SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 5 • 2015**

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Mit Beiträgen von

T. Bedürftig | A. Binder | M. Janßen | E. Pernkopf | M. Wille

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge
zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 5 (2015)

Mit Beiträgen von:

T. Bedürftig | A. Binder | M. Janßen | E. Pernkopf | M. Wille

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 5 (2015)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2015

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.
2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.
3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

Vorwort

> “And now let us hear about the butterflies at Herondale,” continued Mr. Arden. “But perhaps we ought to think of the three sieves, before we allow ourselves to speak of others,” observed the Bishop. (...) a maxim, which all will do well to attend to when they speak of those that are absent. The maxim is this, that before we allow ourselves to find fault with any one behind his back, we should ask ourselves three questions. The first, ’Is it true?’ The second, ’Is it kind?’ The third, ’Is it necessary?”’ (...) “But would there be any conversation,” said Lady Herondale, “if this maxim were rigidly observed?” “We all talk too much,” replied the Bishop, “and much that we say is exceedingly unprofitable, often not strictly true, very often unkind, and still more often unnecessary.”

Die drei Siebe, deren Gebrauch der Bischof für die Konversation empfiehlt[1], würden – strikt interpretiert – wohl kaum einen Aufsatz für die Siegener Beiträge hindurchlassen. Ließe man allenfalls noch ihre Wahrheit (in einem zu klärenden Sinne!) gelten, so ist ein freundlicher Umgang mit den Protagonisten, über die berichtet wird, wohl kaum ein gängiges Kriterium und zudem stets in der Gefahr, mit der Wahrheit in Konflikt zu geraten. Vor allem aber ist es die Notwendigkeit der Mitteilung, die wohl im strikten Sinne kein wissenschaftlicher Beitrag reklamieren kann.

Dennoch mag eine orientierende Rückfrage im Sinne dieser drei Siebe von Zeit zu Zeit auch im Kontext eines Beitrags zur wissenschaftlichen Konversation durchaus hilfreich sein. Dabei gilt die Bemühung um Wahrheit zwar als selbstverständliches Kriterium, folgt man Niklas Luhmann geradezu als *das* Charakteristikum der wissenschaftlichen Kommunikation. Zu beachten ist dabei allerdings, dass das erste Sieb nicht einmal im Kontext der Alltagskommunikation problemlos und unkontrovers anzuwenden ist.

Was die Freundlichkeit angeht, so könnte es gerade auch im Kontext von Philosophie und Geschichte durchaus angezeigt sein, gelegentlich zu fragen, ob die

1. Rev. Charles B. Tayler, M.A.: *Lady Mary; or, not of the World.* New-York ^{3}1848, p.186.

Diskussion der Positionen fremder und häufig zeitlich entfernter Autoren tatsächlich von einem Grundton der Wertschätzung getragen ist, auch wenn — aus der eigenen Perspektive — berechtigte Kritik vorgetragen wird. Auf der anderen Seite ist ein Übermaß an Nettigkeit zu Lasten der wissenschaftlichen Redlichkeit ebenfalls zu meiden. Es kommt hier wohl auf eine freundlichen Mitte zwischen einem jovialen oder gar abqualifizierenden und einem heroisierenden Umgang an.

Fragen wir schließlich nochmals nach der Notwendigkeit, so kann diese Frage wohl immer nur in Bezug auf den jeweiligen Kontext sinnvoll gestellt werden und der Begriff der Notwendigkeit kann sicherlich nur in stark abgeschwächter Weise gemeint sein. Gleichwohl gilt auch und gerade im Bereich wissenschaftlichen Publizierens das Verdikt des Bischofs "We all talk too much". So bleibt den Herausgebern in Bezug auf das dritte Sieb die Hoffnung, dass die Leserschaft die Beiträge wenn auch nicht unbedingt als notwendig, so doch zumindest nicht als überflüssig und zuweilen sogar als erhellend und hilfreich empfindet. Die Vielfalt der Themen und Perspektiven dieses Bandes, die jedoch alle auf ihre Weise auf die Einheit des Bemühens um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik bezogen sind, macht es jedenfalls wahrscheinlich, dass dies für alle Leserinnen und Leser zumindest bei einem Teil der Beiträge gilt.

Wir freuen uns, hiermit den fünften Band der Siegener Beiträge, neben zwei monographischen Beiträgen den dritten Sammelband, vorlegen zu können. Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken. Unser herzlicher Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Daniel Rompf für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow, Martin Schubert und Markus Bauer für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Inhaltsverzeichnis

Was ist ein Punkt? – Ein Streifzug durch die Geschichte.

Thomas Bedürftig

1 Vorwort

Punkte sind überall. Sie bestimmen unseren Alltag. Zeitpunkte teilen unsere Zeit, wir orientieren uns an Punkten im Raum. Wir setzen sie oder finden sie vor. Wir setzen sie, wenn wir „Jetzt“ sagen, planen oder Treffpunkte festlegen. Wir finden sie vor im Tageslauf und im Kalender, als Grenzen und Positionen.

Beim Malen und Zeichnen haben Punkte eine andere, eine bildliche Realität. Sie sind Abbilder realer Erscheinungen oder Zeichen für Reales. Der Pointillismus löste seine Bilder in Licht- und Farbpunkte auf.

Mathematisch sind Punkte seit alten griechischen Zeiten Abstraktionen und Idealisierungen solcher realen Punkte. Mathematiker sprachen und sprechen viel von Punkten, viele ihrer Gedanken wurden und werden von den Vorstellungen über Punkte begleitet und gelenkt.

Ich habe mir vorgenommen, den kleinen mathematischen Gegenstand „Punkt“ durch die Geschichte der Mathematik zu verfolgen und den Wandel seiner Bedeutung zu beobachten. Der Schwerpunkt wird in der Zeit seit dem 19. Jahrhundert liegen, in dem die Mathematik eine epochale Wende vollzog. Man sprach damals und spricht heute wie selbstverständlich von Punkten. Was sie aber sind, scheint tief im mathematischen Unterbewusstsein verborgen zu sein.

Mein Plan ist es, die Aufmerksamkeit auf den Begriff des Punktes zu lenken und das vielleicht nicht älteste, aber doch das kleinste mathematische Geheimnis ein wenig zu lüften.

Motive

Was ist ein Punkt? Das ist heute ein dumme Frage. Es gibt keine dummen Fragen? Für den modernen Mathematiker schon. Das Beste, was wir ihm mit unserer Frage entlocken können, ist ein „axiomatisches Lächeln“. Denn seitdem wir die Hilbertsche Axiomatik haben, fragt man so etwas nicht. Der „Punkt“ ist ein Grundbegriff und das bedeutet, dass man schweigt.

Wir denken uns aber *nicht nichts* dabei, wenn wir von Punkten sprechen. Mathematiker sind vielleicht Formalisten. Formalismus aber ist nur ein Rückzugsgebiet. Er hat uns mathematisch befreit davon, sagen zu *müssen*, was etwas ist, aber nicht davon, uns bewusst zu sein darüber, worüber wir sprechen.

Woher kommen unsere geometrischen Axiome? Aus unseren Vorstellungen – gerade auch aus unseren Vorstellungen über Punkte. Sie stecken in den Axiomen. Vergessen wir, was wir uns vorstellen, wenn die Axiome dastehen und wir Sätze beweisen? Nein. Wir verwenden unsere Vorstellungen dabei nur nicht als Beweismittel. Beweise sind im Prinzip logisch, eben formal. Im Prinzip! Bei allem nämlich werden sie von unseren Vorstellungen begleitet und geleitet. Was sind unsere Vorstellungen vom Punkt? Was ist ein Punkt? Das sollten wir *versuchen* zu wissen.

2 Zurück zu den Wurzeln

Wir streifen im folgenden einige historischen Aussagen. Ich spreche knapp, da es um einen Überblick geht und wir unsere heutigen Auffassungen erreichen wollen. Zuerst schauen wir weit zurück, in die Mathematik des alten Griechenland.

Aristoteles und Euklid

Wir beginnen mit Euklid. Er hat den Punkt an den Anfang der Mathematik gesetzt: Das 1. Wort im 1. Satz im 1. Buch der *Elemente* ist „Punkt “. Seine berühmte Definition, so scheint mir, glauben wir heute noch. Sie beträgt griechisch ganze fünf *apodiktische* Worte:

1. *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.*

So hat sie Clemens Thaer übersetzt (Thaer 1933–1937):

1. „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“

„Punkt!“ ist man versucht zu sagen. Diktum.

Das ist, wenn wir näher hinschauen, eine merkwürdige Definition – auch für die axiomatischen Verhältnisse bei Euklid. Sie ist eine explizit *negative* Charakterisierung. Sie sagt, was Punkte *nicht haben*, und nicht, was sie *sind*. Eine derartige Formulierung kann man als Bestimmung, als geometrische Definition nur akzeptieren, wenn die Punkte in dieser Formulierung abgegrenzt werden von den anderen geometrischen Elementen. Das sind die Linien, Flächen und Körper – die geometrischen *Kontinua*. Sie haben, anders als die Punkte es haben sollen, Teile. Aristoteles, dessen Philosophie im alten Griechenland grundlegend war und Euklid wesentlich beeinflusst hat (s. Bedürftig und Murawski 2015, S. 40 f), hat das Kontinuierliche so charakterisiert – ich zitiere aus (Aristoteles *Physik*):

> Kontinuierlich ist das, das „teilbar in immer wieder Teilbares ist“ (231 b 16).

Das Unteilbare, das *Andere* sind die Punkte.

> Der Punkt ist das Gegenüber, der „Antipode“ des Kontinuums.
>
> Der Punkt ist das „Nichtkontinuum“.

Folgen wir bei Euklid den Definitionen der *kontinuierlichen* geometrischen Elemente, so verstärkt sich diese Gegenüberstellung von Punkt und Kontinuum noch. Im Buch XI steht, was ein massiver Körper ($\sigma\tau\epsilon\varrho\epsilon\acute{o}\nu$) ist:

> „Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat.“ (Buch XI, Definition 1.)

Im 1. Buch finden wir:

> „Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.“ (Buch I, Definition 5.)
> „Ein Linie aber Länge ohne Breite.“ (Buch I, Definition 2.)

Was bleibt für den Punkt übrig: *Nichts.* In Euklids griechischen Worten:

> 1. Ein Punkt ist, dessen Teil Nichts ist.

$o\grave{\upsilon}\vartheta\acute{\epsilon}\nu$ heißt soviel wie „nichts“, „niemand“, „keiner“. Die Variante der Übersetzung mit „Nichts“ gibt Clemens Thaer in seinen Anmerkungen (S. 418) an, hält seine Version aber für „sinnvoller“. Ich nehme an, dass die Formulierung „Ein Punkt ist, dessen Teil nichts ist.“ die richtigere Übersetzung ist. Sie entspricht der aristotelischen Auffassung, in der die Kontinua das Primäre sind und Punkte – als Grenzen und Teilpunkte – das Sekundäre. Bemerkenswert ist, wir haben es oben schon gesagt, dass der Punkt bei Euklid nicht begrifflich, aber in anderer Weise primär wird: Er steht am Anfang der geometrischen Elemente und der Mathematik.

Thaers Übersetzung „was keine Teile hat“ erinnert zudem an die alten „unteilbaren“ Atome der alten Atomisten. Dieser Bezug passt nicht. Denn bei den Atomisten bildeten Atome die physischen und auch die geometrischen Körper, was Punkte bei Aristoteles gerade nicht tun:

> „Es ist unmöglich, dass etwas Kontinuierliches aus Unteilbarem besteht.“ (231 a 24)

Also:

> Kontinua bestehen *nicht* aus Punkten.

Der Punkt ist der Repräsentant des Diskontinuierlichen. Er wird der Schlüssel zum Verständnis des Kontinuums, das bisher nur – wie der Punkt – negativ charakterisiert ist. Im *Gegenüber* und *Zusammenspiel* von beiden erfahren wir Positives über die *Kraft* des „Zusammenhaltens“, das die erste Bedeutung des griechischen Wortes „$\sigma\upsilon\nu\epsilon\chi\acute{\epsilon}\varsigma$“ (synechés) ist. „Kontinuum“ kommt von continere, das das Gleiche bedeutet. Wir beobachten:

> Punkte sind Grenzen von Linien. Die Linie *verbindet* Grenzpunkte und hält sie zusammen. Punkte fassen die Linie ein.
>
> In Grenzpunkten berühren und verbinden sich Kontinua. Zwei Grenzpunkte werden zu einem Punkt – wie in einer „Punktfusion“.
>
> Der Punkt, der teilt, gehört zu *beiden* Teilen des linearen Kontinuums. Er ist unteilbar und verbindet die Teile.
>
> Der Punkt teilt Kontinua, zerteilt aber nicht notwendig. Er ist „Einer“.
>
> Zerteilen eines Kontinuums in einem Punkt benötigt die Kraft einer „Punktspaltung“.

Wir haben die alten Vorstellungen der Stetigkeit der Linie plastisch vor uns. Punkte und Linien bei Aristoteles sind nicht bloße Abstraktionen. Sie haben als Formen die alte, bildende Kraft der platonischen Ideen. Im Zusammenspiel und Gegenüber von Kontinua und Punkten werden die Kräfte des Zusammenhaltens und des Unteilbaren deutlich.

Von dem aristotelischen Punkt, der einfasst, teilt und verbindet, bleibt in Euklids Definition das Gegenüber zum Kontinuum:

> Der Punkt ist das Nichtkontinuum.

Soviel zur Diskussion der Charakterisierung des Punktes bei Aristoteles und Euklid, die in der Geschichte der Mathematik über 2000 Jahre maßgebend war. Euklids Definition scheint uns auch heute noch von einer Antwort auf unsere Titelfrage zu befreien. – Da sie so geläufig ist, halten wir uns im Folgenden an die Übersetzung der Definition durch C. Thaer.

Kleine Notiz zu Archimedes

Wenn wir vom Räumlichen in Formulierungen bei Demokrit ins Lineare schließen (vgl. Bedürftig 2012, S. 162 ff), so waren Punkte Atome, linear also atomare Strecken, und diese waren sehr klein. Bei Archimedes werden sie unendlich klein. Auch bei Archimedes können wir nur indirekt auf seine Auffassung über die Punkte schließen (loc.cit. 164 ff).

Archimedes spricht nicht über die Punkte. Sagen aber tut Archimedes etwas über Strecken. Sie bilden Flächen. Das folgende Zitat ist gut bekannt:

> „Und weil aus den Strecken im Dreieck $\gamma\zeta\alpha$ das Dreieck $\gamma\zeta\alpha$ besteht, [...]“

Das steht so in seiner heuristischen Parabelquadratur.

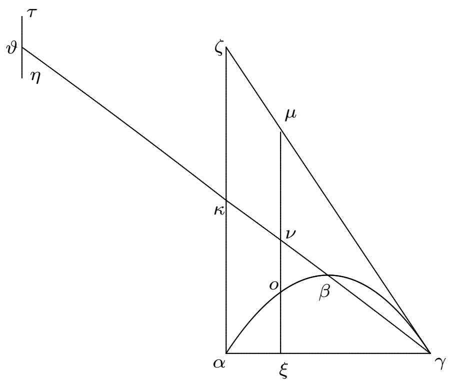


Abbildung. *Aus der Parabelquadratur nach Archimedes (vgl. Bedürftig und Murawski 2015, S. 190)*

Das geht nur, wenn Strecken *nicht* „Länge ohne Breite“ sind. Sie müssen dünn sein, „unendlich dünn“ wohl, aber *nicht* „ohne Breite“. Darüber hütet sich Archimedes, etwas zu sagen, und betont ausdrücklich den heuristischen Charakter seiner Überlegungen, die er in einem geometrischen Exhaustionsbeweis mathematisch „legalisiert“.

Wir übertragen Archimedes' Satz über Strecken, die eine Fläche bilden, in einen Satz über Punkte und Strecke:

> „Und weil aus den Punkten in einer Strecke $\gamma\alpha$ die Strecke $\gamma\alpha$ besteht, [...]"

Das ist gegen Aristoteles Verbote und Euklids Auffassung gedacht. Also:

> Aus unendlich vielen Punkten ist die Strecke $\gamma\alpha$ zusammengesetzt. Punkte können wir uns wie unendlich kleine Strecken vorstellen.

Zusammenfassung

Wir fassen die wenigen Altertümlichkeiten über den Punkt zusammen. Dabei füge ich noch Demokrit ein, den berühmten Atomisten, der sich geometrische wie physische Köper aus Atomen aufgebaut vorstellte.

> Bei *Demokrit* sind Punkte Atome, linear atomare Strecken, aus denen Strecken zusammengesetzt sind.
>
> Bei *Aristoteles* sind Punkte Grenzen, Teilpunkte und Verbindungen von Linien. Unendlich kleine Linienstücke sind undenkbar. Linien sind weder aus Punkten noch aus unendlich kleinen Linienstücken zusammengesetzt.
>
> *Euklid* definiert den Punkt als das geometrische „Gegenstück" zu den kontinuierlichen Grundelementen Linie, Fläche, Körper. Der Punkt ist das Nichtkontinuum.
>
> In *Archimedes* Heuristik sind Punkte unendlich kleine Strecken, aus denen die Strecken „bestehen".

Die Auffassungen des Aristoteles dominierten und bestimmten über Euklid die Auffassungen in der Mathematik bis ins 19. Jahrhundert. Der Punkt war das Gegenüber, der „Antipode" des Kontinuums.

3 Scholastik und Leibniz

Wir werfen nun einen sehr flüchtigen Blick auf die Punkte in der Scholastik bis zu Leibniz und fassen grob zusammen.

Scholastiker

Die *Indivisibilien* im Mittelalter sind nur sprachlich die Erben der *Atome* der griechischen Atomisten. Sie hießen jetzt lateinisch, waren aber bis zu Cavalieri mit der aristotelischen Kontinuumsauffassung vereinbar, die Atome nicht zuließ. Als die wörtlich „Unteilbaren“ waren sie wie die euklidischen Punkte. Zugleich aber schließen sie die Interpretation als unendlich kleine Strecken nicht aus, die später die Infinitesimalien wurden (vgl. Breidert 1979, S. 68ff) und die spätere Auffassung der scholastischen Indivisibilien beeinflussten.

Im Hintergrund der theologischen Diskussionen stehen die Kontinua der Zeit und der Bewegung. Punkte dort sind vornehmlich Grenzen und *Teilpunkte* von Linien, *Zeitpunkte* und „*Mobiles*“ in der Bewegung. Der Zeitpunkt ist das „Medium“, die (verbindende) Mitte in der Zeit – das „Nunc“ (Jetzt) –, das Vergangenheit und Zukunft verbindet. Punkte als „Mobiles“ sind die Träger der Bewegung.

Punkte werden bei Albertus Magnus (um 1200–1280) zum Ursprung des Kontinuums. Das ist unaristotelisch, da aristotelisch die Kontinua primär waren.

> „Continuum fluit ab indivisibili.“ (Zitiert nach Breidert 1979, S. 28)

Oder (loc.cit.):

> Der Punkt ist das „principium“ der Linie und „erzeugt sie durch sein Fließen“ („in processu facit lineam“).

Ob der Punkt dabei ideal, endlich oder unendlich klein ist, bleibt in der Scholastik unentschieden. Der Punkt ist das Wesen, die „forma“ der Linie – ohne Quantität. In späteren Spekulationen wird er auch als endlicher oder auch unendlich kleiner, indivisibler Teil der Linie angenommen.

Man spekuliert in der Scholastik darüber, ob die Linie primär aktuale Zusammensetzung von Punkten ist, aus der dann erst sekundär die potentiell unendliche Teilbarkeit der Linie folgt – wie bei Aristoteles. Die Linie so, als aktual unendliche Zusammensetzung von Punkten, übersehen zu können, ist dem Menschen nicht, aber vielleicht Gott möglich. Darüber wird lange, scharfsinnig, natürlich theologisch – und ohne abschließende Einigung – diskutiert.

