Eigenschaften der Erdatmosphäre wie die optische Wegstrecke des Lichtes in der Gashölle der Erde, die Absorption bzw. die Streuung der Sonnenstrahlen sowie die Wolkenbildung und die Albedo der Erdoberfläche. Die Wolken haben einen sehr großen Einfluss auf das Rückstrahlvermögen, sodass man ihre Wirkung nur durch eine komplexe Modellbildung erfassen kann - was nachfolgend aber auch ausgeführt werden soll. Außerdem wird eine vom Autor entwickelte Simulation vorgestellt, anhand derer man die Zusammenhänge zwischen der Erdalbedo und verschiedenen Einflussfaktoren nachvollziehen kann.

2.2.1 Der Weg der elektromagnetischen Strahlung durch die Erdatmosphäre

2.2.1.1 Berechnung des Lichtwegs

Die Länge des Lichtwegs L_S der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre ist unmittelbar mit dem Grad der Streuung und Absorption der Sonnenstrahlen verknüpft. Sie ist abhängig vom Zenitwinkel θ (s. Abschnitt 1.1.3). Der minimale Lichtweg H_0 in der Erdatmosphäre ist der bei senkrechtem Lichteinfall ($\theta = 0^\circ$) (Abbildung 2.2.1). Andere Lichtwege L_S werden immer länger sein. Um sie zu berechnen wird zweckmäßig die sogenannte Luftmasse K_{lm} eingeführt, die wie folgt definiert ist:

$$K_{lm} = \frac{L_S}{H_0}$$

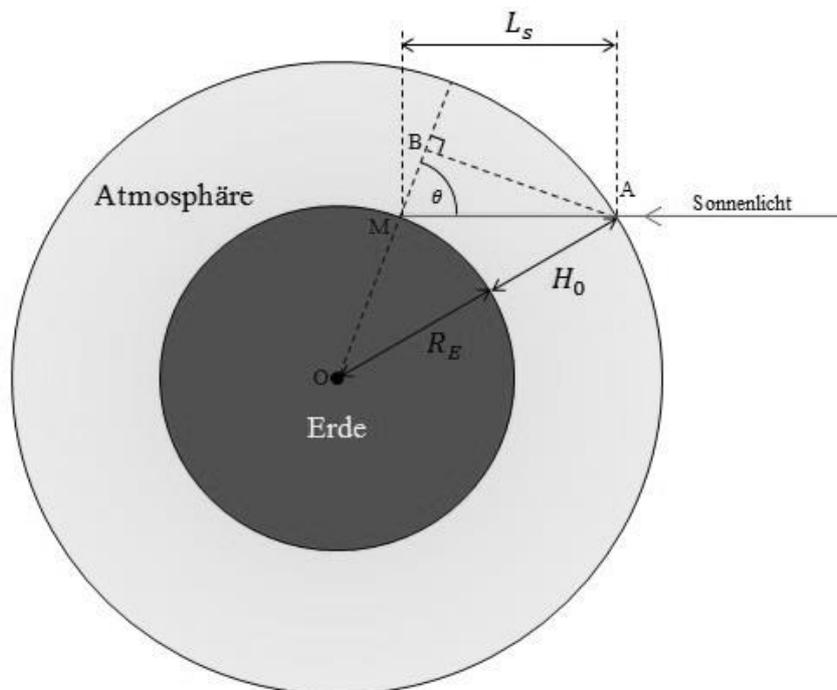


Abbildung 2.2.1: Die Abhängigkeit zwischen dem Lichtweg L_S und dem Zenitwinkel θ .

Aus der Abbildung 2.2.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\overline{OA}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2, \\ \overline{OA} &= R_E + H_0, \\ \overline{AB} &= \overline{MA} \cdot \sin \theta = L_S \cdot \sin \theta, \\ \overline{OB} &= \overline{OM} + \overline{MB} = R_E + \overline{MB}, \\ \text{und } \overline{MB} &= \overline{MA} \cdot \cos \theta = L_S \cdot \cos \theta.\end{aligned}$$

Wobei $R_E = 6371(\text{km})$ der Erdradius ist. Nach Kombination dieser Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned}L_S &= \sqrt{(H_0 + R_E)^2 - R_E^2 \cdot \sin^2 \theta - R_E \cdot \cos \theta} \\ \Rightarrow K_{lm} &= \frac{\sqrt{(H_0 + R_E)^2 - R_E^2 \cdot \sin^2 \theta - R_E \cdot \cos \theta}}{H_0} \quad (2.2.1)\end{aligned}$$

2.2.1.2 Berechnung des minimalen Lichtwegs H_0

Man betrachtet eine so geringe Differenzialhöhe dh , dass die Dichte des Gases ρ innerhalb der Differenzialhöhe dh konstant ist. Dann gilt für die Differenzialmasse der Luft

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot d(S \cdot h) = \rho \cdot S \cdot dh \quad (2.2.2a),$$

und für den Differenzialdruck der Luft

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (2.2.2b).$$

g , V und S sind jeweils die Erdbeschleunigung, das Volumen der Luft und die Größe der Erdoberfläche. Wir nutzen nachfolgend die Tatsache, dass gilt: $l_0 \ll R$, deswegen kann man $g = 9,8(\text{m/s}^2)$ als konstant betrachten.

Nimmt man die Luft als ideales Gas mit einer konstanten Temperatur gleich der durchschnittlichen Temperatur der Erdoberfläche $T = T_0 = 15^\circ\text{C} = 288\text{K}$ an, so gilt

$$\begin{aligned}P \cdot V &= \frac{m}{M} \cdot R_G \cdot T \\ \Rightarrow P \cdot \frac{m}{\rho} &= \frac{m}{M} \cdot R_G \cdot T \\ \Rightarrow P &= \rho \cdot \frac{R_G \cdot T}{M} \quad (2.2.2c).\end{aligned}$$

Dabei sind P , V , m , M und $R_G = 8,314 (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$ jeweils Druck, Volumen, Temperatur, Masse, molare Masse der Luft und universelle Gaskonstante.

Aus der Gleichung (2.2.2b) und (2.2.2c) folgt

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} \cdot dh \\ \Rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} &= -\int \frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} \cdot dh\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln \rho = -\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} \cdot h + C$$

$$\Rightarrow \rho = e^{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} h + C}$$

Dabei ist C eine Konstante. An der Erdoberfläche sind $\rho = \rho_0$ und $h = 0$. Dann gilt

$$\rho = \rho_0 = e^{-\frac{M \cdot g \cdot 0}{R_G \cdot T} + C} = e^C$$

Damit ergibt sich

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} h} \quad (2.2.2d).$$

Aus der Gleichung (2.2.2a) und (2.2.2d) folgt

$$dm = S \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} h + C} \cdot dh.$$

Somit ergibt sich für die Gesamtmasse der isothermen Modellatmosphäre

$$m_A = \int dm = \int_0^{\infty} S \cdot \rho_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} h} \cdot dh$$

$$\Rightarrow m_A = \left. \frac{S \cdot \rho_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} h}}{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T}} \right|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow m_A = S \cdot \rho_0 \cdot \frac{R_G \cdot T}{M \cdot g} \quad (2.2.2e)$$

Unter didaktischen Gesichtspunkten sollte erwähnt werden, dass dieses Ergebnis einfach erhalten werden kann, indem man $P = \frac{m_A \cdot g}{S}$ in die Gleichung (2.2.2c) einsetzt. Wir hingegen haben die Integralrechnung genutzt, weil die Zwischenberechnung (Gleichung (2.2.2d) in nächstem Abschnitt) angewendet wird.

Die Intensität der Sonnenstrahlung infolge von Streuung und Absorption in Atmosphäre hängt von der Anzahl der Moleküle entlang des Lichtweges ab. Nachfolgend wird hier angenommen, dass sie nicht von der Konzentration der Moleküle in einzelnen Luftschichten abhängig ist. Wenn man sich lediglich für den Lichtweg interessiert, kann man die Verteilung der Moleküle entlang des Lichtweges als gleichmäßig betrachten, also eine Atmosphäre mit konstanter Dichte ρ_0 voraussetzen, deren Höhe äquivalent ist zum minimalen Lichtweg H_0 . Dann gilt für die Summengewichte der Atmosphäre

$$m_A = \rho_0 \cdot S \cdot H_0 \quad (2.2.2f)$$

Aus der Gleichung (2.2.2e) und (2.2.2f) erhält man

$$H_0 = \frac{R_G \cdot T}{M \cdot g} \quad (2.2.2g.)$$

Die Luft besteht hauptsächlich aus Stickstoff N_2 (78,09%), Sauerstoff O_2 (20,95%) und Argon Ar (0,93%). Aus den prozentualen Masseanteilen kann die molare Masse M der Luft als gewichteter Mittelwert berechnet werden

$$M = M_{N_2} \cdot \frac{78,09}{100} + M_{O_2} \cdot \frac{20,95}{100} + M_{Ar} \cdot \frac{0,93}{100}$$

$$\Rightarrow M = 28,02(\text{g/mol}) \cdot \frac{78,09}{100} + 32,00(\text{g/mol}) \cdot \frac{20,95}{100} + 39,94(\text{g/mol}) \cdot \frac{0,93}{100}$$

$$\Rightarrow M = 28,97 \left(\frac{\text{g}}{\text{mol}} \right) \quad (2.2.2h).$$

Somit ergibt sich für den Betrag des minimalen Lichtwegs H_0

$$H_0 = \frac{8,314 (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}) \cdot 288(\text{K})}{28,97(\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}) \cdot 9,8(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})}$$

$$H_0 = 8,43\text{km} \quad (2.2.2i)$$

2.2.1.3 Der effektive Lichtweg in einer senkrechten Luftsäule

Zwei Luftsäulen, die jeweils die gleiche Anzahl von Teilchen beinhalten, haben jeweils die Höhe h und \bar{h} (Abbildung 2.2.2). Bei der ersten Luftsäule wird die Luftdichte wie durch die Formel (2.2.2d) beschrieben, verteilt,

$$\rho_1(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R_G \cdot T} h} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{H_0}},$$

während die Verteilung der Dichte der zweiten Luftsäule als gleichmäßig angenommen wird:

$$\rho_2(h) = \rho_0.$$

Weil der Grad der Abschwächung der Strahlungsintensität von der Anzahl der Teilchen in der Luft abhängt, sind die Einflüsse von beiden Luftsäulen auf die Strahlungsintensität gleich, wenn das parallele Lichtbündel jeweils die gesamte Luftsäule durchläuft. Die Höhe \bar{h} ist der effektive Lichtweg in der Luftsäule der Höhe h .

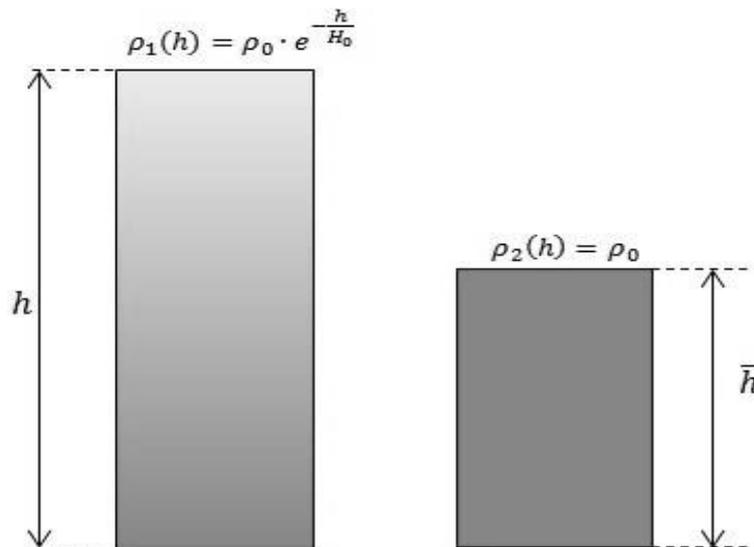


Abbildung 2.2.2: Veranschaulichung der Effektivhöhe einer Luftsäule.
Die Blaufärbung kennzeichnet die Luftdichte.

Da die Anzahl der Teilchen in den zwei Luftsäulen gleich ist, sind die jeweiligen Gesamtmassen gleich. Somit gilt

$$m_1 = m_2$$

Analog zur Berechnung der Masse m_A (s. 2.2.1.2.) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^h S \cdot \rho_1(h) \cdot dh &= \int_0^{\bar{h}} S \cdot \rho_2(h) \cdot dh \\ \Leftrightarrow \int_0^h S \cdot \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{H_0}} \cdot dh &= \int_0^{\bar{h}} S \cdot \rho_0 \cdot dh \\ \Rightarrow \frac{S \cdot \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{H_0}}}{-\frac{1}{H_0}} \Big|_0^h &= S \cdot \rho_0 \cdot \bar{h} \\ \bar{h} &= H_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{h}{H_0}}\right) \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.2.2) beschreibt die Abhängigkeit zwischen dem effektiven Lichtweg und der Höhe der Luftsäule.

2.2.2 Absorption und Streuung der Sonnenstrahlungen in der Luft

Wenn die solare Strahlung in die Atmosphäre eintritt, kommt es zu Wechselwirkungen mit den Molekülen der Luft. Die Sonnenstrahlung wird teilweise von der Luft absorbiert und gestreut. Wenn die Sonnenstrahlen einen Lichtweg L_S zurücklegen, wird die Strahlungsintensität I deshalb abgeschwächt. Die Strahlungsintensität I wird als ein Quotient aus einer Strahlungsleistung dP und einer Fläche dS definiert, also $I = dP/dS$, dabei muss die Fläche dS orthogonal zur Strahlungsausbreitungsrichtung stehen.

Nach dem bouguer-lambert-beerschen Gesetz sind die absorbierte Differenzialintensität dI_{abs} und die gestreute Differenzialintensität dI_{str} proportional zum Differenziallichtweg dl . Es gilt

$$dI_{abs} = -k_{abs} \cdot I \cdot dl \quad (2.2.3a)$$

und

$$dI_{str} = -k_{str} \cdot I \cdot dl \quad (2.2.3b).$$

Wobei wird k_{abs} und k_{str} jeweils den Absorptions- und den Streukoeffizient bezeichnen. Damit folgt für die Summe der Differenzialintensität

$$\begin{aligned} dI &= (dI_{abs} + dI_{str}) = -(k_{abs} + k_{str}) \cdot I \cdot dl \\ \Leftrightarrow dI &= -k_{ext} \cdot I \cdot dl \quad (2.2.3c). \end{aligned}$$

Dabei wird $k_{ext} = k_{abs} + k_{str}$ als Extinktionskoeffizient bezeichnet. In dieser Herleitung wird die Luftdichte ρ_0 als die Konstante betrachtet, deshalb sind die Koeffizienten k_{ext} , k_{abs} und k_{str} konstant. Aus der Gleichung (2.2.3c) kann der Zusammenhang zwischen der Intensität I und dem Lichtweg l gefunden werden

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{I} = -k_{ext} \cdot dl$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \frac{dI}{I} &= \int -k_{ext} \cdot dl \\ \Rightarrow \ln I &= -k_{ext} \cdot l + C \\ \Leftrightarrow I &= e^C \cdot e^{-k_{ext} \cdot l} \end{aligned}$$

Dabei ist C eine Konstante. Sei I_0 die Intensität beim Anfangspunkt des Lichtweg $l = 0$, so folgt

$$I_0 = e^C \cdot e^{-k_{ext} \cdot 0} = e^C.$$

Dann gilt

$$I = I_0 \cdot e^{-k_{ext} \cdot l} = I_0 \cdot e^{-\tau} \quad (2.2.3).$$

Wobei $\tau = k_{ext} \cdot l$ als die optische Dicke bezeichnet wird.

Aus den Gleichungen (2.2.3.) und (2.2.3a) erhält man die absorbierte Intensität

$$\begin{aligned} I_{abs} &= \int_0^l k_{abs} \cdot I \cdot dl = \int_0^l k_{abs} \cdot I_0 \cdot e^{-k_{ext} \cdot l} \cdot dl \\ \Leftrightarrow I_{abs} &= \frac{k_{abs}}{k_{ext}} \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot l}) \quad (2.2.4a). \end{aligned}$$

In Analogie zur absorbierte Intensität gilt für die gestreute Intensität

$$I_{str} = \frac{k_{str}}{k_{ext}} \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot l}) \quad (2.2.4b).$$

Die Koeffizienten k_{ext} , k_{abs} und k_{str} können anhand von spektralen Messungen der Intensitätsverteilung des Sonnenlichts auf seinem Weg durch die Atmosphäre bestimmt werden. Auf Grundlage der Daten aus Quelle [NREL 2012] kann man die Spektren mit hoher Auflösung grafisch darstellen (Diagramm 2.2.1).

Anhand dieses Diagramms kann man die Absorptionsbereiche, die Streubereiche und die Transmissionsbereiche markieren. Im Diagramm 2.2.2 werden die Absorptionsbereiche mit Schwarz, die Streubereiche mit Violett und die Transmissionsbereiche mit Orange dargestellt. Ihre Flächen werden jeweils als S_{abs} , S_{str} und S_{tran} bezeichnet.

Die Flächen S_{abs} , S_{str} , S_{tran} und $S_0 = S_{abs} + S_{str} + S_{tran}$ entsprechen den Intensitäten I_{abs} , I_{str} , I_{tran} und $I_0 = I_{abs} + I_{str} + I_{tran}$. Somit folgt

$$\frac{S_{tran}}{S_0} = \frac{I_{tran}}{I_0}$$

und

$$\frac{S_{abs}}{S_0} = \frac{I_{abs}}{I_0}.$$

Da die Luftmasse $K_{lm} = 1,5$ ist, folgt für den Lichtweg $l = L_S = K_{lm} \cdot H_0 = 1,5 \cdot H_0$. Anhand der Gleichungen (2.2.3) und (2.2.4a) ergibt sich

$$\frac{S_{tran}}{S_0} = \frac{I_0 \cdot e^{-k_{ext} \cdot l}}{I_0} = e^{-k_{ext} \cdot l} = e^{-k_{ext} \cdot 1,5 \cdot H_0}$$

$$\Rightarrow k_{ext} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{S_{tran}}\right)}{1,5 \cdot H_0}$$

und

$$\frac{S_{abs}}{S_0} = \frac{\frac{k_{abs}}{k_{ext}} \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot l})}{I_0} = \frac{k_{abs}}{k_{ext}} \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot l}) = \frac{k_{abs}}{k_{ext}} \cdot \left(1 - \frac{S_{tran}}{S_0}\right)$$

$$\Rightarrow k_{abs} = \frac{S_{abs}}{S_0 - S_{tran}} \cdot k_{ext}$$

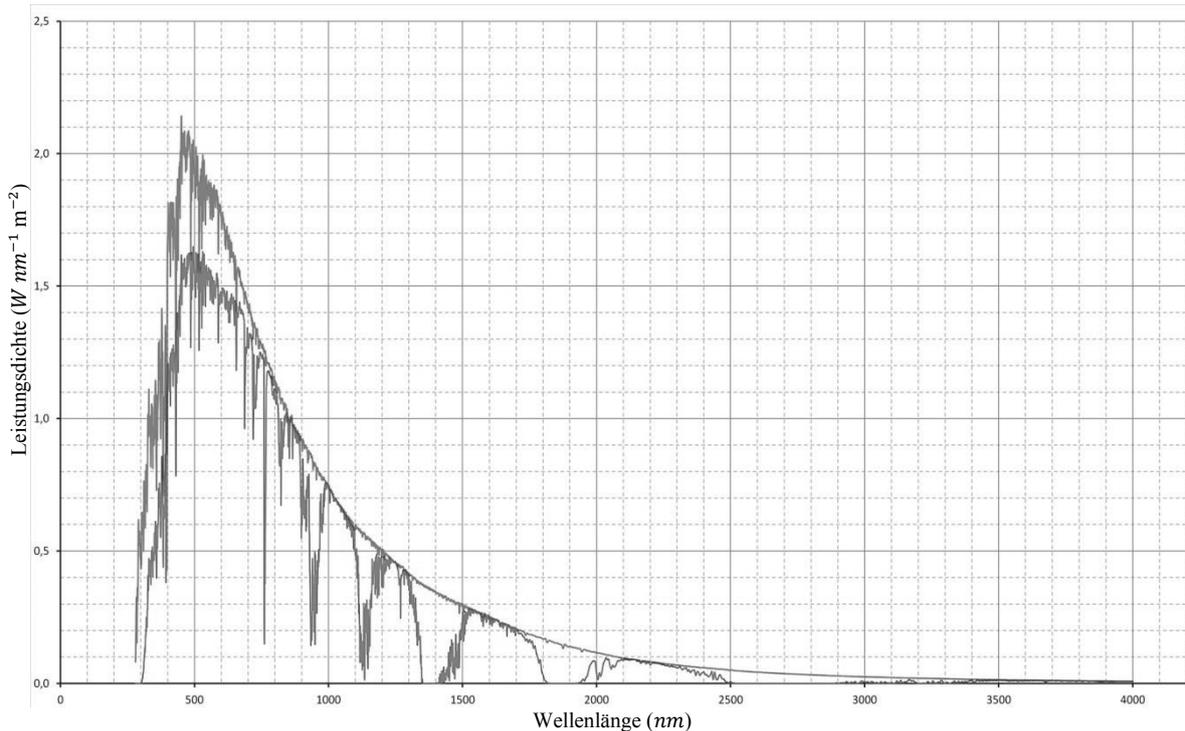


Diagramm 2.2.1: Spektren der solaren Strahlung mit hoher Auflösung. Die rote Kurve ist das Spektrum außerhalb der Erdatmosphäre (Luftmasse $K_{lm} = 0$). Die blaue Kurve ist das Spektrum an der Erdoberfläche (Luftmasse $K_{lm} = 1,5$).

Die Werte von S_{abs} , S_{str} und S_{tran} können graphisch ermittelt werden, indem man die Flächen im Diagramm 2.2.2 mittels kleiner Quadratflächen auszählt. Die Flächen sind proportional zu der Anzahl der Quadrate in den zu messenden Teilflächen. Oder man nutzt entsprechende grafische Software (z.B. Photoshop). Es gilt

$$k_{ext} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{S_{tran}}\right)}{1,5 \cdot H_0} = \frac{\ln\left(\frac{186589 \text{ (Pixel)}}{141409 \text{ (Pixel)}}\right)}{1,5 \cdot 8,43 \text{ (km)}}$$

$$\Rightarrow k_{ext} = 0,0219 \text{ (km}^{-1}\text{)} \quad (2.2.4c)$$

und

$$k_{abs} = \frac{S_{abs}}{S_0 - S_{tran}} \cdot k_{ext} = \frac{23207 \text{ (Pixel)}}{186589 \text{ (Pixel)} - 141409 \text{ (Pixel)}} \cdot 0,0219 \text{ (km}^{-1}\text{)}$$

$$\Rightarrow k_{abs} = 0,0113 \text{ (km}^{-1}\text{)} \quad (2.2.4d)$$

Da $k_{ext} = k_{abs} + k_{str}$ ist, ergibt sich für den Streukoeffizient

$$k_{str} = k_{ext} - k_{abs} = 0,0101 \text{ (km}^{-1}\text{)} \quad (2.3.4e).$$

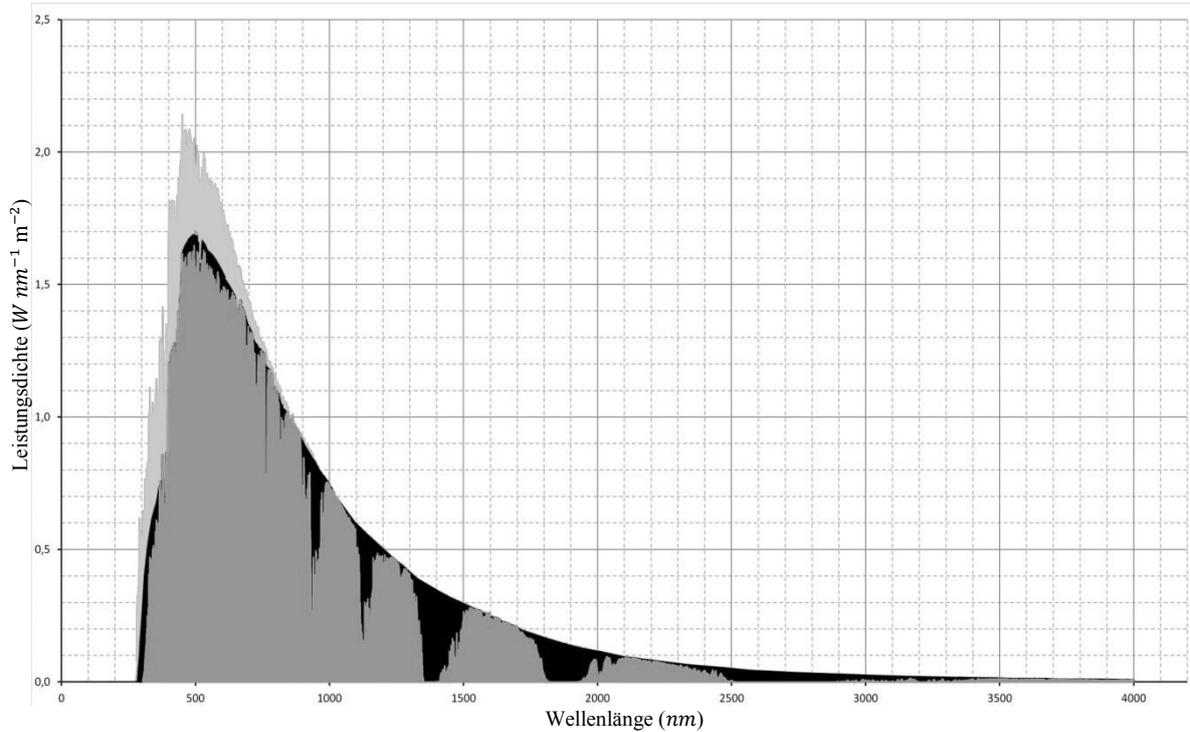


Diagramm 2.2.2: Spektren der solaren Strahlung mit hoher Auflösung. Schwarz, Violett und Orange markieren jeweils die Absorptionsbereiche, die Streubereiche und die Transmissionsbereiche.

2.2.3 Wolken

Der Energiehaushalt der Erde wird von Wolken beeinflusst. Nur wenige Prozent Unterschied in der Wolkenbedeckung haben einen enormen Einfluss auf das Klima.

2.2.3.1 Die Bildung der Wolken

Die Wolken bestehen hauptsächlich aus sehr vielen winzigen Wassertropfen, zum Teil auch aus vielen kleinen Eiskristallen. Diese Teilchen bilden sich, wenn sich der Wasserdampf in der Luft, zumeist durch den konvektiven Aufwind, vertikal nach oben bewegt, dabei abkühlt und in Form von Wassertropfen kondensiert oder unmittelbar durch Resublimation vom gasförmigen auf den festen Aggregatzustand übergeht.

Die Dichte von Wasser oder Eis ist viel größer als die Luftdichte. Trotzdem schweben die Wassertropfen der Wolken in der Luft, weil ihre Größe sehr gering ist. Ihre typischen Durchmesser liegen zwischen

ungefähr $1\mu\text{m}$ bis $15\mu\text{m}$. Nach dem Gesetz von Stokes gilt für die Reibungskraft zwischen Wassertropfen und Luft

$$F_R = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v.$$

Dabei sind r der Radius des Wassertropfens, $\eta = 18 \cdot 10^{-6} \text{ (N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^2\text{)}$ die dynamische Viskosität der Luft und v die Relativgeschwindigkeit zwischen Wassertropfen und Luft. Auf den Wassertropfen wirkt gleichzeitig neben der Reibungskraft auch noch die Auftriebskraft der Luft

$$F_A = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho_L \cdot g$$

und die Gewichtskraft

$$F_G = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho_W \cdot g.$$

Dabei sind $\rho_L = 1,29 \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$, $\rho_W = 10^3 \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$ und $g = 9,8 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$ jeweils Luftdichte, Wasserdichte und Fallbeschleunigung. Nimmt man für das Wassertröpfchen auch noch konstante Geschwindigkeit an, dann muss Kräftegleichgewicht herrschen (Abb. 2.2.3). Es gilt

$$F_G = F_A + F_R$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{2}{9}r^2 \cdot g \cdot \frac{\rho_W - \rho_L}{\eta}.$$

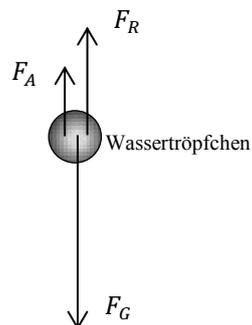


Abbildung 2.2.3: Veranschaulichung des Kräftegleichgewichts an Wassertropfchen von Wolken.

Nach Einsetzen des Radius r zwischen $0,5\mu\text{m}$ bis $7,5\mu\text{m}$ in diese Gleichung erhält man die Geschwindigkeit v der Wassertropfen zwischen $0,3 \text{ (mm} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ bis $6,9 \text{ (mm} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$. Diese Geschwindigkeit ist viel kleiner als die typische Windgeschwindigkeit, deswegen ist sie meist unerheblich. Demnach sind die winzigen Wassertropfen bzw. die Wolken schwebend.

2.2.3.2 Verteilung der Wolken

Charakteristische Eigenschaften der Wolken im Hinblick auf den Bedeckungsgrad, ihre Höhe und die optische Dicke (s. Gleichung (2.2.3)) können durch Satelliten oder Forschungsballone bestimmt werden. Nachfolgend werden längjährige Mittelwerte grafisch dargestellt (Die Werte stammen aus dem „International Satellite Cloud Climatology Project“ [ISCCP 2014] , s. Anhang [A 2.2.1] ...[A 2.2.6]).

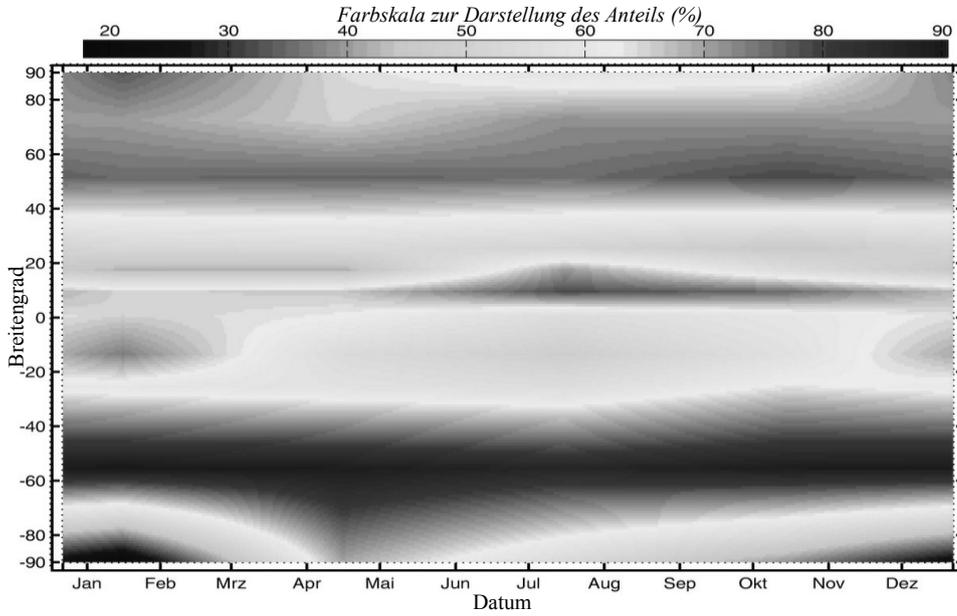


Diagramm 2.2.3: Die Verteilung der Wolkenbedeckung (WD) für Datum und Breitengrad.

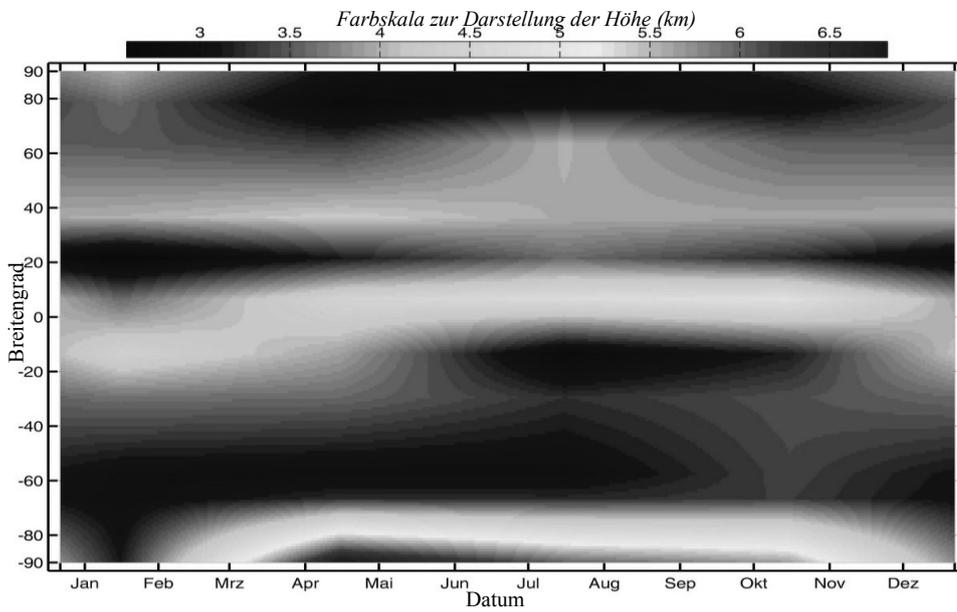


Diagramm 2.2.4: Die Verteilung der Höhe (H_W) der Wolken für Datum und Breitengrad.

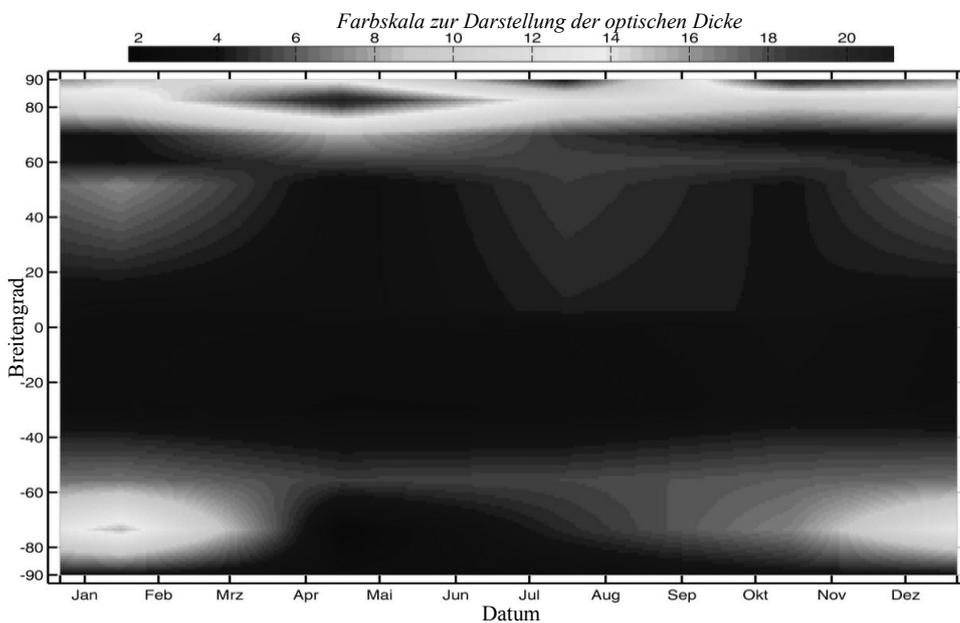


Diagramm 2.2.5: Die Verteilung der optischen Dicke (τ) der Wolken für Datum und Breitengrad.

2.2.3.3 Transmission und Reflektion von solarer Strahlung bei Wolken

Da die Wolken zufällig verteilt sind, nutzt man zweckmäßig ein Modell, das sich auf statistisch ermittelte Daten stützt, in das also die Mittelwerte der physikalischen Größen einfließen. Diese gemittelten Werte muss man aber zunächst berechnen.

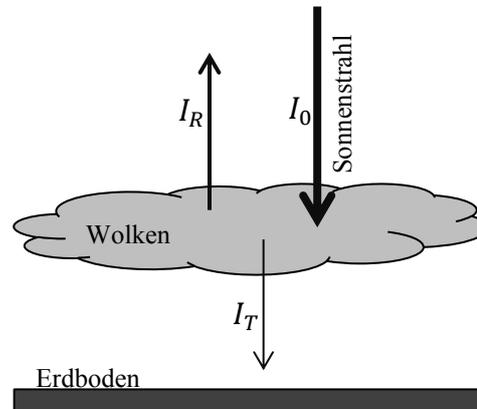


Abbildung 2.2.4: Bezeichnung der Strahlungsintensitäten.

Treffen die Sonnenstrahlen der Intensität I_0 auf die Wolke, so tritt Absorption und Streuung auf. Die Streuung soll allseitig erfolgen. Die Strahlungsintensitäten der Transmission und der Rückstreuung werden hier jeweils mit I_T und I_R bezeichnet (Abb. 2.2.4). Nachfolgend werden die Zusammenhänge zwischen diesen Strahlungsintensitäten untersucht.

2.2.3.3.1 Die Strahlungsintensität der Transmission

Man betrachtet zuerst den vereinfachten Fall, dass alle Strahlenbündel rechtwinklig zum Erdboden verlaufen. Die Intensität der Transmission wird wie bei Gleichung (2.2.3) berechnet

$$I_T = I_0 \cdot e^{-k_{w_{ext}} \cdot d} = I_0 \cdot e^{-\tau}.$$

Dabei wird $\tau = k_{w_{ext}} \cdot d$ als die optische Dicke der Wolke bezeichnet. d und $k_{w_{ext}}$ sind jeweils die Dicke und der Extinktionskoeffizient der Wolke.

Die Wolkendicke d bzw. die optische Dicke τ ist keine Konstante, sondern kann verschiedene Werte annehmen. Wie man anhand der Literatur¹ sieht, kann man für die Verteilung der optischen Dicke τ eine Exponentialfunktion annehmen. Es gilt für Wahrscheinlichkeit von der optischen Dicke τ

$$P(\tau) = a \cdot e^{-b \cdot \tau}.$$

Dabei sind a und b Konstanten. Nach der Normierung von $P(\tau)$ ergibt sich

$$1 = \int_0^{\infty} P(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} a \cdot e^{-b \cdot \tau} = -\frac{a}{b} \cdot e^{-b \cdot \tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow a = b.$$

Der Mittelwert $\bar{\tau}$ der optischen Dicke wird berechnet nach

¹ [Poore 1995], [Wang 2000], [Fischer 2000]

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \int_0^{\infty} \tau \cdot P(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} \tau \cdot a \cdot e^{-a \cdot \tau} \cdot d\tau = \tau \cdot (-e^{-a \cdot \tau}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot (-e^{-a \cdot \tau}) \cdot d\tau \\ &\Rightarrow \bar{\tau} = 0 - \frac{e^{-a \cdot \tau}}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Deshalb schreibt man die Funktion der Wahrscheinlichkeit der optischen Dicke τ in der Form

$$P(\tau) = \frac{1}{\bar{\tau}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}}.$$

Damit ergibt sich für den Mittelwert der Strahlungsintensität der Transmission

$$\begin{aligned}\bar{I}_T &= \int_0^{\infty} I_T \cdot P(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} I_0 \cdot e^{-\tau} \cdot \frac{1}{\bar{\tau}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \cdot d\tau = \frac{I_0}{\bar{\tau}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\tau \cdot (1 + \frac{1}{\bar{\tau}})} \cdot d\tau = \frac{I_0}{\bar{\tau}} \cdot \frac{e^{-\tau \cdot (1 + \frac{1}{\bar{\tau}})}}{-\left(1 + \frac{1}{\bar{\tau}}\right)} \Big|_0^{\infty} \\ &\Rightarrow \bar{I}_T = \frac{I_0}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.2.5a).\end{aligned}$$

Die Mittelwerte von $\bar{\tau}$ werden in der Praxis mit Satelliten gemessen (s. Diagramm 2.2.5), damit kann man \bar{I}_T berechnen. Wenn die Strahlenbündel schräg einfallen (mit einem Zenitwinkel θ), muss diese Gleichung anders geschrieben werden. Es gilt dann für die mittlere Bestrahlungsstärke

$$\bar{B}_T = \frac{B_0}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.2.5).$$

Dabei ist $B_0 = I_0 \cdot \cos \theta$ die solare Bestrahlungsstärke auf den Wolken.

2.2.3.3.2 Die Intensität der rückgestreuten Strahlung

Betrachtet man zuerst alle Strahlenbündel rechtwinklig zum Erdboden, so gilt wegen des Energieerhaltungssatzes

$$\begin{aligned}I_0 &= I_T + I_A + I_R \\ \Leftrightarrow I_R &= I_0 - (I_T + I_A) \\ \Leftrightarrow \bar{I}_R &= I_0 - (\bar{I}_T + \bar{I}_A) \quad (2.2.6a).\end{aligned}$$

Dabei wird mit I_A die von der Wolke absorbierte Strahlungsintensität bezeichnet. Aus Gleichung (2.2.5a) ist \bar{I}_T bekannt. Deshalb muss man nun die Gleichung von \bar{I}_A suchen.

Die Wolke besteht aus Wassertröpfchen, deswegen treten im Spektrum besonders merklich die von Wassermolekülen hervorgerufenen Absorptionsbereiche (Absorptionsbanden) auf. In der Literatur¹ sind die Absorptionsbereiche von Wasser gut dokumentiert (Diagramm 2.2.6a).

Demzufolge kann man einen oberen (Maximal-)wert für I_A berechnen, indem man im Spektrum der solaren Strahlung (Diagramm 2.2.2) die Absorptionsbereiche von Wasser so behandelt, als würde jeweils die Strahlung im entsprechenden Wellenlängenbereich komplett absorbiert (Diagramm 2.2.6b).

¹ [Pettit 1951], [Gates 1966], [Lacis 1974], [Riordan 1986]

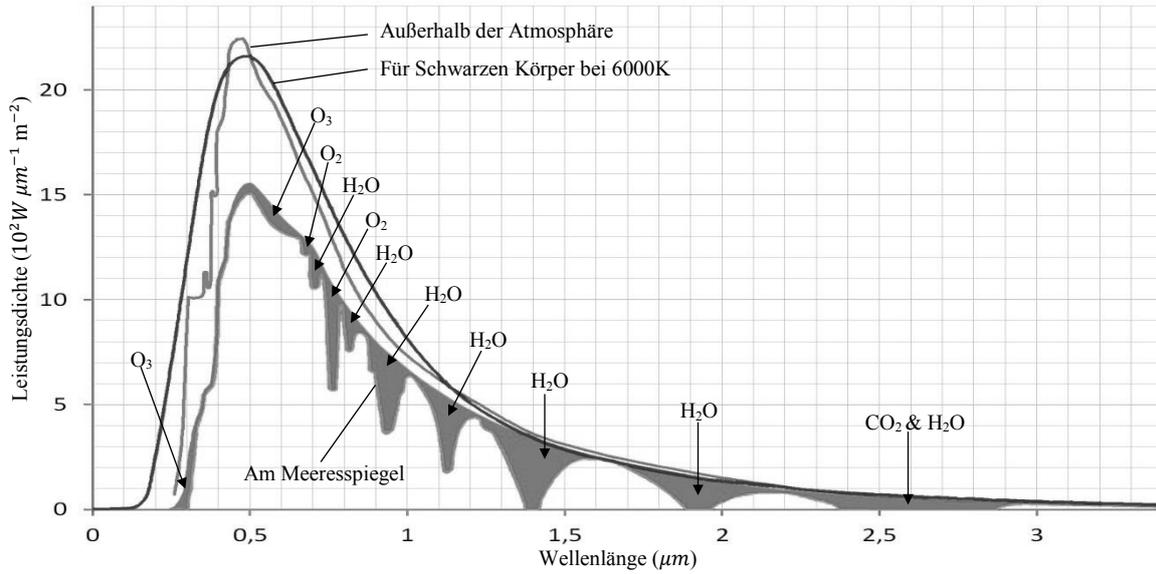


Diagramm 2.2.6a: Ideales Schwarzkörperspektrum, solares Spektrum und Absorptionsspektrum der Atmosphäre (Markiert sind die typischen Absorptionsbereiche einzelner Molekülsorten).

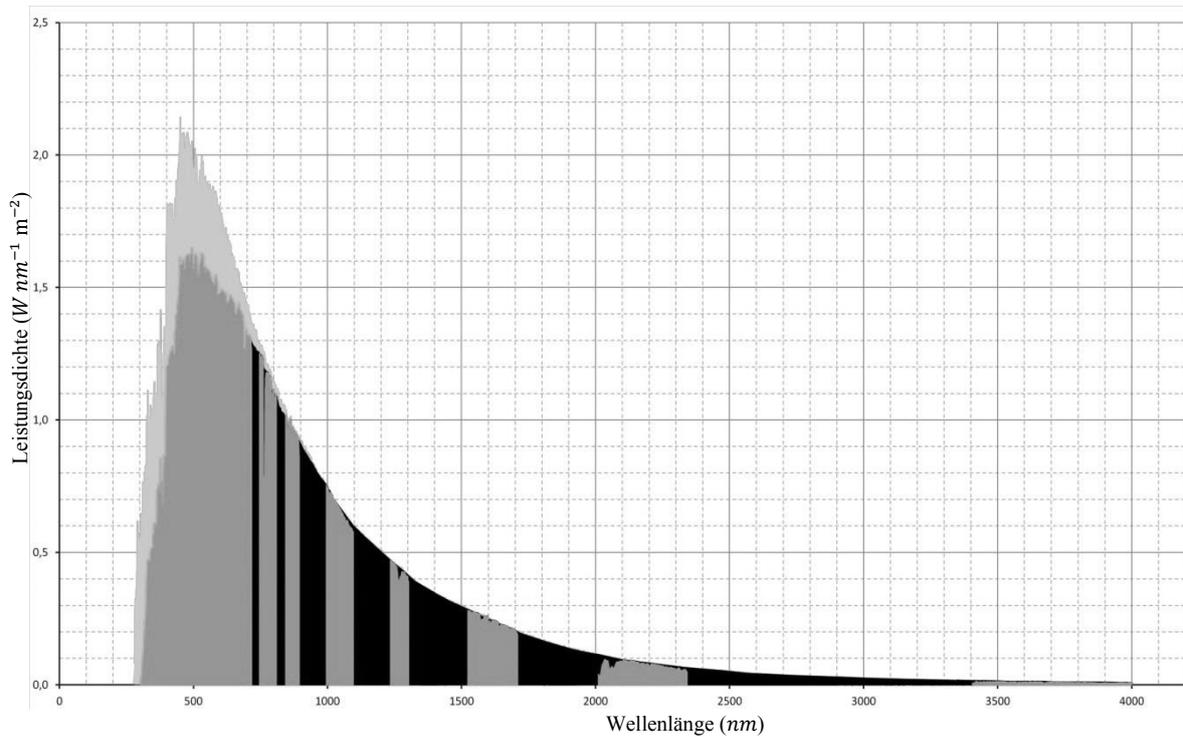


Diagramm 2.2.6b: Idealisierte Spektren der solaren Strahlung bei Wolkenbedeckung, wobei die Strahlung in den Absorptionsbereichen von Wasser komplett absorbiert wird. Schwarz, Violett und Orange markieren jeweils die Absorption in der Wolke, die Streuung in der Luft über der Wolke und Transmission durch die Wolke.

Aus Gleichung (2.2.4a) ergibt sich für die absorbierte Strahlungsintensität I_A

$$I_A = \frac{k_{w abs}}{k_{w ext}} \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-\tau}).$$

Dabei sind $k_{w\,abs}$ und $k_{w\,ext}$ jeweils der Absorptionskoeffizient und der Extinktionskoeffizient von Wolken. Erreicht I_A ein Maximum, so muss die Wolkendicke bzw. die optische Dicke sehr groß sein, d. h. $\tau \rightarrow \infty$. Somit gilt

$$I_{A\,max} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-\tau}) = \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot I_0$$

$$\Rightarrow \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} = \frac{I_{A\,max}}{I_0}$$

Wir nehmen zuerst an, dass die Wolke nur aus Wasserdampf besteht. Dann wird das Spektrum der solaren Strahlung nach Durchlaufen der Wolke wie im Diagramm 2.2.6 vermutet. Dort wird alle Strahlung mit Wellenlängen im Bereich der Absorption von Wasser komplett „herausgefiltert“. Daher gilt

$$\frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} = \frac{I_{A\,max}}{I_0} = \frac{S_A}{S_o}$$

Dabei sind S_A und S_o jeweils die schwarze Fläche und die Summe der schwarzen und orangen Fläche aus Diagramm 2.2.6. Mit Hilfe einer grafischen Software (z.B. Photoshop) ermittelt man

$$\frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} = \frac{S_A}{S_o} = \frac{510394 \text{ (Pixel)}}{1609681 \text{ (Pixel)}} \approx 0,317.$$

In der Praxis bestehen Wolken aus Wasser und Luft. Deswegen muss der Quotient $k_{w\,abs}/k_{w\,ext}$ zwischen k_{abs}/k_{ext} (s. Abschnitt 2.2.2) und 0,317 liegen. Aus didaktischen Erwägungen wird dieser Quotient einfach als ungewichteter Mittelwert von k_{abs}/k_{ext} und 0,317 angenommen, also

$$\frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \approx \frac{\frac{k_{abs}}{k_{ext}} + 0,317}{2} \approx 0,415.$$

Der Mittelwert \bar{I}_A wird folgendermaßen berechnet:

$$\bar{I}_A = \int_0^{\infty} I_A \cdot P(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-\tau}) \cdot \frac{1}{\bar{\tau}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \cdot d\tau$$

$$\Rightarrow \bar{I}_A = \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot \frac{I_0}{\bar{\tau}} \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \cdot d\tau - \int_0^{\infty} e^{-\tau \cdot (1 + \frac{1}{\bar{\tau}})} \cdot d\tau \right) = \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot \frac{I_0}{\bar{\tau}} \cdot \left(-\bar{\tau} \cdot e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-\tau \cdot (1 + \frac{1}{\bar{\tau}})}}{\left(1 + \frac{1}{\bar{\tau}}\right)} \Big|_0^{\infty} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{I}_A = \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot I_0 \cdot \frac{\bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.2.6b).$$

Aus den Gleichungen (2.2.6a) und (2.2.6b) erhält man den Mittelwert der Rückstrahlungsintensität über der Wolke

$$\bar{I}_R = I_0 - \left(\frac{I_0}{1 + \bar{\tau}} + \frac{k_{w\,abs}}{k_{w\,ext}} \cdot \frac{I_0 \cdot \bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{I}_R \approx 0,585 \cdot I_0 \cdot \frac{\bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.2.6c).$$

Wenn die Strahlenbündel schräg mit einem Zenitwinkel θ einfallen, muss diese Gleichung anders geschrieben werden. Es gilt für den Mittelwert der Abstrahlungsstärke \bar{D}_R des Rückstrahls über den Wolken

$$\bar{D}_R \approx 0,585 \cdot B_0 \cdot \frac{\bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.2.6).$$

Dabei ist $B_0 = I_0 \cdot \cos \theta$ die Bestrahlungsstärke die solare Einstrahlung auf die Wolkenoberseite.

2.2.4 Die Verteilung der Albedo der Erdoberfläche

Die Erdoberfläche besteht aus verschiedenem Material. Jedes Material hat eine eigene Albedo. Die Tabelle 2.2.1 (aus der Literatur [Dobos 2006]) zeigt die Größenordnung der Albedo für einige Oberflächenarten.

Material	Albedo
Wald	0,05–0,2
Rasen und Felder	0,1–0,25
Dunkles Erdreich	0,1–0,2
Helles Erdreich	0,4–0,5
Trockenes sandiges Erdreich	0,25–0,45
Trockenes Lehm	0,15–0,35
Sand	0,2–0,4
Granit	0,3–0,35
Gletscher	0,3–0,4
Trockenes salzig Fläche	0,5
Frischer Schnee	0,9
Wasser	0,1–1

Tabelle 2.2.1: Die angenäherten Wertebereiche der (geometrischen) Albedo für verschiedene Oberflächenarten.

Da die Erde zu mehr als 70% von Wasser bedeckt ist, soll nachfolgend die Albedo von Wasser favorisiert untersucht werden. Die Albedo von Gewässern mit dem tiefen oder dunklen Grund (z.B. Meere, Seen oder Flüsse) wird berechnet nach

$$A_{EO} = \frac{D_R}{B_{in}}$$

Dabei werden mit B_{in} und D_R jeweils die Bestrahlungsstärke der Einstrahlung und die Abstrahlungsstärke der Rückstrahlung bezeichnet (Abb. 2.2.5).

Der Zusammenhang zwischen dem Zenitwinkel θ und dem Brechungswinkel θ' kann durch das Brechungsgesetz ermittelt werden

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = n_W$$

$$\Rightarrow \theta' = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n_W}\right) \quad (2.2.7a).$$

Dabei ist $n_W \approx 4/3$ der Brechungsindex von Wasser.

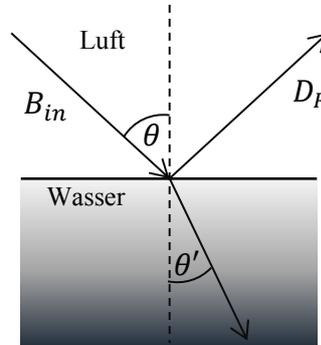


Abbildung 2.2.5: Reflexion und Brechung an einer Wasserfläche.

Nach den fresnelschen Formeln gilt

$$\frac{E_{o_{R_s}}}{E_{o_{in_s}}} = -\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')}$$

und

$$\frac{E_{o_{R_p}}}{E_{o_{in_p}}} = -\frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')}.$$

Dabei sind $E_{o_{in}}$ und E_{o_R} jeweils die Amplituden der elektrischen Feldstärke \vec{E} von Einstrahlung und Rückstrahlung. Mit den Indizes s und p werden die polarisierten Richtungen von \vec{E} jeweils senkrecht und parallel zur Einfallsebene bezeichnet.

Da die Bestrahlungsstärke bzw. Abstrahlungsstärke proportional zum Quadrat der Amplituden der elektrischen Feldstärke \vec{E} ist, gilt

$$A_{EO} = \frac{D_R}{B_{in}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{B_{R_s}}{B_{in_s}} + \frac{B_{R_p}}{B_{in_p}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{E_{o_{R_s}}}{E_{o_{in_s}}} \right)^2 + \left(\frac{E_{o_{R_p}}}{E_{o_{in_p}}} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow A_{EO} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')} \right)^2 + \left(\frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')} \right)^2 \right) \quad (2.2.7b)$$

Aus den Gleichungen (1.2.3), (2.2.7a) und (2.2.7b) kann man die Albedo von Gewässern an einem beliebigen geografischen Ort für eine beliebige Zeit berechnen. Daher kann die tägliche mittlere Albedo berechnet werden

$$\bar{A}_{EO} = \frac{\int_{T_A}^{T_U} A_{EO} \cdot \cos \theta \cdot dt}{\int_{T_A}^{T_U} \cos \theta \cdot dt}$$

Dabei werden mit T_A und T_U jeweils die Zeitpunkte von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bezeichnet. Durch Programmierung mit einem Computer (s. Anhang [A 2.2.7] und [A 2.2.8]) kann man den Verlauf der täglichen mittleren Albedo mit dem geografischen Breitengrad und dem Datum grafisch darstellen (Diagramm 2.2.7).

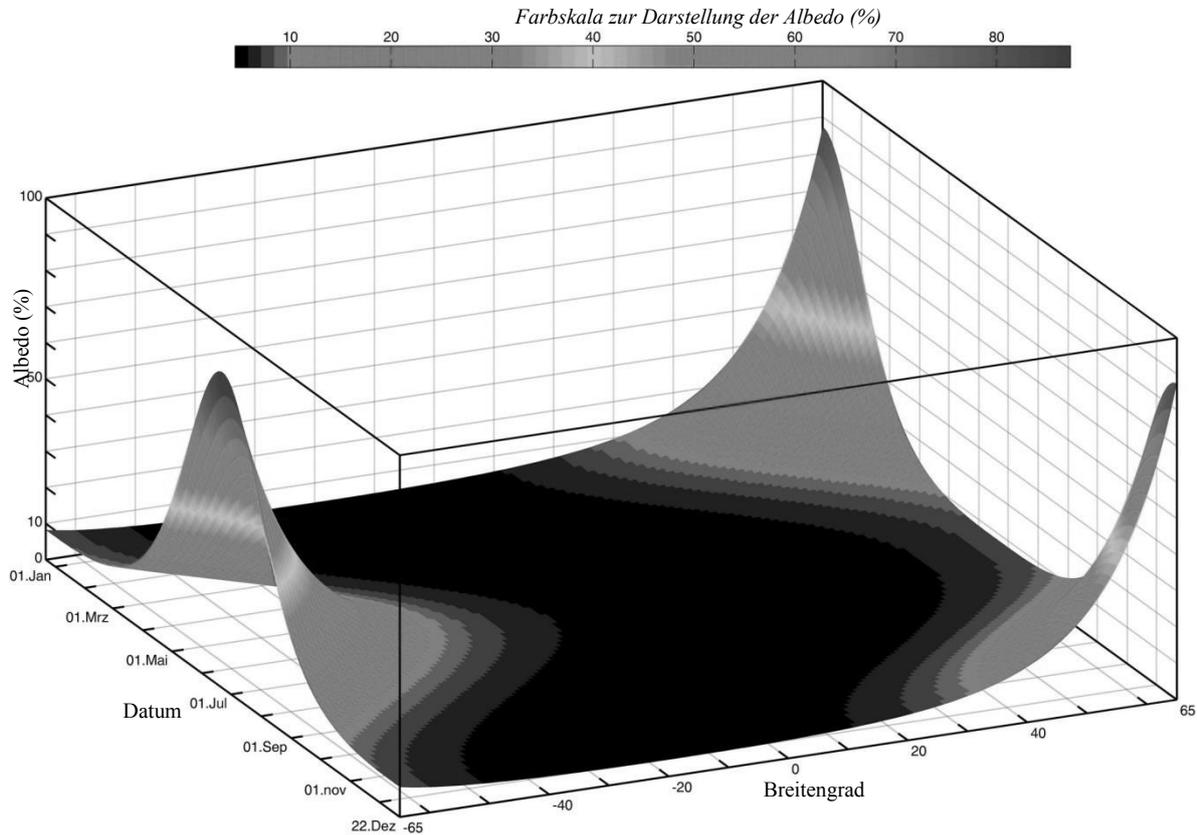


Abbildung 2.2.7: (Orthogonales 3-D- Diagramm) Verlauf der täglichen mittleren Albedo von Gewässern in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum ([A 2.2.7] und [A 2.2.8]).

Aus dem Diagramm 2.2.4 ist ersichtlich, dass die tägliche mittlere Albedo von Gewässern zwischen Breitengrad ca. -30° bis 30° immer kleiner als 10% ist, während sie an einem Breitengrad ungefähr/kleiner als -50° und größer als 50° merklich vom Datum abhängt. Im Winter ist sie relativ groß bei höheren geografischen Breiten. Diese Bemerkung kann auf einfache Weise qualitativ erklärt werden: je größer der Einfallswinkel ist, desto stärker wird die Reflexionsintensität. Weil der Zenitwinkel θ allgemein im Winter größer als im Sommer ist, ist der Grad der Reflexion im Winter stärker als im Sommer. Das führt dazu, dass die Albedo allgemein größer im Winter als im Sommer ist. Da die Schwankung des Zenitwinkels zwischen Winter und Sommer stärker in hohen Breiten ausfällt als in niedrigen Breiten, ergibt sich eine größere Winter-Sommer-Schwankung der Albedo für hohe geographische Breiten als für kleinere geographische Breiten.

Um die allgemeine Albedo der real aus Wasser und festen Stoffen zusammengesetzten Erdoberfläche zu ermitteln muss man mittels Wetterballonen, Flugzeugen, Satelliten ... messen. Das Diagramm 2.2.8 stellt

den Verlauf der Albedo der Erdoberfläche in Abhängigkeit vom Datum und vom geografischen Breitengrad aus Quelle [ISCCP 2014] dar.

Aus dem Diagramm 2.2.8 kann man erkennen, dass die Verteilung der Albedo zwischen südlicher und nördlicher Polnähe verschieden ist. Die Antarktis ist permanent von Eis und Schnee bedeckt. Selbst im Sommer auf der Südhalbkugel ist dort das Gelände mit Schnee bedeckt. Deswegen ist die Albedo in südlicher Polnähe über die Jahreszeiten hinweg nicht viel verändert [Sellers 1982]. Im Gegensatz dazu variiert die Schnee- und Eisfläche an der nördlichen Polregion mit den Jahreszeiten. Im Sommer verkleinert sich die Schnee- und Eisfläche, daher nimmt die Albedo allgemein ab. Eine Zunahme der Albedo in der nördlichen Polnähe wird dann im Winter bewirkt, weil die Schnee- und Eisfläche sich vergrößert.

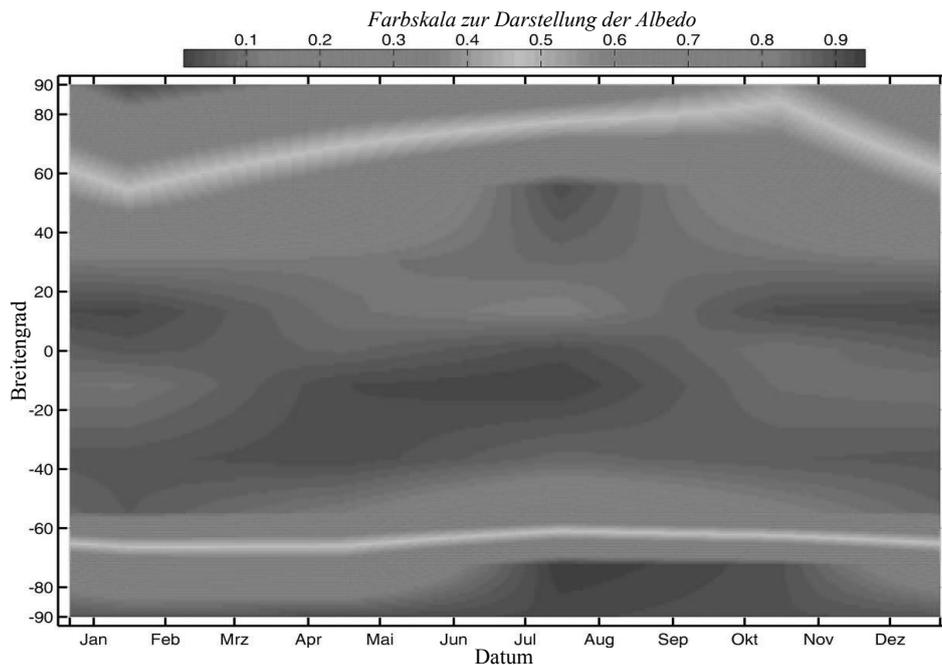


Diagramm 2.2.8: Die Verteilung der Albedo der Erdoberfläche für Datum und Breitengrad ([A 2.2.9] und [A 2.2.10]).

Darüber hinaus kann man anhand des Diagramms erkennen, dass die Schnee- und Eisfläche bzw. die Albedo der nördlichen Polregion nicht genau mit der eingestrahlten Sonnenenergie (s. Abb. 1.2.18) variiert, sondern dass es eine Verzögerung von ca. 2 Monaten gibt. Dies kann damit erklärt werden, dass das Anwachsen und Abschmelzen der großen Eisflächen immer eine gewisse Zeit benötigt und nicht schlagartig mit einer verminderten bzw. vergrößerten Sonneneinstrahlung einhergeht.

2.2.5 Ermittlung der allgemeinen Erdalbedo

2.2.5.1 Solare Bestrahlungsstärke

Die Intensität I_0 der solaren Einstrahlung an der Oberfläche der Erdatmosphäre ist identisch mit der Solarkonstante P_s . Sie wird berechnet nach

$$I_0 = P_s = \frac{L}{4\pi \cdot R^2}$$

Hierbei ist $L = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$ die Leuchtkraft der Sonne, also die gesamte in allen Richtungen abgestrahlte Leistung der Sonne, und $R = 1(AE) \approx 149597871(\text{ km})$ der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde. Die Bestrahlungsstärke der solaren Einstrahlung an der Oberfläche der Erdatmosphäre wird berechnet nach

$$B_{in} = I_0 \cdot \cos \theta = \frac{L}{4\pi R^2} \cdot \cos \theta \quad (2.2.8)$$

wobei θ der Zenitwinkel ist, der mit dem geografischen Breitengrad und der Zeit variiert. Dieser kann aus Gleichung (1.2.3) bestimmt werden.

2.2.5.2 Abstrahlungsstärke der solaren Rückstrahlung

Nach der Definition von A muss man die Intensität der Rückstrahlung und der Einstrahlung untersuchen. Da die Intensität der solaren Einstrahlung bekannt ist, muss man nur die Rückstrahlung von der Erde bestimmen.

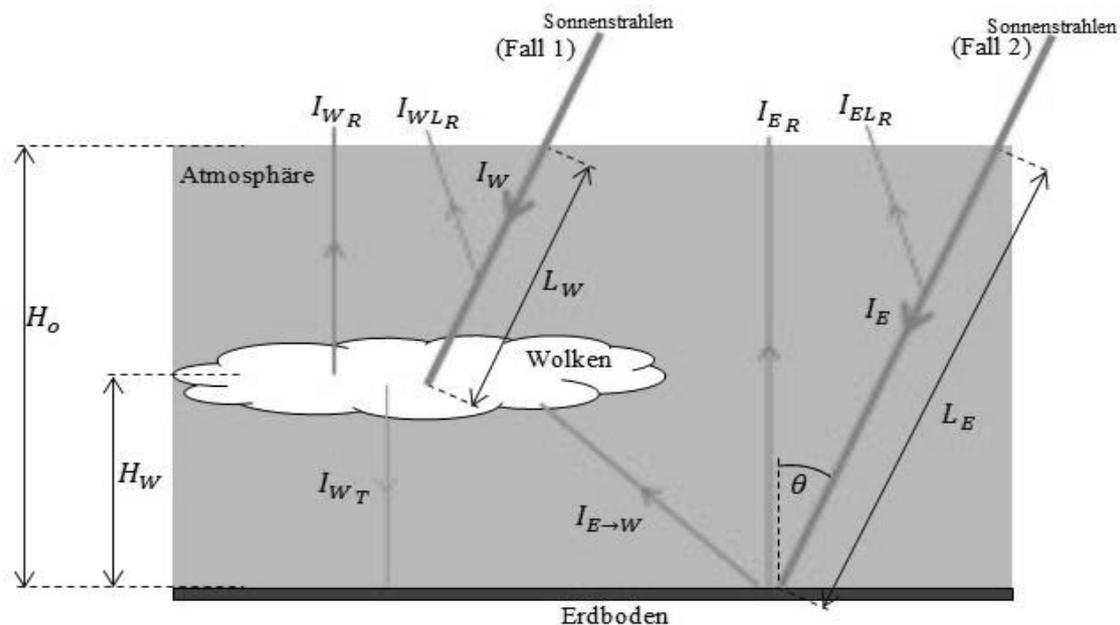


Abbildung 2.2.6: Zur Berechnung der Erdalbedo.

Bei dieser Berechnung analysiert man die Absorption und die Streuung des Sonnenlichtes in den Wolken und in der Luft, deswegen ist die Strahlungsintensität am Anfang des Lichtwegs größer als am Ende. Deshalb werden nachfolgend die Indizes 1 und 2 jeweils für die Strahlungsintensität am Anfang und am Ende des Lichtwegs verwendet.

Für die Sonnenstrahlung mit der Intensität I_0 an der Oberseite der Erdatmosphäre, sind prinzipiell zwei idealisierte Fälle möglich: Die Sonnenstrahlen treffen entweder auf eine Wolke (Fall 1) oder sie treffen auf den Erdboden (Fall 2) (Abb. 2.2.6).

2.2.5.2.1 Rückstrahlung aus den Wolken

Nachfolgend bezeichnen wir mit WD den Grad der Wolkenbedeckung (s. Diagramm 2.2.3), der angibt, wie hoch der relative Flächenanteil am Erdboden ist, der von Sonnenstrahlen nicht direkt getroffen wird. Um diesen Wert muss die solare Strahlungsintensität gemindert werden. Damit gilt für den Mittelwert der einfallenden Intensität \bar{I}_{W1} an der Oberfläche von Erdatmosphäre

$$\bar{I}_{W1} = WD \cdot I_0 \quad (2.2.9a)$$

Anhand der Gleichung (2.2.3) ergibt sich für die Intensität dieser Strahlen an der Wolke

$$I_{W2} = I_{W1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot L_W}$$

Dabei ist L_W der solare Lichtweg von der Oberfläche der Atmosphäre bis zur Wolke (Abb. 2.2.6). Es gilt

$$L_W = L_s \cdot \frac{H_0 - H_W}{H_0} = K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)$$

Dabei ist H_W die Höhe von Wolke (s. Diagramm 2.2.4). $L_s = K_{lm} \cdot H_0$ ist der solare Lichtweg für den Fall 2. K_{lm} und H_0 werden jeweils aus Gleichungen (2.2.1) und (2.2.2i) ermittelt. Dann gilt

$$I_{W2} = I_{W1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)} \quad (2.2.9b).$$

Die Strahlungsintensität der Transmission I_{W_T} durch die Wolke ist relativ klein und kann vernachlässigt werden. Daher kann man einsehen, dass für die Rückstrahlung ins Weltall die Transmission durch die Wolke (I_{W_T}) keine Rolle spielt. Deswegen muss man bei diesem Fall nur die unmittelbare Rückstrahlung an den Wolken betrachten. Die mittlere Abstrahlungsstärke \bar{D}_{WR1} an den Wolken kann anhand der Gleichung (2.2.6) bestimmt werden zu

$$\bar{D}_{WR1} \approx 0,585 \cdot B_{W2} \cdot \frac{\bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}} = 0,585 \cdot I_{W2} \cdot \cos \theta \cdot \frac{\bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.2.9c).$$

Wenn die Rückstrahlung annähernd parallel zur solaren Einstrahlung wäre, würde die Berechnung für die Abstrahlungsstärke D_{WR} der Rückstrahlen analog wie für die Berechnung bei der Gleichung (2.2.8) übertragbar sein, also $D_{WR} = I_{WR2} \cdot \cos \theta$. In der Praxis sind die Rückstrahlungen aus den Wolken nicht unbedingt parallel, sondern werden nach dem Streuungsgesetz verteilt. Aus der Literatur [Bohren 1983] ist ersichtlich, dass die Verteilung der Intensität der Rückstrahlung auf relativ komplizierte Weise von der Größe der Wassertröpfchen und der Wellenlängenverteilung der Sonnenstrahlen abhängt. Wenn die Dicke bzw. die optische Dicke der Wolken genug groß ist, kann man diese Verteilung aber vereinfachend nach dem Lambertschen Gesetz annehmen.

Nach Abb. 2.2.7 und nach dem Lambertschen Gesetz kann man die Abhängigkeit der Strahlungsintensität aus einer kleinen Wolkenoberfläche S_0 zwischen dem normalen Rückstrahl $I_{WR}(0)$ und dem schrägen Rückstrahl $I_{WR}(\alpha)$ schreiben:

$$I_{WR}(\alpha) = I_{WR}(0) \cdot \cos \alpha.$$

Wir betrachten eine Halbkugel mit dem Radius r , der gleich ist zur Differenzhöhe zwischen der oberen Atmosphärenengrenze und der Wolke, also $r = H_0 - H_W$. Die „Mitte“ der Halbkugel (Abb. 2.28) ist identisch mit der Mitte der Fläche S_0 . Man wählt einen Differenzialwinkel $d\alpha$ so klein, dass $I_{WR}(\alpha)$ als

konstant in Bereich $d\alpha$ angesehen werden kann (Abb. 2.2.8). Der Differenzialwinkel $d\alpha$ definiert ein Differenzialflächenelement dS auf der Halbkugel, in der Abb. 2.2.8 sind $d\alpha$ und dS stark vergrößert veranschaulicht. Es gilt

$$dS = 2\pi \cdot r^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

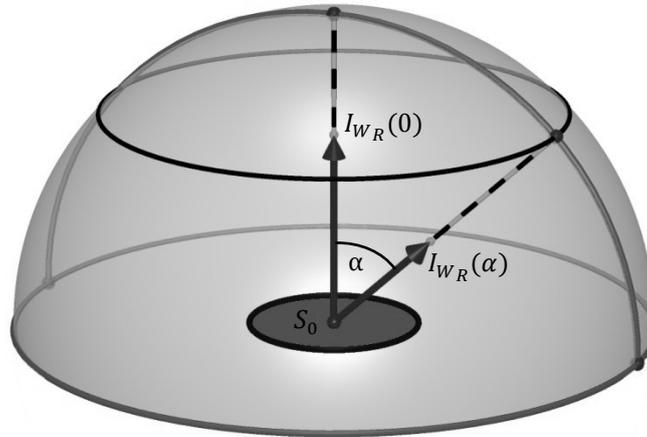


Abbildung 2.2.7: Veranschaulichung des Lambert'schen Gesetzes.

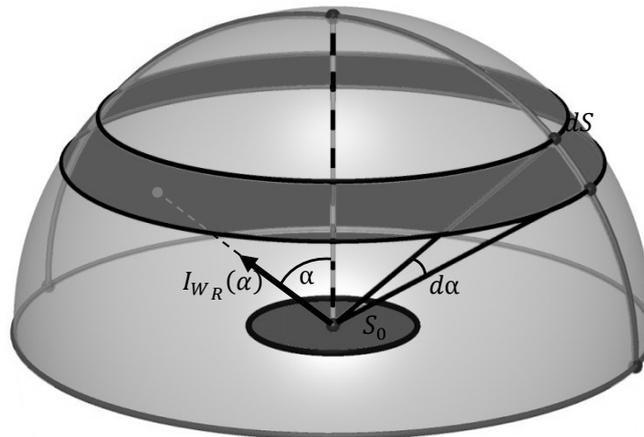


Abbildung 2.2.8: Zur Berechnung der Bestrahlung auf eine Einheitsfläche.