Wir halten fest:

> Der Punkt ist primär.
>
> Er erzeugt das Kontinuum, das er begrenzt und dessen Teile er verbindet.
>
> Über seine Quantität wird spekuliert.

Die Frage der endlichen oder unendlichen Zusammensetzung der Linie aus Punkten wird diskutiert.

Leibniz

Die Neuzeit beginnt dort, wo Archimedes aufgehört hatte, offenbar ohne etwas von Archimedes' Methodenschrift zu wissen. Wir kennen das Cavalierische Prinzip, das räumlich oder eben ist. Wenn wir es auf die Linie reduzieren, können wir die Linie als Zusammensetzung aus unendlich vielen Punkten interpretieren.

> Punkte sind wie unendlich kleine Strecken,

eben wie bei Archimedes.

Bei Leibniz passiert etwas ganz Neues. Die scholastischen Indivisibilien teilen sich. Sie werden unendlich kleine Strecken *und* Punkte, die getrennte Wege gehen. Die Zusammensetzung der Linie wird zur Tatsache. Wir lesen:

> „Man muß aber wissen, daß eine Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, auch eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen, sondern eine Linie aus Linienstückchen (*ex lineolis*), eine Fläche aus Flächenstückchen, ein Körper aus Körperchen, die unbegrenzt klein sind (*ex corpusculis indefinite parvis*)." (Leibniz 1849-1863, Bd. 7, S. 273)

Also:

> Leibniz ist aristotelisch: Linien sind *nicht* aus Punkten zusammengesetzt. Diese sind Grenzen und Teilpunkte von Kontinua.

Was ist anders?

> Leibniz ist unaristotelisch: Es *gibt* unendlich kleine Linienstückchen, die Infinitesimalien. Diese sind nicht Punkte, sondern Kontinua.
>
> Kontinua sind aus unendlich kleinen Kontinua, den *Infinitesimalien*, zusammengesetzt.
>
> Punkte und Infinitesimalien sind grundsätzlich unterschiedliche Elemente. Es gibt eine nur *äußere* Beziehung: Punkte liegen auf – gewöhnlichen oder infinitesimalen – Strecken, teilen und begrenzen sie.
>
> In den infinitesimalen Strecken gibt es Infinitesimales, das *infinitesimal gegenüber den infinitesimalen* Strecken ist.

Hier finden wir bereits im unendlich Kleinen, was Cantor 200 Jahre später im unendlich Großen entdeckt: Stufen des Unendlichen. Leibniz *vertieft* die aristotelische Kontinuumsauffassung durch die Stufen des Infinitesimalen. Dies war so epochal und so wirkungsvoll wie die Cantorsche Erschaffung der unendlichen Mengen.

4 Gegenwart

Wir kommen zur Gegenwart, zu *unseren* Punkten. Sie hat uns das 19. Jahrhundert gebracht. Was wird anders, was passiert im Übergang von Leibniz zu Cantor? Was ist der Kern der Veränderung?

Von der Zusammensetzung zur Zusammenfassung

Bei Leibniz waren es die Infinitesimalien, vorher waren es die Punkte gewesen – als Indivisibilien oder Atome –, die das Kontinuum *zusammensetzten*. Punkte waren dabei wie *Bausteine* des Kontinuums, die miteinander verbunden waren. Im 19. Jahrhundert wurde das Kontinuum eine lose *Zusammenfassung* von Punkten, eine Punktmenge. Das alte aristotelische Band zwischen den Punkten, das Kontinuum, wurde zerrissen. Hierin liegt der Kern des *Abschieds*, des Bruchs mit der alten Anschauung. – Dass die Gerade als Zahlengerade etwas anderes als eine Punktmenge sein könnte, können wir uns heute, 150 Jahre später, kaum noch vorstellen.

Was bedeutet das für die Punkte selbst? Die bis dahin verbundenen oder verbindenden Punkte werden zahllose *isolierte Elemente*. – Wie sich diese Denkumkehr genau entwickelte, liegt im Dunkeln. Mit Bolzano, Cantor und Dedekind waren die Punktmengen da, vorbereitet durch alte und neuere Paradoxien des Unendlichen und die neuzeitliche Darstellung von Zahlen und Größen auf den Koordinatenachsen.

Womit können wir diese radikale Veränderung in den Vorstellungen vergleichen? Sie ist wie ein Riss. Eine Zusammensetzung ist wie eine Perlenkette. Wir zerreißen die Perlenkette. Wenn wir die Perlen einsammeln, haben wir eine Handvoll Perlen. Es ist der Übergang vom Zusammenhang zur Zerlegung, von der Zusammensetzung zur Zusammenfassung, von der Kette zur Menge, im Prinzip der Übergang vom Stetigen zum Diskreten. In keiner Version der Kontinua, die wir gesehen haben, gab es Vergleichbares.

Der Effekt war riesig. Die innere Kraft, die die Kontinua zusammenhielt, ging verloren. Das Zerrissene musste neu, in mengentheoretischer Weise verbunden werden. Das brachte neue Formulierungen über das Wesen der Stetigkeit hervor, von denen die heutige Mathematik lebt. – Aber darum geht es hier nicht. Es geht um den Punkt.

Punkte im Raum

Das Kontinuum, der mathematische Raum besteht aus Punkten und mit ihm das, was im Raum ist. D.h. alles ist aus Punkten. Der Punkt ist der heimliche, universelle Grundbegriff. Die große Frage, die noch einmal größer geworden ist, aber bleibt:

> Was ist ein Punkt?

Eine Antwort wäre interessanter denn je.

Wir bleiben dreidimensional und verfolgen den Punkt. Der mathematische Raum wird von Achsen aufgespannt. Ein Punkt ist ein Tripel von Koordinaten. Koordinaten sind reelle Zahlen.

> Ein Punkt also ist ein Tripel reeller Zahlen.

> Punkte auf den Achsen sind reelle Zahlen.

Wir haben die Punkt-Frage reduziert auf die Frage nach der reellen Zahl. Was sind reelle Zahlen?

> Reelle Zahlen sind Mengen von Mengen von Mengen von Mengen von Paaren natürlicher Zahlen.

Was sind natürliche Zahlen?

> Natürliche Zahlen sind Elemente, Mengen und Funktionen.

Die Punkt-Frage ist zurückgeführt auf die Frage nach den natürlichen Zahlen. Da Funktionen Mengen sind, haben wir:

> Natürliche Zahlen sind Elemente oder Mengen, die aus Elementen bestehen.

Was sind Elemente? Elemente und mathematische Gegenstände überhaupt sind in unserer mengentheoretischen Mathematik Mengen. Also:

> Elemente sind Mengen, die Mengen von Elementen sind, die wieder Mengen von Elementen sind, die wieder ...... usw.

Dieser Regress wird zwar im Fundierungsaxiom der Mengenlehre gestoppt. Deshalb aber wissen wir, gut axiomatisch, keineswegs, *was* Mengen sind. Es folgt:

> Wir wissen nicht, was Mengen sind.
>
> Wir wissen nicht, was Elemente sind.
>
> Wir wissen nicht, was natürliche Zahlen sind.
>
> Wir wissen nicht, was reelle Zahlen sind.

Schließlich:

- Wir wissen nicht, was Punkte sind.

Auch die Reduktion auf die Frage nach den Mengen beantwortet die Frage „Was ist ein Punkt?“ nicht.

Zahlen auf der Geraden

Es kommt „schlimmer“. Die Reduktion von Punkten auf den Achsen auf reelle Zahlen funktioniert heute nicht mehr. In dem Aufsatz (Bedürftig 2012) wird behauptet und begründet:

> Die Zahlengerade ist eine Illusion.

Wie ist die Begründung? Ganz kurz: Seit 55 Jahren gibt es Nichtstandardmodelle der reellen Zahlen, z.B. die hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$. Die hyperreellen Zahlen passen neben die reellen Zahlen auf die Gerade. Wir hatten darüber hinaus angemerkt:

> Nichtstandardmodelle von $\mathbb{R}$ gibt es in *beliebig großer überabzählbarer Mächtigkeit* – über die Mächtigkeit der reellen Zahlen hinaus.

Die neuen Zahlen in den Modellen können wir jeweils auf der Geraden darstellen. Sie erschöpfen die Gerade nie. Die Folge ist:

> $\mathbb{R}$ ist *nicht* die Gerade.

Das bedeutet eine weitere fundamentale Denkumkehr – zurück zu Aristoteles: Das lineare Kontinuum ist *keine* Punktmenge. Wir wissen vielmehr:

> Die reellen Zahlen sind „nur“ ein *Modell* der Geraden – unter anderen Modellen.

Was bedeutet das für die Punkte?

Die mathematische Auflösung des Punktes

Es gibt die hyperreellen Zahlen. Die passen als Punkte auf die Zahlengerade – unendlich nah um die reellen Punkte herum. Und es geht weiter:

> Um die reellen Punkte herum liegen unendlich nah hyperreelle Punkte,
>
> um die hyperreellen Punkte liegen unendlich nah hyper-hyperreelle Punkte,
>
> um diese herum … … …

Denn so wie die hyperreellen Zahlen aus den reellen Zahlen konstruiert werden, entstehen aus den hyperreellen Zahlen die hyper-hyperreellen Zahlen. Usw. usf. ….

Also: Punkte sind Kontinua von Punkten, die Kontinua von Punkten sind, die wieder Kontinua von ... usw.

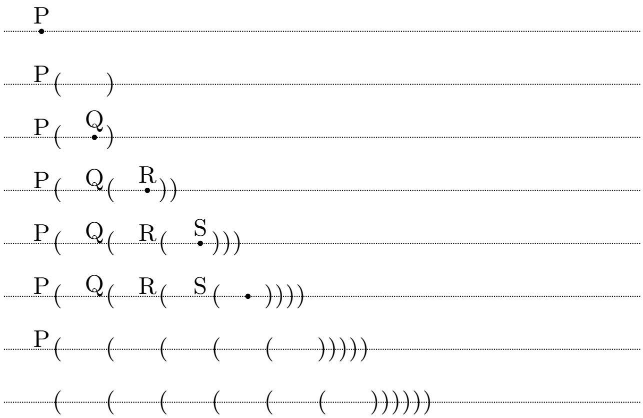


Abbildung: *Punkte sind Kontinua von Kontinua von … …*

Was wird aus dem Punkt P?

- Der Punkt löst sich auf.

Der Punkt wird zum offenen Prozess von Kontinua mit Punkten. Das Kontinuum *kann* keine Punktmenge sein. Unsere lieb gewonnene Identifikation von Zahlen und Punkten ist aufgehoben. Die Zahlengerade verwandelt sich zurück und teilt sich in Zahlen und Gerade.

Was können wir tun? Nicht die Rettung, aber Nachhilfe kommt aus der Philosophie und Geschichte.

5 Der Punkt als Zeichen

Wir wenden uns zuerst wieder an Euklid, dann an Charles Sanders Peirce (1841–1914). Letzterer ist der Begründer des Pragmatismus und der modernen Semiotik.

Euklid hatte eigentlich schon vor 2 300 Jahren den Weg gewiesen. Noch einmal:

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
   σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Das erste Wort ist das griechische „semeion". Wir sagen „Punkt". Ursprünglich, wörtlich bedeutet es „Zeichen". Ein Punkt ist ein Zeichen.

Im Pragmatismus spielen die Zeichen eine erkenntnistheoretisch zentrale Rolle. Die Ebene der Zeichen tritt *zwischen* die Wirklichkeit und die Ebene der Begriffe. Mathematik geschieht in der Ebene der Zeichen, sie ist Handeln im Bereich der Zeichen und deren Kombinationen, der „Diagramme". Eines der *Elementarzeichen* ist der Punkt. Für dieses Zeichen entsteht eine besondere, fast singuläre Situation.

Es geht um die Beziehung zwischen Begriff, Zeichen und Ding. Diese Beziehung zeigt anschaulich das semiotische Dreieck:

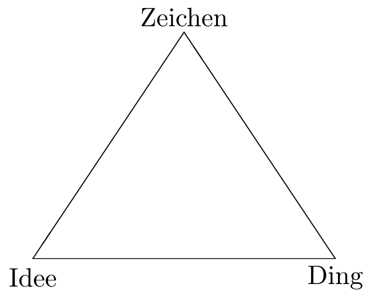


Abbildung: *Semiotisches Dreieck*

Peirce erläutert:

> „Ein Zeichen ist ein Ding, das dazu dient, ein Wissen von einem anderen Ding zu vermitteln, das es, wie man sagt, vertritt oder darstellt. Dieses Ding nennt man Objekt des Zeichens. Die vom Zeichen hervorgerufene Idee im Geist, die ein geistiges Zeichen desselben Objekts ist, nennt man den Interpretanten des Zeichens." (zitiert nach Pape 2004, S. 204)

Das ist überzeugend. Man denke an das Beispiel des Tisches. Wir haben die Idee oder, wie wir heute sagen, den Begriff „Tisch“ – durch Abstraktion gewonnen –, dazu das Wort „Tisch“ als Zeichen für das Ding, an dem wir sitzen.

Das ist nicht überall so einfach. D.h. es ist einfacher.

Punkt und Stelle

Ein Punkt ist ein Zeichen. Punkt-Zeichen gibt es einige: ·, / , × , ∘ , •, ▪ . Aber: Was bezeichnet ein Punkt? Was ist das Ding?

Wir sagen:

> Ein „Punkt“ bezeichnet eine Stelle (Position, Ort, Platz) im Kontinuum.

Wir betreiben quasi eine „Punktspaltung“ und teilen den Punkt in das Zeichen „Punkt“ und das Ding „Punkt“, das wir „Stelle“ nennen.

Wo ist das Ding? Wo ist die Stelle, die ein Punkt bezeichnet? Machen wir den praktischen Versuch und schauen aufs Papier:

Abbildung: *Kontinuum*

Sehen wir ein Ding, das wir bezeichnen können? Es ist nicht da – es sei denn, wir setzen einen Punkt:

•

Abbildung: *Punkt im Kontinuum*

Jetzt ist das Punkt-Zeichen • gesetzt und die Stelle bestimmt. Was beobachten wir? Erst das Zeichen, der Punkt, bestimmt die Stelle. Wir können sagen:

> Das Punkt-Zeichen *schafft* die Stelle.

Aus der Frage „Was ist ein Punkt?“ wird die Frage

> Was ist eine *Stelle* im Kontinuum?

Antwort:

Kontinuum.

Etwas anderes haben wir nicht – und wissen bereits, dass wir nicht wissen, was es ist. Wir wissen nur, dass man in Kontinua Punkte setzen kann.

Was wird aus dem semiotischen Dreieck? Zeichen und Ding rücken zusammen. Punkt-Zeichen und Stelle werden Eins:

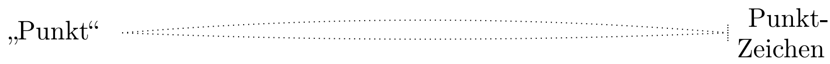


Abbildung: *Semiotisches Zweieck*

Wir unterscheiden gewöhnlich Ding und Zeichen. Stelle und Punkt unterscheiden wir nicht und reden auch nicht vom „Punkt-Zeichen“, sondern nur vom „Punkt“:

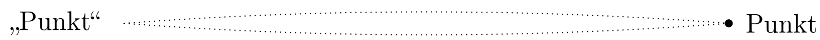


Abbildung: *Semiotisches Zweieck*

Es offenbart sich eine seltsame Art der Begriffsbildung.

„Punkt“ ist Begriff von Punkt – durch Setzen eines Punktes.

Vielleicht ist es diese Situation, die soviel Verwirrung in manche Diskussion um Kontinuum und Punkt gebracht hat. Die Schwierigkeiten entstehen aus der Nicht-Unterscheidung von Zeichen und Ding, von Punkt und Stelle.

Der Punktbegriff zeigt eine fast singuläre Form der Begriffsbildung – Analoges gibt es z.B. bei den Zahlen (s. Bedürftig 2013, S. 155 f):

Begriff durch Setzen von Zeichen.

Der Begriff liegt im Zeichen. Das ist typisch für unsere konstruierende Geometrie, in der die Begriffe der Geraden und der Ebene in ähnlicher Weise entstehen.

Wir unterscheiden jetzt wieder das Zeichen „Punkt“ und die bezeichnete Stelle „Punkt“ und halten fest:

„Punkt“ ist Begriff von Stelle im Kontinuum – durch Setzen eines Punktes.

Zeichen für Punkte sehen sehr verschieden aus und können grob oder fein sein. Davon müssen wir noch abstrahieren:

> „Punkt“ ist Begriff von Stelle im Kontinuum durch Setzen eines Punktes und Abstraktion von der Verschiedenheit der Zeichen für Punkte.

Zahlen sind gedankliche Zeichen für Punkte, die wir als konkrete Punkte auf der Geraden veranschaulichen.

Die anschaulich-philosophische Auflösung des Punktes

Im Pragmatismus sind wissenschaftliche Aussagen, auch die mathematischen, nur Hypothesen – in einem ständigen Prozess der Bewährung oder Widerlegung. Mathematische Begriffe und Zeichen sind *Näherungen* an die Realität. Der Punkt demonstriert dies beispielhaft.

Wir setzen einen Punkt, das Zeichen. Der Punkt zeigt auf eine Stelle. Die Stelle ist ein Kontinuum im Kontinuum. In dieses setzen wir einen Punkt. Der zeigt auf eine Stelle, die Kontinuum ist. In dieses setzen wir einen Punkt. Der zeigt auf eine Stelle, die ein Kontinuum ist. In dieses setzen wir ... usw. usf.

Es entsteht anschaulich das analoge Dilemma, das wir oben mathematisch erlebten.

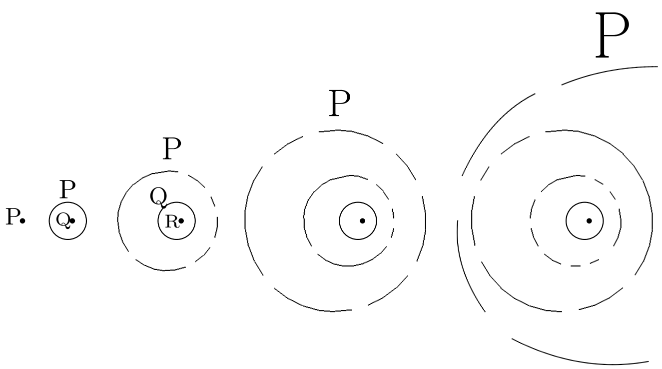


Abbildung: *Der Punkt „explodiert“.*

Wir bekommen den Punkt nicht zu fassen, d.h. die *Stelle*, die er bezeichnen soll. Woher kommt Hilfe?

Selbsthilfe

Was wir tun können und müssen, ist, den Regress unterbrechen. Das ist die konkrete, technische Praxis: Wir zeichnen einen Punkt, der uns zu „dick“ ist, spitzen den Bleistift, machen einen neue Probe, vielleicht noch eine und entscheiden dann „Halt“.

Und es ist mathematische Praxis: Wir stoppen vielleicht bei den rationalen Punkten – wie die Ingenieure. Oder wir machen Halt bei den reellen Punkten – wie die Standard-Mathematiker. Oder wir halten bei den hyperreellen Punkten, den hyperhyperreellen Punkten usw. – je nach Bedarf, wie die „Hyper-Mathematiker“.

Wenn wir sagen, dass dieser praktische Punkt „ • “ die Stelle ist, dann ist es so. Fertig! Wir befehlen:

- Die Stelle „*habe* keine Teile“. Punkt!

Wir sind es, die das Zeichen setzen und „Stop“ sagen. Das wahre Gegenüber des Kontinuums ist nicht der unteilbare Punkt, sondern der *Gedanke*, der ihn setzt. Die bezeichnete Stelle ist nichts Reales sondern Gedachtes. Einhundert Jahre war der mathematische Gedanke „reelle Zahl“. Bei den reellen Zahlen hatte man kollektiv „Halt“ gesagt – und macht es noch.