Für eine vereinfachte Betrachtung nehmen wir zuerst an, dass es keine Extinktion der Strahlung in der Atmosphäre geben soll. Dann gilt für die gesamte Abstrahlungsstärke der Rückstrahlung aus der Wolkenoberfläche S_0

$$D_{WR1} \cdot S_0 = \int dP_2$$

Dabei ist $dP_2 = I_{WR2}(\alpha) \cdot dS$ die Leistung der Rückstrahlung aus S_0 auf der kleinen Fläche dS . Somit gilt

$$D_{WR1} \cdot S_0 = \int I_{WR2}(\alpha) \cdot dS = \int_0^{\pi/2} I_{WR2}(0) \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{WR1} \cdot S_0 &= \pi \cdot r^2 \cdot I_{WR2}(0) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha \cdot d\alpha = \pi \cdot r^2 \cdot I_{WR2}(0) \cdot \left. \frac{-\cos 2\alpha}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot r^2 \cdot I_{WR2}(0) \\ \Rightarrow I_{WR2}(0) &= \frac{D_{WR1} \cdot S_0}{\pi \cdot r^2}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den schrägen Rückstrahl $I_{R2}(\alpha)$

$$I_{WR2}(\alpha) = I_{WR2}(0) \cdot \cos \alpha = \frac{D_{WR1} \cdot S_0}{\pi \cdot r^2} \cdot \cos \alpha.$$

In der Praxis wird ein Teil der Intensitäten von der Atmosphäre absorbiert und gestreut. Nach dem bouguer-lambert-beerschen Gesetz (s. Abschnitt 2.2.2) muss man die Intensität $I_{WR2}(\alpha)$ wie folgt schreiben:

$$I_{WR2}(\alpha) = \frac{D_{WR1} \cdot S_0}{\pi \cdot r^2} \cdot \cos \alpha \cdot e^{-k_{ext} \cdot l(\alpha)}.$$

Dabei ist $l(\alpha) = r / \cos \alpha$ die Strecke, auf der sich die Strahlen von der Wolkenoberfläche S_0 bis zur oberen Atmosphäre längs der Richtung α ausbreiten. Daher kann man die Abstrahlungsstärke D_{WR2} an der oberen Atmosphäre mit folgender Gleichung berechnen

$$\begin{aligned} D_{WR2} \cdot S_0 &= \int I_{WR2}(\alpha) \cdot dS = \int_0^{\pi/2} \frac{D_{WR1} \cdot S_0}{\pi \cdot r^2} \cdot \cos \alpha \cdot e^{-\frac{k_{ext} \cdot r}{\cos \alpha}} \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \\ \Rightarrow D_{WR2} &= 2D_{WR1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot e^{-\frac{k_{ext} \cdot r}{\cos \alpha}} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = 2D_{WR1} \cdot \int_0^1 x \cdot e^{-\frac{k_{ext} \cdot r}{x}} \cdot dx \end{aligned}$$

Das Integral $I = \int_0^1 x \cdot e^{-\frac{a}{x}} \cdot dx \approx e^{-a} \cdot \frac{1-a}{2}$ wenn $0 < a \ll 1$. Da ist $k_{ext} \cdot r$ positiv und $r < H_0 = 8,43 \text{ km}$, $k_{ext} \approx 0,0233 \text{ (km}^{-1}\text{)}$, dann erfüllt $0 < k_{ext} \cdot r \ll 1$. Deshalb ergibt sich

$$D_{WR2} = 2D_{WR1} \cdot \int_0^1 x \cdot e^{-\frac{k_{ext} \cdot r}{x}} \cdot dx \approx 2D_{WR1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot r} \cdot \frac{1 - k_{ext} \cdot r}{2}$$

$$\Rightarrow D_{WR2} \approx D_{WR1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot r} \cdot (1 - k_{ext} \cdot r)$$

$$\Leftrightarrow D_{WR2} \approx D_{WR1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot (H_0 - H_W)} \cdot (1 - k_{ext} \cdot (H_0 - H_W)) \quad (2.2.9d)$$

Aus den Gleichungen (2.2.8), (2.2.9a), (2.2.9b), (2.2.9c) und (2.2.9d) folgt für den Mittelwert der Abstrahlungsstärke \bar{D}_{WR2} an der oberen Atmosphäre

$$\bar{D}_{WR2} \approx 0,585(1 - k_{ext} \cdot (H_0 - H_W)) \cdot \frac{\bar{\tau} \cdot WD}{1 + \bar{\tau}} \cdot e^{-k_{ext} \cdot (1+K_{lm}) \cdot (H_0 - H_W)} \cdot B_{in} \quad (2.2.9).$$

2.2.5.2.2 Rückstrahlung von der Erdoberfläche

Ein Anteil der Sonnenstrahlen trifft nicht direkt auf Wolken. Es gilt für den Mittelwert seiner Intensität \bar{I}_{E1} an der Oberseite der Erdatmosphäre

$$\bar{I}_{E1} = (1 - WD) \cdot I_0 \quad (2.2.10a),$$

und für die Intensität dieser Strahlen an der Erdoberfläche

$$I_{E2} = I_{E1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot L_s} = I_{E1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot H_0} \quad (2.2.10b).$$

Die Intensität der Rückstrahlung von der Erdoberfläche wird nach $I_{ER} = A_{EO} \cdot I_{E2}$ berechnet. Dabei ist A_{EO} die Albedo der Erdoberfläche (s. Diagramm 2.2.8). Der Anteil der Strahlung, die auf dem Rückweg ins All eine Wolke trifft, beträgt $WD \cdot I_{ER}$. Dieser wird stark absorbiert. Danach wird nur noch ein geringer Anteil davon ins All gelangen. Daher kann man diesen Anteil vernachlässigen, wenn man sich allein für die Rückstrahlung ins Weltall interessiert. Demzufolge gilt für den Mittelwert der Intensität \bar{I}_{ER1} der Rückstrahlung an der Erdoberfläche

$$\bar{I}_{ER1} = (1 - WD) \cdot I_{ER} = (1 - WD) \cdot A_{EO} \cdot I_{E2} \quad (2.2.10c),$$

und die Intensität der Rückstrahlung an der Oberseite der Atmosphäre ist dann

$$I_{ER2} = I_{ER1} \cdot e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot H_0} \quad (2.2.10d).$$

Die Erdoberfläche besteht vorwiegend (ca. 71%) aus Gewässern. Da die Rückstrahlung von Gewässern – sofern sie bei geringem Wind einigermaßen „glatt“ sind – aus parallelen Lichtbündeln besteht (so wie die einfallenden Sonnenstrahlen), kann man modellhaft die Berechnung für die Bestrahlungsstärke der Rückstrahlung von der Erdoberfläche analog wie die Berechnung bei der Gleichung (2.2.8) verwenden. Daher gilt für die Abstrahlungsstärke D_{ER2} der Rückstrahlen an der Oberseite der Atmosphäre

$$D_{ER2} \approx I_{ER2} \cdot \cos \theta$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.2.8) und von (2.2.10a) bis (2.2.10d) folgt für den Mittelwert der Abstrahlungsstärke \bar{D}_{ER2}

$$\bar{D}_{ER2} \approx (1 - WD)^2 \cdot A_{EO} \cdot e^{-2k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot H_0} \cdot B_{in} \quad (2.2.10)$$

2.2.5.2.3 Rückstrahlung lediglich aus Luft

Anhand der Gleichung (2.2.4b) ergibt sich für die Intensität der Rückstrahlung aus der Luft für Fall 1

$$\begin{aligned} I_{WLR} &= \frac{k_{str}}{k_{ext}} \cdot I_{W1} \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot L_W}) = \frac{k_{str}}{k_{ext}} \cdot I_{W1} \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)}) \\ \Rightarrow \bar{I}_{WLR} &= \frac{k_{str}}{k_{ext}} \cdot \bar{I}_{W1} \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)}) = \frac{k_{str}}{k_{ext}} \cdot WD \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)}) \\ &\Rightarrow \bar{I}_{WLR} \approx 0,486 \cdot WD \cdot I_0 \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)}). \end{aligned}$$

Somit gilt für den Mittelwert der Abstrahlungsstärke der Rückstrahlen aus Luft für Fall 1

$$\bar{D}_{WL_R} \approx 0,486 \cdot WD \cdot B_{in} \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)}) \quad (2.2.11)$$

Analog wie bei der Herleitung der Gleichung (2.2.11) erhält man für den Mittelwert der Abstrahlungsstärke der Rückstrahlung aus der Luft für Fall 2:

$$\bar{D}_{EL_R} \approx 0,486 \cdot (1 - WD) \cdot B_{in} \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot H_0}) \quad (2.2.12).$$

2.2.5.3 Berechnung und Simulation der allgemeinen Erdalbedo

Aus den Gleichungen (2.2.9) bis (2.2.12) kann man den Mittelwert der gesamten Abstrahlungsstärke der solaren Rückstrahlungen von der Erde in folgender Summenformel berechnen

$$\bar{D}_R = \bar{D}_{WR} + \bar{D}_{EO_R} + \bar{D}_{WL_R} + \bar{D}_{EL_R}.$$

Daher gilt für den Mittelwert der Erdalbedo

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\bar{D}_R}{B_{in}} \\ \Leftrightarrow \bar{A} &\approx 0,585(1 - k_{ext} \cdot (H_0 - H_W)) \cdot \frac{\bar{\tau} \cdot WD}{1 + \bar{\tau}} \cdot e^{-k_{ext} \cdot (1 + K_{lm}) \cdot (H_0 - H_W)} + \\ &\quad + (1 - WD)^2 \cdot A_{EO} \cdot e^{-2k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot H_0} + \\ &\quad + 0,486 \cdot WD \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot (H_0 - H_W)}) + \\ &\quad + 0,486 \cdot (1 - WD) \cdot (1 - e^{-k_{ext} \cdot K_{lm} \cdot H_0}) \quad (2.2.11). \end{aligned}$$

Da die Wolkenbedeckung WD , die optische Dicke τ von Wolken, die Höhe der Wolken H_W (s. Abschnitt 2.2.3.2), die Albedo der Oberfläche A_{EO} (s. Abschnitt 2.2.4) und die Luftmasse K_{lm} (s. Gleichung (2.2.1)) von geografischem Breitengrad und der Zeit abhängen, ist \bar{A} eine Funktion von geografischem Breitengrad und Zeit. Man kann diese Zusammenhänge durch Programmierung [A 2.2.13] grafisch darstellen (Diagramm 2.2.9).

Anhand der obigen Modelrechnungen kann man eine Simulation für die Erdalbedo programmieren (s. Anhang: [A 2.2.11] und [A 2.2.12]). Durch diese erhält man die allgemeine jährliche mittlere Erdalbedo $A \approx 0,309$, wenn man die gemessenen Werte (aus [ISCCP 2014]) anwendet. Der berechnete Wert für die mittlere Albedo ist etwa größer als $A \approx 0,306$ aus Quelle [NASA 2012], weil die Berechnung auf vereinfachenden Modellannahmen beruht, z.B. wurde ja für die durch die Wolken transmittierte der Strahlung eine komplette Absorption am Erdboden angenommen, ebenso, wie eine vollständige Absorption in den Wolken von derjenigen Strahlung, die vom Erdboden ausgeht. Die tiefere Berücksichtigung auch solcher Strahlungsintensitäten würde die Albedo noch näher an den tatsächlich gemessenen Wert bringen, wäre aber sehr kompliziert. Unter didaktischen Gesichtspunkten können solche Effekte vernachlässigt werden, denn sie haben keinen Einfluss auf das prinzipielle Verständnis der infrage stehenden physikalischen Prozesse.

Darüber hinaus können die Einflüsse auf die Erdalbedo durch die Simulation veranschaulicht werden, indem man die Werte von Wolkenbedeckung, Wolkenhöhe, die optische Dicke der Wolken, die Albedo der Erdoberfläche, Extinktion-, Absorption- und Streukoeffizienten der Luft modifiziert. Danach

wird die betreffende Erdalbedo durch die Simulation automatisch berechnet, z.B. lässt sich so sehr schön die große Auswirkung von Wolken auf die Erdalbedo zeigen: für den wolkenlosen Himmel (also $WD = 0\%$) ist das Ergebnis der Simulation: Erdalbedo $A \approx 0,192$, d.h. die Erdalbedo ist viel kleiner als die echte Erdalbedo $A \approx 0,309$, somit nimmt die Absorption der solaren Strahlung zu, was zu einem Anstieg der Erdtemperatur führt. In Gegensatz dazu, wenn die Erde komplett von Wolken bedeckt wäre (also $WD = 100\%$), ist das Ergebnis aus der Simulation: Erdalbedo $A \approx 0,394$. Wenn die optische Dicke der Wolken zusätzlich noch 3-fach vergrößert wäre (also $\bar{\tau}' = 3 \cdot \bar{\tau}$), dann würde die Erdalbedo auf $A \approx 0,444$ anwachsen, was zu einem starken Abfall der Erdtemperatur T_{OA} führen würde.

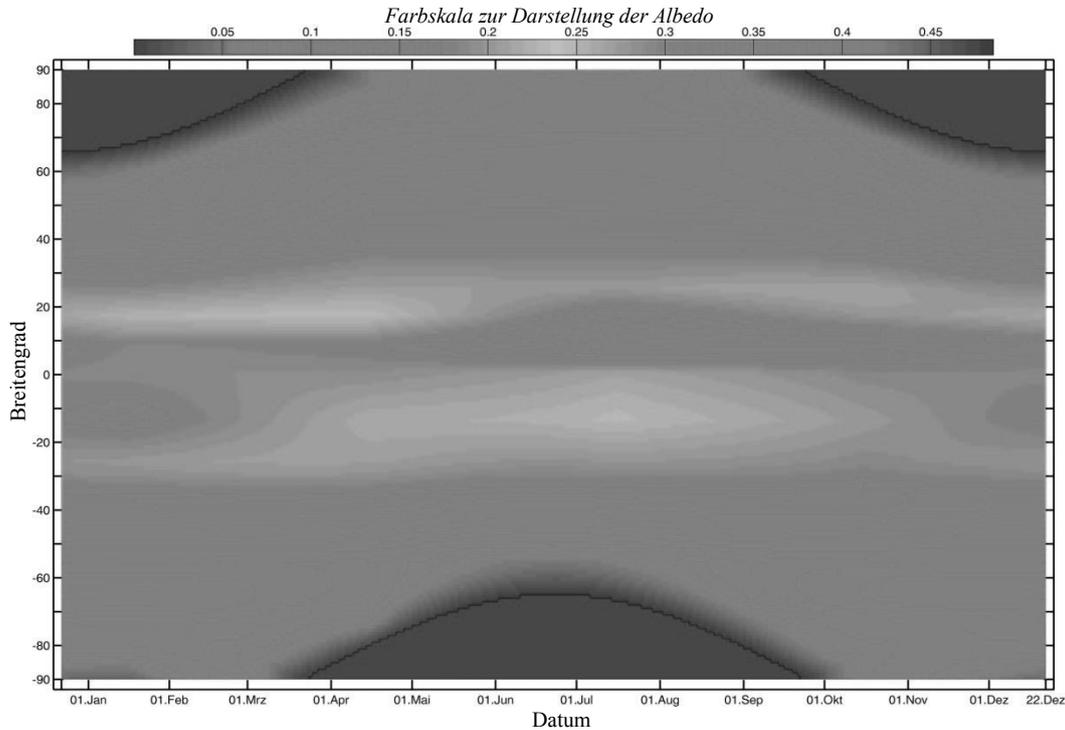


Diagramm 2.2.9: Die Verteilung der täglichen mittleren Erdalbedo für Datum und Breitengrad, ermittelt nach den vereinfachten Modellannahmen (s. Fließtext) [A 2.2.13].

2.3 Wellenlängenverteilung der Strahlungsleistung

Das Transmissions- bzw. Absorptionsverhalten der Erdatmosphäre ist für die von der Sonne ankommende und die von der Erdoberfläche emittierte Strahlung verschieden. Die liegt an der unterschiedlichen spektralen Zusammensetzung der beiden Strahlungen. Letztlich wird dadurch auch der Treibhauseffekt verursacht, der die Erdoberfläche erwärmt. Nachfolgend wird zuerst die spektrale Verteilung der Strahlungsleistung für die von der Sonne stammende und die von der Erdoberfläche stammende Strahlung untersucht.

2.3.1 Wellenlängenverteilung der an der Erdoberfläche umgesetzten Strahlung

Die zur Erde gerichtete Strahlung ist die Sonnenstrahlung, deren Leistung vor allem im kurzen Wellenlängenbereich (ca. zwischen $0,3\mu\text{m}$ und $4\mu\text{m}$) konzentriert ist (Diagramm 2.3.1), während die von der Erde zum Weltall emittierte Strahlung thermischer Natur ist, deren Leistung, entsprechend der mittleren Oberflächentemperatur der Erde, hauptsächlich in langen Wellenlängenbereich (also das Infrarot, ca. zwischen $4\mu\text{m}$ und $100\mu\text{m}$) verteilt ist (Diagramm 2.3.2).

Diese unterschiedliche Leistungsverteilung zwischen Einstrahlung und Emission beruht auf der stark abweichenden Temperatur der jeweiligen Quellen. Nachfolgend wird dies physikalisch erklärt.

Betrachtet man die Emission von Sonne und Erde näherungsweise als Temperaturstrahlungen eines Schwarzen Körpers, dann sind die zugrunde liegenden Temperaturen jeweils $T_S = 5778 \text{ K}$ und $T_E = -18^\circ\text{C} = 255 \text{ K}$. Der Zusammenhang zwischen spektraler Leistungsdichte $P(\lambda)$ der Abstrahlung und den zwei Größen Temperatur T und Wellenlänge λ kann aus dem planckschen Strahlungsgesetz abgeleitet werden zu

$$P(\lambda) = \frac{2\pi \cdot S \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T}} - 1 \right)}$$

Dabei wird $P(\lambda)$ als spektrale Leistungsdichte bezeichnet. Sie gibt an, wie viel Leistung von der Oberfläche S im normierten Wellenlängenbereich bei Temperatur T in alle Richtung abgestrahlt wird. Dabei sind $h = 6,62606957 \cdot 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}$, $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ und $k_B = 1,3806488 \cdot 10^{-23} \text{ (J} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$ jeweils Planck-Konstante, Lichtgeschwindigkeit und Boltzmann-Konstante.

Die mittlere Temperatur der Erdoberfläche inklusive Atmosphäre wäre ohne Treibhauseffekt ca. $T_{OA} = -18^\circ\text{C} = 255 \text{ K}$. Dann ergibt sich für die spektrale Leistungsdichte der Erdabstrahlung pro Quadratmeter Erdoberfläche, die hier Abstrahlungsstärkedichte $D(\lambda)$ genannt wird,

$$D(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{S} = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_{OA}}} - 1 \right)} \quad (2.3.1).$$

Die Temperatur der Sonnenoberfläche ist ca. $T_S = 5778 \text{ K}$. Daher lässt sich die spektrale Leistungsdichte der Sonnenstrahlung bestimmen zu

$$P_S(\lambda) = \frac{2\pi \cdot (4\pi \cdot r_S^2) \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_S}} - 1 \right)}$$

Dabei ist der Sonnenradius $r_S = 6,96342 \cdot 10^8 \text{ m}$ [Emilio 2012].

Ein Teil von $P_S(\lambda)$ wird zur Erde transportiert und dieser Teil wird als $P_{E \leftarrow S}(\lambda)$ bezeichnet. Anhand der Abbildung 2.1.1 wird dieser analog zum Gewinn der Gleichung (2.1.1c) ermittelt zu

$$P_{E \leftarrow S}(\lambda) = \frac{S_1}{S_C} \cdot P_S(\lambda) = \frac{\pi \cdot r_E^2}{4\pi \cdot R_{ES}^2} \cdot P_S(\lambda).$$

Wobei R_{ES} der Abstand zwischen Sonne und Erde ist ($R_{ES} = 1,4959787069 \cdot 10^{11} \text{ (m)}$ [SI 2007]), und r_E der Erdradius. Dann folgt für die spektrale Leistungsdichte der zur Erde gerichteten Sonnenstrahlung pro Quadratmeter, die hier Bestrahlungsstärkedichte $B(\lambda)$ genannt wird

$$B(\lambda) = \frac{1}{4\pi \cdot r_E^2} P_{E \leftarrow S}(\lambda) = \frac{1}{4\pi \cdot r_E^2} \cdot \frac{\pi \cdot r_E^2}{4\pi \cdot R_{ES}^2} \cdot P_S(\lambda) = \frac{1}{16\pi \cdot R_{ES}^2} \cdot P_S(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow B(\lambda) = \frac{\pi \cdot r_S^2 \cdot h \cdot c^2}{2 \cdot R_{ES}^2 \cdot \lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_S}} - 1 \right)} \quad (2.3.2).$$

Anhand der Gleichungen (2.3.1) und (2.3.2) können die Verteilungen der Strahlung über der Wellenlänge grafisch dargestellt werden (Diagramme 2.3.1 und 2.3.2.).

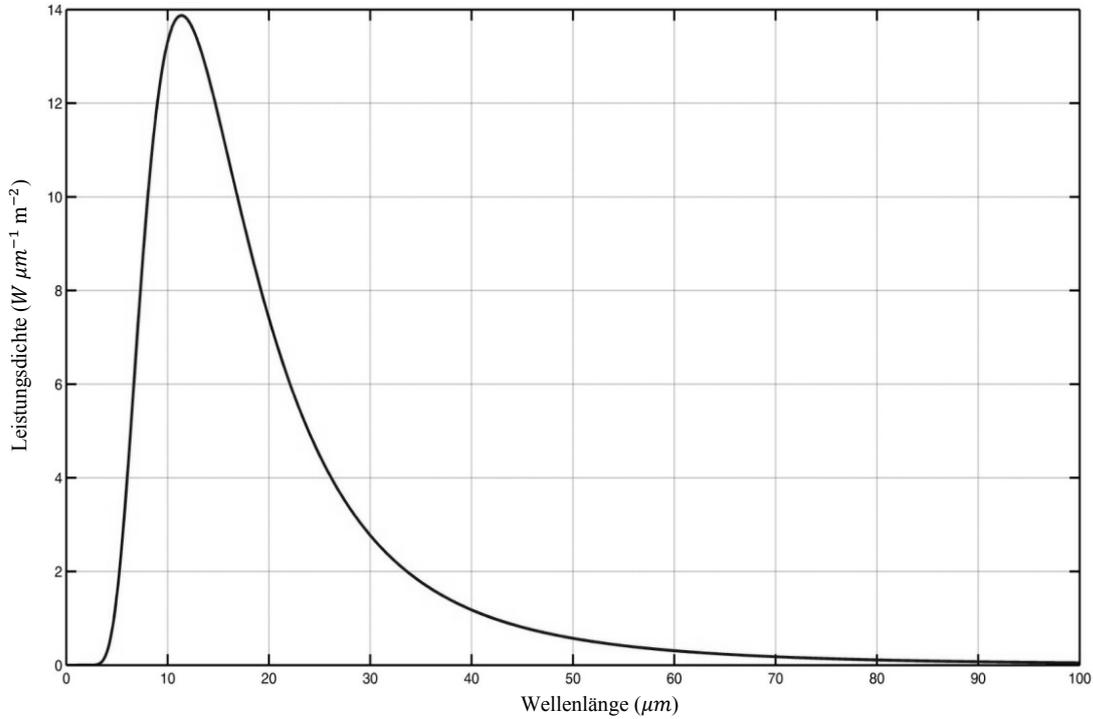


Diagramm 2.3.1: Wellenlängenverteilung der Abstrahlungsstärke von der Erde.

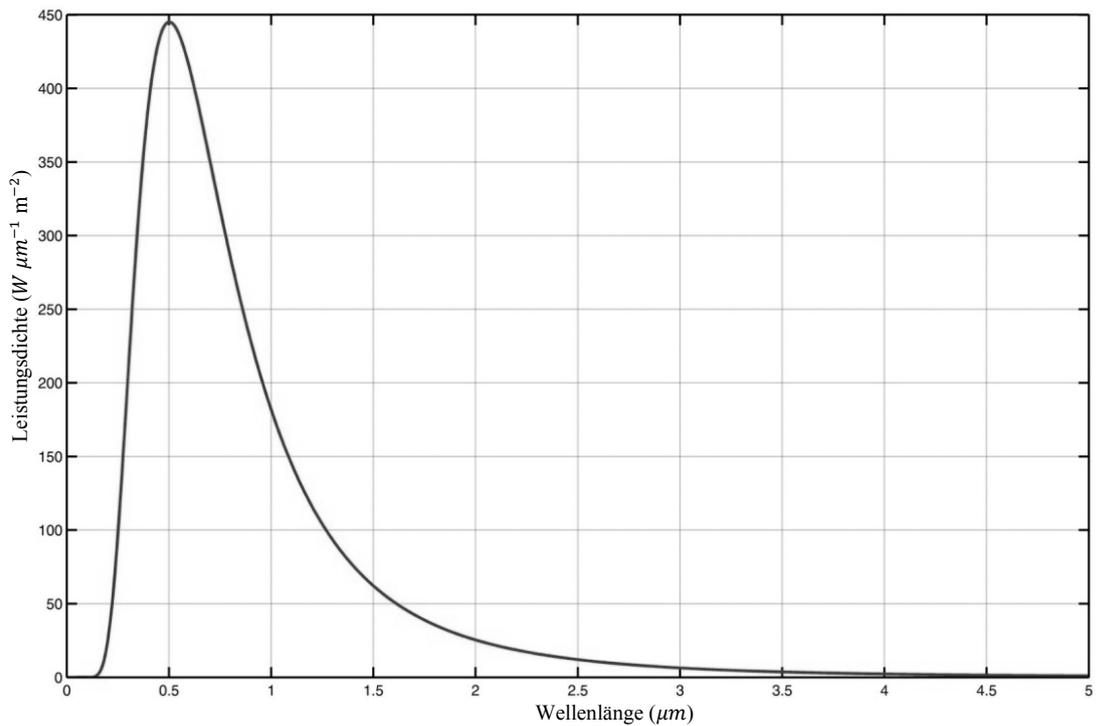


Diagramm 2.3.2: Wellenlängenverteilung der solaren Bestrahlungsstärke auf die Erde.

Die zwei Flächen S_{aus} und S_{in} unter den Kurven sind die jeweilige gesamte Ausstrahlungs- und Einstrahlungsleistung aller Wellenlängen pro 1m^2 der betreffenden Erdoberfläche, also jeweils die mittlere Abstrahlungsstärke \bar{D} der Erdausstrahlung und die mittlere Bestrahlungsstärke \bar{B} der solaren Einstrahlung. Ein Teil der Leistung der solaren Einstrahlung auf die Erde wird direkt zurück ins Weltall gestrahlt. Es ist zu beachten, dass das Verhältnis zwischen der Abstrahlungsstärke der Rückstrahlung und der Bestrahlungsstärke der Einstrahlung identisch mit Erdalbedo $A \approx 0,3$ ist. Somit gilt

$$\bar{D} = (1 - A) \cdot \bar{B} \approx 0,7 \cdot \bar{B} \quad (2.3.3)$$

$$\Leftrightarrow S_{aus} = (1 - A) \cdot S_{in} \approx 0,7 \cdot S_{in} \quad (2.3.4).$$

Dieser Zusammenhang zwischen \bar{D} und \bar{B} wird veranschaulicht, indem die zwei Gleichungen (2.3.1) und (2.3.2) in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden (Diagramm 2.3.3).

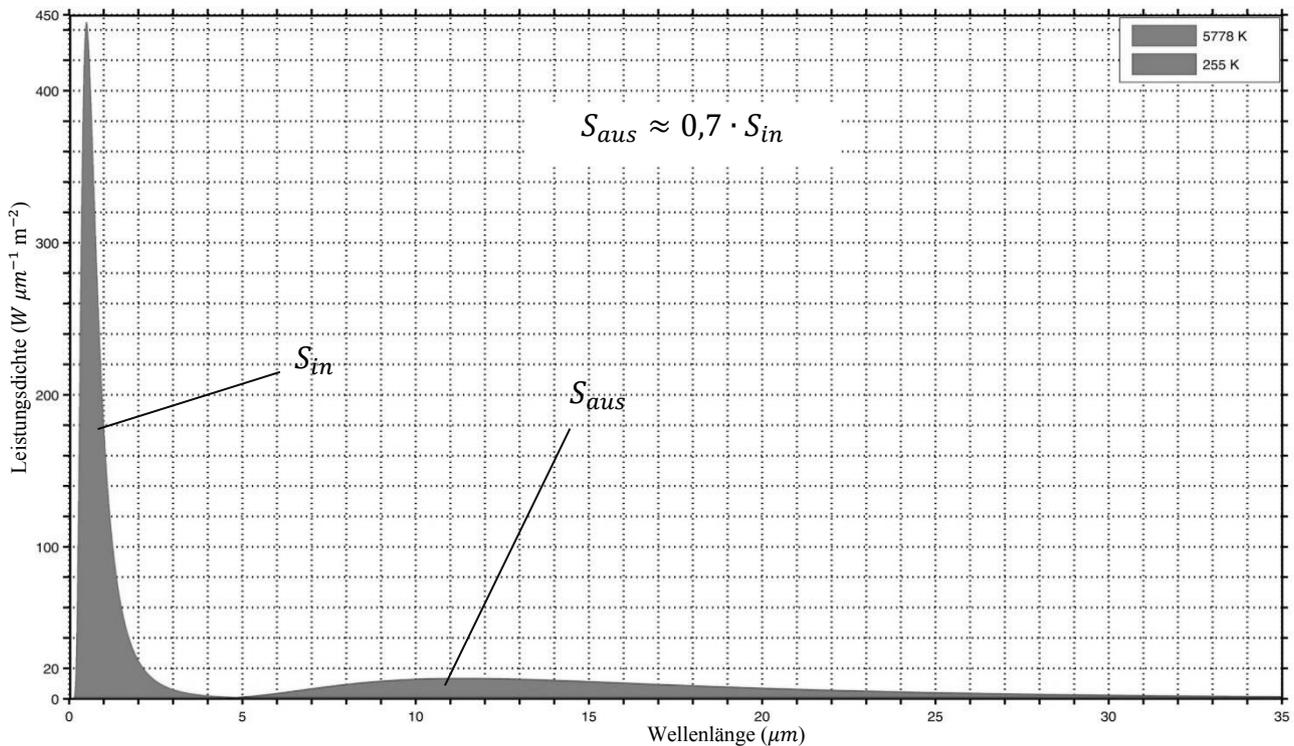


Diagramm 2.3.3: Wellenlängenverteilung der Bestrahlungsstärke (Rot) und der Abstrahlungsstärke (Blau) für die Erde.

Außerdem können die Gleichungen (2.3.3) und (2.3.4) mit der Integralrechnung verdeutlicht werden, denn es gilt ja für die mittlere Abstrahlungsstärke von der Erde:

$$\bar{D} = S_{aus} = \int_0^{\infty} D(\lambda) \cdot d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_E}} - 1 \right)} \cdot d\lambda$$

$$\Leftrightarrow \bar{D} = 2\pi \cdot \frac{k_B^4 \cdot T_E^4}{h^3 \cdot c^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_E} \right)^3}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_E}} - 1} \cdot d\left(\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_E} \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{D} = 2\pi \cdot \frac{k_B^4 \cdot T_E^4}{h^3 \cdot c^2} \cdot \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \cdot dx = 2\pi \cdot \frac{k_B^4 \cdot T_E^4}{h^3 \cdot c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15} \quad (2.3.5)$$

$$\Leftrightarrow \bar{D} \approx 239,76 \text{ (W/m}^2\text{)} \quad (2.3.6)$$

Analog erhält man für die mittlere solare Bestrahlungsstärke an der Erde.

$$\bar{B} = S_{in} = \int_0^\infty B(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{r_S^2}{4 \cdot R_{ES}^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{k_B^4 \cdot T_S^4}{h^3 \cdot c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$\Leftrightarrow \bar{B} \approx 339,47 \text{ (W/m}^2\text{)} \quad (2.3.7)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der Gleichung (2.3.3) überein, denn es führt wieder auf

$$\bar{D} \approx 239,76 \text{ (W/m}^2\text{)} \approx 0,7 \cdot 339,47 \text{ (W/m}^2\text{)} \approx 0,7 \cdot \bar{B}.$$

Es sei zu diesem Abschnitt abschließend noch angemerkt, dass das Ziel der Darstellungen darin besteht, eine Wellenlängenverteilung der Strahlungsintensitäten für die relevanten Prozesse zu geben. Um dieses Ziel grob zu erreichen, ist ein Verständnis der Gleichungen (2.3.1) und 2.3.2 bzw. der Diagramme 2.3.1 bis 2.3.3 hinreichend. Die zusätzlichen Integralrechnungen erfordern tiefere Mathematikkennntnisse und können nur von Fortgeschrittenen bzw. den Lehrkräften erfolgreich vorgenommen werden, für die diese Darstellungen hier erfolgt sind.

2.3.2 Die Verteilung der Strahlungsleistung an der Erdoberfläche

Mit der Existenz der Erdatmosphäre erreicht die durchschnittliche Temperatur der Oberfläche $T_O = 15^\circ\text{C} = 288\text{K}$. Dies ist eine Folge des natürlichen Treibhauseffektes, denn eine einfache Strahlungsgleichgewichtsberechnung ohne Lufthülle würde auf eine globale mittlere Temperatur von lediglich $T_{OA} = -18^\circ\text{C} = 255\text{K}$ führen. Analog wie bei der Herleitung der Gleichung (2.3.1) ergibt sich für die Abstrahlungsstärkedichte von der Erdoberfläche bei der Temperatur T_O

$$D_O(\lambda) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T_O}} - 1 \right)} \quad (2.3.8).$$

Somit folgt für die durchschnittliche Abstrahlungsstärke von der Erdoberfläche

$$\bar{D}_O = \int_0^\infty \bar{D}_{O_{aus}}(\lambda) \cdot d\lambda = 2\pi \cdot \frac{k_B^4 \cdot T_O^4}{h^3 \cdot c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

$$\Leftrightarrow \bar{D}_O = 390,11 \text{ (W/m}^2\text{)} \quad (2.3.9)$$

$$\Rightarrow \bar{D}_O = \frac{390,11}{339,47} \cdot \bar{B} = 1,15 \cdot \bar{B} > \bar{B} \quad (2.3.10).$$

Dieser Zusammenhang zwischen \bar{D}_O und \bar{B} wird veranschaulicht, indem die zwei Gleichungen (2.3.2) und (2.3.8) in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden (Diagramm 2.3.4). Es

scheint hier, als ob das Energieerhaltungsgesetz nicht mehr gelten würde, denn die Abstrahlung vom Erdboden \bar{D}_O ist größer als die Einstrahlung \bar{B} . Diese Seltsamkeit wird vom Treibhauseffekt verursacht.

Aus den Gleichungen (2.3.6) und (2.3.9) ist abzuleiten, dass die Erdatmosphäre im Prinzip wie ein Wärmeleistungsverstärker arbeitet, weil sie hilft, die durchschnittliche Ausstrahlungsleistung der Erdoberfläche von $\bar{D} \approx 240 \text{ (W/m}^2\text{)}$ auf $\bar{D}_O \approx 390 \text{ (W/m}^2\text{)}$ zu erhöhen (Diagramm 2.3.5.).

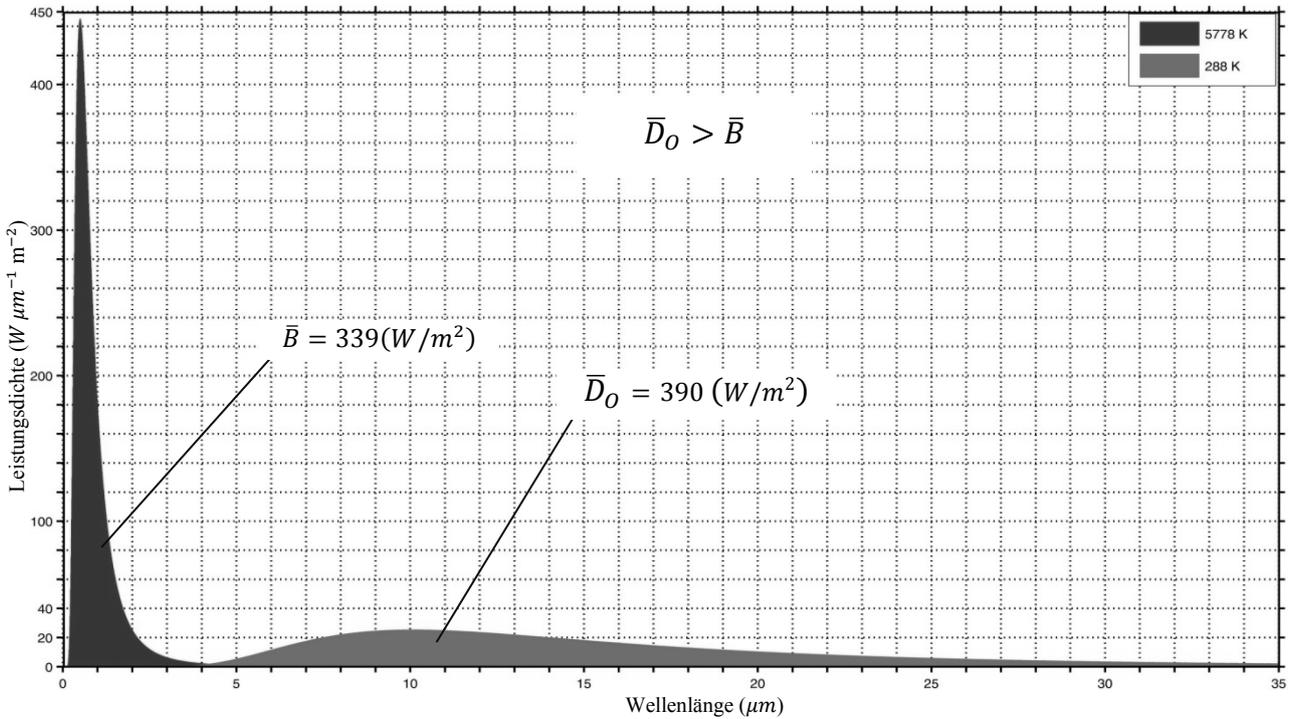


Diagramm 2.3.4: Wellenlängenverteilung der Bestrahlungsstärke (Rot) auf der Erdoberfläche und der Abstrahlungsstärke (Braun) von Erdoberfläche. Die hervorgehobenen Flächen geben jeweils die gesamte Flächenleistung der Strahlung wieder.

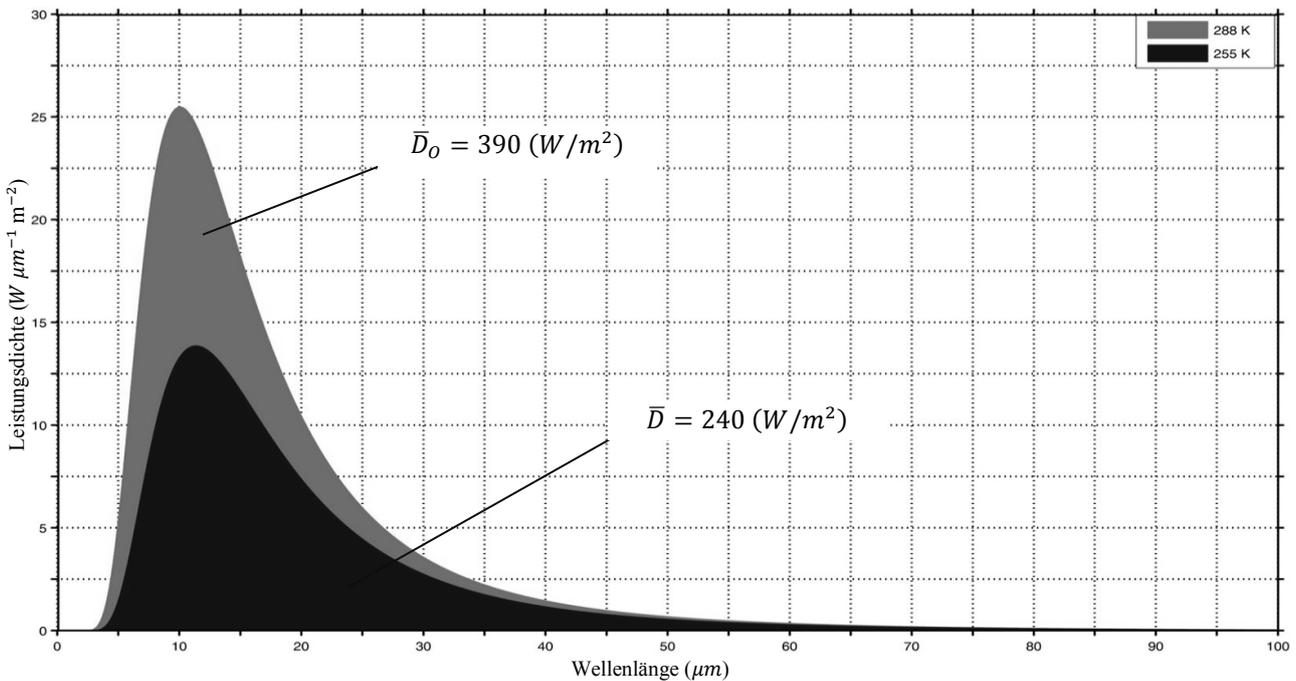


Diagramm 2.3.5: Vergleich der Abstrahlungsstärke der Erdoberfläche – einmal mit (Braun) und einmal ohne (Blau) Erdatmosphäre.

2.4 Der Treibhauseffekt der Erdatmosphäre

Für Merkur und Mars, wo die Atmosphäre nicht sehr dicht ist (bzw. kaum vorhanden ist), sind die berechneten Temperaturen (aus den Gleichungen im Abschnitt 2.1) annähernd wie die gemessene Temperatur an der Oberfläche. Es gibt aber eine große Abweichung für Venus und eine erhebliche Abweichung für die Erde, also Planeten, wo die Atmosphäre relativ dicht ist, sodass sie nicht vernachlässigt werden kann. Die Tabelle 2.4.1 zeigt die Unterschiede zwischen der Temperatur T_{OA} (die Globaltemperatur über Oberfläche und Atmosphäre der Planeten) und der Oberflächentemperatur T_O der Planeten aus den Messwerten [NASA 2012].

Planeten	Summe Gewicht (kg) der Atmosphäre	Dichte (kg/m^3) der Atmosphäre an der Oberfläche	$T_{OA}(\text{°C})$	$T_O (\text{°C})$
Merkur	1000	≈ 0	169	167
Venus	$4,8 \cdot 10^{20}$	65	-89	464
Erde	$5,1 \cdot 10^{18}$	1,2	-18	15
Mars	$2,5 \cdot 10^{16}$	0,020	-62	-63

Tabelle 2.4.1: Vergleich der Temperaturen aus der vereinfachten Berechnung und den Messwerten [NASA 2012].

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Atmosphäre der Planeten eine große Rolle spielt. Diese bewirkt offensichtlich eine Zunahme der Oberflächentemperatur der Planeten.

Nachfolgend werden zwei Modelle vorgestellt, um den Treibhauseffekt zu erklären. Der Grad der Komplizierung des jeweiligen Modells wird Schritt für Schritt vergrößert.

2.4.1 Vereinfachte Betrachtung

2.4.1.1 Qualitative Sichtweise

In verkürzter Weise kann der Treibhauseffekt damit beschrieben werden, dass einige Gase in der Atmosphäre (z.B. Wasserdampf, Kohlenstoffdioxid, Methan usw., die Treibhausgase genannt werden) eine besondere Eigenschaft haben. Sie lassen das Licht von der Sonne zur Erdoberfläche nahezu ungehindert passieren, aber sie behindern die thermische Abstrahlung der Erde durch die Atmosphäre hindurch zurück in das Weltall. Damit nimmt die Erde die Energie des Sonnenlichtes sehr gut auf, während sie umgekehrt die Energie nur mit einem großen Widerstand ins All abgeben kann. Deshalb ist die Erde mit ihrer Atmosphäre wärmer als sie es ohne Atmosphäre wäre. Dieser Effekt wird als Treibhauseffekt bezeichnet.

Zur didaktischen Veranschaulichung des Treibhauseffekts kann man einen vereinfachten Analogie-Modell-Versuch durchführen. Im Bild 2.4.1 a strömt das Wasser von oben (aus der Wasserleitung) in eine mit zwei Löchern in Bodennähe versehene Flasche. Das Wasser fließt durch zwei Löcher heraus. Relativ schnell stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, sodass das Wasser in der Flasche einen bestimmten Pegelstand erreicht (Bild a). Dieser hat folgende Merkmale: Je stärker der einfließende Wasserstrom ist, desto höher liegt das Wasserniveau in der Flasche und umso stärker ist auch der herausfließende Wasserstrom. Wenn man die ausfließende Wassermenge behindert, indem man mittels des Fingers einen Ausgang sperrt (die linke Öffnung (Bild b)), dann kommt es zu einem neuen Gleichgewichtszustand, bei

dem aber das Wasser in der Flasche erheblich höher steht, als zuvor (Bild a, wenn das abfließende Wasser nicht behindert wird).

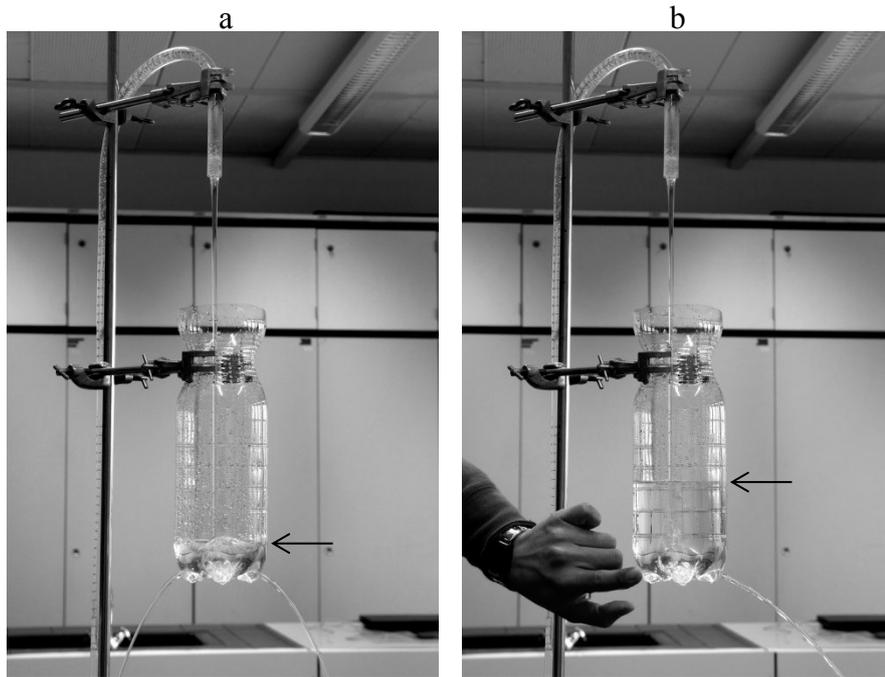


Abbildung 2.4.1: Vereinfachter Analogie-Modell-Versuch zum Treibhauseffekt. Die Pfeile zeigen das Wasserniveau.

Dieses Wassermodell ist analog zum Prinzip des Gleichgewichtszustandes der Strahlung in der Nähe der Erdoberfläche ohne Treibhauseffekt (entspricht Bild a) und mit Treibhauseffekt (entspricht Bild b). Dabei vertritt das einfließende Wasser die eingestrahlte Sonnenenergie auf der Erdoberfläche, das abfließende Wasser steht für die Rückstrahlung von der Erdoberfläche (die thermische Abstrahlung der Erde) und die Wassermenge in der Flasche entspricht dem Temperaturniveau der Erdoberfläche.

Um diese elementare Idee zu vertiefen und zu erweitern, kann man im nächsten Schritt betonen, dass die Atmosphäre mit ihren besonderen Gasen (Treibhausgasen) wie ein „Filter“ wirkt. Sie lässt die kürzeren Wellenlängen der Strahlung passieren und absorbiert die längeren Wellenlängen der Strahlung. Nachfolgend werden die beteiligten Vorgänge im Detail – vorläufig gegliedert in fünf Teilschritte - analysiert (Abbildung 2.4.2).

Vorgang 1 (V1): Die Sonnenstrahlen S_1 mit ihrer durchschnittlichen Bestrahlungsstärke $\bar{B} \approx 340 \text{ (W/m}^2\text{)}$ bescheinen die Erde. Da das Intensitätsmaximum der Strahlungsverteilung in S_1 bei kurzen Wellenlängen liegt (ca. zwischen $0,3\mu\text{m}$ und $4\mu\text{m}$), lässt der „Filter“ (die Treibhausgase in der Atmosphäre) S_1 ohne Absorption passieren. Wegen der Streuung in der Atmosphäre und der Reflektion an der Erdoberfläche entsteht eine Rückstrahlung S_2 , sodass S_1 geschwächt wird. Die übrige Strahlung S_3 gelangt mit einer Bestrahlungsstärke $B_o(0)$ auf der Erdoberfläche.

Vorgang 2 (V2): Der Erdboden absorbiert die Bestrahlungsstärke $B_o(0)$ aus S_3 . Dabei wandelt er diese Energie in die anderen Energieformen um, hauptsächlich natürlich in thermische Energie. Zum Schluss emittiert der Boden die Strahlung zurück in Richtung Atmosphäre. Die thermische Strahlung S_4 mit ihrer

Abstrahlungsstärke $D_o(1)$ besitzt eine hohe Intensität im Wellenlängenbereich ca. zwischen $4\mu\text{m}$ und $100\mu\text{m}$, ist also relativ langwellige Infrarotstrahlung.

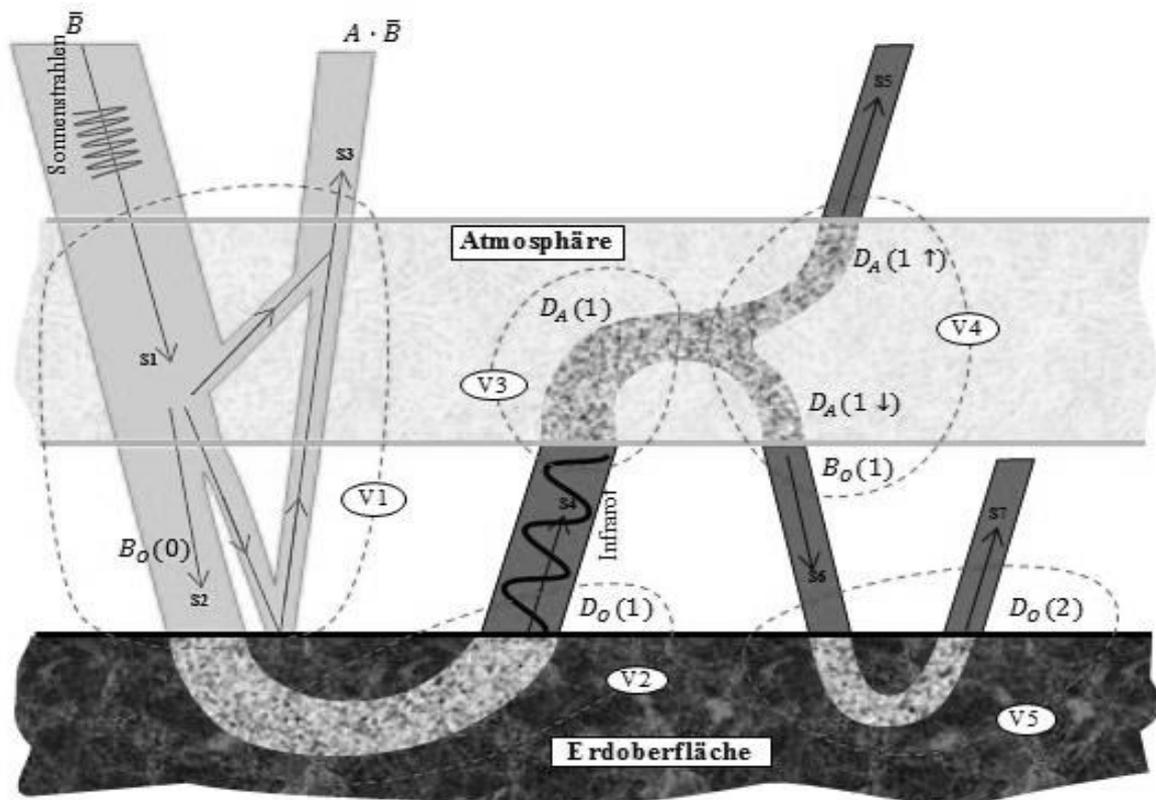


Abbildung 2.4.2: Darstellung zur vereinfachten Erklärung des Treibhauseffektes. Dabei werden die ersten fünf Vorgänge der Strahlungsübertragung mit V1-V5 markiert. Die Strahlungswege werden mit S1 bis S7 nummeriert. Die kurzen und langen Wellenlängen werden jeweils mit Gelb und Braun dargestellt.

Vorgang 3 (V3): Weil die Strahlung S4 aus relativ großen Wellenlängen besteht, ändert der atmosphärische „Filter“ sein Verhalten und absorbiert die Strahlung der Abstrahlungsstärke $D_o(1)$ fast komplett. Danach verhält er sich ähnlich wie die Erdoberfläche bei Vorgang 2, d.h. er gibt nun selbst Infrarotstrahlung mit der Abstrahlungsstärke $D_A(1)$ ab.

Vorgang 4 (V4): Das aus der Atmosphäre emittierte Infrarot verteilt sich nach oben (zum All) und unten (zum Erdboden), also $D_A(1) = D_A(1 \uparrow) + D_A(1 \downarrow)$. Deswegen gibt es eine Teilstrahlung S6, die mit ihrer Abstrahlungsstärke $D_A(1 \downarrow)$, wieder zurück zur Erde gerichtet ist.

Vorgang 5 (V5): Die zur Erde gerichtete Infrarotstrahlung S6 mit ihrer Bestrahlungsstärke $B_o(1) = D_A(1 \downarrow)$ wird vom Boden absorbiert und verhält sich wieder wie beim Vorgang 2. Im letzten Schritt dieses Vorganges emittiert der Boden zur Atmosphäre die Infrarotstrahlung S7 mit der Abstrahlungsstärke $D_o(2)$.

Letzteres führt zur Zunahme der Abstrahlung vom Erdboden, also $D_o(1) + D_o(2)$, anstatt nur einer Abstrahlungsstärke $D_o(1)$ (Die nur korrekt wäre, wenn die Atmosphäre keine Treibhausgase beinhalten würde.) Da die Strahlungsemission eines Körpers mit seiner Temperatur wächst (nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz), muss die Erdoberflächentemperatur durch die Treibhausgase ansteigen.

2.4.1.2 Quantitative Betrachtungsweise

Nachfolgend wird der Treibhauseffekt quantitativ und in eine methodische Schrittfolge untergliedert untersucht.

Erster Schritt: Die Temperatur wird lediglich unter Einbeziehung der ersten fünf Vorgänge der Strahlungsübertragung berechnet. Aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz wird eine Gleichung für die durchschnittliche Abstrahlungsstärke von $1m^2$ der Erdoberfläche gegeben zu

$$D_o = \sigma \cdot T_o^4 \quad (2.4.1).$$

Dabei sind D_o , σ und T_o jeweils die durchschnittliche Abstrahlungsstärke von der Erdoberfläche, die Stefan-Boltzmann-Konstante und die Erdoberflächentemperatur. Aus der obigen Abbildung ist ersichtlich, dass gilt

$$D_o = D_o(1) + D_o(2) \quad (2.4.2a).$$

Für die nachfolgenden Überlegungen wird angenommen, dass die Bestrahlungsstärke äquivalent zur Abstrahlungsstärke ist, d.h. die Wärmeübertragungsarten außerhalb der Strahlung werden nicht betrachtet. Dann gilt für den Vorgang 2

$$B_o(0) = D_o(1) \quad (2.4.2b),$$

für den Vorgang 3

$$D_o(1) = D_A(1) \quad (2.4.2c),$$

und für den Vorgang 5

$$B_o(1) = D_o(2) \quad (2.4.2d).$$

Beim Vorgang 4 wird die Verteilung der Emission als gleichmäßig in beide Richtungen (zum All und Boden) angenommen, dann gilt

$$D_A(1 \uparrow) = D_A(1 \downarrow) = \frac{1}{2} \cdot D_A(1) \quad (2.4.2e).$$

Durch Einsetzen für die Gleichungen (2.4.2c) bis (2.4.2e) und unter Berücksichtigung, dass $D_A(1 \uparrow)$ identisch mit $B_o(1)$ ist, folgt

$$D_o(2) = \frac{1}{2} \cdot D_o(1) \quad (2.4.2).$$

Nach Anwendung des Einsetzungsverfahrens für die Gleichungen (2.4.2a), (2.4.2b) und (2.4.2.) ergibt sich für die Summe aller emittierenden Leistungen von der Erdoberfläche

$$D_o = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot D_o(0) \quad (2.4.3a).$$

Aus der Abbildung 2.4.2 ist abzuleiten, dass

$$\bar{B}_o(0) = \bar{B} - A \cdot \bar{B} = (1 - A) \cdot \bar{B} \quad (2.4.3b).$$

Zunächst setzt man $\bar{B}_O(0)$ aus Gleichung (2.4.3b) in Gleichung (2.4.3a) ein, danach setzt man \bar{D}_O in Gleichung (2.4.1) ein. So erhält man für die mittlere Erdoberflächentemperatur

$$\bar{T}_O = \left(1,5 \cdot (1 - \bar{A}) \cdot \frac{\bar{B}}{\sigma} \right)^{1/4} \quad (2.2.3c).$$

Nach Einsetzen der Werte für die durchschnittliche Erdalbedo $\bar{A} = 0,306$, die mittlere Bestrahlungsstärke der solare Einstrahlung $\bar{B} \approx 340(W/m^2)$ und die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}(Wm^{-2}K^{-4})$ in diese Gleichung ergibt sich

$$\bar{T}_O = 281,5(K) = 8,5(^{\circ}C) \quad (2.2.3).$$

Dieses Ergebnis ist um $6,5(^{\circ}C)$ niedriger als die referierte mittlere globale Erdoberflächentemperatur $\bar{T}_O = 15^{\circ}C$ [NASA 2012], aber es ergibt sich immerhin eine kleinere Abweichung als für die Abschätzung ohne Treibhauseffekt im Abschnitt 2.1.1 mit $\bar{T}_O = \bar{T}_{OA} = -18^{\circ}C$.

Zweiter Schritt: Verbesserte Analyse der langwelligen Strahlungswechselwirkung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre

Die Temperatur wird nun über alle infrage stehenden Vorgänge der Strahlungsübertragung berechnet. Aus der Abbildung 2.4.2 ist erkennbar, dass die Strahlungsübertragungen nach V5 immer wieder auftreten. Die zweite aus der Erde emittierende Abstrahlungsstärke $D_O(2)$ entstammt eigentlich einer „zweiten Generation“ der ersten emittierenden Abstrahlungsstärke $D_O(1)$. Die Abstrahlungsstärke $D_O(2)$ spielt ihrerseits eine Rolle analog wie die erste von der Erde emittierende Abstrahlungsstärke $D_O(1)$, d.h. die Abstrahlungsstärke $D_O(2)$ ruft wiederum eine zweite Emission $D_A(2)$ von der Atmosphäre hervor, daher kommt es zu einer Abstrahlungsstärke $D_A(2 \downarrow)$ bzw. einer weiteren zur Erde gerichteten Bestrahlungsstärke $B_O(2)$, somit entsteht eine dritte vom Erdboden abgehende Abstrahlungsstärke $D_O(3)$ usw. Die Vorgänge wiederholen sich immer weiter. Geht die Anzahl der Schritte i gegen unendlich, so gilt für die Abstrahlungsstärke: $D_O(i) \rightarrow 0$.

Dann gilt für die gesamte Abstrahlungsstärke von der Erdoberfläche

$$D_O = D_O(1) + D_O(2) + D_O(3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} D_O(i) \quad (2.4.4).$$

Die Gleichung (2.4.2) zeigt den Zusammenhang zwischen der ersten „Generation“ $D_O(1)$ und der zweiten „Generation“ $D_O(2)$. Mit analoger Ableitung folgt für die weiteren Generationen

$$D_O(2) = \frac{1}{2} \cdot D_O(1)$$

$$D_O(3) = \frac{1}{2} \cdot D_O(2)$$

$$D_O(4) = \frac{1}{2} \cdot D_O(3)$$

...

$$D_O(i) = \frac{1}{2} \cdot D_O(i - 1).$$

Diese Ausdrücke ergeben eine geometrische Zahlenfolge mit dem Anfangsglied $a_1 = D_o(1)$ und dem geometrischen Quotienten $q = \frac{1}{2}$. Es gilt allgemein $D_o(i) = a_1 \cdot q^{i-1} = D_o(1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$. Dann ist die Summe an der Gleichung (2.4.4) tatsächlich eine geometrische Reihe. Daraus folgt

$$D_o = \sum_{i=1}^{\infty} D_o(i) = \sum_{i=1}^{\infty} D_o(1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = D_o(1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

$$\Leftrightarrow D_o = D_o(1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots\right) = D_o(1) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow D_o = 2 \cdot D_o(1) = 2 \cdot B_o(0) \quad (2.4.5a).$$

Mit dem analogen Verfahren, mit dem die Herleitung von Gleichung (2.4.3b) bis Gleichung (2.4.3c) ausgeführt wird, erhält man für die mittlere Erdoberflächentemperatur

$$\bar{T}_o = \left(2 \cdot (1 - \bar{A}) \cdot \frac{\bar{B}}{\sigma}\right)^{1/4} \quad (2.4.5b).$$

Nach Einsetzen der mittleren Erdalbedo $\bar{A} = 0,306$, der mittleren Bestrahlungsstärke $\bar{B} \approx 340 \text{ (W/m}^2\text{)}$ und der Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ (Wm}^{-2}\text{K}^{-4}\text{)}$ in diese Gleichung ergibt sich

$$\bar{T}_o = 302,5 \text{ (K)} = 29,5 \text{ (}^\circ\text{C)} \quad (2.4.5).$$

Diese Temperatur ist geringfügig größer als die referierte Erdoberflächentemperatur $\bar{T}_o = 15^\circ\text{C}$ [NASA 2012], aber wir haben ja auch nur einen stark vereinfachten Treibhauseffekt betrachtet.

Zusammenschau. Durch die vorgestellten Analysen kann man von dem Treibhauseffekt in der Erdatmosphäre verstehen, dass er wegen der Strahlungswechselwirkung zwischen Atmosphäre und Erdoberfläche die Rolle als Verstärker für die Abstrahlungsstärke der Erdoberfläche spielt. Dazu besitzt dieser Verstärker einen besonderen Verstärkungsfaktor, der aus dem Gesetz der Summenformel für eine geometrische Reihe folgt. Dabei ist der geometrische Quotient q tatsächlich identisch mit dem Reflexionsgrad R_l der Atmosphäre für langwellige Strahlungen. Bei dieser vereinfachten Betrachtung ist der Reflexionsgrad $R_l = q = 1/2$, demzufolge ist der Verstärkungsfaktor $= \frac{1}{1-q} = 2$. Mit diesem Wert überschätzt man die Erdoberflächentemperatur $\bar{T}_o = 302,5 \text{ (K)} = 29,5 \text{ (}^\circ\text{C)}$ leicht.

2.4.2 Vertiefte Betrachtung

2.4.2.1 Erweiterte Betrachtungen zur Wechselwirkung der Sonnenstrahlung mit der Atmosphäre und der Erdoberfläche

Bei den obigen Abschnitten wird der Mechanismus des Treibhauseffektes vereinfachend analysiert, sodass lediglich die Streuung in die Atmosphäre auftritt. Tatsache ist jedoch, dass die Sonnenstrahlen teilweise von den Gasen in Atmosphäre absorbiert werden. Außerdem muss man die Auswirkung der Wolken genauer betrachten. Deshalb muss man nicht nur die Strahlung so wie in Abb. 2.2.6 betrachten, sondern auch solche Strahlungsanteile, die aus Streuung und Absorption entstehen (Abbildung 2.4.3).

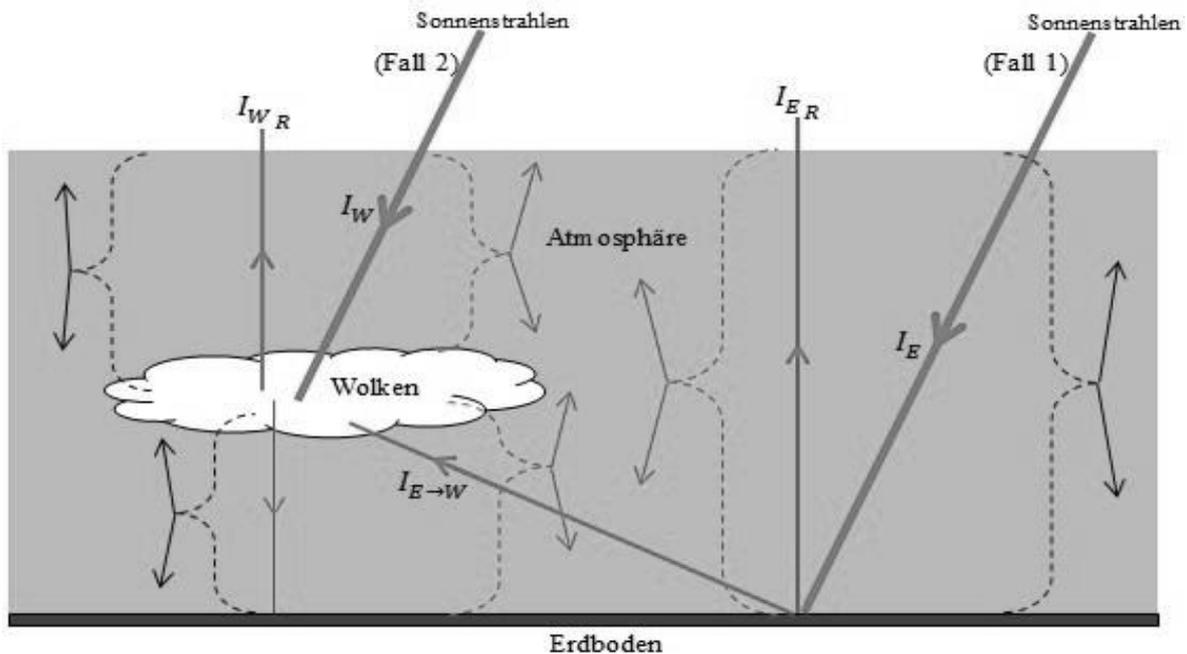


Abbildung 2.4.3: Darstellung der Entstehung der Strahlungen. Die roten und schwarzen Pfeile stellen jeweils kurze Wellenlängen und lange Wellenlängen dar. Die roten und schwarzen gestrichelten Klammern beschreiben jeweils die Streuungs- und die Absorptionsprozesse (s. Abschnitt 2.2.5.2 für die Bezeichnungen).

Es ist hier zu beachten, dass bei der Streuung der Sonnenstrahlen die absolute Wellenlänge nicht verändert wird. Deswegen befinden sich die gestreuten Sonnenstrahlen überwiegend im kurzen Wellenlängenbereich. Im Gegensatz dazu verändert die Absorption die Wellenlängenverteilung hin zum langen Wellenlängenbereich, denn die Reemission erfolgt als thermische Strahlung vergleichsweise niedriger Temperatur (im Vergleich zur Temperatur der direkten Sonnenstrahlung).

Die Berechnung der Abstrahlungsstärke aus Streuung und Absorption kann man durch die Anwendung der Gleichungen (2.2.4a) und (2.2.4b) vornehmen. Streuung und Absorption für die kurzwellige Strahlung wurden in Abschnitt 2.2.2 untersucht. Deswegen wird nachfolgend zunächst nur die Absorption und Streuung von langwelligem Strahlungsanteilen in der Atmosphäre untersucht.

Der Erdboden strahlt immer eine thermische Strahlung (also langwellig) ab (s. Diagramm 2.3.1). Dessen größter Anteil wird von Atmosphäre absorbiert und gestreut, ein kleinerer Teil transmittiert durch die Erdatmosphäre. Nach der Energieumwandlung strahlt die Atmosphäre die absorbierte und gestreute Energie teilweise in Form langwelliger Strahlung zum Erdboden zurück. Da Wolken auf die Absorption und Streuung in der Atmosphäre einen sehr großen Einfluss haben und da dieser Einfluss verdeutlicht werden soll, betrachten wir hier zwei Fälle: Die Atmosphäre ohne Wolken und die Lufthülle der Erde mit Wolken.

Erster Fall: keine Wolken. Wie man aus dem Diagramm 2.4.1 ablesen kann, wird vorwiegend von Wasser fast die komplette Strahlung im Bereich der Wellenlängen von ca. $3\mu\text{m}$ bis $7\mu\text{m}$ und von $26\mu\text{m}$ bis ca. $100\mu\text{m}$ absorbiert.

Daher ist unter Gesichtspunkten der Elementarisierung ausreichend, wenn man nur die kurzwelligen Strahlungen im Bereich von $7\mu\text{m}$ bis $26\mu\text{m}$ untersucht. Das ausführliche Spektrum der Rückstrahlung der Atmosphäre wird im Diagramm 2.4.2 dargestellt [Gemini 2012].

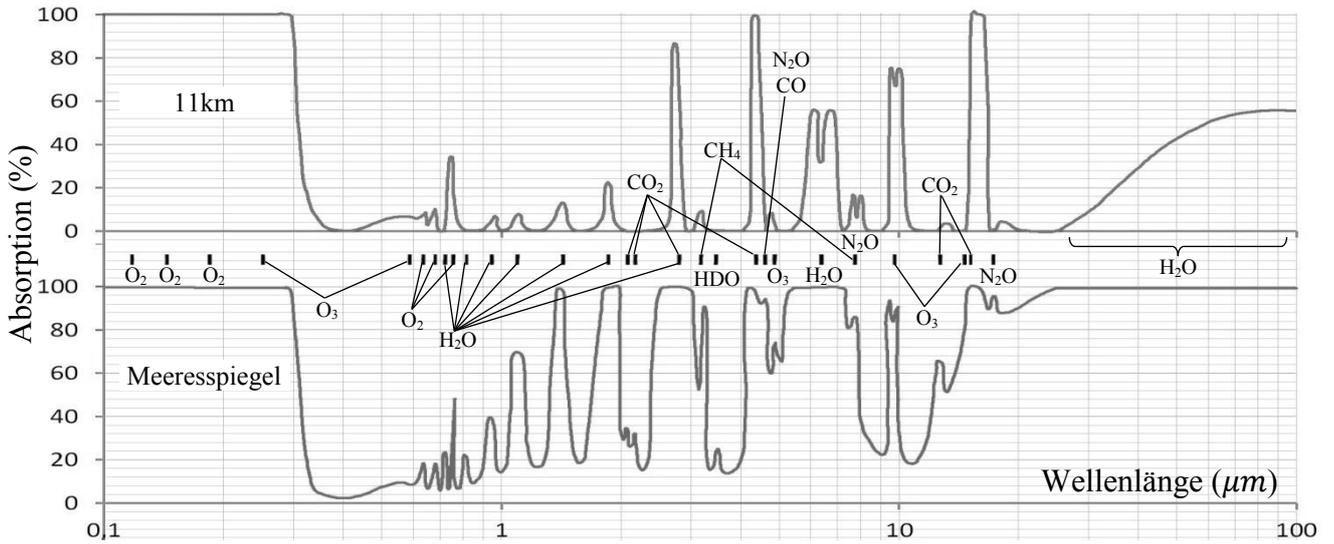


Diagramm 2.4.1: Der Verlauf des Absorptionsgrades mit der Wellenlänge.

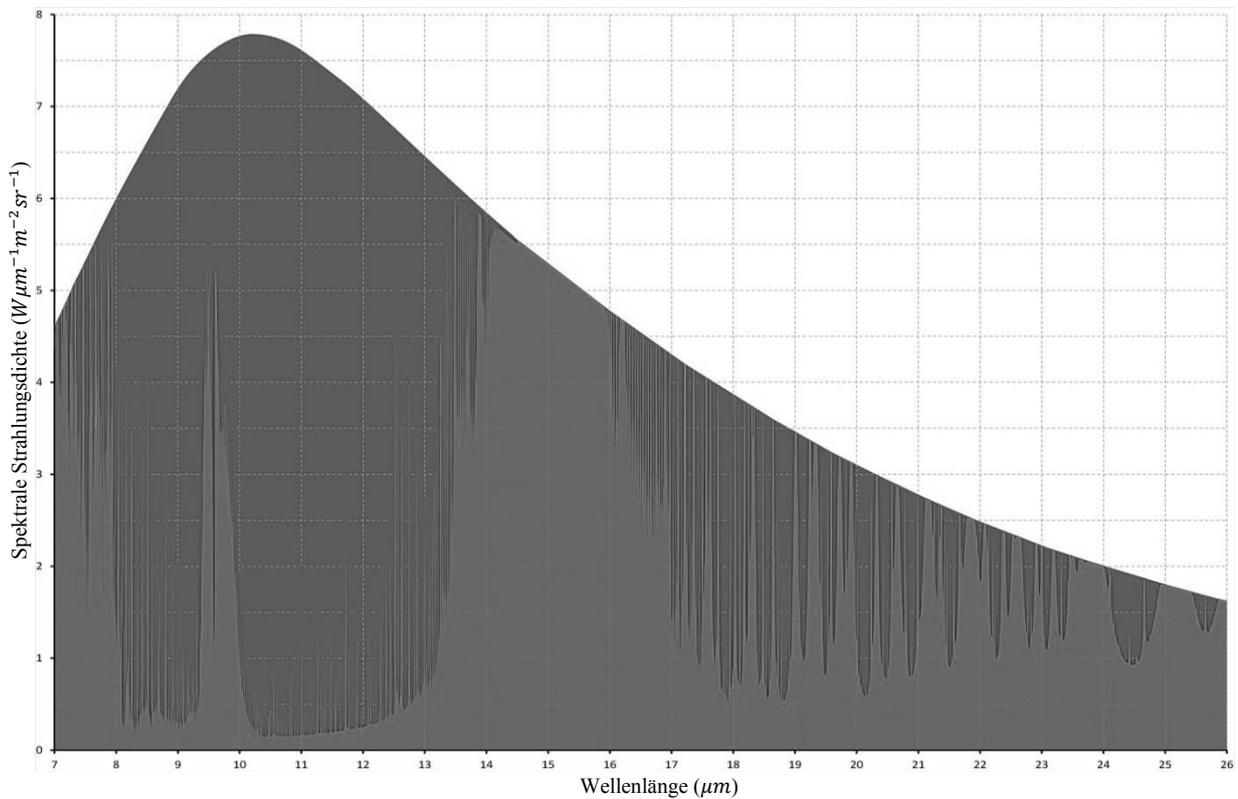


Diagramm 2.4.2: Spektrum der Rückstrahlung der Atmosphäre (mit der Luftmasse $K_{lm} = 1,5$) im Wellenlängenbereich $[7\mu m; 26\mu m]$. Die Braun und Blau markieren Gebiete markieren jeweils die Rückstrahlungsbereiche und die Transmissionsbereiche.

Aus diesem Diagramm kann man unter Berücksichtigung des bouguer-lambert-beerschen Gesetzes entnehmen, dass gilt

$$\frac{D_{Trans}}{B_{Ein}} = \frac{B_{Ein} \cdot e^{-k_l K_{lm} H_0}}{B_{Ein}} = e^{-k_l \cdot 1,5 \cdot H_0} = \frac{S_{Blau}}{\Sigma S} \quad (2.4.6a).$$

Dabei werden D_{Trans} , B_{Ein} und k_l jeweils als Abstrahlungsstärke der langwelligen Transmissionsstrahlung, Bestrahlungsstärke der langwelligen Einstrahlung und langwelliger

Extinktionskoeffizient bezeichnet (Abb. 2.4.4a). S_{Blau} und $\sum S$ sind jeweils die braune Fläche und die Gesamtfläche von ca. $3\mu m$ bis ca. $100\mu m$ im Diagramm 2.4.1.

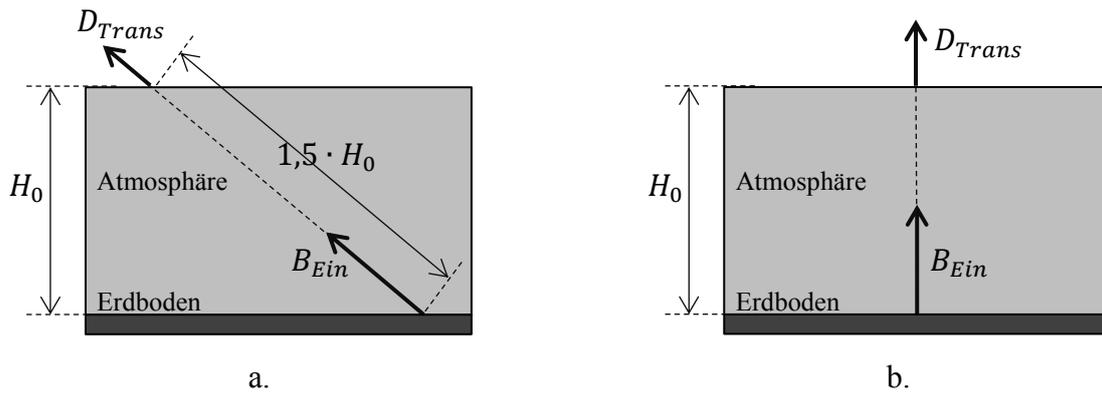


Abbildung 2.4.4: Bezeichnungen zur Berechnung des langwelligen Transmissionsgrads $T_l(1)$ für die Luft ohne Wolken.

Mit der Luftmasse $K_{lm} = 1$ (Abb. 2.4.4b) gilt für den langwelligen Transmissionsgrad $T_l(1)$ für die Luft ohne Wolken

$$T_l(1) = \frac{D_{Trans}}{B_{Ein}} = \frac{D_{Ein} \cdot e^{-k_l \cdot 1 \cdot H_0}}{B_{Ein}} = e^{-k_l \cdot H_0} \quad (2.4.6b).$$

Aus den Gleichungen (2.4.6a) und (2.4.6b) folgt

$$T_l(1) = \left(\frac{S_{Blau}}{\sum S} \right)^{2/3}.$$

Die Gesamtfläche $\sum S$ kann anhand des Diagramms 2.3.4 ermittelt werden. Es gilt $\sum S = S_{3 \rightarrow 7} + S_{7 \rightarrow 26} + S_{26 \rightarrow 100}$. Dabei ist die Bezeichnung $S_{a \rightarrow b}$ für die Fläche von $a(\mu m)$ bis $b(\mu m)$. Deswegen muss man die Kurve aus Diagramm 2.3.4 in drei Bereiche aufteilen (Diagramm 2.4.3).