6 Was ein Punkt ist.

Machen wir einen *letzten Versuch* zu sagen, was ein Punkt ist. Unsere Ausgangssituation, wie wir sie jetzt durchschaut haben, ist:

> Ein Punkt ist ein Zeichen, das eine Stelle bezeichnet. Diese Stelle ist ein Kontinuum mit Stellen, die Kontinua mit Stellen sind, die ....
>
> Ein Punkt ist ein Prozess von Kontinua.

Das wollen wir nicht. Wir wollen den Prozess *anhalten*. Gleich ob Standard- oder Hyper-Mathematiker, er will dies:

> Ein Punkt ist ein *Zeichen*, das eine Stelle bezeichnet. Diese Stelle ist ein Kontinuum, das keine Teile haben *soll*. Das Zeichen, der Punkt, repräsentiert diese Stelle.

Das ist es, was stattfindet, wenn wir einen Punkt setzen. Aber es ist ziemlich umständlich gesagt. Wir denken und sprechen gewöhnlich einfacher:

> Der Punkt *repräsentiert* die Stelle, die keine Teile haben soll.

Praktisch:

> Der Punkt *ist* die Stelle, die keine Teile haben soll.

Denn wir tun gewöhnlich, ja zwangsläufig so, als ob der Punkt die Stelle *wäre*. Denn wir haben außer dem Punkt nichts „in der Hand“. Also kurz:

> Ein Punkt ist, was keine Teile haben *soll*.

Griechisch müsste das dann so aussehen:

> *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος <u>ἔστω</u> οὐθέν.*

In der alten originalen 1. Definition des Euklid fehlt im griechischen Text das Wort „*ἐστίν*“ (estin), das „ist“ bedeutet und im Relativsatz wegfallen kann. Ich habe es mal eingesetzt:

> *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος <u>ἐστίν</u> οὐθέν.*

„*ἐστίν*“ kann im Relativsatz imperativischen Charakter haben, also eine Notwendigkeit, ein Diktum ausdrücken. In Euklids Definition fehlt das Wort „*ἐστίν*“. Aber bleibt das Diktum? Hatte Euklid 300 v. Chr. den Imperativ gedacht?

1. Ein Punkt ist, was keine Teile *habe*!
   Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν !

7 Anmerkungen

Wir haben mit der historischen euklidischen Definition des Punktes begonnen und sind zu ihr zurückgekehrt. Die Definition hat dabei einen gravierenden Bedeutungswandel erfahren – vom Indikativ zum Imperativ, von der Feststellung einer Realität zu ihrer Festlegung.

Mathematik ist abstrakte Wissenschaft. Die Realität, von der wir abstrahieren, kommt in der Mathematik nicht vor. Bis auf mindestens zwei Ausnahmen, so scheint es. Die eine Ausnahme ist das Kontinuum, die andere der Punkt.

Die elementaren geometrischen Kontinua – Geraden, Strecken, Flächen usw. – waren und sind anschaulich und scheinen trotz aller Idealisierung irgendwie real zu sein. Sie haben die Realität realer Bilder und sind wie eigene reale Kontinua. Heute tun wir in der Regel so, als ob wir eine Realität erfassten, wenn wir von „dem Kontinuum“ sprechen und die reelle Zahlengerade meinen.

Wir wissen jedoch nicht einmal und niemand weiß, was das Kontinuum ist. Ist es Wirklichkeit oder Dichtung? Bei Euklid und in der alten Mathematik war es der anschaulich-reale Hintergrund. Für Peirce's Pragmatismus, für seine Philosophie der Hypothesen, war es die alle Erkenntnis umfassende Wirklichkeit. Das mathematische Kontinuum, die reellen Zahlen, hielt er „nur" für eine Näherung an diese Realität. Andere Auffassungen sehen im Kontinuum etwas, das wir den Dingen im Denken hinzufügen? Ist es die reine Anschauungsform unserer Sinnlichkeit, wie Kant sie als Raum und Zeit bestimmt? Wir wissen, dass wir es mathematisch nicht wissen können. Denn wir können das Kontinuum mengentheoretisch nicht erfassen. Es entzieht sich uns.

Die zweite Ausnahme, die zweite „mathematische Realität" scheint durch die Geschichte hindurch der Punkt gewesen zu sein. Die quasi reale Auffassung des Kontinuums wurde auf die Punkte, die Antipoden des Kontinuums, übertragen. Auch die Realität der Punkte ist heute anschaulich, mathematisch und philosophisch aufgehoben. Das haben wir dargestellt. Es bleibt der Gedanke, der ihn setzt und der heute in der Regel „reelle Zahl" heißt.

Das, was uns zwang, unseren heutigen Begriff von Punkt als reelle Zahl oder Zahlentupel zu revidieren, sind Ergebnisse der so genannten „Nichtstandardmathematik". Eine kurze Bemerkung zu dieser Bezeichnung: „*Nichtstandard*mathematik" ist ein ungeschickter, ein falscher Name. Diese Mathematik ist in der Tat anders, aber mathematisch so Standard wie die Standardmathematik. Wir sollten besser von einer „*Hyper*mathematik" sprechen – so wie die Zahlen „über" den reellen Zahlen „hyperreelle" Zahlen heißen. Denn diese Mathematik steht „über" der gewöhnlichen Mathematik, deren Modell *und* Erweiterung sie ist. (vgl. Bedürftig und Murawski 2015, Anhang)

Punkte sind – wie Linien, Flächen und geometrische Körper –, das lehrt uns der Pragmatismus, *Zeichen.* Philosophen und Mathematiker, ganze Epochen, scheinen in den Diskussionen bisweilen *vergessen* zu haben, dass *sie* es waren und sind, die die Zeichen setzen. Wie soll es möglich sein, dass Zeichen, die nur Gedankliches bezeichnen, zu Elementen des Kontinuums werden oder es gar zusammensetzen? Die geometrischen Zeichen, die Punkte aber wurden geometrisch identifiziert mit den gedachten Stellen im Kontinuum und erhielten den Anschein der Wirklichkeit. Zeichen scheinen selbst für unsere formale Mathematik letzte Anbindungen an die Wirklichkeit zu sein. Der Formalismus stützt sich auf eine finite Realität der Zeichen und der Zeichenwelt, auf die die transfinite Mathematik zurückgeführt werden soll.

Wie kam und kommt es zur Verwechslung von Zeichen und Ding, von Punkt und Stelle?

Wir identifizieren, wie wir es oben dargestellt haben, bisweilen Zeichen und Ding. Das ist für den Punkt besonders nahe liegend, fast zwingend. Denn wir setzen Punkte – und wissen gar nicht wohin. Erst der Punkt bezeichnet die Stelle – von der wir nicht wissen, was sie ist und ob sie überhaupt da ist. Und schon tritt der Punkt an die Stelle der Stelle. Wir haben keine Stelle, sondern nur den Punkt „in der Hand" und so anschaulich vor Augen wie die wirklichen Dinge.

An diesen Punkt knüpfen wir die Vorstellungen und Ideen, aus der die Geometrie gemacht ist. Der unteilbare Punkt repräsentiert die *Vorstellungen*, die wir uns über die sehr kleinen oder infinitesimalen oder ausdehnungslosen oder teilelosen oder gar leeren Stellen machen und die in den geometrischen Axiomen wiederzufinden sind.

Mathematiker und Philosophen operierten intuitiv mit dem Punkt und vergaßen vielleicht, dass er zuerst ein Zeichen ist. Sie identifizierten das ideale Zeichen mit dem Bezeichneten und philosophierten ohne Aussicht auf Erfolg über seine Unterbringung im geheimnisvollen Kontinuum.

Wenn Punkte Zeichen sind, dann erhalten wir ein neues Bewusstsein dafür, was auf dem Weg von Aristoteles über Leibniz zu Cantor, vom anschaulichen Kontinuum zu den reellen Zahlen passiert ist. In den Punkten, die auf der Geraden zu reellen Zahlen werden, geht es nicht um gewöhnliche Mengen und Elemente. Jede reelle Zahl ist ein Zeichen für einen Punkt. Es geht um eine überabzählbare Menge von *Zeichen*. Zeichen finden wir nicht vor. Zeichen müssen wir setzen – überabzählbar mal oft. Es ist überdeutlich: Das ist *Theorie*. Wir bekommen einen neuen Eindruck des großen Schrittes, den die Mathematik aus der Anschauung heraus, aus dem anschaulichen Kontinuum in die Punktmengen der Mengenlehre, gemacht hat.

Die heutige Art, mengentheoretisch zu denken, bringt es mit sich, dass wir nicht mehr Punkte setzen und konstruieren und aus unseren Konstruktionen heraus eine offene Geometrie aufbauen. Geometrie ist heute ein Redebereich. Wir *sprechen* von Punkten, und zwar gleich von *allen*, so als wenn sie konstruiert oder gesetzt wären. Sie sind alle da und wir können frei mit ihnen operieren. Dies ist ein weiteres Charakteristikum des Theoretischen in der neuen Auffassung von Geometrie, ihren Punkten und ihren Kontinua. Es entstehen die neuen Paradoxien wie der theoretische Banach-Tarski-Satz über die Verdopplung der Kugel[1], die real, abstrakt und ideal Zauberei ist.

Der Imperativ ist ein Charakteristikum heutiger Mathematik. Er drückt sich im Verzicht auf die Frage „Was?" und in der Formulierung von Axiomen aus sowie, und

1. Einen wahrhaft spannenden Beweis liest man im Roman von K. Kuhlemann, der im Juni 2015 erschien.

das ist kennzeichnend, im Postulat der Korrespondenz von Punkten und reellen Zahlen.

Schlusspunkt.

Das Kontinuum und sein Gegenüber, der teilelose Punkt, den wir *denken*, sind der Anfang der theoretischen Mathematik. Den Schritt in die Theorie hat Euklid vorbereitet, als er den Punkt an den Anfang der Mathematik setzte. Der Übergang von der euklidischen Anschauung in die Theorie, vom euklidischen Indikativ zum heutigen Imperativ führt notwendig zu einer anderen Mathematikauffassung, die heute noch wenig verbreitet zu sein scheint. Mathematik, so wie sie heute standardmäßig betrieben wird, ist keine stabile Wirklichkeit. Sie ist ein theoretisches Instrument. Wir müssen sie einrichten – so wie wir den Bleistift anspitzen, um den „richtigen" Punkt zu setzen.

Literaturverzeichnis

Aristoteles. 1829. *Physik.* Leipzig.

Bedürftig, Th. 2012. Über die Zahlengerade – historische und philosophische Anmerkungen. In *Zeitläufte der Mathematik, Tagung zur Geschichte der Mathematik in Freising (1.6. bis 5.6. 2011),* herausgegeben von H. Fischer und S. Deschauer. Reihe Algorismus. Augsburg.

———. 2013. *Zahlen und Zahlbegriff – Mathematisch-didaktische Studien.* Hildesheim.

Bedürftig, Th., und R. Murawski. 2015. *Philosophie der Mathematik.* 3. Aufl. Berlin.

Breidert, W. 1979. *Das aristotelische Kontinuum in der Scholastik.* 2. Aufl. Münster.

Euklid. 1933–1937. *Die Elemente.* Herausgegeben von Clemens Thaer. I–XIII. Leipzig: Clemens Thaer.

Kuhlemann, K. 2015. *Der Untergang von Mathemagika.* Heidelberg–New York.

Leibniz, G. W. 1849-1863. *Leibnizens Mathematische Schriften (7Bde).* Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Halle: H.W.Schmidt.

Pape, H. 2004. *Charles S. Peirce – zur Einführung.* Hamburg.

Lorenzens Operativismus und die reellen Zahlen

Alessa Binder

1 Einleitung: Formalismus und Operativismus

> „Mit geeigneten Axiomen läßt sich nun zwar alles beweisen, aber nichts begründen.“[1]

Eine Be-Gründung zu irgendeinem Aufbau zeichnet sich dadurch aus, dass sie eine Grundlage für diesen Aufbau schafft. Einen *fundierten* Anfang (statt eines Anfangs ‚aus dem Nichts‘), auf oder aus dem sich der weitere Aufbau entwickelt. Viel öfter wird das Wort ‚Begründung‘ jedoch im Sinne von ‚Rechtfertigung‘ verwendet. Die Frage nach der Begründung einer bestimmten These ist die Frage nach Argumenten, die die These stützen. Aus welchem Bereich die Argumente stammen (z. B. der These vor- oder nachgeordnet, prinzipien- oder zweckgerichtet, ...), spielt dabei keine Rolle. Lorenzen bezieht sich in seinem Zitat sicherlich auf die erste Verwendung des Wortes, das heißt auf einen vorgeordneten, fundierten Anfang zum Aufbau der Logik und Mathematik.
Bei der Einführung eines Zahlkörpers, wie etwa dem der reellen Zahlen, wird klassischerweise so vorgegangen, dass gewisse *Forderungen* an den Zahlkörper gestellt werden, welche die Aufstellung bestimmter *Axiome* motivieren. Das so aufgestellte Axiomensystem erhält dann seine *Rechtfertigung* dadurch, dass bewiesen wird, dass sämtliche daraus entstehenden Konsequenzen untereinander *widerspruchsfrei* sind. Die dazu erforderlichen Widerspruchsfreiheitsbeweise stammen aus dem Bereich der Metamathematik – eine Disziplin, die zwar ein Teilgebiet der Mathematik darstellt, ihr jedoch in gewisser Weise *nachgeordnet* ist. Dieses formalistische Vorgehen der Einführung eines Zahlkörpers ist das momentan übliche und wird daher als klassisch bezeichnet. Allerdings haben sich ausgehend von der sogenannten

1. Lorenzen 1951, S. 1.

Grundlagenkrise zu Anfang des 20. Jahrhunderts (ausgelöst unter anderem durch das Aufkommen von Paradoxien in der Mengenlehre) neben dem Formalismus (vertreten von David Hilbert) weitere Positionen zum Aufbau und Vorgehen der Mathematik entwickelt. Neben dem von Luitzen E. J. Brouwer vertretenen Intuitionismus sticht hier vor allem Paul Lorenzens *Operativismus* (in Lorenzen 1955) hervor. Hier werden Zahlkörper so eingeführt, dass Untersuchungen des *schematischen Operierens*, die der Mathematik noch *vorgeordnet* sind, die Aufstellung bestimmter *Regeln* nicht nur motivieren, sondern zugleich *begründen* sollen (statt nachträglich rechtfertigen). Trotz dieser unterschiedlichen Ansätze gibt es jedoch auch eine wesentliche Gemeinsamkeit zwischen Formalismus und Operativismus: In beiden Positionen wird zunächst von inhaltsleeren Zeichen ausgegangen, die erst nach ihrer Einführung inhaltlich interpretiert werden sollen. Beide Positionen haben ihre Vorzüge und ihre Grenzen. Es wäre falsch, sie in einem absoluten Sinne gegenüberzustellen.

> „Das Buch Lorenzens [Lorenzen 1955] hat nun sicher das eine große Verdienst, daß darin die logisch-mathematische Grundlagenproblematik unter einem ganz neuen Gesichtspunkt betrachtet wird und daß daher dieses Werk eine Gegentendenz gegen die Neigung zur Verabsolutierung bisheriger Denkweisen darstellt, insbesondere gegen die Verfestigung in die oft als einzige Lösung angesehene Axiomatisierungsmethode. Vielleicht ist es überhaupt irreführend, in Grundlagenfragen [...] von *der* Lösung zu sprechen; wichtiger dürfte es sein, das Nachdenken über diese Dinge dadurch aufzulockern, daß man sich die *verschiedenen alternativen Lösungsmöglichkeiten* vor Augen hält, in denen brauchbare neue Ansätze gefunden werden.“[2]

Mit dieser Sichtweise stellen sich folgende Fragen: Welchen Begründungsanspruch stellt man generell an ein mathematisches Vorgehen, an mathematische Objekte und Sätze? Welche Bedeutung soll innerhalb der Mathematik dem Wort ‚Existenz‘ zukommen? Und konkreter auf Lorenzens Ansatz bezogen: Welchen Begründungsanspruch fordert bzw. erfüllt Lorenzens operatives Vorgehen? Was bedeutet es, im operativen Sinne von ‚Existenz‘ zu sprechen? Diesen Fragen soll hier nachgegangen werden. Dazu bietet sich die Betrachtung eines für die Analysis wesentlichen Konzeptes an, in dem sich die beiden Positionen – Formalismus und Operativismus – am klarsten und bedeutendsten unterscheiden: die Vollständigkeit.
Die Eigenschaft der reellen Zahlen, vollständig zu sein, ist eine gemäß der formalistischen Position gestellte Forderung, welche durch die Aufstellung eines Axioms erfüllt wird. Aus operativistischer Sicht ist diese (absolute) Vollständigkeit – eben-

2. Stegmüller 1958, S. 161, eigene Einschübe/Verkürzungen.

so wie die Existenz der (aktualunendlichen, überabzählbaren) Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen[3] – dagegen nicht begründbar.

2 Schematisches Operieren

Am Anfang von Lorenzens Operativismus steht das *schematische Operieren*, das heißt „allgemein jedes Handeln, das sich nach irgendwelchen Regeln, nach einem festen Schema, vollzieht."[4] Als anschauliche Beispiele verweist Lorenzen auf den Bau einer Mauer, bei dem die Ziegelsteine nach einem Schema aufeinander gelegt werden und auf das Stricken, bei dem die Maschen schematisch hergestellt und verknüpft werden. Die ursprünglichste Form eines Handelns nach irgendwelchen Regeln findet sich jedoch viel näher: im Sprechen. Das schematische Operieren an den Anfang eines Begründungsansatzes zu setzen, erhält mit Wittgensteins *Philosophischen Untersuchungen* eine sinnvolle Bestätigung. Wie Wittgenstein darlegt, ist Sprache ein *Regelfolgen* und die Fähigkeit, einer Regel zu folgen, die notwendige Voraussetzung dafür, überhaupt sprechen zu lernen. Diese Fähigkeit ist bei einem Menschen vorhanden ohne sie beigebracht zu bekommen – dies wäre gar nicht möglich. Somit ist ein Handeln, das sich nach irgendwelchen Regeln vollzieht, als Begründung einer von Menschen betriebenen Wissenschaft sinnvoll. (Zu beachten ist hier auch, dass sich *jede* Wissenschaft innerhalb einer Sprache bewegt und gerade in der Entwicklung einer Sprache und in der Auszeichnung wahrer und falscher *Sätze* – statt Tatsachen – besteht.) Analog zu Wittgensteins vereinfachten Sprachspielen, mit denen er das Sprechen untersucht, führt Lorenzen zunächst einfache *Kalküle* ein, um mit ihnen das schematische Operieren *an sich* zu untersuchen und allgemeine, minimale Bedingungen für ein *erfolgreiches* Operieren zu bestimmen. Später werden dann Kalküle mit den gefundenen Bedingungen verwendet, um Zahlkörper einzuführen. Zunächst aber sollen Kalküle also „Systeme von Regeln zur Erzeugung bestimmter Figuren ohne jegliche inhaltliche Interpretation"[5] darstellen. Im Laufe seines Aufbaus einer operativen Logik und Mathematik gelingt es Lorenzen jedoch nicht, an diesem Vorsatz festzuhalten und er verwendet Kalküle auch zur Formalisierung einer inhaltlichen Theorie. Z. B. werden Ungleichheitskalküle dafür verwendet, Aussagen der Form ‚Aussage A ist ungleich allen im Kalkül K ableitbaren Aussagen, das heißt, A ist unableitbar in K.' zu treffen und Metakalküle für inhaltliche Aussagen der Form ‚Die Regel/Metaregel/Metametaregel/... ist allgemeinzulässig.'. Dass es bei einem Aufbau einer inhaltlichen Wissenschaft

3. Die Existenz der Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen ist hierbei äquivalent zur Existenz der Menge aller rationalen Cauchyfolgen bzw. Dedekindschen Untermengen.
4. Lorenzen 1968, S. 84.
5. Stegmüller 1958, S. 165.

gar nicht gelingen *kann*, auf einer rein formalen Ebene zu bleiben, beschreibt Stegmüller in „der eigentlich trivialen Feststellung, daß man weder die Logik und Mathematik noch eine sonstige wissenschaftliche Disziplin ‚aus dem Nichts' begründen kann, sondern dabei einen bestimmten Grundstock an Wissen voraussetzen muss."[6] Ein Pendant hierzu auf der formalistischen Seite findet sich z. B. in den Begriffen ‚Menge' und ‚Element von': Die Verwendung beider Begriffe setzt hier jeweils ein inhaltliches (naives) Verständnis voraus.
Der eben gefallene Begriff der Zulässigkeit ist ein grundlegender in Lorenzens Ansatz. Lorenzen schreibt hierzu, „daß die Gewißheit über solche [Zulässigkeits-] Behauptungen nur ein anderer Ausdruck für die Gewißheit ist, im Besitze des Vermögens zu gewissen Handlungen (hier der Elimination einer Regel) zu sein."[7] Ein entsprechender operativer Charakter findet sich in Lorenzens Konzept der *Definitheit*. Mathematische oder logische Behauptungen werden zugelassen, wenn sie *beweis-* oder *widerlegungsdefinit* sind, das heißt, wenn für sie ein Beweis- oder Widerlegungsbegriff eingeführt ist, der durch schematisches Operieren überprüft werden kann. Damit fordert Lorenzen mehr von logischen/mathematischen Behauptungen als der Formalismus und weniger als der Intuitionismus.

3 Einführung der reellen Zahlen

Im Gegensatz zu einfachen Zahlbereichen, wie denen der natürlichen oder rationalen Zahlen, die man auch als Grundobjekte bzw. Systeme aus Grundobjekten bezeichnen kann, stellen reelle Zahlen *Mengen aus Grundobjekten* dar (bzw. *Aussagen über Grundobjekte*). In der klassischen formalistischen Einführung der reellen Zahlen sind diese z. B. Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen oder Dedekindsche Schnitte/Untermengen rationaler Zahlen. Hierbei wird auf die Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen zurückgegriffen. Wenn man wie im Formalismus ein naives Mengenverständnis (auch für nicht-endliche Mengen) voraussetzt und die Bildung von allen gedanklich möglichen Mengen zulässt, kommt es zu Paradoxien. Die bekannteste ist wohl die der Russellschen Menge M aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten. Hier führt die Frage, ob M sich selbst enthält, zu einem Widerspruch. Nach Weyl ist dieser Widerspruch leicht aufzulösen, indem man erkennt, dass die gestellte Frage schlicht sinnlos ist (wenn auch formal korrekt gestellt). Solche sinnlosen Symbolketten entstehen z. B., wenn man nicht unterscheidet bzw. trennt zwischen der Ebene des Objekts der Betrachtung (Menge M) und der Ebene der Elemente, auf die sich das Objekt bezieht (Elemente

6. Stegmüller 1958, S. 169.
7. Lorenzen 1968, S. 90, eigene Einschübe.

von M). Dieser *circulus vitiosus* ist die Ursache der Paradoxien in der Mengenlehre zu Anfang des 20. Jahrhunderts. Lorenzen versucht eine solche Rückbezüglichkeit mithilfe einer *Schichttheorie* (vgl. Russells und Whiteheads Typentheorie) zu umgehen. Bevor dies erläutert wird, sei hier die Einführung der (reell-) algebraischen Zahlen Lorenzens vorgestellt: eine Alternative zur klassischen Einführung der algebraischen Zahlen, die für das spätere Verständnis förderlich ist.

3.1 (Reell-) Algebraische Zahlen

Ausgangspunkt ist die Suche nach einer Erweiterung der rationalen Zahlen, mit der die Aussageform $f(x) = 0$ für jedes rationale Polynom f erfüllbar wird. Mit einer solchen Erweiterung kann jedoch die für die rationalen Zahlen bestehende Ordnung $\leq$ nicht fortgesetzt werden. Daher soll zunächst eine Erweiterung gesucht werden, mit der die genannte Aussageform zwar nur für gewisse Polynome (aber dennoch für so viele wie möglich) erfüllbar ist, mit der dann aber die bereits bestehende Ordnung fortsetzbar ist.[8] Es soll also (für rationale Zahlen a, b und ein rationales Polynom f) die folgende Aussageform erfüllbar sein[9]:

$$[(a < b) \wedge (f(a) < 0 \leq f(b))] \;\rightarrow\; [(f(x) = 0) \wedge (a < x \leq b)].$$

Hierfür wird zu jedem rationalen Polynom f und jeder rationalen Zahl a mit

$$f(a) < 0$$

$$\bigvee_b [(a < b) \wedge (f(b) \geq 0)]$$

umgangssprachlich das ‚kleinste x' mit

$$(f(x) = 0) \wedge (a < x \leq b)$$

bestimmt. Dieses ‚kleinste x' – übersichtlicher Weise mit f_a bezeichnet – erhält auf folgende Weise einen operativen Sinn:

8. Zur Einführung der (reell-) algebraischen Zahlen vgl. Lorenzen 1955, S. 157ff.

9. Der Leser mache sich bewusst, dass mit der Erfüllbarkeit dieser Aussageform auch die Erfüllbarkeit der Aussageform

$$[(a < b) \wedge (f(a) > 0 \geq f(b))] \;\rightarrow\; [(f(x) = 0) \wedge (a < x \leq b)]$$

gewährleistet ist.

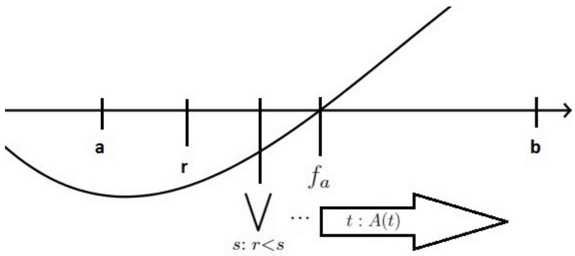
Für die Aussageform[10]

$$A(x) \;\rightleftharpoons\; ((a < x) \;\wedge\; (f(x) \geq 0))$$

sei entsprechend der Wahl des ‚kleinsten x mit $f(x) = 0$ und $a < x \leq b$' (für rationale Zahlen r) definiert:

$$r < f_a \;\rightleftharpoons\; \bigvee_{s\colon r<s} \bigwedge_{t} (A(t) \to (s \leq t)).$$

Dabei beziehen sich die Quantoren auf rationale Zahlen s und t. Es handelt sich bei dieser Definition um eine rein formale Festlegung der Aussageform $r < f_a$. Über das ‚Wesen' von f_a, falls es ein solches geben sollte, ist damit noch nichts ausgesagt. Ebenso wie im Formalismus soll ein neues Zeichen zunächst frei von inhaltlichen Interpretationen eingeführt werden. Zur Veranschaulichung sei hier dennoch eine kleine Skizze gegeben:



Mit der definierten Einordnung entspricht jedes f_a einem Dedekindschen Schnitt. Im Unterschied zur üblichen Dedekindschen Einführung der reellen Zahlen handelt es sich jedoch nicht um beliebige Schnitte, sondern um durch Polynome definierte Schnitte. Es kann nun eine *abstrakte Gleichheitsrelation* ρ definiert werden:

$$f_a \,\rho\, g_b \;\rightleftharpoons\; \bigwedge_{r} ((r < f_a) \;\leftrightarrow\; (r < g_b)),$$

die dann mit einer *konstruktiven Abstraktion*[11] zu neuen Termen führt: den (reell-)algebraischen Zahlen. Eine abstrakte Gleichheitsrelation kann als Äquivalenzrelation und eine konstruktive Abstraktion als (konstruktive) Äquivalenzklassenbildung verstanden werden. Im Gegensatz zur klassischen Äquivalenzklassenbildung z. B.

10. Lorenzen verwendet ‚$\rightleftharpoons$' als Definitionssymbol.
11. Zur Erläuterung einer *abstrakten Gleichheitsrelation*, einer *konstruktiven Abstraktion* und eines *Kennzeichnungsterms* vgl. Lorenzen 1955, S.84-101.

aller rationalen Cauchyfolgen mit gleichem Grenzwert wird hier als ‚Auswahlbereich' nicht die gesamte Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen herangezogen, was operativ keinen Sinn hätte. Stattdessen werden sogenannte *Kennzeichnungsterme* gebildet, die durch *Aussageformen* festgelegt sind, die wiederum durch einen operativen Kalkül festgelegt sind. Die überabzählbare Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen kann als Aktualunendlichkeit niemals operativ erfasst werden.

3.2 Reelle Zahlen

Bei der Einführung der reellen Zahlen[12] (das heißt bei der Erweiterung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen) wird nun auf die Einschränkung der Festlegung durch rationale Polynome verzichtet. Dazu sei $A(s)$ eine zunächst *beliebige Aussageform.*[13] Analog zu f_a wird $\underline{\mathrm{fin}}_s A(s)$ als Symbol für die neu einzuführenden Objekte verwendet. Dann wird gesetzt:

$$r < \underline{\mathrm{fin}}_s A(s) \;\rightleftharpoons\; \bigvee_{s:\, r<s} \bigwedge_t (A(t) \to (s \leq t)),$$

und entsprechend eine abstrakte Gleichheitsrelation definiert, die dann per Abstraktion zu neuen Termen führt, den reellen Zahlen.
Die entscheidende Frage ist hier natürlich: Welchen operativen Sinn hat der Begriff ‚beliebige Aussageform'? Im Gegensatz zur klassischen Einführung der reellen Zahlen durch Dedekindsche Schnitte, bei der aus beliebigen Elementen der Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen, das heißt aus *beliebigen Mengen* rationaler Zahlen, diejenigen ausgewählt werden, die die Dedekindschen Schnitteigenschaften erfüllen, muss hier eine ‚beliebige Aussageform' durch einen Kalkül festgelegt sein. Nur so hat sie eine Existenzberechtigung. Es stellt sich somit die Frage, welche minimalen Forderungen an einen Kalkül gestellt werden müssen, um gerade noch ein erfolgreiches Herstellen von Figuren (das heißt Aussagen/Aussageformen) zu ermöglichen. Für Lorenzen[14] sind dies zum einen die *Fundiertheit* (der Kalkül soll keinen unendlichen Regress enthalten, damit auch tatsächlich Figuren hergestellt werden können) und zum anderen die *Separiertheit* (das Herstellen einer Figur

12. Zur Einführung der reellen Zahlen vgl. Lorenzen 1955, S. 197ff.
13. Der inhaltlichen Vollständigkeit und Korrektheit wegen sei hinzugefügt, dass die Aussageform $A(s)$ die Eigenschaft besitzen soll, dass die durch $A(s)$ dargestellte *Menge* nicht-leer und nach unten beschränkt ist. Der Leser soll sich hier durch die Verwendung des Wortes ‚Menge' jedoch nicht verwirren lassen. Zur Klärung des Begriffs ‚Menge' im operativen Sinne sei auf Lorenzen 1955, S.102 verwiesen.
14. Zur Konstruktion einer *elementaren Sprache* mithilfe von *fundierten und separierten Definitionsschemata* vgl. Lorenzen 1955, S. 165-182.

soll eindeutig sein). Selbstverständlich muss diesen Begriffen wieder ein operativer Sinn gegeben werden, das heißt, es muss mittels schematischen Operierens überprüft werden können, ob ein Kalkül fundiert oder separiert ist. Einen Kalkül, der vorgegebene Objekte unter Einbeziehung der logischen Partikel zu Aussageformen verknüpft und dabei erstens die Mehrstelligkeit von Aussageformen berücksichtigt und zweitens das Vorhandensein schon mithilfe anderer Kalküle definierter Aussageformen beachtet, nennt Lorenzen *Definitionsschema*. Ein Definitionsschema, das fundiert und separiert ist, heißt *Induktionsschema*. Induktionsschemata sind Lorenzens Grundlage für den Aufbau einer *elementaren Sprache* (und damit für die Einführung der reellen Zahlen): Ausgehend von gegebenen Objekten, den *Grundobjekten*, werden durch Induktionsschemata *beliebige Aussageformen* auf definite Weise hergestellt. Dieser Konstruktionsprozess einer elementaren Sprache kann iteriert werden, indem die erhaltenen Aussageformen als neue Objekte verwendet werden. Dadurch entstehen *Sprachschichten*[15], die jeweils ausschließlich auf die darunterliegende Schicht aufgebaut werden:

0. Schicht S_0: Grundobjekte (z. B. rationale Zahlen)
1. Schicht S_1: Figuren, die durch Induktionsschemata mit den <u>Grundobjekten als Objekte</u> hergestellt werden
2. Schicht S_2: Figuren, die durch Induktionsschemata mit den <u>Figuren aus S_1 als Objekte</u> hergestellt werden

... ...

n. Schicht S_n: Figuren, die durch Induktionsschemata mit den <u>Figuren aus S_{n-1} als Objekte</u> hergestellt werden

... ...

Schicht S_ω: ‚offene Vereinigung' der Figuren aller bisherigen Schichten

Die Schicht S_ω ist so aufzufassen, dass eine Figur X ihr genau dann angehört, wenn X einer Schicht S_n angehört. S_ω bildet nun aber nicht den Abschluss der Schichtkonstruktion. Es kann noch weiter iteriert werden. So erhält man z. B. die Schicht $S_{\omega+1}$, indem die Figuren aus der Schicht S_ω als Objekte verwendet werden.

Es ergeben sich verschiedene Konsequenzen aus diesem Schichtaufbau. Für die obige Einführung der reellen Zahlen ist vor allem die folgende wesentlich:

15. Zur Konstruktion von *Sprachschichten* vgl. Lorenzen 1955, S. 182-194.

Satz (Lorenzen 1955)[16]
Mit jeder neuen Schicht sind auch neue Mengen von Grundobjekten darstellbar.

Beweisidee (vgl. Cantorsches Diagonalverfahren)
Es sei S_θ eine beliebige Schicht. Zunächst lässt sich zeigen, dass es eine in $S_{\theta+1}$ darstellbare eineindeutige Abbildung zwischen den Grundobjekten und den Figuren aus S_θ gibt. Weiter lässt sich zeigen, dass es daher auch eine in $S_{\theta+1}$ darstellbare eineindeutige Abbildung a zwischen den Grundobjekten und den Aussageformen $A(z)$ von S_θ mit einer freien Objektvariablen z gibt: Wir schreiben dafür etwa $a : X \mapsto A_X(z)$. Dann wird eine Abbildung b so definiert, dass gilt: $b : X \mapsto \varkappa_z^0 A_X(z)$ (vgl. Lorenzens Darstellung von *Mengen*[17]). Die Abbildung b soll also das Grundobjekt X auf diejenige Menge von Grundobjekten abbilden, die durch die Aussageform dargestellt wird, auf die X mit a abgebildet wird. b ist daher natürlich nicht mehr eineindeutig, da verschiedene Aussageformen die gleiche Menge darstellen. Aber b ist eine in $S_{\theta+1}$ darstellbare Abbildung, die die Grundobjekte auf die Menge *aller* in S_θ darstellbaren Mengen von Grundobjekten abbildet (b ist surjektiv). Jetzt wird der Cantorsche Gedanke verwendet: In $S_{\theta+1}$ ist offensichtlich die Menge der Grundobjekte mit $X \notin \varkappa_z^0 A_X(z)$ darstellbar. Diese Menge ist für jedes X verschieden von $\varkappa_z^0 A_X(z)$ und daher nicht in S_θ darstellbar.

Dadurch, dass in einer Schicht $S_{\theta+1}$ Mengen von Grundobjekten (und damit also auch *reelle Zahlen*) dargestellt werden können, die in S_θ noch nicht darstellbar sind, ergibt sich ein entscheidender Unterschied zwischen Lorenzens operativer Schichttheorie und dem klassischen Vorgehen. Während bei letzterem die Zulassung der aktualunendlichen Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen grundlegend ist für die Existenz der überabzählbaren, vollständigen Menge der reellen Zahlen, muss innerhalb der Schichttheorie immer angegeben werden, *in welcher Schicht* die Mengen durch Aussageformen darstellbar sein sollen, wenn von *allen* Mengen von Grundobjekten gesprochen wird. Je höher die Schicht, desto mehr solcher Mengen gibt es. Und die Schichtkonstruktion ist ein offener, niemals abgeschlossener *Prozess*. Die darin hergestellten Figuren können gerade nicht als aktualunendliche Gesamtheit angesehen werden. Cantor zog mit seinem Diagonalverfahren den Schluss, dass die Menge der reellen Zahlen ‚überabzählbar' ist. Daraus folgerte er weiter, dass die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen nur die niedrigste unendliche Mächtigkeit ist, neben der es noch weitere höhere Mächtigkeiten gibt. Hierbei ist zu beachten, dass es bei Cantors Beweis notwendig ist, von der

16. Vgl. Lorenzen 1955, S. 191.
17. Mit dem Ausdruck $\varkappa_z^0 A_X(z)$ ist die ‚Menge' gemeint, die durch die Aussageform $A_X(z)$ dargestellt wird. Dabei symbolisiert die 0, dass $A_X(z)$ sich nur auf Objekte der Schicht S_0 bezieht, also auf die Grundobjekte. Zur operativen Einführung einer *Menge* und genauso einer *Abbildung* sei auf Lorenzen 1955, S. 99-105 verwiesen.

‚Aktualexistenz' der Menge der reellen Zahlen auszugehen. Eine alternative Interpretation des Beweises könnte auch darin bestehen, dass damit die Existenz dieser Menge widerlegt ist – statt die Abzählbarkeit der Menge. Lorenzen geht nicht von der ‚Aktualexistenz' der Menge aller reellen Zahlen aus, sondern führt sie ein durch einen stets fortsetzbaren Prozess. Die Idee des Diagonalverfahrens wird verwendet, um zu zeigen, dass es keine Schicht gibt, in der sämtliche reellen Zahlen darstellbar sind. So bilden die reellen Zahlen eine *potentielle* Unendlichkeit.

4 Kleiner Exkurs: Der Auswahlsatz

Bevor der Begriff der *Vollständigkeit* hinsichtlich der operativ eingeführten reellen Zahlen untersucht wird, soll hier eine weitere Konsequenz des Schichtaufbaus vorgestellt werden. In der klassischen Mengenlehre findet sich folgender Satz:

Satz
Ist M eine Menge von Mengen, die die leere Menge nicht enthält, so existiert eine Funktion $f : M \to \bigcup M$ mit $f(x) \in x$ für alle $x \in M$. (Dabei ist $\bigcup M$ die Vereinigung der Mengen in M.)

Die Funktion f wird als *Auswahlfunktion* bezeichnet. Der Beweis dieses Satzes basiert auf folgendem Axiom:

Auswahlaxiom (nach Zermelo)
Ist M eine Menge von Mengen, deren Elemente nicht-leer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge x, die mit jeder Menge aus M genau ein Element gemeinsam hat.

Die Tragweite dieses Axioms ist immens. Und obwohl es mit einem naiven Mengenverständnis (das sich ausgehend von endlichen Mengen auf unendliche überträgt) intuitiv nachvollziehbar ist, ist es ein gefordertes *Axiom*, das formal nicht bewiesen werden kann. Strichartz schreibt dazu:

> „In thinking about infinite sets, we are inclined to adopt forms of reasoning that arise from our intuitive ideas about finite sets. This transference of ideas from the finite to the infinite is by no means routine and often has consequences that are unforseen. [...] The Axiom of Choice is another principle [neben dem tertium non datur] – obvious for finite sets and transferred to infinite sets by analogy – that leads to non-constructive mathematics. [...] Although the general concept of set as an arbitrary collection of elements would naturally lead us to accept this axiom – if each of the sets A [in M] is non-empty, why shouldn't

> there be a choice function? – it does lead to a level of non-constructivity that is mind-boggling.“[18]

Innerhalb Lorenzens Schichtaufbau lässt sich dagegen folgender Satz auf konstruktive Weise beweisen (dabei sei S_θ eine beliebige Schicht):

Auswahlsatz (Lorenzen 1955)[19]
Zu jeder in S_θ darstellbaren Menge M nicht-leerer Mengen gibt es eine in S_θ darstellbare Auswahlfunktion.