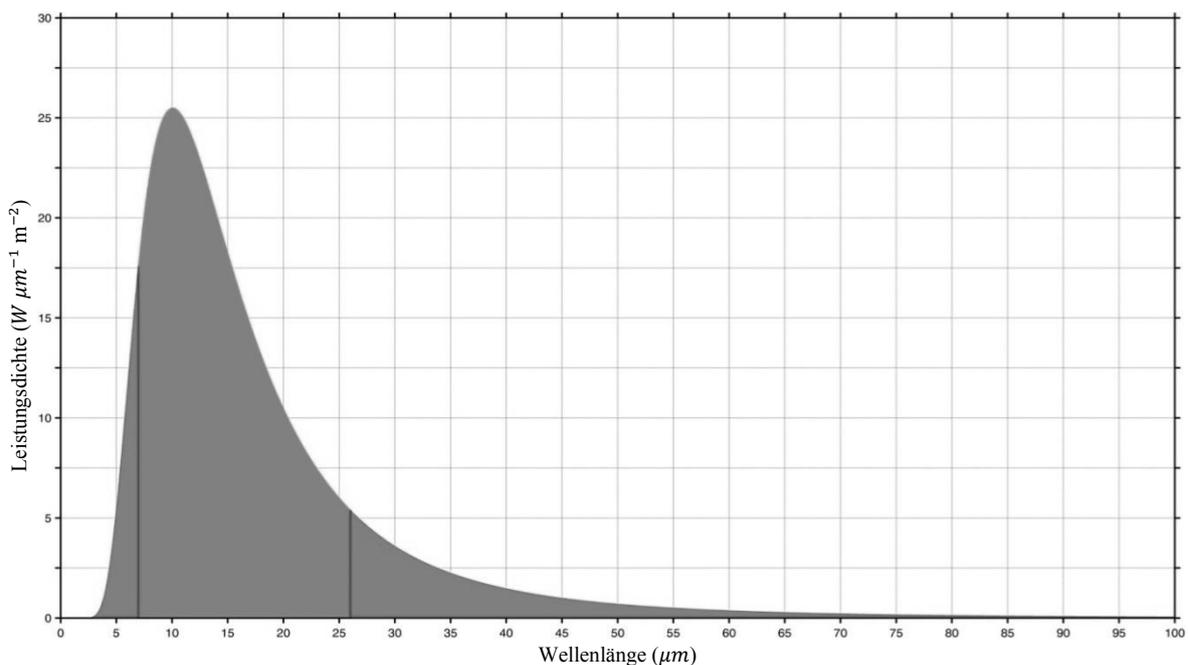


Diagramm 2.4.3: Darstellung der Verteilung der Bestrahlungsstärke in den drei entscheidenden Wellenlängenbereichen der langwelligen Rückstrahlung.

Mit Hilfe einer grafischen Software ergibt sich

$$\frac{\sum S}{S_{7 \rightarrow 26}} = \frac{\text{Rote Fläche} + \text{Grüne Fläche}}{\text{Grüne Fläche}} = \frac{9578 + 32976(\text{Pixel})}{32976(\text{Pixel})} \approx 1,29$$

$$\Leftrightarrow \sum S \approx 1,29 \cdot S_{7 \rightarrow 26}.$$

Damit gilt für den langwelligen Transmissionsgrad

$$T_l(1) = \left(\frac{S_{\text{Blau}}}{\sum S} \right)^{2/3} \approx \left(\frac{S_{\text{Blau}}}{1,29 \cdot S_{7 \rightarrow 26}} \right)^{2/3}.$$

Auf dem Diagramm 2.4.2 und mit Hilfe einer grafischen Software folgt:

$$S_{7 \rightarrow 26} = S_{\text{Braun}} + S_{\text{Blau}} = 74526(\text{Pixel}) + 92412(\text{Pixel}) = 166938(\text{Pixel}).$$

Somit ergibt sich für den langwelligen Transmissionsgrad

$$T_l(1) \approx \left(\frac{S_{\text{Blau}}}{1,29 \cdot S_{7 \rightarrow 26}} \right)^{2/3} = \left(\frac{92412(\text{Pixel})}{1,29 \cdot 166938(\text{Pixel})} \right)^{2/3} \approx 0,569.$$

Es gilt stets $T_l + A_l + R_l = 1$. Dabei sind $A_l = \frac{B_{\text{Absorp}}}{B_{\text{Hin}}}$ und $R_l = \frac{D_{\text{Reflex}}}{B_{\text{Hin}}}$ der langwellige Absorptions- und Reflexionsgrad. Die Bezeichnungen B_{Absorp} und B_{Reflex} sind jeweils die langwellig absorbierte Bestrahlungsstärke und die langwellige reflektierte Abstrahlungsstärke. Es ist zu beachten, dass nach allen Energieumwandlungen die von der Atmosphäre absorbierte Energie letztlich trotzdem als langwellige Wärmestrahlung vorliegt, denn z. B. das geringe Wärmespeichervermögen der Lufthülle oder chemische Prozesse fallen nicht ins Gewicht. Die sekundären langwelligen Strahlungen werden entweder in die vom Boden kommende und durch die Atmosphäre transmittierte Strahlung oder in die zum Boden reflektierte Rückstrahlung eingemischt. Deswegen gilt bei unter Bedingung: $T_l + R_l = 1$. Daher gilt für den langwelligen Reflexionsgrad für Luft ohne Wolken

$$R_l(1) = 1 - T_l(1) \approx 0,431 \quad (2.4.6c)$$

Zweiter Fall: Wolken in der Atmosphäre

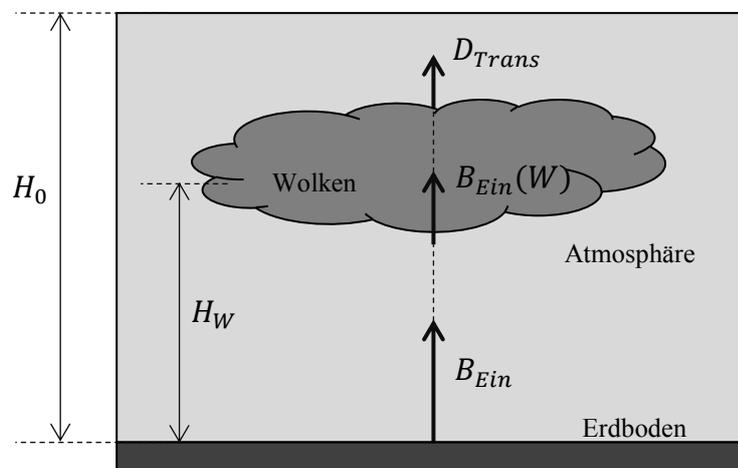


Abbildung 2.4.5: Bezeichnungen zur Berechnung des langwelligen Transmissionsgrads $T_l(2)$ für Wolken in der Atmosphäre.

Es ist ersichtlich, dass ein Energieanteil der Strahlung von der Atmosphäre zwischen Boden und Wolken absorbiert und gestreut wird, bevor die langwellige Strahlung vom Erdboden auf die Wolken trifft. Daher gilt für die (vom Erdboden stammende) langwellige Bestrahlungsstärke der Einstrahlung auf die Wolken (Abb. 2.4.5)

$$B_{Ein}(W) = B_{Ein} \cdot e^{-k_l \cdot H_W}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.2.5) folgt für die Abstrahlungsstärke der transmittierten Strahlung oberhalb der Wolken

$$D_{Trans} = \frac{B_{Ein}(W)}{1 + \bar{\tau}} = \frac{B_{Ein} \cdot e^{-k_l \cdot H_W}}{1 + \bar{\tau}}.$$

Somit erhält man für den gesamten langwelligen Transmissionsgrad $T_l(2)$ von Luftmassen und Wolken

$$T_l(2) = \frac{D_{Trans}}{B_{Ein}} = \frac{e^{-k_l \cdot H_W}}{1 + \bar{\tau}} \quad (2.4.6d).$$

Aus den Gleichungen (2.4.6a) und (2.4.6d) ergibt sich

$$T_l(2) = \frac{1}{1 + \bar{\tau}} \cdot (T_l(1))^{H_W/H_0} = \frac{1}{1 + \bar{\tau}} \cdot (1 - R_l(1))^{H_W/H_0}.$$

Da das prinzipielle Verhalten der langwelligen Rückstrahlung von den Wolken zur Erdoberfläche gleich ist wie für den ersten Fall, gilt für den gemeinsamen langwelligen Reflexionsgrad $R_l(2)$ für die Atmosphäre mit Wolken

$$R_l(2) = 1 - T_l(2) = 1 - \frac{1}{1 + \bar{\tau}} \cdot (1 - R_l(1))^{H_W/H_0} \quad (2.4.6e).$$

Für eine verallgemeinerte Betrachtung der gesamten Lufthülle hat man den relativen Bedeckungsgrad, also die Wolkenbedeckung WD (s. Abschnitt 2.2.3.2), zu berücksichtigen. Es gilt für den Mittelwert des langwelligen Reflexionsgrades \bar{R}_l

$$\begin{aligned} \bar{R}_l &= R_l(1) \cdot (1 - WD) + R_l(2) \cdot WD \\ \Leftrightarrow \bar{R}_l &= R_l(1) \cdot (1 - WD) + \left(1 - \frac{1}{1 + \bar{\tau}} \cdot (1 - R_l(1))^{H_W/H_0} \right) \cdot WD \quad (2.4.6f). \end{aligned}$$

Anhand dieser Gleichung und mit Hilfe des Matlab-Codes (s. Anhang: [A 2.4.1] ... [A 2.4.10]) erhält man für den Mittelwert des langwelligen Reflexionsgrades

$$\bar{R}_l \approx 0,694 \quad (2.4.6g).$$

2.4.2.2 Die Strahlung bei Vernachlässigung der langwelligen Wechselwirkung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre

In diesem Abschnitt betrachten wir nur die ersten sechs Strahlungsanteile gemäß Abbildung 2.4.6: die solare Einstrahlung, die kurzwellige Rückstrahlung oberhalb der Erdatmosphäre, die langwellige Rückstrahlung oberhalb der Erdatmosphäre, die solare Einstrahlung auf die Erdoberfläche, die

kurzwellige Rückstrahlung von der Erdoberfläche und die langwellige Rückstrahlung von der Erdoberfläche. Hier betrachten wir noch nicht im Detail die langwelligen Abstrahlungen vom Erdboden und deren vielfach rückgekoppelten Auswirkungen auf den Erdboden, sondern nur eine vereinfachte Strahlungsbilanz nach Abbildung 2.4.6. Dieses Vorgehen ist natürlich hauptsächlich unter vereinfachenden Gesichtspunkten didaktisch motiviert. Die Bestrahlungsstärken bzw. Abstrahlungsstärken der genannten Strahlungsanteile werden jeweils mit B , D_k , D_l , $B_{O,k}$, $D_{O,R,k}$ und $B_{O,l}$ bezeichnet, $B_O(0)$ gibt die von der Erdoberfläche absorbierte Bestrahlungsstärke von beiden – also von lang- und kurzwelligen - Strahlungen an.

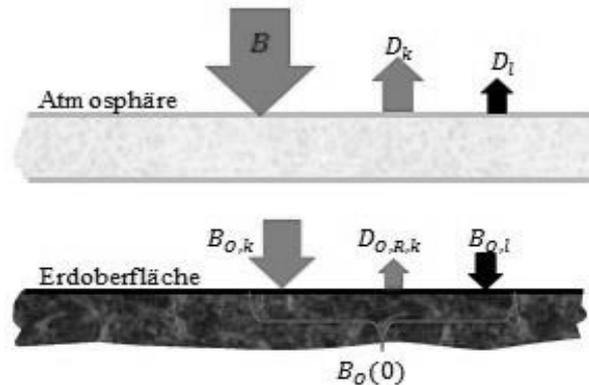


Abbildung 2.4.6: Veranschaulichung der Bestrahlungsstärke der solaren Einstrahlung und ihrer sekundären Strahlungen. Mit den Farben Rot und Schwarz werden jeweils die kurzwellige und die langwellige Strahlung dargestellt.

Aus der Abb. 2.4.3 ist ersichtlich, dass sich die solare Einstrahlung wegen der Absorption und der Streuung auf viele andere Strahlungsanteile sowohl in Form kurzer Wellen als auch langer Wellen verteilt. Die Bestrahlungsstärken dieser Strahlungsanteile können berechnet werden, in dem man die Gleichungen entweder aus den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3.3 anwendet oder die Gleichungen aus Abschnitt 2.4.2.1 nutzt. Darüber hinaus kann man anhand des Verfahrens der Zerlegung von Strahlungen (wie in Abschnitt 2.5.2.2) auch die Formeln für die Bestrahlungsstärken finden. Mit denselben Formeln kann man den Matlab-Code (s. Anhang: [A 2.4.1] ...[A 2.4.10]) für die Berechnung der Bestrahlungsstärke erstellen. So erhält man die nachfolgend gegebenen Mittelwerte der Bestrahlungsstärken bzw. Abstrahlungsstärken:

$$\bar{B} \approx 339 \text{ W/m}^2.$$

$$\bar{D}_k = \bar{A} \cdot \bar{B} = 104 \text{ W/m}^2.$$

$$\bar{D}_l \approx 84 \text{ W/m}^2.$$

$$\bar{D}_{O,R,k} \approx 14 \text{ W/m}^2.$$

$$\bar{B}_{O,l} \approx 30 \text{ W/m}^2 \quad (2.4.7a).$$

$$\bar{B}_{O,k} = \bar{B}_{O,k,p} + \bar{B}_{O,k,s} \approx 135 \text{ W/m}^2 \quad (2.4.7b).$$

$$\bar{B}_O(0) \approx 151 \text{ W/m}^2 \quad (2.4.7c).$$

Dabei sind $B_{O,k,p} = 89 \text{ W/m}^2$ und $\bar{B}_{O,k,s} = 46 \text{ W/m}^2$ jeweils die kurzwellige Bestrahlungsstärke der parallelen (direkten) Sonnenstrahlungen und der gestreuten Sonnenstrahlungen (wegen der Wolken).

2.4.2.3 Die Wechselwirkung der langwelligen Strahlung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre

Das Verhalten der langwelligen Strahlungswechselwirkung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre ist prinzipiell gleich wie beim zweiten Schritt im Abschnitt 2.4.1.2. Es kommt zur aufeinanderfolgenden Wiederholung von Abstrahlung bzw. Einstrahlung, wobei sich die jeweiligen Strahlungsstärken nach dem Gesetz der geometrischen Zahlenfolge abschwächen (Abb. 2.4.7).

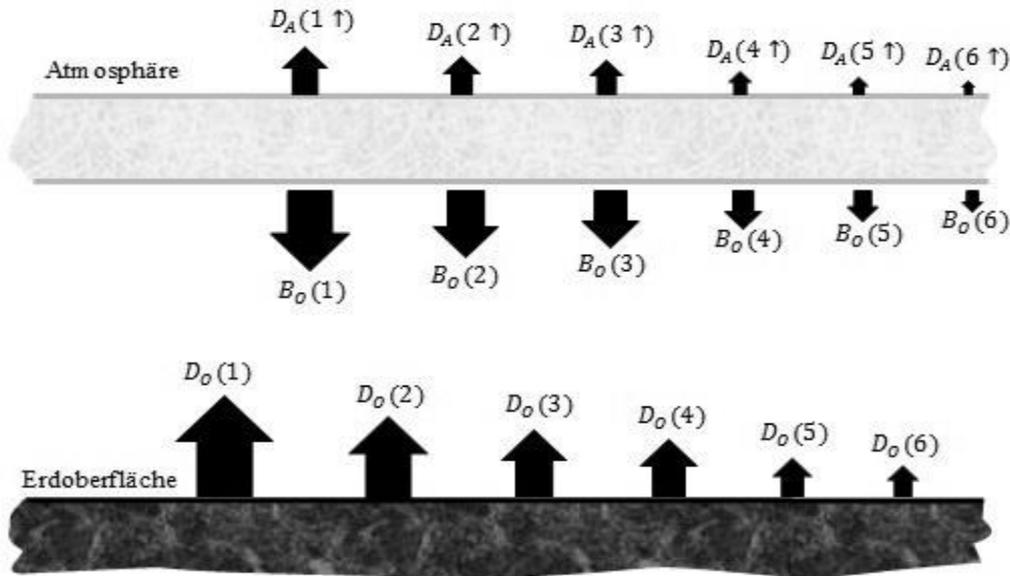


Abbildung 2.4.7: Veranschaulichung des langwelligen Strahlungsverhaltens von Erdoberfläche und Erdatmosphäre. Die Größe der Pfeile ist proportional zur Abstrahlungsstärke bzw. Bestrahlungsstärke.

Die Bezeichnungen auf der Abb. 2.4.7 sind so wie die bei Abschnitt 2.4.1.2. Aus dem in Abschnitt 2.4.2.1 Gesagten folgt:

$$B_o(i) = R_l \cdot D_o(i).$$

Dabei ist i die Ordinalzahl der Iterationsschritte.

2.4.2.4 Die Oberflächentemperatur für eine statische Atmosphäre

Bei dieser Betrachtung nehmen wir an, dass es keine Bewegungsvorgänge in der Lufthülle gibt, also insbesondere keinen Wind und keine Konvektion, durch die sich ja die Temperaturverläufe in Bodennähe drastisch ändern könnten. Auch wärmende oder kühlende Meeresströmungen seien nicht vorhanden. Deshalb besteht die Art der Wärmeübertragung nur aus zwei Komponenten: Wärmeleitung und Wärmestrahlung. Da die Wärmeleitfähigkeit der Luft ganz gering ist (ca. $0,0262 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$), kann die Wärmeleitung in der Luft vernachlässigt werden. Man sieht daraus, die Erdoberfläche kann die ganze absorbierte Strahlungsenergie im Gleichgewichtszustand nur durch Abstrahlung wieder abgeben. Dann gilt

$$D_o(i + 1) = B_o(i) = R_l \cdot D_o(i).$$

Somit gilt für die gesamte Abstrahlungsstärke von der Erdoberfläche

$$D_o = D_o(1) + D_o(2) + D_o(3) + \dots = D_o(1) + R_l \cdot D_o(1) + R_l^2 \cdot D_o(1) + \dots$$

$$\Rightarrow D_o = D_o(1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} R_l^i = \frac{D_o(1)}{1 - R_l} = \frac{B_o(0)}{1 - R_l} \quad (2.4.7d).$$

Aus den Gleichungen (2.4.7c) und (2.4.7d) ergibt sich für die mittlere Abstrahlungsstärke von der Erdoberfläche

$$\bar{D}_o = \frac{\bar{B}_o(0)}{1 - \bar{R}_l} \approx 493 \text{ W/m}^2 \quad (2.4.7e).$$

Nach Einsetzen von $\bar{D}_o = 493 \text{ W/m}^2$ in Gleichung (2.4.1) folgt für die mittlere Temperatur der Erdoberfläche

$$\bar{T}_o = \left(\frac{\bar{D}_o}{\sigma} \right)^{1/4} \approx 306,8 \text{ K} = 33,8 \text{ (}^\circ\text{C)} \quad (2.4.7f).$$

Diese Temperatur ist zu groß. Den Verlauf der täglichen Temperatur in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum kann man mit Hilfe von MatLab simulieren (siehe Anhang: [A 2.5.1] und [A 2.5.2]). Der Verlauf für die tägliche und jährliche Temperatur wird jeweils in den Diagrammen 2.5.1a und 2.5.2 dargestellt.

Auswertung: Wenn wir uns lediglich für die Temperatur der Erdoberfläche interessieren, ist das Ergebnis aus der „vereinfachten Betrachtung“ (Abschnitt 2.4.1) besser als das Ergebnis aus der „vertieften Betrachtung“ (Abschnitt 2.4.2). Deswegen soll die vereinfachte Betrachtung in der Schule verwendet werden, wenn das Thema „Temperatur der Erdoberfläche“ im Unterricht diskutiert wird. Die vertiefte Betrachtung erfüllt aus didaktischer Sicht aber trotzdem eine wesentliche Bedingung: durch sie werden die Zahlenwerte der wesentlichen Einflussfaktoren gefunden, mit deren Hilfe man die Ergiebigkeit regenerativer Energiequellen (in den nächsten Abschnitten) abschätzen kann.

2.5 Verteilung der Erdoberflächentemperatur

Im Abschnitt 2.4 wurde ausschließlich mit der Modellannahme einer hydrostatisch stabilen und ruhenden Atmosphäre gearbeitet. Die Auswirkungen von Wärmetransport und Wärmespeicherung wurden noch nicht berücksichtigt. Das führte zur Überschätzung der mittleren globalen Temperatur und zu einer meridionalen und jahreszeitlichen Temperaturverteilung, die gegenüber der Realität noch große Abweichungen aufweist. In diesem Abschnitt werden durch aufeinanderfolgende Betrachtungen der Auswirkungen von Wärmespeicherung und Wärmetransport schrittweise Verbesserungen des einfachen Ausgangsmodells erreicht. Zuerst untersucht man lediglich den vertikalen Wärmetransport (Abschnitt 2.5.1), danach wird die Wärmespeicherung (Abschnitt 2.5.2) in die Betrachtung eingeführt. Zum Schluss wird der horizontale Wärmetransport (Abschnitt 2.5.3) in die Betrachtung aufgenommen. Bei den gesamten drei Auswirkungen sind sowohl die abgeschätzte Temperatur als auch die prognostizierten Verteilungen der Temperatur fast identisch mit tatsächlich auf der Erde gemessenen Werten.

2.5.1 Betrachtung lediglich mit vertikalem Wärmeausgleich

Wind und Konvektion bewegen die Luft senkrecht zum Erdboden, es kommt deshalb zu einem vertikalen Wärmetransport. D.h. von wärmeren Orten nahe der Erdoberfläche wird Wärme in der Atmosphäre nach oben transportiert, wo es viel kälter ist. (Abb. 2.5.1).

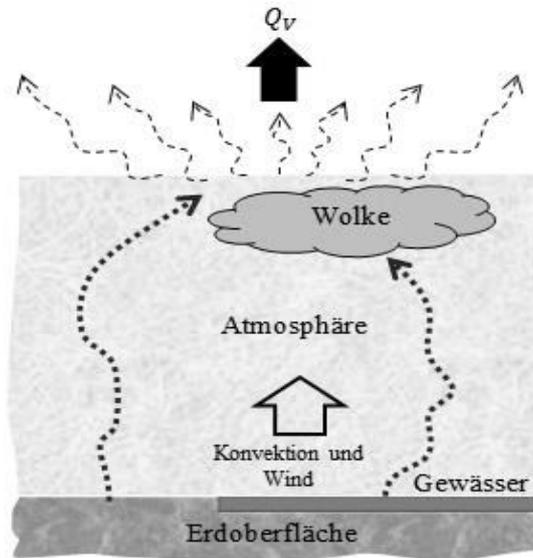


Abbildung 2.5.1: Illustration des Wärmeverlusts in Bodennähe wegen des vertikalen Wärmetransports.

Durch diesen Wärmetransport kommt es zu einem Energieverlust, der auch die Abstrahlung vom Boden reduziert. Deshalb werden die Werte von \bar{D}_0 bzw. \bar{T}_0 kleiner als die überschätzten Angaben aus den Gleichungen (2.4.7e) bzw. (2.4.7e), der beschriebene Vorgang spielt eine merkliche Rolle beim vertikalen Wärmeausgleich über der Erdoberfläche. Wir nennen die vertikal transportierte Wärmeleistung pro 1m^2 der Erdoberfläche die vertikale Wärmeregung Q_V . Insgesamt muss die Gleichung (2.4.7e) auf folgende Gleichung verändert werden:

$$D_0 + Q_V = \frac{B_0(0)}{1 - \bar{R}_l}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.4.1) folgt

$$D_0 = \sigma \cdot T_0^4 = \frac{B_0(0)}{1 - \bar{R}_l} - Q_V$$

$$\Leftrightarrow Q_V = \frac{B_0(0)}{1 - \bar{R}_l} - \sigma \cdot T_0^4 \quad (2.5.1a).$$

Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der Oberflächentemperatur T_0 und der vertikalen Wärmeregung Q_V . Der Mittelwert der Oberflächentemperatur ist bekannt $\bar{T}_0 = 15^\circ\text{C} = 288\text{K}$, daher gilt für den Mittelwert der vertikalen Wärmeregung \bar{Q}_V

$$\bar{Q}_V = \frac{B_0(0)}{1 - \bar{R}_l} - \sigma \cdot T_0^4 \approx 103(\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (2.5.1b).$$

Die Verläufe der täglichen und jährlichen mittleren Temperatur werden jeweils in den Diagrammen 2.5.1b und 2.5.2 dargestellt (Matlab-code, siehe Anhang: [A 2.5.1], [A 2.5.2] und [A 2.5.3])

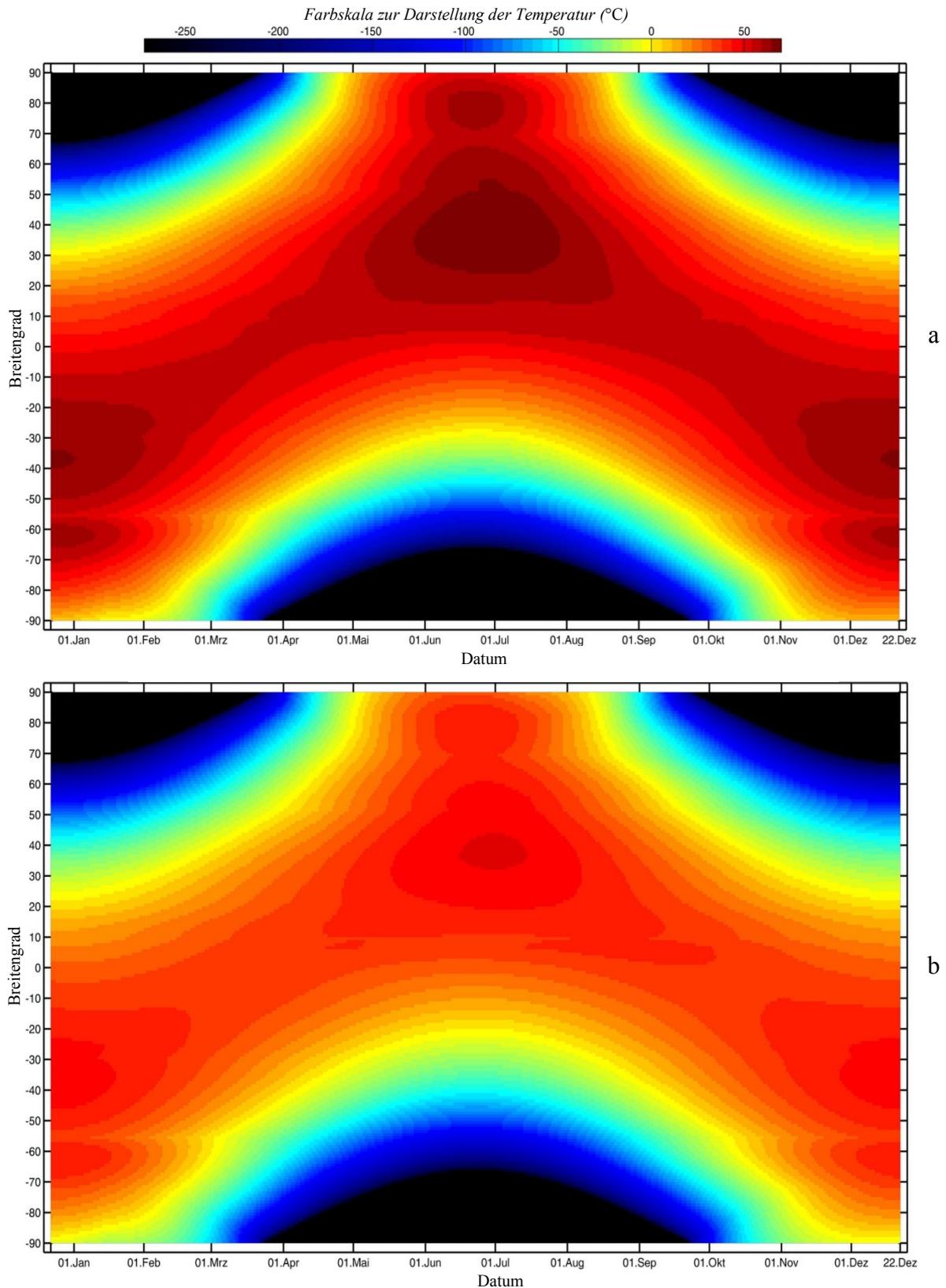


Diagramm 2.5.1: Die tägliche mittlere Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum. a: Ohne bewegliche Luft, b: Mit vertikal beweglicher Luft.

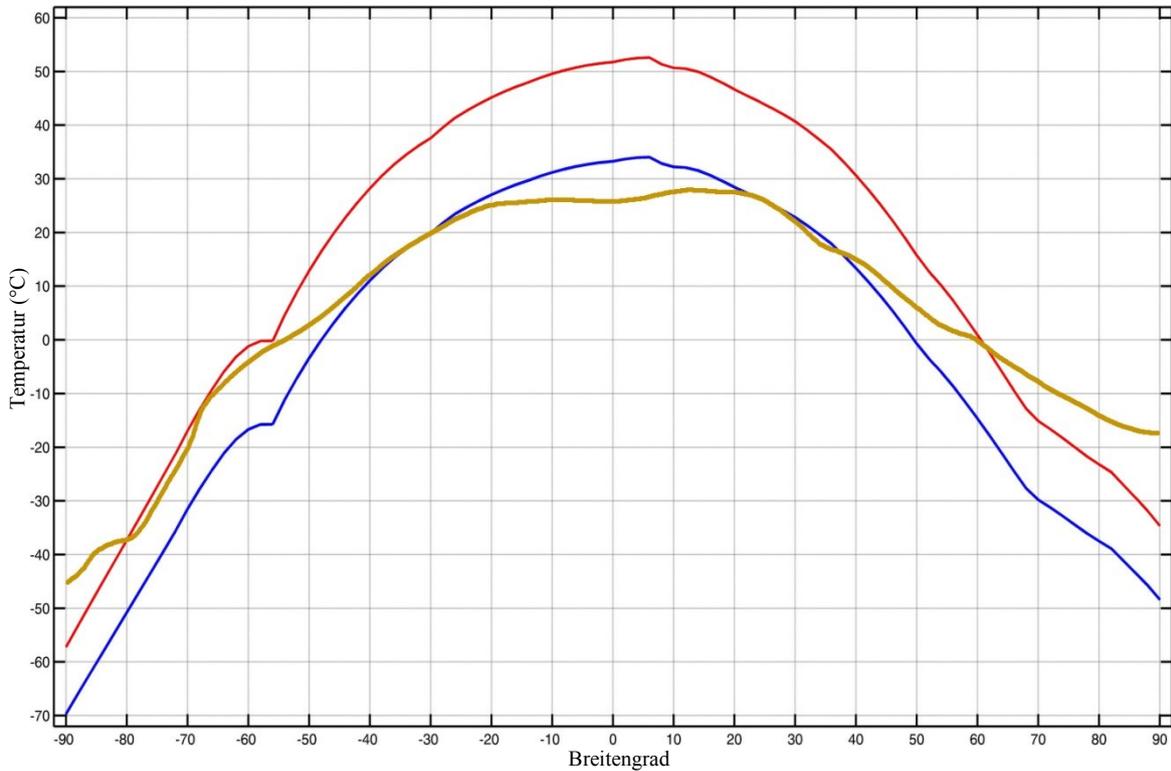


Diagramm 2.5.2: Verteilung der jährlichen mittleren Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad für: Betrachtung mit statischer Luft (Rot); Betrachtung mit lediglich vertikaler Wärmeregulierung (Blau); und die gemessenen Werte (orange), Quelle: [ISCCP 2014].

Auswertung: Mit der Betrachtung der vertikalen Wärmeregulierung Q_V kann man die globale mittlere Erdoberflächentemperatur $\bar{T}_O \approx 15^\circ\text{C}$ korrekt berechnen. Die Verteilung der Erdoberflächentemperatur im Diagramm 2.5.1 hat jedoch sehr große Abweichungen, beispielsweise kann die Temperatur in Polnähe nicht niedriger als -250°C im Winter oder größer als 40°C im Sommer sein. Diese großen Abweichungen entstehen durch Vernachlässigung von Wärmespeicherung und Wärmübertragung durch horizontal bewegte Luftmassen.

2.5.2 Betrachtung mit Wärmespeicherung

Die jahreszeitlichen Änderungen der mittleren Erdoberflächentemperaturen an den jeweiligen Breitengraden kann man im Diagramm 2.5.3 erkennen.

Aus diesem Diagramm ist erkennbar, dass der größte Temperaturunterschied zwischen den Jahreszeiten ca. 30°C beträgt (in höheren geographischen Breiten). Im Vergleich mit Diagramm 2.5.1 ist ersichtlich, dass aus den obigen Ergebnissen der Temperaturunterschied zwischen Sommer und Winter zu groß geschätzt wurde. Das bedeutet: Die Wärmespeicherung (vor allem) der Erdoberfläche bzw. der Atmosphäre spielt eine wichtige Rolle für die Einstellung der Erdoberflächentemperatur im Lauf der Jahreszeiten. Nachfolgend zeigen wir die Fähigkeit dieser Wärmespeicherung.

Wir nehmen an, dass die Erde von der Sonne nicht mehr beschienen würde. Die Erde mit einer mittleren Temperatur $\bar{T}_{OA} = 255\text{K} = -18^\circ\text{C}$ (aus der vereinfachten Berechnung s. Abschnitt 2.1.1) würde abgekühlt, indem sie die Strahlung zum Weltall nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz emittierte. Es gilt für die Wärmeverlustleistung P_{WV} (Abb. 2.5.2) pro eine betrachtete Erdoberfläche S

$$P_{WV} = \sigma \cdot S \cdot T_{OA}^4$$

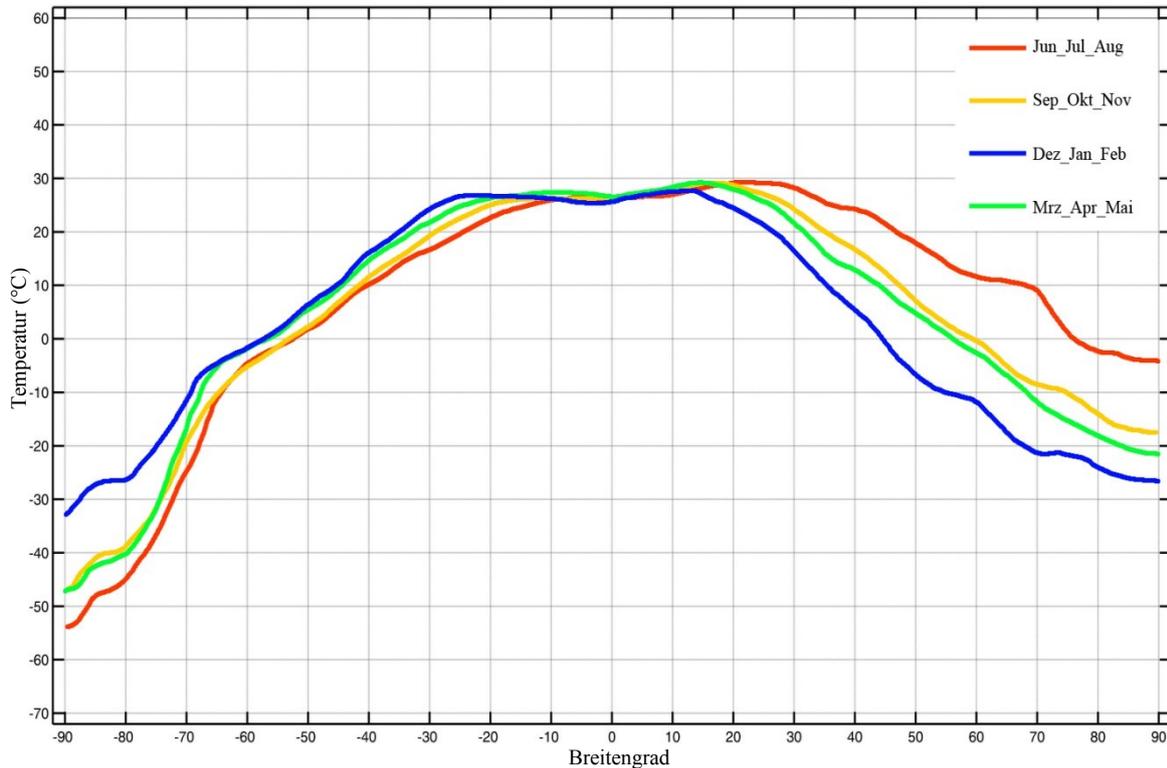


Diagramm 2.5.3: Verteilung jahreszeitlicher Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad. Die Werte stammen aus [ISCCP 2014].

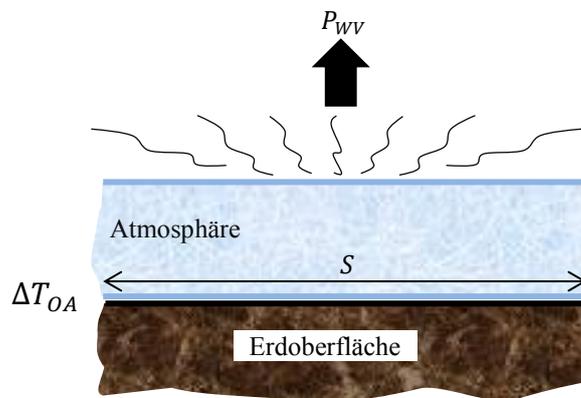


Abbildung 2.5.2: Bezeichnungen für die Berechnung der Wärmeverlustleistung.

Die Wärmeverlustleistung P_{WV} führt zur Abnahme der Temperatur ΔT von der Erdoberfläche bzw. Atmosphäre im betreffenden Zeitintervall Δt . Schätzt man den Wärmeverlust in erster Näherung linear ab, dann gilt

$$P_{WV} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(c_O \cdot m_O + c_A \cdot m_A) \cdot \Delta T}{\Delta t}$$

Dabei ist $\Delta Q = (c_O \cdot m_O + c_A \cdot m_A) \cdot \Delta T$ der Wärmeverlust von der Erdoberfläche und Atmosphäre infolge der Abnahme der Temperatur ΔT_{OA} . Die Bezeichnungen c und m kennzeichnen jeweils die spezifische Wärmekapazität und die Masse, die an der Erdwärmeübertragung beteiligt ist. Die Indizes O und A kennzeichnen jeweils die Erdoberfläche oder die Atmosphäre. Damit gilt

$$\frac{(c_O \cdot m_O + c_A \cdot m_A) \cdot \Delta T}{\Delta t} = \sigma \cdot S \cdot T_{OA}^4$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta T} = \frac{c_O \cdot \frac{m_O}{S} + c_A \cdot \frac{m_A}{S}}{\sigma \cdot T_{OA}^4} = \frac{c_O \cdot M_O + c_A \cdot M_A}{\sigma \cdot T_{OA}^4} \quad (2.5.2a)$$

Dabei sind M_O und M_A jeweils die im Prozess wirksamen Massen von Erdoberfläche und Atmosphäre pro $1m^2$ Erdoberfläche. Die spezifische Wärmekapazität der Luft bei Standardbedingungen beträgt $c_A = 1,005(kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$. Aus der Gleichung (2.2.2f) gilt für M_A

$$M_A = \frac{m_A}{S} = \rho_0 \cdot H_0 \approx 1,293 \left(\frac{kg}{m^3} \right) \cdot 8,43(km) \approx 10,9 \cdot 10^3 \left(\frac{kg}{m^2} \right).$$

Wobei $\rho_0 = 1,293(kg/m^3)$ die Luftdichte bei Standardbedingungen ist.

Da ca. 71% der Erdoberfläche von Gewässer bedeckt sind, kann man für die Berechnung von M_O vereinfacht annehmen, dass die Wärmeübertragung von Erdoberfläche zu Meer entschieden wird. Deshalb ist die spezifische Wärmekapazität der Erdoberfläche modellhaft identisch mit der spezifischen Wärmekapazität von Wasser: $c_O = 4,182(kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$. Der entscheidende Einfluss der Meerwassermenge auf die Wärmeübertragung wird durch die sogenannte gemischte Meerwasserschicht festgelegt, also jene Wassertiefe, bis in die das Wasser durchmischt wird und deshalb am Wärmekreislauf beteiligt ist. Diese Mischungsschicht, die auf dem tieferen Meer aufliegt, hat eine jahreszeitlich und mit dem geografischen Ort variierende Tiefe. Aus der Quelle [Montégut 2004] entnimmt man für diese Tiefe H_G ca. $10m$ bis $150m$. Wir nehmen vereinfacht $H_G = 80m$ an. Daher folgt für M_O

$$M_O = \rho_W \cdot H_G = 10^3 \left(\frac{kg}{m^3} \right) \cdot 80(m) \approx 8 \cdot 10^4 \left(\frac{kg}{m^2} \right).$$

Dabei ist $\rho_W = 10^3(kg/m^3)$ die Wasserdichte.

Nach Einsetzen in Gleichung (2.4.8c) erhält man

$$\frac{\Delta t}{\Delta T} \approx \frac{4,182 \left(\frac{kJ}{kg \cdot K} \right) \cdot 8 \cdot 10^4 \left(\frac{kg}{m^2} \right) + 1,005 \left(\frac{kJ}{kg \cdot K} \right) \cdot 10,9 \cdot 10^3 \left(\frac{kg}{m^2} \right)}{5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{W}{m^2 \cdot K^4} \right) \cdot 255(K)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta T} \approx 1,44 \cdot 10^6 \left(\frac{s}{K} \right) \approx 16,7(Tag \cdot K^{-1}) \quad (2.5.2b).$$

Dieser Quotient wird nachfolgend in dieser Arbeit Erdtemperaturträgheit genannt. Mit diesem Ergebnis kann man die Abschätzung des Temperaturunterschieds zwischen Sommer und Winter durchführen. Das Zeitintervall zwischen Sommer und Winter beträgt 182 Tage. Somit gilt für den Temperaturunterschied

$$\Delta T \approx \frac{\Delta t}{16,7 \left(\frac{Tag}{K} \right)} = \frac{182(Tage)}{16,7 \left(\frac{Tag}{K} \right)} \approx 10,9K \quad (2.5.2c).$$

Im Vergleich mit der gemessenen Temperatur (Diagramm 2.5.2) kann man beurteilen, dass dieses Ergebnis eine Unterschätzung in Polnähe und gemäßigten nördlichen Breiten ist, es aber eine Überschätzung für die übrigen Orte darstellt. Der Hauptgrund ist, dass in Polnähe Eis statt Wasser die Erde bedeckt. Die spezifische Wärmekapazität von Eis ist kleiner als die von Wasser. Darüber hinaus

gibt es im das keinen Effekt, der dem der gemischten Meerwasserschicht vergleichbar wäre, deshalb ist die Menge von Eis, die bei der Wärmeübertragung mitwirkt, auch kleiner als die Menge Meerwasser. Demzufolge wird die Wärme in Polnähe nicht so gut wie die im Meer gespeichert. Analoges gilt für die mittleren nördlichen Breitengrade, weil dort vorwiegend Kontinentalmassen die Erde bedecken, im Gegensatz zu den südlichen mittleren Breitengraden, die vorwiegend vom Meer bedeckt werden. Diese Berechnung gilt natürlich nicht für die Äquaturnähe, weil dort immer eine starke Sonneneinstrahlung wirkt. Daher erfüllt diese nicht die angenommenen Bedingungen der Berechnung.

2.5.3 Betrachtung mit horizontaler Wärmeregulierung

Zuerst zeigen wir das in der obigen Betrachtung noch enthaltene Problem. Wir nehmen an, dass die Erde Wärme ideal speichern kann. Das würde bedeuten, dass die Erdtemperaturträgheit $\Delta t / \Delta T$ unendlich groß wäre. Dadurch bliebe die Erdoberflächentemperatur konstant in der Zeit. Ihr Betrag wäre gleich der mittleren jährlichen Temperatur, würde also lediglich vom geografischen Breitengrad abhängen.

Ihre Verteilung kann berechnet werden, indem man in die Berechnung des Diagramms 2.5.1b die Durchschnittsberechnung der Temperatur nach der Zeit durchführt [A 2.5.3]. Die Ergebnisse werden im Diagramm 2.5.4 dargestellt. Aus diesem Diagramm ist erkennbar, dass die Temperatur an niedrigen Breitengraden zwischen ca. -30° bis $+30^\circ$ größer ist, als die Temperatur an den restlichen höheren Breitengraden. Deswegen kann man die Folgerung ableiten, dass auf der Erde ein Wärmetransport von niedrigen nach höheren Breitengraden erfolgen muss.

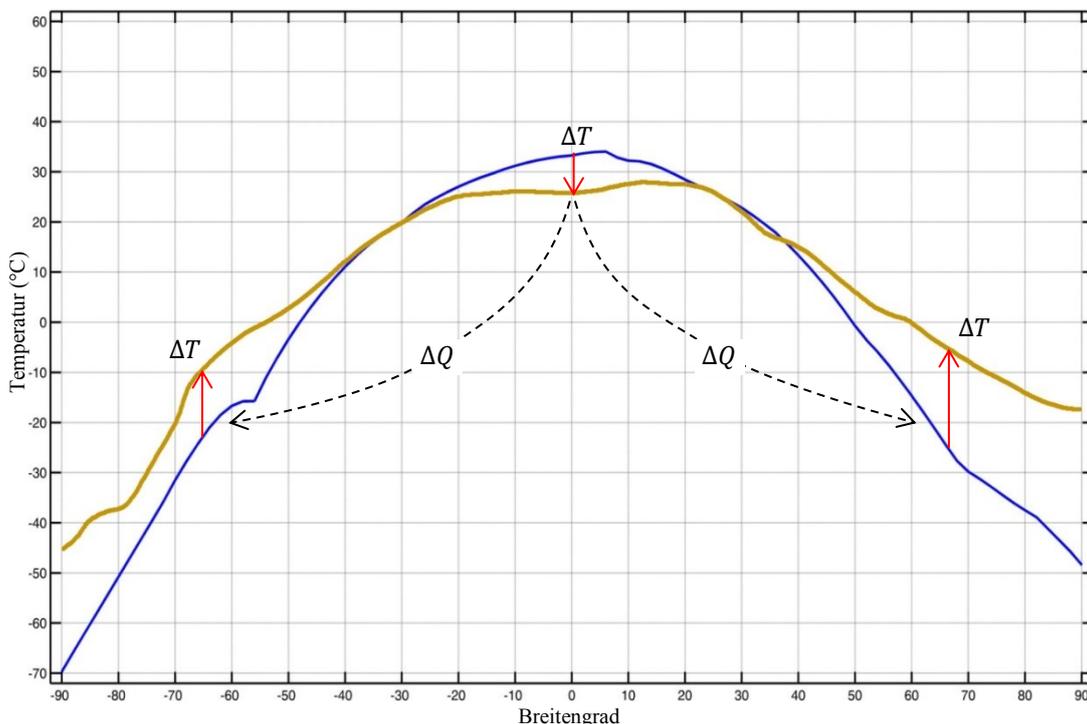


Diagramm 2.5.4: Veranschaulichung der Anwesenheit eines meridionalen Wärmeausgleichs, der sich zwingend aus dem Unterschied zwischen der mit lediglich vertikaler Wärmeregulierung berechneten Temperatur (blau) und den echten Werten ergibt.

Die Ursache dieses Wärmetransports kann mit dem Vorhandensein der horizontal beweglichen Luft (Wind) erläutert werden. Durch horizontalen (meridionalen) Wind wird die Luft zwischen den Breitengraden übertragen. Dieser Wind regt auch auf die Bewegung oberflächennaher Meeresströmungen

an. Die Stofftransporte der Luft und des Meerwassers führen zu einem Wärmetransport zwischen den Breitengraden. Deshalb wird eine große Wärmemenge von wärmeren Orten (niedrigen Breitengraden) nach kälteren Orten (höheren Breitengraden) transportiert (Abb. 2.5.3). Demzufolge nimmt die Temperatur in Äquaturnähe ab, und eine Zunahme der Temperatur für die höheren Breitengrade stellt sich ein. Nach dem Energieerhaltungssatz muss die abgegebene Wärmeleistung aus niedrigen Breitengraden genau gleich wie die aufgenommene Wärmeleistung an den höheren Breitengraden sein. Wir nennen sie die horizontal transportierte Wärmeleistung P_H . Wegen der Energieerhaltung müssen wir anstatt der Berechnung beider (abgegebenener und aufgenommenener) Wärmeleistungen nur die abgegebene Wärmeleistung betrachten.

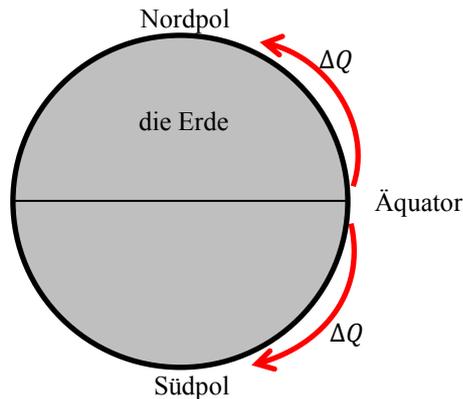


Abbildung 2.5.3: Illustration der meridionalen Wärmeregulation auf der Erde.

Im Diagramm 2.5.4 ist zu beachten: obwohl der Breitengradbereich der wärmeren Orte (von -30° bis 30°) kleiner ist als der Breitengradbereich der kälteren Orte (von -90° bis -30° und von 30° bis 90°), sind seine Oberflächen nach der geometrischen Eigenschaft der Kugel genau gleich. Darüber hinaus muss man auch beachten, dass in einem Breitengradbereich die Temperaturdifferenz in Polnähe größer als die Temperaturdifferenz an Äquaturnähe ist, in demselben Breitengradbereich die Oberfläche in Polnähe jedoch kleiner als die Oberfläche in Äquaturnähe ist.

Weil wir in diesem Abschnitt nur mit der mittleren jährlichen Temperatur arbeiten, ist die Temperatur T allein vom Breitengrad φ abhängig. Wir sehen eine Elementfläche der Erdoberfläche als eine Elementkugeloberfläche dS an. Der Zusammenhang zwischen dieser Elementkugeloberfläche dS und dem Breitengrad φ ist

$$dS = 2\pi \cdot r_E^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

Wobei $r_E \approx 6370\text{km}$ der Erdradius ist. Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt für die emittierte Leistung dP aus der Elementfläche dS der Erdoberfläche bei einer Temperatur T

$$dP = \sigma \cdot T^4 \cdot dS$$

Dabei ist $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}(\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4})$ die Stefan-Boltzmann-Konstante. Wegen der abgegebenen Wärme muss die Erdoberflächentemperatur T_1 , die mit lediglich vertikaler Wärmeregulation berechnet wird (Blaue Kurve auf Diagramm 2.5.5, s. [A 2.5.3]) auf die prognostizierte Temperatur T_2 (Magentarote Kurve aus Diagramm 2.5.5, s. [A 2.5.4]) fallen. Aus dem Diagramm 2.5.5 ist erkennbar, dass die prognostizierte Temperatur T_2 (Magentarote Kurve) fast identisch mit der echten mittleren jährlichen Temperatur (Braune Kurve) ist.

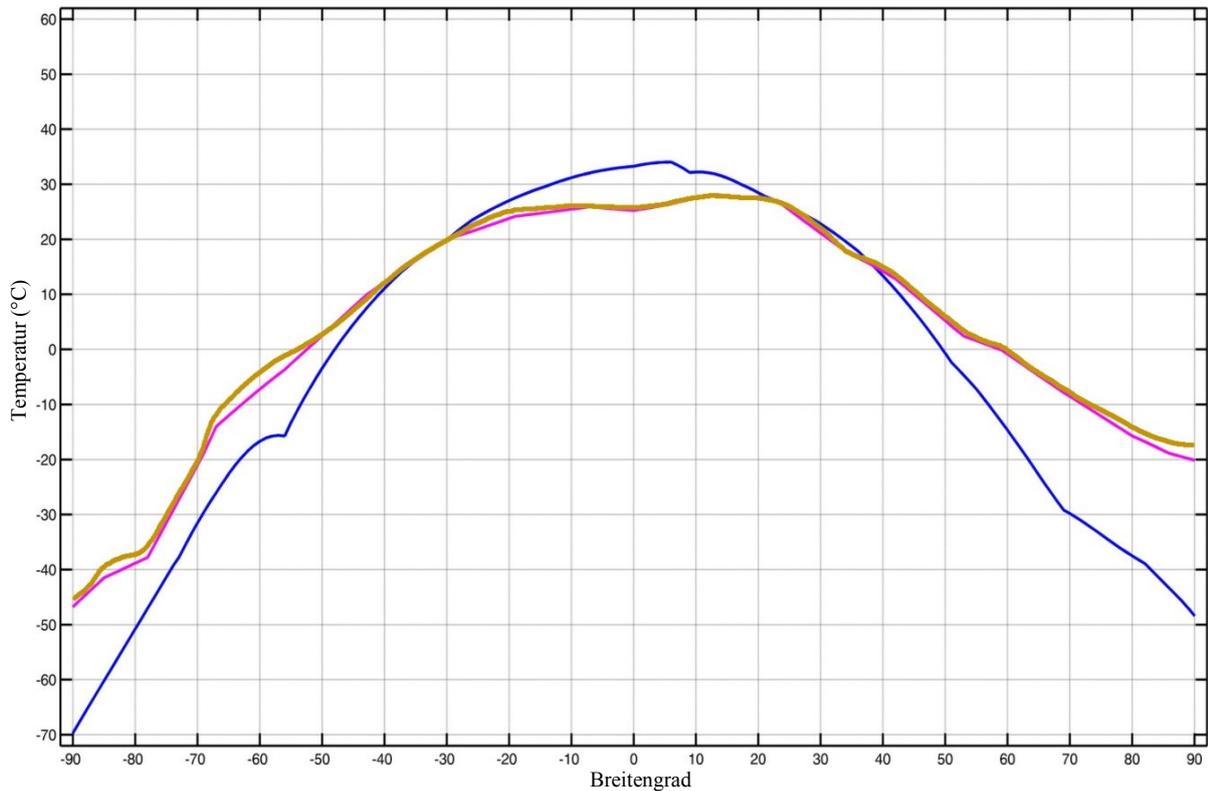


Diagramm 2.5.5: Verteilung jährlicher Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad. Betrachtung mit lediglich vertikaler Wärmeregulierung (blau), Betrachtung mit vertikale und horizontale Wärmeregulierung (Magentarot) und die echte jährliche Temperatur (Orange).

Daher folgt für die die abgegebene Elementwärmeleistung dP_H aus Elementfläche dS

$$dP_H = dP_1 - dP_2 = \sigma \cdot T_1^4 \cdot dS - \sigma \cdot T_2^4 \cdot dS = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \cdot dS$$

$$\Rightarrow dP_H = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \cdot 2\pi \cdot r_E^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

Aus dem Diagramm 2.5.4 bzw. 2.5.5 kann man abschätzen, dass der Breitengradbereich, aus dem die Wärme abgegeben wird, von ca. $-30^\circ = -\pi/6$ (rad) bis $30^\circ = \pi/6$ (rad) reicht. Damit gilt für die gesamte abgegebene Wärmeleistung

$$P_H = \int dP_H \approx \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \cdot 2\pi \cdot r_E^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

Mit den Daten aus Diagramm 2.5.5 kann dieses Integral mit Hilfe der Matlab-Programmierung [A 2.5.5] lösen. Es gilt für die transportierte Wärmeleistung

$$P_H \approx 6,84 \cdot 10^{12} (W) \quad (2.5.3a).$$

Wir nennen die horizontal transportierte Wärmeleistung pro $1m^2$ der Erdoberfläche horizontale Wärmeregulierung Q_H . Dann gilt für den Mittelwert der horizontalen Wärmeregulierung \bar{Q}_H

$$\bar{Q}_H = \frac{P_H}{4\pi \cdot r_E^2} \approx 13 (W \cdot m^{-2}) \quad (2.5.3b)$$

2.6 Abschätzungen der gewonnenen Energie aus regenerativen Energiequellen

Aufgrund der obigen Berechnungsergebnisse kann die theoretische potenzielle Leistungsdichte L_p (die potenzielle Leistung pro 1m^2) aus jeder regenerativen Energiequelle abgeschätzt werden. Durch nachgeschaltete technische Energieumwandlungen erhält man die letztlich gewonnene Leistungsdichte $L_g = \eta \cdot L_p$ in elektrischer Form. Dabei ist η die Effizienz der technischen Energieumwandlung.

Um einen Vergleich mit dem zukünftigen Energieverbrauch zu ermitteln, nehmen wir an, dass Menschen die Energie vorwiegend in der Stadtfläche S_M „verbrauchen“. Diese Energie soll nur aus regenerativen Energiequellen auf der Fläche S_R gewonnen werden. Zurzeit ist der durchschnittliche Energieverbrauch ca. $P_M = 10(\text{kW})$ pro Kopf in Nordamerika [MacKay 2009] und die Bevölkerungsdichte ρ_M einer typisch modernen Stadt (z.B. München) ist ca. $\rho_M = 5000$ Einwohner je km^2 . Diese beide Werte P_M und ρ_M werden bei dieser Arbeit gewählt, um den zukünftigen Energieverbrauch abzuschätzen. Um den Grad der Flächenbesetzung zwischen regenerativen Energiequellen zu vergleichen, führen wir den Flächenbesetzungs-Koeffizienten $\chi = S_R/S_M$. Die gewonnene Energie muss mindestens gleich wie der „Energieverbrauch“ sein. Damit gilt

$$L_g \cdot S_R = P_M \cdot S_M \cdot \rho_M$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{S_R}{S_M} = \frac{\rho_M \cdot P_M}{L_g} = \frac{5000 \left(\frac{\text{Kopf}}{\text{km}^2}\right) \cdot 10 \left(\frac{\text{kW}}{\text{Kopf}}\right)}{L_g} = \frac{50 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)}{L_g} \quad (2.6.1)$$

Nachfolgend werden die theoretische potenzielle Leistungsdichte L_p , die gewonnene Leistungsdichte L_g und der Flächenbesetzungs-Koeffizient χ für fünf Arten der technischen Energieumwandlung abgeschätzt. Es ist zu beachten, dass es sich um die jährlichen und globalen Mittelwerte handelt, d.h. die realen Werte an bestimmten Orten und Zeiten können sich gegenüber dem Mittelwert ändern.

2.6.1 Photovoltaik

Die potenzielle Leistungsdichte $L_{p,\text{Photovoltaik}}$ für die Photovoltaik ist identisch mit der kurzwelligen solaren Bestrahlungsstärke $B_{0,k}$, die aus der Gleichung (2.4.7b) bestimmt wird. Es gilt für den Mittelwert der potenziellen Leistung für die Photovoltaik

$$L_{p,\text{Photovoltaik}} = B_{0,k} \approx 135 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right).$$

Die Solarzelle ohne Konzentrator:

Der typische Wirkungsgrad der Solarzelle liegt zwischen ca. $\eta_{\text{Solarzelle}} \approx 15\%$ [Quaschnig 2013]. Dann gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte

$$L_{g,\text{Photovoltaik}} = 0,15 \cdot 135 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) \approx 20 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$$

Nach dem Einsetzen in die Gleichung (2.6.1) folgt für den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten

$$\chi_{\text{Photovoltaik}} = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2} \right)}{L_{g,\text{Photovoltaik}}} = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2} \right)}{20 \left(\frac{W}{m^2} \right)} = 2,5$$

Die Solarzelle mit Konzentrator

Das Prinzip dieser Technik ist: Die Solarzelle wird am Brennpunkt eines Parabolspiegeles oder konvexer Linsen montiert. Damit wird der Wirkungsgrad $\eta_{\text{Solarzelle}}(K)$ erheblich erhöht. Der typische Wirkungsgrad ist $\eta_{\text{Solarzelle}}(K) = 30\%$. Es ist zu beachten, dass durch Parabolspiegel oder Konvexlinsen nur die parallelen Sonnenstrahlen auf Solarzellen konzentriert werden, die gestreute Strahlung infolge von Wolken wird nicht genau auf die Solarzelle konzentriert. Der Wirkungsgrad für die gestreuten Strahlungen bleibt wie bei der Solarzelle ohne Konzentrator. Demnach ist die potenzielle Leistungsdichte L_p kleiner als die gesamte Bestrahlungsstärke $B_{O,k}$. Der Mittelwert der parallelen Komponente $B_{O,k,p}$ von der kurzwelligen solaren Bestrahlungsstärke wird durch Anhang [A 2.4.5] berechnet: $B_{O,k,p} \approx 89 \left(\frac{W}{m^2} \right)$. Somit gilt für den Mittelwert der Bestrahlungsstärke der gestreuten Strahlungen: $B_{O,k,s} = 135 \left(\frac{W}{m^2} \right) - 89 \left(\frac{W}{m^2} \right) = 46 \left(\frac{W}{m^2} \right)$. Dann folgt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte

$$\begin{aligned} L_{g,\text{Photovoltaik}}(K) &= \eta_{\text{Solarzelle}}(K) \cdot B_{O,k,p} + \eta_{\text{Solarzelle}} \cdot B_{O,k,s} \\ \Rightarrow L_{g,\text{Photovoltaik}}(K) &= 0,3 \cdot 89 \left(\frac{W}{m^2} \right) + 0,15 \cdot 46 \left(\frac{W}{m^2} \right) \approx 34 \left(\frac{W}{m^2} \right), \end{aligned}$$

und für den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten

$$\chi_{\text{Solarzelle}}(K) = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2} \right)}{34 \left(\frac{W}{m^2} \right)} = 1,5.$$

2.6.2 Solarthermie

Aufwindkraftwerke

Die potenzielle Leistungsdichte $L_{p,\text{Solarthermie}}$ der Solarthermie stammt aus den beiden (kurzwelligen und langwelligen) mittleren solaren Bestrahlungsstärken $B_{O,k}$ und $B_{O,l}$ - vergleiche die Gleichungen (2.4.7a) und (2.4.7b). Es gilt für den Mittelwert der potenziellen Leistungsdichte

$$L_{p,\text{Solarthermie}} = B_{O,k} + B_{O,l} = 135 \left(\frac{W}{m^2} \right) + 30 \left(\frac{W}{m^2} \right) = 165 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

Das Prinzip des Aufwindkraftwerk ist: Die Luft in einem großen transparenten Dach wird von der Sonnenstrahlung erwärmt. Über dem Dachzentrum erhebt sich mittig ein hoher Kaminschacht, durch den die erwärmte Luft mit einer großen Geschwindigkeit nach oben strömt. Diese kinetische Energie wird von einer Windturbine auf elektrische Energie umgewandelt. Die gesamte Effizienz einer solchen Anlage ist ca. $\eta_{Aufwind} = 1,5\%$ [Quaschnig 2013]. Damit gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte in diesem Fall

$$L_{g,Solarthermie} = \eta_{Aufwind} \cdot L_{p,Solarthermie} = 2,5 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

Damit gilt für den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten für dieses spezielle solarthermische Verfahren

$$\chi_{Solarthermie} = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2} \right)}{2,5 \left(\frac{W}{m^2} \right)} = 20$$

Meereswärmekraftwerk

Die Sonnenstrahlung kann nur die obere Schicht des Meeres erwärmen. Die unteren Schichten des Meeres sind deshalb kälter als die oberen Schichten. Durch diesen Temperaturunterschied (ca. $\Delta T = 20K$) könnte ein Wärmekraftwerk angetrieben werden. Da die Temperatur der Meeresoberfläche ca. $T_{warm} = 27^\circ C = 300K$ kleiner als die Siedetemperatur $100^\circ C$ des Wassers bei Standarddruck ist, müsste es beispielsweise als Dampfkraftwerk bei Unterdruck laufen, damit das Wasser als Arbeitsmedium des Dampfkraftwerks verdampfen kann, oder anstatt des Wassers müsste man als Arbeitsmedium eine spezielle Flüssigkeit benutzen, deren Siedetemperatur kleiner als T_{warm} ist, z.B. Ammoniak, Propan, Butan... Der Grenzwirkungsgrad eines möglichen Wärmekraftwerkes würde auf jeden Fall durch den Carnot-Prozess bestimmt zu

$$\eta_{carnot} = \frac{\Delta T}{T_{warm}} = \frac{20K}{300K} \approx 6,7\%.$$

Der typische reale Gesamtwirkungsgrad ist ca. $\eta_{Meereswärme} = 3,5\%$ [Daly 2011]. Somit gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte des Meereswärmekraftwerks

$$L_{g,Meereswärme} = \eta_{Meereswärme} \cdot L_{p,Solarthermie} = 5,8 \left(\frac{W}{m^2} \right).$$

Daher ergibt sich für den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten zu

$$\chi_{Meereswärme} = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2} \right)}{5,8 \left(\frac{W}{m^2} \right)} = 8,6.$$

Konzentrierende Solarthermie

Das Prinzip ist: Durch die Anwendung von Parabolspiegeln oder Konvexlinsen werden die Sonnenstrahlen bzw. Solarenergie auf einen Brennpunkt, wo der Kollektor liegt, konzentriert. Die Temperatur des Kollektors wird dadurch stark auf $T_{\text{heiß}}$ (ca. $371^\circ\text{C} = 644\text{K}$) erhöht. Die Wärmemenge aus dem Kollektor wird auf ein Dampfkraftwerk abgegeben um Strom zu erzeugen. Der maximale Grenzwirkungsgrad des Dampfkraftwerks wird aus dem Carnot-Prozess bestimmt zu

$$\eta_{\text{carnot}} = \frac{T_{\text{heiß}} - T_{\text{kalt}}}{T_{\text{heiß}}} = 1 - \frac{T_{\text{kalt}}}{T_{\text{heiß}}}.$$

Dabei sind $T_{\text{heiß}}$, T_{kalt} jeweils die Temperatur an der heißen Wärmequelle (Kollektor), wo die Wärme in den Prozess aufgenommen wird und die Temperatur an der kalten Senke (Kühlturm), wo die Wärme aus dem Prozess abgegeben wird. Der typische Wert ist $T_{\text{kalt}} = 46^\circ\text{C} = 319\text{K}$. Damit ist

$$\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{319\text{K}}{644\text{K}} = 50,5\%.$$

Bei einem solchen Temperaturunterschied erreicht in der Praxis der reale Wirkungsgrad eines guten Dampfkraftwerks ca. 30%. Der Kollektorwirkungsgrad beträgt ca. 60%. Somit ist der Gesamtwirkungsgrad ca. $\eta_{\text{Solarthermie}}(K) = 18\%$.

Es ist zu beachten, dass nur die parallelen Sonnenstrahlen im Parabolspiegel oder durch die Konvexlinsen im Brennpunkt konzentriert werden. Die gestreuten Strahlungen konvergieren nicht auf dem Kollektor. Deswegen tragen sie energetisch auch nicht nennenswert zum Aufwärmvorgang bei, sodass sich die potenzielle Leistungsdichte hauptsächlich aus der parallel einfallenden Sonnenstrahlung ergibt: $L_{p,\text{Solarthermie}}(K) = B_{O,k,p} \approx 89 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$. Dann gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte

$$L_{g,\text{Solarthermie}}(K) = \eta_{\text{Solarthermie}}(K) \cdot L_{p,\text{Solarthermie}}(K) \approx 16 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right).$$

Darum folgt für die Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten

$$\chi_{\text{Solarthermie}}(K) = \frac{50 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)}{16 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)} = 3,1.$$

2.6.3 Wasserkraft

Die gewonnene Energie aus der Wasserkraft wird eigentlich von der potenziellen Gravitationsenergie E_{pot} des Regens bzw. der Wolken umgewandelt. Die globale mittlere jährliche Niederschlagshöhe ist ca. $h_{\text{Regen}} \approx 1000(\text{mm}) = 1(\text{m})$ [Kiehl 1997]. Der Mittelwert der Wolkenhöhe ist ca. $H_W \approx 3\text{km} = 3000\text{m}$ (s. Abschnitt 2.2.3.2). Das Regenwasser stammt aus den Wolken, in denen es eine potenzielle Gravitationsenergie besitzt. Somit gilt für die potenzielle Leistungsdichte der Wolken

$$L_{p,\text{Wolken}} = \frac{E_{\text{pot}}}{1(\text{Jahr}) \cdot S} = \frac{m_{\text{Regen}} \cdot g \cdot H_W}{1(\text{Jahr}) \cdot S} = \frac{\rho_W \cdot V_{\text{Regen}} \cdot g \cdot H_W}{1(\text{Jahr}) \cdot S} = \frac{\rho_W \cdot h_{\text{Regen}} \cdot S \cdot g \cdot H_W}{1(\text{Jahr}) \cdot S}$$

$$\Leftrightarrow L_{p,Wolken} = \frac{\rho_W \cdot h_{Regen} \cdot g \cdot H_W}{1(\text{Jahr})} = \frac{1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \cdot 1(m) \cdot 9,8\left(\frac{m}{s^2}\right) \cdot 3000(m)}{31557600(s)} = 0,9\left(\frac{kg}{s^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow L_{p,Wolken} = 0,9\left(\frac{W}{m^2}\right) \quad (2.6.2)$$

Dabei sind m_{Regen} und V_{Regen} jeweils die Masse und das Volumen des Regens pro Jahr auf eine Erdoberfläche der Größe S . Die Wasserdichte ist $\rho_W = 1000\left(\frac{kg}{m^3}\right)$ und $g = 9,8\left(\frac{m}{s^2}\right)$ ist die Fallbeschleunigung.

In der Praxis spielt der Höhenunterschied ΔH zwischen der Wasseroberfläche vor und hinter dem Wasserkraftwerk die entscheidende Rolle. Es gilt für den Mittelwert der potenziellen Leistungsdichte eines Wasserkraftwerkes

$$L_{p,Wasser} = L_{p,Wolken} \cdot \frac{\Delta H}{H_W}$$

Der typische Höhenunterschied von einem großen Kraftwerk beträgt ca. $\Delta H \approx 100m$. Damit gilt

$$L_{p,Wasser} = 0,9\left(\frac{W}{m^2}\right) \cdot \frac{100(m)}{3000(m)} = 0,03\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

Der Wirkungsgrad eines modernen Wasserkraftwerks ist ca. $\eta_{Wasserkraft} = 90\%$. Somit gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte

$$L_{g,Wasser} = \eta_{Wasserkraft} \cdot L_{p,Wasser} = 0,027\left(\frac{W}{m^2}\right).$$

Damit ergibt sich für den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten

$$\chi_{Wasser} = \frac{50\left(\frac{W}{m^2}\right)}{0,027\left(\frac{W}{m^2}\right)} = 1852.$$

2.6.4 Energie aus Wind, Meereswellen und Meeresströmungen

Durch Wind entstehen Meereswellen und Meeresströmungen. Deswegen bezieht die nachfolgende Berechnung für Windenergie diese drei Energiequellen ein.

Die „gewonnene“ Energie aus Windkraft stammt eigentlich von der kinetischen Energie der Luft. Aufgrund des unterschiedlichen Einflusses der Sonneneinstrahlung kommt es zu Temperaturunterschieden auf der Erde, wodurch die Luftdruckdifferenz bzw. der Wind zustande kommt. Deshalb kann man Wind als Folge eines thermodynamischen Prozesses ansehen und seine Leistungsfähigkeit abschätzen.

Die Luft nehme eine Wärmemenge Q_{auf} aus einer warmen Quelle der Temperatur T_{warm} auf. Danach wird eine kleinere Wärmemenge Q_{ab} von der Luft bei einer vergleichsweise niedrigen Temperatur T_{kalt}

abgegeben. Die von der Luft verrichtete Arbeit $A_L = Q_{auf} - Q_{ab}$ tritt als kinetische Energie E_{Wind} (Windenergie) auf. Es gilt für den Wirkungsgrad dieses Prozesses

$$\eta = \frac{A_L}{Q_{auf}} = \frac{E_{Wind}}{Q_{auf}}$$

Die Windenergie erreicht das Maximum, wenn dieser thermische Prozess als Carnot-Prozess angenommen wird. Es gilt

$$E_{Wind} = Q_{auf} \cdot \eta_{carnot} = Q_{auf} \cdot \frac{T_{warm} - T_{kalt}}{T_{warm}}$$

Somit gilt für die potenzielle Windleistungsdichte der Erdoberfläche

$$L_{p,Wind} = P_{auf} \cdot \frac{T_{warm} - T_{kalt}}{T_{warm}} \quad (2.6.3).$$

Dabei ist P_{auf} die aufgenommene Wärmeleistung pro $1m^2$ der Erdoberfläche.

Bei der vertikalen Wärmeregulung

Die Quelle der hohen Temperatur ist die Erdoberfläche, also $T_{warm} = T_O = 15^\circ C = 288K$. Die niedrige Temperatur T_A ist in der mittleren Atmosphäre realisiert. Somit gilt $T_{kalt} = T_A$. Die aufgenommene Wärmeleistung ist identisch mit der vertikalen Wärmeregulung Q_V . Aus Gleichung (2.5.1b) folgt $P_{auf} = Q_V \approx 103(W \cdot m^{-2})$.

Die Temperatur T_A kann man nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz bestimmen. Es gilt

$$B_A = \sigma \cdot T_A^4.$$

Dabei ist B_A die gesamte langwellige Bestrahlungsstärke $B_O(i)$ aus der Atmosphäre (Abb. 2.4.4). Der Zusammenhang zwischen der langwelligen Bestrahlungsstärke B_A und der langwelligen Abstrahlungsstärke D_O von der Erdoberfläche ist $B_A = R_l \cdot D_O$ (s. 2.4.2.3). Somit gilt

$$R_l \cdot D_O = \sigma \cdot T_A^4.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.4.1) und (2.4.6g) ergibt sich

$$R_l \cdot \sigma \cdot T_O^4 = \sigma \cdot T_A^4$$

$$\Rightarrow T_A = T_O \cdot R_l^{0,25} \approx 288(K) \cdot 0,694^{0,25} = 263(K) = -10(^{\circ}C).$$

Nach Einsetzen in die Gleichung (2.6.3) folgt für die vertikale potenzielle Windleistungsdichte

$$\begin{aligned} L_{p,Wind}(V) &= P_{auf} \cdot \frac{T_{warm} - T_{kalt}}{T_{warm}} = Q_V \cdot \frac{T_O - T_A}{T_O} = 103 \left(\frac{W}{m^2} \right) \cdot \frac{288(K) - 263(K)}{288(K)} \\ &\Rightarrow L_{p,Wind}(V) = 8,9 \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad (2.6.4a). \end{aligned}$$

Betrachtung für die horizontale Wärmeregulierung

Aus Abschnitt 2.5.3 ist ersichtlich, dass für die aufgenommene mittlere Wärmeleistung der Zusammenhang gilt $P_{auf} = Q_H \approx 13(W \cdot m^{-2})$. Aus dem Diagramm 2.5.6 ist abzuleiten, dass der Mittelwert der Temperatur an den wärmeren Orten (zwischen den geografischen Breitengraden von ca. -30° bis 30°) rund $T_{warm} \approx 25^\circ C = 298K$ ist, und der Mittelwert der Temperatur an den kälteren Orten (die übrigen Breitengrade) ca. $T_{kalt} \approx -5^\circ C = 268K$ beträgt. Daraus folgt für die horizontale potenzielle Windleistungsdichte

$$L_{p,Wind}(H) = P_{auf} \cdot \frac{T_{warm} - T_{kalt}}{T_{warm}} = 13 \left(\frac{W}{m^2} \right) \cdot \frac{298(K) - 268(K)}{298(K)}$$

$$L_{p,Wind}(H) = 1,3 \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad (2.6.4b).$$

Aus den Gleichungen (2.6.4a) und (2.6.4b) kann man die gesamte potenzielle Windleistung berechnen:

$$L_{p,Wind} = L_{p,Wind}(V) + L_{p,Wind}(H) = 8,9 \left(\frac{W}{m^2} \right) + 1,3 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

$$\Rightarrow L_{p,Wind} = 10,2 \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad (2.6.4c).$$

Nach dem Betz'schen Gesetz gilt für das Maximum des Wirkungsgrads einer beliebigen Windturbine $\eta_{Betz} = 0,593$. Die reale Windanlage kann allerdings dieses Optimum nicht erreichen. Ein vergleichsweise guter realer Wirkungsgrad wäre ca. $\eta_{Windturbine} = 0,5$ (bei einer bestimmten Windgeschwindigkeit). Da die Windgeschwindigkeit in der Praxis immer variiert, sinkt der durchschnittliche Wirkungsgrad auf ca. $\eta_{Wind} \approx 20\%$. Außerdem ist zu beachten, dass ein Teil dieser Windleistung verwendet wird, um Wasserdampf von der Oberfläche auf die Höhe der Wolken zu transportieren (s. Abschnitt 2.6.2 Wasserkraft). Deshalb muss bei der potenziellen Windleistung die potenzielle Leistungsdichte der Wolken $L_{p,Wolken}$ abgezogen werden. Somit gilt für die gesamte potenzielle Windleistungsdichte

Damit gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte

$$L_{g,Wind} = \eta_{Wind} \cdot (L_{p,Wind} - L_{p,Wolken}) \approx 1,9 \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad (2.6.4d).$$

Daher erhält man den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten

$$\chi_{Wind} = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2} \right)}{1,9 \left(\frac{W}{m^2} \right)} = 26.$$

Darüber hinaus muss man beachten, dass die potenzielle Windleistungsdichte $10,2 \left(\frac{W}{m^2} \right)$ in allen Höhen der Atmosphäre von 0 bis $H_0 \approx 8km$ verteilt ist, während man zurzeit nur den Wind nahe der

Erdoberfläche nutzt. Die Höhe der größten Windanlage ist $h_{Windturbine} < 200m \ll H_0$. Deswegen ist zurzeit der Mittelwert der nutzbaren Leistungsdichte $L_{g,Wind}$ viel kleiner als $1,9 \left(\frac{W}{m^2}\right)$.