Beweisidee
Sei M eine Menge nicht-leerer Mengen, die in S_θ darstellbar ist. Dann sind die Elemente von M in $S_{\theta-1}$ darstellbar und die Elemente dieser Mengen wiederum in $S_{\theta-2}$. Schon in $S_{\theta-1}$ und erst recht in S_θ gibt es eine eineindeutige Abbildung zwischen den natürlichen Zahlen und den Figuren von $S_{\theta-2}$. Es sei $R(X)$ die der Figur X aus $S_{\theta-2}$ zugeordnete Grundzahl. Jedem $m \in M$ wird dann die Figur X aus m mit minimalem $R(X)$ zugeordnet. Diese Zuordnung ist dabei – wie M – in S_θ darstellbar.

Im Gegensatz zur klassischen Mengenlehre existieren Mengen hier jeweils bzgl. einer Schicht. Jede Schicht ist für sich *abzählbar*, im Sinne des Vorhandenseins einer eineindeutigen Abbildung zwischen ihren Figuren und den natürlichen Zahlen, welche im Allgemeinen erst in der nächsthöheren Schicht darstellbar ist. Aufgrund dieser Abzählbarkeit kann selbstverständlich eine in der nächsthöheren Schicht darstellbare Auswahlfunktion konstruiert werden. Eine Auswahlfunktion, die schon in niedrigeren Schichten darstellbar ist, ist dagegen im Allgemeinen nicht konstruierbar.

5 Vollständigkeit

Jede Cauchyfolge reeller Zahlen besitzt eine reelle Zahl als Grenzwert.

Zu jeder nicht-leeren, nach unten beschränkten Menge reeller Zahlen existiert eine reelle Zahl als untere Grenze (Infimum).

Diese beiden zueinander äquivalenten Sätze bilden zunächst eine gemäß der formalistischen Position gestellte *Forderung*: Die Menge der reellen Zahlen soll vollständig sein. Neben einer bloß axiomatischen Definition sollen die reellen Zahlen aber auch als etwas ‚Handfestes' eingeführt werden: als eine Erweiterung der rationalen Zahlen – innerhalb der dann die beiden oberen Sätze bewiesen werden können. Bei

18. Strichartz 1995, S. 21,23, eigene Einschübe/Verkürzungen.
19. Vgl. Lorenzen 1955, S. 194.

jeder klassischen Erweiterung der rationalen Zahlen zu den reellen wird jedoch von der Existenz der aktualunendlichen, überabzählbaren Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen ausgegangen und dies ist ein für die geforderte Vollständigkeit unumgängliches Axiom. Zu der Idee der Einführung der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen, bei der der einzuführende Grenzwert x einer Cauchyfolge gerade in *jedem* noch so kleinen Abschnitt liegen soll, in dem sich auch alle Folgenglieder ab einem bestimmten Folgenglied befinden, schreibt Strichartz:

> „Considering the situation for all values of [ε, wobei $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$], we come to the conclusion that there exists a nested sequence of segments of length [ε] in which the limit presumably lies. This suggests that the limit x is exactly that number that is in all those segments. If there were no such number, this would suggest a ‚hole' in our number system, something that the idea of completeness is supposed to prevent."[20]

Um solche ‚Löcher' zu vermeiden, muss von der aktualunendlichen, überabzählbaren Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen ausgegangen werden. Lorenzen verzichtet auf diese nur axiomatisch erfüllbare Forderung und führt die reellen Zahlen dagegen operativ und schichtweise ein. Daraus ergibt sich der folgende konstruktiv beweisbare Satz:

Satz (Lorenzen 1955)[21]
Zu jeder nicht-leeren, nach unten beschränkten Menge M[22] reeller Zahlen der Schicht S_θ existiert eine reelle Zahl x der Schicht $S_{\theta+1}$ als untere Grenze.

Beweisidee
Die reelle Zahl x ist die Menge rationaler Zahlen, die eine rationale Zahl r genau dann enthält, wenn es eine reelle Zahl der Schicht S_θ in M gibt, die kleiner gleich r ist. Der hierbei verwendete Existenzquantor bezieht sich somit auf die (abzählbare) Schicht S_θ und ist damit selbst aus der Schicht $S_{\theta+1}$, womit auch die entsprechende Aussageform zur Darstellung der Menge x aus $S_{\theta+1}$ ist.

Analog zu obigem Auswahlsatz ist eine untere Grenze, die schon in niedrigeren Schichten darstellbar ist, im Allgemeinen nicht konstruierbar.

Bemerkung
Da die Schichten S_θ und $S_{\theta+1}$ beide in einer Schicht S_Θ, einer ‚offenen Vereini-

20. Strichartz 1995, S. 32, eigene Einschübe/Verkürzungen, Originaltext: „Considering the situation for all values of n, we come to the conclusion that there exists a nested sequence of segments of length $1/n$ in which the limit presumably lies."
21. Vgl. Lorenzen 1955, S. 200.
22. M gehört zur Schicht $S_{\theta+1}$.

gung' aller darunterliegenden Schichten, enthalten sind, kann von der unterschiedlichen Schichtzugehörigkeit insofern abgesehen werden als man sagen kann: Zu jeder nicht-leeren, nach unten beschränkten Menge reeller Zahlen aus der Schicht S_Θ gibt es eine reelle Zahl der Schicht S_Θ als untere Grenze.

6 Ausblick und Schlusswort

Es schließt sich hier natürlich die Frage an, wie es mit den so eingeführten reellen Zahlen denn nun weitergeht, das heißt, wie ein operativer Aufbau der Analysis aussieht und was er leisten kann. In folgendem Zitat Lorenzens zu obigem Vollständigkeitssatz ist entsprechend der vorangegangenen Bemerkung von der Schicht S_Θ die Rede, d. h. von einer Schicht, die nicht durch die Konstruktion einer elementaren Sprache aus den Figuren der darunterliegenden Schicht entsteht, sondern eine ‚offene Vereinigung' aller bisherigen Schichten darstellt. (S_ω ist die erste Schicht dieser Art.)

> „Ein entsprechender Satz [zur Vollständigkeit der reellen Zahlen] gilt selbstverständlich auch für die oberen Grenzen [...]. Es ist dabei darauf zu achten, daß die Gültigkeit dieser Sätze wesentlich darauf beruht, daß wir für ‚Menge' und ‚reelle Zahl' eine Definition gegeben haben, die in beiden Fällen die Darstellbarkeit in derselben Schicht S_Θ fordert. Wir werden für die gesamte Analysis bei den reellen Zahlen an der Bedingung der Darstellbarkeit in S_Θ festhalten, bei den Mengen werden wir später aber über S_Θ hinausgehen."[23]

Zunächst stellt Lorenzen noch ohne einen solchen Ausbau des Mengenbegriffs (innerhalb einer Schicht S_Θ) zwei grundlegende Sätze der Analysis auf:

Satz
Jede beschränkte, reelle Folge hat eine konvergente Teilfolge.[24]

Satz
Jede reelle Cauchyfolge hat (genau) eine reelle Zahl als Limes.[25]

Eine operative Einführung der erforderlichen Begriffe sowie die operative Vorgehensweise zum Beweis der Sätze wird in Lorenzen 1955[26] dargestellt. Mit einem ausgebauten Mengenbegriff gelingt es Lorenzen darüber hinaus, eine operative Analysis aufzubauen, die über Differentiation und Integration bis hin zu einem

23. Lorenzen 1955, S. 200, eigene Einschübe/Verkürzungen.
24. Lorenzen 1955, S. 201.
25. Vgl. Lorenzen 1955, S. 201.
26. Vgl. Lorenzen 1955, S. 200-207.

operativen Analogon des Borel-Lebesgue-Maßes reicht. Hierfür sei der Leser wieder auf Lorenzen 1955[27] verwiesen.[28]

Kommen wir damit zu den anfangs aufgeworfenen Fragen:
1) Inwiefern liefert Lorenzens operatives Vorgehen eine *Begründung* in obigem Sinne, das heißt einen *fundierten Anfang*? Und *von was*?
Das schematische Operieren ist mathematischen Inhalten *vor*geordnet und durchaus als fundierter Anfang geeignet. Der Anspruch, damit eine Logik und Mathematik aufzubauen, die den Inhalten des klassischen Aufbaus entsprechen, ist aber aufzugeben. Zum einen ist für jede inhaltlich nicht-leere Wissenschaft immer schon von vorhandenem Wissen auszugehen, wie sich schon am Prozess des Sprechenlernens zeigt. So verwendet auch Lorenzen Kalküle zur Formalisierung einer *inhaltlichen* Theorie. Zum anderen können die (aus gutem Grund) *axiomatisch* geforderten Inhalte der klassischen Mengenlehre und Analysis operativ nicht erreicht werden. Man erhält als großen Vorteil der operativen Vorgehensweise konstruktiv beweisbare Aussagen, die klassischen, nur axiomatisch begründeten Aussagen entsprechen, als Grenze jedoch die Tatsache, dass diese Aussagen in ihrem Bereich eingeschränkt sind (d. h. sie gelten immer nur bezüglich einer Schicht, nicht absolut). So findet sich ein Pendant zu dem erforderlichen Rückgriff auf das konstruktiv unbeweisbare Auswahlaxiom in der Tatsache, dass die Auswahlfunktion aus obigem Auswahlsatz in niedrigeren Schichten im Allgemeinen nicht konstruierbar ist. Ebenso stellt die Annahme der Existenz der aktualunendlichen, überabzählbaren Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen ein Pendant dazu dar, dass eine untere Grenze, welche in einer niedrigeren Schicht darstellbar ist, im Allgemeinen nicht konstruierbar ist.
Wenn es den Anschein hat, dass hier Formalismus und Operativismus nur verschiedene Seiten derselben Medaille darstellen, so stellt sich die folgende Frage:
2) Welchen Begründungsanspruch stellt man generell an ein mathematisches Vorgehen, an mathematische Objekte und Sätze? Dazu Lorenzen:

> Die axiomatische Methode ist ja vielmehr nur einer der Wege, auf denen man versucht hat, die Widersprüche, die beim naiven Gebrauch des Mengenbegriffs auftauchen, zu vermeiden. Diesem Weg gegenüber wird hier ein anderer Weg eingeschlagen, indem vom operativen Fundament aus ein Teilstück der konkreten (d.h. nichtabstrakten = nichtaxiomatischen) Mathematik entwickelt wird, das an die Stelle der ‚naiven' Analysis treten kann.[29]

27. Vgl. Lorenzen 1955, §§ 19 und 20, S. 207-238.
28. Peter Zahn erarbeitete außerdem einen *konstruktiven Weg zur Maßtheorie und Funktionalanalysis*, siehe Zahn 1978.
29. Lorenzen 1955, S. 195.

Beide Wege, der axiomatische und der operative, stellen vom genetischen Standpunkt aus *nachträgliche* Interpretationen/Rechtfertigungen/Begründungen von Begriffen, Vorgehensweisen und Sätzen dar, die entdeckt oder erschaffen wurden, weil sie für irgendetwas *gebraucht* wurden. Erst nachträglich wird ein Begründungsanspruch gestellt, der z. B. Widerspruchsfreiheit oder konkrete Konstruierbarkeit fordert. Die Frage, welchen Begründungsanspruch man an mathematische Vorgehen oder Objekte stellen möchte, hängt damit sicherlich mit den folgenden beiden Fragen zusammen:
3) Welche Bedeutung soll innerhalb der Mathematik dem Wort ‚Existenz' zukommen und wie groß ist die Einschränkung für die Anwendbarkeit der eingeführten Objekte, wenn man diese Bedeutung zu ernst nimmt?
Diese Fragen sollen an Lorenzens operativem Vorgehen zur Einführung der reellen Zahlen erörtert werden. ‚Existenz' ist genau das, was es ist: ein Wort. Und welche Bedeutung ihm zukommt, legen diejenigen fest, die es gebrauchen und zwar dadurch, *wie* sie es gebrauchen. Von einer Art ontologischen mathematischen Existenz zu sprechen, die unabhängig vom Gebrauch der Objekte ist, kann für manche Belange von Nutzen sein, jedoch passt sie nicht zur genetischen Entwicklung der Mathematik. Hier wurden mathematische Objekte eingeführt, weil sie gebraucht wurden. Wenn sich anschließend der Anspruch einer Begründung stellt, so ist danach zu fragen, welche Forderungen man an eine solche Begründung stellt. Innerhalb der formalistischen Position existieren mathematische Objekte, wenn sie axiomatisch widerspruchsfrei eingeführt sind. Die reellen Zahlen sind hier eine Menge von Objekten, die gestellte Forderungen erfüllen, (möglichst) ohne zu Widersprüchen zu führen. Soll der Existenzbegriff etwas tiefer gehen, so kann man die reellen Zahlen als Mengen von rationalen Zahlen ansehen, an die wiederum gewisse Forderungen gestellt werden. Die Existenz der Potenzmenge der rationalen Zahlen ist dabei jedoch wiederum nur axiomatisch begründet. Aus operativistischer Sicht existieren mathematische Objekte, wenn sie in einem Kalkül durch schematisches Operieren hergestellt werden können. Die reellen Zahlen sind auch hier gewisse Mengen rationaler Zahlen, der Mengenbegriff ist jedoch ein anderer als der in der formalistischen Position: Er basiert auf operativ eingeführten Aussageformen einer Sprachschicht. Sicherlich eine weniger intuitive Vorstellung von einer Menge als die klassische:

> „Denn welchem inhaltlich arbeitenden Analytiker wird es nicht ungewohnt sein, daß er sich unter einer Menge nicht irgendeinen (mehr oder weniger deutlichen) geometrischen Haufen vorzustellen hat, sondern eine Aussageform einer Sprachschicht?"[30]

30. Lorenzen 1955, S. 196.

Offensichtlich kommt es in der Anwendung aber gar nicht darauf an, was man sich unter den einzelnen mathematischen Objekten vorstellt, sondern darauf, was sie leisten. So ist es auch unerheblich, was sich ein Mensch unter einem bestimmten Wort vorstellt, solange er es richtig gebraucht. Führt ein operativ eingeführter Zahlkörper zu weniger Widersprüchen als ein analoger axiomatisch eingeführter Zahlkörper, so ist das sicherlich ein Vorteil. Kann der axiomatisch eingeführte Zahlkörper im Anwendungsbereich mehr leisten, ist dies ebenfalls ein Vorteil.

> „Beiden Auffassungen, der axiomatischen wie der operativen, wäre gedient, wenn sich im Rahmen der operativen Mathematik die Arithmetik zu einer Analysis ausbauen ließe, von der man dann hinterher feststellen könnte, daß sie ein Modell für eine der üblichen Axiomatisierungen der modernen Analysis liefert.“[31]

Dies leistet Lorenzens Ansatz zwar nicht[32], dennoch stellt er sicher den fundierteren Aufbau der beiden dar. Außerdem können die grundlegenden Begriffe und Sätze der klassischen Analysis damit dargestellt und bewiesen werden. Als abschließendes Fazit sei somit im Anschluss an Stegmüller festgehalten, dass Lorenzens operatives Vorgehen als „alternative Lösungsmöglichkeit“ betrachtet werden kann, welche von einem tieferen Existenzbegriff Gebrauch macht als dem klassischen.

Literaturverzeichnis

Cantor, Georg. 1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen* (Leipzig) 46 (4): 481–512.

Deiser, Oliver. 2010. *Einführung in die Mengenlehre.* 3. Aufl. Berlin / Heidelberg / New York: Springer.

Feferman, Solomon. 1964. *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis.* USA: Chelsea Publishing Company.

Fraenkel, Adolf. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre. Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgroßen.* 3. Aufl. Berlin / Heidelberg / New York: Springer.

31. Lorenzen 1955, S. 195.

32. Lorenzen weist darauf hin, dass „[s]o lange dies nicht gelungen ist – auch das vorliegende Buch leistet das nicht –, [...] mit der Möglichkeit zu rechnen [ist], daß die Axiomatisierungen der (zunächst ja inhaltlich vorliegenden) modernen Analysis nicht adäquat sind.“ (Lorenzen 1955, S. 195f, eigene Einschübe/Verkürzungen)

Frey, Gerhard. 1968. *Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik.* Hannover: Schroedel.

Hartmann, Dirk. 1993. Ist die konstruktive Abstraktionstheorie inkonsistent? *Zeitschrift für philosophische Forschung* (Frankfurt am Main) 47 (2): 271–285.

Hilbert, David. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* (Berlin / Heidelberg / New York) 95 (1): 161–190.

———. 1970. Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. In *Gesammelte Abhandlungen, Band III,* 157–177. Berlin / Heidelberg / New York: Springer.

Lorenzen, Paul. 1951. Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis. *Mathematische Zeitschrift* (Berlin / Heidelberg / New York) 54 (1): 1–24.

———. 1955. *Einführung in die operative Logik und Mathematik.* Berlin / Heidelberg / New York: Springer.

———. 1968. *Methodisches Denken.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Neumann, Johann von. 1931. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis* (Leipzig) 2 (1): 116–121.

Stegmüller, Wolfgang. 1958. Rezension von Lorenzen 1955. *Philosophische Rundschau* (Tübingen) 6 (3/4): 161–182.

Strichartz, Robert S. 1995. *The Way of Analysis.* Boston / London: Jones / Bartlett Learning.

Thiel, Christian. 1972. *Grundlagenkrise und Grundlagenstreit. Studie über das normative Fundament der Wissenschaften am Beispiel von Mathematik und Sozialwissenschaft.* Meisenheim am Glan: Hain.

———. 2006. On Lorenzen's Constructivist/Operativist Approach to the Formal Sciences. In *Operations and Constructions in Science. Proceedings of the Annual Meeting of the International Academy of the Philosophy of Science, Erlangen/Germany, 17-19 September 2004.* Erlangen: Universitätsbund Erlangen-Nürnberg.

Weyl, Hermann. 1918. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Leipzig: Veit.

Whitehead, Alfred North, und Bertrand Russell. 1986. *Principia Mathematica. Vorwort und Einleitungen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig. 2003. *Philosophische Untersuchungen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Zahn, Peter. 1978. *Ein konstruktiver Weg zur Masstheorie und Funktionalanalysis.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

David Hilbert und die Genetik der Drosophila

Martin Janßen[1]

Einleitung: David Hilberts Rede in Königsberg

Im Jahre 1930 wurde David Hilbert mit der Ehrenbürgerschaft seiner Heimatstadt Königsberg ausgezeichnet. Anlässlich dieser Ehrung trug Hilbert 1930 auf der „91. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte" in Königsberg als Hauptredner unter dem Titel „Naturerkennen und Logik" vor. Der „Allgemeine Bericht" beschreibt die Eröffnungssitzung dieser Versammlung und lässt vermuten, welche Bedeutung die Ehrung und der Vortrag für Hilbert hatten (vgl. auch Reid, 1970, 190ff).

> „Im Namen des Magistrats der Stadt sprach der Oberbürgermeister Dr. Lohmeyer; zugleich verkündete er die Ernennung von Prof. Dr. Hilbert zum Ehrenbürger von Königsberg. Der auf diese Weise gefeierte erste Redner unserer allgemeinen Sitzung dankte seiner Vaterstadt für die Ehrung mit gerührten Worten."
>
> (Fitting & Rassow, 1931, 29)

In ebendieser ersten Rede, die im gleichen Jahr im Journal „Die Naturwissenschaften" publiziert wurde, hebt Hilbert die Generalität und Reichweite *seiner* axiomatischen Methode durch eine exemplarische Anwendung auf die Vererbungsgesetze der Fruchtfliege Drosophila hervor.