2.6.5 Biomasse

Die potenzielle Leistungsdichte für Biomasse ist identisch mit der potenziellen Leistungsdichte der Photovoltaik: $L_{p,Bio} = 135 \left(\frac{W}{m^2}\right)$. Die sogenannten C4-Pflanzen besitzen die höchsten Wirkungsgrade der Umwandlung von Sonnenenergie in Biomasse. Unter optimalen Bedingungen liegt der Fotosynthese für diese Pflanzen zwischen 2% bis 5%. Daraus kann man ableiten, dass der Mittelwert des Wirkungsgrads für Energiepflanzen ca. $\eta_{Fotosynthese} = \frac{0\%+3,5\%}{2} \approx 1,8\%$ ist. Diese Biomasse wird als Kraftstoff in Wärmekraftwerken verwendet. Der Wirkungsgrad des guten Wärmekraftwerkes ist ca. $\eta_{Wärmekraft} = 40\%$. Somit ist der Mittelwert des Wirkungsgrad $\eta_{Bio} = 1,8\% \cdot 40\% = 0,72\%$. Dann gilt für den Mittelwert der gewonnenen Leistungsdichte

$$L_{g,Bio} = \eta_{Bio} \cdot L_{p,Bio} \approx 1 \left(\frac{W}{m^2}\right).$$

Damit gilt für den Mittelwert des Flächenbesetzungs-Koeffizienten

$$\chi_{Bio} = \frac{50 \left(\frac{W}{m^2}\right)}{1 \left(\frac{W}{m^2}\right)} = 50.$$

2.6.6 Der Einfluss der regenerativen Energie auf das Klima

Es ist bekannt, dass die in den letzten Jahrhunderten zunehmend erfolgte Nutzung fossiler Brennstoffe zur Klimaänderung führte. Doch auch die Nutzung der regenerativen Energien trägt das Potential in sich, zu einem Einfluss auf das Klima zu führen. So führt der Unterschied in der Sonneneinstrahlung auf die Erde in Abhängigkeit von der geografischen Breite zu Temperaturunterschieden, durch die die großen Zirkulationssysteme zustande kommen, also die Meeresströmungen, der globale Wasserkreislauf usw. Deshalb kann der Entzug mechanischer Energie aus den Strömungssystemen durch die Gewinnung regenerativer Energie die Temperaturunterschiede und damit das Klima beeinflussen. Nachfolgend wird die Temperaturänderung infolge der Nutzung, beispielsweise von Windenergie und Photovoltaik, abgeschätzt.

Einflüsse der Windenergiegewinnung

Die aus Wind und Meereswärme entzogene Energie führt zu einer Hemmung des natürlichen Zirkulationssystems, weil der Wärmetransport zwischen warmen und kalten Ort auf der Erde vermindert wird. Die Folgen sind, dass die warmen Orte wärmer werden, während die kalten Orte kälter werden. Die Zunahme des Temperaturunterschieds kann zu einer Klimaänderung führen.

Beim natürlichen Klimasystem wird die potenzielle Windleistungsdichte $L_{p,Wind} = 10,2 \left(\frac{W}{m^2}\right)$ durch die Reibung spätestens nach einer Zirkulation in innere Energie der Luft bzw. der Erdoberfläche umgewandelt. Wir können dies aus der Tatsache schließen, dass sich typische Zirkulationsmuster deutlich abschwächen, sobald die Sonneneinstrahlung nachlässt. Nehmen wir an, wir würden die Windleistungsdichte $L_{g,Wind} = 1,9 \left(\frac{W}{m^2}\right) \approx 19\% \cdot L_{p,Wind}$ gewinnen, so würde sich das Klima am wenigsten verändern, wenn die an den äquatornahen Regionen aufgenommene Wärmeleistungsdichte P_{auf} trotzdem konstant bliebe. Dann müsste die potenzielle Windleistungsdichte $L_{p,Wind}$ um 19% zunehmen, um die klimatischen Zirkulationssysteme aufrechtzuerhalten. Aus der Gleichung (2.6.3) folgt, dass die Unterschiedstemperatur $\Delta T = T_{warm} - T_{kalt} \approx 30^\circ C$ um mehr als 19% steigen müsste. Somit ist $\Delta T \approx 36^\circ C$. Das bedeutet, dass die Temperatur an den warmen Örtern ca. $3^\circ C$ steigen, während sie an den kalten Örtern ca. $3^\circ C$ sinken müsste.

Für die Weltbevölkerung werden ab 2050 ca. $9 \cdot 10^9$ Menschen vorhergesagt. Mit einem Energieverbrauch ca. $P_M = 10(kW)$ pro Kopf gilt für die Flächen, die von dem Windenergiegewinn beeinflusst wäre: $S_{Wind} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10(kW) / 1,9(W \cdot m^{-2}) \approx 47 \cdot 10^6(km^2)$, also ca. ein Drittel der Fläche der gesamten Kontinente. Mit der obigen Temperaturänderung auf dieser großen Fläche verändert sich das Erdklima mit Sicherheit.

Einfluss der Photovoltaik

Aus der Gleichung (2.4.7c) folgt für den Mittelwert der von der Erdoberfläche absorbierten Bestrahlungsstärke $B_o(0) = 151 W/m^2$. Wir nehmen an, dass man die Solarzellen an sehr sonnigen Orten (also warmen Orten) montieren würde und die gewonnene Energie nach weniger sonnigen Orten (also kalten Orten) transportiert würde. An den warmen Orten würde eine Leistungsdichte von $L_{g,Photovoltaik} = 20 \left(\frac{W}{m^2}\right) \approx 13\% \cdot B_o(0)$ entnommen. Aus der Gleichung (1.5.3) folgt für die Abnahme der Temperatur an den warmen Örtern

$$\Delta T \approx \frac{T}{4} \cdot 13\% = \frac{288(K)}{4} \cdot 13\% \approx 9(K).$$

Das bedeutet, dass die Temperatur der warmen Orte um ca. $9^\circ C$ sinken müsste. Im Gegensatz dazu stiege die Temperatur an kalten Örtern um ca. $9^\circ C$.

Die Fläche, die von der Solarenergiegewinnung beeinflusst wäre, wäre im Prinzip analog zur Fläche für die oben abgeschätzte Windenergie. Es gilt $S_{Solar} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10(kW) / 20(W \cdot m^{-2}) = 4,5 \cdot 10^6(km^2)$, also ca. die halbe Trockenwüste Sahara - d.h. die Hälfte der Sahara würde unter den Modellannahmen eine um $9^\circ C$ erniedrigte Oberflächentemperatur besitzen, während die gleiche Fläche an kalten Orten um ca. $9^\circ C$ erwärmt wäre. Auch dies würde zu einer Klimaänderung führen, wahrscheinlich bewirkt durch die horizontalen und vertikalen Konvektionsströmungen in der Atmosphäre, die sich bei derartigen Temperaturgradienten zum Umland der jeweiligen Fläche ausbilden müssten.

Kapitel 3: Entwicklung von neuen Experimenten für das Thema regenerative Energie

3.0 Einleitung

3.0.1 Zielsetzung und Aufbau des Kapitels

Das Ziel des Kapitels ist die Vorstellung der Entwicklungsarbeit für vier neue Schulversuche, die vom Autor selbst durchgeführt wurden. Es handelt sich durchweg um Modellversuche. Das übergeordnete Thema dieser Schulversuche ist die Gewinnung erneuerbarer Energie. Im Abschnitt 3.1 wird ein Modellversuch zur Sonnenscheindauer und zur eingestrahlten Sonnenenergie vorgestellt. Durch diesen Versuch können die theoretischen Inhalte des Kapitels 1 sehr gut veranschaulicht und überprüft werden. In den darauf folgenden Abschnitten werden Modellversuche zur Physik und ihrer technischen Anwendung in der Solarenergie (Abschnitte 3.2), der Wasserkraft (Abschnitt 3.3) und der Windkraft (Abschnitt 3.4) beschrieben. Damit soll auch die Umsetzung physikalischer Kenntnisse im Alltagserleben der Lernenden erleichtert werden.

Alle Versuche können als sowohl qualitativ als auch quantitativ als Schulversuche verwendet werden. Die Hauptbauelemente eines jeden Versuches und deren elektrische und mechanische Kopplung sollte so gebaut werden, dass sie die objekttypischen Merkmale aufweisen und auch so aussehen, wie es Lernende im Alltag mitunter erleben können (z.B. bei Windrädern oder Solarmodulen). Außerdem können die Versuche in Einzelteile zerlegt und leicht wieder zusammengebaut werden. Daher können sie vor den Augen der Lernenden zusammengefügt werden, sodass diese das Funktionsprinzip des Versuchs Schritt für Schritt in klassischer Elementarisierungsabfolge verstehen. Lehrende können die Versuchsdurchführung leicht erproben und variieren.

Da die vier Versuche so konstruiert wurden, dass sie übersichtlich und geeignet für die Schüler und Schülerinnen sind, werden sie in den folgenden Abschnitten vor allem als Demonstrationsversuche dargestellt, trotzdem können Schüler und Schülerinnen sie auch leicht aufbauen und durchführen, sofern die jeweilige Schulklasse ausreichende Mengen an den hier vorgeschlagenen Versuchsmaterialien besitzt. Diese Überlegung folgt der didaktischen Auffassung, dass Schülerversuche nachhaltiger als Demonstrationsversuche sind, wenn die Lernenden beim selbständigen Experimentieren eigene Planungen selbstkritisch umsetzen können und ihr Handeln schulen ([Willer 2003] S. 280).

3.0.2 Legitimation des Kapitels

Physik ist eine experimentelle Naturwissenschaft. Deshalb spielt das Experiment eine entscheidende Rolle in der physikalischen Forschung. Anhand des Experiments können nicht nur neue Hypothesen geprüft werden, sondern auch bisher unbekanntes Phänomene entdeckt werden. Außerdem können die Naturkonstanten, so wie die Basisgrößen, nur durch Experimente bestimmt werden.

Im Unterricht soll auch der tatsächliche Weg, auf dem die Kenntnisse entdeckt wurden, so annähernd realistisch, wie unter der Voraussetzung der didaktischen Reduktion möglich, nachvollzogen werden. Dementsprechend müssen Experimente unbedingt eine zentrale Stellung im Physikunterricht einnehmen ([Bruhn 1976] S. 128). Die wesentlichen Bedeutungen des Schulversuchs werden schon seit dem 16. Jahrhundert in den didaktischen Literaturen erwähnt ([Behrendt 1990] S. 28). Zusätzlich zur Hilfe bei der Aneignung der Kenntnisse kann das Experiment im Unterricht das Interesse der Lernenden für Physik wecken und erhöhen ([Resnikow 1968] S. 178). Die wesentlichen Funktionen des Experiments im

Physikunterricht werden umfassend von Kircher, Girwidz und Häußler zusammengefasst ([Kircher 2015] S. 229)

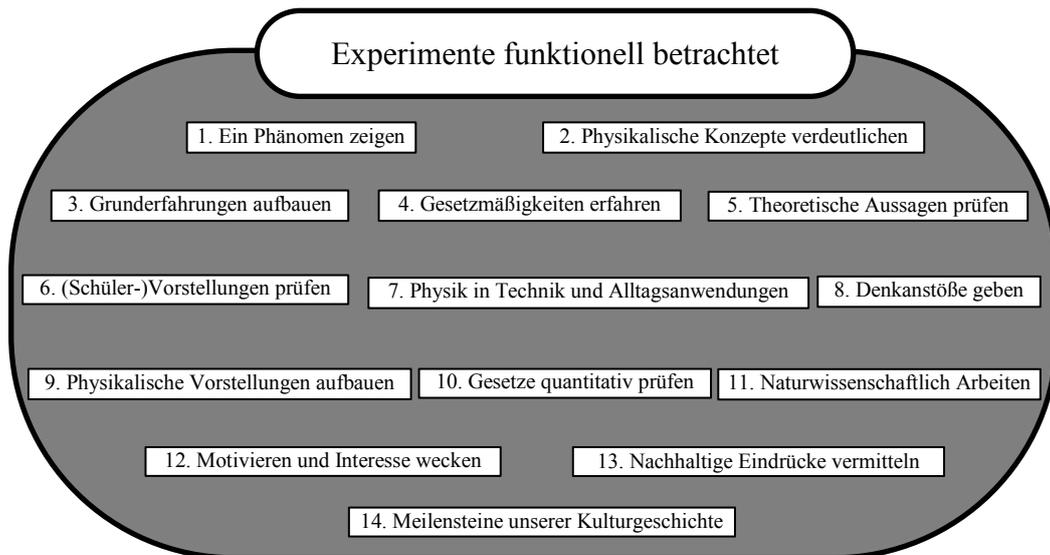


Abbildung 3.0.1: Funktionen des Experiments im Physikunterricht.

Physikunterricht ohne Versuche wäre nicht nur langweilig, sondern würde eher entweder einer Darstellung der elementaren Physikgeschichte ähneln oder ähnlich wie Mathematikunterricht ablaufen. Unter Einbeziehung der obigen Auffassung zum Experimentieren, soll man deshalb, wenn man neue Inhalte im Physikunterricht entwickeln oder diese in ihn einbringen will, außer der Herleitung theoretischer Zusammenhänge unbedingt auch die Entwicklung neuer Schulversuche betrachten. In der vorliegenden Arbeit wurden bislang nur die theoretischen Inhalte (im Kapitel 1 und 2) entwickelt, demzufolge ist es nun erforderlich, neue Schulversuche für die Fachinhalte der Kapitel 1 und 2 zu präsentieren.

Diese neu entwickelten Versuche beziehen sich auf die Anwendung von physikalischen Kenntnissen in der Technik, speziell der Technik regenerativer Energien. Somit wird anhand dieser Modellversuche die enge Verbindung zwischen Physik und Technik im Alltag betont und veranschaulicht. Technik spielt eine wesentliche Rolle als Brücke zwischen den abstrakten physikalischen Kenntnissen und dem Alltag. Allerdings ist bei der Vermittlung Wert darauf zu legen, dass man die wechselseitigen Abhängigkeiten von Physik und Technik nicht einseitig interpretiert. Es geht nicht ausschließlich darum, anhand von technischen Anwendungen Physik zu verdeutlichen und es geht ebenfalls nicht allein darum, mithilfe der Physik technische Geräte zu bauen und zu verstehen. Physik aus Technik stehen auch unter didaktischen Gesichtspunkten in wesentlich mehrschichtigeren Relationen zueinander, als es die beiden soeben genannten verkürzten Sichtweisen abbilden. Zunächst helfen die auf Technik bezogenen Physikkenntnisse den Lernenden, den Alltag besser zu verstehen. Deshalb stoßen die Lernenden typischerweise auf großes Interesse. Es ist davon auszugehen, dass die hier vorgestellten Versuche wegen ihrer Beziehung zur Technik ein großes Potential für die Interessensentwicklung der Lernenden aufweisen.

Darüber hinaus bestand das Ziel darin, solche Ideen für die Entwicklung neuer Schulversuche auszuwählen, die über traditionelle Arrangements hinausgehen, z. B. die „klassischen“ Propellerversuche bei der Diskussion der Windenergie. Vor allem sollen es Experimente sein, die noch nicht (mindestens für

die vietnamesische Schule) realisiert werden. Unbedingt müssen die Versuche Begeisterung, Anregungen und situatives Interesse liefern bzw. hervorrufen. Im Einzelnen:

Beim Thema „Sonnenscheindauer und eingestrahlte Sonnenenergie“ nutzt man in der Schule traditionell das Tellurium, die Sonnenuhr oder Versuche zur Veranschaulichung der Tagbögen der Sonne. Deren Einschränkungen sind, dass sie vorwiegend qualitative Ergebnisse darstellen können und mangels skalierter Einstellungsmöglichkeiten kaum gestatten, auch quantitativ die Sonnenscheindauer und die eingestrahlte Sonnenenergie für beliebige Örter auf der Erde oder für beliebige Dachschrägen zu untersuchen. Die hier präsentierten Schulversuche (s. Abschnitt 3.1) können diese Einschränkungen überwinden. Außerdem können einige Naturphänomene zur Sonneneinstrahlung mittels der neuen Versuche überschaubarer dargestellt werden als durch die traditionellen Anordnungen.

Beim Thema „Gewinnung der regenerativen Energie“ wird traditionell großer Wert auf den Schwerpunkt der Energieumwandlungen gelegt, nicht aber auf technische Details, z.B. bei der Einspeisung der elektrischen Energie in das Stromnetz. Daher werden etwa Solarzellen pauschal als Energielieferanten abgehandelt, Fragen ihrer automatischen Orientierung zur Sonne hingegen nicht. Elektrogeneratoren und entsprechende Turbinen für Windkraft und Wasserkraft sind meist symbolhaft dargestellt, aber wie konkret die von ihnen in elektrische Energie umgewandelte Energie nutzbar gemacht und verteilt wird, thematisiert man bislang kaum. Die neuen Schulversuche gehen hier deutlich weiter: Beim Thema „Gewinnung der Sonnenenergie und der Energie aus Wind“ (s. Abschnitte 3.2 und 3.4) wird nicht nur lediglich die Energieumwandlung veranschaulicht, sondern auch Fragen der Optimierung – etwa wie die Energie am effizientesten gewonnen werden kann (als zentrales Ziel des Versuches). Beim Thema „Wasserkraft“ wird die Regelung der Energiezufuhr in das Stromnetz (über Pumpspeicherkraftwerke) aufgegriffen und beispielhaft demonstriert.

Diese Schulversuche wurden so angelegt, dass sie besonders geeignet für Projekte zur Unterrichtsform des fächerübergreifenden Unterrichts sind. Eine wichtige Forderung dieser Unterrichtform ist, dass das Resultat des Projekts meist ein echtes Produkt, also ein konkretes und vorzeigbares „Ergebnis“ sein muss ([Seifert 2007], S. 211). Diese Schulversuche ermöglichen Lernenden die Realisierung von Projekten, deren Ziele identisch oder ähnlich mit den Zielen dieser Schulversuche sind. Der Aufbau dieser Schulversuche ist übersichtlich. Jedes Bauteil ist optisch wahrnehmbar und nicht verdeckt angeordnet, seine Funktionsweise kann deutlich demonstriert werden. Die komplizierte Funktionsweise der Elektroschaltungen wird mittels animierter Simulationen der relevanten Steuerungselemente anschaulich erklärt. Fast alle Bauelemente dieser Schulversuche können sowohl auseinandergenommen als auch wieder ineinander montiert werden. Deshalb können die Lernenden (unter einem Projekt) die vom Lehrenden vorbereiteten einzelnen Bauteile der Schulversuche erneut oder neu montieren. Lernende können sogar aufgrund des Verstehens der Funktionsweise dieser Schulversuche und der technischen Lösungen neue Versuche mit gleichem Ziel entwickeln. Diese Möglichkeit wurde bei der automatischen Nachführung für Solarzellen (s. Abschnitt 3.2) besonders betont. Lernende sollen möglichst zur Entwicklung weiterer Versuchsmodelle angeregt werden. Sie sollen zum selbständigen und kreativen Denken angeregt werden.

Das Thema „Regenerative Energie“ wird von Vietnam, einem Entwicklungsland, zurzeit und gewiss auch zukünftig mit großem Interesse verfolgt (s. Abschnitt 2.0). Dieses Thema muss unbedingt in der Schule in herausgehobener Stellung vermittelt werden. Wenn man allerdings nur die theoretischen Inhalte dieses Themas (s. Kapitel 1 und 2) in der Schule vermitteln würde, könnte der Unterricht langweilig und einseitig sowie praxisfern werden. Die Entwicklung der Schulversuche soll dazu beitragen, die

theoretischen Inhalte lebendig und alltagsnah zu vermitteln um auf diese Weise die Verbreitung der Einsichten zur Nutzung der regenerativen Energieformen zu unterstützen.

3.1 Ein Demonstrationsversuch zur quantitativen Bestimmung der Sonnenscheindauer und der eingestrahlten Sonnenenergie

Im Kapitel 1 wurden die Formeln für die Berechnung der Sonnenscheindauer bzw. der eingestrahlten Sonnenenergie auf dem Erdboden bzw. auf Dachschrägen theoretisch hergeleitet. In diesem Abschnitt wird nun ein Demonstrationsversuch zu diesem Phänomenkreis dargestellt. Dieser hilft den Lernenden nicht nur dabei, die theoretischen Folgerungen aus Kapitel 1 praktisch nachzuprüfen, sondern auch, um die physikalischen Vorstellungen relevanter Naturphänomene (z.B. die Weißen Nächte, Tagundnachtgleiche, Polarnacht usw.) zu fundieren und zu entwickeln.

Dieser Demonstrationsversuch wird nachfolgend in drei Schritten vorgestellt. Die ersten zwei Teile beinhalten die Messung der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden und auf beliebigen Dachschrägen. Der dritte Teil stellt die Messung der eingestrahlten Sonnenenergie auf dem Erdboden und auf einer Dachschräge dar.

Durch den Versuch kann man die theoretischen Vorhersagen mit einer relativ geringfügigen Abweichung (unter 10%) erhalten. Der Versuch ist einfach und schnell durchführbar. Außerdem ist der Versuchsaufbau nicht kompliziert. Der Versuchsaufbau wurde vom Autor selbst entwickelt und praktisch realisiert. Somit können sowohl die Lehrenden als auch Lernende (mit eventuellen Hilfestellungen durch das Lehrpersonal) diesen Versuch nachbauen, er ist geeignet für die Anwendung in der Schule.

3.1.1 Sonnenscheindauer auf dem Erdboden

3.1.1.0 Einleitung

In diesem Abschnitt werden Aufbau und Durchführung eines Demonstrationsversuchs vorgestellt, mit dem die Sonnenscheindauer für beliebige Orte quantitativ und auf einfache Weise bestimmt werden kann. Damit wird ein Vergleich zu den theoretischen Vorhersagen möglich. Weiterhin wird für die Lernenden ersichtlich, wie sich der Winkel der einfallenden Sonnenstrahlung bzw. die Position der Sonne am Himmel, im Tages- und Jahreslauf verändern. Somit lassen sich die Unterschiede bei der Sonnenscheindauer sowohl zwischen verschiedenen Jahreszeiten als auch zwischen verschiedenen geografischen Orten visuell darstellen.

Länge und Lage des Tagbogens der Sonne sind eng mit unserem Alltag verbunden und dementsprechend als eigenständiges Thema in praktisch jedem Astronomie-, Geographie- und Physiklehrbuch vertreten. Zur Erklärung bedarf es jedoch eines fächerübergreifenden Ansatzes: Kenntnisse in Physik, Astronomie, Mathematik und Geographie sind zur umfassenden Erklärung des Phänomens erforderlich. Die theoretische Herleitung der Sonnenscheindauer kann mittels Schulkenntnissen zur elementaren Geometrie oder mittels analytischer Methoden (s. Kapitel 1 oder [Lotze 2005]) erfolgen. Die Ergebnisse bleiben jedoch abstrakt. Die betrachteten Vorgänge beruhen auf physikalischen und astronomischen Phänomenen, weshalb der Einsatz von entsprechenden Analogieversuchen im Unterricht wünschenswert ist.

Wie allgemein bekannt ist, gibt es vielfältige Versuche zur Sonneneinstrahlung und zur Sonnenscheindauer. Diese sind vorwiegend auf die Gewinnung qualitativer Ergebnisse ausgerichtet. Tellurium, Sonnenuhr, Sternkarte oder Versuche zur Erstellung von Tagbögen haben jeweils Vor- und Nachteile. Hier soll nun ein neu entwickeltes Instrument vorgestellt werden, das auch quantitative Untersuchungen zur Sonnenscheindauer erlaubt.

3.1.1.1 Darstellung des Verlaufs der Beleuchtungsverhältnisse auf der Erde

Mit einer Lampe (1) und einer Fresnellinse (2) werden parallele Lichtstrahlen hergestellt (Abb. 3.1.1). Die Lampe kann vor der Fresnellinse verschoben werden, um eine optimale Fokussierung zu erreichen. Die parallelen Lichtstrahlen verhalten sich im Prinzip so, wie es auch bei der solaren Strahlung gegeben ist. Die gesamte Anordnung von Lampe und Linse übernimmt im Modell demnach die Rolle der Sonne, die die Erdkugel (3) beleuchtet. Die Erdkugel kann um die „Sonne“ bzw. um die Achse (4) rotiert werden. Unter Vernachlässigung der Exzentrizität der Erdbahn wird eine gleichmäßige Rotation der Erde um die Sonne im Laufe eines Jahres angenommen. Damit lässt sich das Datum auf einer gleichmäßig geteilten Skala (5) mit dem Datumszeiger (6) auf der Verbindungslinie Erde-Sonne markieren.

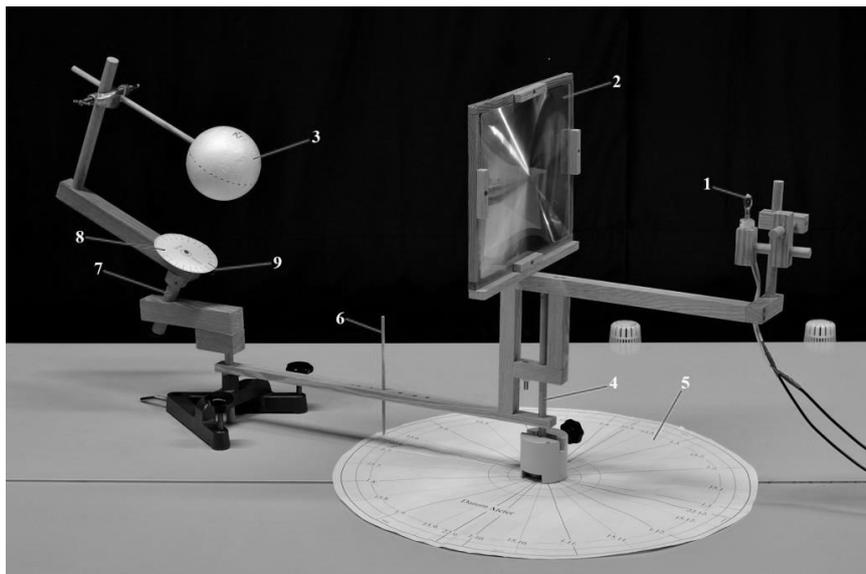


Abbildung 3.1.1: Aufbau des Experiments.

Die Erdkugel ist weiterhin drehbar um ihre Achse (7) gelagert, um ihre Eigendrehung darzustellen, wobei näherungsweise von einer Periodendauer mit 24 Stunden ausgegangen wird. Auf der Erdachse lässt sich daher – ebenfalls mit gleichmäßiger Skala (8) – eine Uhr (9) montieren, die die Ermittlung der Ortszeit ermöglicht. Die Achse (7) wird fest in einem Winkel von $23,5^\circ$ zur Standfläche angebracht, um die Schiefe der Ekliptik einzustellen.

Mit dem Einschalten der Lampe wird für jedes eingestellte Datum und jede Uhrzeit die bekannte halbseitige Beleuchtungssituation der Erde sichtbar (Abb. 3.1.2).

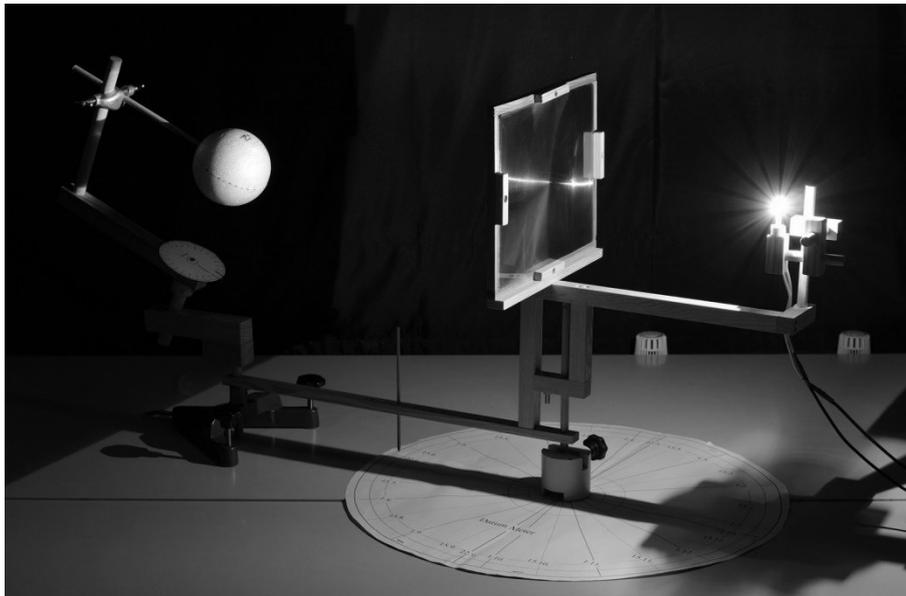


Abb. 3.1.2: Die Beleuchtung der Erde und die Entstehung der Tag- und Nachtseite.

Die Veränderung der Position der Sonne, d.h. die Änderung des eingestellten Datums zeigt die Änderung der Beleuchtungssituation im Jahresverlauf an (Abb. 3.1.3). Dabei wird direkt ersichtlich: Am 21.3. sowie am 21.9. entspricht die Tageslänge der Länge der Nacht, d.h. die Sonnenscheindauer ist – unabhängig vom Ort – gleich 12 Stunden.

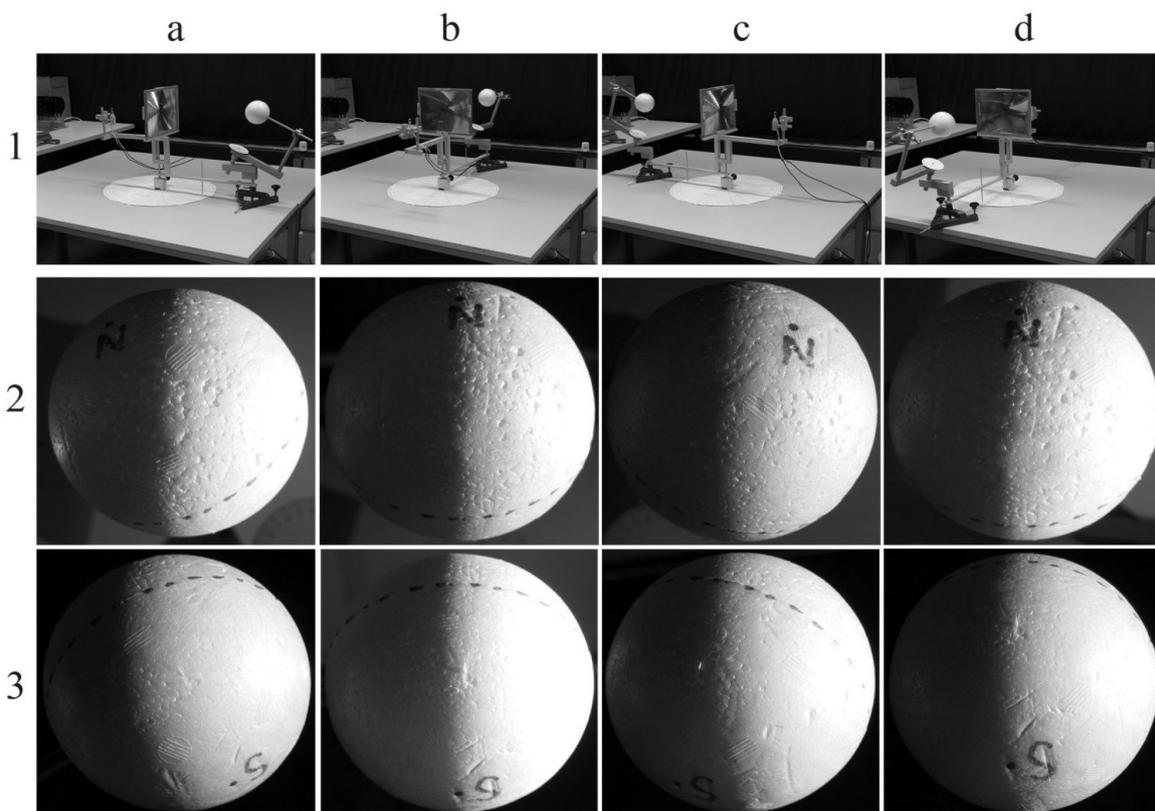


Abbildung 3.1.3: Darstellung von Beleuchtungssituationen im Laufe eines Jahres. Die Spalten a, b, c und d entsprechen jeweils dem Datum 22.12., 21.3., 22.6. und 21.9. Reihe 1 zeigt die Ausrichtung der Erdkugel im Modellversuch. Die Reihen 2 und 3 zeigen jeweils die dazugehörigen Bilder von Nord- und Südpol.

Für die Nordhalbkugel gilt:

- **Vom 21.3. bis 21.9.** dauert der Tag immer länger als die Nacht, das heißt die Sonnenscheindauer ist jeden Tag größer als 12 Stunden – das ist das Sommerhalbjahr. Das Maximum der Differenz zwischen Tag und Nacht ist am 22.6. erreicht. Danach nimmt dieses ab. Demzufolge nimmt die Sonnenscheindauer im Sommerhalbjahr vom 21.3. bis 22.6. zu, vom 22.6 bis 21.9. nimmt sie ab. Rund um und in der Nähe des Nordpols liegt immer ein heller Bereich (Abb. 3.1.3 – c2) vor. Je näher man am Datum des 22.6. eines Jahres ist, desto breiter ist die Fläche dieses Bereichs.
- **Vom 21.9. bis 21.3.** ist die Sonnenscheindauer immer kleiner als 12 Stunden. Sie nimmt zuerst vom 21.9. bis 22.12. ab, danach steigt sie vom 22.12. bis 21.3. in diesem Halbjahr an. Sie ist am 22.12. minimal. Es gibt einen dauerhaft dunklen Bereich (Abb. 3.1.3- a2) rund um den Nordpol. Die Fläche dieses Bereichs wird vom 21.9. bis zum 22.12. immer breiter, vom 22.12. bis 21.3. schrumpft sie kontinuierlich.

Für die Südhalbkugel verläuft die Sonnenscheindauer in umgekehrter Weise.

3.1.1.2 Die theoretische Berechnung der Sonnenscheindauer

Die Herleitung der Formeln zur Berechnung der Sonnenscheindauer wurde in den Abschnitten 1.1 und 1.2 präzise dargestellt. Anhand der Gleichung (1.1.1) oder (1.2.6) ist ersichtlich, dass die Sonnenscheindauer t eine Funktion mit zwei Variablen ist, dem Breitengrad φ und der Anzahl n der Tage ab dem 22.12. Diese Abhängigkeit kann grafisch dargestellt werden (Diagramm 3.1.1).

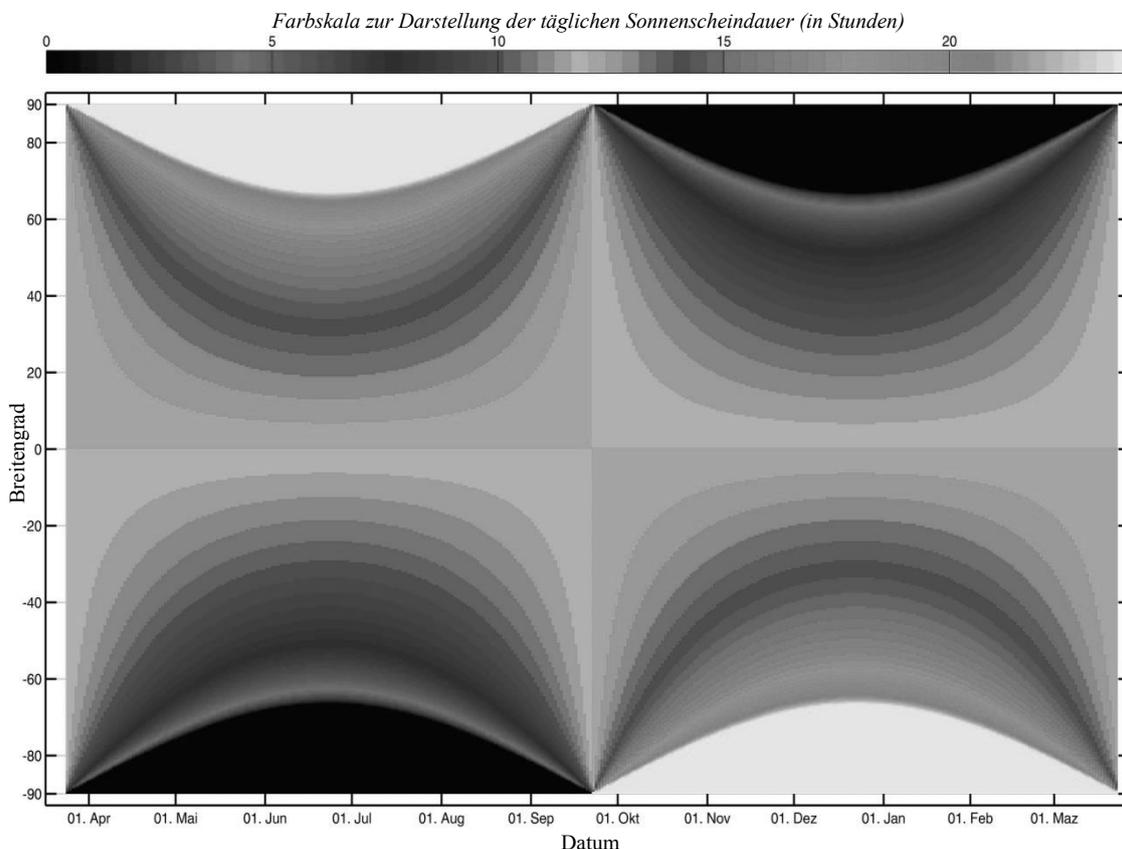


Diagramm 3.1.1: Verlauf der täglichen Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum, helle Farben stehen für lange Beleuchtungsintervalle.

3.1.1.3 Messungen der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden

Bei Messungen der Sonnenscheindauer wird die Erdkugel im Modell durch einen lokalen Ausschnitt des betrachteten Erdbodens (Abb. 3.1.4 – (1)) ersetzt. Mit dieser Fläche lässt sich die zeitliche Veränderung der Beleuchtungssituation beobachten. Sie kann um eine Bodenachse (2) rotiert werden, um den gewünschten Ort einstellen zu können. Auf dieser Achse steht eine Skala (3) des geografischen Breitengrads mit einem Breitengradzeiger (4). Auf der Fläche (1) ist eine Skala (5) mit den vier Himmelsrichtungen (Nord, Ost, Süd, West) angebracht. Auf der Mitte dieser Skala ist eine Holzstange (6) senkrecht zum Boden eingesteckt. Sie dient als Schattenwerfer, um so die Richtung der Sonne besser visualisieren zu können.

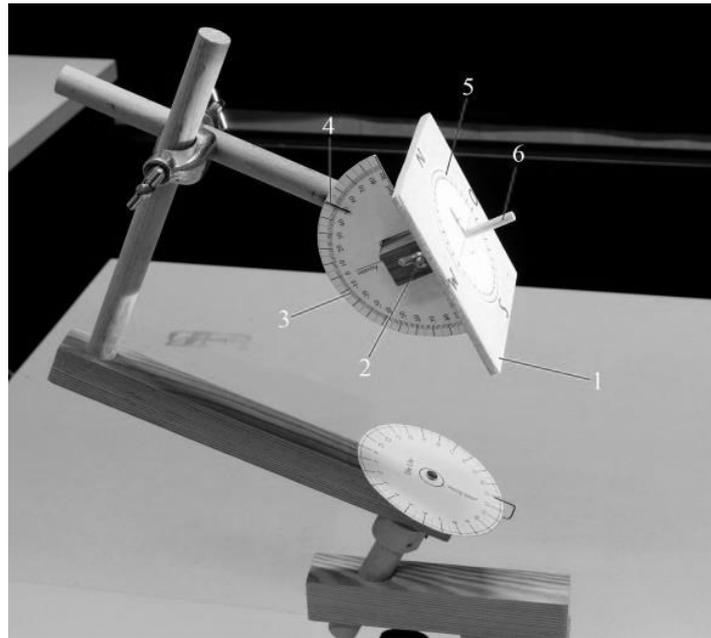


Abbildung 3.1.4: Der Modell-Erdboden wird anstelle der Erdkugel auf das Modell aufgesteckt.

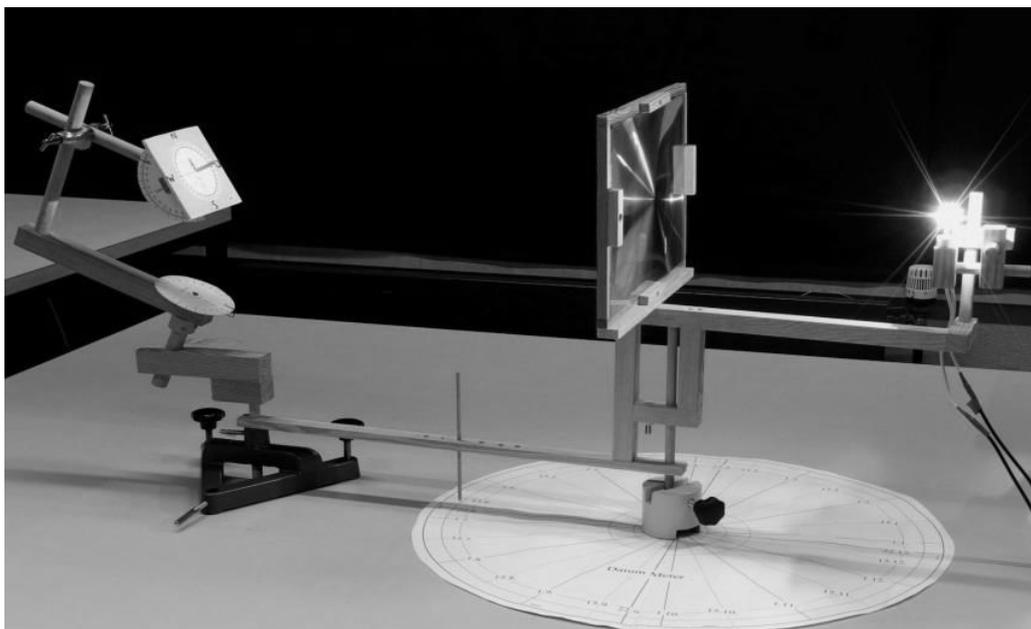


Abbildung 3.1.5: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden.

Für Messungen der Sonnenscheindauer an einem beliebigen Tag auf einen beliebigen geografischen Breitengrad verschiebt man zuerst den Stativfuß der Erdachse mit einer Translationsbewegung, bis der Datumszeiger auf der gewünschten Position steht (die Richtung der Erdachse muss dabei unverändert bleiben). Danach dreht man die Fläche (1) um die Steckachse, um den Breitengrad einzustellen. Nun wird die Fläche um die Erdachse gedreht (gegen den Uhrzeigersinn - wie die echte Drehrichtung der Erde vom Nordpol aus betrachtet), bis der Schatten der Holzstange (6) auf 0° steht, abschließend wird auf der Uhr 12:00 Uhr eingestellt (Abb. 3.1.5). Zum Schluss dreht man die Fläche um die Erdachse und beobachtet, wann sie hell (Tag) oder dunkel (Nacht) ist (s. Video: [A 3.1.1]). Der Übergang in der Beleuchtungssituation zwischen Dunkelheit und Helligkeit entspricht dem Sonnenaufgangszeitpunkt t_A (im Beispiel der Abb. 3.1.6 – 4:48 Uhr). Die Grenze zwischen Helligkeit und Dunkelheit entspricht dem Sonnenuntergangszeitpunkt t_U (Abb. 3.1.6 – 19:12 Uhr). Die Sonnenscheindauer t lässt sich nun ermitteln: $t = t_U - t_A$.

Der Zeitpunkt, an dem der Schatten der Holzstange nach Norden zeigt, entspricht dem Zeitpunkt des astronomischen Mittags, wenn die Sonne sich an der höchsten Position bzw. auf dem Himmelsmeridian beobachten lässt. Wegen der Zeitgleichung und den diskret eingeteilten Zeitzonen ist dieser Zeitpunkt nicht immer gleich mit der Mittagszeit 12:00 Uhr im allgemeinen Sprachgebrauch. Aus Gründen der Elementarisierung wird dieser Zeitpunkt hier gleich 12:00 Uhr gesetzt. Dies führt bei der hier vorgestellten Anwendung nur zur Zeitverschiebung für Zeitpunkte von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang. Die Sonnenscheindauer wird jedoch nicht beeinflusst, weil die Differenz der Zeitpunkte von Sonnenuntergang und Sonnenaufgang hiervon nicht betroffen ist.

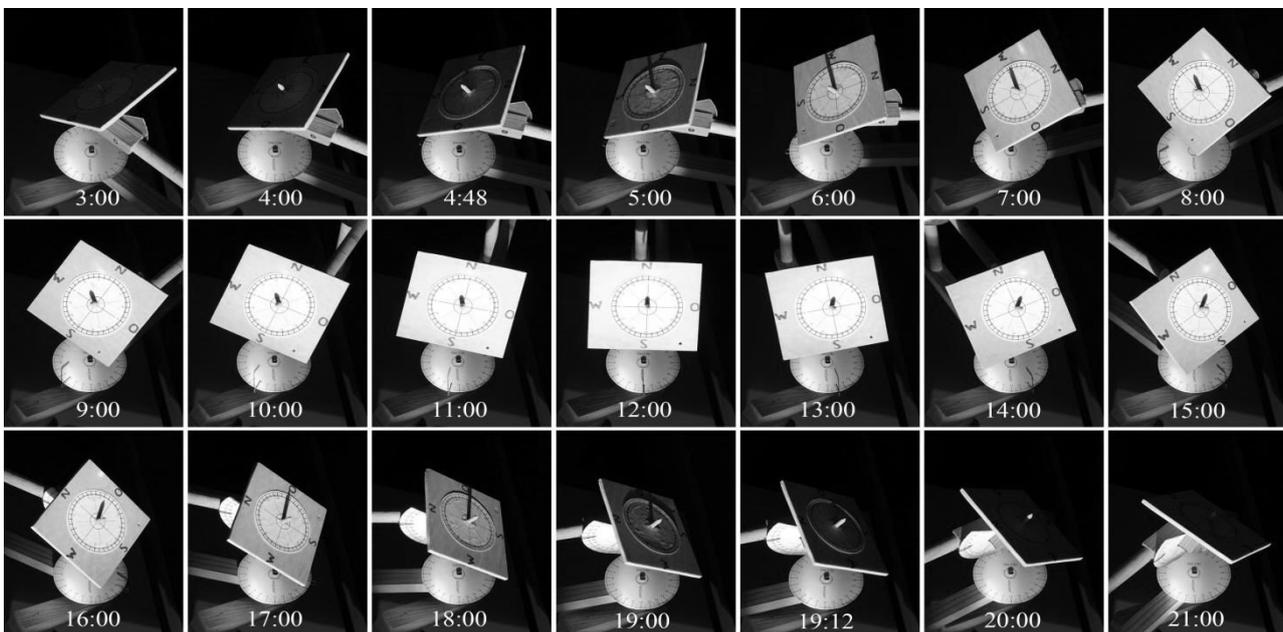


Abbildung 3.1.6: Beispiel der Messergebnisse für den 14.8. für einen Ort auf dem 51. Breitengrad. Das Serienbild stellt die Änderung der Stellung und der Helligkeit des Erdbodens von 3 Uhr bis 21 Uhr dar. Die Uhrzeit bezüglich jeder Stellung des Erdbodens kann auf der Uhr unter der Fläche abgelesen werden, sie ist auf jedem Einzelbild vermerkt.

In Abb. 3.1.6 ist die Versuchsdurchführung beispielhaft für den 14.8. am Breitengrad von Siegen (51°) wiedergegeben. Als Ergebnis erhält man den Sonnenaufgang um 4:48 Uhr und den Sonnenuntergang um

19:12 Uhr. Damit ist die Sonnenscheindauer gleich 14 Stunden und 24 Minuten. Dies entspricht fast genau dem Ergebnis der theoretischen Berechnung: 14 Stunden und 27 Minuten. Im Experiment lässt sich mit Hilfe einer Kamera auch die Veränderung der Beleuchtungsstärke auf einer ebenen Fläche im Laufe eines Tages zeigen. Anhand von Abb. 3.1.6 ist qualitativ erkennbar, dass die Helligkeit vom Sonnenaufgangspunkt zum Mittag hin zunimmt, um dann vom Mittag bis zum Erreichen des Sonnenuntergangspunkts wieder abzunehmen. Die Fotos wurden mit fester Kameraposition und konstant gehaltenen Belichtungseinstellungen aufgenommen. Weiterhin kann die Richtung der Sonneneinstrahlung anhand des Schattens bestimmt werden.

3.1.1.4 Die Schwankung der Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Ort und Datum

Diagramm 3.1.1 zeigt, dass die Sonnenscheindauer für den gleichen Ort und unterschiedliche Daten starken Schwankungen unterliegt. Ein ähnliches Ergebnis erhält man, wenn für das gleiche Datum unterschiedliche geographische Orte gewählt werden. Das Demonstrationsexperiment kann beide Fälle veranschaulichen (Abb. 3.1.7 und 3.1.8).

Anhand von Abb. 3.1.7 ist direkt erkennbar, dass der Verlauf der Helligkeit bzw. der Sonnenscheindauer am gewählten Ort (Breite: 51°) an den vier betrachteten Tagen deutlich unterschiedlich ist. Die Sonnenscheindauer ist am 22.12. minimal, am 22.6. maximal und am 21.3. und 21.9. fast gleich zur Dauer der Nacht. Diese Ergebnisse stimmen sehr gut mit der theoretischen Berechnung überein (s. Diagramm 3.1.1).

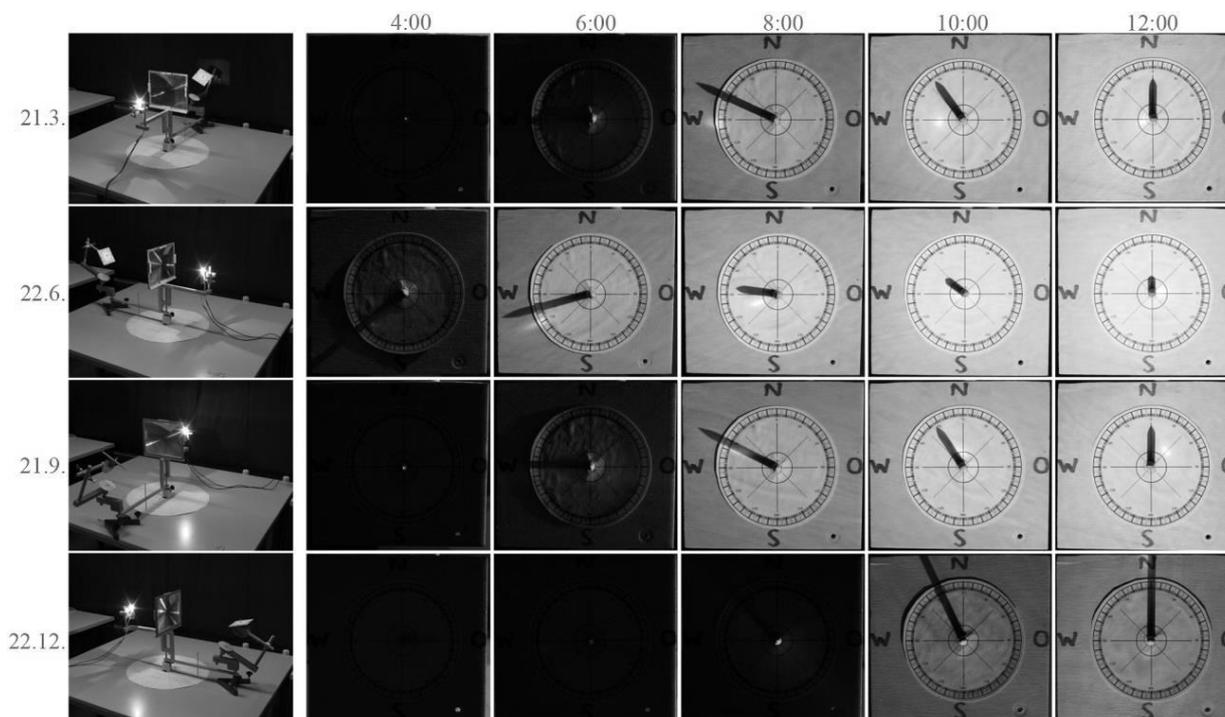


Abbildung 3.1.7: Veranschaulichung der jährlichen Veränderung der Sonnenscheindauer: Der 51. Breitengrad zu verschiedenen Daten (links). Die erste Spalte des Serienbildes zeigt die Anordnung der Fläche am Mittag an verschiedenen Tagen. Die weiteren Spalten des Serienbildes stellen den Ablauf sowohl der Helligkeit als auch des Schattenwurfs in Abhängigkeit von der Zeit dar. Der Ablauf der Helligkeit und des Schattenwurfs sind nach 12 Uhr symmetrisch zum Vormittag (s. Abb. 3.1.6), weshalb sie hier nicht dargestellt werden.

Wie aus den Beispielen der Abb. 3.1.8 zu entnehmen ist, ist der Verlauf der Beleuchtungsbedingungen am 22.6. zwischen den vier dargestellten geographischen Breitengraden höchst unterschiedlich. Je größer der geographische Breitengrad ist, umso länger ist die Sonnenscheindauer. Für die Breite -51° (auf der südlichen Erdhalbkugel) ist sie am geringsten, im Gegensatz dazu ist die Sonnenscheindauer auf der Breite 75° am längsten. Aus der letzten Zeile des Serienbilds wird ersichtlich, dass der 75° Breitengrad auch zu Mitternacht noch von der Sonne beschienen wird, also die Sonnenscheindauer gleich 24 Stunden ist. Das Phänomen der „Weißen Nächte“ wird sichtbar. Alle Ergebnisse entsprechen fast den theoretischen Berechnungen (s. Diagramm 3.1.1).

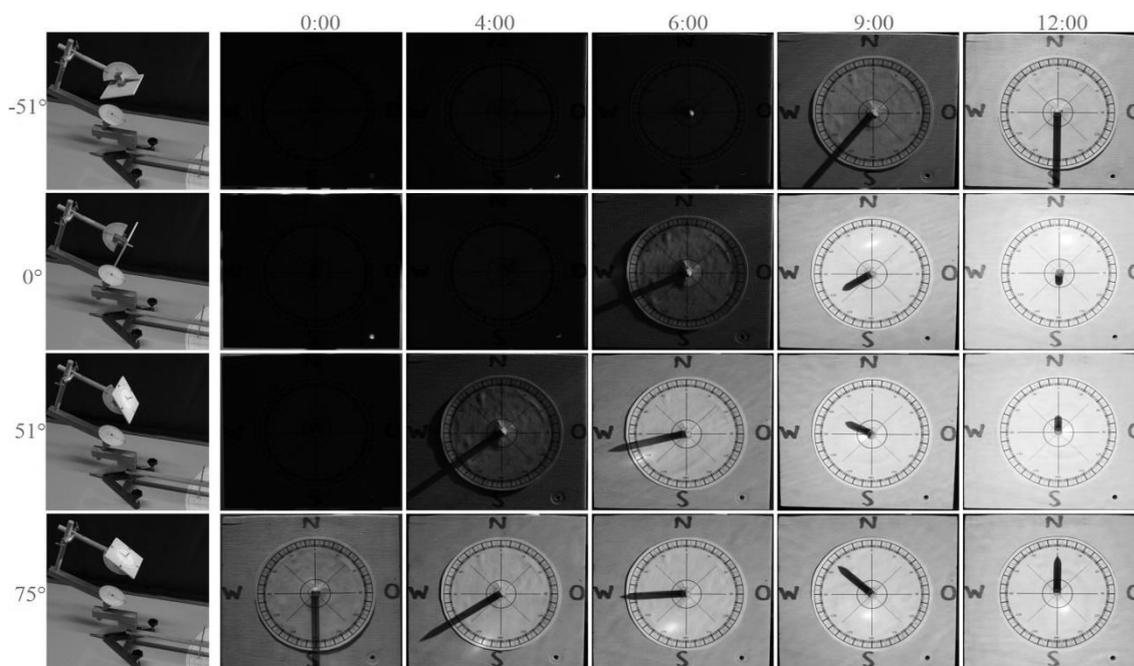


Abbildung 3.1.8: Veranschaulichung der Schwankung der Sonnenscheindauer am 22.6. für verschiedene geographische Breitengrade. Die erste Spalte des Serienbilds zeigt die Anordnung der Fläche am Mittag für verschiedene Breitengrade. Die übrigen Spalten stellen den Verlauf sowohl der Helligkeit als auch des Schattenwurfes dar.

3.1.1.5 Darstellung des Tagbogens

Mit dem vorgestellten Modellversuch kann auch der Verlauf der Sonnenrichtung veranschaulicht werden, indem man den Schatten der Holzstange auf der Fläche beobachtet. Weiterhin lässt sich ein Tagbogen aufzeichnen, anhand dessen sich der Verlauf der Sonnenrichtung verfolgen lässt.

Hierbei verwendet man eine leicht angeraute Halbkugel (Abb. 3.1.9 – (1)) aus Acryl, die die Rolle des scheinbaren Himmelsgewölbes spielt. Diese Halbkugel wird auf die Fläche aufgesetzt, so dass die Mittenmarkierung dieser Halbkugel mit dem Mittelpunkt der Skala auf dem Erdboden zusammenfällt. Zwischen der Fresnellinse und der Halbkugel wird ein undurchsichtiger Papierschirm (2) eingesetzt. In der Mitte dieses Schirms befindet sich ein Loch (3) mit einem Durchmesser von 4 mm, damit ein schmaler zylindrischer Lichtstrahl entsteht. Die Stellung des Schirms ist verstellbar, so dass dieser schmale Lichtstrahl auf den Mitterpunkt der Fläche gerichtet werden kann.

Wenn der Lichtstrahl auf die Halbkugel trifft, erzeugt er dort einen kreisförmigen leuchtenden Fleck. Dieser Fleck spielt die Rolle der Sonne auf der Himmelskugel. Dreht man die Fläche um die Erdachse gegen den Uhrzeigersinn, so ändert sich die Position des Flecks auf der Halbkugel. Seine Bahn entspricht dem Tagbogen. Zur Markierung des Bogens lassen sich etwa kleine kreisförmige Klebeschilder verwenden (Abb. 3.1.10).

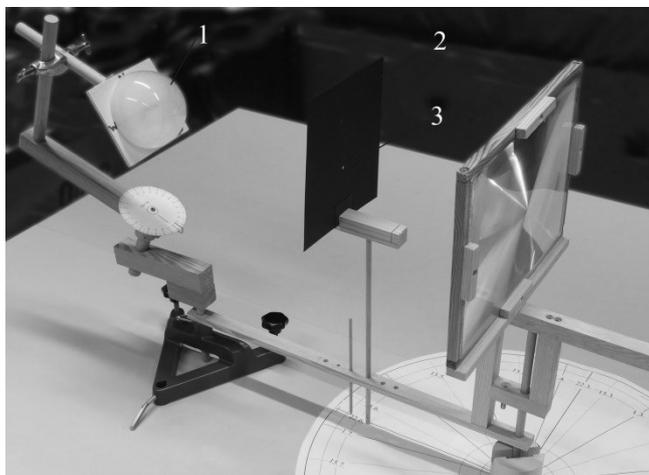


Abbildung 3.1.9: Aufbau des Experiments zum Tagbogen.

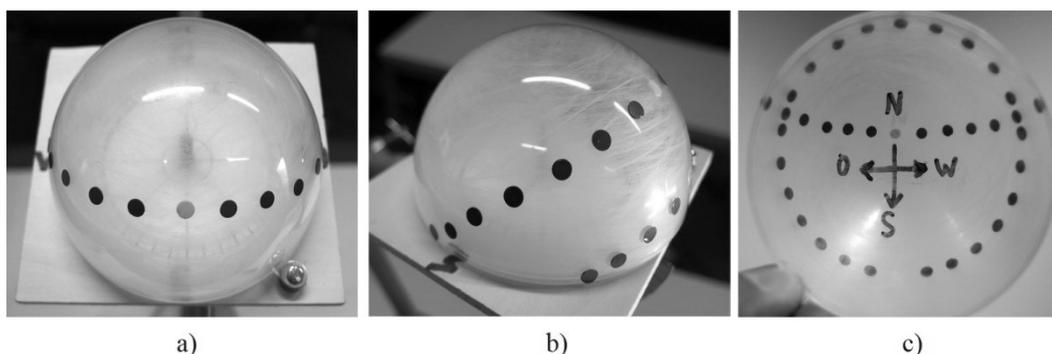


Abbildung 3.1.10: Die Markierung der Tagbögen, die gelben Punkte entsprechen den Mittagspunkten, a) für den 22.6., am Breitengrad 51° , b) für den 22.6. (oben) und für den 22.12. (unten), am 51° Breitengrad und c) für den 22.6., am 75° Breitengrad (geschlossener Kreis) und am Äquator.

Die Sonnenscheindauer kann anhand des Tagbogens bestimmt werden, indem dieser mittels einer angefertigten Schablone oder einer Schnur vermessen wird [Kraus 2012]. Mit diesem Versuch können mehrere Tagbögen markiert und miteinander verglichen werden. Abb. 3.1.10 zeigt eine Auswahl der gewonnenen Ergebnisse.

3.1.2 Sonnenscheindauer auf der beliebigen Dachschräge

3.1.2.0 Einleitung

In diesem Abschnitt wird ein zusätzliches Modell vorgestellt, mit dem es (gemeinsam mit dem obigen Versuch) möglich ist, durch einfache Messungen die Sonnenscheindauer für beliebige Breitengrade, sowie für beliebig ausgerichtete und geneigte Dachflächen zu ermitteln. So können Lernende selbstständig auf experimentelle Weise die genannten Einflüsse auf die Sonnenscheindauer untersuchen,

ohne dabei auf die komplizierte sphärische Geometrie zurückgreifen zu müssen. Die anhand des Versuches gewonnenen Erkenntnisse können schließlich mit theoretischen Berechnungen verglichen werden und liefern sehr gute Übereinstimmungen.

Aus der Alltagserfahrung ist bekannt, dass nicht jede Fläche eines Hauses gleichermaßen von der Sonne beschienen wird. Für die Dachflächen ist dieses Phänomen von besonderem Interesse, da die Effizienz einer dort installierten Solarzelle unmittelbar von der empfangenen Sonneneinstrahlung bzw. der Sonnenscheindauer abhängt. Um die Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche zu ermitteln, muss neben der Ausrichtung des Hauses noch der Neigungswinkel des Daches in Betracht gezogen werden. Prinzipiell sind in der Oberstufe alle mathematischen Voraussetzungen zur Berechnung gegeben, da die analytische Geometrie die benötigten Werkzeuge bereitstellt. Jedoch ist die Herleitung der gesuchten Formel aufgrund der vielen notwendigen Rechenschritte ziemlich komplex (s. Abschnitt 1.3), um sie tatsächlich im normalen Unterricht einbringen zu können. Um die mathematischen Schwierigkeiten zu umgehen, kann im Schulunterricht ein geeigneter Versuchsaufbau verwendet werden, der es ermöglicht, die Sonnenscheindauer durch direkte Messung zu ermitteln. Zum Problem der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden sind in der Literatur bereits viele Ideen zur praktischen Umsetzung vorhanden, das spezielle Problem der Sonnenscheindauer auf beliebigen Dachschrägen wird in der fachdidaktischen Literatur hingegen kaum betrachtet. Aus diesem Grund wird hier ein neu entwickelter Versuch zur quantitativen Messung und dessen Durchführung vorgestellt.

3.1.2.1 Die Theorie zur Berechnung der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge

Die Herleitung der Formeln zur Berechnung der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge wurde in Abschnitt 1.3 präzise dargestellt. Anhand der Gleichung (1.3.1) oder (1.3.5) ist ersichtlich, dass die Sonnenscheindauer T_{hell} eine Funktion mit vier Variablen ist, dem horizontalen Drehwinkel α_H (die Neigung des Daches), dem vertikalen Drehwinkel α_V (der Drehwinkel des Hauses), dem Breitengrad φ und der Anzahl n der Tage ab dem 22.12.

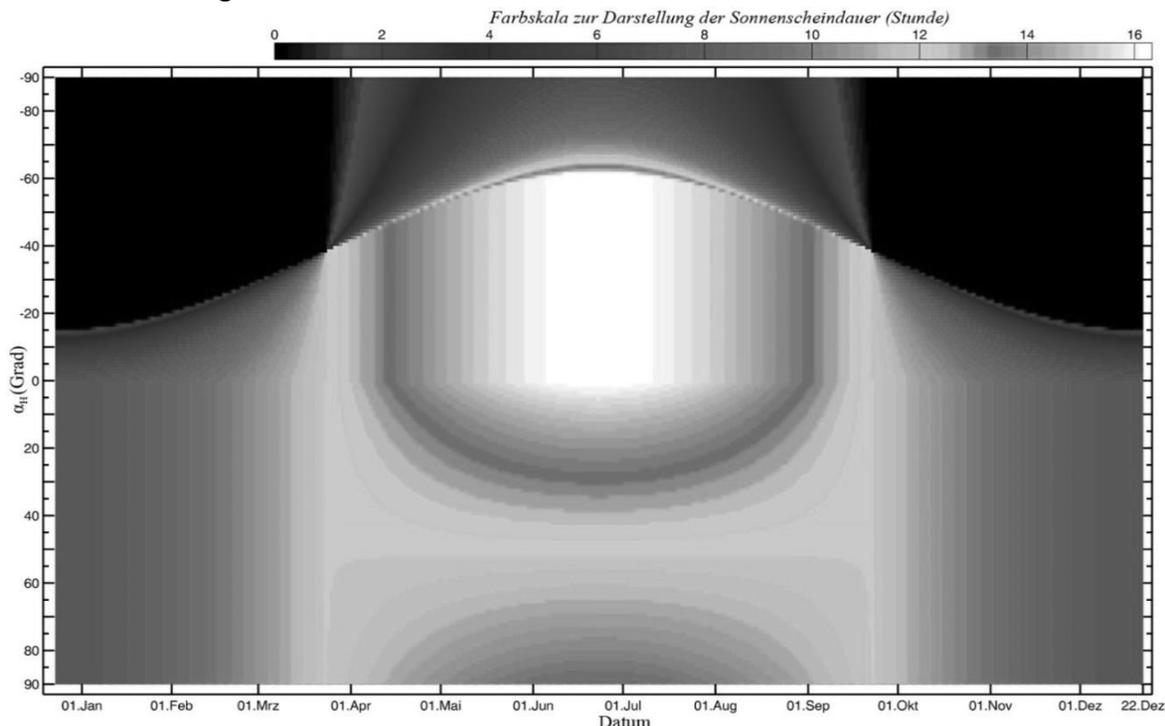


Diagramm 3.1.2: Verlauf der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge in Abhängigkeit vom Datum und dem horizontalen Drehwinkel des Daches (α_H).

Werden nur zwei der Parameter festgelegt, ist es möglich die Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von den anderen zwei Parametern mit Hilfe einer Farbskala darzustellen. Diagramm 3.1.2 zeigt exemplarisch die Sonnenscheindauer in Abhängigkeit vom Datum und dem Neigungswinkel des Daches α_H bei festgelegtem Breitengrad $\varphi = 51^\circ$ (Siegen) und $\alpha_V = 0^\circ$. Weitere diesbezügliche grafische Abhängigkeiten kann man in den Diagrammen 1.3.5a, 1.3.5b, 1.3.7a und 1.3.7b sehen.

3.1.2.2 Versuchsaufbau

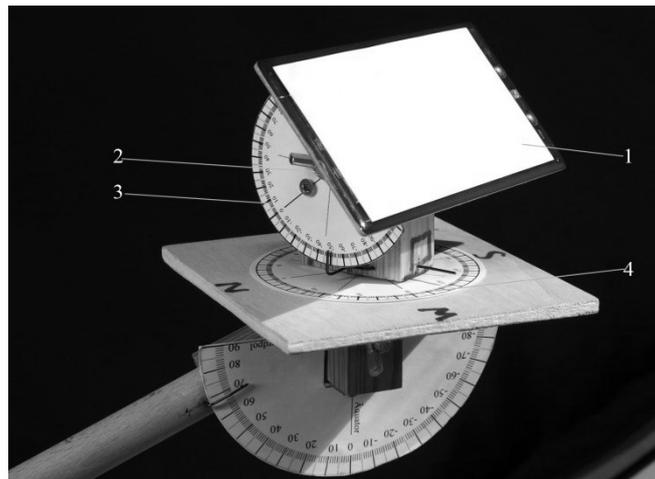


Abbildung 3.1.11: Erweiterung des Versuchsaufbaus zur Ermittlung der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche.

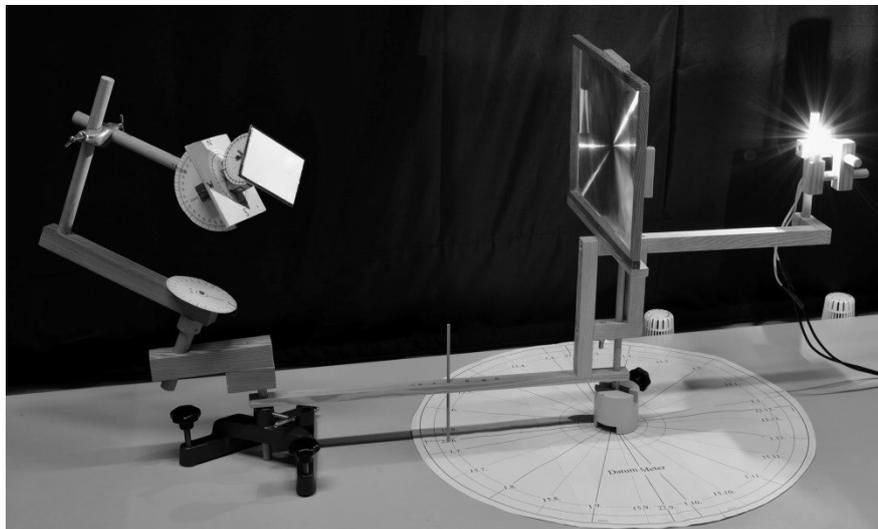


Abbildung 3.1.12: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche.

Um die Sonnenscheindauer auf einer beliebigen Dachschräge zu messen, verwendet man im Prinzip den Versuchsaufbau wie den für die Sonnenscheindauer auf dem Erdboden (Abb. 3.1.5). Außerdem kann zusätzlich das Modell eines Hauses (Abb. 3.1.11) mit einem verstellbaren Dach (1) auf der Holzstange (Abb. 3.1.4 – (6)) über der Holzplatte, welche den Erdboden darstellt, montiert werden. Das Dach kann um die horizontale Achse (2) gedreht werden und dessen Neigungswinkel α_H (also der horizontale Drehwinkel, s. Abschnitt 1.3) anhand der Skala (3) abgelesen werden. Die Ausrichtung des drehbar

gelagerten Hauses wird über den Winkel α_V (also der vertikale Drehwinkel) beschrieben und kann an der Skala (4) abgelesen werden.

Die Sonnenscheindauer für die Dachschräge kann nun bestimmt werden, indem gemessen wird, wie viele Stunden am Tag die Dachschräge durch die Lampe beleuchtet wird (Abb. 3.1.12).

3.1.2.3 Messungen der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge

Obwohl die allgemeine Formel für die theoretische Berechnung der Sonnenscheindauer auf einer beliebigen Dachschräge sehr kompliziert ist, kann man diese mit Hilfe des oben geschilderten Versuches durch Messung leicht nachvollziehen. Der Ablauf einer Beispielmessung ist in Abb. 3.1.13 dargestellt, dazu wurde eine Serienaufnahme vom „Sonnenaufgang“ um 4:48 bis zum „Sonnenuntergang“ um 19:12 auf dem Erdboden erstellt. Ob die Dachfläche Sonnenstrahlung empfängt, ist direkt anhand der Beleuchtung erkennbar, die Uhrzeiten können an der entsprechenden Skala abgelesen werden. Für eine exemplarische Messung (Abb. 3.1.13) wurden folgende Parameter gewählt:

- Ausrichtung des Hauses: $\alpha_V = -110^\circ$,
- Neigung der Dachfläche: $\alpha_H = -60^\circ$,
- Datum: 14.8.,
- geografischer Breitengrad: $\varphi = 51^\circ$.

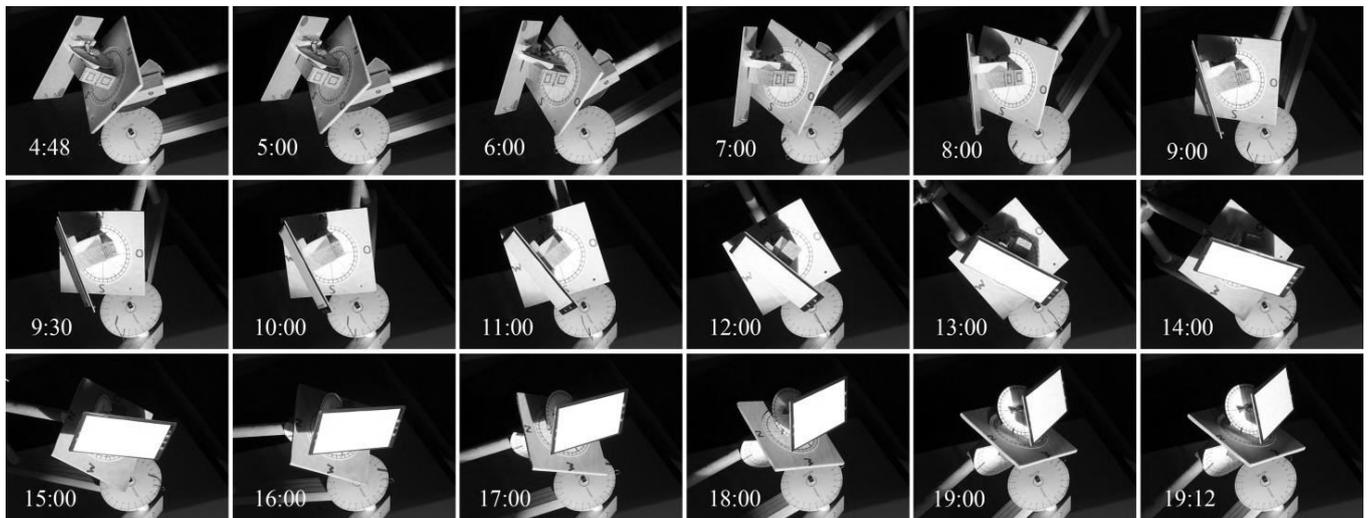


Abbildung 3.1.13: Messbeispiel der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche mit $\alpha_V = -110^\circ$ und $\alpha_H = -60^\circ$, am 14.8. und für den geografischen Breitengrad $\varphi = 51^\circ$.

Es ist erkennbar, dass das Dach und der Erdboden gleichzeitig von 9:30 Uhr bis 19:12 Uhr von der Sonne beschienen werden, somit beträgt die Sonnenscheindauer 9 Stunden 42 Minuten. Dies kommt dem mit Hilfe von Gleichung (1.3.1) (oder aus Simulation s. Abschnitt 1.3.3.2.1 oder 1.3.3.2.2) berechneten Ergebnis von 9 Stunden 40 Minuten sehr nahe, was durch einen Blick auf Abb. 1.3.5a oder 1.3.5b überprüft werden kann.

3.1.2.4 Veranschaulichung der örtlichen Eigenschaft der Dachschräge

Die Beleuchtungsmerkmale einer Dachschräge hängen ab von dem geografischen Ort, an dem das Haus steht. Die Dachschrägen in Deutschland und allen geografischen Bereichen mit vergleichbarem Breitengrad haben identische Eigenschaften.

Betrachtet man nun Dächer mit $\alpha_V = 0$ in Deutschland (geografischer Breitengrad $\varphi = 51^\circ$), so können die Dächer entweder nach Süden ($\alpha_H > 0^\circ$) oder nach Norden ($\alpha_H < 0^\circ$) ausgerichtet werden. Anhand der theoretischen Berechnung (Abb. 3.1.12) lassen sich einige interessante Eigenschaften ablesen: Die Sonnenscheindauer für die nach Süden orientierten Dächer ($\alpha_H > 0^\circ$) ist im Winterhalbjahr vom 21.09. bis 21.03. unabhängig vom Neigungswinkel α_H und sie erreicht das mögliche Maximum der Sonnenscheindauer, also sie entspricht exakt der Sonnenscheindauer auf der Erdoberfläche (Die Sonnenscheindauer auf der Erdoberfläche entspricht einer Dachfläche mit dem Neigungswinkel $\alpha_H = 0$). In diesem Zeitraum ist die Sonnenscheindauer für die nach Norden orientierten Dächer ($\alpha_H < 0^\circ$) geringer als für die nach Süden orientierten Dächer.

Im Sommerhalbjahr vom 22.03. bis 20.09. ist das Verhalten umgekehrt. Die nach Norden orientierten Dächer mit $0 > \alpha_H > -39^\circ$ haben aber höhere Sonnenscheindauer als die nach Süden orientierten Dächer.

Diese aus der Theorie gewonnenen Erkenntnisse können mit Hilfe des vorgestellten Modells auch auf experimentelle Weise gewonnen werden:

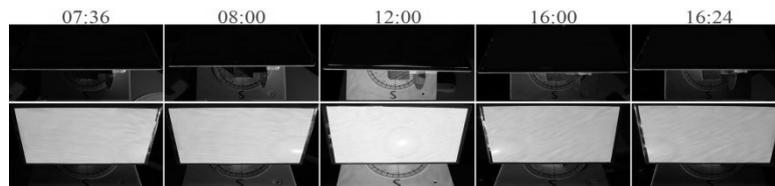


Abb. 3.1.14: Helligkeitsverlauf zweier Dachflächen in Deutschland am 01.02. für $\alpha_H = -35^\circ$ (oben) und $\alpha_H = 70^\circ$ (unten).