---

1. Der vorliegende Beitrag stellt einen leicht überarbeiteten Auszug der Staatsexamensarbeit „Die axiomatische Methode nach D. Hilbert – am Beispiel der Genetik der Drosophila" dar, die 2014 vom Autor dieses Beitrages unter der Anleitung von Prof. Dr. H. N. Jahnke angefertigt wurde. Der Autor dankt Prof. Dr. H. N. Jahnke für die ausgezeichnete Themenstellung und die gute Betreuung.

> „Ich möchte aber lieber ganz kurz die axiomatische Methode an einem sehr drastischen Beispiele aus der modernen Biologie verdeutlichen. Drosophila ist eine kleine Fliege, aber groß ist unser Interesse für sie; sie ist der Gegenstand der ausgedehntesten Züchtungsversuche gewesen. Diese Fliege ist gewöhnlich grau, rotäugig, fleckenlos, rundflügelig, langflügelig. Es kommen aber auch Fliegen mit abweichenden Sondermerkmalen vor: statt grau sind sie gelb, statt rotäugig sind sie weißäugig usw. Gewöhnlich sind diese fünf Sondermerkmale gekoppelt, d. h. wenn eine Fliege gelb ist, dann ist sie auch weißäugig und fleckig, spaltflügelig und klumpflügelig. Und wenn sie klumpflügelig ist, dann ist sie auch gelb und weißäugig usw. Von dieser gewöhnlich statthabenden Koppelung kommen nun aber bei geeigneten Kreuzungen unter den Nachkommen an Zahl geringere Abweichungen vor, und zwar prozentuell in bestimmter konstanter Weise. Auf die Zahlen, die man dadurch experimentell findet, stimmen die linearen euklidischen Axiome der Kongruenz und die Axiome über den geometrischen Begriff ‚zwischen', und so kommen als Anwendung der linearen Kongruenzaxiome, d. h. der elementaren geometrischen Sätze über das Abtragen von Strecken, die Gesetze der Vererbung heraus; so einfach und genau – und zugleich so wunderbar, wie wohl keine noch so kühne Phantasie sie sich ersonnen hat."
>
> (Hilbert, 1930, 959f)

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist die historische Rekonstruktion der beispielhaften Hilbertschen Axiomatisierung der Vererbungsgesetze. Historische Rekonstruktion wird dabei, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird, als ein wissenschaftlicher Prozess in zwei Schritten verstanden. In einem ersten Untersuchungsschritt werden innerhalb der gegebenen Textstelle die drei Teilbereiche axiomatische Methode, lineare Geometrie und Genetik der Drosophila identifiziert und analysiert. Die Leitfrage dieser Betrachtung ist: Was versteht Hilbert unter der axiomatischen Methode, der linearen Geometrie und der Genetik der Drosophila? Da die Hilbertsche Auffassung der axiomatischen Methode sowie Hilberts (1899/2014) Werk „Grundlagen der Geometrie", das dessen Idee einer linearen Geometrie abdeckt, wissenschafts- und mathematikhistorisch vielschichtig beleuchtete Forschungsfelder sind (vgl. u.a. Corry, 2004, Tapp, 2013, Toepell, 1986 etc.), rückt die vorliegende Untersuchung die historische Rekonstruktion von Hilberts Verständnis der Vererbungslehre der Drosophila in den Fokus.

In einem zweiten Untersuchungsschritt werden die Teilergebnisse der Analyse der drei Untersuchungsbereiche im Rahmen einer Synthese zusammengeführt, sodass die historische Rekonstruktion der vorgetragenen Anwendung der axiomatischen

Methode möglich ist.
Eine derartig detaillierte Vorgehensweise ist notwendig, da die von Hilbert 1930 vorgestellte Axiomatisierung der Genetik der Drosophila sich durch Prägnanz und Kürze auszeichnet. Folgen dieser Darstellung des axiomatischen Vorgehens sind Leerstellen, die im Zuge des Rekonstruktionsprozesses zu schließen sind. Um dabei ein hohes Maß an historischer Authentizität zu erreichen, lag ein Hauptaugenmerk der historischen Forschung auf der sorgfältigen Auswahl und Erschließung der Quellen. Dieser Prozess wird nun genauer erklärt.
Eine Sichtung von Hilberts Werk zeigt, dass Hilbert nicht nur 1930 die Drosophila als Modellorganismus für *seine* axiomatische Methode verwendet hat. Anlässlich der Vorlesungen „Grundsätzliche Fragen der modernen Physik" (vgl. 1923/2009), „Wissen und mathematisches Denken" (1922/23 /1988) sowie „Über das Unendliche" (1924/25 /2013) trägt Hilbert ebenfalls über das hier bearbeitete Beispiel vor.
Inhaltlich ist die hier rekonstruierte Textstelle Hilberts (vgl.1930, 959f) am stärksten reduziert. Innerhalb der weiteren angeführten Quellen schildert Hilbert das Beispiel Drosophila etwas ausführlicher.
Wissenschaftshistorisch besonders brisant ist dabei die Hilbertsche Vorlesung „Über das Unendliche" (Hilbert, 1924/25 /2013) aus folgendem Grund: Innerhalb dieser Quelle zitiert Hilbert (vgl. ebd., 723) in zwei Randnotizen zur Vertiefung Abhandlungen der Biologen Goldschmidt (vgl. 1928) und Just (vgl. 1927).[2] Diese wiederum führen in umfassender Weise als Quelle zur Genetik der Drosophila Morgans Monographie „Die stoffliche Grundlage der Vererbung" (1921) an (vgl. Goldschmidt 1928 & Just, 1927), sodass die Genetik der Drosophila ausgehend von Morgans (vgl. 1921) Monographie rekonstruiert wurde. Zudem verweisen sowohl Goldschmidt (1928) und Just (1921) als auch Morgan (1921) auf Mendels epochalen Aufsatz „Versuche über Pflanzen-Hybriden" (1866). Auf Basis dieser Quellenlage ist davon auszugehen, dass Hilbert die im Jahre 1930 in Königsberg vorgetragene Axiomatisierung der Genetik der Drosophila aus der Kenntnis der hier vorgetragenen biologischen Befunde herleitet.
Über die historische Bedeutung der angestrebten Aufarbeitung hinaus, nimmt die bearbeitete Textstelle einen Bezug zum aktuellen wissenschaftlichen Diskurs der Geschichte und Philosophie der Mathematik. Kurze Nennungen bei u.a. Centrone (2010, 155), Sauer & Räz (2014, 68 & 2015, 58) sowie Stölzner (2002, 247) zeigen dies. Der vorliegende Beitrag knüpft damit unmittelbar an den gegenwärtigen Diskurs an und versucht ein breites Verständnis von Hilberts exemplarischer

2. Die Tatsache, dass diese Schriften zu einem späteren Zeitpunkt als die hilbertsche Vorlesung „Über das Unendliche" publiziert wurden, deutet Ewald (2013, 666) wie folgt: „This means that Hilbert continued to work on these lecture notes well after the Münster address had appeared in print."

Axiomatisierung der Genetik der Drosophila zu ermöglichen.

Analyse: Axiomatik, Geometrie, Genetik

Die axiomatische Methode

Hilberts epochales Werk „Grundlagen der Geometrie“ wurde 1899 anlässlich der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen publiziert. Im Rahmen dieser Abhandlung legt Hilbert nicht nur ein Axiomensystem für die euklidische Geometrie vor, sondern forciert zudem eine „methodische Neuorientierung“ der mathematischen Theoriebildung, genauer der axiomatischen Methode (Gabriel et al., 1980, 1). Ebendiese axiomatische Methode versucht Hilbert (1930, 595) in Königsberg „an einem sehr drastischen Beispiele aus der modernen Biologie zu verdeutlichen“, sodass diese im Folgenden Gegenstand einer kurzen Betrachtung ist.
Den ersten Paragraphen der „Grundlagen der Geometrie“ leitet Hilbert mit folgenden berühmten Worten ein:

> „Wir denken ⟨uns⟩ drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte [...]; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden [...]; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen [...].
> Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese durch Worte wie ‚liegen‘, ‚zwischen‘, ‚congruent‘, ‚stetig‘; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.“
>
> (Hilbert, 1899/2004, 437)

Nach Freudenthal (1957, 111)[3] durchtrennt Hilbert durch diese Formulierung „die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie“. Freudenthal (ebd.) weiter: „Die Geometrie ist reine Mathematik geworden“. Von nun an ist nach Hilbert für ein mathematisches Fachwerk – wie Courant (1928, 93) hervorhebt – zwischen einer innermathematischen und einer außermathematischen Ebene zu unterscheiden. Auf der innermathematischen Ebene folgt Hilbert der Grundidee,

3. P.S.: Der Autor dankt Prof. Dr. E. Scholz für die kritischen Anmerkungen zu Freudenthals Nabelschnur-Zitat. Der Autor betont, dass der Fokus seiner Argumentation hier nicht auf der Abtrennung der Geometrie, die nach Hilbert zu den Naturwissenschaften zählt, von der räumlichen Erfahrung, sondern auf der weiter unten eingeführten Unterscheidung zwischen inner- und außermathematischer Ebene liegt.

> „daß meist auch in umfassenden Wissensgebieten wenige Sätze – genannt Axiome – ausreichen, um dann rein logisch das ganze Gebäude der Theorie aufzubauen.“
>
> (Hilbert, 1930, 959)

Dabei werden die mathematischen Grundbegriffe und Beziehungen Freudenthals (1957, 111) Lesart weiter folgend von jedem anschaulichen Inhalt befreit und unter logischer Strenge als ein axiomatisch-deduktives „Fachwerk von Begriffen“ (Hilbert, 1917, 405) betrachtet. Diese Idee steht in starkem Kontrast zur klassischen euklidischen Herangehensweise, die den geometrischen Axiomen die Raumanschauung als Erkenntnisquelle zuweist. Nach dieser traditionellen Interpretation war die Geometrie damit an einen spezifischen Weltausschnitt gebunden. Hilbert hingegen löst die geometrischen Axiome nach Freudenthal (1957, 111) vom Erfahrungsraum und kreiert Tapps (2013, 42) Terminologie folgend „deutungsoffene“ und „multiapplikable“ mathematische Theorien.
Die außermathematische Ebene hingegen erfasst den Einfluss der Anschauung auf die Mathematik und die Anwendung mathematischer Strukturen auf die Welt. Im Königsberger Festvortrag hebt Hilbert die Stellung der Mathematik als Vermittler zwischen Denken und Anschauung hervor:

> „Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger.“
>
> (Hilbert, 1930, 962)

Die bis dato beschriebene Hilbertsche Sichtweise führt zu Folgendem: Wenn die Grundbegriffe einer mathematischen Theorie beliebig gedacht werden können, so ist es ohne Nutzen, diese zu definieren. Ein axiomatisch-deduktives Theoriegebäude nach Hilbert benötigt folglich keine Wesensdefinitionen der Grundbegriffe (Punkt, Gerade und Ebene). Innerhalb des kontroversen Briefwechsels zwischen Frege und Hilbert (vgl. Gabriel et al.,1980) schildert Hilbert seine Bedenken:

> „Dagegen in 3 Zeilen eine Definition des Punktes zu geben, ist meines Erachtens eine Unmöglichkeit, da vielmehr erst der ganze Aufbau der Axiome die vollständige Definition giebt. Jedes Axiom trägt zur Definition bei.“
>
> (Hilbert, 1899/1980, 12)

Insgesamt werden innerhalb Hilberts neuer Sichtweise sowohl die Grundbegriffe (Punkt, Gerade und Ebene) als auch die Beziehungen (zwischen, kongruent, etc.)

durch Axiome definiert. Diese Art zu definieren wird als implizites Definieren bezeichnet (vgl. Freudenthal, 1957, 116).
Auf Grundlage der bisherigen Präsentation von Hilberts Neuorientierung der axiomatischen Methode bleibt noch offen, wie die Wahrheit mathematischer Theorien sowie die Existenz der implizit definierten Gegenstände im Hilbertschen Sinne verifiziert wird.
Unter den Prämissen einer traditionellen Sichtweise sind Axiome nach Frege (1899/ 1980, 9) „Sätze, die wahr sind, aber nicht bewiesen werden". Im Aufsatz „Über die Grundlagen der Geometrie" geht Frege (vgl. 1903/1967, 262) noch einen Schritt weiter, indem er schreibt, dass Axiome nicht bewiesen werden „können". Innerhalb der traditionellen Axiomatik ist ein Satz damit genau dann ein Axiom, wenn er eine nicht beweisbare „evidente Wahrheit" (Freudenthal, 1957, 111) enthält. Hilbert aber zeichnet Axiome als „willkürlich gesetzte" (Hilbert, 1899/1980, 12) Sätze aus, die, unabhängig davon, ob möglich oder nicht, nicht bewiesen werden (vgl. Hilbert, 1922, 160). Wie bereits angedeutet, ist die Frage nach der Wahrheit der hilbertschen Axiome nach Freudenthal (vgl. 1957, 111) somit sinnlos.
Da damit das traditionelle Kriterium „Wahrheit" im Zuge der methodischen Neuorientierung ausscheidet, drängt sich die Frage auf, ob die hilbertschen Axiome tatsächlich willkürliche Setzungen[4] sind, oder ob Hilbert „neue" Kriterien für die Auswahl von Axiomen anführt.
Ein Anliegen der hilbertschen Festschrift „Grundlagen der Geometrie" ist es, die Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Axiome sicherzustellen (vgl. 1899/ 2004, 454ff). Dieses nach Tapp (vgl. 2013, 62f, 67f) syntaktische Kriterium ist Hilberts Ausführungen 1899 in dem weiter oben zitierten Brief an Frege folgend von entscheidender Bedeutung:

> „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz."
>
> (Hilbert, 1899/1980, 12)

Im Rahmen der Hilbertschen Kriteriologie für Axiome entscheidet folglich die Widerspruchsfreiheit über die „Existenz" und „Wahrheit" einer mathematischen Theorie, sodass ihre Untersuchung höchste Priorität erhält. Eines der Kernanliegen der axiomatischen Methode nach Hilbert ist es „die Mathematik sicher zu begründen" (Hilbert, 1922, 160). Andererseits ist die axiomatische Methode – wie Hilbert eindrucksvoll 1930 in Königsberg am Beispiel der Genetik der Drosophila

4. Tapp (vgl. 2013, 61) pointiert die Freiheit der Axiomenwahl, indem er fragt, ob „‚falsche' Sätze genauso Axiome sein" können.

zeigt – als interdisziplinäres Werkzeug nicht nur auf mathematische Forschungsfelder beschränkt.

> „Nicht bloß die Technik des Experimentierens und die Kunst, theoretisch-physikalische Gebäude zu errichten, ist heute auf einer nie bisher erreichten Höhe angelangt, sondern auch das Gegenstück, nämlich die logische Wissenschaft, ist wesentlich fortgeschritten. Es gibt heute eine allgemeine Methode für die theoretische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen, die auf alle Fälle die Präzisierung der Problemstellung erleichtert und die Lösung des Problems vorbereiten hilft, nämlich die axiomatische Methode."
>
> (Hilbert, 1930, 959)

Die lineare Geometrie

Nach Hilbert (1930, 960) sind die „Axiome über den geometrischen Begriff ‚zwischen'" und die „Axiome der Kongruenz" unter den Oberbegriff „lineare Kongruenzaxiome" zu fassen. Gegenstand der weiteren Untersuchung sind demnach diese beiden Axiomengruppen, die sich in Hilberts (vgl. 1899/2004) Festschrift als zweite und vierte Gruppe identifizieren lassen.

Axiome der Anordnung

Im dritten Paragraphen der „Grundlagen der Geometrie" stellt Hilbert (vgl. ebd., 439) die Gruppe der Axiome der Anordnung vor. Einleitend schildert Hilbert die Intention dieses Paragraphen:

> „Die Axiome dieser Gruppe definiren den Begriff ‚zwischen' und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die Anordnung der Punkte auf einer Geraden."
>
> (Hilbert, 1899/2004, 439)

Das Zusammenwirken der vier folgenden Axiome definiert demnach, wie die geometrische Relation „zwischen" oder auch „zwischen liegen" anzuwenden ist. Zur Veranschaulichung der Axiome dient Abbildung 1, die Hilbert in ähnlicher Darstellung in der Festschrift verwendet (vgl. ebd.).

Im ersten Axiom dieser Gruppe heißt es:

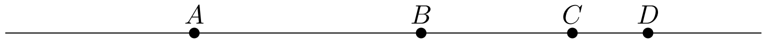


Abbildung 1: Mögliche Lage der Punkte A, B, C und D auf einer Geraden.

> „II 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A“
>
> (Hilbert, 1899/2004, 439)

Dies bedeutet, dass der Punkt B von A aus gesehen zwischen A und C und von C aus betrachtet zwischen C und A liegt (kurz: ABC und CBA).
Mit dem zweiten Axiom der Anordnung fasst Hilbert zwei Aussagen zusammen.

> „II 2. Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so giebt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.“
>
> (Hilbert, 1899/2004, 439)

Nach Hilbert (vgl. ebd.) lässt sich erstens zu zwei verschiedenen Punkten A und C mindestens ein Dritter finden, der zwischen den beiden Erstgenannten liegt. Zweitens existiert nach Hilbert mindestens ein Punkt D, für den gilt: ACD bzw. DCA (vgl. Abb. 1).

Das folgende Axiom der zweiten Axiomengruppe legt die Eindeutigkeit der Zwischen-Relation dreier Punkte auf einer Geraden fest.

> „II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden giebt es stets einen, und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt.“
>
> (Hilbert, 1899/2004, 439)

Das letzte Axiom über die Anordnung der Punkte auf einer Geraden formuliert Hilbert wie folgt:

> „II 4. Irgend vier Punkte A, B, C, D einer Geraden können stets so angeordnet werden, dass B zwischen A und C und auch zwischen A und D und ferner C zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt.“
>
> (Hilbert, 1899/2004, 439)

Vier verschiedene Punkte einer Geraden lassen sich somit auf derselben so anordnen, dass gleichzeitig ABC, ABD, ACD und BCD gilt.
Die aufgezählten Axiome der Anordnung sind für die weiteren Überlegungen der vorliegenden Untersuchung besonders bedeutsam, da sie von Hilbert (vgl. ebd.,

439f) zur Definition der Strecke verwendet werden. Eine Strecke AB oder gleichbedeutend BA ist Hilbert (vgl. ebd.) folgend als die Menge aller Punkte einer Geraden festgelegt, die zwischen den Endpunkten A und B (oder B und A) liegen.

Axiome der Kongruenz

In der Einleitung des sechsten Paragraphen greift Hilbert (vgl. ebd., 444) den auf Basis der Anordnungsaxiome definierten Streckenbegriff auf und erklärt: „Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort ‚congruent' dient" (ebd.). Dabei stellen die ersten drei Axiome die für die vorliegende Untersuchung relevanten linearen Kongruenzaxiome dar (vgl. ebd., 446).

> „IV 1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ congruent ist, in Zeichen:
>
> $$AB \equiv A'B'.$$
>
> Jede Strecke ist sich selbst congruent, d.h. es ist stets:
>
> $$AB \equiv AB.\text{“}$$
>
> (Hilbert, 1899/2004, 444)

Das erste Kongruenzaxiom ermöglicht nach Hilbert (vgl. ebd.) das Abtragen einer Strecke AB von einem gegebenen Punkt A' auf einer Geraden. Darüber hinaus definiert Hilbert im gleichen Axiom die Reflexivität der Kongruenz-Relation.

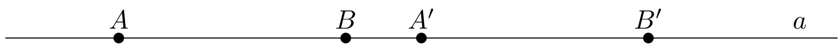


Abbildung 2: Konfiguration zur Veranschaulichung des ersten Kongruenzaxioms.

Innerhalb des zweiten Axioms der vierten Axiomengruppe beschreibt Hilbert (vgl. 1899/2004, 444) die Transitivität der Kongruenz-Relation.