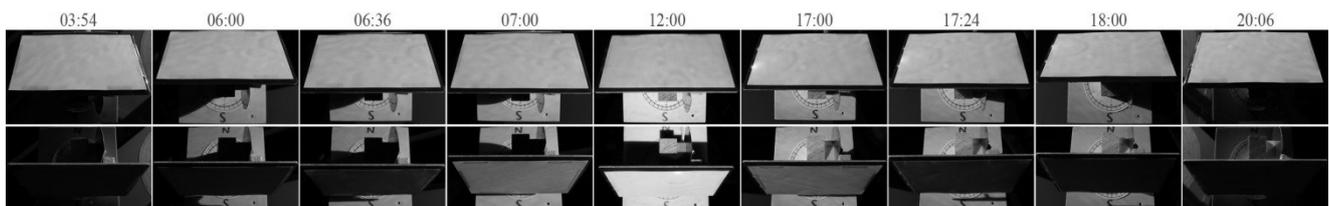


Abb. 3.1.15: Helligkeitsverlauf zweier Dachflächen in Deutschland am 01.07. für $\alpha_H = -35^\circ$ (oben) und $\alpha_H = 70^\circ$ (unten).

In den Abbildungen 3.1.14 und 3.1.15 ist der Helligkeitsverlauf vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang sowohl auf dem Erdboden als auch auf einer nach Süden (unten) bzw. nach Norden (oben) ausgerichteten Dachfläche am 01.07. bzw. am 01.02. zu sehen. Im Winter, am 01.02. (Abb. 3.1.14), erhält die nördlich ausgerichtete Dachfläche keinerlei Sonnenstrahlung, während die südlich ausgerichtete Dachfläche zwischen 07:36 Uhr und 16:24 Uhr beleuchtet wird. Dort und auf dem Erdboden beträgt die Sonnenscheindauer $T'_2 = 8,8$ (Stunden). Im Gegensatz dazu ist anhand von Abb. 3.1.15 ersichtlich, dass die nördlich ausgerichtete Dachfläche mit $\alpha_H = -35^\circ$ sowie der Erdboden im Sommer am 01.07. zwischen 03:54 Uhr und 20:06 Uhr immer beleuchtet werden. Die Sonnenscheindauer beträgt somit jeweils $T_1 = 17,2$ (Stunden). Im Vergleich dazu wird die südlich ausgerichtete Dachfläche

mit $\alpha_H = 70^\circ$ nur 06:36 Uhr bis 17:24 Uhr beleuchtet, sodass dort die Sonnenscheindauer nur $T_2 = 10,8$ (Stunden) beträgt.

3.1.2.5 Einschränkung und Diskussion des Modells

In Abbildung 3.1.13 ist auffällig, dass zum Zeitpunkt des Sonnenuntergangs auf dem Erdboden die Dachfläche noch immer beschienen wird, obwohl dieser Fall im Alltag nicht möglich ist. Dieser Fakt kann genutzt werden um in eine vertiefende Diskussion des Modells und der zugrundeliegenden Theorie einzusteigen:

Aus mathematischer Sicht tritt dieser Fall ein, wenn Ungleichung (1.3.1g), im Gegensatz zu Ungleichung (1.2.4a), erfüllt ist. Dies impliziert, dass das Dach zur Sonne zeigt, der Erdboden jedoch von ihr abgewandt ist. Im Extremfall würde das bedeuten, dass die Dachfläche eines Hauses auf der von der Sonne abgewandten Seite der Erde zur Sonne zeigt – dazu müsste es auf dem Kopf stehen, was natürlich absurd ist. Warum diese Situation trotzdem eintritt, wird bei genauerer Betrachtung des Modells deutlich: Bedingt durch die Bauart können die Größenverhältnisse nicht annähernd realistisch dargestellt werden, wie es in astronomischen Modellen häufig der Fall ist. Der Abstand des Daches vom Erdboden liegt im Modell etwa in derselben Größenordnung wie der Abstand des Erdbodens vom Erdmittelpunkt und entspricht somit einer Höhe des Daches von mehr als 6000 km. In dieser Höhe würde sich der Sonnenuntergangspunkt auf der Dachfläche tatsächlich signifikant von dem des Erdbodens unterscheiden!

3.1.3 Bestimmung der eingestrahltten Sonnenenergie auf dem Erdboden und auf der Dachschräge

3.1.3.0 Einleitung

Aus energetischer Sicht muss angemerkt werden, dass die eingestrahlte Sonnenenergie keineswegs nur von der Beleuchtungsdauer abhängt. Wenn man in der Praxis die Sonnenenergie gewinnt, muss man nicht nur überlegen, wie lange die Solarzelle beschienen wird, sondern auch berücksichtigen, wie hoch die Einstrahlungsleistung ist. Diese hängt auch vom Einfallswinkel ab.

Das geht über die im obigen Abschnitt dargelegten Versuche zur Sonnenscheindauer auf dem Erdboden und auf der Dachschräge hinaus. Obwohl sich die Sonnenscheindauer auf die eingestrahlte Sonnenenergie bezieht, entscheidet die Sonnenscheindauer aber allein über die eingestrahlte Sonnenenergie. Z. B. hat die in Abb. 3.1.17 nach Norden ausgerichtete Dachfläche mehr Sonnenscheindauer als die nach Süden ausgerichtete Dachfläche. Trotzdem, ist die während eines Tages eingestrahlte gesamte Sonnenenergie auf der nach Norden ausgerichteten Dachfläche geringer als auf der nach Süden ausgerichteten Dachfläche. Dieses überraschende Merkmal muss im Unterricht thematisiert werden.

Deswegen folgt in diesem Abschnitt die Darstellung eines Versuchs, der sich sowohl zur qualitativen als auch zur quantitativen Bestimmung der eingestrahltten Sonnenenergie eignet. Für den qualitativen Versuchsanteil beobachtet man die Helligkeit des Erdbodens bzw. des Daches. Für den quantitativen Versuchsanteil benutzt man entweder Fotowiderstand, Solarzelle oder eine Kamera.

3.1.3.1 Die theoretische Berechnung der eingestrahltten Sonnenenergie

Die solare Bestrahlungsstärke B_E auf dem Erdboden wird ermittelt nach

$$B_E = \begin{cases} P_s \cdot \cos \theta & | \cos \theta > 0 \\ 0 & | \cos \theta \leq 0 \end{cases}$$

Dabei ist $P_s = 1368 \text{ W/m}^2$ (s. Gleichung (1.1.6a)) die Solarkonstante. Der Winkel θ bezeichnet den Zenitwinkel (s. Abschnitt 1.1.3) der Sonne. Er kann aus der Gleichung (1.1.6) oder (1.2.3) berechnet werden. Durch diese Gleichungen kann die Abhängigkeit zwischen B_E und Datum und Uhrzeit (z. B. für Siegen mit geografischem Breitengrad $\varphi = 51^\circ$) grafisch dargestellt werden (Diagramme 3.1.3 und 3.1.5 (Blaue Kurve)).

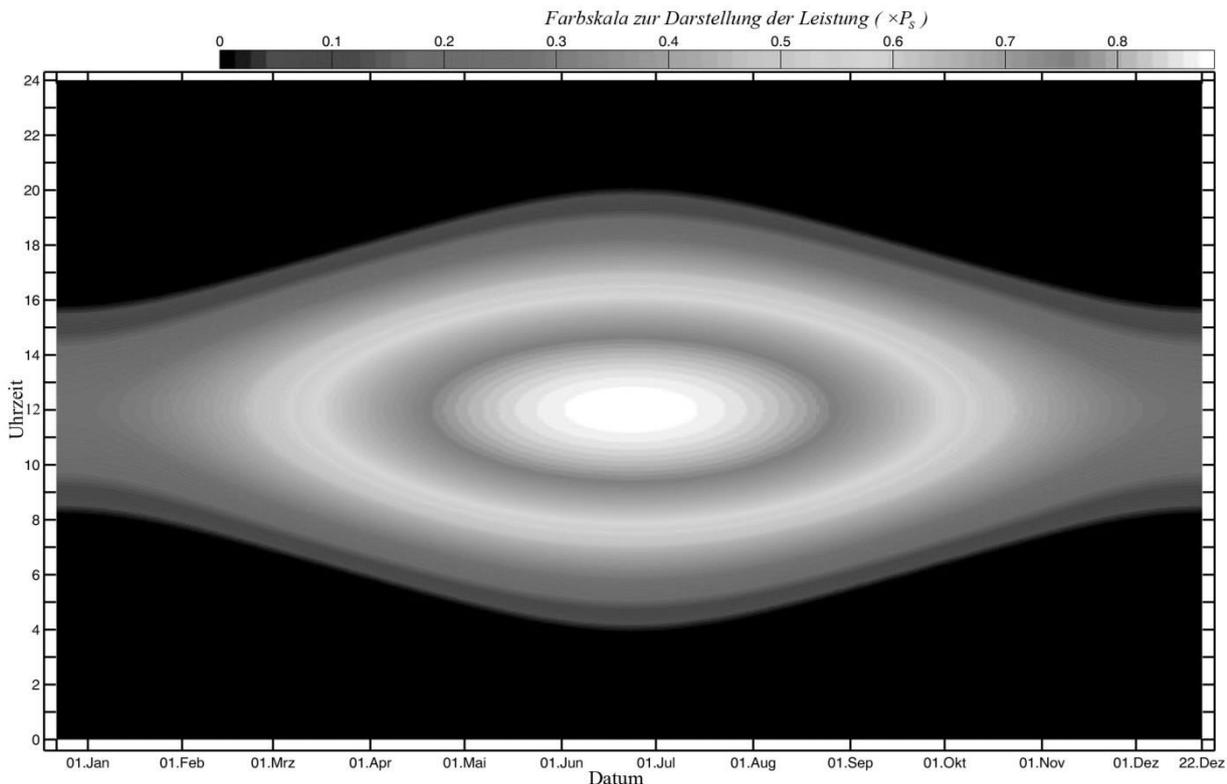


Diagramm 3.1.3: Verlauf der solaren Bestrahlungsstärke B_E auf dem Erdboden in Abhängigkeit vom Datum und Uhrzeit in Siegen (geografischer Breitengrad $\varphi = 51^\circ$).

Die theoretische tägliche Energieeinstrahlung E auf 1 m^2 Erdboden kann anhand der Gleichung (1.1.7) oder (1.2.7) berechnet werden. Sie wurde bereits grafisch dargestellt (s. Diagramme 1.2.17 und 1.2.18).

Die solare Bestrahlungsstärke B_D auf dem Dach wird ermittelt nach

$$B_D = \begin{cases} P_s \cdot \cos \theta_D & | \cos \theta_D > 0 \text{ und } \cos \theta > 0 \\ 0 & | \cos \theta_D \leq 0 \text{ oder } \cos \theta \leq 0. \end{cases}$$

Dabei wurde der Winkel θ_D bei Abschnitt 1.3.1 eingeführt. Er kann durch Gleichung (1.3.1c) bestimmt werden.

Die theoretische tägliche Energieeinstrahlung E auf 1 m^2 der Dachschräge kann durch die Gleichung (1.3.2) oder (1.3.6) bestimmt werden. Aus diesen Gleichungen kann man erkennen, dass E eine Funktion

mit vier Variablen ist; dem horizontalen Drehwinkel α_H (die Neigung des Daches), dem vertikalen Drehwinkel α_V (der Drehwinkel des Hauses), dem Breitengrad φ und dem Datum, also der Anzahl n der Tage ab dem 22.12. Wir betrachten den Breitengrad $\varphi = 51^\circ$ (Siegen) und $\alpha_V = 0^\circ$, somit hängt E allein von den zwei Variablen horizontaler Drehwinkel α_H und Datum ab. Diese Abhängigkeit wird im Diagramm 3.1.4 dargestellt. Weitere grafische Abhängigkeiten zwischen den anderen Variablen kann man aus den Diagrammen 1.3.6a, 1.3.6b, 1.3.8a, 1.3.8b und 3.1.24 (Blaue Kurve) entnehmen.

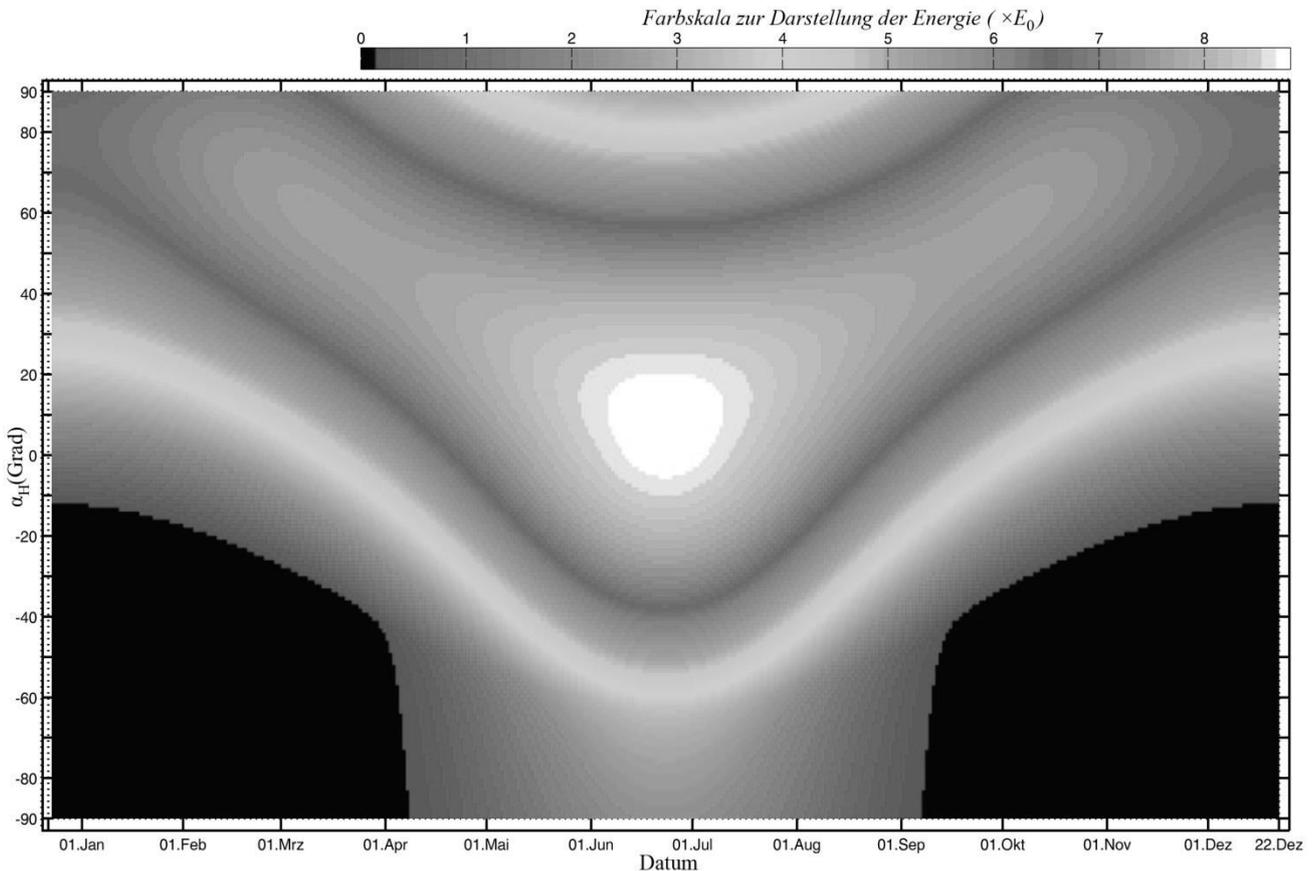


Diagramm 3.1.4: Verlauf der täglich eingestrahltten Sonnenenergie E auf der Dachschräge in Abhängigkeit von Datum und horizontalem Drehwinkel (α_H) des Daches.

$E_0 = P_s \cdot 1h = 1,368 \text{ kWh/m}^2$ ist die in einer Stunde eingestrahltte Sonnenenergie auf einer 1m^2 – Fläche, die senkrecht zur Sonnenstrahlung steht.

3.1.3.2 Qualitative Ergebnisse

Zur qualitativen Veranschaulichung des Verlaufs der solaren Bestrahlungsstärke auf dem Erdboden verwendet man den gleichen Versuchsaufbau wie in Abb. 3.1.5. Wenn der Erdboden von der Sonne beschienen wird, leuchtet er hell. Je größer die eingestrahltte Strahlungsleistung ist, desto heller der Erdboden. Man untersucht ein gewünschtes Datum und einen gewünschten Breitengrad. Dabei kann man direkt beobachten, dass die Helligkeit des Erdbodens (Abb. 3.1.4 – (1)) am Vormittag mit der Zeit zunimmt, während sie am Nachmittag abnimmt. Damit kann man qualitativ den Verlauf der eingestrahltten solaren Leistung in einem Tag veranschaulichen.

Die Abb. 3.1.16 zeigt das Serienbild von Erdboden. Alle Bildteile sind von einer Kamera mit gleich eingestellten Parametern, also gleichem ISO-Wert, gleicher Blendenzahl und Belichtungszeit. Deswegen sind die Helligkeiten jedes Bildes im Serienbild in gleicher Weise Ausdruck der echten Helligkeit am

Erdboden – je heller das Bild, desto höher die Einstrahlungsleistung (es gilt aber keine Proportionalität!). Damit kann man qualitativ die eingestrahelte solare Leistung verfolgen.

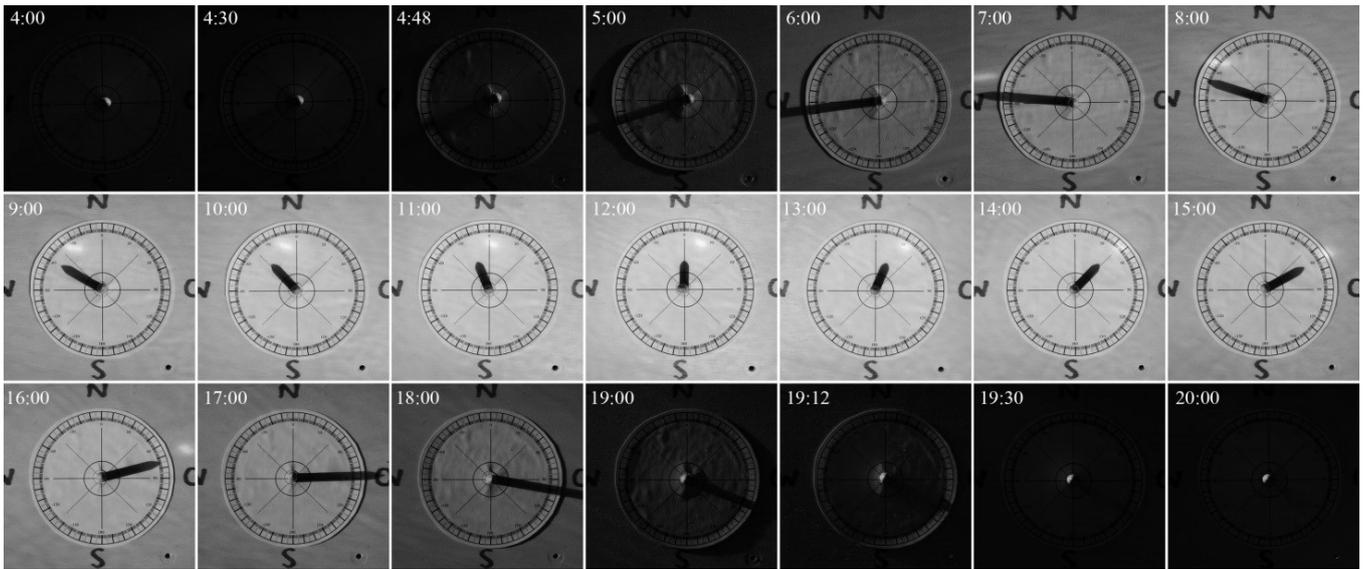


Abbildung 3.1.16: Ein Beispiel der Ergebnisse für das Datum 14.8. und für einen Ort mit dem Breitengrad 51° . Das Serienbild stellt die Änderung der Helligkeit des Erdbodens von 4 Uhr bis 20 Uhr dar. Die Uhr-Zeit bezüglich jeder Stellung des Erdbodens kann man auf dem Uhr-Meter ablesen, sie wurde auf jeden Bildsteil auch aufgeschrieben.

Zur qualitativen Veranschaulichung des Verlaufs der solaren Bestrahlungsstärke auf der Dachschräge verwendet man den gleichen Versuchsaufbau wie in Abb. 3.1.12, man führt den Versuch analog wie den Versuch für den Erdboden durch. Ein Beispiel wird in Abb. 3.1.17 dargestellt.

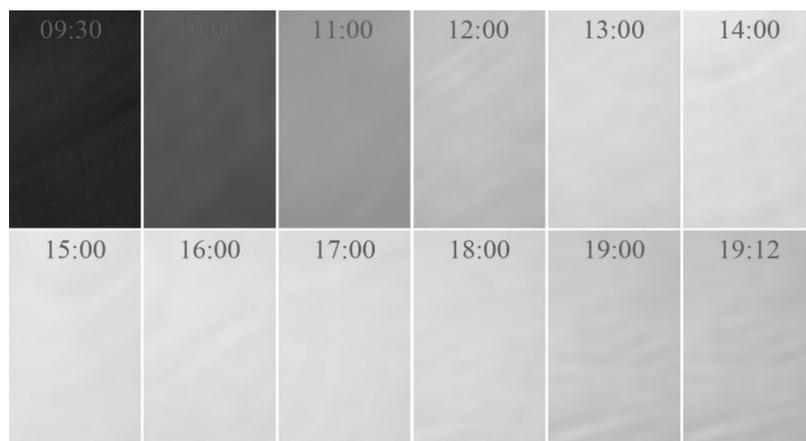


Abbildung 3.1.17: Ein Beispiel der Ergebnisse auf der Dachschräge mit $\alpha_H = 60^\circ$ und $\alpha_V = 70^\circ$ für das Datum 14.8. - in Siegen mit dem Breitengrad $\varphi = 51^\circ$. Das Serienbild stellt die Änderung der Helligkeit des Erdbodens von Sonnenaufgangszeitpunkt auf dem Dach 9:30 Uhr bis zum Sonnenuntergang auf dem Erdboden 19:12 Uhr dar. Die Uhr-Zeit bezüglich jeder Stellung des Daches kann man auf dem Uhr-Meter ablesen, sie wurde auf jedem Bildteil aufgeschrieben.

3.1.3.3 Quantitative Ergebnisse

Zusätzlich zum qualitativen Versuchsaufbau benutzt man für quantitative Messungen entweder einen Fotowiderstand, eine Solarzelle oder eine Kamera (auch ein Smartphone mit Kamera). Das Messverfahren für den Erdboden oder für die Dachschräge ist gleich.

3.1.3.3.1 Messung mittels Fotowiderstand

Zur Messung der Bestrahlungsstärke des Lichtes steckt man einen Fotowiderstand auf eine Öffnung auf dem Modell-Erdboden (Abb. 3.1.18). Zuerst muss man das Instrument eichen, indem man den annähernden Zusammenhang zwischen der Bestrahlungsstärke B und dem dazugehörigen lichtelektrischen Widerstand R ermittelt, also die Fit-Funktion $B = f(R)$. Danach führt man den Versuch durch, und misst den Widerstand R in der gewünschten Stellung der Messebene. Anhand der bekannten Funktion $f(R)$ kann man die eingestrahlte Leistung B bezüglich der Neigung der Messebene berechnen.

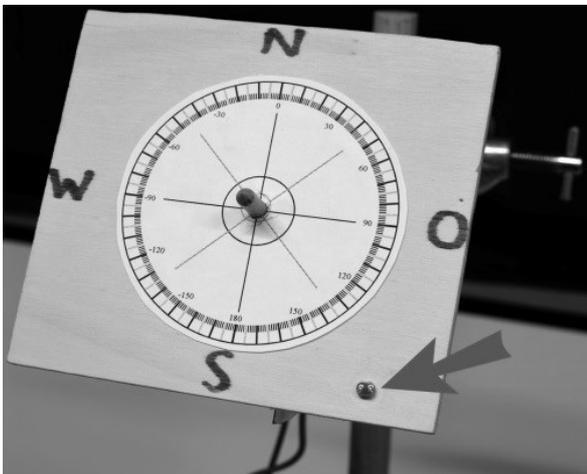


Abbildung 3.1.18 : Position des Fotowiderstands auf dem „Erdboden“.

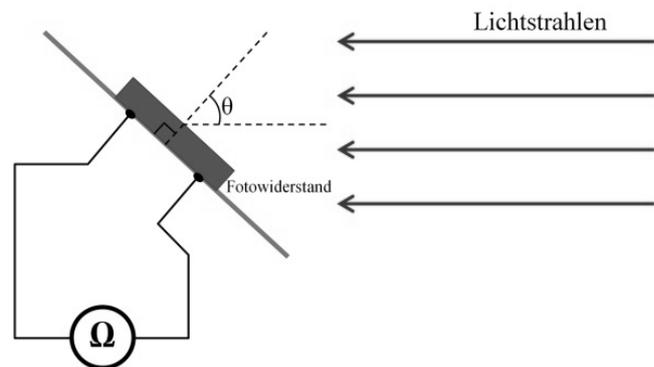


Abbildung 3.1.19: Verfahren zum Finden der Fit-Funktion $B = f(R)$.

Zur Bestimmung der Funktion $B = f(R)$ nutzt man parallele Lichtstrahlen. Der Fotowiderstand wird schräg mit einem Winkel θ gegen die Lichtstrahlen angeordnet (Abb. 3.1.19). Der Winkel θ ist von 0° bis 90° veränderbar. Dann misst man den entsprechenden Widerstand R . Die Tab. 1 stellt die gemessenen Werte dar. Dabei ist B_0 die Bestrahlungsstärke für den speziellen Fall, wenn das Licht rechtwinklig auf den Erdboden einfällt (also $\theta = 0^\circ$). Es genügt, wie die praktische Erprobung belegt, das einfache Verfahren der linearen Interpolation. Wendet man es an, so erhält man die annähernden Funktionen $B = f_i(R) = a_i \cdot R + b_i$. Dabei wird mit i die Ordnungszahl des untersuchten Punktes bezeichnet.

i	θ (Grad)	$B (\times B_0)$	$R (\Omega)$	$a_i (\times B_0/k\Omega)$	$b_i (\times B_0)$
	90	0,000	40000		
1	85	0,087	9000	-0,0028	0,112
2	80	0,174	5330	-0,0236	0,299
3	75	0,259	3810	-0,0560	0,472
4	70	0,342	3079	-0,1138	0,692
5	65	0,423	2578	-0,1609	0,837
6	60	0,500	2166	-0,1878	0,907

7	55	0,574	1962	-0,3607	1,281
8	50	0,643	1870	-0,7523	2,050
9	45	0,707	1756	-0,5642	1,698
10	40	0,766	1661	-0,6204	1,797
11	35	0,819	1562	-0,5364	1,657
12	30	0,866	1490	-0,6510	1,836
13	25	0,906	1454	-1,1190	2,533
14	20	0,940	1430	-1,3910	2,929
15	15	0,966	1414	-1,6396	3,284
16	10	0,985	1402	-1,5735	3,191
17	5	0,996	1394	-1,4234	2,980
18	0	1	1390	-0,9513	2,322

Tabelle 3.1.1: Die Werte zur Rekonstruktion der Fit-Funktion $B = f_i(R)$.

Anhand dieser Fit-Funktionen kann man die Bestrahlungsstärke B des Lichts in einer beliebigen Neigung des „Erdbodens“ berechnen, indem man dort nur die Größe des Fotowiderstandes misst. Der Aufbau des Versuchs wird in Abb. 3.1.20 dargestellt. Die Tab. 3.1.2 zeigt die Werte für das Datum 14.8.

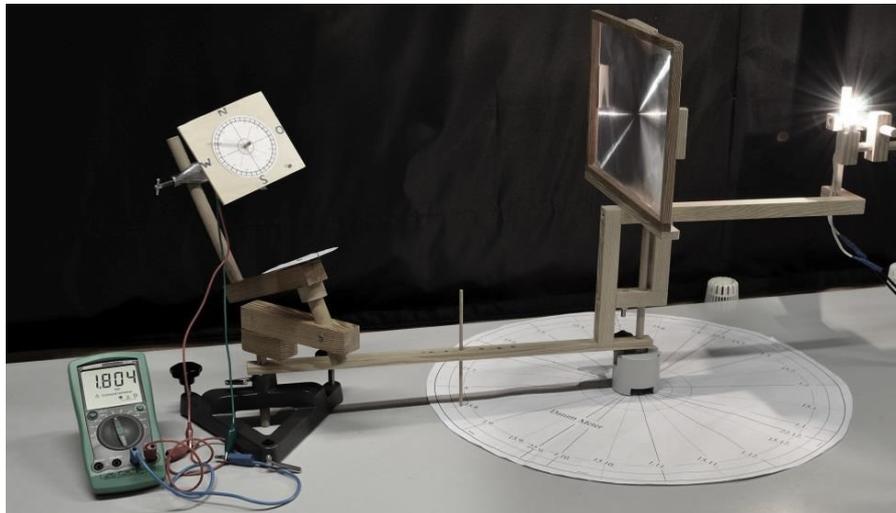


Abbildung 3.1.20: Experiment zur Messung der eingestrahltten Sonnenenergie.

Uhrzeit	R (Ω)	i	$B (\times B_0)$
04:00	38500	1	0,004
04:30	40000	1	0,000
04:48	32700	1	0,021
05:00	21200	1	0,053
06:00	5030	3	0,190
07:00	3140	4	0,335
08:00	2382	6	0,459
09:00	1942	8	0,589
10:00	1782	9	0,692
11:00	1657	11	0,768
12:00	1626	11	0,785
13:00	1619	11	0,789
14:00	1720	10	0,729
15:00	1875	8	0,639
16:00	2209	6	0,492
17:00	2830	5	0,382
18:00	4570	3	0,216

19:00	11700	1	0,080
19:12	18200	1	0,061
19:30	37300	1	0,008
20:00	38400	1	0,004

Tabelle 3.1.2: Die gemessenen Werte der Widerstände und die Interpolations-Werte der eingestrahlt Leistung.

Die experimentellen Ergebnisse sind nahe an der theoretischen Berechnung (Diagramm 3.1.5).

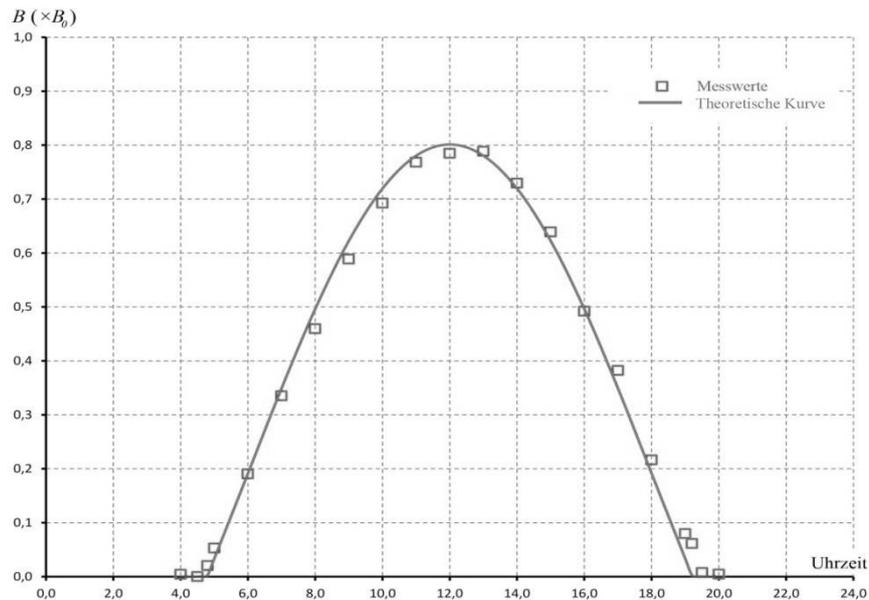


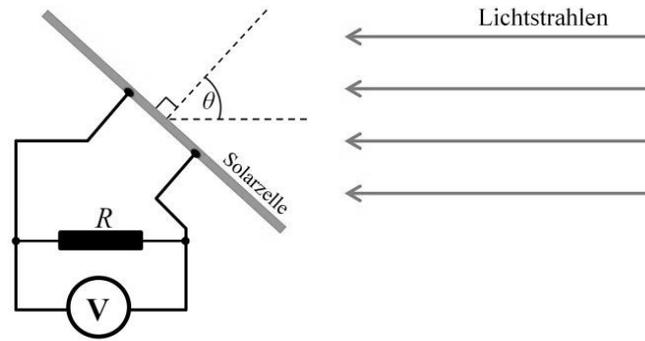
Diagramm 3.1.5: Die gemessenen Punkte und die theoretische Kurve (Messung mittels Fotowiderstand).

Die Fläche unter der blauen Kurve entspricht der theoretisch täglich eingestrahlt Energie E_{theo} pro $1m^2$ des Erdbodens. Diese kann auch aus Gleichung (1.1.7) oder (1.2.7) berechnet werden: $E_{theo} = 7,19 \cdot E_0$. Die Fläche unter der zwischen den roten Punkten hindurchgemittelten Linie ist die experimentell gemessene täglich eingestrahlt Energie E_{expe} pro $1m^2$ des Erdbodens. Sie ist rechnerisch aufzufassen als die Summe trapezförmiger Flächen: $E_{expe} = 7,17 \cdot E_0$. Somit ist die abgeleitete relative Abweichung nur klein: $\varepsilon = 0,3\%$.

3.1.3.3.2 Messung mittels Solarzelle

Die Abb. 3.1.21 zeigt eine Schaltung mit Solarzelle und Belastungswiderstand R . Die Spannung U am Widerstand R ist abhängig von der Bestrahlungsstärke B auf der Solarzelle. Deswegen kann man anstatt der direkten Messung der Bestrahlungsstärke B die Messung der Spannung U ausführen.

Zunächst sucht man den annähernden Zusammenhang zwischen der Bestrahlungsstärke B und der entsprechenden Spannung U , also die Fit-Funktion $B = f(U)$. Danach führt man den Versuch durch, und misst die Spannung U an der gewünschten Stellung der Dachschräge. Anhand der bekannten Funktion $f(U)$ kann man die Bestrahlungsstärke B bezüglich der Stellung der Dachschräge berechnen.


 Abbildung 3.1.21: Verfahren zum Finden der Fit-Funktion $B = f(U)$.

Zur Bestimmung der Funktion $B = f(U)$ wendet man ein analoges Verfahren wie das oben beschriebene an: Die Solarzelle wird schräg mit einem Winkel θ gegen den Lichtstrahl angeordnet (Abb. 3.1.22). Der Winkel θ ist von 0° bis 90° veränderbar. Dann misst man die entsprechende Spannung U . Die Tab. 3.1.3 stellt die gemessenen Werte dar. Wendet man auch hier das einfache Verfahren der linearen Interpolation an, so erhält man die annähernden Funktionen $B = f_i(U) = a_i \cdot U + b_i$. Dabei ist i die Ordnungszahl der untersuchten Punkte.

i	$\theta(\text{Grad})$	$B(\times B_0)$	$U(\text{V})$	$a_i(\times B_0/\text{V})$	$b_i(\times B_0)$
	90	0,000	0,010		
1	85	0,087	0,033	3,874	-0,039
2	80	0,174	0,077	1,966	0,023
3	75	0,259	0,132	1,549	0,055
4	70	0,342	0,192	1,387	0,076
5	65	0,423	0,246	1,479	0,059
6	60	0,500	0,298	1,503	0,053
7	55	0,574	0,346	1,533	0,044
8	50	0,643	0,385	1,752	-0,032
9	45	0,707	0,422	1,762	-0,036
10	40	0,766	0,457	1,684	-0,003
11	30	0,866	0,513	1,770	-0,042
12	20	0,940	0,555	1,754	-0,034
13	10	0,985	0,571	2,911	-0,676
14	0	1,000	0,597	0,584	0,651

 Tabelle 3.1.3: Die Werte zur Bestimmung der Fit-Funktion $B = f_i(U)$.

Anhand dieser Fit-Funktionen kann man die Bestrahlungsstärke B an der beliebigen Stellung der Dachschräge berechnen, indem man dort nur die Spannung U am Widerstand R misst. Der Aufbau des Versuchs wird in Abb. 3.1.22 dargestellt.

Die Tab. 3.1.4 zeigt die Werte für die Dachschräge mit $\alpha_H = 60^\circ$ und $\alpha_V = 70^\circ$ und für das Datum 14.8.

Uhrzeit	$U(\text{V})$	i	$B(\times B_0)$
09:30	0,015	1	0,019
10:00	0,058	2	0,136
11:00	0,204	5	0,360
12:00	0,337	7	0,561
13:00	0,449	10	0,754
14:00	0,532	12	0,899

15:00	0,580	14	0,990
16:00	0,589	14	0,996
17:00	0,560	13	0,954
18:00	0,494	11	0,832
19:00	0,396	9	0,661
19:12	0,373	8	0,621

Tabelle 3.1.4: Die gemessenen Werte der Spannung U und die Interpolations-Werte der Bestrahlungsstärke B .

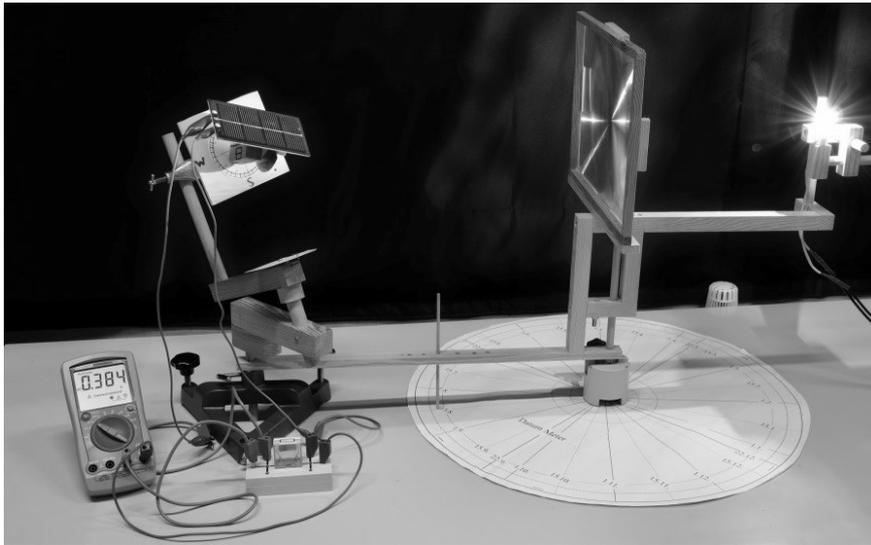


Abbildung 3.1.22: Experiment zur Messung der eingestrahelten Sonnenenergie auf einer Dachschräge.

Diese experimentellen Ergebnisse sind nahe an der theoretischen Berechnung (Diagramm 3.1.6).

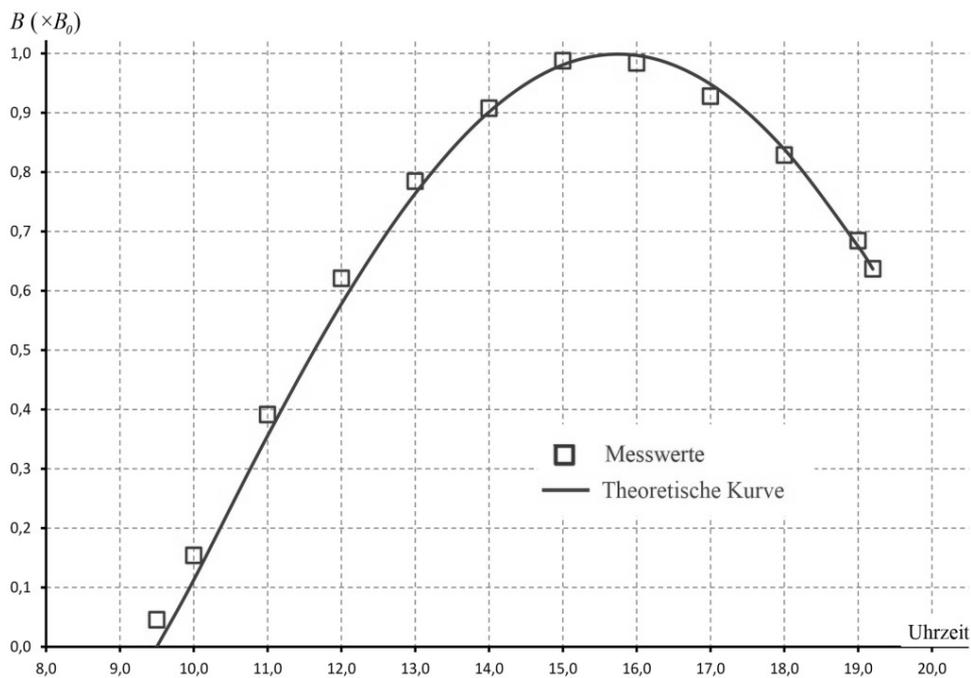


Diagramm 3.1.6: Die gemessenen Punkte und die theoretische Kurve (Messung mittels Solarzelle).

Die Fläche unter der blauen Kurve entspricht der pro Quadratmeter eingestrahltten solaren Energie E_{theo} für die betrachtete Zeit auf der Dachschräge. Diese kann auch aus der Gleichung (1.3.2) oder (1.3.6) berechnet werden: $E_{theo} = 6,96 \cdot E_0$. Die Fläche unter der gemittelten Linie zwischen den roten Punkten ergibt die experimentell bestimmte solare Einstrahlungsenergie pro Quadratmeter E_{expe} der untersuchten Dachschräge. Diese ist die Summe der trapezförmigen Flächenelemente, aus denen sich diese Fläche zusammensetzt: $E_{expe} = 6,91 \cdot E_0$. Somit ist die relative Abweichung recht klein: $\varepsilon = 0,7\%$.

3.1.3.3 Messung mittels Kamera

Dieses Verfahren nutzt die typische Eigenschaft moderner Digitalkameras aus, dass sie die Leuchtdichte L_V (die Leistung der Lichtstrahlen pro $1sr$ Raumwinkel pro $1m^2$ der Oberfläche des betrachteten Gegenstands) messen und speichern kann. Der Wert der Leuchtdichte L_V wird von der Kamera in den Helligkeitswert Hw (von 0 bis 255) mit einem Analog-Digital-Umsetzer umgewandelt. Der Helligkeitswert Hw kann direkt auf dem Kameramonitor oder mit kostenfreier Software auf einem Computer oder Smartphone abgelesen werden. Deswegen kann man statt der Messung der Leuchtdichte L_V vom Gegenstand den Helligkeitswert Hw des Bildes des Gegenstandes ablesen.

Die betrachtete Dachschräge wird mit weißem Papier beklebt, danach wird sie fotografiert und das Bild wird untersucht. Weil die Leuchtdichte L_V proportional zur Bestrahlungsstärke B ist, gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Helligkeitswert Hw und der Bestrahlungsstärke B . Um dieses Verfahren anzuwenden, sucht man zunächst den annähernden Zusammenhang zwischen der Bestrahlungsstärke B und dem Helligkeitswert Hw , also die Fit-Funktion $B = f(Hw)$. Danach führt man den Versuch durch und fotografiert das Dach in der gewünschten Stellung um den Helligkeitswert Hw abzulesen. Anhand der bekannten Funktion $f(Hw)$ kann man die eingestrahlte Leistung B bezüglich der Stellung der Dachschräge berechnen.

Zur Bestimmung der Funktion $B = f(Hw)$ baut man einen Versuch nach Abb. 3.1.21 auf (aber ohne Voltmeter und Widerstand, sondern mit weißem Papier über der Solarzelle (s. Abb. 3.1.11)). Dabei wendet man parallele Lichtstrahlen an. Die Solarzelle mit weißem Papier wird schräg mit einem Winkel θ gegen die Lichtstrahlen angeordnet. Der Winkel θ ist veränderbar von 0° bis 90° . Dann fotografiert man das Papier bezüglich des Winkels θ und liest den Helligkeitswert Hw ab. Man wendet hier wieder das denkbar einfachste Verfahren an - lineare Interpolation, so dass man die annähernden Funktionen $B = f_i(Hw) = a_i \cdot Hw + b_i$ erhält. Dabei wird mit i die Ordinalzahl der untersuchten Punkte bezeichnet. Die Tabelle 3.1.5 stellt die gemessenen Werte dar.

i	θ (Grad)	$B (\times B_0)$	Hw	$a_i (\times 10^{-3} \cdot B_0)$	$b_i (\times B_0)$
	0	1,000	223,89		
1	5	0,996	222,86	3,69	0,173
2	10	0,985	222,79	172,63	-37,477
3	15	0,966	221,44	13,92	-2,115
4	20	0,940	219,97	17,85	-2,986
5	25	0,906	218,29	19,90	-3,439
6	30	0,866	214,37	10,28	-1,337
7	35	0,819	212,43	24,15	-4,311
8	40	0,766	205,91	8,14	-0,911
9	45	0,707	201,19	12,48	-1,805
10	50	0,643	193,03	7,88	-0,879
11	55	0,574	183,72	7,43	-0,792

12	60	0,500	172,10	6,33	-0,590
13	65	0,423	156,02	4,81	-0,328
14	70	0,342	140,97	5,35	-0,413
15	75	0,259	113,58	3,04	-0,086
16	80	0,174	79,81	2,52	-0,028
17	85	0,087	49,11	2,82	-0,051
18	88	0,035	27,44	2,41	-0,031
19	90	0,000	11,71	2,22	-0,026

Tabelle 3.1.5: Die Bestimmung der Fit-Funktion
 $B = f_i(Hw)$.

Anhand dieser Fit-Funktionen kann man die Bestrahlungsstärke in einer beliebigen Stellung der Dachschräge berechnen, indem man dort nur den Helligkeitswert Hw des Dachbildes abliest. Es ist zu beachten, dass die Bilder bei gleichem Grad der Empfindlichkeit der Kamerasensoren gemacht werden müssen. Das bedeutet, vor dem Fotografieren müssen stets der gleiche ISO-Wert, die gleiche Blendenzahl und Belichtungszeit eingestellt werden.

Der Aufbau des Versuches und die Ergebnisse der Serienbilder werden jeweils in der Abb. 3.1.12 und Abb. 3.1.17 dargestellt. Die Tab. 3.1.6 zeigt die gemessenen Werte für die Dachschräge mit $\alpha_H = 60^\circ$ und $\alpha_V = 70^\circ$ und für das Datum 14.8.

Uhrzeit	Hw	i	$B (\times B_0)$
09:30	31,86	18	0,046
10:00	72,81	17	0,154
11:00	150,17	14	0,391
12:00	190,09	11	0,621
13:00	208,19	8	0,785
14:00	218,36	5	0,908
15:00	222,81	2	0,988
16:00	222,73	3	0,984
17:00	219,37	5	0,928
18:00	212,83	7	0,829
19:00	198,32	10	0,685
19:12	192,25	11	0,637

Tabelle 3.1.6: Die gemessenen Werte der Helligkeiten Hw der Dachbilder und die Interpolationswerte der Bestrahlungsstärke B .

Diese experimentellen Ergebnisse sind relativ nah an der theoretischen Berechnung (Diagramm 3.1.7).

Die Fläche unter der blauen Kurve entspricht der theoretisch täglich eingestrahltener Energie E_{theo} auf der betrachteten Dachschräge. Aus dem obigen Abschnitt folgt: $E_{theo} = 6,96 \cdot E_0$. Die Fläche unter der zwischen den roten Punkten hindurchgemittelten Linie ist die experimentell gemessene täglich eingestrahltener Energie E_{expe} pro $1m^2$ des Erdbodens. Sie ist rechnerisch aufzufassen als die Summe trapezförmiger Flächen: $E_{expe} = 7,03 \cdot E_0$. Somit ist die abgeleitete relative Abweichung akzeptabel gering: $\varepsilon = 10\%$.

Diese Abweichung ist größer als die Abweichung beim Experiment mit der Solarzelle, weil die Kamera nicht nur die Helligkeit des betrachteten Gegenstandes, sondern auch die unerwünschte Helligkeit aus der

Umgebung empfängt. Der Vignettierungs-Effekt des Kameraobjektivs bewirkt die ungleichmäßige Verteilung der Helligkeit auf dem Sensor. Das führt dazu, dass das Zentrum des Bildes heller als die Ecken ist. Darüber hinaus wird die Abweichung von anderen unerwünschten Effekten am Objektiv beeinflusst, etwa der Linsenreflexion schon beim Lichteinfall. Dieses Verfahren ist jedoch praktisch und sehr dicht am täglichen Erleben der Lernenden, weil Digitalkameras in der heutigen Zeit sehr populär sind. Sie sind ja auch bekanntlich in vielen Alltagsgeräten verbaut, etwa in Handys, Tablets oder Laptops.

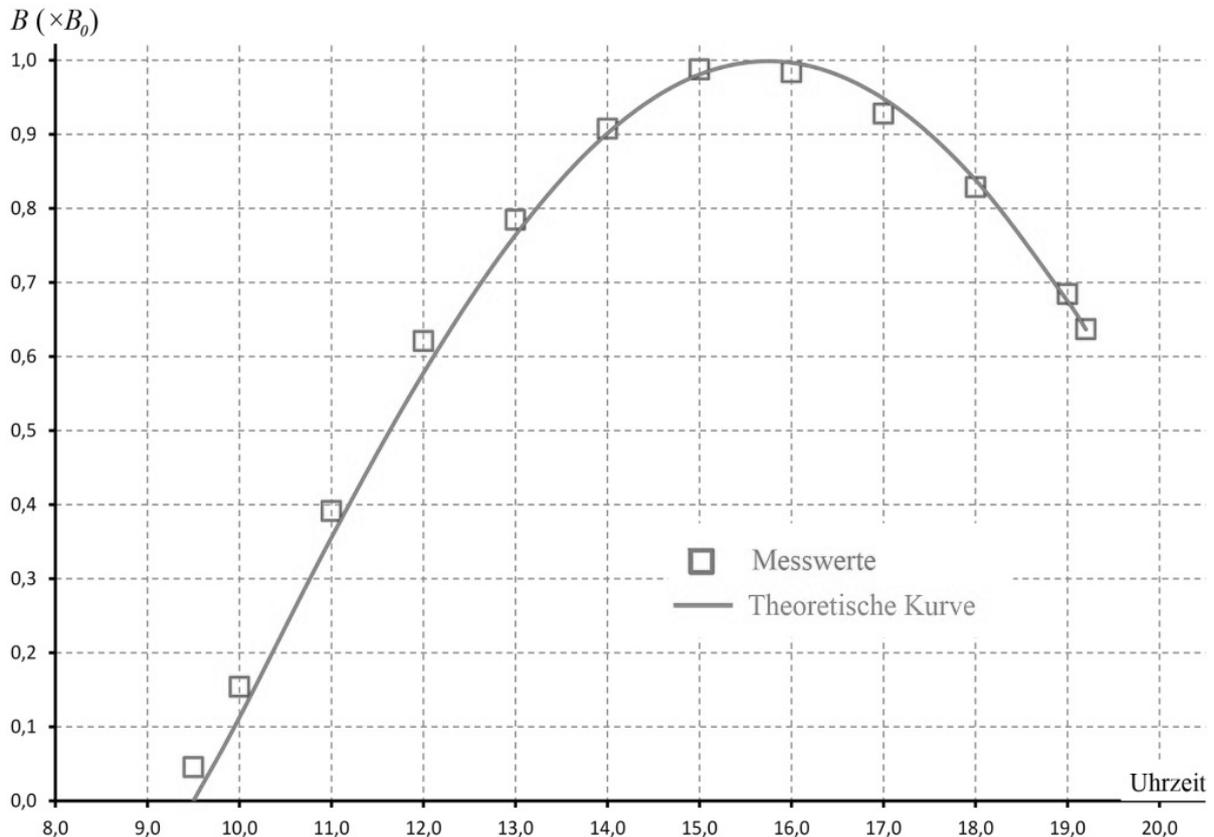


Diagramm 3.1.7: Die gemessenen Punkte und die theoretische Kurve (Messung mittels Kamera).

3.2 Automatische Nachführung für Solarzellen: Modellexperimente und Simulationen

3.2.1. Problemstellung

Im Alltag ist offensichtlich, dass der Nutzungsgrad der Sonnenenergie durch eine Solarzelle in großem Maße von ihrer Orientierung zur Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen abhängt. Somit soll das Potential von Nachführungen für die Steigerung der Effizienz der Solartechnik durch einfache Experimente und Simulationen in der Schule vermittelt werden.

Um den Wirkungsgrad einer Solarzelle von ihrer Effizienz aufgrund der Orientierung zur Sonne zu unterscheiden wird nachfolgend die Orientierungseffizienz η_o eingeführt. Diese wird einfach bestimmt nach: $\eta_o = B/B_o$. B und B_o sind jeweils die Bestrahlungsstärken auf der Solarzelle für den betreffenden Fall und für den speziellen Fall, wenn die Solarzelle senkrecht zu den Sonnenstrahlen gestellt wird (nachfolgend vereinfachend mit der Solarkonstante gleichgesetzt).



Abbildung 3.2.1: Zwei Screenshots der Simulation zur Problemstellung der Ausrichtung von Solarzellen, im Anhang zu finden unter [A 3.2.1].

Abweichungen von der Senkrechten führen hier schnell zu einem deutlichen Abfall der Leistungsausbeute. Die Simulation 3.2.1 [A 3.2.1] zeigt links eine Solarzelle, die sich mit dem Schieberegler darunter verkippen lässt (Abb. 3.2.1a). Die Einfallrichtung der Sonnenstrahlen wird hierbei stets als senkrecht zur Erdoberfläche angenommen. Die Solarzelle rechts behält ihre horizontale Ausrichtung bei, verändert jedoch ihre Größe, um das nutzbare Potential zu visualisieren. Auf der Abb. 3.2.1 kann man erkennen, dass beispielsweise eine Neigung um 30,35° zu einem Abfall der orientierten Effizienz auf etwa 50,53 % führt. Im zweiten Teil der Simulation ist eine horizontal aufgestellte Solaranlage dargestellt (Abb. 3.2.1b). Hier ist nun die Sonne beweglich, um verschiedene Einfallswinkel darstellen zu können. Die Simulation errechnet für beliebige Winkel die eingestrahlte Energie pro Quadratmeter sowie die Orientierungseffizienz, d.h. denjenigen Anteil an der Solarkonstante, der im betrachteten Augenblick für die weitere technische Nutzung zur Verfügung steht.

Wenn man die Solarzelle in der Mitte Deutschlands (geografischer Breitengrad ca. $\varphi = 51^\circ$) einfach horizontal befestigen würde, dann könnte man aufgrund der Erkenntnisse des Abschnittes 3.1.3.1 den zeitlichen Verlauf der Orientierungseffizienz der Solarzelle grafisch darstellen (Diagramm 3.2.1).

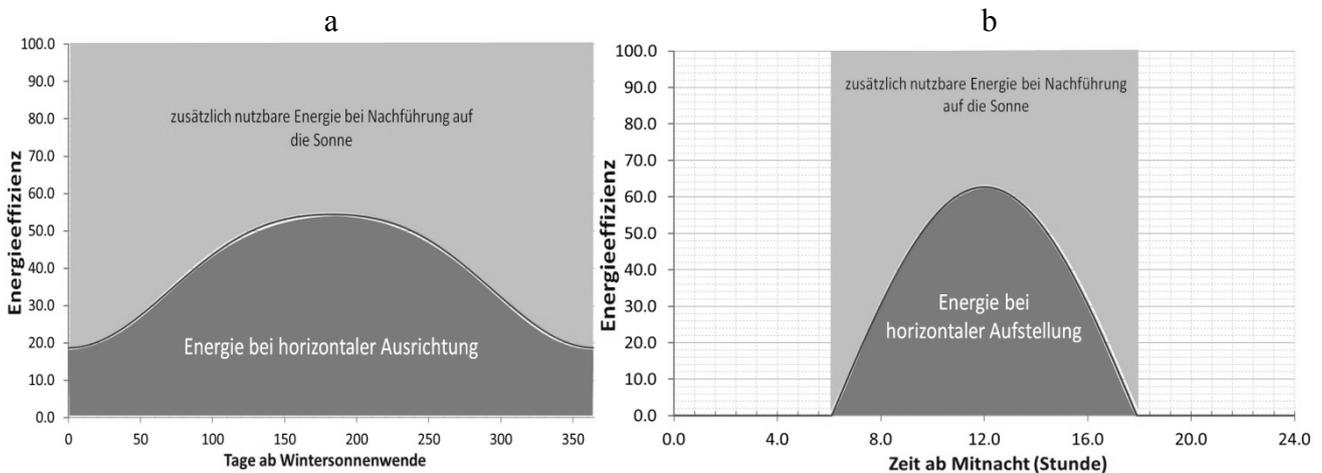


Diagramm 3.2.1: Orientierungseffizienz einer horizontal montierten Solarzelle für einen Standort in der Mitte Deutschlands ($\varphi = 51^\circ$) im Jahresverlauf (a) und im Tagesverlauf am 20. März (b).

Wie aus diesen Diagrammen zu entnehmen ist, wird ein großes Potential von Solarzellen (entspricht der orangen Fläche) nicht ausgenutzt, weil die Sonnenstrahlung nie senkrecht auf die Solarzelle auftrifft. Dieser Verlust kann vermieden werden, indem man ein Gerät herstellt, das die Solarzelle immer senkrecht zur Sonnenstrahlung nachführt. Die technische Realisierung erfolgt in Großanlagen normalerweise mittels Computer und Software, wobei sich die Verschaltung in integrierter Form auf einen elektronischen Chip verbirgt, der seinerseits unter einem Gehäuse angeordnet ist. Wenn solch ein fertiges Gerät im Unterricht verwendet wird, hilft es Lernenden aber nicht viel, um den Aufbau und die Funktionsweise zu verstehen.

In dieser Arbeit werden drei Nachführmodelle vorgestellt, für die man lediglich die Kenntnisse aus der elementaren Elektrizitätslehre anwenden muss. Erste grundlegende Anforderungen an eine Nachführung lassen sich aus Beobachtungen der Natur ableiten. Im weiteren Verlauf richtet sich der Fokus auf die Konstruktion der Nachführung durch die Lernenden. Der Modellaufbau ist so einfach, dass man das Modell selbst basteln kann. Das Verständnis der Funktionsweise der Nachführung und der zugrundeliegenden Schaltungen wird mittels Computersimulationen gefördert. Alle Vorschläge sind geeignet für die Anwendung in der Schule.

3.2.2 Die Nachführung im Detail

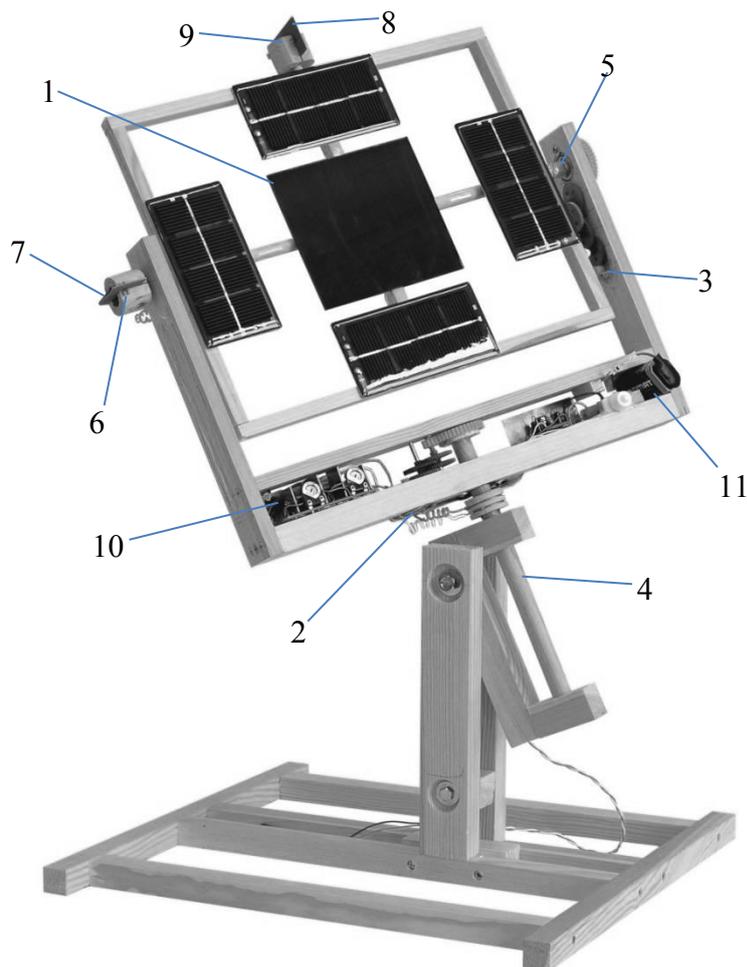


Abbildung 3.2.2: Demonstrationsmodell der Nachführung.

Bei dieser Nachführung kann die Solarzelle (Abb. 3.2.2 – (1)) automatisch in Sonnenrichtung gedreht werden (s. Video: [A. 3.2.2]). Die Nachführung hat zwei individuelle Elektromotoren. Der erste Elektromotor (2) ermöglicht die Drehung der Solarzelle um die erste Achse (4), der zweite Elektromotor (3) erlaubt die Drehung der Solarzelle um die zweite Achse (5). Die Montierung ist äquatorial.

3.2.2.1 Das Funktionsprinzip der Nachführung

Die Steuerung basiert auf einer Vergleichsmessung von je zwei Fotowiderständen, zwischen denen eine Schattenwand (hier einfach aus Papier gebaut) angebracht ist. Wenn die Sonnenstrahlung schräg auf die Solarzelle einfällt, dann erzeugt der erste Papierdeckel (Abb. 3.2.2 –(8)) einen Schatten entweder auf dem linken oder rechten Fotowiderstand (9). Das führt jeweils zu einer positiven oder negativen Widerstandsdifferenz zwischen linkem und rechtem Fotowiderstand. Mithilfe einer Schaltung, deren Funktionsweise im nächsten Schritt dargestellt wird, entsteht jeweils eine positive oder negative Spannung auf den zwei Anschlüssen des ersten Elektromotors (2). Die Verschaltung des Elektromotors muss vorher so ausgewählt werden, dass die Drehrichtung der Solarzelle gegen die Entstehung des Schattens auf dem Fotowiderstand orientiert ist. Dementsprechend dreht sich die Montierung der Solarzelle so lange, bis kein Schatten auf den Fotowiderstand fällt, also die zweite Achse (5) senkrecht zur Sonnenstrahlung orientiert ist.

Auf analoge Weise funktioniert die Ansteuerung des zweiten Elektromotors (3), für die wieder zwei Fotowiderstände (6) mit Schattentrennwand (7) erforderlich sind. Daher wird die Solarzelle um die zweite Achse (5) so lange gedreht, bis kein Schatten auf den Fotowiderstand fällt, damit steht die Solarzelle endgültig senkrecht zur Sonnenstrahlung. Deswegen kann dieses Gerät die Solarzelle auch beständig nach der Sonnenrichtung nachführen.

Zur didaktischen Veranschaulichung wird die Simulation 3.2.2 [A 3.2.3] programmiert. In der Abb. 3.2.3a liegt der Schatten auf dem rechten Fotowiderstand (dessen Widerstand $R_{Rechts} = 2000\Omega$ ist und somit größer als der Widerstand vom linken Fotowiderstand $R_{Links} = 100\Omega$). Deshalb gilt für die am Elektromotor anliegende Spannung $U_{AB} < 0V$. Dementsprechend dreht die Solarzelle (blauer Balken) gegen den Uhrzeigersinn zur Sonne. Auf der Abb. 3.2.3b geschieht der Verlauf umgekehrt. Die Solarzelle bleibt ruhig, sofern $R_{Rechts} = R_{Links}$ ist, die Solarzelle also senkrecht zur Sonnenstrahlung steht.

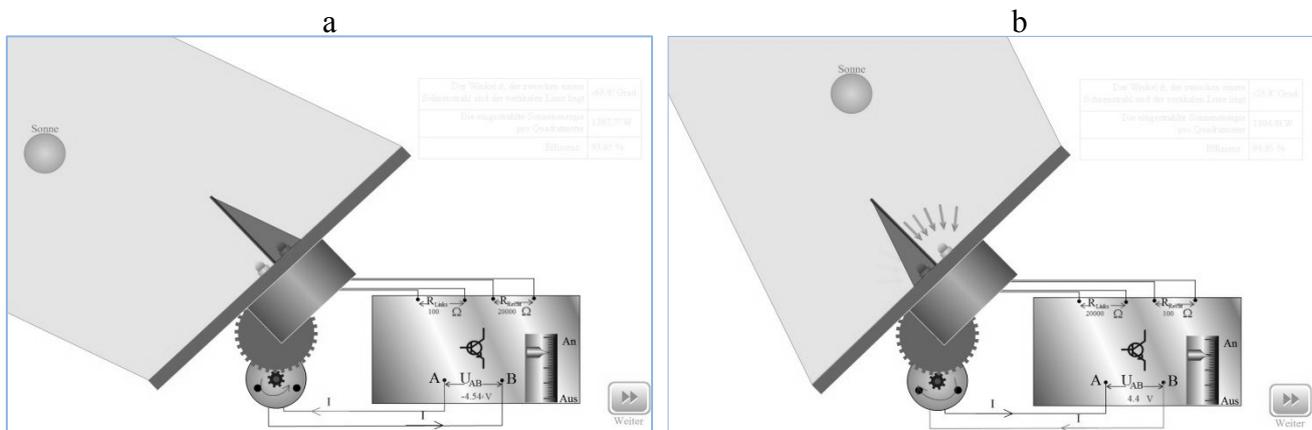


Abbildung 3.2.3: Erster Screenshot der Simulation 3.2.2: Funktionsprinzip der Nachführung wenn die Sonne auf der „linken“ Seite (a) oder der „rechten“ Seite (b) der Solarzelle steht [A 3.2.3].

3.2.2.2 Das Funktionsprinzip der Schaltung

Die Schaltung muss die entscheidende Funktion besitzen, dass wenn $R_{Links} > R_{Rechts}$ gilt, $U_{AB} > 0$ folgt und umgekehrt. Der zweite Screenshot von Simulation 3.2.2 stellt das Funktionsprinzip vor. Dabei gilt Abb. 3.2.4a für den Fall $R_1 > R_2$ (entspricht $R_{Links} > R_{Rechts}$) und $U_{AB} > 0$. Abb. 3.2.4b gilt für den umgekehrten Fall.

Den verwendeten Schaltplan mit den genaueren Werten jedes Bauteils findet man im Anhang [A 3.2.4] oder alternativ in der nächsten Simulation 3.2.3.

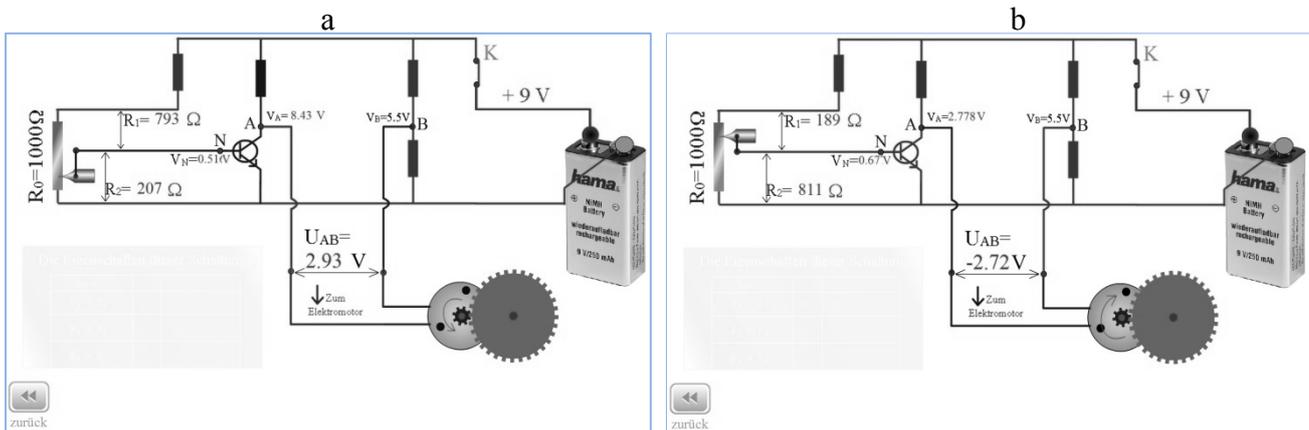


Abbildung 3.2.4: Zweiter Screenshot der Simulation 3.2.2: Funktionsprinzip der Schaltung der elektrischen Ansteuerung der Nachführung [A 3.2.3].

3.2.3 Die Realisierung der Nachführung im Schülerversuch

Das wesentliche Ziel der Unterrichtssequenz besteht in der eigenständigen Konstruktion eines eigenen Modells durch die Lernenden. Hierbei sind einige Einschränkungen hinsichtlich des Funktionsumfangs zu machen, um das Modell in einer überschaubaren Zeit anfertigen zu können, sowie den Werkzeugeinsatz auf ein Mindestmaß zu beschränken. So ist die Variante für Schüler auf die Nachführung um eine Achse reduziert (Abb. 3.2.5) (s. Video: [A 3.2.5]). Auch ist die Komplexität der Schaltung deutlich herabgesetzt, ohne dabei jedoch auf ein gutes Ansprechverhalten zu verzichten.

Die vereinfachte und stark optimierte Schaltung besteht aus lediglich acht Bauelementen. Neben den beiden Fotowiderständen sind dies vier weitere Widerstände sowie zwei Transistoren. Zur Unterstützung des Verständnisses der Schaltung wurde Simulation 3.2.3 [A 3.2.6] erstellt. Nachdem die Spannungsquelle an die richtige Position geschoben und die Lichtquelle per Klick in der Simulation „eingeschaltet“ wurde, kann die Funktionsweise durch die Lernenden genauer untersucht werden (Abb. 3.2.6). Die Simulation umfasst die vollständige Schaltung und zeigt alle relevanten Größen, wie etwa den aktuellen Wert der Fotowiderstände, die Kollektorspannungen der Transistoren sowie die Klemmenspannung U_{AB} direkt an. Der jeweils aktive Teil der Schaltung wird durch Einfärbung des Strompfades hervorgehoben. Die resultierende Drehrichtung des Elektromotors ist per Mouse-Over-Effekt ebenfalls direkt zugänglich. Per Klick auf die Schaltzeichen werden ferner Abbildungen der realen Bauelemente eingeblendet, um das Identifizieren der Bauteile zu erleichtern und ihre Kenngrößen abzulesen. Beim Zusammenbau der Schaltung wird eine Steckplatine genutzt um auf den Einsatz von Lötkolben etc. verzichten zu können. Der Zeitbedarf für die Assemblierung der Schaltung reduziert sich damit, für einen geübten Bastler auf unter 2 Minuten. Die Zusammenführung der übrigen Bauteile der

kompletten Solarzellennachführung, die hauptsächlich aus Papier oder Pappe ausgeschnitten und verklebt werden können usw. kann dann ebenfalls in kürzester Zeit erfolgen (s. Video: [3.2.7]).

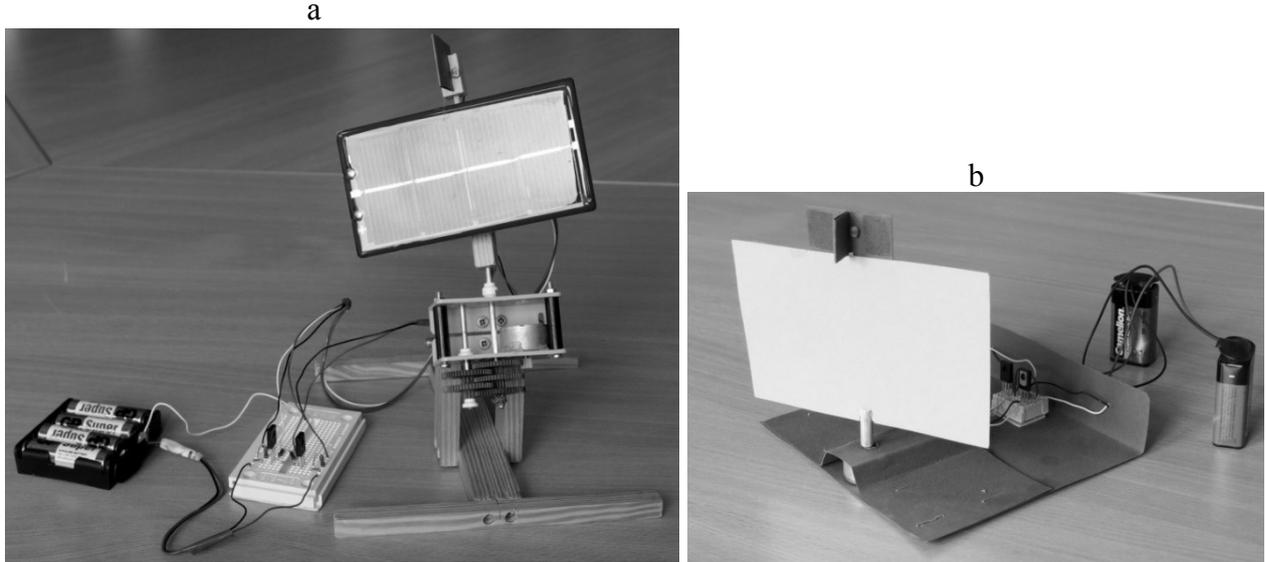


Abbildung 3.2.5: Zwei alternative vereinfachte Modelle. Bild a für ein realistisches Funktionsmodell [A 3.2.5], Bild b für ein Funktionsprinzip-Modell [A 3.2.7], welches von den Lernenden selbst nachgebaut werden kann.

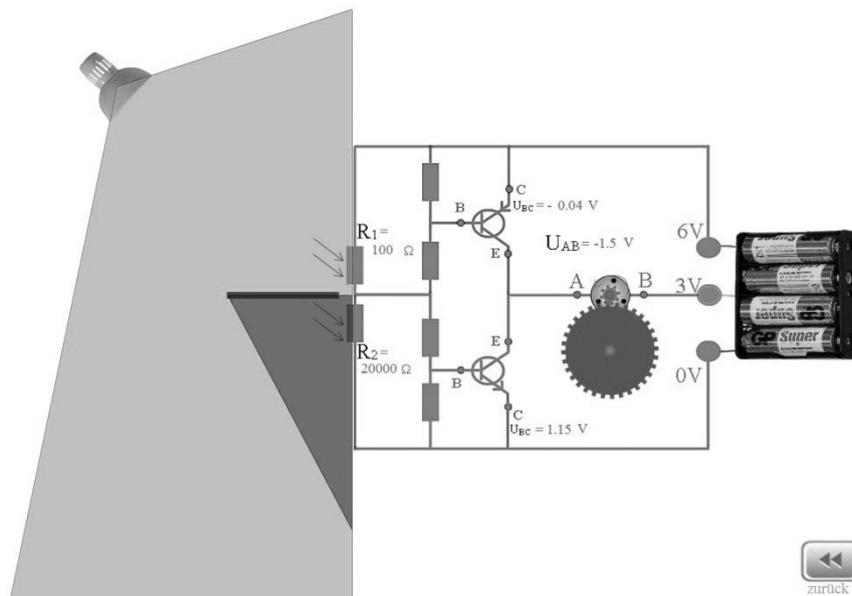


Abbildung 3.2.6: Screenshot der Simulation 3.2.2: Darstellung der Details des vereinfachten Schaltungsplans [A 3.2.6].

Die Lernenden haben anschließend die Möglichkeit, die vorab betrachteten theoretischen Grundlagen am Modell zu erproben und etwa Strom-Spannungs-Kennlinien bei günstiger und ungünstiger Ausrichtung der Solarzelle aufzunehmen.

Zusätzlich zu den drei obigen Modellen wurde noch ein Demonstrationsmodell mit einer Drehachse gebaut. Dieses Modell kommt zusammen mit dem Versuch in Kapitel 3.1 zum Einsatz. Das Ziel dieses Modells ist ein Problem zu zeigen, wenn man die Nachführung lediglich mit einer Drehachse ausstattet, z.B. wenn man die Solarzelle so feststellt, dass sie am 22.6. in Deutschland immer senkrecht zur Sonnenstrahlung nachführt (s. Video: [A 3.2.8]). Dann steht sie natürlich z.B. am 22.12. nicht mehr senkrecht, sondern deutlich sehr schräg zur Sonnenstrahlung. Deswegen muss eine optimale Nachführung

zwei Drehachsen haben. Dies wird deutlich, wenn man erklären kann, dass die Erde gleichzeitig zwei Drehbewegungen ausführt: die Drehung um ihre Erdachse und die Bahndrehung um die Sonne. Wenn die Solarzelle immer senkrecht zur Sonnenstrahlung bleiben soll, muss sie gleichzeitig zwei Drehbewegungen um zwei individuelle Achsen gegen zwei Drehbewegungen der Erde ausführen.