> „IV 2. Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ congruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$

congruent, d.h. wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.“

(Hilbert, 1899/2004, 444)

Das letzte Axiom der linearen Kongruenzaxiome sichert die Verträglichkeit der Streckenaddition mit der Kongruenzrelation.

„IV 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

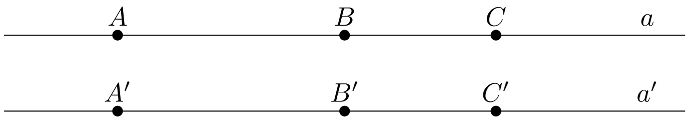


Fig. 8.

$AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.“

(Hilbert, 1899/2004, 444 & „Fig. 8.“ eigene Bearbeitung nach ebd.)

Auf der innermathematischen Ebene der Axiomatisierung der Genetik der Drosophila führt Hilbert (1930, 960) die beschriebenen Axiome der Anordnung und der Kongruenz unter dem Terminus „lineare Metrik“ zusammen. Für die Anwendung der axiomatischen Methode auf das biologische Beispiel genügen Hilbert damit die angeführten sieben Axiome.

Die Genetik der Drosophila

Nachdem im ersten und zweiten Teil der Analyse die axiomatische Methode und der relevante Ausschnitt aus der euklidischen Geometrie aus Hilberts Perspektive dargestellt wurden, widmet sich der dritte Untersuchungszweig der klassischen Genetik. Dieses biologische Untersuchungsfeld gibt Hilbert (vgl. 1930, 959f) wiederum durch die Axiomatisierung der Genetik der Drosophila innerhalb des Vortrages „Naturerkennen und Logik“ vor.
Von entscheidender Bedeutung ist dabei das von Hilbert (vgl. ebd.) geschilderte Phänomen der Koppelung von Merkmalen bei Erbgängen. Ausgangspunkt zum Verständnis dieses Mechanismus sind die paradigmatischen Forschungsergebnisse Mendels (1866), die im Folgenden mittels drei Vererbungsregeln fixiert werden.
An die Darlegung der mendelschen Vererbungsregeln anschließend ist die dritte

Regel im Hinblick auf Morgans (vgl. 1921) Befunde zu Erbgängen bei der Fruchtfliege Drosophila melanogaster erneut zu untersuchen. Durch die abschließend eingeführten Austauschzahlen werden die Ergebnisse zur Koppelung quantifiziert und so einer mathematischen Interpretation im Zuge der Synthese zugänglich.
Die bis dato präsentierten Ergebnisse zur klassischen Genetik sind nach Morgan (1921, 93) „unabhängig von der Chromosomentheorie der Vererbung." Die Axiomatisierung nach Hilbert (vgl. 1930, 959f) ist – wie die Synthese zeigen wird – ebenfalls unabhängig von der Verwendung der Chromosomentheorie, sodass dieser theoretische Ansatz hier nicht weiter in die Betrachtung einbezogen wird.

Der Brünner Abt und Naturforscher Gregor Johann Mendel (1822-1884) veröffentlichte im Jahre 1866 einen für die klassische Genetik fundamentalen Aufsatz mit dem Titel „Versuche über Pflanzen-Hybriden" (vgl. Mendel, 1866). Mendels Überlegungen zur Vererbungslehre trafen zunächst auf wenig Resonanz in der wissenschaftlichen Gemeinschaft, wurden aber zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts wiederentdeckt und popularisiert (vgl. Mayr, 1984/2002, 582ff).
Charakteristisch für Mendels Forschungsmethode ist ein hohes Maß an Ausdauer und Sorgsamkeit (vgl. Mendel, 1866, 3ff). Allein für die 1866 beschriebene Versuchsreihe benötigte Mendel acht Jahre, in denen er tausende Pflanzen kreuzte und die Veränderung der Merkmalsformen dieser beobachtete und dokumentierte (vgl. ebd., 4, 12ff). Im Stile hypothetisch deduktiver Vorgehensweise (vgl. Mayr, 1984/2002, 571) nutzte Mendel daran anschließend statistische Methoden zur Auswertung des gesammelten Datensatzes, sodass es Mendel nach Müller-Wille & Rheinberger (2009, 41 u. 43) möglich war ein „spezifisches Experimentalsystem" zu entwerfen. Dieses ermöglichte es „Strukturverhältnisse im Raum der Vererbung aufzudecken und diesen vom Raum der in Erscheinung tretenden Merkmale zu unterscheiden."
Innerhalb der durchgeführten Versuchsreihe verwendete Mendel (1866, 5ff) die Gartenerbse als Versuchsobjekt – oder, mit Müller-Willes & Rheinbergers (2009, 44) Terminus, als „Präzisionsinstrument".
Die Wahl der Pflanzenart muss Mendel (1866, 5) folgend „mit möglichster Vorsicht geschehen, wenn man nicht in Vorhinein allen Erfolg in Frage stellen will." Dabei war es besonders bedeutsam, dass die Versuchspflanze Merkmale mit gut unterscheidbaren Ausprägungen besitzt, „während der Blüthezeit vor der Einwirkung jedes fremdartigen Pollens geschützt" (ebd.) werden kann und „in den aufeinander folgenden Generationen keine merkliche Störung in der Fruchtbarkeit" (ebd.) erleidet.
Die durchgeführten Kreuzungsversuche lassen sich in drei aufeinander aufbauende Teilexperimente gliedern. Hierbei untersuchte Mendel sieben Merkmale der Gartenerbse, die in jeweils zwei gut unterscheidbaren Merkmalsformen ausgeprägt

werden (vgl. ebd., 8). Für das Merkmal „Gestalt der reifen Samen“ (ebd.) oder Samenform lassen sich zum Beispiel die Merkmalsformen „glatt“[5] und „runzlig“ unterscheiden (vgl. ebd.). Die Samenfarbe hingegen wird in den Merkmalsformen „gelb“ und „grün“ ausgeprägt.
Ziel der durchgeführten Kreuzungsversuche ist es nach Mendel, eine Gesetzmäßigkeit oder Regel zu finden,

> „[so]dass es möglich wäre, die Anzahl der verschiedenen Formen zu bestimmen, unter welchen die Nachkommen der Hybriden auftreten, dass man diese Formen mit Sicherheit in den einzelnen Generationen ordnen und die gegenseitigen numerischen Verhältnisse feststellen könnte.“
>
> (Mendel, 1866, 4)

In einem ersten Versuchsteil kreuzte Mendel dazu Pflanzen (P(arental)-Generation), die sich in nur einem reinerbigen[6] Merkmal unterscheiden (Monohybridkreuzung), und beobachtete die Ausprägung dieses Merkmals. Die Nachkommen dieser Kreuzung bezeichnet Mendel (1866, 10) als „Hybride“ (F_1(ilial)-Generation).
Daran anschließend pflanzte Mendel (vgl. ebd., 12ff) in einem zweiten Versuch die Hybriden, d.h. die Nachkommen der Kreuzung des ersten Versuches, fort.
Im Zuge des dritten Versuchsteils untersuchte Mendel die Abhängigkeit von Merkmalen bei Erbvorgängen. Konkret stellte sich die Frage, ob die Vererbung eines Merkmals den Erbgang eines anderen Merkmals beeinflusst. Hierzu verwendete Mendel Pflanzen, die sich in zwei reinerbigen Merkmalen unterscheiden und führte den ersten und den zweiten beschriebenen Kreuzungsversuch mit diesen Pflanzen durch (Dihybridkreuzung) (vgl. ebd., 18f, 22).
Ausgangspunkt von Mendels Auswertung der empirischen Befunde ist die Hypothese paarweise vorliegender diskreter Erbfaktoren für je eines der alternativen Merkmale (vgl. ebd., 24ff & Mayr, 1984/2002, 571). Auf Grundlage dieser Annahme werden in den folgenden drei Abschnitten die drei mendelschen Regeln erläutert, die jeweils das Ergebnis eines der drei durchgeführten Kreuzungsversuche beschreiben. Hierbei ist stets zwischen der Ebene des Beobachtbaren und der Ebene der Erbfaktoren zu differenzieren. Auf der erstgenannten Ebene wird der Phänotyp, d.h. die sichtbare Merkmalsform der Pflanzen, zum Gegenstand der Betrachtung. Die Modellebene – genannt Genotyp – fokussiert auf die Erbfaktoren. Diese werden als die für die Vererbung verantwortlichen Partikel verstanden und

5. Von Mendel (1866, 11) auch „rund“ genannt.
6. Als reinerbig gelten Pflanzen im Bezug auf eine Merkmalsform nach Mendel (vgl. 1866, 6) genau dann, wenn diese untereinander gekreuzt über viele Generationen hinweg nur gleiche Nachkommen produzieren. Gartenerbsen die reinerbig im Bezug auf die runde Samenform sind, sollten bei Kreuzung untereinander Samen produzieren, deren Pflanzen wiederum nur runde Samen tragen.

legen durch ihre Kombination den beobachtbaren Phänotyp eindeutig fest. Ein Schließen vom Phänotyp auf den Genotyp ist hingegen, wie im Weiteren deutlich wird, nicht immer eindeutig möglich. Die Mechanismen auf dieser Modellebene sind nicht direkt beobachtbar und werden im Folgenden durch Buchstaben, die die Erbfaktoren für ein Merkmal darstellen, repräsentiert.[7]

Die erste mendelsche Regel

Die erste mendelsche Regel wird heute als Uniformitätsregel bezeichnet und gibt die Ergebnisse der ersten Kreuzungsversuche wieder. In diesen wurden reinerbige Gartenerbsen gekreuzt, die sich in nur einem Merkmal unterscheiden und in den übrigen Merkmalen gleichen. Für alle sieben untersuchten Merkmale konnte Mendel (vgl. 1866, 10f) beobachten, dass die Nachkommen dieser Kreuzung alle gleich aussahen. Mendel schrieb 1866:

> „Jedes von den 7 Hybriden-Merkmalen gleicht dem einen der beiden Stamm-Merkmale entweder so vollkommen, dass das andere der Beobachtung entschwindet, oder ist demselben so ähnlich, dass eine sichere Unterscheidung nicht stattfinden kann.“
>
> (Mendel, 1866, 10)

Darüber hinaus führt Mendel die Eigenschaften Dominanz und Rezessivität von Merkmalsformen ein:

> „In der weiteren Besprechung werden jene Merkmale, welche ganz oder fast unverändert in die Hybride-Verbindung übergehen als dominirende, und jene, welche in der Verbindung latent werden, als recessive bezeichnet.“
>
> (Mendel, 1866, 11)

Eine exemplarische Betrachtung des Merkmals Samenform ergibt für eine Monohybridkreuzung von Pflanzen mit reinerbig glatten und reinerbig runzligen Samen auf der Ebene des Phänotyps bei den Nachkommen nur glatte Samen. Die Merkmalsform „glatt“ ist damit dominant gegenüber der rezessiven Merkmalsform „runzlig“. Auf Grundlage des Genotyps zeigt sich die Reinerbigkeit der Eltern durch zwei gleiche Buchstaben GG für glatte Samen bzw. gg für runzlige Samen. Die Großschreibung G deutet an, dass die Merkmalsform „glatt“ dominant gegenüber der

7. Insgesamt ist jedoch anzumerken, dass Mendel die Termini Gen sowie Geno- und Phänotyp noch nicht zur Verfügung standen. Diese Terminologie wurde von Johannsen (vgl. 1909) eingeführt (vgl. weiterführend Müller-Wille & Rheinberger, 2009, 55f). Auf Grundlage der im Fazit besprochenen Quellen wird diese Terminologie hier verwendet.

durch Kleinbuchstaben (g) gekennzeichneten rezessiven Merkmalsform „runzlig“ ist. (vgl. Tab. 1).[8]

P-Generation	glatt	×	runzlig	(Phänotyp)
	GG	×	gg	(Genotyp)
F_1-Generation	alle glatt			(Phänotyp)

Vererbungsraster

	G	G	
g	Gg	Gg	(Genotyp)
g	Gg	Gg	

Tabelle 1: Monohybrider Erbgang am Beispiel des Merkmals Samenform (G:=glatt & g:=runzlig).

Im Zuge des Vererbungsprozesses gibt jedes Elter einen Erbfaktor für das Merkmal Samenform hier GG und gg. Diese segregieren bei der Bildung der Keimzelle und die g des einen Elter und die G des anderen Elter kombinieren unabhängig. Durch das Ausfüllen des Vererbungsrasters (vgl. Tab. 1), in dessen erster Spalte die g des einen Elter und in dessen erster Zeile die G des anderen Elter stehen, lässt sich die Verteilung der Nachkommen vorhersagen. Die Samen der ersten Filialgeneration (F_1-Gen.) erhalten alle den Genotyp Gg, der sich auf der Ebene des Phänotyps als die dominante glatte Merkmalsform ausprägt. Da die Pflanzen dieser Generation als Erbfaktoren beide Merkmalsformen (G und g) angelegt haben, werden sie von Mendel (1866, 10) als „Hybride“ bezeichnet.

Die zweite mendelsche Regel

Im Zuge des zweiten Teilversuchs befruchtet Mendel die hybriden Gartenerbsenpflanzen (F_1-Generation) mit sich selbst. Die Veränderung der Merkmalsform wird für jedes untersuchte Merkmal einzeln, also in sieben Kreuzungsexperimenten, beobachtet. Unter den Nachkommen dieser Kreuzungen (F_2-Generation) wird die rezessive Merkmalsform, die in der F_1-Generation nicht zu beobachten war, wieder ausgeprägt (vgl. Mendel, 1866, 12 & Tab. 2). Aus der statistischen Analyse der gesammelten Daten erhält Mendel (vgl. ebd.) zudem ein für die durchgeführten Versuche konstantes Zahlenverhältnis zwischen den dominanten und rezessiven Merkmalsformen:

8. An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass die in Tab. 1 verwendeten Vererbungsraster – auch Punnett-Quadrate genannt – Mendel nicht bekannt waren (vgl. weiterführend Wimsatt, 2012). Auf Grundlage der im Fazit besprochenen Quellen wird diese symbolische Repräsentation hier verwendet.

> „In dieser Generation treten nebst dem dominirenden Merkmalen auch die recessiven in ihrer vollen Eigenthümlichkeit wieder auf, und zwar in dem entschieden ausgesprochenen Durchschnitts-Verhältnisse 3 : 1, so dass unter je 4 Pflanzen aus dieser Generation 3 den dominirenden und eine den recessiven Character erhalten. Es gilt das ohne Ausnahme für alle Merkmale, welche in die Versuche aufgenommen waren.“
>
> (Mendel, 1866, 12)

Diese Ergebnisse werden als Spaltungsregel bezeichnet. Unter 7324 untersuchten reifen Samen waren 5474 glatt und 1850 runzlig, was etwa einem Verhältnis von 3 : 1 entspricht (vgl. Mendel, 1866, 12). Für die Samenfarbe konnte Mendel (vgl. ebd.) ein Verhältnis von 6022 : 2001 $\approx$ 3 : 1 errechnen. Insgesamt tritt die dominante Merkmalsform im Verhältnis 3 : 1 gegenüber der rezessiven Merkmalsform auf (vgl. ebd.).

F_1-Generation	glatt	$\times$	glatt	(Phänotyp)
	Gg	$\times$	Gg	(Genotyp)
F_2-Generation		$\frac{3}{4}$ glatt $\frac{1}{4}$ runzlig		(Phänotyp)
		Vererbungsraster		(Genotyp)

	G	g
G	GG	Gg
g	Gg	gg

Tabelle 2: Monohybrider Erbgang am Beispiel des Merkmals Samenform (G:=glatt & g:=runzlig).

Auf der Ebene des Genotyps findet eine Kreuzung zwischen den Hybriden Gg und Gg statt. Aus der freien Kombination der Erbfaktoren ergibt sich im Vererbungsraster ein reinerbiges GG, zwei hybride Gg und ein reinerbiges gg, und damit ein Verhältnis von 1 : 2 : 1 der verschiedenen Genotypen (vgl. Tab. 2). Dieses Verhätnis von 1 : 2 : 1 zwischen reinerbigen und hybriden Genotypen, lässt sich auf der Ebene des Phänotyps durch eine Test- oder Rückkreuzung bestätigen (zum Begriff der Rückkreuzung vgl. Morgan, 1921, 61ff, 65). Da G die dominante glatte Merkmalsform repräsentiert, werden die Nachkommen, die GG oder Gg erhalten, glatte Samen ausbilden. Dies sind insgesamt drei Viertel der Nachkommen, sodass ein Viertel den Genotyp gg besitzt und die rezessive Merkmalsform runzlig ausprägt.

Die dritte mendelsche Regel

Für das dritte Experiment formuliert Mendel folgende Zielsetzung:

> „Die nächste Aufgabe bestand darin, zu untersuchen, ob das gefundene Entwicklungsgesetz auch dann für je zwei differirende Merkmale gelte, wenn mehrere verschiedene Charactere durch Befruchtung in der Hybride vereinigt sind.“
>
> (Mendel, 1866, 18)

Mendel stellt hier demnach die Frage nach der Unabhängigkeit der Vererbung von Merkmalen. Es ist zu untersuchen, ob die Vererbung eines Merkmals die Vererbung eines anderen Merkmals beeinflusst oder nicht. Dabei verwendet Mendel Pflanzen, die sich in zwei reinerbigen Merkmalen (hier am Beispiel der Merkmale Samenform (G:=glatt & g:=runzlig) und Samenfarbe (Y:=gelb & y:=grün)) unterscheiden und führt den ersten und den zweiten Kreuzungsversuch der Versuchsreihe mit diesen Pflanzen durch (Dihybridkreuzung) (vgl. Mendel, 1866, 18f, 22 & Tab. 5).
Nach der ersten Kreuzung erhält Mendel reife Samen der Pflanzen der F_1-Generation, die untereinander alle gleich aussehen. Innerhalb der Modellvorstellung ergeben sich aus der Kreuzung von $GGYY$ und $ggyy$ Nachkommen, die allesamt den Genotyp $GgYy$ besitzen (vgl. Mendel, 1866, 18ff & Tab. 5). Demnach müssten die Samen, die aus der F_1-Generation hervorgehen, phänotypisch glatt – G dominiert gegenüber g – und gelb – Y dominiert gegenüber y – sein. Diese Folgerung auf der Modellebene stimmt mit den Beobachtungen Mendels (vgl. 1866, 18ff) überein. Die reifen Samen der F_1-Generation sind glatt und gelb (vgl. ebd., 18 & Tab. 5).
Im folgenden Teilversuch zur Prüfung der Unabhängigkeit wurden die aus der ersten Kreuzung erhaltenen Pflanzen der F_1-Generation untereinander gekreuzt (vgl. Mendel, 1866, 19). Auf der Ebene des Genotyps wurde damit $GgYy$ mit $GgYy$ gekreuzt. Nach Auszählen der reifen Samen, der aus dieser Kreuzung erhaltenen F_2-Generation, gibt Mendel (vgl. ebd., 19) die in Tabelle 3 dargestellte Verteilung der absoluten Häufigkeiten an.

	gelb	grün	
glatt	315	108	423
runzlig	101	32	133
	416	140	556

Tabelle 3: Vierfeldertafel der absoluten Häufigkeiten der Samenform und -farbe in der F_2-Generation (vgl. Mendel, 1866, 19).