3.3 Modellversuch zur Funktionsweise eines Pumpspeicherkraftwerks

3.3.0 Einleitung

Im Abschnitt 2.6.3 haben wir gezeigt, dass Wasserkraftwerke nur eine geringe potenzielle Leistungsdichte aufweisen und damit global kaum zum allgemeinen menschlichen Energiebedarf beitragen können – wohlgernekt im globalen Mittel! Man kann jedoch die Wasserkraft gegenwärtig auch wohl zukünftig mittels Pumpspeicherkraftwerk verwenden, um Schwankungen im Angebot an regenerativer Energie bzw. generell im Stromnetz zu regulieren. Das Prinzip des Pumpspeicherkraftwerks ist: Es kann überschüssige Energie aus dem Stromnetz speichern, wenn der Bedarf an elektrischer Energie gering ist (normalerweise am späteren Abend, wenn viele Fabriken nicht betrieben werden), indem Wasser aus einem unteren in ein oberes Speicherbecken mittels eines Elektromotors gepumpt wird. Während der Spitzenlast im Netz, wenn man also sehr viel elektrische Energie benötigt (normalerweise am Tag, wenn fast alle Fabriken betrieben werden), kann das Pumpspeicherkraftwerk die gespeicherte Energie wieder an das Stromnetz abgeben, indem man das Wasser aus dem oberen in das untere Speicherbecken durch eine Turbine strömen lässt. Diese muss zumeist nicht zusätzlich montiert werden, sondern man nutzt einfach den soeben erwähnten Pumpenelektromotor als Generator. Dies ist möglich, wenn man die Umkehrung des elektromotorischen Prinzips nutzt: Jeder Motor ist im Prinzip auch ein Generator.

Versuche mit größeren Wassermengen sind im Unterricht zumeist unpraktisch. Der nachfolgend geschilderte neue Versuch umgeht dieses Problem, indem das Wasser in Flaschen gefüllt wird (Abb. 3.3.1). Darüber hinaus wird eine Schaltung neu entwickelt (Abb. 3.3.2), um das Steuerungszentrum des Pumpspeicherkraftwerks zu simulieren. Dabei muss man nicht viele Schritte ausführen, wenn man zwischen den Arbeitsmodi (Pumpmodus und Generatormodus) des Pumpspeicherkraftwerks wechseln möchte. Zusätzlich zur qualitativen Darstellung des Funktionsprinzips kann man mit diesem Versuch die Effizienz des Modell-Pumpspeicherkraftwerks messen (Abb. 3.3.3).

3.3.1. Versuchsaufbau

Anstatt des Wasserpumpens nach oben wird im Pumpmodus eine Wasserflasche (Abb. 3.3.1 - 1) nach oben gezogen. Dabei kann der Elektromotor (2) (auch identisch mit Elektrogenerator) mit Zahnradgetriebe (3) ein hinreichend großes Drehmoment auf der Riemenscheibe (4) erzeugen. Daher kann die Riemenscheibe die Schnur (5), die eine Rolle des Riemens spielt, mit einer ausreichend großen Kraft nach oben wickeln, so dass die Wasserflasche nach oben bewegt wird. Im Generatormodus ist es umgekehrt. Das Gewicht der Wasserflasche wirkt auf die Schnur, die nun ihrerseits ein Drehmoment auf die Riemenscheibe ausübt und sich der Elektromotor drehen kann bzw. den Strom erzeugen kann. Der Anschluss des Elektromotors erfolgt mit einer vereinfachten Netz-Schaltung, die die Vielzahl der Verbraucher darstellen soll (6).

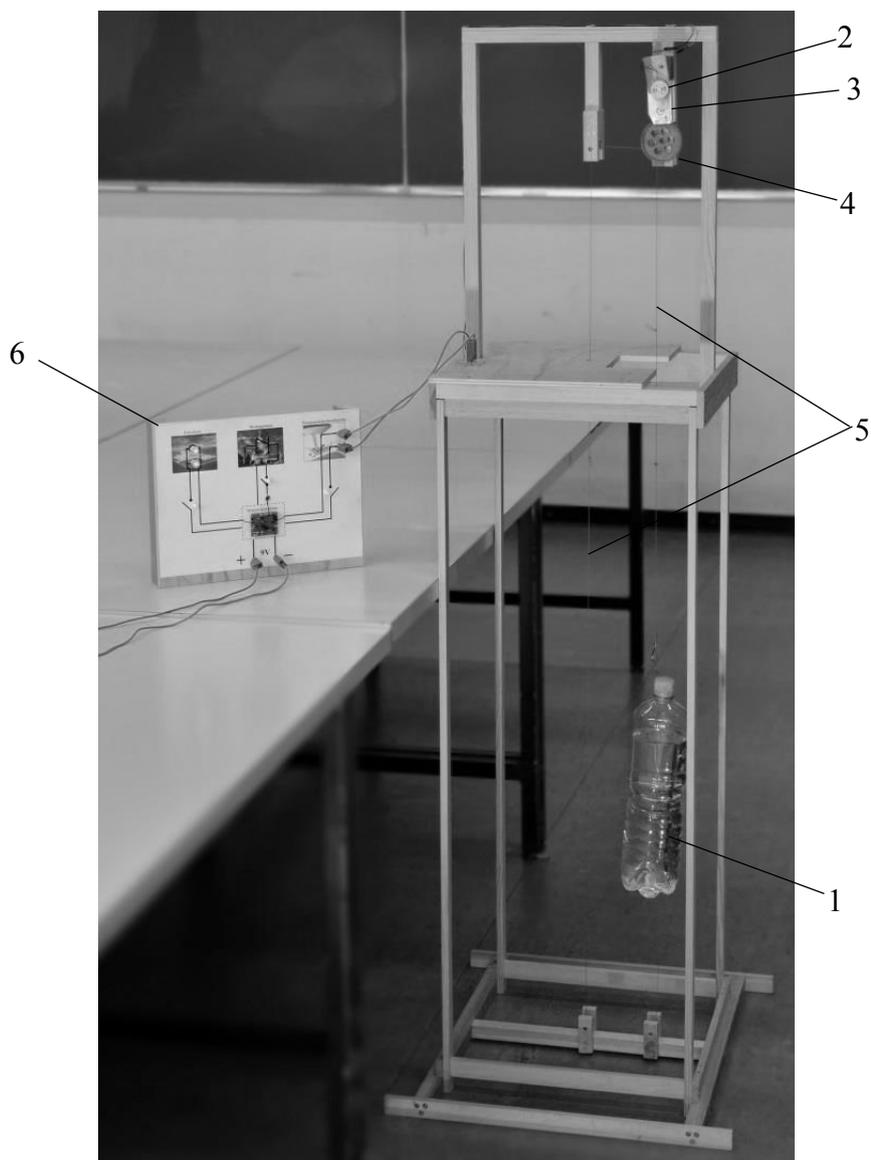


Abbildung 3.3.1: Aufbau des Modells.

Der vereinfachte Schaltungsplan mit Pumpspeicherkraftwerk wird prinzipiell in Abb. 3.3.2 dargestellt. Dabei verwendet man aus didaktischen und Sicherheitsgründen im Modell des Stromnetzes Gleichstrom mit der Spannung 9V statt des Wechselstromnetzes mit der Effektivspannung 230V, das im Alltag tatsächlich vorhanden ist.

Eine rote LED steht modellhaft für die Strombelastung in den Wohngebieten. Ihre Helligkeit beschreibt die qualitative Leistungsfähigkeit der Energiezufuhr des allgemeinen Stromnetzes, nämlich: schwach leuchtend für einen Mangel der Stromzufuhr, sehr hell leuchtend für eine überschüssige Stromzufuhr und angemessen hell für die bedarfsgerechte Stromzufuhr. Die zwei Glühlampen spielen eine Rolle bei der Strombelastung durch Fabriken. Die Druckknöpfe K_1 , K_2 und K_3 stehen zur Verfügung, um jeweils die Glühlampen, die rote LED und das Pumpspeicherkraftwerk zu schalten. Das Steuerungszentrum kann automatisch die Arbeitsmodi des Pumpspeicherkraftwerks nach dem momentanen Strombedarf umschalten. In der tatsächlichen Technik realisiert man natürlich viel kompliziertere Schaltungsanforderungen in den Steuerungszentren. Für das schulische Ziel wurde hier ein vereinfachter Schaltungsplan entwickelt, den man in der Schule vergleichsweise leicht nachbauen kann. Der Schaltungsplan des Steuerungszentrums mit ausführlichen Werten jedes Elektrobauteils findet man im Anhang [A 3.3.1], somit ist der Nachbau ermöglicht.

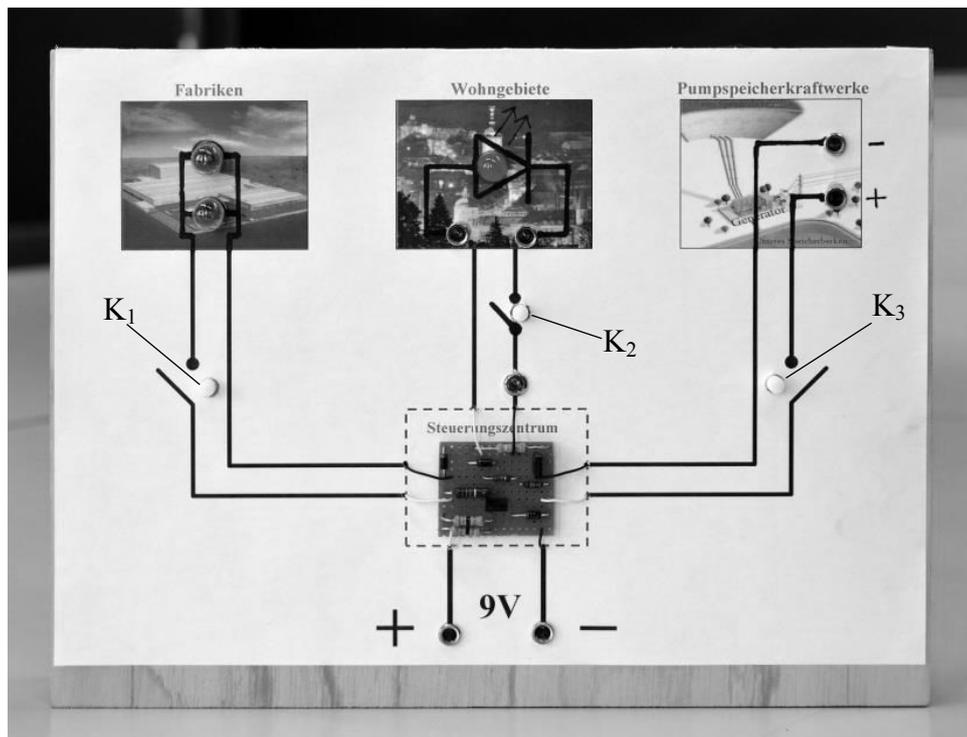


Abbildung 3.3.2: Der prinzipielle Schaltungsplan für das allgemeine Stromnetz mit Pumpspeicherkraftwerk.

3.3.2 Versuchsdurchführung und Ergebnisse

Nachdem der Versuch wie in der Abb. 3.3.1 aufgebaut wurde, kann man ihn wie nachfolgend erläutert durchführen.

3.3.2.1 Probleme im Stromnetz ohne den Einsatz von Pumpspeicherkraftwerken

Isoliert man das Pumpspeicherkraftwerk mittels Ausschaltung durch den Schalter K_3 , so kann man veranschaulichen: Wenn die Fabriken (die Glühlampen) mittels der Anschaltung des Schalters K_1 arbeiten, so scheint die LED schwach, das ist der Zustand des Spitzlastverbrauchs, bei dem die im Netz verteilte elektrische Energie nicht mehr für die Wohngebiete ausreicht. Wenn man die Fabriken mittels K_1 ausschaltet, scheint die LED aber zu hell, es handelt sich um eine überschüssige Stromzufuhr in die Wohngebiete.

3.3.2.2 Die Rolle des Pumpspeicherkraftwerks

Aktiviert man das Pumpspeicherkraftwerk mittels des Schalters K_3 , so kann man dessen Funktionsweise illustrieren. Wenn die Fabriken nicht aktiviert sind (K_1 ist ausgeschaltet), so schaltet das Steuerungszentrum das Pumpspeicherkraftwerk automatisch auf den Pumpmodus um. Das Pumpspeicherkraftwerk nimmt den überschüssigen Energieanteil aus dem Stromnetz auf, um die Wasserflaschen anzuheben. Dementsprechend kann man hier beobachten, dass die Helligkeit der LEDs normal (anstatt zu hell) ist (s. Video: [A 3.3.2]). D.h. der Strom für die Wohngebiete ist angemessen und die überschüssige Stromenergie wird in die potentielle Gravitationsenergie (der Wasserflaschen) umgewandelt.

Wenn die Fabriken angeschaltet werden (K_1 ist angeschaltet), so kann das Steuerungszentrum sofort in den Generatormodus des Pumpspeicherkraftwerkes wechseln. Das Gewicht der Wasserflasche zieht die Schnur nach unten, der Generator (Elektromotor) dreht an, es wird Strom erzeugt und dieser wird dem Netz zugeführt. Man kann hier energetisch aussagen: die zunächst aus der überschüssigen elektrischen Energie gespeicherte Energie (in Form der potentiellen Gravitationsenergie der Wasserflaschen) wird wieder in elektrische Energie zurückgewandelt, um in das Stromnetz eingespeist zu werden. Man kann konkret im Modellversuch beobachten, dass die Helligkeit der LED noch normal (anstatt zu schwach) bleibt, was bedeutet, dass der Strom für die Wohngebiete angemessen hoch ist.

Zusammenschau: Mit Pumpspeicherkraftwerken ist die Stromzufuhr im Netz zu stabilisieren, im Modellversuch konkret: die Wohngebiete erhalten eine gleichmäßige Zufuhr an elektrischer Energie, gleich, ob zusätzliche Verbraucher wie Fabriken arbeiten oder nicht.

3.3.2.3 Messung des Wirkungsgrades eines Pumpspeicherkraftwerkes im Modellversuch

Im Pumpmodus wird das Pumpspeicherkraftwerk eine elektrische Energie E_{auf} aus dem Stromnetz aufnehmen um eine bestimmte Wassermasse M auf einen Höhenunterschied ΔH im Zeitintervall t_{auf} zu pumpen. Im Generatormodus wird das Pumpspeicherkraftwerk eine elektrische Energie E_{ab} in das Stromnetz abgeben, indem dieselbe Wassermasse M von demselben Höhenunterschied ΔH im Zeitintervall t_{ab} durch die Turbine geleitet wird um Strom zu erzeugen. Der Wirkungsgrad des Pumpspeicherkraftwerkes kann nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$\eta = \frac{E_{ab}}{E_{auf}}$$

Die elektrischen Energien E_{ab} und E_{auf} können anhand von Vergleichen zwischen dem in- und dem aktiven Modus des Pumpspeicherkraftwerkes berechnet werden. Es gilt

$$E_{ab} = (P_{ab_1} - P_{ab_0}) \cdot t_{ab}$$

$$E_{auf} = (P_{auf_0} - P_{auf_1}) \cdot t_{auf}$$

Dabei ist P die Bezeichnung der elektrischen Leistung, die mittels Messungen von Spannung U und Stromstärke I (Abb. 3.3.3) festgestellt werden kann. Die Indizes 0 und 1 entsprechen jeweils dem in- und dem aktiven Pumpspeicherkraftwerk (mittels der Aus- und Einschaltung von K_3). Somit folgt für den Wirkungsgrad des Pumpspeicherkraftwerkes

$$\eta = \frac{(P_{ab_1} - P_{ab_0}) \cdot t_{ab}}{(P_{auf_0} - P_{auf_1}) \cdot t_{auf}}$$

Die Messwerte werden in Tabelle 3.3.1 dargestellt. Dabei wurde festgelegt: Masse des Wassers (und der Flasche) $M = 1,3\text{Kg}$, Höhenunterschied $\Delta H = 10\text{cm}$. Dank des Zahnradgetriebes bewegt sich die Wasserflasche so langsam, dass man die Zeit t_{auf} und t_{ab} mittels einer normalen Stoppuhr messen kann. Es ist hier zu beachten, dass bei Messung der Stromstärke der Schalter K_2 ausgeschaltet werden muss.

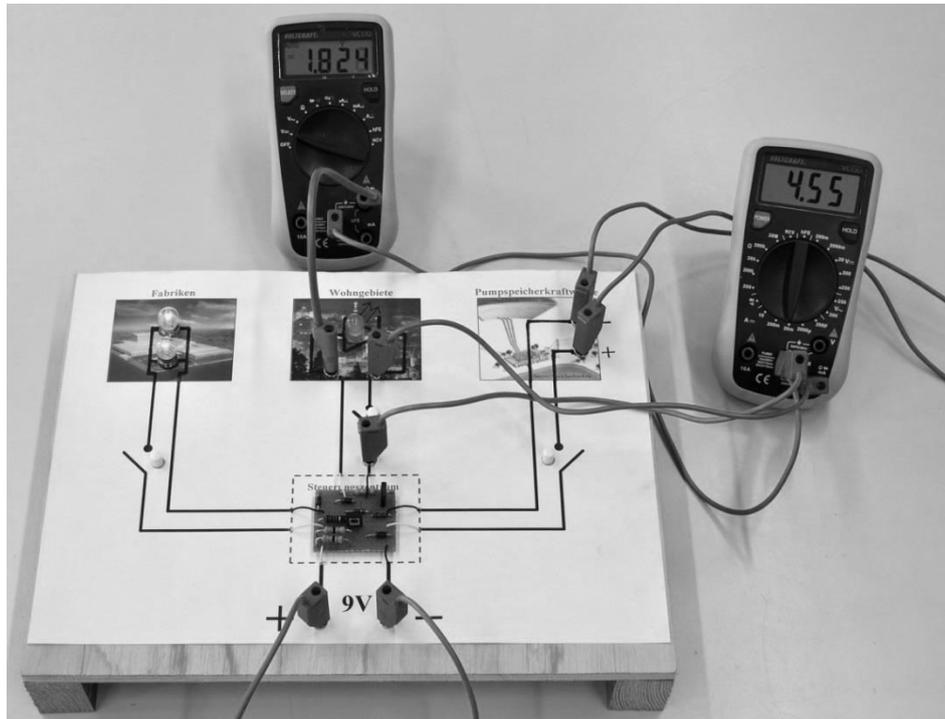


Abbildung 3.3.3: Versuchsaufbau für die Messung des Wirkungsgrads des Modell-Pumpspeicherkraftwerkes.

Arbeitsmodus	Pumpmodus		Generatormodus	
	inaktiv	aktiv	inaktiv	aktiv
Pumpspeicherkraftwerk				
$t_{ab}(s)$		26		
$t_{auf}(s)$				17
$U(V)$	1,92	1,83	1,71	1,82
$I(mA)$	8,95	4,43	1,93	4,55
$P(mW)$	17,18	8,11	3,30	8,28
	P_{auf_0}	P_{auf_1}	P_{ab_0}	P_{ab_1}

Tabelle 3.3.1: Messwerte zur Bestimmung des Wirkungsgrads des Modell-Pumpspeicherkraftwerkes.

Aus dieser Tabelle kann der Wirkungsgrad des Pumpspeicherkraftwerks berechnet werden:

$$\eta = \frac{(8,28 - 3,30) \cdot 17}{(17,18 - 8,11) \cdot 24} \approx 36\%.$$

Dieser Wirkungsgrad ist wegen der unausweichlichen Reibung und den Einschränkungen der Elektromotortechnik (des hier genutzten Kleinmotors) zwar deutlich geringer als der typische Wirkungsgrad in der Praxis (ca. 85%), aber das hauptsächliche Ziel dieses Versuchs besteht lediglich in der Veranschaulichung des Funktionsprinzips und des Messverfahrens bei der Bestimmung des Wirkungsgrades von Pumpspeicherkraftwerken.

3.4 Modellversuch für eine Windkraftanlage

Dieser Abschnitt beschreibt einen neueren Demonstrationsversuch für eine Windkraftanlage. Im ersten Teil wird ein Modellexperiment für eine Nachführung der Windanlage vorgestellt, wobei ein Problem der mit Nachführungen ausgestatteten Windkraftanlagen gezeigt wird. Die Lösung des Problems erfolgt, indem man eine physikalische Eigenschaft von Kondensatoren anwendet. Der zweite Teil beinhaltet ein Modellexperiment zur Kopplung zwischen zwei Wechselstromquellen, nämlich der Windkraftanlage und dem Stromnetz. Es geht dabei im Kern um Kenntnisse zur Überlagerung zweier Schwingungen. Anhand dieses Versuchs kann die Problemstellung veranschaulicht werden, dass die Spannung des Stromnetzes chaotisch wäre, wenn man direkt den Strom aus der Windkraftanlage ins Stromnetz einkoppeln würde. Außerdem erlaubt der Versuch zu simulieren, wie diese Kopplung in der Praxis realisiert werden kann.

3.4.1 Nachführung zur Windrichtung

Wenn die Windrichtung bzw. der Windrichtungsanzeiger (Abb. 3.4.1 – 1) schräg zur Drehachse des Propellers (2) liegt, dann drückt der Windrichtungsanzeiger (je nach Windrichtung) so auf das mittig angeordnete Kupferstück (3), dass es entweder links (4) oder rechts (5) an die Kupferzunge (die unter Spannung steht) anschlägt. Dadurch stellt ein Steuerungsschalter (6) automatisch entsprechend entweder eine positive oder eine negative Spannung auf dem Elektromotor (7). Somit dreht der Elektromotor die Windkraftanlage entweder mit oder gegen den Uhrzeigersinn (unterstützt durch eine die Drehmoment-Verstärkung mittels Zahnradgetriebe). Dies erfolgt jeweils so lange, bis das mittige Kupferstück nicht mehr links oder rechts anschlägt, also der Windrichtungsanzeiger bzw. die Windrichtung parallel zur Drehachse des Propellers ausgerichtet sind (s. Video: [A 3.4.1]).

Dieses vereinfachte Funktionsprinzip unterliegt einer Einschränkung: Die Windkraftanlage kann anhand dieses vereinfachten Funktionsprinzips sofort auf eine Änderung der Windrichtung reagieren. In der Praxis schwankt die Windrichtung oft und plötzlich. Wenn die Reaktion der Windkraftanlage zu sensitiv wäre, würde sie deshalb erheblich Strom verbrauchen, um sich nach der Windrichtung zu drehen. Um das Problem zu vermeiden, muss die Windkraftanlage tatsächlich mittels Computer eine gemittelte und relativ stabile Windrichtung auswählen und dorthin drehen. Diese Steuerung erfordert komplexe mathematische und programmiertechnische Kenntnisse und sollte nicht an Lernende in der Schule vermittelt werden um Verständnisschwierigkeiten zu vermeiden.

Um das Problem zu überwinden wurde eine vereinfachte Steuerung mit einem elementaren Schaltungsplan [A 3.4.2] entwickelt. Dabei wendet man an, dass die über die Kondensator abfallende Spannung in einer RC-Reihenschaltung nicht sofort auf die Spannung über dem gesamten RC-Glied steigt oder fällt, sondern dass es eine bestimmte Zeit dauert, bis der Kondensator geladen oder entladen ist, die Spannung sich also träge verhält. Je größer die Kapazität des Kondensators ist, umso länger ist das Zeitintervall für die Aufladung des Kondensators. Im Modell der Windkraftanlage werden zwei Kondensatoren (8) verbaut, einer ist für die Verzögerung der Nachführung im Uhrzeigersinn verantwortlich, der andere für die Nachführung gegen den Uhrzeigersinn. Dank der Kondensatoren reagiert die Spannung auf dem Elektromotor bzw. die Nachführung träge. Also „wartet“ die

Windkraftanlage etwas, ob sich die Windrichtung als stabil erweist. Dann „entscheidet“ sie, ob eine Drehung in die neue Windrichtung ausgelöst wird (s. Video: [A 3.4.3]).

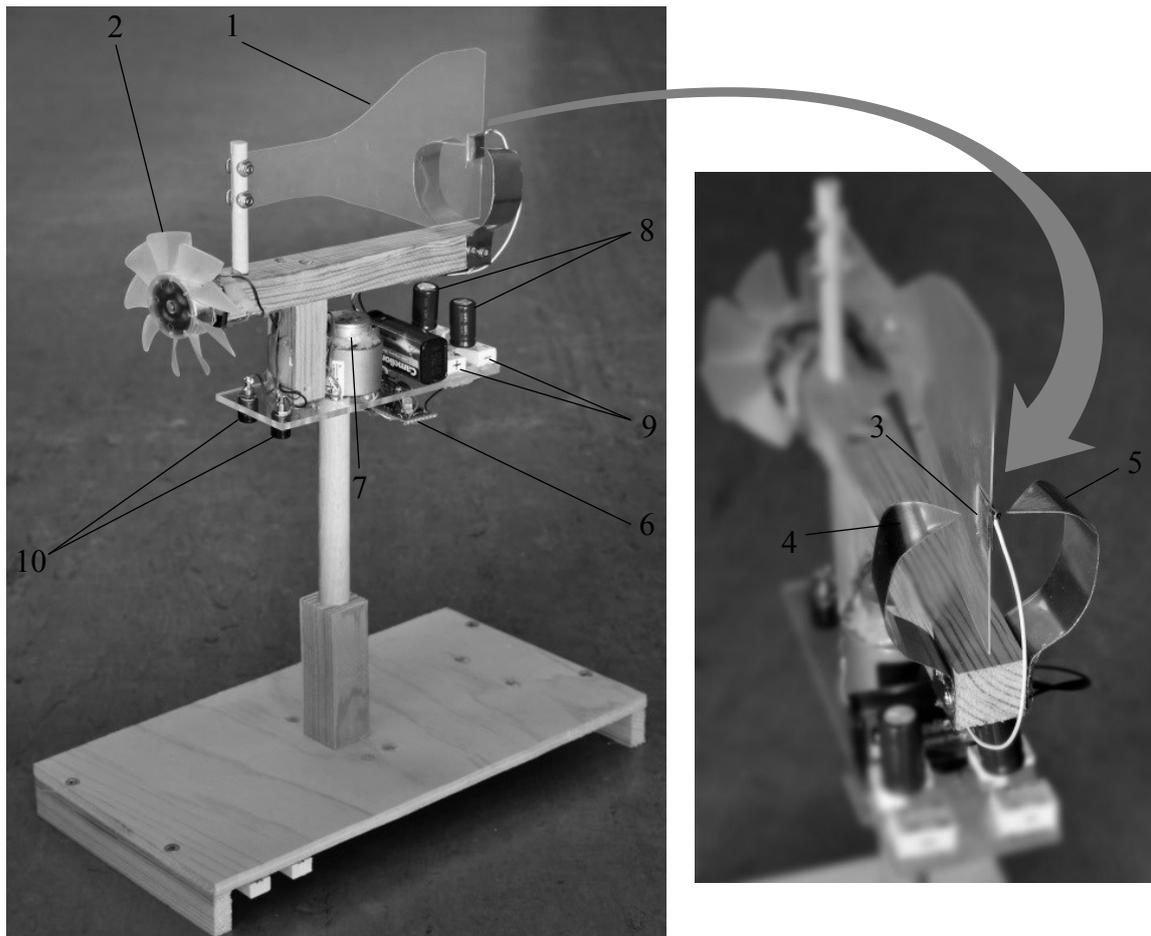


Abbildung 3.4.1: Modell der Windkraftanlage.

Außerdem werden die Kondensatoren so auf die Steckboards (9) gesteckt, dass sie leicht ausgetauscht werden können. Damit kann man die Eigenschaft veranschaulichen, dass je größer die Kondensatorkapazität ist, desto verzögerter die Reaktion der Windkraftanlage eintritt.

3.4.2 Einkopplung des Stroms aus der Windkraftanlage ins Stromnetz

3.4.2.0 Einleitung

Die Spannung unseres Stromnetzes verläuft zeitlich sinusförmig. Wenn man eine neuere Spannungsquelle in das Stromnetz einschalten will, muss die Spannung dieser Stromquelle die Bedingungen erfüllen, dass sie eine sinusförmige Schwingung mit der gleichen Frequenz wie die Stromnetzfrequenz (50Hz) ausführt und keine Phasenverschiebung mit dem Stromnetz besteht. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt werden können, dann überträgt die neue Spannungsquelle nicht nur keine Energie ans Stromnetz, sondern sie stört es darüber hinaus auch noch.

Da die Windgeschwindigkeit und die Windrichtung in der Praxis nicht konstant bleiben, ist die Drehgeschwindigkeit des Propellers bzw. des Rotors im Generator instabil. Somit verändern sich nicht

nur der Maximalwert der erzeugten Spannung, sondern auch die Frequenz und die Phasenlage des erzeugten Stroms. Deswegen darf man in der Praxis nicht den in der Windkraftanlage erzeugten Wechselstrom direkt ans Stromnetz koppeln. Dieser Wechselstrom wird normalerweise zuerst mittels eines Gleichrichters in Gleichstrom umgewandelt, danach wird dieser Gleichstrom mittels eines Wechselrichters in einen Wechselstrom umgewandelt, der die soeben genannten Bedingungen erfüllt [Quaschnig 2013]. Dieses Verfahren (mittels Wechselrichters) kann man nicht nur für Windkraftanlagen anwenden, sondern es auch auf Solarzellenanlagen, Wellenkraftanlagen, kleine Wasserkraftwerken usw. übertragen.

Mit dem nun zu schildernden Modell kann man die Stromstörung im Stromnetz bei direkter Kopplung veranschaulichen. Außerdem kann man die Kopplung mittels Wechselrichter illustrieren.

3.4.2.1 Versuchsaufbau

Der Modell-Propeller (Abb. 3.4.1 - 2) mit Elektrogenerator ist ein Ventilator, so wie er zu Kühlung in handelsüblichen Computern zum Einsatz kommt. Der Hauptgrund für diese Wahl ist, dass er durchsichtig ist und Propeller, Permanentmagnet (Rotor) sowie Spulen (Stator) leicht demontiert werden können. Lernende können so leicht den Aufbau von Rotor und Stator des Elektrogenerators erkennen. Die zwei Anschlusspole der Spulen (Stator) werden mit zwei Buchsen (10) verbunden, aus denen man die erzeugte Wechselspannung entnehmen kann. Der Wind wird von einem Föhn (Abb. 3.4.3) generiert.

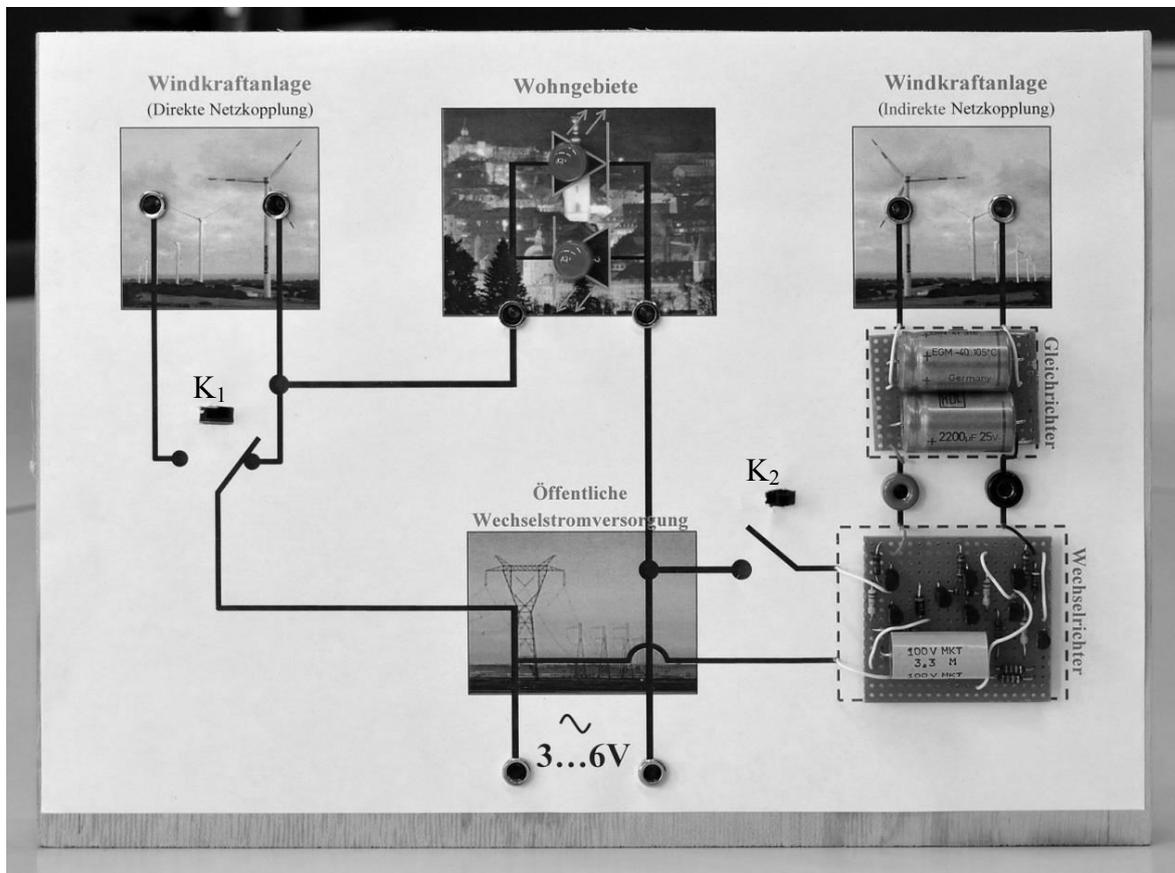


Abbildung 3.4.2: Der prinzipielle Schaltungsplan zur Veranschaulichung zweier Kopplungsarten an die Wechselstromversorgung.

Der prinzipielle Schaltplan dieses Versuchs wird in Abb. 3.4.2 dargestellt. Statt des echten Wechselstromnetzes (230V – 50Hz) verwendet man natürlich wegen des Einsatzes als Schülerversuch eine niedrige Wechselspannung von 3V bis 6V mit einer Frequenz von 50Hz – erzeugt mittels eines Transformators für die Stromnetzversorgung.

Die Schalter K_1 und K_2 dienen jeweils der direkten Kopplung (links) und der indirekten Kopplung (rechts) an das Netz, wobei letztere durch den Gleichrichter und den Wechselrichter vermittelt werden. Den Schaltungsplan des Gleichrichters und des Wechselrichters mit ausführlichen Werten jedes Elektrobauteils findet man im Anhang [A 3.4.4], somit können Lehrende diese Schaltung wieder nachbauen. Die zwei roten LED stehen für die Wechselstromzustände im Wohngebiet. Die LED oben leuchtet für Stromrichtung nach rechts und andere für Stromrichtung nach links.

3.4.2.2 Versuchsdurchführung und Ergebnisse

Wenn der aus der Windkraftanlage generierte Strom noch nicht an die Wechselstromversorgung gekoppelt wird, kann man beobachten, dass beide LED mit stabiler Helligkeit leuchten.

Wenn man das direkte Kopplungsverfahren aktiviert (Abb. 3.4.3 - a), kann man beobachten, dass beide LED unregelmäßig blinken bzw. leuchten. Das hängt im Einzelfall von der Stellung des Föhns und der eingestellten Föhnleistung ab. Das Blinken ist üblicherweise so langsam, dass man es gut mit bloßem Auge wahrnehmen kann. Wie aus Abb. 3.4.3 - a zu sehen ist, leuchtet die LED oben, aber die unten nicht. Es gibt auch Positionen des Föhns, bei der die LED einige Sekunden nicht leuchten, danach einige Sekunden zu hell leuchten. Daraus kann man entnehmen, dass sich die Spannung der Wechselstromversorgung bei direktem Kopplungsverfahren chaotisch verändert. Die Windkraftanlage verstärkt hierbei das Wechselstromnetz nicht und stört es empfindlich. Deswegen darf man die Methode der direkten Kopplung nicht in der Praxis für unsere Wechselstromversorgung anwenden.

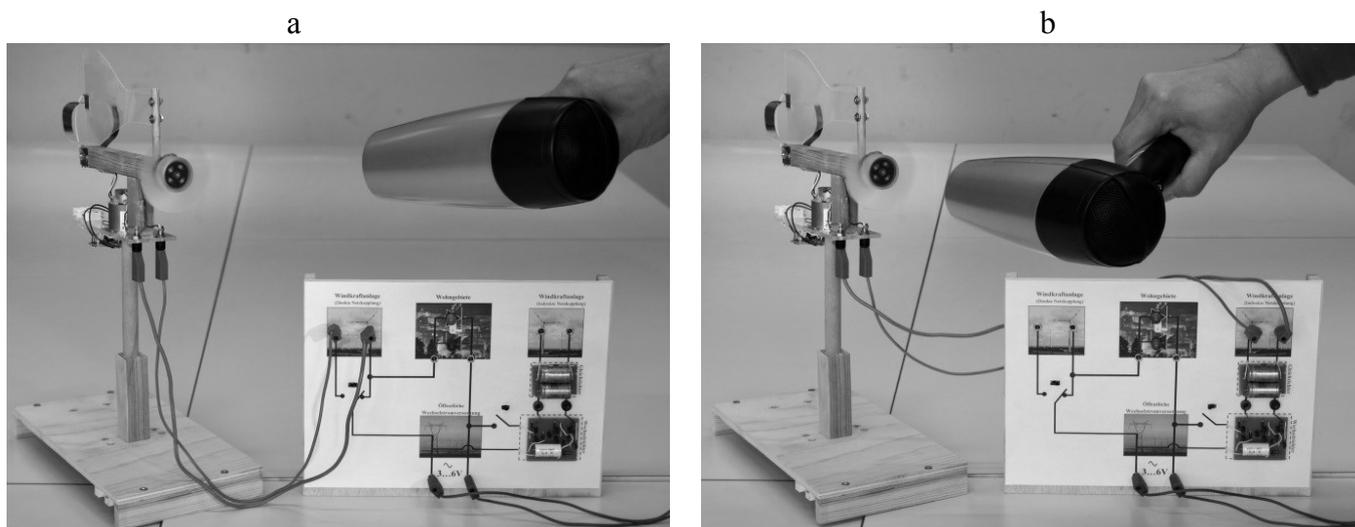


Abbildung 3.4.3: Veranschaulichung der Kopplung des aus einer Windkraftanlage erzeugten Stroms in die Wechselstromversorgung: Bild a für direkte Kopplung, Bild b für indirekte Kopplung mittels Wechselrichter.

Wenn man das indirekte Kopplungsverfahren mittels des Wechselrichters aktiviert (Abb. 3.4.3 - b), kann man beobachten, dass beide LED stabil leuchten. Darüber hinaus ist die Helligkeit der LED stets stärker, als sie es ohne Verbindung mit der Windkraftanlage wäre (s. Video [A 3.4.5]). Deswegen kann die Windkraftanlage mittels des Wechselrichters das Wechselstromnetz verstärken. Somit kann dieses Kopplungsverfahren in der Praxis angewendet werden.

Diese Veranschaulichung kann mittels Oszilloskop vertieft werden (Abb. 3.4.4). Dabei werden die zwei Pole der LED mit den zwei Anschlüssen eines Kanals des Oszilloskops verbunden.

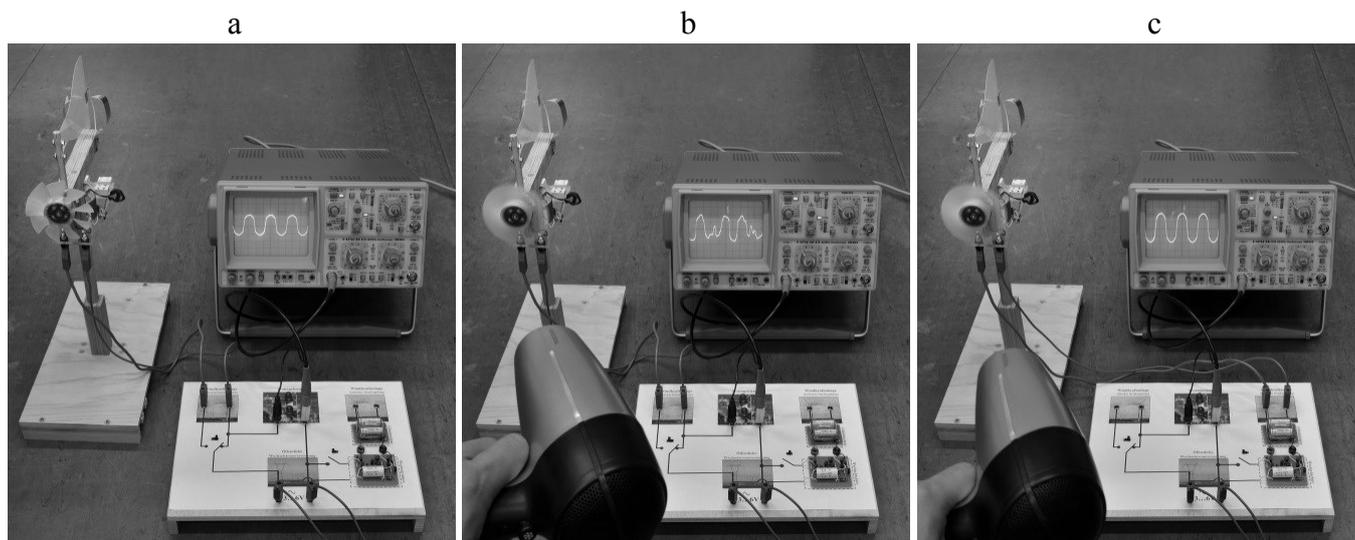


Abbildung 3.4.4: Veranschaulichung der Kopplung der Windkraftanlage mit Hilfe des Oszilloskops: Bild a - ohne Kopplung, Bild b - direkte Kopplung, Bild C - indirekte Kopplung mittels Wechselrichter.

Aus dieser Abbildung ist erkennbar, dass die Grafikkurve von der Spannung im Bild a stets sinnförmig ist. Dagegen ist die Grafikkurve im Bild b (entsprechend mit direkter Kopplung) chaotisch. Daraus kann man folgern, dass die Phase, Frequenz und Form der Spannungsschwingung der Wechselstromversorgung stark verändert werden. Die Anwendung dieses Kopplungsverfahrens könnte Elektrogeräte beschädigen.

Die Grafikkurve der Spannung im Bild c ist sinusförmig. Die Amplitude der Grafikkurve im Bild c ist größer als im Bild a. Das bedeutet: Die Kopplung des in der Windkraftanlage erzeugten Stroms an die Wechselstromversorgung mittels Wechselrichters funktioniert gut. Die Phase und Frequenz der Wechselstromversorgung werden jeweils nicht verschoben bzw. nicht verändert. Die Amplitude der Spannung wird verstärkt, d.h. die Windkraftanlage hilft nun, die Wechselstromversorgung zu verstärken.

Kapitel 4: Zusammenfassung

4.1 Zentrale Beiträge der Dissertation

Das wesentliche Resultat der vorliegenden Arbeit besteht in der Präsentation eines fachdidaktisch einheitlichen Konzeptes, das einen Bogen aus elementarisierten Betrachtungen spannt, der sich von der eingestrahnten Sonnenenergie auf der einen und den theoretischen Potentialen sowie den technischen Realisierungsvarianten der regenerativen Energiebereitstellung auf der anderen Seite spannt. Viele Teilschritte auf diesem Weg wurden vereinheitlicht, beispielsweise sind die weiter unten aufgezählten Computersimulationen alle auf gleiche oder ähnliche Weise zu bedienen. Diese Aussage trifft im Kern auch auf die vorgeschlagenen Experimente zu. Ob die elaborierten Lehr-Lern-Varianten tatsächlich schulgerecht sind, wurde in größeren Teilen erprobt. Wert wurde dabei darauf gelegt, dass die Energieströme von der Sonnenenergie hin zu den regenerativen Energiequellen fasslich gemacht werden und dass nur physikalische Gesetzmäßigkeiten betrachtet wurden, die von den SuS altersgerecht nachvollzogen und verstanden werden können. Zur Unterstützung der gedanklichen Elementarisierung wurden jeweils parallel Computersimulationen und Schulversuche entwickelt. Diese Beiträge eignen sich insbesondere für die vietnamesische schulische Ausbildung. Nachfolgend werden die hauptsächlichen Beiträge aufgezählt:

- Beitrag 1:** Die Angabe von Formeln zur annäherungsweisen Berechnung der Sonnenscheindauer und eingestrahnten Sonnenenergie für die beliebige geografische Breiten (s. Formeln: (1.1.1), (1.1.7), (1.2.6) und (1.2.7)) und dabei insbesondere zwei eigenständige elementarisierte Berechnungsmodelle mit didaktisch aufgebauter schrittweiser Herleitung. Dadurch kann man die Formeln gewinnen (s. Abschnitte 1.1 und 1.2).
- Beitrag 2:** Die elementarisierte Herleitung der Formeln zur näherungsweisen Berechnung der Sonnenscheindauer und der eingestrahnten Sonnenenergie für beliebig geneigte Ebenen auf beliebigen geografischen Breiten (s. Formeln: (1.3.1), (1.3.2), (1.3.5) und (1.3.6)) dabei insbesondere zwei elementarisierte Berechnungsmodelle mit didaktisch elaborierter schrittweiser Durchführung der Herleitung. Dadurch kann man die Formeln gewinnen.
- Beitrag 3:** Interaktiv animierte Computersimulationen zur Veranschaulichung der räumlichen geometrischen Gegenstände. Dies hilft die geometrische Abhängigkeit während der Realisierungen der Berechnungsmodelle (Beiträge 1 und 2) deutlich vorzustellen (s. Abschnitte 1.1, 1.2 und 1.3).
- Beitrag 4:** Die interaktiven Computersimulationen zur näherungsweisen Berechnung und grafischen Darstellung der täglichen bzw. der jährlichen Sonnenscheindauer und der eingestrahnten Sonnenenergie für beliebig geneigte Ebenen auf beliebigen geografischen Breiten (s. Abschnitt 1.3.3).
- Beitrag 5:** Ein genaueres Berechnungsmodell für fortgeschrittene Physiklehrer. Durch dies kann man genauer Sonnenscheindauer und eingestrahnte Sonnenenergie berechnen (s. Abschnitt 1.4).
- Beitrag 6:** Interaktive Computersimulationen zur genaueren Berechnung und grafischen Darstellung der täglichen und der jährlichen Sonnenscheindauer für beliebig geneigte Ebenen auf beliebigen geografischen Breiten. Damit kann man die Zuverlässigkeit der elementarisierten Berechnungsmodelle oben (Beiträge 1 und 2) abschätzen (s. Abschnitt 1.4.3.3).
- Beitrag 7:** Vereinfachte Berechnungsmodelle, mit dem man die langfristigen Auswirkungen und Gültigkeitsgrenzen der Berechnungsmodelle oben (Beiträge 1, 2) unter der Berücksichtigung der Forschungsleistung zur langfristigen Erdbewegung von Milutin Milanković abschätzen kann (s. Abschnitt 1.5).

- Beitrag 8:** Computersimulationen zur Berechnung und grafischen Darstellung dieser Berechnungsmodelle (Beitrag 7) (s. Abschnitt 1.5).
- Beitrag 9:** Ein vereinfachtes Berechnungsmodell zur Abschätzung der Erdtemperatur (s. Abschnitt 2.1.1) wird genutzt zur interaktiven Computersimulation zur Ermittlung und grafischen Darstellung der täglichen und jährlichen mittleren Erdtemperatur auf beliebigen geografischen Breiten (s. Abschnitt 2.1.2). Dabei betrachtet man lediglich das Strahlungsgleichgewicht. Die Erdatmosphäre wird als homogen ohne Treibhauseffekt und ohne waagerechten Wärmetransport angesehen. Wärmespeicherung wird hier noch nicht berücksichtigt.
- Beitrag 10:** Ein vereinfachtes Berechnungsmodell zur Abschätzung der Albedo der Erde (s. Abschnitt 2.2) wird eingesetzt, um interaktive Computersimulationen zur Berechnung und grafischen Darstellung der täglichen mittleren Erdalbedo für beliebige geografische Breiten (s. Abschnitt 2.2) durchzuführen.
- Beitrag 11:** Interaktive Computersimulationen zur automatischen Berechnung und grafischen Darstellung der Bestrahlungsstärke auf der Erdoberfläche und der Abstrahlungsstärke von Erdoberfläche für beliebige Wellenlängen (s. Abschnitt 2.3).
- Beitrag 12:** Ein vereinfachtes Berechnungsmodell zur Untersuchung des Treibhauseffekts. Dabei wird das Verhalten der Strahlungswechselwirkung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre nach dem Gesetz der geometrischen Zahlenfolge angenommen. (s. Abschnitt 2.4.1)
- Beitrag 13:** Ein vertieftes Berechnungsmodell zur Untersuchung der Strahlungswechselwirkung zwischen Erdoberfläche und Erdatmosphäre. Dabei werden die Verteilung der Wolken und das Spektrum der Rückstrahlung der Atmosphäre zusätzlich berücksichtigt (s. Abschnitt 2.4.2).
- Beitrag 14:** Eine auf Beitrag 13 beruhende interaktive Computersimulation zur automatischen Berechnung der mittleren Temperatur der Erdoberfläche, der mittleren Bestrahlungsstärke auf der Erdoberfläche und der mittleren Abstrahlungsstärke von der Erdoberfläche (s. Abschnitt 2.4.2).
- Beitrag 15:** Ein elementares Berechnungsmodell zur Abschätzung der Erdoberflächentemperatur und der transportierten Wärmeleistung. Dabei werden die Bedingungen (vertikaler Wärmeausgleich, Wärmespeicherung und horizontale Wärmeregulierung) nacheinander schrittweise in die Betrachtung eingefügt. (s. Abschnitt 2.5)
- Beitrag 16:** Eine auf Beitrag 15 beruhende interaktive Computersimulation zur automatischen Berechnung der mittleren Temperatur der Erdoberfläche und der transportierten Wärmeleistung (s. Abschnitt 2.5).
- Beitrag 17:** Ein Berechnungsmodell zur Abschätzung der potenziellen Leistungsdichte aus regenerativen Energiequellen bzw. der erforderlichen Erdoberfläche entsprechend dem menschlichen Energiebedarf (s. Abschnitt 2.6).
- Beitrag 18:** Ein Demonstrationsversuch zur quantitativen Bestimmung der Sonnenscheindauer und der eingestrahnten Sonnenenergie (s. Abschnitt 3.1).
- Beitrag 19:** Ein Demonstrationsversuch zur Veranschaulichung der automatischen Nachführung für Solarzellen (s. Abschnitt 3.2.2).
- Beitrag 20:** Schülerversuche zur Veranschaulichung der automatischen Nachführung für Solarzellen (s. Abschnitt 3.2.3).
- Beitrag 21:** Interaktiv animierte Computersimulationen zur Veranschaulichung der Funktionsweise dieser Modellexperimente (Beiträge 19 und 20) (s. Abschnitt 3.2).

- Beitrag 22:** Ein Modellversuch zur Illustration von Funktionsweise eines Pumpspeicherkraftwerks und zur Veranschaulichung der Messung des Wirkungsgrades eines Pumpspeicherkraftwerks (s. Abschnitt 3.3).
- Beitrag 23:** Ein Modellversuch zur Illustration der Funktionsweise der automatischen Nachführung zur Windrichtung einer Windkraftanlage (s. Abschnitt 3.4.1).
- Beitrag 24:** Ein Modellversuch zur Illustration der Funktionsweise der Einkopplung des Stroms aus einer Windkraftanlage ins Stromnetz (s. Abschnitt 3.4.2).
- Beitrag 25:** (Empfohlenes) Schularbeitsmaterial mit dem schrittweisen Unterrichtsablauf für die schulische Erprobung der Inhalte bezüglich der Beiträge 1, 3, 4, 18, 19, 20 und 21 [A 4.1].

4.2 Empfohlene Anwendungsbereiche

Die ins Auge gefassten Anwendungsbereiche dieser Beiträge betreffen vor allem die vietnamesische schulische Ausbildung, insbesondere eignen sie sich für die Fortgeschrittenenkurse dort. Dabei können nicht nur die grundsätzlichen Ausführungen dieser Arbeit verwendet werden, sondern auch viele Beiträge im Detail, nämlich Diagramme, Bilder, Simulationen und Schulversuche, die direkt als Unterrichtsmaterialien konzipiert sind. Diese Materialien können ebenso in Weiterbildungen für die schulisch Lehrenden oder für die Lehramtsstudenten eingesetzt werden. Natürlich können diese Beiträge zum Teil auch in der deutschen Schulausbildung angewendet werden.

Zurzeit gibt es in Vietnam nur ein einziges Lehrwerk, das in einheitliche Schulbücher umgesetzt wird. Ab 2023 wird es eine größere Vielfalt an Schulbüchern geben, entsprechend der offiziellen Entscheidung des vietnamesischen Schulministeriums. Dementsprechend können die hier erarbeiteten Inhalte in neue Schulbucharten einfließen.

Ob die oben aufgeführten Beiträge tatsächlich für die Schule geeignet sind, kann sich nur in umfangreichen Erprobungen erweisen. Die Inhalte der Beiträge 1, 3, 4, 18, 19, 20 und 21 wurden im Rahmen des „Deutschen Schülerakademie“ Programms [Schülerakademie 2013] umgesetzt. Bei dieser Erprobung riefen die Experimente (Beiträge 18, 19, und 20) und Simulationen (Beiträge 3, 4 und 21) bei SuS großes Interesse und Aktivitäten hervor. Die SuS stellten bemerkenswert viele Fragen zu den Experimenten und Simulationen. Sie stellten eigene Resultate aus Experimenten und Simulationen vor und erklärten diese in einer Akademiepräsentation (vor Lernenden aus anderen Kursen des „Deutschen Schülerakademie“ Programms).

Während dieser Erprobung haben die SuS sich auf die vom Lehrenden gestellten theoretischen Fragen in Hinsicht auf Beiträge 1, 18, 19 und 20 [A 4.1] konzentriert. Die SuS bemühten sich tatsächlich, die komplizierteren theoretischen Problemstellungen mit Hilfe der Simulationen (Beiträge 3 und 4) zu lösen. Sie haben die Simulationen ebenfalls genutzt, um vor der Klasse aktiv Ideen vorzustellen und zu realisieren. Vor allem wurden die von SuS aufgeführten Resultate mittels Experimenten (Beiträge 18, 19 und 20) oder Simulationen veranschaulicht.

Aus dieser Erprobung kann man vorläufig einschätzen, dass die Beiträge 1, 3, 4, 18, 19, 20 und 21 angemessen im Schulunterricht angewendet werden können. Für die genauere Beurteilung aller Beiträge benötigt man natürlich viele weitere Erprobungen. Doch die vorliegende Untersuchung ist hauptsächlich der fachlich-didaktischen Entwicklungsarbeit gewidmet. Umfangreichere Erprobungen hätten ihren Umfang deutlich gesprengt und müssen in Folgeuntersuchungen geleistet werden.

Abbildungsverzeichnis

1.1.1	Position der Erde am 22.12.	10
1.1.2	Der Erde am 22.12. von der Tagseite beobachtet.	11
1.1.3	Der Erde am 22.12. von der Nachtseite beobachtet.	11
1.1.4	Der Erde am 22.12. über dem Nordpol beobachtet.	11
1.1.5	Der Erde am 22.12. über dem Südpol beobachtet.	11
1.1.6	Tag- und Nachtseite der Erde am 22.12. mit der gezeigten Kugel [A 1.1.2].	12
1.1.7	Tag- und Nachtseite der Erde am 22.12. ohne die Erdkugel.	12
1.1.8	Darstellung Tag – Nacht - Verhältnisse an den Erdpolen am 22.12. mit eingezeichneter Erdkugel [A 1.1.3].	13
1.1.9	Darstellung Tag – Nacht - Verhältnisse an den Erdpolen am 22.12. ohne eingezeichnete Erdkugel.	13
1.1.10	Position der Erde am Tag n ab dem 22.12.	15
1.1.11	Tag- und Nachtseite der Erde am Tag n ab dem 22.12. mit der eingezeichneten Erdkugel [A 1.1.4].	15
1.1.12	Tag- und Nachtseite der Erde am Tag n ab dem 22.12. ohne die eingezeichnete Erdkugel.	15
1.1.13	Tag - Nacht - Verhältnisse an den Erdpolen für $n \leq 182$ Tage, mit der eingezeichneten Erdkugel [A 1.1.5].	17
1.1.14	Tag - Nacht - Verhältnisse an der Erdpolen für $n \leq 182$ Tage, ohne die eingezeichnete Erdkugel.	17
1.1.15	Die Position der Erde für $n \geq 183$.	18
1.1.16	Tag - Nacht - Verhältnisse an den Polen für $n \geq 183$ Tage, mit der eingezeichneten Erdkugel.	19
1.1.17	Tag - Nacht - Verhältnisse an den Polen für $n \geq 183$ Tage, ohne die eingezeichnete Erdkugel.	19
1.1.18	Darstellung zur Berechnung der eingestrahnten Sonnenenergie, mit eingezeichneter Erdkugel [A 1.1.7].	20
1.1.19	Darstellung zur Berechnung der eingestrahnten Sonnenenergie, ohne die eingezeichnete Erdkugel.	21
1.2.1	Das Sxyz Koordinatensystem mit Sonnen- und Erdkugel [A 1.2.1].	28
1.2.2	Das Sxyz Koordinatensystem ohne die Darstellung der Sonnen- und Erdkugel.	28
1.2.3	Grafik zur Berechnung der Vektoren \vec{n} und \vec{s}_n [A 1.2.2].	28
1.2.4	Die Lage des $MX_1Y_1Z_1$ Koordinatensystems [A 1.2.3].	30
1.2.5	Die Lage des $MX_1Y_1Z_1$ Koordinatensystems mit dem Zenitwinkel θ und α [A 1.2.4].	30
1.2.6	\vec{s}_n überstreicht an einem ganzen Tag einen Kegel um die Achse \vec{n} .	30
1.2.7	Das Tag - Nacht - Verhältnis wird deutlich, wenn man Abbildung 1.2.6 um die Horizont-Ebene erweitert, die den Kegel in zwei Teile trennt [A 1.2.5].	30
1.2.8	Genauere Darstellung des Tag-Nacht-Verhältnisses des Sonnenkegels (mit markierten Oberflächen) [A 1.2.6].	31
1.2.9	Genauere Darstellung des Tag-Nacht-Verhältnisses des Sonnenkegels (ohne die Oberflächen).	31
1.2.10	Die Lage des Koordinatensystems $Ox_2y_2z_2$ [A 1.2.7].	33
1.2.11	Die Komponenten \vec{s}_n in $Ox_2y_2z_2$ [A 1.2.8].	34
1.2.12	Die Lage der Koordinatensysteme $Ox_2y_2z_2$ und $MX_1Y_1Z_1$ [A 1.2.9].	35
1.2.13a	Die drei Projektion des \vec{i}_2 im $Ox_1y_1z_1$ [A 1.2.10].	36
1.2.13b	Die drei Projektionen von \vec{j}_2 in $Ox_1y_1z_1$.	37
1.2.13c	Die drei Projektionen des Vektors \vec{k}_2 in $Ox_1y_1z_1$.	37
1.2.14	Darstellung des Zenitwinkels θ [A 1.2.11].	39
1.3.1	Beschreibung der Dachstellung durch den horizontalen Drehwinkel α_H und den vertikalen Drehwinkel α_V [A 1.3.1].	44
1.3.2	Darstellung der Lage von α_H , α_V und \vec{n}_D [A 1.3.2].	44
1.3.3	Die Lage von θ_D [A 1.3.3].	45
1.3.4	Zur Veranschaulichung der äquivalenten Fläche [A 1.3.4].	49
1.3.5	Skizze zur Bestimmung des Breitengrads φ' der äquivalenten Fläche [A 1.3.5].	50
1.3.6	Darstellung der Position des äquivalenten Zeitbogens β' [A 1.3.6].	51
1.3.7	Die gelben Bögen entsprechen der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden am Breitengrad des Daches φ und des Breitengrades φ' der äquivalenten Fläche. Die Sonnenstunden auf dem Dach sind durch den blauen Bogen zwischen P_2 und Q_1 dargestellt [A 1.3.7].	56
1.3.8	Darstellung wie in Abbildung 1.3.7; nur ohne die Erdoberfläche [A 1.3.8].	56
1.3.9	Untersuchung der Sonnenstunden und eingestrahnten Sonnenenergie auf einem bestimmten Dach.	58
1.3.10	Der horizontale Drehwinkel α_H wird mit Hilfe einer Fotografie des Hausgiebels gemessen.	59
1.3.11	Der vertikale Drehwinkel α_V wird mit Hilfe eines Satellitenbildes aus Google Earth ermittelt (© 2009 GeoBasis-De/BKG Image © 2014 AeroWest).	59
1.3.12	Die Lage der äquivalenten Fläche des betrachteten Daches (Bildquelle: Map data © 2014 Google, INEGI).	59
1.3.13	Bestimmung der Sonnenstunden und der eingestrahnten Sonnenenergie für ein Fenster.	63

1.3.14	Der vertikale Drehwinkel α_V wird durch Satellitenbilder aus Google Earth ermittelt (© 2009 GeoBasis-De/BKG Image © 2014 AeroWest).	63
1.4.1	Zum Gravitationsgesetz, Bezeichnungen der Größen und Orientierung der Vektoren.	72
1.4.2	Bezeichnungen der Größen.	74
1.4.3	Darstellung der Differenziallänge $d \vec{r} $.	74
1.4.4	Darstellung der Ellipsenbahn.	76
1.4.5	Darstellung zur Festlegung des Koordinatensystems Oxy und des Parameters φ .	77
1.4.6	Darstellung der von Vektor \vec{r} überstrichenen Fläche A.	79
1.4.7	Darstellung der von der Ellipsenkurve und der Achse Ox beschränkten Fläche A_1 .	79
1.4.8	Darstellung der Fläche A_2 .	79
1.4.9	Darstellung der Winkelgeschwindigkeiten.	81
1.5.1	Illustration zum Strahlungsgleichgewicht der Erde.	98
2.1.1	Illustration zur Berechnung der eingestrahnten Sonnenleistung $P_{p \leftarrow S}$ auf einen Planeten.	105
2.2.1	Die Abhängigkeit zwischen dem Lichtweg L_S und dem Zenitwinkel θ .	113
2.2.2	Veranschaulichung der Effektivhöhe einer Luftsäule. Die Blaeinfärbung kennzeichnet die Luftdichte.	116
2.2.3	Veranschaulichung des Kräftegleichgewichts an Wassertropfchen von Wolken.	121
2.2.4	Bezeichnung der Strahlungsintensitäten.	123
2.2.5	Reflektion und Brechung an einer Wasserfläche.	128
2.2.6	Zur Berechnung der Erdalbedo.	131
2.2.7	Veranschaulichung des Lambertschen Gesetzes.	133
2.2.8	Zur Berechnung der Bestrahlung auf eine Einheitsfläche.	133
2.4.1	Vereinfachter Analogie-Modell-Versuch zum Treibhauseffekt. Die Pfeile zeigen das Wasserniveau.	144
2.4.2	Darstellung zur vereinfachten Erklärung des Treibhauseffektes. Dabei werden die ersten fünf Vorgänge der Strahlungsübertragung mit V1-V5 markiert. Die Strahlungswege werden mit S1 bis S7 nummeriert. Die kurzen und langen Wellenlängen werden jeweils mit Gelb und Braun dargestellt.	145
2.4.3	Darstellung der Entstehung der Strahlungen. Die roten und schwarzen Pfeile stellen jeweils kurze Wellenlängen und lange Wellenlängen dar. Die roten und schwarzen gestrichelten Klammern beschreiben jeweils die Streuungs- und die Absorptionsprozesse (s. Abschnitt 2.2.5.2 für die Bezeichnungen).	149
2.4.4	Bezeichnungen zur Berechnung des langwelligen Transmissionsgrads $T_l(1)$ für die Luft ohne Wolken.	151
2.4.5	Bezeichnungen zur Berechnung des langwelligen Transmissionsgrads $T_l(2)$ für Wolken in der Atmosphäre.	152
2.4.6	Veranschaulichung der Bestrahlungsstärke der solaren Einstrahlung und ihrer sekundären Strahlungen. Mit den Farben Rot und Schwarz werden jeweils die kurzwellige und die langwellige Strahlung dargestellt.	154
2.4.7	Veranschaulichung des langwelligen Strahlungsverhaltens von Erdoberfläche und Erdatmosphäre. Die Größe der Pfeile ist proportional zur Abstrahlungsstärke bzw. Bestrahlungsstärke.	155
2.5.1	Illustration des Wärmeverlusts in Bodennähe wegen des vertikalen Wärmetransports.	157
2.5.2	Bezeichnungen für die Berechnung der Wärmeverlustleistung.	160
2.5.3	Illustration der meridionalen Wärmeregulation auf der Erde	163
3.0.1	Funktionen des Experiments im Physikunterricht.	175
3.1.1	Aufbau des Experiments.	178
3.1.2	Die Beleuchtung der Erde und die Entstehung der Tag- und Nachtseite.	179
3.1.3	Darstellung von Beleuchtungssituationen im Laufe eines Jahres. Die Spalten a, b, c und d entsprechen jeweils dem Datum 22.12., 21.3., 22.6. und 21.9. Reihe 1 zeigt die Ausrichtung der Erdkugel im Modellversuch. Die Reihen 2 und 3 zeigen jeweils die dazugehörigen Bilder von Nord- und Südpol.	179
3.1.4	Der Modell-Erdboden wird anstelle der Erdkugel auf das Modell aufgesteckt.	181
3.1.5	Versuchsaufbau zur Bestimmung der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden.	181
3.1.6	Beispiel der Messergebnisse für den 14.8. für einen Ort auf dem 51. Breitengrad. Das Serienbild stellt die Änderung der Stellung und der Helligkeit des Erdbodens von 3 Uhr bis 21 Uhr dar. Die Uhrzeit bezüglich jeder Stellung des Erdbodens kann auf der Uhr unter der Fläche abgelesen werden, sie ist auf jedem Einzelbild vermerkt.	182
3.1.7	Veranschaulichung der jährlichen Veränderung der Sonnenscheindauer: Der 51. Breitengrad zu verschiedenen Daten (links). Die erste Spalte des Serienbildes zeigt die Anordnung der Fläche am Mittag an verschiedenen Tagen. Die weiteren Spalten des Serienbildes stellen den Ablauf sowohl der Helligkeit als auch des Schattenwurfs in Abhängigkeit von der Zeit dar. Der Ablauf der Helligkeit und des Schattenwurfs sind nach 12 Uhr symmetrisch zum Vormittag (s. Abb. 3.1.6), weshalb sie hier nicht dargestellt werden.	183
3.1.8	Veranschaulichung der Schwankung der Sonnenscheindauer am 22.6. für verschiedene geografische Breitengrade. Die erste Spalte des Serienbildes zeigt die Anordnung der Fläche am Mittag für verschiedene Breitengrade. Die übrigen Spalten stellen den Verlauf sowohl der Helligkeit als auch des Schattenwurfes dar.	184

3.1.9	Aufbau des Experiments zum Tagbogen.	185
3.1.10	Die Markierung der Tagbögen, die gelben Punkte entsprechen den Mittagspunkten, a) für den 22.6., am Breitengrad 51° , b) für den 22.6. (oben) und für den 22.12. (unten), am 51° Breitengrad und c) für den 22.6., am 75° Breitengrad (geschlossener Kreis) und am Äquator.	185
3.1.11	Erweiterung des Versuchsaufbaus zur Ermittlung der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche.	187
3.1.12	Versuchsaufbau zur Ermittlung der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche.	187
3.1.13	Messbeispiel der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche mit $\alpha_V = -110^\circ$ und $\alpha_H = -60^\circ$, am 14.8. und für den geografischen Breitengrad $\varphi = 51^\circ$.	188
3.1.14	Helligkeitsverlauf zweier Dachflächen in Deutschland am 01.02. für $\alpha_H = -35^\circ$ (oben) und $\alpha_H = 70^\circ$ (unten).	189
3.1.15	Helligkeitsverlauf zweier Dachflächen in Deutschland am 01.07. für $\alpha_H = -35^\circ$ (oben) und $\alpha_H = 70^\circ$ (unten).	189
3.1.16	Ein Beispiel der Ergebnisse für das Datum 14.8. und für einen Ort mit dem Breitengrad 51° . Das Serienbild stellt die Änderung der Helligkeit des Erdbodens von 4 Uhr bis 20 Uhr dar. Die Uhr-Zeit bezüglich jeder Stellung des Erdbodens kann man auf dem Uhr-Meter ablesen, sie wurde auf jeden Bildteil auch aufgeschrieben.	193
3.1.17	Ein Beispiel der Ergebnisse auf der Dachschräge mit $\alpha_H = 60^\circ$ und $\alpha_V = 70^\circ$ für das Datum 14.8. - in Siegen mit dem Breitengrad $\varphi = 51^\circ$. Das Serienbild stellt die Änderung der Helligkeit des Erdbodens von Sonnenaufgangszeitpunkt auf dem Dach 9:30 Uhr bis zum Sonnenuntergang auf dem Erdboden 19:12 Uhr dar. Die Uhr-Zeit bezüglich jeder Stellung des Daches kann man auf dem Uhr-Meter ablesen, sie wurde auf jedem Bildteil aufgeschrieben.	193
3.1.18	Position des Fotowiderstands auf dem „Erdboden“.	194
3.1.19	Verfahren zum Finden der Fit-Funktion $B = f(R)$.	194
3.1.20	Experiment zur Messung der eingestrahnten Sonnenenergie.	195
3.1.21	Verfahren zum Finden der Fit-Funktion $B = f(U)$.	197
3.1.22	Experiment zur Messung der eingestrahnten Sonnenenergie auf einer Dachschräge.	198
3.2.1	Zwei Screenshots der Simulation zur Problemstellung der Ausrichtung von Solarzellen, im Anhang zu finden unter [A 3.2.1].	202
3.2.2	Demonstrationsmodell der Nachführung.	203
3.2.3	Erster Screenshot der Simulation 3.2.2: Funktionsprinzip der Nachführung wenn die Sonne auf der „linken“ Seite (a) oder der „rechten“ Seite (b) der Solarzelle steht [A 3.2.3].	204
3.2.4	Zweiter Screenshot der Simulation 3.2.2: Funktionsprinzip der Schaltung der elektrischen Ansteuerung der Nachführung [A 3.2.3].	205
3.2.5	Zwei alternative vereinfachte Modelle. Bild a für ein realistisches Funktionsmodell [A 3.2.5], Bild b für ein Funktionsprinzip-Modell [A 3.2.7], welches von den Lernenden selbst nachgebaut werden kann.	206
3.2.6	Screenshot der Simulation 3.2.2: Darstellung der Details des vereinfachsten Schaltungsplans [A 3.2.6].	207
3.3.1	Aufbau des Modells.	208
3.3.2	Der prinzipielle Schaltungsplan für das allgemeine Stromnetz mit Pumpspeicherkraftwerk.	209
3.3.3	Versuchsaufbau für die Messung des Wirkungsgrads des Modell-Pumpspeicherkraftwerkes.	211
3.4.1	Modell der Windkraftanlage.	213
3.4.2	Der prinzipielle Schaltungsplan zur Veranschaulichung zweier Kopplungsarten an die Wechselstromversorgung.	214
3.4.3	Veranschaulichung der Kopplung des aus einer Windkraftanlage erzeugten Stroms in die Wechselstromversorgung: Bild a für direkte Kopplung, Bild b für indirekte Kopplung mittels Wechselrichter.	215
3.4.4	Veranschaulichung der Kopplung der Windkraftanlage mit Hilfe des Oszilloskops: Bild a - ohne Kopplung, Bild b - direkte Kopplung, Bild C - indirekte Kopplung mittels Wechselrichter.	216

Diagrammverzeichnis

1.1.1	Sonnenstunden und Sonnenenergie im Jahresverlauf für Siegen (Man beachte die Idealisierung: Das Diagramm gilt nur ohne den Einfluss der Erdatmosphäre, z.B. also auch keine Wolkenbildung!).	27
1.1.2	Zenitwinkel θ im Tagesverlauf für Siegen am 14.8.	27
1.1.3	Die Verteilung der jährlichen Sonnenstunden- und Sonnenenergiesumme in Abhängigkeit vom Breitengrad.	27
1.1.4	Sonnenwinkel α im Jahresverlauf.	27
1.2.1	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Verlauf der täglichen Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum [A 1.2.12].	41
1.2.2	Die tägliche Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum, dargestellt mit Hilfe einer Farbskala [A 1.2.12].	41
1.2.3	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Verlauf der täglich eingestrahltten Sonnenenergie pro 1m^2 in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum [A 1.2.13].	43
1.2.4	Verlauf der täglich eingestrahltten Sonnenenergie pro 1m^2 in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum als Farbdarstellung [A 1.2.13].	43
1.3.1	Sonnenstunden im Jahresverlauf für das betrachtete Schrägdach mit $\alpha_H = 48^\circ$ und $\alpha_V = 51^\circ$ [A 1.3.9].	62
1.3.2	Eingestrahltte Sonnenenergie im Jahresverlauf für das betrachtete Schrägdach mit $\alpha_H = 48^\circ$ und $\alpha_V = 51^\circ$ [A 1.3.9].	62
1.3.3	Sonnenstunden im Jahresverlauf für das betrachtete Fenster mit $\alpha_H = 90^\circ$ und $\alpha_V = -39^\circ$ [A 1.3.9].	64
1.3.4	Eingestrahltte Sonnenenergie im Jahresverlauf für das betrachtete Fenster mit $\alpha_H = 90^\circ$ und $\alpha_V = -39^\circ$ [A 1.3.9].	64
1.3.5a	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Zusammenhänge zwischen den Sonnenstunden und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.10] und [A 1.3.11]).	65
1.3.5b	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Zusammenhänge zwischen den Sonnenstunden und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.10] und [A 1.3.11]).	65
1.3.6a	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Zusammenhänge zwischen der täglich eingestrahltten Sonnenenergie und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.12] und [A 1.3.13]).	66
1.3.6b	(<i>Das durch Farben repräsentierte Diagramm</i>): Die Zusammenhänge zwischen der täglich eingestrahltten Sonnenenergie und den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches, am 14.8., in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.12] und [A 1.3.13]).	66
1.3.7a	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.14] und [A 1.3.15]).	67
1.3.7b	(<i>Das durch Farben repräsentierte Diagramm</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.14] und [A 1.3.15]).	67
1.3.8a	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahltten Sonnenenergie in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.16] und [A 1.3.17]).	68
1.3.8b	(<i>Das durch Farben repräsentierte Diagramm</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahltten Sonnenenergie in Abhängigkeit von den zwei Drehwinkeln α_H und α_V eines Schrägdaches in Siegen ($\varphi = 50,88^\circ$) ([A 1.3.16] und [A 1.3.17]).	68
1.3.9a	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.14] und [A 1.3.18]).	69
1.3.9b	(<i>Das durch Farben repräsentierte Diagramm</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.14] und [A 1.3.18]).	69
1.3.10a	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahltten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.16] und [A 1.3.19]).	70
1.3.10b	(<i>Das durch Farben repräsentierte Diagramm</i>): Die Verteilung der jährlichen Summe der eingestrahltten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und dem horizontalen Drehwinkel α_H eines Schrägdaches ([A 1.3.16] und [A 1.3.19]).	70
1.3.10c	Der Zusammenhang zwischen dem Maximum der jährlich eingestrahltten Sonnenenergie auf einem	71

	Schrägdach und dem Breitengrad ([A 1.3.16], [A 1.3.19] und [A 1.3.20]).	
1.3.10d	Die Abhängigkeit des optimalen horizontalen Drehwinkels eines Schrägdaches vom Breitengrad ([A 1.3.16], [A 1.3.19] und [A 1.3.21]).	71
1.4.1	Verlauf der jährlichen Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.1.14], [A 1.4.1] und [A 1.4.2]).	84
1.4.2	Verlauf der Abweichung der jährlichen Sonnenstunden zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.4.2] und [A 1.4.3]).	85
1.4.3	Verlauf der jährlichen eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.1.16], [A 1.4.4] und [A 1.4.5]).	85
1.4.4	Verlauf der Abweichung der jährlichen eingestrahelten Sonnenenergie zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren in Abhängigkeit vom Breitengrad ([A 1.4.5] und [A 1.4.6]).	86
1.5.1	Die relative Änderung der jährlichen Sonnenstunden in Prozent aufgrund der Präzession für einige Breitengrade, bezogen auf den heutigen Wert $t_0 = 13 \text{ Tage} + 18 \text{ Stunde} + 49 \text{ Minuten}$ ([A 1.5.1] und [A 1.5.2]).	88
1.5.2	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad aufgrund der Präzession und Tage zwischen der nördlichen Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.1] und [A 1.5.3]).	88
1.5.3	(<i>Diagramm 1.5.2 als Farbdigramm</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden aufgrund der Präzession in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Tage zwischen der nördlichen Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.1] und [A 1.5.3]).	89
1.5.4	1.5.4: (<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahelten Sonnenenergie aufgrund der Präzession in Abhängigkeit vom Breitengrad und Tage zwischen der nördlichen Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.4] und [A 1.5.5]).	90
1.5.5	(<i>Diagramm 1.5.5 als Farbdigramm</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahelten Sonnenenergie aufgrund der Präzession in Abhängigkeit vom Breitengrad und Tage zwischen der Winterwende und dem Periheldurchgang der Erde ([A 1.5.4] und [A 1.5.5]).	90
1.5.6	Verlauf der prozentualen Änderung der jährlichen Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Neigungswinkel der Erdachse an einigen Breitengraden, bezogen auf den heutigen Wert $\varepsilon = 23,44^\circ$. Man beachte: die Auflösung der %-Achse ist so hoch, dass die Kurven aufgrund von Rundungsfehlern nicht bei $\varepsilon = 23,44^\circ$ exakt zusammenfallen ([A 1.5.6] und [A 1.5.7]).	91
1.5.7	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.6] und [A 1.5.8]).	91
1.5.8	(<i>Diagramm 1.5.7 als Farbdigramm</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.6] und [A 1.5.8]).	92
1.5.9	Verlauf der prozentualen Änderung der jährlich eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Neigungswinkel der Erdachse, bezogen auf den heutigen Wert $\varepsilon = 23,44^\circ$ ([A 1.5.9] und [A 1.5.10]).	92
1.5.10	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.9] und [A 1.5.11]).	93
1.5.11	(<i>Diagramm 1.5.10 als Farbdigramm</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und vom Neigungswinkel der Erdachse ([A 1.5.9] und [A 1.5.11]).	93
1.5.12	Verlauf der prozentualen Änderung der jährlichen Sonnenstunden in Abhängigkeit von der Exzentrizität der Erdbahn an einigen Breitengraden, bezogen auf die gegenwärtige Exzentrizität von $e = 0,017$ ([A 1.5.12] und [A 1.5.13]).	94
1.5.13	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn ([A 1.5.12] und [A 1.5.13]).	95
1.5.14	(<i>Diagramm 1.5.13 als Farbdigramm</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der Sonnenstunden in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn.	95
1.5.15	Verlauf der prozentualen Änderung der jährlichen eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit von der Exzentrizität der Erdbahn an einigen Breitengraden, bezogen auf die gegenwärtige Exzentrizität von $e = 0,017$ ([A 1.5.15] und [A 1.5.16]).	96
1.5.16	(<i>Orthogonale 3D-Darstellung</i>): Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn ([A 1.5.15] und [A 1.5.17]).	96
1.5.17	(<i>Diagramm 1.5.16 als Farbdigramm</i>) Verlauf der prozentualen Änderung der eingestrahelten Sonnenenergie in Abhängigkeit vom Breitengrad und der Exzentrizität der Erdbahn [A 1.5.15] und [A 1.5.17]).	97
1.5.18	Die Daten aus Eisbohrkernen an der Vostok Station – Antarktis.	100
2.0.1	Verteilung der jährlichen mittleren Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit vom Breitengrad: Vereinfachte Betrachtung mit konstanter Albedo und ohne Treibhauseffekt, ohne Wärmetransport (grün); Betrachtung mit realer Verteilung der Albedo, mit Treibhauseffekt aber ohne	103

	Wärmetransport (rot); Betrachtung mit realer Verteilung der Albedo, mit Treibhauseffekt und mit lediglich vertikalem Wärmetransportierung (Blau); und die echten Werte (orange) aus [ISCCP 2014].	
2.1.1	(Heatmap-Art) Darstellung der Abhängigkeit der mittleren Oberflächentemperatur T_{OA} eines Planeten von den zwei Variablen Albedo A und Abstand R zwischen Planet und Sonne [A 2.1.1].	107
2.1.2	Position der Planeten in einem orthogonalen 3D-Diagramm, das den Zusammenhang zwischen den Temperaturen, den Albedowerten und dem Abstand zur Sonne vom jeweiligen Planeten darstellt [A 2.1.1].	107
2.1.3	(a Heatmap- und b orthogonale 3D-Art) Verteilung der täglichen mittleren Erdtemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum [A 2.1.2].	110
2.1.4	Verteilung der jährlichen mittleren Erdtemperatur in Abhängigkeit vom Breitengrad [A 2.1.3].	112
2.2.1	Spektren der solaren Strahlung mit hoher Auflösung. Die rote Kurve ist das Spektrum außerhalb der Erdatmosphäre (Luftmasse $K_{lm} = 0$). Die blaue Kurve ist das Spektrum an der Erdoberfläche (Luftmasse $K_{lm} = 1,5$).	119
2.2.2	Spektren der solaren Strahlung mit hoher Auflösung. Schwarz, Violett und Orange markieren jeweils die Absorptionsbereiche, die Streuungsbereiche und die Transmissionsbereiche.	120
2.2.3	Die Verteilung der Wolkenbedeckung (WD) für Datum und Breitengrad.	122
2.2.4	Die Verteilung der Höhe (H_w) der Wolken für Datum und Breitengrad.	122
2.2.5	Die Verteilung der optischen Dicke (τ) der Wolken für Datum und Breitengrad.	122
2.2.6a	Ideales Schwarzkörperspektrum, solares Spektrum und Absorptionsspektrum der Atmosphäre (Markiert sind die typischen Absorptionsbereiche einzelner Molekülsorten).	125
2.2.6b	Idealisierte Spektren der solaren Strahlung bei Wolkenbedeckung, wobei die Strahlung in den Absorptionsbereichen von Wasser komplett absorbiert wird. Schwarz, Violett und Orange markieren jeweils die Absorption in der Wolke, die Streuung in der Luft über der Wolke und Transmission durch die Wolke.	125
2.2.7	(Orthogonales 3-D- Diagramm) Verlauf der täglichen mittleren Albedo von Gewässern in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum ([A 2.2.7] und [A 2.2.8]).	129
2.2.8	Die Verteilung der Albedo der Erdoberfläche für Datum und Breitengrad ([A 2.2.9] und [A 2.2.10]).	130
2.2.9	Die Verteilung der täglichen mittleren Erdalbedo für Datum und Breitengrad, ermittelt nach den vereinfachten Modellannahmen (s. Fließtext) [A 2.2.13].	137
2.3.1	Wellenlängenverteilung der Abstrahlungsstärke von der Erde.	139
2.3.2	Wellenlängenverteilung der solaren Bestrahlungsstärke auf die Erde.	139
2.3.3	Wellenlängenverteilung der Bestrahlungsstärke (Rot) und der Abstrahlungsstärke (Blau) für die Erde.	140
2.3.4	Wellenlängenverteilung der Bestrahlungsstärke (Rot) auf der Erdoberfläche und der Abstrahlungsstärke (Braun) von Erdoberfläche. Die hervorgehobenen Flächen geben jeweils die gesamte Flächenleistung der Strahlung wieder.	142
2.3.5	Vergleich der Abstrahlungsstärke der Erdoberfläche – einmal mit (Braun) und einmal ohne (Blau) Erdatmosphäre.	142
2.4.1	Diagramm 2.4.1: Der Verlauf des Absorptionsgrades mit der Wellenlänge.	150
2.4.2	Spektrum der Rückstrahlung der Atmosphäre (mit der Luftmasse $K_{lm}=1,5$) im Wellenlängenbereich $[7\mu m; 26\mu m]$. Die Braun und Blau markieren Gebiete markieren jeweils die Rückstrahlungsbereiche und die Transmissionsbereiche.	150
2.4.3	Darstellung der Verteilung der Bestrahlungsstärke in den drei entscheidenden Wellenlängenbereichen der langwelligen Rückstrahlung.	151
2.5.1	Die tägliche mittlere Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum. a: Ohne bewegliche Luft, b: Mit vertikal beweglicher Luft.	158
2.5.2	Verteilung der jährlichen mittleren Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad für: Betrachtung mit statischer Luft (Rot); Betrachtung mit lediglich vertikaler Wärmeregulung (Blau); und die gemessenen Werte (orange), Quelle: [ISCCP 2014].	159
2.5.3	Verteilung jahreszeitlicher Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad. Die Werte stammen aus [ISCCP 2014].	160
2.5.4	Veranschaulichung der Anwesenheit eines meridionalen Wärmeausgleichs, der sich zwingend aus dem Unterschied zwischen der mit lediglich vertikaler Wärmeregulung berechneten Temperatur (blau) und den echten Werten ergibt.	162
2.5.5	Verteilung jährlicher Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit von Breitengrad. Betrachtung mit lediglich vertikaler Wärmeregulung (blau), Betrachtung mit vertikale und horizontale Wärmeregulung (Magentarot) und die echte jährliche Temperatur (Orange).	164
3.1.1	Verlauf der täglichen Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von Breitengrad und Datum, helle Farben stehen für lange Beleuchtungsintervalle.	180
3.1.2	Verlauf der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge in Abhängigkeit vom Datum und dem	186

	horizontalen Drehwinkel des Daches (α_H).	
3.1.3	Verlauf der solaren Bestrahlungsstärke B_E auf dem Erdboden in Abhängigkeit vom Datum und Uhrzeit in Siegen (geografischer Breitengrad $\varphi = 51^\circ$).	191
3.1.4	Verlauf der täglich eingestrahltten Sonnenenergie E auf der Dachschräge in Abhängigkeit von Datum und horizontalem Drehwinkel (α_H) des Daches. $E_0 = P_s \cdot 1h = 1,368 \text{ kWh/m}^2$ ist die in einer Stunde eingestrahltte Sonnenenergie auf einer 1m^2 – Fläche, die senkrecht zur Sonnenstrahlung steht.	192
3.1.5	Die gemessenen Punkte und die theoretische Kurve (Messung mittels Fotowiderstand).	196
3.1.6	Die gemessenen Punkte und die theoretische Kurve (Messung mittels Solarzelle).	198
3.1.7	Die gemessenen Punkte und die theoretische Kurve (Messung mittels Kamera).	201
3.2.1	Orientierungseffizienz einer horizontal montierten Solarzelle für einen Standort in der Mitte Deutschlands ($\varphi = 51^\circ$) im Jahresverlauf (a) und im Tagesverlauf am 20. März (b).	202

Tabellenverzeichnis

1.1.1	Inputtabelle und Ergebnistabelle	26
1.3.1	Input- und Ergebnistabelle [A 1.3.9].	62
1.4.1	Vergleich der Formeln zwischen dem vereinfachten und dem genaueren Verfahren	83
2.1.1	Daten für Albedo und Abstand zur Sonne der Planeten	107
2.2.1	Die angenäherten Wertebereiche der (geometrischen) Albedo für verschiedene Oberflächenarten	127
2.4.1	Vergleich der Temperaturen aus der vereinfachten Berechnung und den Messwerten [NASA 2012].	143
3.1.1	Die Werte zur Rekonstruktion der Fit-Funktion $B = f_i(R)$.	195
3.1.2	Die gemessenen Werte der Widerstände und die Interpolations-Werte der eingestrahlten Leistung.	196
3.1.3	Die Werte zur Bestimmung der Fit-Funktion $B = f_i(U)$.	197
3.1.4	Die gemessenen Werte der Spannung U und die Interpolations-Werte der Bestrahlungsstärke B .	198
3.1.5	Die Bestimmung der Fit-Funktion $B = f_i(Hw)$.	200
3.1.6	Die gemessenen Werte der Helligkeiten Hw der Dachbilder und die Interpolations-werte der Bestrahlungsstärke B .	201
3.3.1	Messwerte zur Bestimmung des Wirkungsgrads des Modell-Pumpspeicherkraftwerkes.	211

Literaturverzeichnis

- [AA 2014] Astronomical Applications Department of the U.S. Naval Observatory: Earth's Seasons Equinoxes, Solstices, Perihelion, and Aphelion, 2000-2025, URL: <http://aa.usno.navy.mil/index.php> (Stand 2014)
- [Allan 2011] Allan, R. P.: Combining satellite data and models to estimate cloud radiative effect at the surface and in the atmosphere. In: Royal Meteorological Society, 2011, Vol. 18, pp. 324-333
- [Arnold 2007] Arnold, B.; Vornholz, D.: Sonnen(bastel)bogen. In: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht, 2007, Bd. 6, Nr. 44, S. 32-34
- [Backhaus 2013] Backhaus, U.: Die Größe der Erde und die Entfernung des Mondes / Anregung zur astronomischen Zusammenarbeit zwischen Schulen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2013, Bd. 8, Nr. 62, S. 18-31
- [Bakan 1995] Bakan, S.; Hoppenau, S.: IR-Absorption in CO₂ / Ein qualitatives Modellexperiment. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 22-23
- [Batsch 1995a] Batsch, J.; Effetz, F.H.; Lukner, Ch.: Ein Erklärungsmodell zum Treibhauseffekt - Die CO₂ - Reduktionspotentiale im Verkehrsbereich. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 15-19
- [Batsch 1995b] Batsch, J.; Effetz, F.H.; Lukner, Ch.: Absorption und Transmission atmosphärischer Gase. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 23-26
- [Bauer 2013] Bauer, Th.; Wilhelm, Th.: Moment mal... (4): Wie funktioniert die Solarzelle? In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2013, Bd. 7, Nr. 62, S. 32-34
- [Behrendt 1990] Behrendt, H.: Physikalische Schulversuche / Didaktische Theorie, methodische Praxis und die Einstellung von Schülern zur Auswahl der Versuchsgерäte. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Pädagogischen Hochschule zu Kiel, 1990
- [Bell 2009] Bell, T.: Das Klima modellieren – (k)ein Thema für den Unterricht? / Vorschläge für die Arbeit mit überschaubaren Klimamodellen im Unterricht. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 55-60
- [Berge 1993] Berge, O. E.: Meßverfahren für Strahlungsenergie und -leistung. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1993, Bd. 4, Nr. 19, S. 22-29
- [Berge 2001] Berge, O. E.: Die thermische Nutzung der Solarenergie / Physikalische Grundlagen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 4-11
- [Berge 2001a] Berge, O. E.: Transparente Wärmedämmung / Eine neue Möglichkeit passiver Sonnenenergie-Nutzung. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 22-24
- [Berge 2001b] Berge, O. E.: Das Auswindkraftwerk. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 31-34
- [Berge 2003a] Berge, O. E.: Die photovoltaische Energieumwandlung / Eine Zukunftstechnologie als Thema des Physikunterrichts. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 4-5
- [Berge 2003b] Berge, O. E.: Energie von der Sonne / Photovoltaik als möglicher Ausweg aus der Energiekrise: Grundlagen und Fakten. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 14, Nr. 77, S. 6-9
- [Berge 2003c] Berge, O. E.: Solarzellen für den Unterricht / Experimentiersätze für Schüler - und Demonstrationsversuche. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 25-26
- [Berge 2003d] Berge, O. E.: Wie arbeitet eine Solarzelle? / Informationen und didaktische Kommentare zur Physik der photovoltaischen Energieumwandlung. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 10-15
- [Berge 2003e] Berge, Otto Ernst: Das Solar-Auto / Anregungen für problemorientierten Unterricht. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 28-38
- [Berge 2003f] Berge, O. E.: Der Wirkungsgrad eines Solargenerators. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 39-40
- [Berge 2005a] Berge, O. E.: Wind im Physikunterricht / Unterrichtliche Anknüpfungspunkte und Informationen zur elementaren Physik der Windenergie. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 4-7
- [Berge 2005b] Berge, O. E.; Radecke, Herrmann van: Physikalisch-technische Aspekte der Windenergie-Nutzung / Informationen zu mechanischen, elektrischen und energetischen Eigenschaften von Windenergieanlagen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 8-13
- [Berge 2005c] Berge, O. E.; Radecke, Herrmann van: Windenergie und Umwelt. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 14-15
- [Berge 2005d] Berge, O. E.: Windgeschwindigkeitsmesser selbst gebaut / Einfache Geräte zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 32-35
- [Berge 2005e] Berge, O. E.: Freihandversuche zum Treibhauseffekt / Vorschläge für einfache Modellversuche zu zentralen Aspekten des Treibhauseffektes. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 37-41
- [Berge 2005f] Berge, O. E.; Kramer, Angela; Radecke, Herrmann van: Nutzung der Windenergie: Fakten und Zahlen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 40-41

- [Berrisford 2011] Berrisford, P.; Källberg, P.; Kobayashi, S.; Dee, D.; Uppala, S.; Simmons, A. J.; Poli, P.; Sato, H.: Atmospheric conservation properties in ERA-Interim. In: Royal Meteorological Society, 2011, Vol. 137, pp. 1381-1399
- [Bethge 1992] Bethge, T.; Schecker, H.: Materialien zur Modellbildung und Simulation im Physikunterricht. Universität Bremen Institut für Didaktik der Physik, 1992, ISBN 388722258X
- [Blüthgen 1980] Blüthgen, J.; Weischet, Wolfgang: Allgemeine Klimageographie: Walter de Gruyter - Berlin - New York, 1980, Bd. 2, ISBN 3110065614
- [Boekehr 1997] Boekehr, E.; Grondelle, Rienk van: Physik und Umwelt. Vielweg, 1997, ISBN 3528067802
- [Bojic 2004] Bojic, M.: Education and training in renewable energy sources in Serbia and Montenegro. In: Renewable Energy, 2004, Vol. 29, pp. 1631-1642
- [Born 1984] Born, G.; Wickihalter, R.: Physikunterricht in Europa; Herausgeber von: Scharmann, A.; Schramm, H.: Physik / Theorie-Experiment-Geschichte-Didaktik. Aulis, 1984, S. 271-305, ISBN 3761406673
- [Brockmüller 2009] Brockmüller, S.: Kohlenstoffdioxid und Klimawandel / Vorschläge und Materialien für fächerübergreifenden Unterricht. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 42-54
- [Broman 1994] Broman, L.: On the didactics of renewable energy education - Drawing on twenty years experience. In: Renewable Energy, 1994, Vol. 5, pp. 1398-1405
- [Bruhn 1976] Bruhn, T.: Methodik des Physikunterrichts. Quelle und Meyer. Heidelberg, 1976, ISBN 349400174X
- [Chamberlain 1996] Chamberlain, J. W.: Theory of Planetary Atmospheres - An Introduction to Their Physics and Chemistry. Academic Press, 1996, ISBN 0121672506
- [Chlond 2004] Chlond, A.: Turbulenz und Grenzschicht. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 7, Nr. 53, S. 20-26
- [Colicchia 2010] Colicchia, G.; Waltner, Chr.; Wiesner, H.; Harrer, B.: Wenn Klimabedingungen gefährlich werden können. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2010, Bd. 2, Nr. 59, S. 16-25
- [Dahncke 1993] Dahncke, H.: Erschließung von Unterrichtsgegenständen durch Erfahrung in der allgemeinen Arbeitswelt / dargestellt am Beispiel der solaren Wasserstofftechnik. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1993, Bd. 4, Nr. 19, S. 30-36
- [Daly 2011] Daly, J.: Hawaii about to crack ocean thermal energy conversion roadblocks: URL: <http://oilprice.com/Alternative-Energy/Renewable-Energy/Hawaii-About-To-Crack-Ocean-Thermal-Energy-Conversion-Roadblocks.html> (Stand 2013)
- [Damm 2004] Damm, W.: Die Geometrie des Sonnenauf- und Sonnenuntergang. In: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht, 2004, Bd. 4, Nr. 41, S. 17-19
- [DeVries 1995] DeVries, P. L.: Computerphysik / Grundlagen-Methoden-Übungen. Spektrum, 1995, ISBN 3860253360
- [Döbele 2007] Döbele, M.; Spiegel, R.: Solarkollektoren als Unterrichtsthema in der Sekundarstufe I. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2007, Bd. 4, Nr. 56, S. 17-24
- [Dobos - 2006] Dobos: Albedo. In: Encyclopedia of Soil Science. Edited by: Lal, R., Ed. 2, Vol. 1, CRC Press, 2006, ISBN 0849350530
- [Dominguez 2014] Dominguez, P.N.; Zinth, W.: Solarenergie in der Photosynthese mit Ultrakurzzeitspektroskopie zu einem Verständnis der wichtigsten Energiewandlungsprozesse. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2014, Bd. 4, Nr. 63, S. 15-21
- [Duit 1996] Duit, R.: Umweltbildung / Ein wichtiges Thema für den Physikunterricht. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1996, Bd. 7, Nr. 33, S. 4-5
- [Duran 2014] Duran, D.; Martínez, I.; Weber, B.; Rincón, E.; Juárez, J.: Design of a mobile photovoltaic module system for demonstration and experimentation. In Energy Procedia, 2014, Vol. 57, pp. 32-38
- [Dutton 1991] Dutton, E. G.; Stone, R. S.; Nelson, D. W.; Mendonca, B. G.: Recent interannual variations in solar radiation, cloudiness, and surface temperature at the South Pole. In: Journal of Climate, Vol. 4, pp. 848-858
- [Eck 2011] Eck, M.: Solarthermische Kraftwerke. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2011, Bd. 1, Nr. 60, S. 11-24
- [Engel 2009] Engel, B.; Keuer, F.: Wechselrichter: Leistungselektronik für die saubere Energieversorgung. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2009, Bd. 5, Nr. 58, S. 19-23
- [Engeln 2005] Engeln, Katrin; Euler, Manfred: Physikunterricht modernisieren - Erfahrungen aus Kooperationsprojekten zwischen Schule und Wissenschaft. IPN Leibniz-Institut f. d. Pädagogik d. Naturwissenschaften an d. Universität Kiel (Verlag), 2005, ISBN 3890881599
- [Fasullo 2008] Fasullo, J.T.; Trenberth, K. E.: The Annual Cycle of the Energy Budget. Part I: Global Mean and Land-Ocean Exchanges. In: American Meteorological Society, 2008, Vol. 21, pp. 2297-2312
- [Fischer 2000] Fischer, J.; Schüller, L.; Preusker, R.: ATBD Cloud albedo and cloud optical thickness. In: Freie Universität Berlin, 2000, Doc. No: PO-TN-MEL-GS-0005.
- [Friege 2007] Friege, G.; Reinhold, P.; Suckut, J.: Was wollen wir über Wind und Wetter wissen? / Lernen in lebensnahen Kontexten. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2007, Bd. 18, Nr. 98, S. 30-35
- [Garg 1996] Garg, H.P.; Kandpal, T.C.: Renewable energy education: challenges and problems in developing countries. In: Renewable Energy, 1996, Vol. 9, No.1-4, pp. 11188-1193
- [Gates 1966] David M. Gates: Spectral distribution of solar radiation at the earth's surface. In: Science, 1966, Vol. 151, No. 3710, pp. 523-529

- [Gemini 2012] The Gemini Observatory: IR Sky Background. URL: <http://www.gemini.edu/sciops/telescopes-and-sites/observing-condition-constraints/ir-background-spectra>, (Stand 2013)
- [Goody 1995] Goody, R. M.; Yung, Y. L.: Atmosphere radiation theoretical basis. Oxford University Press, 1995, Ed. 2, ISBN 0195102916
- [Goubeau 1991] Goubeau, J.: Modellversuch zum Treibhauseffekt. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 1991, Bd. 7, Nr. 44, S. 417-421
- [Gould 1995] Gould, H.; Tobochnik, J.: An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical System. Addison Wesley, 1995, Ed. 2, ISBN 0201506041
- [Graßl 2004] Graßl, H.: Wetter und Klima. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 7, Nr. 53, S. 7-12
- [Gundlach 2000] Gundlach, J. H.; Merkwitz, S. M.: Measurement of Newton's Constant Using a Torsion Balance with Angular Acceleration Feedback. In: Physical Review Letters, 2000, Vol. 85, No. 14, pp. 2869-2872
- [Günther 2012] Günther, J.; Labudde, P.: Formen und Facetten des fächerübergreifenden Unterrichts. In: Unterricht Physik, 2012, Vol. 132, S. 4-8
- [Harreis 2000] Harreis, H.: Messwerterfassung und Simulation. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 2000, Bd. 6, Nr. 49, S. 1
- [Hauke 1991] Hauke, B.: Wie funktioniert ein Sonnenkollektor. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1991, Bd. 2, Nr. 9, S. 28-33
- [Hauke 2001] Hauke, B.; Meier, Enno: Solarkocher im Unterricht / Anregungen aus der Praxis einer Haupt- und Realschule. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 26-30
- [Heinzerling 2006] Heinzerling, M.: Wetter / Aufbau einer Unterrichtseinheit für den Physikunterricht (6. Klasse). In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2006, Bd. 17, Nr. 93, S. 14-17
- [Henning 1995] Henning, K.: Treibhauseffekt / Einige physikalische Grundüberlegungen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 2-8
- [Hepp 2001] Hepp, R.: Heizen mit der Sonne / Ein Vorschlag zur Behandlung des Themas Solarenergie in der Klassenstufe 7. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 16-21
- [Hepp 2001] Hepp, R.: Lernen an Stationen zum Thema Solar- und Windenergie. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 63/64, S. 48-49
- [Hepp 2005] Hepp, R.: Mehr als Physik / Fächerverbindender und projektorientierter Unterricht zum Thema Windenergie. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 22-24
- [Herlitz 1983] Herlitz, Peter: Windenergie und ihre Nutzung. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1983, Bd. 8, Nr. 32, S. 227-246
- [Heuer 1996] Heuer, D.: Konzepte für Systemsoftware zum Physikverstehen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1996, Bd. 4, Nr. 45, S. 2-11
- [Hilbert 2009] Hilbert, M.; Heier, S.: Vom Wind zum elektrischen Strom. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2009, Bd. 5, Nr. 58, S. 24-29
- [Hoppenau 1995a] Hoppenau, S.: Klimamodellierung und Klimaprognose. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 8-11
- [Hoppenau 1995b] Hoppenau, S.: Daten zum globalen Klima. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 11-14
- [Hoppenau 1995c] Hoppenau, S.: Energienutzung und atmosphärisches CO₂ / Ein Schulmodell. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 20-21
- [Höttecke 2009] Höttecke, D.; Maiseyenko, V.; Rethfeld, J.; Mrochen, M.: Den Treibhauseffekt verstehen / Ein Lernzirkel zur Erarbeitung des komplexen Phänomens „Treibhauseffekt“. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 24-36
- [Höttecke 2010] Höttecke, D.; Mrochen, M.: Bewerten Lernen im Treibhaus / Physikalisches Wissen beim Bewerten und Entscheiden nutzen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2010, Bd. 2, Nr. 59, S. 26-35
- [Houghton 2002] Houghton, J.: The Physics of Atmospheres: Cambridge University Press, 2002, Ed. 3, ISBN 0521011221
- [Hübel 2005] Hübel, H.: Schülerversuche mit PC und Mikroprozessor / Wege zum forschenden Lernen. Aulis, 2005, ISBN 3761426135
- [Huhn 1994] Huhn, B.: Experimente zum Treibhauseffekt. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1994, Bd. 6, Nr. 43, S. 26-32
- [Huhn 1997a] Huhn, B.; Koch, R.; Schmidt, V.; Schwarze, H.: Luft und Klima / im fächerverbindenden Unterricht. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1997, Bd. 7, Nr. 46, S. 21-28
- [Huhn 1997b] Sperlich, B.: Experimentieren zum strahlungshaushalt der Erde. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1997, Bd. 8, Nr. 42, S. 22-26
- [Hupfer 2006] Hupfer, P.; Kuttler, W.: Witterung und Klima Eine Einführung in die Meteorologie und Klimatologie. Teubner, 2006, Aufl. 12, ISBN 3835100963
- [IEA 2014] International Energy Agency (IEA): 2014 Key World Energy STATISTICS, URL: <http://www.iea.org/publications/freepublications/publication/KeyWorld2014.pdf> (Stand: 5/2015)
- [Iribarne 1980] Iribarne, J.V., Cho, H. -R: Atmospheric Physics. Springer, 1980, ISBN 9027710333
- [ISCCP 2014] International Satellite Cloud Climatology Project. URL: <http://isccp.giss.nasa.gov/climanall.html> (Stand 2014)

- [Jacoby 2011] Jacoby, W.; Schwarz, O.: Energie und ökonomisches Wachstum. In: Mitteilungen der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, 2011, Nr. 2, S. 18-27
- [Jacoby 2015] Jacoby, W.; Schwarz, O.: Die Grenzen der Erde, Über die Endlichkeit natürlicher Ressourcen. AtheneMedia, 2015, ISBN 9783869921181
- [Jacovides 2012] Jacovides, C.P.; Boland, J.; Rizou, D.; Kaltsounides, N.A.; Theoharatos, G.A.: School Students participation in monitoring solar radiation components: Preliminary results for UVB and UVA solar radiant fluxes. In: Renewable Energy, 2012. No. 39, pp. 367-374
- [Jennings 2009] Jennings, P.: New directions in renewable energy education. In: Renewable Energy, 2009, Vol. 34, pp. 435-439
- [Keil 2006] Keil, H.; Priem, O.; Uschner, S.: Schulsternwarte und Sonnenuhr / Ein neues schulastronomisches Zentrum in Sachsen. In: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht, 2006, Bd. 3, Nr. 43, S. 35-38
- [Kiehl 1997] Kiehl, J. T.; Trenberth, K. E.: Earth's Annual Global Mean Energy Budget. In: Bulletin of the American Meteorological Society, 1997, Vol. 78, No. 2, pp. 197-208
- [Kircher 2015] Kircher, E.; Girwidz, R.; Häußler, P.: Physikdidaktik Theorie und Praxis, Springer Spektrum, 2015, Aufl. 3, ISBN 9783642417443
- [Kleidon 2012] Kleidon, A.: Thermodynamik des Erdsystems / Was leistet die Erde? Physik in unserer Zeit, 2012, Bd. 3, Nr. 43, S. 136-144
- [Knoll 1971] Knoll, K.: Didaktik des Physikunterrichts / Theorie und Praxis des Physikunterrichts in Grund- und Hauptschule. Ehrenwirth Verlag München, 1971, ISBN 3431014437
- [Kostova 2004] Kostova, B. H.; Styczynski, Z. A.: Teaching Renewable Energy Using Multimedia. In: Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES, Vol.2, pp. 843 - 847
- [Kramer 2001] Kramer, A.: Solarenergienutzung im Trend / Großanlagen weltweit und im Deutschland: ein Überblick. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 35-38
- [Kraus 2004] Kraus, H.: Die Atmosphäre der Erde: eine Einführung in die Meteorologie. Springer, 2004, Aufl. 3, ISBN 3540206566
- [Kraus 2012] Kraus, S. F.; Tran, Ngoc Chat: Ein Demonstrationsversuch zum Tagbogen der Sonne. In: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht, 2012, Bd. 2, Nr. 49. S. 23 – 25
- [Krichenbauer 2010] Krichenbauer, C.; Wiesner, H.: Treibhauseffekt in der Wasserflasche. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2010, Bd. 2, Nr. 59, S. 40-41
- [Kuhn 1987] Kuhn, W.: Vorwort zum Thema: Simulations- und Realexperimente mit dem Computer. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1987, Bd. 5, Nr. 36, S. 1-2
- [Kuhn 2001] Kuhn, J.: Planspiel „Energieversorgung eines Freizeitparks mithilfe regenerativer Energiequellen“. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 63/34, S. 38-44
- [Kuhn 2006] Kuhn, J.: Energieversorgung mit Wasserstoff und Brennstoffzellen - ein projektorientierter Zugang zur nachhaltigen Energieverwendung. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2006, Bd. 8, Nr. 55, S. 20-28
- [Labudde 2003] Labudde, P.: Fächerübergreifender Unterricht in und mit Physik: Eine zu wenig genutzte Chance. In: Physik und Didaktik in Schule und Hochschule, 2003, Vol. 1/2, S. 48-66
- [Lacis 1973] Lacis, A. A.; Hansen, J. E.: A Parameterization for the Absorption of Solar Radiation in the Earth's Atmosphere. In: Journal of the Atmospheric Sciences, 1973, Vol. 31, pp. 118-133
- [Lacis 1974] Lacis, A. A.; Hansen, J. E.: A Parameterization for the absorption of solar radiation in the earth's atmosphere. In: Journal of the Atmospheric Sciences, 1974, Vol. 31, pp. 118-133
- [Lange 2004] Lange, H.-J.: Physikalische Grundlagen in der Meteorologie. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 7, Nr. 53, S. 2-7
- [Langensiepen 1990] Langensiepen, F.: Der Computer macht vieles leichter. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1990, Bd. 5, Nr. 39, S. 1
- [Linacre 1997] Linacre, E.; Geerts, B.: Climates and Weather Explained. Routledge, 1997, ISBN 0415125200
- [Lorenz 1967] Lorenz, E.N.: The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere. World Meteorological Organization, 1967
- [Lorenz 2003] Lorenz, R. D.; McKay, C. P.: A simple expression for vertical convective fluxes in planetary atmospheres. In: Icarus, Vol. 165, pp. 407-413
- [Lotze 2005a] Lotze, K.H.: Die Sonnenschein-Formel. Teil I: Die Herleitung der Sonnenscheinformel. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 2005, Bd. 4, Nr. 58, S. 223-227.
- [Lotze 2005b] Lotze, K.H.: Die Sonnenschein-Formel Teil II: Anwendungen der Sonnenscheinformel. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 2005, Bd. 6, Nr. 58, S. 344-350
- [MacKay 2009] MacKay, D. J.C.: Sustainable Energy - without the hot air. Cambridge, 2009, ISBN 9780954452933
- [Milankovitch 1930] Milankovitch, M. (1930). Mathematische klimalehre und astronomische theorie der Klimaschwankungen. In: Handbuch der Klimatologie, Bd. 1, Teil A. Gebrüder Bomtraeger, 1930.
- [Montégut 2004] Montégut, C. de B.; Madec, G.; Fischer, A. S.; Lazar, A.; Iudicone, D.: Mixed layer depth over the global ocean: An examination of profile data and a profile-based climatology. In: Journal of Geophysical Research, 2004, Vol. 109, pp. C12003: 1-20
- [Monteith 2013] Monteith, J. L.; Unsworth, M. H.: Principles of Environmental Physics - Plants, Animals, and the Atmosphere. Elsevier, 2013, Ed. 4, ISBN 9780123869104

- [Morgenstern 1996] Morgenstern, Klaus; Blume, Bernd: Klimaprojekt. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1996, Bd. 7, Nr. 33, S. 23-28
- [Morgenstern 2005] Morgenstern, K.: Erzeugung elektrischer Energie in Windenergieanlagen / Eine Unterrichtseinheit zum Energiebegriff für die Hauptschule. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 25-28
- [Muckenfuß 1997] Muckenfuß, H.: Experimentieren in der Wetterkunde. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1997, Bd. 8, Nr. 42, S. 13-21
- [Muckenfuß 2004a] Muckenfuß, H.: Zur Didaktik einer physikalischen Wetterkunde / Ein Beispiel für systematisches Lernen an einem Thema. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 7, Nr. 53, S. 26-30
- [Muckenfuß 2004b] Muckenfuß, H.: Experimente zur Wetterkunde / Eine Auswahl aus verschiedenen Teilgebieten. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 7, Nr. 53, S. 26-30
- [Müller 1996] Müller, W.: Die solare Strahlung / Durch Physik und Medizin neue Einsichten in unsere Umwelt gewinnen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1996, Bd. 7, Nr. 33, S. 29-34
- [Müller 2004] Müller, W.; Schwarz, O.; Vogt, P.; Walther, A.: Schülerexperimente zum Verstehen von Gesetzen der hydro- und Atmosphäre. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 6, Nr. 53, S. 29-35
- [Müller 2006] Müller, W.; Schulz, R.: Wohlstand, Wachstum. Energie - und Umwelt?. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2006, Bd. 8, Nr. 55, S. 1
- [Müller 2007a] Müller, W.: Die Erdwärme als eine nachhaltige Energiequelle für Deutschland. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2007, Bd. 4, Nr. 56, S. 5-11
- [Müller 2007b] Müller, W.; Nguyen, Van Bien; Gerstandt, K.; Peinemann, K.-V.: Osmosekraftwerk ein etwas anderes Wasserkraftwerk. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2007, Bd. 4, Nr. 56, S. 25-30
- [Müller 2009a] Müller, W.; Müller, A.; Kuhn, J.: Jetzt können wir nicht mehr warten! / Gründe und Ansätze für Unterricht zum Thema „Treibhauseffekt und Klimawandel. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 4-9
- [Müller, A. 2009] Müller, A.: Aufgaben zu Physik und Klima / Themen zwischen Physik und Umweltwissenschaften. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 71-75
- [Murphy 2009] Murphy, D. M.; Solomon, S.; Portmann, R. W.; Rosenlof, K. H.; Forster, P. M.; Wong, T.: An observationally based energy balance for the Earth since 1950. In: Journal of Geophysical Research, 2009, Vol. 114, pp. 1-14
- [NASA 2012] National Aeronautics and Space Administration: Solar System Exploration, URL: <http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm> (Stand 2012)
- [NASA 2013] National Aeronautics and Space Administration: Planetary Science, URL: <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/> (Stand 2013)
- [Nguyen 2006] Nguyen, Van Bien; Ohler, D.; Müller, W.: Solarteich - ein interessantes Naturphänomen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2006, Bd. 8, Nr. 55, S. 14-19
- [Niebert 2009] Niebert, K.: „Es wird wärmer, weil mehr Sonne auf die Erde scheint!“ / Wie Lernende sich die globale Erwärmung vorstellen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 20-23
- [Niehus 2003] Niehus, Chr.; Möllmann, K.-P.; Trull Th.; Vollmer, M.: Umweltanalytik / mit Atomabsorptions- und Fourier-Transform-Infrarot-Spektroskopie. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2003, Bd. 4, Nr. 52, S. 29-36
- [Nitsch 2011] Nitsch, J.: Die Weltweite Energieversorgung und ihre Zukunft. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2011, Bd. 1, Nr. 60, S. 4-10
- [NREL 2012] National Renewable Energy Laboratory: Reference Solar Spectral Irradiance: Air Mass 1.5. URL: <http://rredc.nrel.gov/solar/spectra/am1.5/> (Stand 2013)
- [O'Mara 2001] O'Mara, K.L.; Jennings, P.J.: Greenhouse education: Just Hot Air? In: Renewable Energy, 2001, Vol. 22, pp. 127-133
- [Oort 1994] Oort, A. H.; Anderson, L.A.; Peixoto, J. P.: Estimates of the energy cycle of the ocean. In: Journal of Geophysical Research, 1994, Vol. 99, No. C4, pp. 7665-7688
- [Othman 1999] Othman, M.Y.; Sopian, K.: Renewable energy education for ASEAN. In: Renewable Energy, 1999, Vol. 16, pp. 1225-1230
- [Peixóto 1984] Peixóto, J.P.: Physics of climate. In: Reviews of Modern Physics, 1984, Vol. 56, No. 3, pp. 365-430
- [Petit 2010] Petit, G.; Luzum, B.: IERS Conventions (2010). Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie / Frankfurt am Main 2010.
- [Petit 3.6.1999] Petit, J. R.; Jouzel, J.; Raynaud, D.; Barkov, N. I.; Barnola, J.-M.; Basile, I.; Bender, M.; Chappellaz, J.; Davisk, M.; Delaygue, G.; Delmotte, M.; Kotlyakov, V. M.; Legrand, M.; Lipenkov, V. Y.; Lorius, C.; Pe' pin, L.; Ritz, C.; Saltzman, E.; Stievenard, M.: Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica. In: Nature, Vol. 399, pp. 429-436, June 1999.
- [Pettit 1951] Pettit, E.: The sun and stellar radiation in astrophysics. Edited by: Hynek, J., New York, McGraw-Hill, 1951, 703pp
- [Pientka 2008] Pientka, H.: Physik - Technik -Technologie. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2008, Bd. 4, Nr. 57, S. 1
- [Pirrung 1987] Pirrung, J.; Jodl, H.-J.: Sonnenkollektoren - physikalische Grundlagen und Anwendungen im Physikunterricht. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1987, Bd. 3, Nr. 36, S. 19-26

- [Poore 1995] Poore, D. P.; Wang, J.; Rossow, W. B.: Cloud layer thicknesses from a combination of surface and upper-air observations. In: Journal of Climate, 1995, Vol. 8, pp. 550-568
- [Porter 2010] Porter, D. F.; Cassano, J. J.; Serreze, M. C.; Kindig, D. N.: New estimates of the large-scale Arctic atmospheric energy budget. In: Journal of Geophysical Research, 2010, Vol. 115, pp. 1-16
- [Priemer 2007] Priemer, S.; Kirchner, S.: Offenes Experimentieren mit Windräder / Konstruktion von Rotorblättern zur Spannungs-Leistungsoptimierung. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2007, Bd. 4, Nr. 56, S. 11-16
- [Quaschnig 2013] Quaschnig, V.: Regenerative Energiesysteme Technologie - Berechnung - Simulation. Hanser, 2013, ISBN 9783466435261
- [Raschke 2004] Raschke, E.: Der globale Wasserkreislauf - als lebensspendender Teil unseres Planeten. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2004, Bd. 7, Nr. 53, S. 13-19
- [Raturi 2010] Raturi, A.; Fepuleai, Y.: Photosynthesis in a test tube- dye sensitized solar cells as a teaching tool. In: Renewable Energy, 2010, Vol. 35, pp. 1010-1013
- [Reger 1990] Reger, R.; Freiberger, U.: Informatik-Themen im Grundkurs Physik (Informatik) / Handreichungen für den Physikunterricht. Bayerischer Schulbuch-Verlag - München, 1990, ISBN 376273960
- [Resnikow 1968] Resnikow, L. I.; Peryschkin, A. W.; Snamenski, P. A.: Grundlagen der Methodik des Physikunterrichts. Volkseigener Verlag Berlin, 1968, Aufl. 1, Lizenz-Nr. 203.1000/68.ES 10 C
- [Reusch 2000] Reusch, W.; Größwein, O.; Heuer, D.: Grafisch unterstütztes Modellieren und Messen. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 2000, Bd. 6, Nr. 49, S. 32-36
- [Ricchiuzzi 1998] Ricchiuzzi, Paul; Yang, S.; Gautier, C.; Sowle, D.: SBDART: A Research and Teaching Software Tool for Plane-Parallel Radiative Transfer in the Earth's Atmosphere. In: American Meteorological Society, 1998, Vol. 79, No. 10, pp. 2101-2114
- [Richter 2003] Richter, A.: Lecture Atmospheric Physics. In: University of Bremen / Master of Environmental Physics / WS 2003 - 2004
- [Rincke 2005] Rincke, K.: Experimente an einem selbst gebauten Windgenerator In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 29-31
- [Riordan 1986] Riordan, C. J.: Spectral solar irradiance models and data sets. In: Solar Cells, 1986, Vol. 18, pp. 223-232
- [Rode 2007] Rode, W.: Photovoltaik in der Schule. In: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht, 2007, Bd. 6, Nr. 44, S. 33-36
- [Roedel 2011] Roedel, W.; Wagner, T.: Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre. Springer. 2011, Aufl. 4, ISBN 9783642157288
- [Roth 1997] Roth, R.: Was sagt der Himmel über das Wetter? / Hinweise für die Erstellung eigener Wettervorhersagen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1997, Bd. 8, Nr. 42, S. 32-34
- [Salby 1996] Salby, M. L.: Fundamentals of Atmospheric Physics. Academic Press, 1996, ISBN 0126151601
- [Schlichting 1997] Schlichting, H. J.: Das Wetter / Seine physikalische Funktion im globalen Energiehaushalt. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1997, Bd. 8, Nr. 42, S. 9-12
- [Schmidt 1986] Schmidt, H.: Moderne Technologien im Physikunterricht: Experimente und Funktionsmodelle zu modernen Anwendungen der Physik. Aulis, 1986, ISBN 3761409168
- [Schmitz 1997] Schmitz, M.; Hufmann, M.: Wetter und Jahresrhythmik am Beispiel Winter. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 7, Nr. 46, S. 10-13
- [Schneider 1993] Schneider, G.: Computereinsatz im Unterricht. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1993, Bd. 3, Nr. 42, S. 2-36
- [Schoch 1986] Schoch, F.; Winiger, W.: Ein einfaches Präzessionsmodell auf Luft. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1986, Bd. 2, Nr. 35, S. 1-6
- [Schulze 1991] Schulze, I.: Modellversuch zum Treibhauseffekt. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 1991, Bd. 2, Nr. 44, S. 82-93
- [Schwarz 2006] Schwarz, O.: Die menschliche Zivilisation und das globale Energiegleichgewicht. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2006, Bd. 8, Nr. 55, S. 2-6
- [Schwarz 2008] Schwarz, O.: Habilitation: Ausgewählte kosmische und anthropogene Einflüsse auf die Energiebilanz der Erde in elementarisierter Darstellung. In: Fachbereich 7: Natur- und Umweltwissenschaften der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
- [Schwarz 2009] Schwarz, O.: Das Konzept des Strahlungsantriebes verstehen / Kosmische Strahlungsantriebe in elementarer Darstellung als Weg zum Verständnis anthropogener Strahlungsantriebe. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2009, Bd. 20, Nr. 111/112, S. 13-19
- [Seifert 2007] Seifert, S. M.; Rabe, T.: Physik Methodik / Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen, 2007, ISBN 9783589223770
- [Sellers 1982] Henderson-Sellers, A., Hughes, N. A.: Albedo and its importance in climate theory. 1982, DOI 10.1177/030913338200600101
- [Senior 2015] Senior, K.: When Will Fossil Fuels Run Out? In: CarbonCounted, URL: <http://www.carboncounted.co.uk/when-will-fossil-fuels-run-out.html> (Stand: 5/2015)
- [Shafiee 2009] Shafiee, S.; Topal, E.: When will fossil fuel reserves be diminished? In: Energy Policy, 2009, No. 37, pp. 181-189
- [Smestad 1998] Smestad, G. P.: Education and solar conversion: Demonstrating electron transfer. In: Solar Energy Materials and Solar Cells, 1998, Vol. 55, pp. 157-178

- [Sperlich 1987] Sperlich, G.: Der Beitrag der unerschöpflichen Energien im Jahr 2000. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 1987, Bd. 3, Nr. 36, S. 44-46
- [Spiegel 2008] Spiegel, R.: zur Beziehung zwischen Physik und Technik. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2008, Bd. 4, Nr. 57, S. 10-13
- [Stadler 1998] Stadler, H.: Die Bewegung der Erde / Ein Einführungsunterricht in die Mechanik. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 1998, Bd. 9, Nr. 46, S. 24-28
- [Stadler 2003] Stadler, H.; Wenig, S.: Solarmobile und Solarbox / Ein handlungsorientiertes Unterrichtsprojekt zum Thema Photovoltaik für Mädchen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 21-24
- [Stadler 2007] Stadler, H.: Globales Klima - ein Thema für den Physikunterricht. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2007, Bd. 4, Nr. 56, S. 42-44
- [Starke 2001] Starke, S.; Wilke, H.-J.: Selbst gebaute Messgeräte für die Solarstrahlung / Möglichkeiten zur projektorientierten Gestaltung des Themas „Regenerative Energien“ im Physikunterricht. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 61, S. 12-15
- [Stephens 2012] Stephens, G. L.; Li, J.; Wild, M.; Clayson, C. A.; Loeb, N.; Kato S.; Ecuyer, T. L'; Stackhouse, P. W.; Lebsock, M.; Andrews, T.: An update on Earth's energy balance in light of the latest global observations. In: Nature Geoscience, 2012, Vol. 5, pp. 691-696
- [Strnad 1984] Strnad, J.: Physik: Forschung, Geschichte, Didaktik; Herausgeber von: Scharmann, A.; Schramm, H.: Physik / Theorie-Experiment-Geschichte-Didaktik. Aulis, 1984, S.306-315, ISBN 3761406673
- [Timmerhaus, 1995] Timmerhaus, W.: Veranschaulichung des Treibhauseffektes / Ein historisches Experiment. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 1995, Bd. 6, Nr. 43, S. 38-40
- [Topfer 1970] Topfer, E.; Bruhn, J.: Methodik des Physikunterrichts. Quelle u. Meyer, 1976, Aufl. 5. ISBN 349400174x
- [Tran 2012a] Tran, Ngoc Chat; Kraus, S.F.: Eine Näherungsrechnung zu Sonnenscheindauer und Sonnenenergie. In: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht, 2012, Bd. 2, Nr. 49. S. 18 – 22
- [Tran 2012b] Tran, Ngoc Chat; Kraus, S.F: Einflussfaktoren auf die nutzbare Energieeinstrahlung auf Solarzellen experimentell überprüfen / Ein Schülerprojekt. In: PhyDid B, ISSN 2191-379X
- [Tran 2015] Tran, Ngoc Chat; Weber, A.: Berechnung und Messung der Sonnenscheindauer auf beliebigen Dachschrägen. In: PhyDid B, ISSN 2191-379X
- [Treitz 2000] Treitz, N.: Kann die Simulation etwas, was das Experiment nicht kann? In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik, 2000, Bd. 6, Nr. 49, S. 2-4
- [Trenberth 2004] Trenberth, K. E.; Stepaniak, D. P.: The flow of energy through the earth's climate system. In: Royal Meteorological Society, 2004, Vol.130, No. 603, pp. 2677-2701
- [Trenberth 2009] Trenberth, K. E.; Fasullo, J.T.; Kiehl, J. T.: Earth's Global Energy Budget. In: American Meteorological Society, March 2009, pp. 311-324
- [Volkmer 2003a] Volkmer, M.: Photovoltaik - Lehrplan - themen zugeordnet. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 77, S. 16-20
- [Volkmer 2003b] Volkmer, M.: Photovoltaik-Anlage als additive Energiequelle. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2003, Bd. 14, Nr. 78, S. 42-43
- [Vollmer 2006] Vollmer, M.: Farben der Sonne - die Rolle der optischen Dicke der Atmosphäre. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule, 2006, Bd. 3, Nr. 55, S. 24-28
- [Wallace 1997] Wallace, J. M.; Hobbs, P. V.: Atmospheric Science: An Introductory Survey. Elsevier, 1997, ISBN 0127329501
- [Wang 2000] Wang, J.; Rossow, J. B.; Zhang, Y.: Cloud vertical structure and its variations from a 20-yr global rawinsonde dataset, In: Journal of Climate, 2000 Vol. 13, pp. 3041-3056
- [WB 2011] The World Bank: Energy imports, net (% of energy use). URL: <http://data.worldbank.org/indicator/EG.IMP.CON.S.ZS/countries/VN?display=graph> (Stand: 5/2015)
- [Weigert 1989] Weigert, A.; Wendker, H. J.: Astronomie und Astrophysik / ein Grundkurs. VCH, 1989, Aufl. 2, ISBN 3527269169
- [Wellington 1996] Wellington, R. P.: Model solar vehicles provide motivation for school students. In: Solar Energy, Vol. 58, No. 1-3, pp.
- [Wilke 2005] Wilke, H.-J.: Windräder aus Kunststoffflaschen und Blechdosen / Selbstbau einfacher Windturbinen. In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2005, Bd. 16, Nr. 88, S. 36-39
- [Willer 2003] Willer, J.: Didaktik des Physikunterrichts. Harri Deutsch, 2003, Aufl. 1, ISBN 3817116934
- [Wünsch 2001] Wünsch, S.: Verantwortungsvoll handeln - Solarenergie nutzen! In: Naturwissenschaft im Unterricht Physik, 2001, Bd. 12, Nr. 63/64, S. 45-47

Anhang

[A 1.1.1]:
 [A 1.1.2]:
 [A 1.1.3]:
 [A 1.1.4]:
 [A 1.1.5]:
 [A 1.1.6]:
 [A 1.1.7]:
 [A 1.1.8]:
 [A 1.1.9a]:

- (CD/DVD):\Anhang\1\1.1
 - <https://drive.google.com/folderview?id=0BzD7CfLDRkKmfFYSEJNRktJWIJ1M2pmd3c5OVN5eTFDczY3NGFzU3puZVNCTWwzTjJyTDA&usp=s>
- haring

```

Program Sonnenscheidauer7_1;
Uses crt;
Var pi,t,alpha,beta,phi,epsilon,delta,gamma,theta:Real;
    d,m,stunde,minute: integer;
    j:String;
Function Arccos(a:Real):Real;
Var    i,j,N: LongInt;
        b,c:Real;
Begin
    N:=1000000;
    i:=0;j:=N;b:=1;c:=1;
While b>1/1000 Do
    Begin
        b:=abs(a-cos(i*pi/N));
        i:=i+1;
    End;
While c>1/1000 Do
    Begin
        c:=Abs(a-cos(j*pi/N));
        j:=j-1;
    End;
Arccos:=(i+j)*pi/(2*N);
End;
Function tan(a:Real):Real;
Begin
    tan:=sin(a)/cos(a);
End;
Function tag(datum,monat:integer):integer;
Begin    If (monat=12) and (datum>=22) Then tag:=datum-22;
        If monat=1 Then tag:=datum+9;
        If monat=2 Then tag:=datum+40;
        If monat=3 Then tag:=datum+68;
        If monat=4 Then tag:=datum+99;
        If monat=5 Then tag:=datum+129;
        If monat=6 Then tag:=datum+160;
        If monat=7 Then tag:=datum+190;
        If monat=8 Then tag:=datum+221;
        If monat=9 Then tag:=datum+252;
        If monat=10 Then tag:=datum+282;
        If monat=11 Then tag:=datum+313;
        If (monat=12) and (datum<22) Then tag:=datum+343;
End;
Begin
    Clrscr;
    Writeln('-----
');
    Writeln('Dieses Programm wird die Anzahl der Sonnenstunden an
einem beliebigen Tag auf einem beliebigen Breitengrad berechnen. ');
    Writeln('Der Tag, der Monat und der Breitengrad müssen eingegeben
werden. Die Ausgabe des Programms gibt die entsprchenden Sonnenstunden
an. ');
    Writeln('-----
');

```

```

        readln;
        clrscr;
        pi:=4*arctan(1);
        epsilon:=23.5*pi/180;
While j<>'n' Do
    Begin
        Write('Geben Sie den Tag ein (1..31) :'); Readln(d);
        Write('Geben Sie den Monat ein (1..12) :'); Readln(m);
        Write('Geben Sie den gewünschten Breitengrad Phi (Grad) ein:');
Readln(phi);
        phi:=phi*pi/180;
        writeln;
        Writeln('Die Summe der Tage ab dem 22.12. ist:', tag(d,m),'
Tage');
        delta:=tag(d,m)*2*pi/365;
        alpha:=arccos(sin(epsilon)*cos(delta));
        If (phi<-alpha) or (phi<-(pi-alpha)) Then t:=0
        Else If (phi>(pi-alpha)) Then t:=24
        Else t:=(24/pi)*(arccos(tan(phi)/tan(alpha)));
        Writeln;
        alpha:=alpha*180/pi;
        Writeln('Der Winkel Alpha (Grad) zwischen den Sonnenstrahlen und
der
Erdachse
ist:',round(int(alpha)),',',round(int(10*frac(alpha))),round(int(10*frac(1
0*frac(alpha)))));
        stunde:=round(Int(t));
        minute:=round(60*Frac(t));
        Writeln;
        Writeln('Sonnenscheindauer =', stunde,' Stunde(n) und ',minute,'
Minute(n)');
        Readln;
        Write('Möchten Sie eine neue Berechnung vornehmen? (j oder n):');
Readln(j);
        End;
End.

```

[A 1.1.9 b]: (CD/DVD):\Anhang\1\1.1\A 1.1.9 b.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmWfVxZzhmT20tLTg/view?usp=sharing>

```

[A 1.1.10 a]:
Program Sonnenscheidauer7_2;
Uses crt;
Var pi,t,Summe_t,alpha,phi,epsilon,delta:Real;
    i,stunde,minute: integer;
    j:String;
Function Arccos(a:Real):Real;
Var    i,j,N: LongInt;
        b,c:Real;
Begin
    N:=500000;
    i:=0;j:=N;b:=1;c:=1;
While b>1/1000 Do
    Begin
        b:=abs(a-cos(i*pi/N));
        i:=i+1;
    End;
While c>1/1000 Do
    Begin
        c:=Abs(a-cos(j*pi/N));
        j:=j-1;
    End;
Arccos:=(i+j)*pi/(2*N);
End;
Function tan(a:Real):Real;

```

```

Begin
  tan:=sin(a)/cos(a);
End;
Begin
  clrscr;
  Writeln('-----
');
  Writeln('Dieses Programm wird die gesamte Sonnenscheindauer in
einem Jahr auf einem beliebigen Breitengrad berechnen. ');
  Writeln('Der Breitengrad muss eingegeben werden. Die Ausgabe des
Programms zeigt die Summe der Sonnenstunden in einem Jahr. ');
  Writeln('-----
');
  readln;
  Clrscr;
  pi:=4*arctan(1);
  epsilon:=23.5*pi/180;
While j<>'n' Do
  Begin
    Summe_t:=0;
    Write('Geben Sie den gewünschten Breitengrad Phi (Grad) ein:');
Readln(phi);
    phi:=phi*pi/180;
    For i:=1 to 365 Do
      Begin
        if (i mod 25) =2 then clrscr;
        delta:=i*2*pi/365;
alpha:=arccos(sin(epsilon)*cos(delta));
        If (phi>alpha) or (phi<-(pi-alpha)) Then t:=0
        Else If (phi<-alpha) or (phi>(pi-alpha)) Then t:=24
        Else t:=(24/pi)*(arccos(tan(phi)/tan(alpha)));
        Summe_t:=Summe_t+t;
        stunde:=round(Int(Summe_t));
        minute:=round(60*Frac(Summe_t));
        Writeln('Die Summe der Sonnenstunden von ',i,' Tagen ab dem 22.12.
ist: ', stunde,' Stunden');
      End;
      Writeln;
      phi:=phi*180/pi;
      t:=abs(phi);
      Writeln('Die Summe der Sonnenstunden eines Jahres am Breitengrad:
',round(Int(phi)),',',round(int(10*Frac(t))),round(int(10*frac(10*Frac(t)
)),round(int(10*frac(10*frac(10*Frac(t))))));
      Writeln('ist: ', stunde,' Stunden und ',minute,' Minute(n)');
      Readln;
      Write('M chten Sie eine neue Berechnung vornehmen? (j oder n):');
Readln(j);
    End;
  End.

```

[A 1.1.10 b]: (CD/DVD):\Anhang\1\1.1\A 1.1.10 b.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmVlhGdTzFz2RjdFU/view?usp=sharing>

[A 1.1.11 a]:
Program Sonnenenergie9_1;
Uses crt;
Var A,E,K,pi,t,alpha,phi,epsilon,delta,gamma:Real;
d,m,stunde,minute: integer;
j:String;
Function Arccos(x:Real):Real;
Var i,j,N: LongInt;
b,c:Real;
Begin
N:=1000000;

```

    i:=0;j:=N;b:=1;c:=1;
While b>1/1000 Do
    Begin
        b:=abs(x-cos(i*pi/N));
        i:=i+1;
    End;
While c>1/1000 Do
    Begin
        c:=Abs(x-cos(j*pi/N));
        j:=j-1;
    End;
Arccos:=(i+j)*pi/(2*N);
End;
Function tan(x:Real):Real;
Begin
    tan:=sin(x)/cos(x);
End;
Function tag(datum,monat:integer):integer;
Begin
    If (monat=12) and (datum>=22) Then tag:=datum-22;
    If monat=1 Then tag:=datum+9;
    If monat=2 Then tag:=datum+40;
    If monat=3 Then tag:=datum+68;
    If monat=4 Then tag:=datum+99;
    If monat=5 Then tag:=datum+129;
    If monat=6 Then tag:=datum+160;
    If monat=7 Then tag:=datum+190;
    If monat=8 Then tag:=datum+221;
    If monat=9 Then tag:=datum+252;
    If monat=10 Then tag:=datum+282;
    If monat=11 Then tag:=datum+313;
    If (monat=12) and (datum<22) Then tag:=datum+343;
End;
Begin
    Clrscr;
    Writeln('-----
');
    Writeln('Dieses Programm wird die Sonnenstunden und die
eingestrahelte Sonnenenergie an einem beliebigen Tag auf einem beliebigen
Breitengrad berechnen. ');
    Writeln('Der Tag, der Monat, der Breitengrad, die Fläche und der
Albedofaktor müssen eingegeben werden. Die Ausgabe des Programms zeigt die
entsprechenden Sonnenstunden und die entsprechende eingestrahelte
Sonnenenergie. ');
    Writeln('-----
');
    readln;
    Clrscr;
    pi:=4*arctan(1);
    epsilon:=23.5*pi/180;
While j<>'n' Do
    Begin
        Write('Geben Sie den Tag ein (1..31) :'); Readln(d);
        Write('Geben Sie den Monat ein (1..12) :'); Readln(m);
        Writeln('Die Summe der Tage ab dem 22.12. ist:', tag(d,m), '
Tage');
        delta:=tag(d,m)*2*pi/365;
        alpha:=arccos(sin(epsilon)*cos(delta));
        Writeln;
        t:=alpha*180/pi;
        Writeln('Der Winkel Alpha (Grad) zwischen den Sonnenstrahlen und
der Erdachse
ist:', round(int(t)), ', ', round(int(10*frac(t))), round(int(10*frac(10*frac(t)
)))));
        Writeln;

```

```

        Write('Geben Sie den gewünschten Breitengrad Phi (Grad) ein:');
Readln(phi);
        phi:=phi*pi/180;
        Write('Geben Sie die betrachtete Fläche A (Quadratmeter) ein:');
Readln(A);
        Write('Geben Sie den Albedofaktor K (0..1) ein:'); Readln(K);
        If (phi>alpha) or (phi<-(pi-alpha)) Then t:=0
        Else If (phi<-alpha) or (phi>(pi-alpha)) Then t:=24
            Else t:=(24/pi)*(arccos(tan(phi)/tan(alpha)));
        gamma:=t*pi/24;
        stunde:=round(Int(t));
        minute:=round(60*Frac(t));
        Writeln;
        Writeln('Sonnenscheindauer =', stunde,' Stunde(n) und ',minute,'
Minute(n)');
        E:=(1-K)*(1.366*24*A/pi)*(sin(alpha)*cos(phi)*sin(gamma/2)-
(gamma/2)*cos(alpha)*sin(phi));
        Writeln;
        Writeln('Die eingestrahlte Sonnenenergie am Tag ',d','.','m','. ist:
',
round(Int(E)),',',round(int(10*Frac(E))),round(int(10*frac(10*Frac(E)))) ,r
ound(int(10*frac(10*frac(10*Frac(E))))), ' (kWh)');
        Readln;
        Write('Möchten Sie eine neue Berechnung vornehmen? (j oder n):');
Readln(j);
        End;
End.

```

[A 1.1.11 b]: (CD/DVD):\Anhang\1\1.1\A 1.1.11 b.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmbkhKdF1DLTc1UUk/view?usp=sharing>

[A 1.1.12 a]:

```

Program Sonnenenergie9_2;
Uses crt;
Var Summe_E,A,E,K,pi,t,alpha,phi,epsilon,delta,gamma:Real;
    i: integer;
    j:String;
Function Arccos(x:Real):Real;
Var    i,j,N: LongInt;
        b,c:Real;
Begin
    N:=500000;
    i:=0;j:=N;b:=1;c:=1;
While b>1/1000 Do
    Begin
        b:=abs(x-cos(i*pi/N));
        i:=i+1;
    End;
While c>1/1000 Do
    Begin
        c:=Abs(x-cos(j*pi/N));
        j:=j-1;
    End;
Arccos:=(i+j)*pi/(2*N);
End;
Function tan(x:Real):Real;
Begin
    tan:=sin(x)/cos(x);
End;
Begin
    Clrscr;
    Writeln('-----
');

```

```

        Writeln('Dieses Programm wird die Summe der eingestrahnten
Sonnenenergie innerhalb eines Jahres für einen beliebigen Breitengrad
berechnen.');
```

Writeln('Der Breitengrad, die Fläche und der Albedofaktor müssen
eingegeben werden. Die Ausgabe des Programms zeigt die gesamte
eingestrahnte Sonnenenergie in einem Jahr.');

```

        Writeln('-----
');
        readln;
        clrscr;
        pi:=4*arctan(1);
        epsilon:=23.5*pi/180;
While j<>'n' Do
  Begin
    Summe_E:=0;
    Write('Geben Sie den betrachteten Breitengrad Phi (Grad) ein:');
  Readln(phi);
    phi:=phi*pi/180;
    Write('Geben Sie die betrachtete Fläche A (Quadratmeter) ein:');
  Readln(A);
    Write('Geben Sie den Albedofaktor K (0..1) ein:'); Readln(K);
    clrscr;
    For i:=1 to 365 Do
      Begin
        if (i mod 25) =5 then clrscr;
        delta:=i*2*pi/365;
        alpha:=arccos(sin(epsilon)*cos(delta));
        If (phi>alpha) or (phi<-(pi-alpha)) Then t:=0
        Else If (phi<-alpha) or (phi>(pi-alpha)) Then t:=24
            Else t:=(24/pi)*(arccos(tan(phi)/tan(alpha)));
        gamma:=t*pi/24;
        E:=(1-K)*(1.366*24*A/pi)*(sin(alpha)*cos(phi)*sin(gamma/2)-
(gamma/2)*cos(alpha)*sin(phi));
        Summe_E:=Summe_E+E;
        Writeln('Die Summe der Sonnenenergie von ',i,' Tagen ab dem 22.12.
ist: ', round(Summe_E),' (kWh)');
      End;
      Writeln;
      phi:=phi*180/pi;
      E:=abs(phi);
      Writeln('Die Summe der eingestrahnten Sonnenenergie am Breitengrad
',round(Int(phi)),' ',round(int(10*frac(E))),round(int(10*frac(10*frac(E)
)),round(int(10*frac(10*frac(10*frac(E))))));
      Writeln('für die Fläche A:
',round(Int(A)),' ',round(int(10*frac(A))),round(int(10*frac(10*frac(A)
)),round(int(10*frac(10*frac(10*frac(A))))),' Quadratmeter');
      writeln('mit dem Albedofaktor K:
0,',round(int(10*frac(K))),round(int(10*frac(10*frac(K))),round(int(10*fr
ac(10*frac(10*frac(K))))));
      Writeln('ist:
',round(int(Summe_E)),' ',round(int(10*frac(Summe_E))),round(int(10*frac(10*
frac(Summe_E))),round(int(10*frac(10*frac(10*frac(Summe_E))))),' (kWh)');
      Readln;
      Write('Möchten Sie eine neue Berechnung vornehmen? (j oder n):');
    Readln(j);
  End;
End.
```

[A 1.1.12 b]: (CD/DVD):\Anhang\1\1.1\A 1.1.12 b.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmQWxxWTRrV3RwX3M/view?usp=sharing>

[A 1.1.13]: Name: studentag10.m

```
function st10 = studentag10(phi10,n10)
```

```

Jahr10=365;
Tag10=24;
epsilon10=23.4392794;
epsilon10=pi*epsilon10/180;
phi10=pi*phi10/180;
delta10=n10*2*pi/Jahr10;
alpha10=acos(sin(epsilon10)*cos(delta10));
if (phi10>alpha10)|(phi10<-(pi-alpha10))
    st10=0;
elseif (phi10<-alpha10)|(phi10>(pi-alpha10))
    st10=Tag10;
else
    st10=(Tag10/(2*pi))*2*acos(tan(phi10)/tan(alpha10));
end
end

```

[A 1.1.14] Name: sumstudentag10.m

```

function sum = sumstudentag10(phi)
Jahr=365;

sum=0;
for i=1:Jahr;
    sum=sum+studentag10(phi,i);
end
end

```

[A 1.1.15] Name: energietag10.m

```

function e10 = energietag10(phi10,n10)
Jahr10=365;
Tag10=24;
epsilon10=23.4392794;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
p10=L/(4*pi*(a^2));

epsilon10=pi*epsilon10/180;
phi10=pi*phi10/180;
delta10=n10*2*pi/Jahr10;
alpha10=acos(sin(epsilon10)*cos(delta10));
if (phi10>alpha10)|(phi10<-(pi-alpha10))
    beta10=0;
elseif (phi10<-alpha10)|(phi10>(pi-alpha10))
    beta10=pi;
else
    beta10=acos(tan(phi10)/tan(alpha10));
end

e10=(p10*Tag10/(1000*pi))*(sin(alpha10)*cos(phi10)*sin(beta10)-
beta10*cos(alpha10)*sin(phi10));
end

```

[A 1.1.16] Name: sumenergie10.m

```

function sum = sumenergie10(phi)
Jahr=365;
sum=0;
for i=1:Jahr;
    sum=sum+energietag10(phi,i);
end

```

end

```
[A 1.2.1]:
[A 1.2.2]:
[A 1.2.3]:
[A 1.2.4]: - (CD/DVD):\Anhang\1\1.2
[A 1.2.5]: - https://drive.google.com/folderview?id=0BzD7CfLDRkKmfmlFSHUxVED6
[A 1.2.6]: bHpoSUV5SkRweUV1S3lIX0Z6aEdxLTRrR2U4LURtaVhXanM&usp=shar
[A 1.2.7]: ing
[A 1.2.8]:
[A 1.2.9]:
[A 1.2.10]:
[A 1.2.11]:
[A 1.2.12]: Name: S_phi_tag_3d_v1.m
```

```
N2_7=366;
M2_7=361;
Jahr=365;
Tag=24;
for i2_7=1:N2_7;
    n2_7(i2_7)=round((i2_7-1)*(Jahr/(N2_7-1)));

    for j2_7=1:M2_7;
        phi2_7(j2_7)=-90+(j2_7-1)*180/(M2_7-1);
        Stunde2_7(i2_7,j2_7)=stundentag10(phi2_7(j2_7),n2_7(i2_7));
    end
    Berechnung_Prozent=i2_7*100/N2_7
end;
surf(phi2_7,n2_7,Stunde2_7)
title('Verteilung der Sonnenstunden auf Breitengrad und Dadtum');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Datum');
zlabel('Sonnenstunden');
grid on
```

```
[A 1.2.13]: Name: E_phi_tag_3d_v1.m
```

```
N2_8=366;%
M2_8=361;%
A2_8=0;% Albedo der Erde
Jahr=365;
Tag=24;
for i2_8=1:N2_8;
    n2_8(i2_8)=round((i2_8-1)*(Jahr/(N2_8-1)));

    for j2_8=1:M2_8;
        phi2_8(j2_8)=-90+(j2_8-1)*180/(M2_8-1);
        Energie2_8(i2_8,j2_8)=(1-
A2_8)*energietag10(phi2_8(j2_8),n2_8(i2_8));
    end
    Berechnung_Prozent=i2_8*100/N2_8
end;
surf(phi2_8,n2_8,Energie2_8)
title('Verteilung der Sonnenenergie auf Breitengrad und Dadtum');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Datum');
zlabel('Tägliche Sonnenenergie (kwh)');
grid on
```

[A 1.3.1]:
 [A 1.3.2]:
 [A 1.3.3]: - (CD/DVD):\Anhang\1\1.3
 [A 1.3.4]: - <https://drive.google.com/folderview?id=0BzD7CfLDRkKmfjJRU2EzZ1FGZEwzTURCdFIVRndmVjdONm1XM09XaGRfa3IHNNsDhpwakk&usp=sharing>
 [A 1.3.5]:
 [A 1.3.6]:
 [A 1.3.7]:
 [A 1.3.8]:
 [A 1.3.9]:
 [A 1.3.10]: Name: SD_Dach.m

```
function sum = SD_Dach(ntag,phi,alphaV,alphaH)
phi=phi*pi/180;
alphaV=alphaV*pi/180;
alphaH=alphaH*pi/180;
Tag=24;
Jahr=365;
t1=round(Tag*3600);% so giay trong mot ngay
epsilon=23.5;
epsilon=pi*epsilon/180;
S=0;
Ssum=0;
m=30;
delta=ntag*2*pi/Jahr;
alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
a=sin(alpha)*(sin(phi)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+cos(phi)*cos(alphaH));
b=sin(alpha)*sin(alphaH)*sin(alphaV);
c=cos(alpha)*(cos(phi)*(-1)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+sin(phi)*cos(alphaH));
for j=0:m:t1;
    beta=-pi+2*pi*j/t1;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);% cos
cua goc anh sang mat troi va mat dat
    costetaD=a*cos(beta)+b*sin(beta)-c;

    if (costeta>0)&(costetaD>0)
        S=m;
    else
        S=0;
    end
    Ssum=Ssum+S;
end
sum=Ssum/3600;% doi ra don vi gio
end
```

[A 1.3.11] Name: SD_aV_aH.m

```
phi=51;
ntag5=235,
N=360+1;
M=180+1;
for i=1:N;
    alphaV(i)=-180+(i-1)*360/(N-1);;
    for j=1:M;
        alphaH(j)=-90+(j-1)*180/(M-1);

        Ssum(i,j)=SD_Dach(ntag5,phi,alphaV(i),alphaH(j));
    end
    Berechnung_Prozent=i*100/N
end;
surf(alphaH,alphaV,Ssum)
title('Verlauf der Sonnenstunden');
```

```

xlabel('alphaH');
ylabel('alphaV');
zlabel('Sonnenstunden');
grid on

```

[A 1.3.12] Name: E_Dach.m

```

function sum = E_Dach(ntag,phi,alphaV,alphaH)
phi=phi*pi/180;
alphaV=alphaV*pi/180;
alphaH=alphaH*pi/180;
Tag=24;
Jahr=365;
t1=round(Tag*3600);
epsilon=23.4392794;

epsilon=pi*epsilon/180;
S=0;
Ssum=0;
m=30;
delta=ntag*2*pi/Jahr;
alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
a=sin(alpha)*(sin(phi)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+cos(phi)*cos(alphaH));
b=sin(alpha)*sin(alphaH)*sin(alphaV);
c=cos(alpha)*(cos(phi)*(-1)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+sin(phi)*cos(alphaH));
for j=0:m:t1;
    beta=-pi+2*pi*j/t1;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);

    costetaD=a*cos(beta)+b*sin(beta)-c;

    if (costeta>0)&(costetaD>0)
        S=m*costetaD;
    else
        S=0;
    end
    Ssum=Ssum+S;
end
sum=Ssum/3600;
end

```

[A 1.3.13] Name: ED_aV_aH.m

```

clear all
phi=51;
ntag5=235,

N=360+1;
M=180+1;
for i=1:N;
    alphaV(i)=-180+(i-1)*360/(N-1);;
    for j=1:M;
        alphaH(j)=-90+(j-1)*180/(M-1);

        Ssum(i,j)=E_Dach(ntag5,phi,alphaV(i),alphaH(j));
    end
    Berechnung_Prozent=i*100/N
end;
surf(alphaH,alphaV,Ssum)
title('Verlauf der Sonnenenergie');

```

```

xlabel('alphaH');
ylabel('alphaV');
zlabel('Energie x Eo');
grid on

```

[A 1.3.14] Name: sonnendachv1.m

```

function sumS = sonnendachv1(phi,alphaV,alphaH)
phi=phi*pi/180;
alphaV=alphaV*pi/180;
alphaH=alphaH*pi/180;
Jahr=365;
Tag=24;
t1=round(Tag*3600);
epsilon=23.5;
epsilon=pi*epsilon/180;
S=0;
Ssum=0;
m=60;
for i=1:Jahr;
    delta=i*2*pi/Jahr;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));

a=sin(alpha)*(sin(phi)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+cos(phi)*cos(alphaH));
b=sin(alpha)*sin(alphaH)*sin(alphaV);
c=cos(alpha)*(cos(phi)*(-
1)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+sin(phi)*cos(alphaH));
Si=0;
for j=0:m:t1;
    beta=-pi+2*pi*j/t1;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    costetaD=a*cos(beta)+b*sin(beta)-c;
    if (costeta>0)&(costetaD>0)
        S=m;
    else
        S=0;
    end
    Si=Si+S;
end
Ssum=Ssum+Si;
end
sumS=Ssum/3600;
end

```

[A 1.3.15] Name: rechnenv1stunde.m

```

phi=51;%Nhap vi do can khao sat
N33=31;%so diem can ve (so le vi them diem 0)
for i33=1:N33;
    alphaH33(i33)=-180+(i33-1)*360/(N33-1);
    for j33=1:N33;
        alphaV33(j33)=-180+(j33-1)*360/(N33-1);
        Ssum33(i33,j33)=sonnendachv1(phi,alphaV33(j33),alphaH33(i33));
    end
    Berechnung_Prozent=i33*100/N33
end;
surf(alphaV33,alphaH33,Ssum33)
title('Verlauf von jährlichen Summe der Sonnenstunden');

```

```

xlabel('alphaV');
ylabel('alphaH');
zlabel('Sonnenstunden');
grid on

```

[A 1.3.16] Name: energiev1.m

```

function sumE = energiev1(phi,alphaV,alphaH)
phi=phi*pi/180;
alphaV=alphaV*pi/180;
alphaH=alphaH*pi/180;
Jahr=365;
Tag=24;
t1=round(Tag*3600);
epsilon=23.5;
P=1366; %
k=0; %
A=1; %
epsilon=pi*epsilon/180;
E=0;
Esum=0;
m=60;
for i=1:Jahr;
    delta=i*2*pi/Jahr;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));

a=sin(alpha)*(sin(phi)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+cos(phi)*cos(alphaH));
b=sin(alpha)*sin(alphaH)*sin(alphaV);
c=cos(alpha)*(cos(phi)*(-
1)*sin(alphaH)*cos(alphaV)+sin(phi)*cos(alphaH));
Ei=0;
for j=0:m:t1;
    beta=-pi+2*pi*j/t1;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    costetaD=a*cos(beta)+b*sin(beta)-c;
    if (costeta>0)&(costetaD>0)
        E=m*P*costetaD;
    else
        E=0;
    end
    Ei=Ei+E;
end
Esum=Esum+Ei;
end
sumE=Esum*A*(1-k)/(3.6*1000000);
end

```

[A 1.3.17] Name: rechnenv1.m

```

phiD=51;
N=31;
for i3=1:N;
    alphaHD(i3)=-180+(i3-1)*360/(N-1);
    for j3=1:N;
        alphaVD(j3)=-180+(j3-1)*360/(N-1);
        ED(i3,j3)=energiev1(phiD,alphaVD(j3),alphaHD(i3));
    end
end

```

```

        Berechnung_Prozent=i3*100/N
    end;
    surf(alphaVD,alphaHD,ED)
    title('Verlauf von jährlichen Summe der eingestrahltten Sonnenenergie');
    xlabel('alphaV');
    ylabel('alphaH');
    zlabel('Sonnenenergie');
    grid on

```

[A 1.3.18] Name: rechnenv3sonne.m

```

N35=61;
M35=91;
for i35=1:M35;
    alphaH35(i35)=-180+(i35-1)*360/(M35-1);
    for j35=1:N35;
        Breiten35(j35)=-90+(j35-1)*180/(N35-1);
        Ssum35(i35,j35)=sonnendachv1(Breiten35(j35),0,alphaH35(i35));
    end
    Berechnung_Prozent=i35*100/M35
end;
surf(Breiten35,alphaH35,Ssum35)
title('Verlauf von jährlichen Summe der Sonnenstunden');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('alphaH');
zlabel('Sonnenstunden');
grid on

```

[A 1.3.19] Name: rechnenv3.m

```

N3=91;
M3=91;
for i3=1:M3;
    alphaH3(i3)=-180+(i3-1)*360/(M3-1);
    for j3=1:N3;
        Breiten3(j3)=-90+(j3-1)*180/(N3-1);
        Esum3(i3,j3)=energiev1(Breiten3(j3),0,alphaH3(i3));
    end
    Berechnung_Prozent=i3*100/M3
end;
surf(Breiten3,alphaH3,Esum3)
title('Verlauf von jährlichen Summe der eingestrahltten Sonnenenergie');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('alphaH');
zlabel('Eingestrahltte Sonnenenergie (kWh)');
grid on

```

[A 1.3.20] Name: G__b_maxE.m

```

k4=1:1:M;
k5=1:1:N;
for i4=1:N;
    maxE(i4)=max(max(Esum3(k4,i4)));
end
plot(Breiten(k5),maxE(k5),'r-')
title('Der Zusammenhang zwischen Maximum Energie und Breitengrad');
xlabel('Breitengrad (Grad)');
ylabel('Energie (kWh)');
grid on
axis([-90 90 0 4000]);

```

[A 1.3.21] Name: G__b_aH_2.m

```

N=N3;
M=M3;
for i5=1:N;
    for j5=1:M;
        Ei5(j5)=Esum3(j5,i5);
    end
    maxEi5=max(max(Ei5));
    k5=find(Ei5==maxEi5);
    alphaHmax(i5)=alphaHmt(k5,i5);
end
plot(Breiten,alphaHmax,'r-')
title('Der Zusammenhang zwischen Horizontwinkel und Breitengrad wenn E
max');
xlabel('Breitengrad (Grad)');
ylabel('Horizontal Winkel (Grad)');
grid on
axis([-90 90 -90 90]);

```

[A 1.4.1] Name: sumstudentag11.m

```

function sum = sumstudentag11(phi)

U=365.2563677;
epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
t0=13*86400+18*3600+49*60;
e1=0.01671123;
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta11(t0);
N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=120;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta11(tx-t0);
    delta=delta11(tx-t0)+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omega1-omega2*cos(epsilon);

    beta=omega*tx;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    if costeta >= 0
        sum=sum+buoc;
    end
end
end

```

[A 1.4.2] Name: verteil11.m

```

N11=91;
for i11=1:N11;
    phi11(i11)=-90+(i11-1)*180/(N11-1);
    sum11(i11)=sumstudentag11(phi11(i11))/3600;
end

```

```

        sum10(i11)=sumstundentag10(phi11(i11));

        Prozent_Berechnung=i11*100/N11
    end
    hold off
    plot(phi11,sum11,'r-')
    title('Die Verteilung von Sonnenstunden auf Breitengrad');
    xlabel('Breitengrad');
    ylabel('Sonnenstunde');
    grid on
    axis([-100 100 4250 4500]);
    hold on
    plot(phi11,sum10,'b-');
    hold off

```

[A 1.4.3] Name: verteil11_v3.m

```

N11v3=91;
for i11v3=1:N11v3
    a11v3(i11v3)=phi11(i11v3);
    b11v3(i11v3)=100*(sum10(i11v3)-sum11(i11v3))/sum11(i11v3);
end
hold off
plot(a11v3,b11v3,'r-')
title('Die Schwankung der Sonnenstunden zwischen zwei Verfahren');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Die Schwankung (%)');
grid on

```

[A 1.4.4] Name: sumenergie11.m

```

function sum = sumenergie11(phi)
U=365.2563677;
epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
t0=13*86400+18*3600+49*60;
e1=0.01671123;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
P1=L/(4*pi*(a^2));

epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta11(t0);
N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=120;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta11(tx-t0);
    delta=bien1+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omega1-omega2*cos(epsilon);

    beta=omega*tx;

```

```

    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    if costeta >= 0
        sum=sum+P1*((1+e1*cos(bien1))/(1-e1^2))^2*costeta*buoc;
    end
end
sum=sum/(3600*1000);
end

```

[A 1.4.5] Name: verteil12.m

```

N12=91;
for i12=1:N12;
    phi12(i12)=-90+(i12-1)*180/(N12-1);
    sum12(i12)=sumenergie10(phi12(i12));

    sum13(i12)=sumenergie11(phi12(i12));

    Prozent_Berechnung=i12*100/N12
end
hold off
plot(phi12,sum13,'r-')
title('Die Verteilung von eingestrahlen Sonnenenergie auf Breitengrad');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Energie (kWh)');
grid on
%axis([-100 100 4250 4500]);
hold on
plot(phi12,sum12,'b-');
hold off

```

[A 1.4.6] Name: verteil12_v3.m

```

N12v3=91;
for i12v3=1:N12v3
    a12v3(i12v3)=phi12(i12v3);
    b12v3(i12v3)=100*(sum12(i12v3)-sum13(i12v3))/sum13(i12v3);
end
hold off
plot(a12v3,b12v3,'r-')
title('Die Schwankung der eingestrahnten Sonnenenergie zwischen zwei Verfahren');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Die Schwankung (%)');
grid on

```

[A 1.5.1] Name: sumstudentag14.m

```

function sum = sumstudentag14(phi,t0)

U=365.2563677;
epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
e1=0.01671123;
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta11(t0);

```

```

N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=120;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta11(tx-t0);
    delta=delta11(tx-t0)+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omega1-omega2*cos(epsilon);

    beta=omega*tx;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    if costeta >= 0
        sum=sum+buoc;
    end
end
end
end

```

[A 1.5.2] Name: praezession.m

```

Breitel14=51.9;
U14=round(365.2563677*86400);
t0=13*86400+18*3600+49*60;
N14=21;
zurzeit14=sumstundentag14(Breitel14,t0)/3600;
for i14=1:N14;
    bien14=(i14-1)*U14/(N14-1);
    sum14(i14)=sumstundentag14(Breitel14,bien14)/3600;
    t14(i14)=round(365.25*(i14-1)/(N14-1));
    Prozent_Berechnung=i14*100/N14
end
prozent14=100*(sum14-zurzeit14)/zurzeit14;
hold on
%plot(t14,sum14,'g-')
plot(t14,prozent14,'r-')
title('Die Änderung (%) von Sonnenstunden wegen Präzession');
xlabel('Auslenkung der Tage zwischen Winterwenden und Perihel');
ylabel('Sume der Sonnenstunde pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.3] Name: praezession3d.m

```

U15=round(365.2563677*86400);
t0=13*86400+18*3600+49*60;
N15=37;
M15=37;
for j15=1:M15
    Breitel15(j15)=-90+(j15-1)*180/(M15-1);
    zurzeit15(j15)=sumstundentag14(Breitel15(j15),t0)/3600;
for i15=1:N15;
    bien15=(i15-1)*U15/(N15-1);
    sum15(i15,j15)=sumstundentag14(Breitel15(j15),bien15)/3600;
    t15(i15)=round(365.25*(i15-1)/(N15-1));% quy do lech thoi gian ra ngay
    prozent15(i15,j15)=100*(sum15(i15,j15)-zurzeit15(j15))/zurzeit15(j15);
    Prozent_Berechnung=(j15-1)*100/M15+i15*100/(N15*M15)
end
end
hold off
mesh(Breitel15,t15,prozent15)

```

```

title('Die Änderung (%) von Sonnenstunden wegen Präzession');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Auslenkung der Tage zwischen Winterwenden und Perihel');
zlabel('Die Änderung (%) der Sonnenstunde pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.4] Name: sumenergie14.m

```

function sum = sumenergie14(phi,t0)
U=365.2563677;
epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
e1=0.01671123;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
P1=L/(4*pi*(a^2));
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta11(t0);
N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=60;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta11(tx-t0);
    delta=bien1+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omega1-omega2*cos(epsilon);

    beta=omega*tx;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    if costeta >= 0
        sum=sum+P1*((1+e1*cos(bien1))/(1-e1^2))^2*costeta*buoc;
    end
end
sum=sum/(3600*1000);
end

```

[A 1.5.5] Name: praezessionE3d.m

```

U17=round(365.2563677*86400);
t0=13*86400+18*3600+49*60;

N17=37;
M17=37;
for j17=1:M17
    Breitel17(j17)=-90+(j17-1)*180/(M17-1);
    zurzeit17(j17)=sumenergie14(Britel17(j17),t0);
for i17=1:N17;
    bien17=(i17-1)*U17/(N17-1);
    sum17(i17,j17)=sumenergie14(Britel17(j17),bien17);
    t17(i17)=round(365.25*(i17-1)/(N17-1));
    prozent17(i17,j17)=100*(sum17(i17,j17)-zurzeit17(j17))/zurzeit17(j17);
    Prozent_Berechnung=(j17-1)*100/M17+i17*100/(N17*M17)
end

```

```

end
hold off
%mesh(Breitel17,t17,sum17)
mesh(Breitel17,t17,prozent17)
title('Die Änderung (%) von Sonnenstunden wegen Präzession');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Auslenkung der Tage zwischen Winterwenden und Perihel');
zlabel('Die Änderung (%) der Sonnenstunde pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.6] Name: sumstundentag18.m

```

U=365.2563677;
%epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
t0=13*86400+18*3600+49*60;
e1=0.01671123; %tam sai
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta11(t0);
N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=120;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta11(tx-t0);
    delta=delta11(tx-t0)+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omega1-omega2*cos(epsilon)

    beta=omega*tx;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    if costeta >= 0
        sum=sum+buoc;
    end
end
end

```

[A 1.5.7] Name: Neigungswinkel.m

```

Breitel18=0;
epsilon1=22.1;
epsilon2=24.5;
epsilon0=23.4392794;
N18=21;
zurzeit18=sumstundentag18(Breitel18,epsilon0)/3600;
for i18=1:N18;
    epsilon18(i18)=epsilon1+(i18-1)*(epsilon2-epsilon1)/(N18-1);
    sum18(i18)=sumstundentag18(Breitel18,epsilon18(i18))/3600;
    Prozent_Berechnung=i18*100/N18
end
prozent18=100*(sum18-zurzeit18)/zurzeit18;

```

```

hold on
%plot(epsilon18,sum18,'r-')
plot(epsilon18,prozent18,'k-')
title('Die Änderung (%) von Sonnenstunden wegen der Änderung von
Neigungswinkel');
xlabel('Neigungswinkel der Erdachse (Grad)');
ylabel('Die Änderung (%) der Sonnenstunde pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.8] Name: neigungswinkel3d.m

```

epsilon1=22.1;
epsilon2=24.5;
epsilon0=23.4392794;
N19=13;
M19=13;
for j19=1:M19
    Breitel19(j19)=-90+(j19-1)*180/(M19-1);
    zurzeit19(j19)=sumstundentag18(Britel19(j19),epsilon0)/3600;
for i19=1:N19;
    epsilon19(i19)=epsilon1+(i19-1)*(epsilon2-epsilon1)/(N19-1);
    sum19(i19,j19)=sumstundentag18(Britel19(j19),epsilon19(i19))/3600;
    prozent19(i19,j19)=100*(sum19(i19,j19)-zurzeit19(j19))/zurzeit19(j19);
    Prozent_Berechnung=(j19-1)*100/M19+i19*100/(N19*M19)
end
end
hold off
%mesh(Britel19,epsilon19,sum19)
mesh(Britel19,epsilon19,prozent19)
title('Die Änderung von Sonnenstunden wegen der Änderung von
Neigungswinkel');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Neigungswinkel der Erdachse (Grad)');
zlabel('Sume der Sonnenstunde pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.9] Name: sumenergie18.m

```

function sum = sumenergie18(phi,epsilon)
U=365.2563677;
%epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
t0=13*86400+18*3600+49*60;
e1=0.01671123;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
P1=L/(4*pi*(a^2));
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta11(t0);
N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=300;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta11(tx-t0);

```

```

delta=bien1+delta0;
alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

omega=omega1-omega2*cos(epsilon);

beta=omega*tx;
costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
if costeta >= 0
    sum=sum+P1*((1+e1*cos(bien1))/(1-e1^2))^2*costeta*buoc;
end
end
sum=sum/(3600*1000);
end

```

[A 1.5.10] Name: neigungswinkelE.m

```

Breite20=23;
epsilon1=22.1;
epsilon2=24.5;
epsilon0=23.4392794;
N20=11;
zurzeit20=sumenergie18(Breite20,epsilon0);
for i20=1:N20;
    epsilon20(i20)=epsilon1+(i20-1)*(epsilon2-epsilon1)/(N20-1);
    sum20(i20)=sumenergie18(Breite20,epsilon20(i20));
    Prozent_Berechnung=i20*100/N20
end
prozent20=100*(sum20-zurzeit20)/zurzeit20;
hold on
%plot(epsilon20,sum20,'m-')
plot(epsilon20,prozent20,'g-')
title('Die Änderung von Sonnenenergie wegen der Änderung von
Neigungswinkel');
xlabel('Neigungswinkel der Erdachse (Grad)');
ylabel('Die Änderung (%) der Sonnenenergie pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.11] Name: neigungswinkelE3d.m

```

epsilon1=22.1;
epsilon2=24.5;
epsilon0=23.4392794;
N21=11;
M21=11;
for j21=1:M21
    Breite21(j21)=-90+(j21-1)*180/(M21-1);
    zurzeit21(j21)=sumenergie18(Breite21(j21),epsilon0);
for i21=1:N21;
    epsilon21(i21)=epsilon1+(i21-1)*(epsilon2-epsilon1)/(N21-1);
    sum21(i21,j21)=sumenergie18(Breite21(j21),epsilon21(i21));
    prozent21(i21,j21)=100*(sum21(i21,j21)-zurzeit21(j21))/zurzeit21(j21);
    Prozent_Berechnung=(j21-1)*100/M21+i21*100/(N21*M21)
end
end
hold off
%mesh(Breite21,epsilon21,sum21)
surf(Breite21,epsilon21,prozent21)
title('Die Änderung von eingestrahltener Sonnenenergie wegen der Änderung
von Neigungswinkel');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Neigungswinkel der Erdachse (Grad)');
zlabel('Änderung (%) der eingestrahltener Sonnenenergie pro Jahr');

```

grid on

[A 1.5.12] Name: sumstudentag22.m

```

U=365.2563677;
epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
t0=13*86400+18*3600+49*60;
%e1=0.01671123;
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta22(t0,e1);
N=round(U*86400);
omega1=2*pi/Ts;
buoc=600;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta22((tx-t0),e1);
    delta=bien1+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*(1+e1*cos(bien1))^2/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omega1-omega2*cos(epsilon);

    beta=omega*tx;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
    if costeta >= 0
        sum=sum+buoc;
    end
end
end

```

[A 1.5.13] Name: exzentrizitaet.m

```

Breite22=51;
exzentr1=0.0058;
exzentr2=0.05;
exzentr0=0.01671123;
N22=11;%so diem can ve (so le vi them diem 0)
zurzeit22=sumstudentag22(Breite22,exzentr0)/3600;
for i22=1:N22;
    exzentr22(i22)=exzentr1+(i22-1)*(exzentr2-exzentr1)/(N22-1);
    sum22(i22)=sumstudentag22(Breite22,exzentr22(i22))/3600;
    Prozent_Berechnung=i22*100/N22
end
prozent22=100*(sum22-zurzeit22)/zurzeit22;
hold on
%plot(exzentr22,sum22,'r-')
plot(exzentr22,prozent22,'g-')
title('Die Änderung (%) von Sonnenstunden wegen der Änderung von
Exzentrizität');
xlabel('Exzentrizität der Erdbahn');
ylabel('Die Änderung (%) der Sonnenstunde pro Jahr');

```

```
grid on
```

```
[A 1.5.14] Name: exzentrizitaet3d.m
```

```
exzentr1=0.0058;
exzentr2=0.05;
exzentr0=0.01671123;
N23=7;
M23=7;
for j23=1:M23
    Breite23(j23)=-90+(j23-1)*180/(M23-1);
    zurzeit23(j23)=sumstundentag22(Breite23(j23),exzentr0)/3600;
for i23=1:N23;
    exzentr23(i23)=exzentr1+(i23-1)*(exzentr2-exzentr1)/(N23-1);
    sum23(i23,j23)=sumstundentag22(Breite23(j23),exzentr23(i23))/3600;
    prozent23(i23,j23)=100*(sum23(i23,j23)-zurzeit23(j23))/zurzeit23(j23);
    Prozent_Berechnung=(j23-1)*100/M23+i23*100/(N23*M23)
end
end
hold off
%mesh(Breite23,exzentr23,sum23)
mesh(Breite23,exzentr23,prozent23)
title('Die Änderung der Sonnenstunden wegen der Änderung der
Exzentrizität');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Exzentrizität der Erdbahn');
zlabel('Die Änderung (%) der Sonnenstunde pro Jahr');
grid on
```

```
[A 1.5.15] Name: sumenergie22.m
```

```
function sum = sumenergie22(phi,e1)
U=365.2563677;
epsilon=23.4392794;
Ts=23*3600+56*60+4.091;
t0=13*86400+18*3600+49*60;
%e1=0.01671123;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
P1=L/(4*pi*(a^2));
epsilon=epsilon*pi/180;
phi=phi*pi/180;
delta0=delta22(t0,e1);
N=round(U*86400);
omegal=2*pi/Ts;
buoc=900;
bien1=0;
sum=0;
tx=0;
while tx < N
    tx=tx+buoc;
    bien1=delta22((tx-t0),e1);
    delta=bien1+delta0;
    alpha=acos(sin(epsilon)*cos(delta));
    omega2=(2*pi/N)*((1+e1*cos(bien1))^2)/((1-e1^2)^(3/2));

    omega=omegal-omega2*cos(epsilon);

    beta=omega*tx;
    costeta=sin(alpha)*cos(phi)*cos(beta)-cos(alpha)*sin(phi);
```

```

        if costeta >= 0
            sum=sum+P1*((1+e1*cos(bien1))/(1-e1^2))^2*costeta*buoc;
        end
    end
end
sum=sum/(3600*1000);
end

```

[A 1.5.16] Name: exzentrizitaetE.m

```

Breite24=0;
exzentr1=0.0058;
exzentr2=0.05;
exzentr0=0.01671123;
N24=11;
zurzeit24=sumenergie22(Breite24,exzentr0);
for i24=1:N24;
    exzentr24(i24)=exzentr1+(i24-1)*(exzentr2-exzentr1)/(N24-1);
    sum24(i24)=sumenergie22(Breite24,exzentr24(i24));
    Prozent_Berechnung=i24*100/N24
end
prozent24=100*(sum24-zurzeit24)/zurzeit24;
hold on
%plot(exzentr24,sum24,'r-')
plot(exzentr24,prozent24,'g-')
title('Die Änderung (%) der eingestrahnten Sonnenenergie wegen der
Änderung von Exzentrizität');
xlabel('Exzentrizität der Erdbahn');
ylabel('Die Änderung (%) der eingestrahnten Sonnenenergie pro Jahr');
grid on

```

[A 1.5.17] Name: exzentrizitaetE3d.m

```

exzentr1=0.0058;
exzentr2=0.05;
exzentr0=0.01671123;
N25=7;
M25=7;
for j25=1:M25
    Breite25(j25)=-90+(j25-1)*180/(M25-1);
    zurzeit25(j25)=sumenergie22(Breite25(j25),exzentr0);
for i25=1:N25;
    exzentr25(i25)=exzentr1+(i25-1)*(exzentr2-exzentr1)/(N25-1);
    sum25(i25,j25)=sumenergie22(Breite25(j25),exzentr25(i25));
    prozent25(i25,j25)=100*(sum25(i25,j25)-zurzeit25(j25))/zurzeit25(j25);
    Prozent_Berechnung=(j25-1)*100/M25+i25*100/(N25*M25)
end
end
hold off
%mesh(Breite25,exzentr25,sum25)
surf(Breite25,exzentr25,prozent25)
title('Die Änderung der eingestrahnten Sonnenenergie wegen der Änderung
der Exzentrizität');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Exzentrizität der Erdbahn');
zlabel('Die Änderung (%) der eingestrahnten Sonnenenergie pro Jahr');
grid on

```

[A 2.1.1] Name: Temperatur3Dv2.m

```

N2_1=100;
Ls=3.846*(10^26);
Ro=1.4959826*(10^11);

```

```

Rmin=Ro*0.35;
Rmax=Ro*32;
Amax=0.9;
Amin=0.068;
sigma=5.670373*(10^(-8));
b2_1=(log(Rmax/Rmin))/(N2_1-1);
a2_1=Rmin/(exp(b1));
for i2_1=1:N2_1;
    Abstand2_1(i2_1)=a2_1*(exp(b2_1*i2_1))/Ro;

    for j2_1=1:N2_1;
        Albedo2_1(j2_1)=Amin+(j2_1-1)*(Amax-Amin)/(N2_1-1);
        Temperatur2_1(i2_1,j2_1)=(((1-
Albedo2_1(j2_1))*Ls/(16*pi*sigma*((Abstand2_1(i2_1)*Ro)^2)))^0.25)-273;
end
    Berechnung_Prozent=i2_1*100/N2_1
end;
surf(Albedo2_1,Abstand2_1,Temperatur2_1)
title('Verteilung der Temperatur - Sonnensystem');
xlabel('Albedo');
ylabel('Abstand');
zlabel('Temperatur (Celcius Grad)');
grid on

```

[A 2.1.2] Name: T_phi_tag_v1.m

```

N2_2=366;
M2_2=361;
sigma=5.670373*(10^(-8));
A2_2=0.306;
Jahr=365;
Tag=24;
for i2_2=1:N2_2;
    n2_2(i2_2)=round((i2_2-1)*(Jahr/(N2_2-1)));

    for j2_2=1:M2_2;
        phi2_2(j2_2)=-90+(j2_2-1)*180/(M2_2-1);
        Temperatur2_2(i2_2,j2_2)=(((1-
A2_2)*1000*energietag10(phi2_2(j2_2),n2_2(i2_2))/(sigma*Tag))^0.25)-273;
end
    Berechnung_Prozent=i2_2*100/N2_2
end;
surf(phi2_2,n2_2,Temperatur2_2)
title('Verteilung der Temperatur auf Breitengrad und Dadtum');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Datum');
zlabel('Temperatur (Celcius Grad)');
grid on

```

[A 2.1.3] Tjahr_phi_v1.m

```

N2_3=91;
sigma=5.670373*(10^(-8));
A2_3=0.306;
Jahr=365;
Tag=24;
for i2_3=1:N2_3;
    phi2_3(i2_3)=-90+(i2_3-1)*180/(N2_3-1);
    Temperatur2_3(i2_3)=(((1-
A2_3)*1000*sumenergie10(phi2_3(i2_3))/(sigma*365*Tag))^0.25)-273;
    Berechnung_Prozent=i2_3*100/N2_3
end;
plot(phi2_3,Temperatur2_3,'r-')

```

```

title('Verteilung der jährlichen Temperatur auf Breitengrad');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Temperatur (Celcius Grad)');
grid on

```

[A 2.2.1] Name: WD3D.m

```

DJF222=[28.5 90 60 68 64 67 45 52 76 70 73];
MAM222=[60 89 58 56 62 68 46 53 76.1 67 65];
JJA222=[53 87 57 51 57 76 64 51 75.8 71 60];
SON222=[40 89 62 58 60 74 55 48 78 71.1 62];
brg222=[-90.01 -56 -26 -14 0 9 17 25 51 72 90.01];

```

```

i2221=max(find(brg222<phi222));
i2222=min(find(brg222>=phi222));

```

```

cc1(2)=wert223(DJF222(i2221),DJF222(i2222),brg222(i2221),brg222(i2222),phi
222);
cc1(3)=wert223(MAM222(i2221),MAM222(i2222),brg222(i2221),brg222(i2222),phi
222);
cc1(4)=wert223(JJA222(i2221),JJA222(i2222),brg222(i2221),brg222(i2222),phi
222);
cc1(5)=wert223(SON222(i2221),SON222(i2222),brg222(i2221),brg222(i2222),phi
222);
cc1(6)=cc1(2);
cc1(1)=cc1(5);

```

```

for k222=2:5;
    cc2(k222)=1.5*cc1(k222)-0.25*(cc1(k222-1)+cc1(k222+1));
end;
cc2(6)=cc2(2);
cc2(1)=cc2(5);

```

```

nt222(1)=297-365;
nt222(2)=24;
nt222(3)=114;
nt222(4)=205;
nt222(5)=297;
nt222(6)=365+24;
j2221=max(find(nt222<n222));
j2222=min(find(nt222>=n222));

```

```

durchn222=0.5*(nt222(j2222)+nt222(j2221));
cc3=0.5*(cc2(j2222)+cc2(j2221));
if n222>durchn222
    prozent222=wert223(cc3,cc2(j2222),durchn222,nt222(j2222),n222);
else
    prozent222=wert223(cc2(j2221),cc3,nt222(j2221),durchn222,n222);
end;
prozent222=(prozent222-0)/100;
end

```

[A 2.2.2] Name: Graf_WD3D.m

```

N224=181;
M224=366;
%dphi224=pi/(N224-1);
%Ejahr224=0;
for i224=1:N224;
    phi224(i224)=-90+(i224-1)*180/(N224-1);

```

```

for j224=1:M224;
    ntag224(j224)=j224-1;
    SA224(i224,j224)=WD3D(phi224(i224),ntag224(j224));
end;
    Berechnung_Prozent=i224*100/N224
end;
surf(ntag224,phi224,SA224)

```

[A 2.2.3] Name: WH3D.m

```

function h227 = WH3D(phi227,n227)

DJF227=[525 640 642 575 510 535 670 525 585 600 560];
MAM227=[265 620 650 580 550 475 630 512 592 660 630];
JJA227=[300 618 645 605 645 448 590 527 545 648 660];
SON227=[360 613 615 592 610 446 620 530 575 645 615];
brg227=[-90.01 -67 -58 -30 -14 6 21 36 63 78 90.01];

i2271=max(find(brg227<phi227));
i2272=min(find(brg227>=phi227));

WDr1(2)=wert223(DJF227(i2271),DJF227(i2272),brg227(i2271),brg227(i2272),ph
i227);
WDr1(3)=wert223(MAM227(i2271),MAM227(i2272),brg227(i2271),brg227(i2272),ph
i227);
WDr1(4)=wert223(JJA227(i2271),JJA227(i2272),brg227(i2271),brg227(i2272),ph
i227);
WDr1(5)=wert223(SON227(i2271),SON227(i2272),brg227(i2271),brg227(i2272),ph
i227);
WDr1(6)=WDr1(2);
WDr1(1)=WDr1(5);

for k227=2:5;
    WDr2(k227)=1.5*WDr1(k227)-0.25*(WDr1(k227-1)+WDr1(k227+1));
end;
WDr2(6)=WDr2(2);
WDr2(1)=WDr2(5);

nt227(1)=297-365;
nt227(2)=24;
nt227(3)=114;
nt227(4)=205;
nt227(5)=297;
nt227(6)=365+24;
j2271=max(find(nt227<n227));
j2272=min(find(nt227>=n227));

durchn227=0.5*(nt227(j2272)+nt227(j2271));
WDr3=0.5*(WDr2(j2272)+WDr2(j2271));
if n227>durchn227
    WDr227=wert223(WDr3,WDr2(j2272),durchn227,nt227(j2272),n227);
else
    WDr227=wert223(WDr2(j2271),WDr3,nt227(j2271),durchn227,n227);
end;
Wdr0=1000;
Ho=8.434;
h227=Ho*log(Wdr0/WDr227);
h227=(1-exp(-(h227-0)/Ho))*Ho;
end

```

[A 2.2.4] Name: Graf_WH3D.m

```

N224=181;
M224=366;
%dphi224=pi/(N224-1);
%Ejahr224=0;
for i224=1:N224;
    phi224(i224)=-90+(i224-1)*180/(N224-1);
for j224=1:M224;
    ntag224(j224)=j224-1;
    SA224(i224,j224)=WH3D(phi224(i224),ntag224(j224));
end;
    Berechnung_Prozent=i224*100/N224
end;
surf(ntag224,phi224,SA224)

```

[A 2.2.5] Name: tau3D.m

```

function tau225 = tau3D(phi225,n225)

DJF225=[3.8 12 6.3 3 3.1 3.4 6.2 4.2 4.4 13 15];
MAM225=[3 4 5.4 2.7 3 3.5 4 5.1 7 18 12];
JJA225=[3.1 5 5.5 2.8 3.1 4.2 4.8 5.2 5.1 13 7];
SON225=[3.7 7.5 6 3.3 3.5 4 4.5 5 4 11 17.8];
brg225=[-90.01 -74 -56 -30 0 6 51 60 69 82 90.01];

i2251=max(find(brg225<phi225));
i2252=min(find(brg225>=phi225));

tau1(2)=wert223(DJF225(i2251),DJF225(i2252),brg225(i2251),brg225(i2252),ph
i225);
tau1(3)=wert223(MAM225(i2251),MAM225(i2252),brg225(i2251),brg225(i2252),ph
i225);
tau1(4)=wert223(JJA225(i2251),JJA225(i2252),brg225(i2251),brg225(i2252),ph
i225);
tau1(5)=wert223(SON225(i2251),SON225(i2252),brg225(i2251),brg225(i2252),ph
i225);
tau1(6)=tau1(2);
tau1(1)=tau1(5);

for k225=2:5;
    tau2(k225)=1.5*tau1(k225)-0.25*(tau1(k225-1)+tau1(k225+1));
end;
tau2(6)=tau2(2);
tau2(1)=tau2(5);

nt225(1)=297-365;
nt225(2)=24;
nt225(3)=114;
nt225(4)=205;
nt225(5)=297;
nt225(6)=365+24;
j2251=max(find(nt225<n225));
j2252=min(find(nt225>=n225));

durchn225=0.5*(nt225(j2252)+nt225(j2251));
tau3=0.5*(tau2(j2252)+tau2(j2251));
if n225>durchn225
    tau225=wert223(tau3,tau2(j2252),durchn225,nt225(j2252),n225);
else
    tau225=wert223(tau2(j2251),tau3,nt225(j2251),durchn225,n225);
end;

```

```
tau225=tau225+0;
end
```

```
[A 2.2.6] Name: Graf_tau3D.m
N224=181;
M224=366;
%dphi224=pi/(N224-1);
%Ejahr224=0;
for i224=1:N224;
    phi224(i224)=-90+(i224-1)*180/(N224-1);
for j224=1:M224;
    ntag224(j224)=j224-1;
    SA224(i224,j224)=tau3D(phi224(i224),ntag224(j224));
end;
    Berechnung_Prozent=i224*100/N224
end;
surf(ntag224,phi224,SA224)
```

```
[A 2.2.7] Name: Awtag1.m
```

```
function sum229 = Awtag1(n229,phi229)
phi229=phi229*pi/180;
Tag=24;
Jahr=365;
t229=round(Tag*3600);
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
nW=4/3;
delta229=n229*2*pi/Jahr;
alpha229=acos(sin(epsilon)*cos(delta229));
S229=0;
Sb229=0;
Ssum229=0;
Ssumb229=0;
m229=30;
for j229=0:m229:t229;
    beta229=-pi+2*pi*j229/t229;
    costeta229=sin(alpha229)*cos(phi229)*cos(beta229)-
cos(alpha229)*sin(phi229);
    if costeta229>0
        teta229=acos(costeta229);
        tetab229=asin(sin(teta229)/nW);

        A229=0.5*((sin(teta229-
tetab229)/sin(teta229+tetab229))^2+(tan(teta229-
tetab229)/tan(teta229+tetab229))^2);
        S229=m229*costeta229;
        Sb229=m229*A229*costeta229;
    else
        S229=0;
        Sb229=0;
    end
    Ssum229=Ssum229+S229;
    Ssumb229=Ssumb229+Sb229;
end
sum229=Ssumb229/Ssum229;
end
```

```
[A 2.2.8] Name: Aw_phi:tag_3d_v1.m
```

```
N230=366;
```

```

M230=131;
Jahr=365;
Tag=24;
for i230=1:N230;
    n230(i230)=round((i230-1)*(Jahr/(N230-1)))

    for j230=1:M230;
        phi230(j230)=-65+(j230-1)*130/(M230-1);
        Albedo230(i230,j230)=100*Awtagl(n230(i230),phi230(j230));
    end
end
    Berechnung_Prozent=i230*100/N230
end;
surf(phi230,n230,Albedo230)
title('Verteilung der Albedo von Gewässer auf Breitengrad und Dadtum');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Datum');
zlabel('Tägliche Albedo (%)');
grid on

```

[A 2.2.9] Name: SA3D.m

```

DJF226=[0.89 0.72 0.08 0.05 0.09 0.06 0.04 0.11 0.4 0.85];
MAM226=[0.9 0.71 0.12 0.041 0.04 0.07 0.09 0.105 0.26 0.79];
JJA226=[0.91 0.89 0.18 0.07 0.03 0.05 0.11 0.09 0.1 0.72];
SON226=[0.9 0.87 0.13 0.06 0.08 0.085 0.05 0.1 0.2 0.62];
brg226=[-90.01 -73 -55 -37 -12 0 13 30 55 90.01];

i2261=max(find(brg226<phi226));
i2262=min(find(brg226>=phi226));

SA1(2)=wert223(DJF226(i2261),DJF226(i2262),brg226(i2261),brg226(i2262),phi
226);
SA1(3)=wert223(MAM226(i2261),MAM226(i2262),brg226(i2261),brg226(i2262),phi
226);
SA1(4)=wert223(JJA226(i2261),JJA226(i2262),brg226(i2261),brg226(i2262),phi
226);
SA1(5)=wert223(SON226(i2261),SON226(i2262),brg226(i2261),brg226(i2262),phi
226);
SA1(6)=SA1(2);
SA1(1)=SA1(5);

for k226=2:5;
    SA2(k226)=1.5*SA1(k226)-0.25*(SA1(k226-1)+SA1(k226+1));
end;
SA2(6)=SA2(2);
SA2(1)=SA2(5);

nt226(1)=297-365;
nt226(2)=24;
nt226(3)=114;
nt226(4)=205;
nt226(5)=297;
nt226(6)=365+24;
j2261=max(find(nt226<n226));
j2262=min(find(nt226>=n226));

durchn226=0.5*(nt226(j2262)+nt226(j2261));
SA3=0.5*(SA2(j2262)+SA2(j2261));
if n226>durchn226

```

```

    SA226=wert223(SA3,SA2(j2262),durchn226,nt226(j2262),n226);
else
    SA226=wert223(SA2(j2261),SA3,nt226(j2261),durchn226,n226);
end;
SA226=SA226+0;
end

```

[A 2.2.10] Name: Graf_SA3D.m

```

N224=181;
M224=366;
%dpi224=pi/(N224-1);
%Ejahr224=0;
for i224=1:N224;
    phi224(i224)=-90+(i224-1)*180/(N224-1);
for j224=1:M224;
    ntag224(j224)=j224-1;
    SA224(i224,j224)=SA3D(phi224(i224),ntag224(j224));
end;
    Berechnung_Prozent=i224*100/N224
end;
surf(ntag224,phi224,SA224)

```

[A 2.2.11] Name: Erdabsorp8.m

```

function sumE231 = Erdabsorp8(phi231,n231)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

A231=SA3D(phi231,n231);
WD231=WD3D(phi231,n231);
H231=WH3D(phi231,n231);
t231=tau3D(phi231,n231);
E231=0;
m231=600;
phi231=phi231*pi/180;
delta231=n231*2*pi/Jahr;
alpha231=acos(sin(epsilon)*cos(delta231));

for i231=0:m231:Tag;
    beta231=-pi+2*pi*i231/86400;

```

```

costeta231=sin(alpha231)*cos(phi231)*cos(beta231)-
cos(alpha231)*sin(phi231);
if costeta231>0
LM231=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta231)^2)^(0.5)-Re*costeta231;

Ewo=m231*Po*WD231*costeta231;
E_Luft_R1=(Kstr/Kext)*Ewo*(1-exp(-Kext*LM231*(Ho-H231)/Ho));

Ew_hin=Ewo*exp(-Kext*LM231*(Ho-H231)/Ho);
Es_w=Ew_hin*(1-Kmax)*(t231/(t231+1));
E_rueck1=E_Luft_R1+Es_w*(1-Kext*(Ho-H231))*exp(-Kext*(Ho-
H231));

Eto=m231*Po*(1-WD231)*costeta231;
E_Luft_R2=(Kstr/Kext)*Eto*(1-exp(-Kext*LM231));

Ehin=Eto*exp(-Kext*LM231);
Er_of=(1-WD231)*Ehin*A231;
E_rueck2=E_Luft_R2+Er_of*exp(-Kext*LM231);

Ei231=m231*Po*costeta231-(E_rueck1+E_rueck2);
else
Ei231=0;
end
E231=E231+Ei231;
end
sumE231=E231/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.2.12] Name: Erdalbedo.m

```

N216=181;
M216=365;
dphi216=pi/(N216-1);
Ejahr216=0;
for j216=1:M216;
ntag216=j216-1;
Etag216=0;
for i216=1:N216;
phi216=-90+(i216-1)*180/(N216-1);

Etag216=Etag216+2*Erdabsorp8(phi216,ntag216)*cos(pi*phi216/180)*dphi216;

end;
Ejahr216=Ejahr216+Etag216;
Berechnung_Prozent=j216*100/M216
end;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Eo=Po*365*24/1000;

Erdalbedo=1-Ejahr216/Eo

```

[A 2.2.13] Name: Erdalbedo_3D.m

```

N221=181;
M221=366;
%dphi221=pi/(N221-1);
%Ejahr221=0;
for i221=1:N221;
    phi221(i221)=-90+(i221-1)*180/(N221-1);
for j221=1:M221;
    ntag221(j221)=j221-1;
    Etag221(i221,j221)=Erdabsorp8(phi221(i221),ntag221(j221));

    Eotag221(i221,j221)=energietag10(phi221(i221),ntag221(j221));

    if energietag10(phi221(i221),ntag221(j221))<0.05

        Albedo221(i221,j221)=0;
    else
        Albedo221(i221,j221)=1-Etag221(i221,j221)/Eotag221(i221,j221);
    end
end;
    Berechnung_Prozent=i221*100/N221
end;
surf(ntag221,phi221,Albedo221)

```

[A 2.4.1] Name: Einstrahlung_kurz.m

```

function sumE234 = Einstrahlung_kurz(phi234,n234)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

A234=SA3D(phi234,n234);
WD234=WD3D(phi234,n234);
H234=WH3D(phi234,n234);
t234=tau3D(phi234,n234);
E234=0;
m234=600;
phi234=phi234*pi/180;
delta234=n234*2*pi/Jahr;
alpha234=acos(sin(epsilon)*cos(delta234));

for i234=0:m234:Tag;
    beta234=-pi+2*pi*i234/86400;

```

```

    costeta234=sin(alpha234)*cos(phi234)*cos(beta234)-
cos(alpha234)*sin(phi234);
    if costeta234>0
        LM234=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta234)^2)^(0.5)-Re*costeta234;

        IW1=m234*Po*WD234*costeta234;
        IW2=IW1*exp(-Kext*LM234*(Ho-H234)/Ho);

        IWR1=IW2*(1-Kmax)*(t234/(t234+1));
        IWR2=IWR1*(1-exp(-Kext*(Ho-H234)));

        IWtrans=IW2/(1+t234);

        IWR_streu=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IWR1-IWR2);

        IE1=m234*Po*(1-WD234)*costeta234;
        IE2=IE1*exp(-Kext*LM234);

        IER1=IE2*A234;
        IER2=IER1*exp(-Kext*Ho);

        IER_str=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IER1-IER2);

        IWR_E1=IWR_streu+IWtrans;

        IWR_E2=IWR_E1*exp(-Kext*H234);

        IWR_ER1=IWR_E2*A234;
        IWR_ER2=IWR_ER1*exp(-Kext*Ho);

        IWR_ER_str=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

        Ei234=IE2+IER_str+IWR_E2+IWR_ER_str;
        else
            Ei234=0;
        end
        E234=E234+Ei234;
    end
    sumE234=E234/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.4.2] Name: Durchschnitt_Einstrahlung_kurz.m

```

N233=181;
M233=365;
dphi233=pi/(N233-1);
Ejahr233=0;
for j233=1:M233;
    ntag233=j233;
    Etag233=0;
    for i233=1:N233;
        phi233=-90+(i233-1)*180/(N233-1);

        Etag233=Etag233+2*Einstrahlung_kurz(phi233,ntag233)*cos(pi*phi233/180)*dph
i233;
    end
end

```

```

end;
Ejahr233=Ejahr233+Etag233;
Berechnung_Prozent=j233*100/M233
end;
Durchschnitt_Einstrahlung_kurz=Ejahr233*1000*3600/(365*24*3600*4)

```

[A 2.4.3] Name: Einstrahlung_lang.m

```

function sumE232 = Einstrahlung_lang(phi232,n232)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;%0.0233;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

R_l1=0.431;
A232=SA3D(phi232,n232);
WD232=WD3D(phi232,n232);
H232=WH3D(phi232,n232);
t232=tau3D(phi232,n232);
E232=0;
m232=600;
phi232=phi232*pi/180;
delta232=n232*2*pi/Jahr;
alpha232=acos(sin(epsilon)*cos(delta232));

for i232=0:m232:Tag;
    beta232=-pi+2*pi*i232/86400;
    costeta232=sin(alpha232)*cos(phi232)*cos(beta232)-
cos(alpha232)*sin(phi232);
    if costeta232>0
        LM232=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta232)^2)^(0.5)-Re*costeta232;

        IW1=m232*Po*WD232*costeta232;
        IW2=IW1*exp(-Kext*LM232*(Ho-H232)/Ho);

        IWR1=IW2*(1-Kmax)*(t232/(t232+1));
        IWR2=IWR1*(1-exp(-Kext*(Ho-H232)));
    end
end

```

```

    IWtrans=IW2/(1+t232);

    IWR_streu=(1-WD232)*(Kstr/Kext)*(IWR1-IWR2);

    IW_Luft_abs1=(Kabs/Kext)*(IW1-IW2);

    IW_Luft_abs2=(Kabs/Kext)*(IWR1-IWR2);

    IW_abs=Kmax*IW2*t232/(t232+1);
    IW_Lang_zurE=0.5*(1-
R_l1)*(IW_Luft_abs1+IW_Luft_abs2+IW_abs)*(1-WD232);

    IE1=m232*Po*(1-WD232)*costeta232;
    IE2=IE1*exp(-Kext*LM232);

    IER1=IE2*A232;
    IER2=IER1*exp(-Kext*Ho);

    IS6_1=IER1*WD232;

    IS6_2=0.5*(Kabs/Kext)*(IE1-IE2);

    IS6_3=0.5*(1-WD232)*(Kabs/Kext)*(IER1-IER2);

    IS6=IS6_1+IS6_2+IS6_3;

    IWR_E2=IWR_E1*exp(-Kext*H232);

    IWR_ER1=IWR_E2*A232;
    IWR_ER2=IWR_ER1*exp(-Kext*Ho);
    IWR_S6_1=IWR_ER1*WD232;

    IWR_S6_2=0.5*(Kabs/Kext)*(IWR_E1-IWR_E2);

    IWR_S6_3=0.5*(1-WD232)*(Kabs/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

    IWR_S6=IWR_S6_1+IWR_S6_2+IWR_S6_3;

    else
        Ei232=0;
    end
    E232=E232+Ei232;
end
    sumE232=E232/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.4.4] Name: Durschnitt_Einstrahlung_lang.m

```

N233=181;
M233=365;
dphi233=pi/(N233-1);
Ejahr233=0;
for j233=1:M233;

```

```

    ntag233=j233;
    Etag233=0;
    for i233=1:N233;
        phi233=-90+(i233-1)*180/(N233-1);
    Etag233=Etag233+2*Einstrahlung_lang(phi233,ntag233)*cos(pi*phi233/180)*dph
    i233;

    end;
    Ejahr233=Ejahr233+Etag233;
    Berechnung_Prozent=j233*100/M233
end;

Durchschnitt_Einstrahlung_lang=Ejahr233*1000*3600/(365*24*3600*4)

```

[A 2.4.5] Name: Einstrahlung_parallel.m

```

function sumE234 = Einstrahlung_parallel(phi234,n234)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;%0.0233;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

A234=SA3D(phi234,n234);
WD234=WD3D(phi234,n234);
H234=WH3D(phi234,n234);
t234=tau3D(phi234,n234);
E234=0;
m234=600;
phi234=phi234*pi/180;
delta234=n234*2*pi/Jahr;
alpha234=acos(sin(epsilon)*cos(delta234));

for i234=0:m234:Tag;
    beta234=-pi+2*pi*i234/86400;
    costeta234=sin(alpha234)*cos(phi234)*cos(beta234)-
    cos(alpha234)*sin(phi234);
    if costeta234>0
        LM234=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta234)^2)^(0.5)-Re*costeta234;
    end
end

```

```

IW1=m234*Po*WD234*costeta234;
IW2=IW1*exp(-Kext*LM234*(Ho-H234)/Ho);

IWR1=IW2*(1-Kmax)*(t234/(t234+1));
IWR2=IWR1*(1-exp(-Kext*(Ho-H234)));

IWtrans=IW2/(1+t234);

IWR_streu=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IWR1-IWR2);

IE1=m234*Po*(1-WD234)*costeta234;
IE2=IE1*exp(-Kext*LM234);

IER1=IE2*A234;
IER2=IER1*exp(-Kext*Ho);

IER_str=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IER1-IER2);

IWR_E1=IWR_streu+IWtrans;

IWR_E2=IWR_E1*exp(-Kext*H234);

IWR_ER1=IWR_E2*A234;
IWR_ER2=IWR_ER1*exp(-Kext*Ho);

IWR_ER_str=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

    Ei234=IE2;
    else
    Ei234=0;
    end
    E234=E234+Ei234;
end
sumE234=E234/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.4.6] Name: Durchschnitt_Einstrahlung_p.m

```

N233=181;
M233=365;
dphi233=pi/(N233-1);
Ejahr233=0;
for j233=1:M233;
    ntag233=j233;
    Etag233=0;
for i233=1:N233;
    phi233=-90+(i233-1)*180/(N233-1);
    Etag233=Etag233+2*Einstrahlung_parallel(phi233,ntag233)*cos(pi*phi233/180)
    *dphi233;
end;
Ejahr233=Ejahr233+Etag233;

```

```

    Berechnung_Prozent=j233*100/M233
end;
Durchschnitt_Einstrahlung_parallel=Ejahr233*1000*3600/(365*24*3600*4)

```

[A 2.4.7] Name: Rueckstrahlung_kurz.m

```

function sumE234 = Rueckstrahlung_kurz(phi234,n234)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

A234=SA3D(phi234,n234);
WD234=WD3D(phi234,n234);
H234=WH3D(phi234,n234);
t234=tau3D(phi234,n234);
E234=0;
m234=600;
phi234=phi234*pi/180;
delta234=n234*2*pi/Jahr;
alpha234=acos(sin(epsilon)*cos(delta234));

for i234=0:m234:Tag;
    beta234=-pi+2*pi*i234/86400;
    costeta234=sin(alpha234)*cos(phi234)*cos(beta234) -
cos(alpha234)*sin(phi234);
    if costeta234>0
        LM234=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta234)^2)^(0.5)-Re*costeta234;

        IW1=m234*Po*WD234*costeta234;
        IW2=IW1*exp(-Kext*LM234*(Ho-H234)/Ho);

        IWR1=IW2*(1-Kmax)*(t234/(t234+1));
        IWR2=IWR1*(1-exp(-Kext*(Ho-H234)));

        IWtrans=IW2/(1+t234);

        IWR_streu=(1-WD234)*(Kstr/Kext)*(IWR1-IWR2);

        IE1=m234*Po*(1-WD234)*costeta234;
    end
end

```

```

IE2=IE1*exp(-Kext*LM234);

IER1=IE2*A234;

IWR_E2=IWR_E1*exp(-Kext*H234);

IWR_ER1=IWR_E2*A234;

Ei234=IER1+IWR_ER1;
else
Ei234=0;
end
E234=E234+Ei234;
end
sumE234=E234/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.4.8] Name: Durchschnitt_Rueckstrahlung_kurz.m

```

N233=181;
M233=365;
dphi233=pi/(N233-1);
Ejahr233=0;
for j233=1:M233;
ntag233=j233;
Etag233=0;
for i233=1:N233;
phi233=-90+(i233-1)*180/(N233-1);
Etag233=Etag233+2*Rueckstrahlung_kurz(phi233,ntag233)*cos(pi*phi233/180)*d
phi233;

end;
Ejahr233=Ejahr233+Etag233;
Berechnung_Prozent=j233*100/M233
end;
Durchschnitt_EObs=Ejahr233*1000*3600/(365*24*3600*4)

```

[A 2.4.9] Name: OEabsorp.m

```

function sumE232 = OEabsorp(phi232,n232)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;

```

```

L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

R_l1=0.431;
A232=SA3D(phi232,n232);
WD232=WD3D(phi232,n232);
H232=WH3D(phi232,n232);
t232=tau3D(phi232,n232);
E232=0;
m232=600;
phi232=phi232*pi/180;
delta232=n232*2*pi/Jahr;
alpha232=acos(sin(epsilon)*cos(delta232));

for i232=0:m232:Tag;
    beta232=-pi+2*pi*i232/86400;
    costeta232=sin(alpha232)*cos(phi232)*cos(beta232)-
cos(alpha232)*sin(phi232);
    if costeta232>0
        LM232=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta232)^2)^(0.5)-Re*costeta232;

        IW1=m232*Po*WD232*costeta232;
        IW2=IW1*exp(-Kext*LM232*(Ho-H232)/Ho);

        IWR1=IW2*(1-Kmax)*(t232/(t232+1));
        IWR2=IWR1*(1-exp(-Kext*(Ho-H232)));

        IWtrans=IW2/(1+t232);

        IWR_streu=(1-WD232)*(Kstr/Kext)*(IWR1-IWR2);

        IW_Luft_abs1=(Kabs/Kext)*(IW1-IW2);

        IW_Luft_abs2=(Kabs/Kext)*(IWR1-IWR2);

        IW_abs=Kmax*IW2*t232/(t232+1);
        IW_Lang_zurE=0.5*(1-
R_l1)*(IW_Luft_abs1+IW_Luft_abs2+IW_abs)*(1-WD232);

        IE1=m232*Po*(1-WD232)*costeta232;
        IE2=IE1*exp(-Kext*LM232);

        IER1=IE2*A232;
        IER2=IER1*exp(-Kext*Ho);

        IEabs=IE2-IER1;
        IS6_1=IER1*WD232;

        IER_str=(1-WD232)*(Kstr/Kext)*(IER1-IER2);

```

```

IS6_2=0.5*(Kabs/Kext)*(IE1-IE2);

IS6_3=0.5*(1-WD232)*(Kabs/Kext)*(IER1-IER2);

IS6=IS6_1+IS6_2+IS6_3;

IWR_E1=IWR_streu+IWtrans;

IWR_E2=IWR_E1*exp(-Kext*H232);

IWR_ER1=IWR_E2*A232;
IWR_ER2=IWR_ER1*exp(-Kext*Ho);

IWR_Eabs=IWR_E2-IWR_ER1;

IWR_S6_1=IWR_ER1*WD232;

IWR_ER_str=(1-WD232)*(Kstr/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

IWR_S6_2=0.5*(Kabs/Kext)*(IWR_E1-IWR_E2);

IWR_S6_3=0.5*(1-WD232)*(Kabs/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

IWR_S6=IWR_S6_1+IWR_S6_2+IWR_S6_3;

Ei232=IW_Lang_zurE+IEabs+IER_str+IS6+IWR_Eabs+IWR_ER_str+IWR_S6;

    else
        Ei232=0;
    end
    E232=E232+Ei232;
end
sumE232=E232/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.4.10] Name: Durchschnitt_OEabsorp.m

```

N233=181;
M233=365;
dphi233=pi/(N233-1);
Ejahr233=0;
for j233=1:M233;
    ntag233=j233;
    Etag233=0;
    for i233=1:N233;
        phi233=-90+(i233-1)*180/(N233-1);
        Etag233=Etag233+2*OEabsorp(phi233,ntag233)*cos(pi*phi233/180)*dphi233;
    end;
    Ejahr233=Ejahr233+Etag233;
    Berechnung_Prozent=j233*100/M233
end;
Durchschnitt_EOabs=Ejahr233*1000*3600/(365*24*3600*4)

```

[A 2.5.1] Name: OEAbstrahlung2.m

```

function sumE235 = OEAbstrahlung2(phi235,n235)
epsilon=23.4392794;
epsilon=pi*epsilon/180;
L=3.846*(10^26);
a=149597870701;
Po=L/(4*pi*(a^2));

Tag=24*60*60;
Jahr=365;
Re=6371;
Ho=8.434;
Kext=0.021925;
Kabs=0.01126;

Kstr=Kext-Kabs;
Kmax=(0.317+Kabs/Kext)/2;

R_l1=0.431;
Abkuelung=390/493;
A235=SA3D(phi235,n235);
WD235=WD3D(phi235,n235);
H235=WH3D(phi235,n235);
t235=tau3D(phi235,n235);
R_l=R_l1*(1-WD235)+(1-(1-R_l1)^(H235/Ho)/(t235+1))*WD235;
E235=0;
m235=120;
phi235=phi235*pi/180;
delta235=n235*2*pi/Jahr;%
alpha235=acos(sin(epsilon)*cos(delta235));

for i235=0:m235:Tag;
    beta235=-pi+2*pi*i235/86400;
    costeta235=sin(alpha235)*cos(phi235)*cos(beta235)-
cos(alpha235)*sin(phi235);
    if costeta235>0
        LM235=(Ho^2+2*Ho*Re+(Re*costeta235)^2)^(0.5)-Re*costeta235;

        IW1=m235*Po*WD235*costeta235;
        IW2=IW1*exp(-Kext*LM235*(Ho-H235)/Ho);

        IWR1=IW2*(1-Kmax)*(t235/(t235+1));
        IWR2=IWR1*(1-exp(-Kext*(Ho-H235)));

        IWtrans=IW2/(1+t235);

        IWR_streu=(1-WD235)*(Kstr/Kext)*(IWR1-IWR2);

```

```

IW_Luft_abs1=(Kabs/Kext)*(IW1-IW2);
IW_Luft_abs2=(Kabs/Kext)*(IWR1-IWR2);
IW_abs=Kmax*IW2*t235/(t235+1);
IW_Lang_zurE=0.5*(1-
R_l1)*(IW_Luft_abs1+IW_Luft_abs2+IW_abs)*(1-WD235);

IE1=m235*Po*(1-WD235)*costeta235;
IE2=IE1*exp(-Kext*LM235);

IER1=IE2*A235;
IER2=IER1*exp(-Kext*Ho);

IEabs=IE2-IER1;
IS6_1=IER1*WD235;

IER_str=(1-WD235)*(Kstr/Kext)*(IER1-IER2);

IS6_2=0.5*(Kabs/Kext)*(IE1-IE2);

IS6_3=0.5*(1-WD235)*(Kabs/Kext)*(IER1-IER2);

IS6=IS6_1+IS6_2+IS6_3;

IWR_E1=IWR_streu+IWtrans;

IWR_E2=IWR_E1*exp(-Kext*H235);

IWR_ER1=IWR_E2*A235;
IWR_ER2=IWR_ER1*exp(-Kext*Ho);

IWR_Eabs=IWR_E2-IWR_ER1;

IWR_S6_1=IWR_ER1*WD235;

IWR_ER_str=(1-WD235)*(Kstr/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

IWR_S6_2=0.5*(Kabs/Kext)*(IWR_E1-IWR_E2);

IWR_S6_3=0.5*(1-WD235)*(Kabs/Kext)*(IWR_ER1-IWR_ER2);

IWR_S6=IWR_S6_1+IWR_S6_2+IWR_S6_3;

Ei235=IW_Lang_zurE+IEabs+IER_str+IS6+IWR_Eabs+IWR_ER_str+IWR_S6;

Ei235=Abkuelung*Ei235/(1-R_l1);

else
Ei235=0;
end
E235=E235+Ei235;
end
sumE235=E235/(3.6*1000000);
end

```

[A 2.5.2] Name: To_Darstellen2.m

```

N236=181;
M236=366;
sigma=5.670373*(10^(-8));
for i236=1:N236;
    phi236(i236)=-90+(i236-1)*180/(N236-1);
for j236=1:M236;
    ntag236(j236)=j236-1;

Etag236(i236,j236)=OEabstrahlung2(phi236(i236),ntag236(j236))*1000*3600/(2
4*3600);

    To236(i236,j236)=(Etag236(i236,j236)/sigma)^0.25-273;
end;
    Berechnung_Prozent=i236*100/N236
end;
surf(ntag236,phi236,To236)

```

[A 2.5.3] Name: OE_Tjahr_phi_1.m

```

N236=91;
M236=366;
sigma=5.670373*(10^(-8));
Jahr=365;
Tag=24;
for i236=1:N236;
    phi236(i236)=-90+(i236-1)*180/(N236-1);
    Ejahr236=0;
    for j236=1:M236;
        ntag236(j236)=j236-1;
        Etag236=OEabstrahlung2(phi236(i236),ntag236(j236));

        Ejahr236=Ejahr236+Etag236;
    end;
    OETjahr236(i236)=(Ejahr236*1000*3600/(sigma*365*Tag*3600))^0.25-273;
    Berechnung_Prozent=i236*100/N236
end;
plot(phi236,OETjahr236,'r-')
title('Verteilung der jährlichen Temperatur auf Breitengrad');
xlabel('Breitengrad');
ylabel('Temperatur (Celcius Grad)');
grid on

```

[A 2.5.4] echtetemp.m

```

function Temp237 = echtetemp(phi237)

a237=[-45 -40 -37 -18 -13 3 10 20 24.5 26.5 26 28.5 27 18 13 3 1 -14 -17 -
18];
b237=[-90.01 -85 -78 -69 -67 -50 -43 -30 -19 -7 0 13 23 34 42 53 59 80 86
90.01];

i2371=max(find(b237<=phi237));
i2372=min(find(b237>phi237));
Temp237=wert223(a237(i2372),a237(i2371),b237(i2372),b237(i2371),phi237);
end

```

[A 2.5.5] OE_T_phi_Korrigieren1.m

```

N240=181;
M240=366;
sigma=5.670373*(10^(-8));
R_Erde=6370*1000;
Jahr=365;
Tag=24;
dphi240=pi/(N240-1);
AbgebenE=0;
AufnahmeE=0;
for i240=1:N240;
    phi240(i240)=-90+(i240-1)*180/(N240-1);
    Ejahr240=0;
    for j240=1:M240;
        ntag240(j240)=j240-1;
        Etag240=OEabstrahlung2(phi240(i240),ntag240(j240));
        Ejahr240=Ejahr240+Etag240;
    end;
    T240=(Ejahr240*1000*3600/(sigma*365*Tag*3600))^0.25;

    Temp240(i240)=T240;
    eT240=echttemp(phi240(i240))+273;

    eTemp240(i240)=eT240;
    if T240>eT240
        AbgebenE=AbgebenE+sigma*(T240^4-
eT240^4)*2*pi*R_Erde^2*cos(pi*phi240(i240)/180)*dphi240;
    else
        AufnahmeE=AufnahmeE+sigma*(eT240^4-
T240^4)*2*pi*R_Erde^2*cos(pi*phi240(i240)/180)*dphi240;
    end;
    Berechnung1_Prozent=i240*100/N240
end;
AbgebenE=AbgebenE/10^15;
AufnahmeE=AufnahmeE/10^15;
Etransport=(AbgebenE+AufnahmeE)/2;
K240ab=Etransport/AbgebenE;
K240auf=Etransport/AufnahmeE;
for i240=1:N240;
    T240=Temp240(i240);
    eT240=eTemp240(i240);
    if T240>eT240
        korrTemp240(i240)=(T240^4-K240ab*(T240^4-eT240^4))^0.25-273;
    else
        korrTemp240(i240)=(T240^4+K240auf*(eT240^4-T240^4))^0.25-273;
    end;
    Berechnung2_Prozent=i240*100/N240
end;
Etransport
Qtransport=Etransport*10^15/(4*pi*R_Erde^2)
hold off
plot(phi240,Temp240-273,'r-')
hold on
plot(phi240,korrTemp240,'m-')
plot(phi240,eTemp240-273,'b-')
hold off

```

[A 3.1.1]: CD/DVD):\Anhang\A 3.1.1.MOV

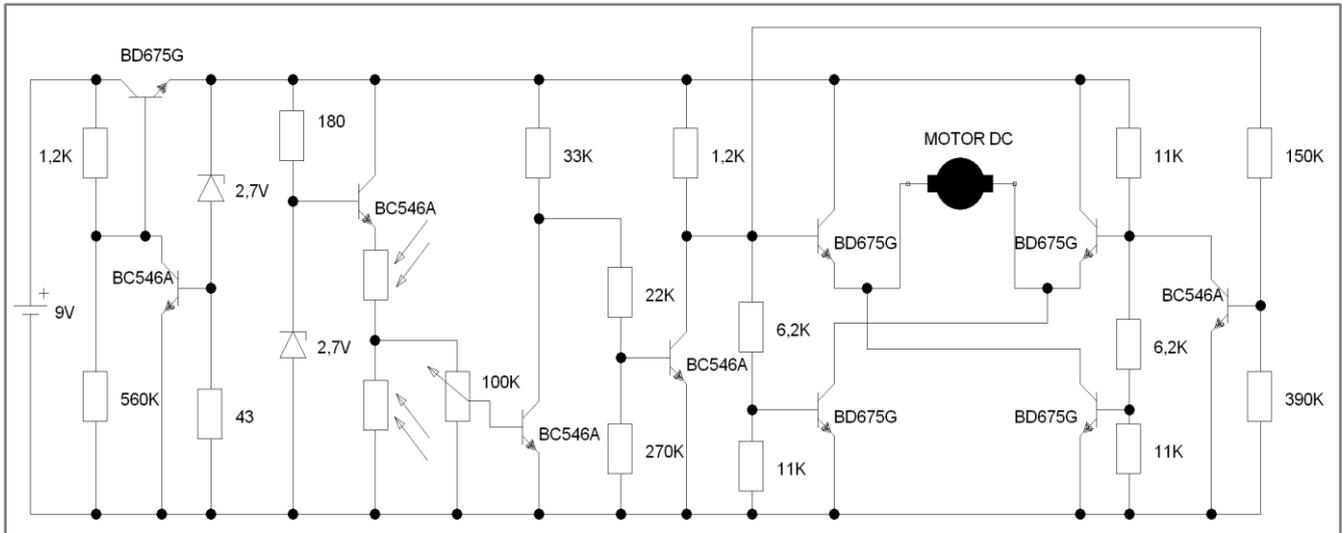
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmckNJSEsxcTJEM28/view?usp=sharing>

[A 3.2.1]: CD/DVD):\Anhang\A 3.2.1.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmWVN5QV9udks3TGs/view?usp=sharing>

[A 3.2.2]: CD/DVD):\Anhang\A 3.2.2.MOV
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmX3dBbWJ6ZGdfZGM/view?usp=sharing>

[A 3.2.3]: CD/DVD):\Anhang\A 3.2.3.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmb1d2emw3R1pyWFE/view?usp=sharing>

[A 3.2.4]:



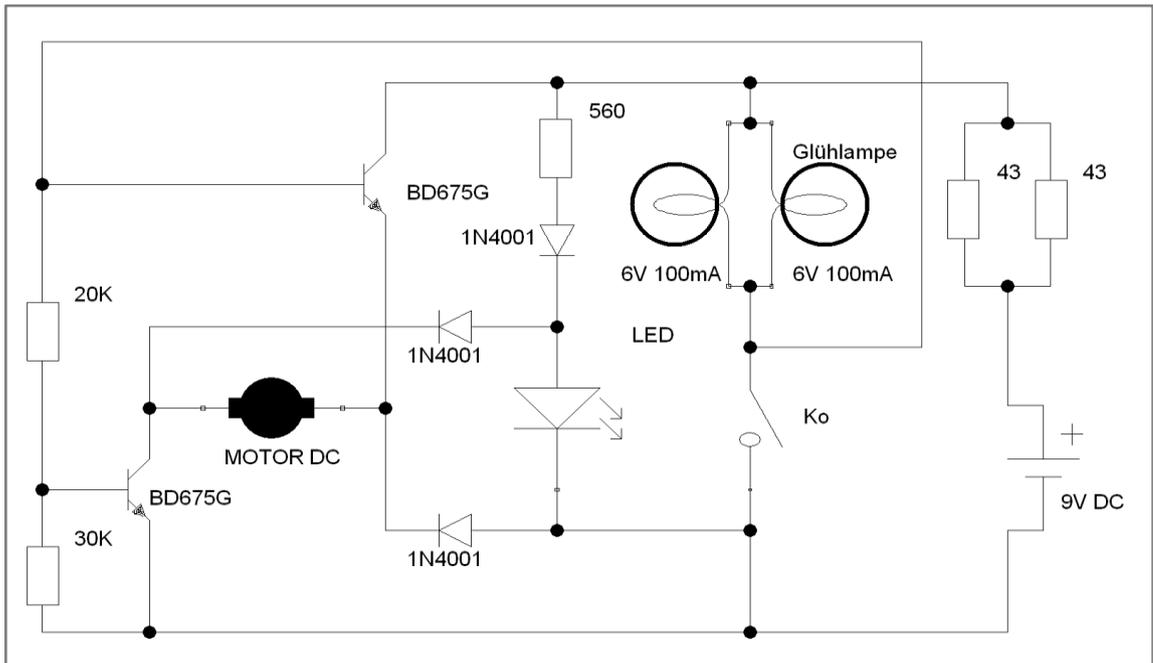
[A 3.2.5]: CD/DVD):\Anhang\3\A 3.2.5.MOV
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmd00yLUtLaGs1Wms/view?usp=sharing>

[A 3.2.6]: CD/DVD):\Anhang\3\A 3.2.6.exe
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmQUFQLXBRTHR0WXc/view?usp=sharing>

[A 3.2.7]: CD/DVD):\Anhang\3\A 3.2.7.MOV
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmbmU1Y2FMcnFwT00/view?usp=sharing>

[A 3.2.8]: CD/DVD):\Anhang\3\A 3.2.8.MOV
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmZGtOZ0MtaDJRVzA/view?usp=sharing>

[A 3.3.1]:



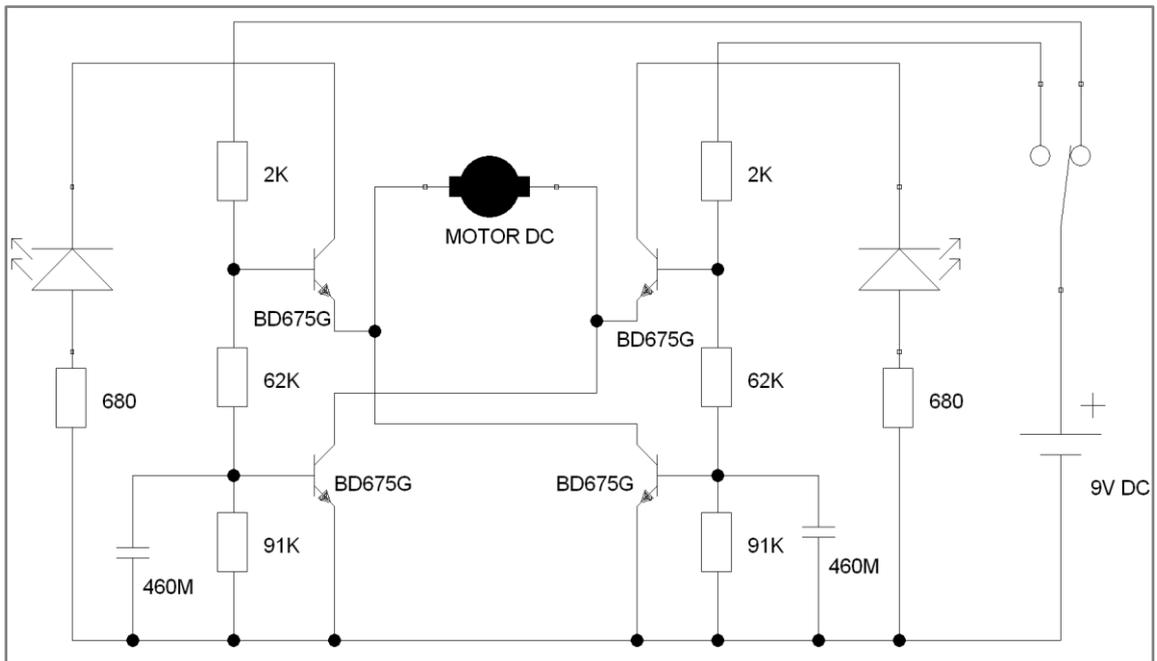
[A 3.3.2]: CD/DVD) : \Anhang\3\A 3.3.2.MOV

<https://drive.google.com/file/d/0Bzd7CfLDRkKmRU54bFJfaXJXaU0/view?usp=sharing>

[A 3.4.1]: CD/DVD) : \Anhang\3\A 3.4.1.MOV

<https://drive.google.com/file/d/0Bzd7CfLDRkKmd2c4M0FvTFRoeHM/view?usp=sharing>

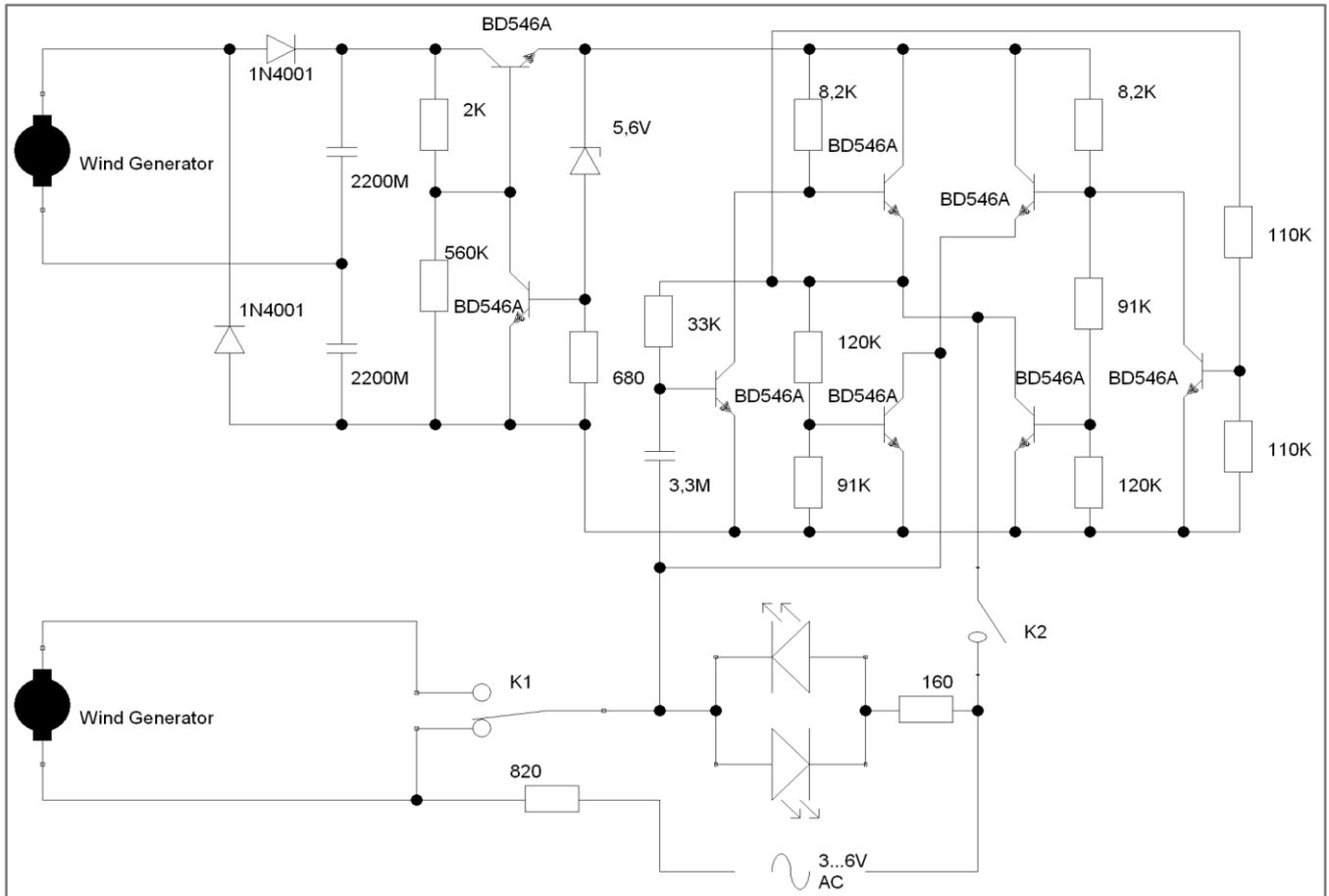
[A 3.4.2]:



[A 3.4.3]: CD/DVD) : \Anhang\3\A 3.4.3.MOV

<https://drive.google.com/file/d/0Bzd7CfLDRkKmN18wbGJYWC0zVFE/view?usp=sharing>

[A 3.4.4]:



[A 3.4.5]: CD/DVD) : \Anhang\3\A 3.4.4.MOV
<https://drive.google.com/file/d/0BzD7CfLDRkKmbVUzY2NMSzJFV0U/view?usp=sharing>

[A 4.1]: CD/DVD) : \Anhang\4\4.1
<https://drive.google.com/folderview?id=0BzD7CfLDRkKmfRvZDZxQUVBV0VXVjgwT2VrU0JtTHdtZGpRMTBPR1hJVURYWUftQkRyWHc&usp=sharing>

Danksagung

Von ganzem Herzen danke ich allen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Oliver Schwarz für die interessierte, freundschaftliche aber auch geduldige Betreuung,
- Vietnam MOET, Herrn Prof. Oliver Schwarz und DAAD für ihre Stipendien und für die wichtige finanzierte Unterstützung,
- Herrn Christoph Springob für wichtige Hilfestellungen besonders in den Experimentierphasen,
- Herrn Adrian Weber, Herrn Christian Deitersen und Herrn Simon Kraus für die Hilfe bei der Erprobung in der Schule,
- Herrn Dr. Eduard Krause, Frau Sabine Schirm-Springob und Frau Cornelia Schulte für ihre Hilfe beim Korrekturlesen meiner Arbeit,
- Allen Mitarbeitern der Abteilung Physikdidaktik: Herrn Prof. Wolfram Winnenburg, Herrn Prof. Manfred Bodemann, Herrn Dr. Henrik Bernshausen, Herrn Dr. Volker Heck, Frau Dr. Ina Militschenko und Frau Lenka Bzduskova für die zahlreichen hilfreichen Unterstützungen.

Danken möchte ich auch meine Frau Hoàng Thị Nga und meine Eltern: Trần Văn Phầm und Đỗ Thị Tính für ihre Unterstützung.

Erklärung

Ich erkläre(,)

1. dass mir die Promotionsordnung vom 11. September 2012 bekannt ist und von mir anerkannt wird.
2. dass ich weder früher noch gleichzeitig bei einer anderen Hochschule oder in einer anderen Fakultät ein Promotionsverfahren beantragt habe.
3. hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer, nicht angegebener Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Es wurden keine Dienste eines Promotionsvermittlers oder einer ähnlichen Organisation in Anspruch genommen.
4. dass in meiner Dissertation keine Forschungsergebnisse verwendet worden sind, die in Zusammenarbeit mit den folgenden Wissenschaftlern gewonnen wurden.

Siegen, den 30.6.2015