Die Vierfeldertafel zeigt, dass von insgesamt 556 ausgezählten Samen 315 den glatten und gleichzeitig gelben Phänotyp aufweisen. 108 Samen der F_2-Generation sind glatt und grün, sodass insgesamt 423 reife Samen dieser Generation glatt sind. Insgesamt verhalten sich die vier Phänotypen der zweiten Filialgeneration wie 315 : 108 : 101 : 32 also etwa 9 : 3 : 3 : 1 (vgl. Tab. 3).
Die vorliegenden Daten sind nun auf Unabhängigkeit zu untersuchen. Dazu folgende Vorüberlegung: Wäre die Vererbung des Merkmals Samenform von der Vererbung des Merkmals Samenfarbe unabhängig, so müssten die Merkmale Samenform und Samenfarbe so vererbt werden, als sei das jeweils andere Merkmal nicht anwesend. Dies würde bedeuten, dass unter den Samen der F_2-Generation drei Viertel glatt und ein Viertel runzlig sowie entsprechend drei Viertel gelb und ein Viertel grün sein müssten. Die dominante Merkmalsform würde im Verhältnis 3 : 1 gegenüber der rezessiven Merkmalsform ausgeprägt. (vgl. Mayr, 1984/2002, 575)
Um diese theoretischen Vorüberlegungen zur Unabhängigkeit von Merkmalen zu prüfen, werden aus den obigen absoluten Häufigkeiten die relativen Häufigkeiten berechnet (vgl. Tab. 4).

	gelb	grün	
glatt	0,57	0,19	0,76
runzlig	0,18	0,06	0,24
	0,75	0,25	1

Tabelle 4: Vierfeldertafel der relativen Häufigkeiten der Samenform und -farbe in der F_2-Generation (vgl. Mendel, 1866, 19).

Wie aus der Vierfeldertafel (vgl. Tab. 4) hervorgeht, werden sowohl die Merkmalsformen des Merkmals Samenform als auch die Merkmalsformen des Merkmals Samenfarbe im Verhältnis 3 : 1 vererbt. Die Merkmale Samenform und Samenfarbe werden demzufolge unabhängig voneinander vererbt. Diese Beobachtungen konnte Mendel (vgl. 1866, 18ff) für weitere Merkmale der Gartenerbse bestätigen.
Insgesamt fasst Mendel die Ergebnisse der dritten Teilversuche wie folgt zusammen:

> „[D]ie Nachkommen der Hybriden, in welchen mehrere wesentlich verschiedene Merkmale vereinigt sind, stellen die Glieder einer Combinationsreihe vor, in welchen die Entwicklungsreihen für je zwei differirende Merkmale verbunden sind. Damit ist zugleich erwiesen, dass das Verhalten je zweier differirender Merkmale in hybrider Verbindung unabhängig ist von den anderweitigen Unterschieden an den beiden Stammpflanzen.“

(Mendel, 1866, 22)

Diese Unabhängigkeit der Vererbung spiegelt sich auf der Modellebene des Genotyps ebenfalls wider. Innerhalb der F_2-Generation ist das Verhältnis von glatt, also GG und Gg, zu runzlig, also gg, 12 : 4 und damit 3 : 1 (vgl. Tab. 5). Dies ist eine Verteilung, die nach der zweiten mendelschen Regel zu erwarten ist. Die drei unterschiedlichen Genotypen GG, Gg und gg verhalten sich mit 4 : 8 : 4 wie 1 : 2 : 1. Für das Merkmal Samenfarbe lassen sich die gleichen Verhältnisse bezüglich der dominanten Merkmalsform gelb gegenüber der rezessiven Merkmalsform grün sowie für die drei verschiedenen Genotype YY, Yy und yy aufstellen (vgl. Tab. 5).

P-Generation:	glatt,gelb	×	runzlig,grün	(Phänotyp)
	GGYY	×	ggyy	(Genotyp)
F_1-Generation:	alle glatt,gelb			(Phänotyp)
	alle GgYy			(Genotyp)

Vererbungsraster

GgYy × GgYy

		GY	Gy	gY	gy	
F_2-Generation:	GY	GGYY	GGYy	GgYY	GgYy	(Genotyp)
	Gy	GGYy	GGyy	GgYy	Ggyy	
	gY	GgYY	GgYy	ggYY	ggYy	
	gy	GgYy	Ggyy	ggYy	gyy	

Tabelle 5: Dihybrider Erbgang am Beispiel der Merkmale Samenform (G:=glatt & g:=runzlig) und Samenfarbe (Y:=gelb & y:=grün).

Abweichungen zu Mendels Unabhängigkeitsregel nach Morgan

Eingehende Untersuchungen der mendelschen Vererbungslehre an der Fruchtfliege Drosophila melanogaster führten den US-amerikanischen Genetiker Thomas Hunt Morgan (1921, 60) und seine Mitarbeiter zu der Erkenntnis, dass „die Zahl der Fälle, in denen keine freie Kombination erfolgt, ständig zugenommen“ hat. Es konnten damit Abweichungen zu Mendels Unabhängigkeitsregel gefunden werden (vgl. auch Müller-Wille & Rheinberger, 2009, 58ff). Dazu schreibt Morgan:

> „Es sind zahlreiche Merkmale gefunden worden, die in aufeinanderfolgenden Generationen vereinigt bleiben. Diese Tendenz zusammenzuhalten wird als Koppelung bezeichnet.“

(Morgan, 1921, 60)

Die Koppelung zwischen Merkmalen kann dabei unterschiedlich stark ausgeprägt sein. Im Falle von Mendels Kreuzungsexperimenten zur Gartenerbse konnte keine Koppelung zwischen den untersuchten Merkmalen beobachtet werden, sodass Mendel auf eine freie Kombination der Erbfaktoren schloss. Morgan (1921, 64f) folgend hatte Mendel durch die Wahl der Versuchspflanze „nicht das Glück, Kombinationen von gekoppelten Merkmalen bei dieser Form herzustellen". Bei den von Mendel betrachteten Erbgängen wurde demnach die Vererbung eines Merkmals von der Vererbung eines anderen Merkmals nicht beeinflusst (vgl. ebd., 60).
Der entgegengesetzte Extremfall ist eine absolute Koppelung zwischen Merkmalen. Dieser Vorgang kann bei der Fruchtfliege Drosophila beobachtet werden (vgl. ebd., 60ff). Hierzu kreuzte Morgan in Analogie zu Mendels drittem Experiment Fruchtfliegen, die sich in zwei reinerbigen Merkmalen unterscheiden (Dihybridkreuzung). Nach Auswertung der Phänotypen der ersten Filialgeneration wurden diese Individuen mit den reinerbig rezessiven Fruchtfliegen der Parentalgeneration rückgekreuzt.[9] Dieses Vorgehen ist nach Morgan (ebd., 65) vorzuziehen, denn das „übliche Verfahren, die F_1-Generation durch Inzucht fortzupflanzen – statt sie mit einem P-Individuum rückzukreuzen –, [führt] häufig zu einer Verdeckung der Koppelungserscheinung." Die Analyse, der aus der Rückkreuzung hervorgehenden zweiten Filialgeneration, gibt Aufschluss über die Koppelung der untersuchten Merkmale.
Tabelle 6 zeigt eine von Morgans (vgl. ebd., 60ff) Versuchsreihen zur absoluten Koppelung der Merkmale Körperfarbe und Flügelform.

P-Generation:	grau,langfl.	×	schwarz,stummelfl.	(Phänotyp)
	BBVV	×	bbvv	(Genotyp)
F_1-Generation:	alle grau,langfl.			(Phänotyp)
	alle BbVv			(Genotyp)
F_2-Generation:	grau,langfl.	×	schwarz,stummelfl.	(Phänotyp)
	BbVv	×	bbvv	(Genotyp)

Tabelle 6: Dihybridkreuzung und Rückkreuzung am Beispiel der Merkmale Körperfarbe (B:=grau & b:=schwarz) und Flügelform (V:=langflügelig & v:=stummelflügelig).

Unter der Prämisse einer freien Kombination der Erbfaktoren wäre für die F_2-Generation das in Tabelle 7 dargestellte Vererbungsraster zu erwarten.

Demnach würden sich die vier Phänotypen grauer Körper und langflügelig ($BbVv$), grauer Körper und stummelflügelig ($Bbvv$), schwarzer Körper und langflügelig

9. Genauer wurden hier die männlichen Individuen der F_1-Generation mit den weiblichen reinerbig rezessiven Individuen der Parentalgeneration rückgekreuzt (vgl. weiterführend Morgan, 1921, 60ff, 66).

BbVv × bbvv

F_2-Generation: (Genotyp)

	bv	bv	bv	bv
BV	BbVv	BbVv	BbVv	BbVv
Bv	Bbvv	Bbvv	Bbvv	Bbvv
bV	bbVv	bbVv	bbVv	bbVv
bv	bbvv	bbvv	bbvv	bbvv

Tabelle 7: Nach Mendels Unabhängigkeitsregel erwartete F_2-Generation.

(*bbVv*) und schwarzer Körper und stummelflügelig (*bbvv*) in einem Verhältnis von 1 : 1 : 1 : 1 aufteilen.

Morgan (vgl. ebd.) folgend ergeben sich aus der Rückkreuzung jedoch lediglich die Phänotypen grauer Körper und langflügelig sowie schwarzer Körper und stummelflügelig in einem Verhältnis von 1 : 1. Es entstehen keine Fliegen der Phänotypen grauer Körper und stummelflügelig sowie schwarzer Körper und langflügelig (vgl. ebd., 61).

Dieser Erbgang deutet darauf hin, dass die Merkmale Körperfarbe und Flügelform gekoppelt vererbt werden, und damit keine anderen Phänotypen als die der Elterngeneration entstehen können.[10] Morgan formuliert diesen Befund wie folgt:

> „[D]ie beiden Mutationsmerkmale, schwarz und stummelflügelig, die zusammen in die Kreuzung eingetreten sind, gehen auch zusammen wieder aus ihr hervor, und ebenso bleiben auch ihre normalen Allelomorphen, Körperfarbe des wilden Typus [grau, Anm. d. Verf.] und lange Flügel, beisammen."
>
> (Morgan, 1921, 61)

Im Vererbungsraster aus Tabelle 7 sind demnach die Zeilen *Bv* und *bV* sowie zwei der Spalten mit *bv* zu streichen. Übrig bleiben die Erbeinheiten *BV* und *bv* der Elterngeneration, die im Verlaufe des Kreuzungsexperimentes nicht segregieren.[11] (vgl. Tab. 8 & Morgan, 1921, 61f)

Darüber hinaus lassen sich Morgan (vgl. ebd., 60) folgend zusätzlich zu den beiden besprochenen Extremfällen „alle Übergänge im Koppelungsgrad nachweisen" (ebd.). Die Betrachtung dieser Erbgänge führt nach Morgan (vgl. ebd., 66) direkt

10. Nach Morgan (vgl. 1921, 62) bedarf es an die angeführte Kreuzung anschließend noch weiterer Versuchsreihen, um zu verifizieren, dass Körperfarbe und Flügelform durch verschiedene Gene bedingte Merkmale sind.

11. Innerhalb der F_1-Generation konnte diese Koppelung noch unbemerkt bleiben, da die Kreuzung $BBVV \times bbvv$ auch bei Koppelung von BV und bv nur Individuen, die den Genotyp $BbVv$ tragen, ergibt.

BbVv × bbvv

F_2-Generation: (Genotyp)

	bv	bv
BV	BbVv	BbVv
bv	bbvv	bbvv

Tabelle 8: Tatsächliche F_2-Generation aus der Kreuzung.

zum Phänomen des Faktorenaustausches, der „als Crossing-over bezeichnet“ (ebd.) wird.
Zur Veranschaulichung dieses Phänomens wählt Morgan (vgl. ebd., 68ff) eine Dihybridkreuzung mit Rückkreuzung, wie sie schon zur Beschreibung der absoluten Koppelung verwendet wurde.

P-Generation:	graue Fl.,rote A.	×	gelbe Fl.,weiße A.	(Phänotyp)
F_1-Generation:	alle graue Fl.,rote A.			(Phänotyp)
F_2-Generation:	graue Fl.,rote A.	×	gelbe Fl.,weiße A.	(Phänotyp)

Tabelle 9: Dihybridkreuzung und Rückkreuzung am Beispiel der Merkmale Flügelfarbe und Augenfarbe.

Die Auswertung der Phänotypen der untersuchten Merkmale Flügelfarbe und Augenfarbe innerhalb der aus der Rückkreuzung[12] entstandenen F_2-Generation ergibt eine Verteilung, die weder der unabhängigen Kombination der Erbfaktoren nach Mendel (vgl. 1866) noch der absoluten Koppelung entspricht.
Nach Mendels Unabhängigkeitsregel wäre eine Verteilung von 1 : 1 : 1 : 1 zu erwarten. Es würden dementsprechend vier Phänotypen mit jeweils einer Häufigkeit von 25% in der zweiten Filialgeneration auftreten (vgl. Tab. 10). Bei absoluter Koppelung der untersuchten Merkmale wäre hingegen eine Verteilung von 1 : 1 der elterlichen Phänotypen (jeweils 50%) zu erwarten (vgl. ebd.). Tatsächlich weisen etwa 99% der untersuchten Individuen der F_2-Generation die elterlichen Phänotypen auf. Die übrigen Fruchtfliegen (1%) dieser Generation zeigen rekombinante Phänotypen, d.h. Merkmalsausprägungen, die nicht denen der Eltern entsprechen (vgl. ebd.). In diesen Fällen findet nach Morgan (vgl. 1921, 68ff) Crossing-over statt, sodass diese Merkmale dann nicht gekoppelt vererbt werden.

Daran anschließende Untersuchungen lassen nach Morgan (ebd., 66) den Schluss zu, „daß es sich dabei [gemeint ist der Faktorenaustausch; Anm. d. Verf.] nicht um einen zufälligen Vorgang handelt, sondern er führt zu numerischen Ergebnissen

12. Genauer wurden hier die weiblichen Individuen der F_1-Generation mit den männlichen reinerbig rezessiven Individuen der Parentalgeneration rückgekreuzt (vgl. weiterführend Morgan, 1921, 69f).

F_2-Generation:	gelbe Fl. weiße A.	graue Fl. rote A.	gelbe Fl. rote A.	graue Fl. weiße A.
erwartet nach Unabhängigkeitsregel	25%	25%	25%	25%
erwartet bei absoluter Koppelung	50%	50%	0%	0%
tatsächliche Verteilung	49,5%	49,5%	0,5%	0,5%
	elterliche Phänotypen		rekombinante Phänotypen	

Tabelle 10: Erwartete und tatsächliche Verteilung der Phänotypen innerhalb der F_2-Generation.

von außerordentlicher Konstanz.“ Diese Eigenschaft der Vererbung erlaubt es – Morgans (ebd., 68) Auswertung weiter folgend – „die Mechanik des Vorganges auf exakter Basis zu betrachten.“

Weitere Studien der Erbgänge der Drosophila zeigen, dass eine Variation der Kombination, in der die Merkmalsformen der Merkmale Augenfarbe und Flügelfarbe in der Parentalgeneration auftreten, zu einer identischen Verteilung innerhalb der F_2-Generation führt. Der Grad der Koppelung zwischen zwei Merkmalen ist damit unabhängig von der Ausprägung innerhalb der Parentalgeneration. Koppelung und das dazu komplementäre Phänomen des Faktorenaustausches findet demzufolge stets zwischen zwei (oder mehreren[13]) Merkmalen statt (vgl. Morgan, 1921, 61ff, 70ff).

Auf Basis der vorgestellten Befunde zum Faktorenaustausch ist es nun möglich, Austauschzahlen zu definieren.

Austauschzahl:
Die Zahl p_{AB}, die die relative Häufigkeit angibt, mit der zwischen den Merkmalen A und B der Elterngeneration ein Faktorenaustausch stattfindet, heißt Austauschzahl. Die Austauschzahl p_{AB} berechnet sich als:

$$p_{AB} = \frac{H(\text{rekombinante Nachkommen})}{H(\text{ges. Nachkommen})} \quad \in [0,1].$$

Aus dieser Definition folgt, dass $1 - p_{AB}$ die relative Häufigkeit der gekoppelten Erbgänge darstellt.

Für die beschriebene Vererbung der Merkmale Flügelfarbe (Y) und Augenfarbe

13. Werden drei oder mehrere Merkmale in einem Kreuzungsexperiment untersucht, so kann ein gleichzeitiger Austausch mehrerer Faktoren beobachtet werden (vgl. weiterführend Morgan, 1921, 70ff).

(W) ergibt sich damit die Austauschzahl $p_{WY} = 0,01$. Dies bedeutet, dass die beiden Merkmale in 1% der Kreuzungen nicht gekoppelt vererbt werden.

Synthese: Historische Rekonstruktion

Nachdem die Axiomatisierung der Genetik der Drosophila nach Hilbert (vgl. 1930, 959f) in die drei Untersuchungsfelder axiomatische Methode, lineare Geometrie und klassische Genetik zerlegt und innerhalb dieser analysiert wurde, ist die Synthese der gewonnenen Erkenntnisse die Aufgabe des letzten Untersuchungsteils. Grundlegend für die hilbertsche Axiomatisierung sind die Austauschzahlen, die Hilbert im Königsberger Vortrag beschreibt:

> „Von dieser gewöhnlich statthabenden Koppelung kommen nun aber bei geeigneten Kreuzungen unter den Nachkommen an Zahl geringere Abweichungen vor, und zwar prozentuell in bestimmter konstanter Weise."
>
> (Hilbert, 1930, 959f)

Arithmetische Eigenschaft der Austauschzahlen

Ausgehend von den beiden Grundprinzipien der Vererbung Koppelung und Faktorenaustausch gelang es nach Morgan (vgl. 1921, 93), die „lineare Anordnung" (ebd., 94) der Erbfaktoren verschiedener Merkmale – „unabhängig von der Chromosomentheorie der Vererbung" – nachzuweisen. Hierzu „ist es nur notwendig, einen Satz von gekoppelten Genen ([A, B, C], usw.) herzustellen," (ebd., 93) und deren Austauschzahlen zu berechnen und auszuwerten.[14]

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, besteht bei der Drosophila zwischen den Merkmalen Flügelfarbe und Augenfarbe eine Koppelung. Unter Hinzunahme des Merkmals Flügelform führt Morgan (vgl. ebd., 94) zum Nachweis der linearen Anordnung der drei Merkmale ein Kreuzungsexperiment mit Drosophila-Individuen durch, die sich in den drei angeführten Merkmalen unterscheiden. Innerhalb der Parentalgeneration treten Fruchtfliegen mit gelben und gespaltenen Flügeln und weißen Augen von der einen Seite in die Kreuzung ein (vgl. ebd.). Zum Phänotyp, der von der anderen Seite her in die Kreuzung eintritt, wie auch

14. Nach Morgan gilt für den Nachweis: „[D]ie normale Allelomorphen-Serie kann ignoriert werden, denn diese unterliegt den gleichen (reziproken) Veränderungen" (Morgan, 1921, 93). Dies bedeutet, dass der Nachweis der linearen Anordnung unabhängig von der Kombination der Merkmalsformen der Individuen innerhalb der Parentalgeneration ist.

zum weiteren Verlauf des Kreuzungsexperimentes macht Morgan (vgl. ebd.) keine weiteren Angaben. Zur Prüfung der Koppelung bzw. des Faktorenaustausches ist entsprechend Morgans oben beschriebenen Experimenten die Verwendung von Rückkreuzungen naheliegend. Zur Auswertung des Kreuzungsexperimentes sind die in Tabelle 11 angeführten Koppelungsdaten angegeben (vgl. ebd.).
Aus diesem Datensatz geht hervor, dass 1160 der 1278 untersuchten Drosophila-Individuen eine gekoppelte Vererbung aufweisen. Diese Fruchtfliegen gleichen phänotypisch den Fruchtfliegen der Elterngeneration. Bei den übrigen 118 Fruchtfliegen fand ein Faktorenaustausch statt, sodass diese andere Phänotypen als die ihrer Eltern tragen. Genauer konnten 15 Fliegen mit einem Faktorenaustausch zwischen gelben Flügeln und weißen Augen gezählt werden. In 15 von 1278 Erbgängen wurden damit die Merkmale Flügelfarbe und Augenfarbe nicht gekoppelt vererbt. Für die Merkmale Augenfarbe und Flügelart gilt dies in 43 von 1278 Fällen und für die Merkmale Flügelfarbe und Flügelform in 60 der beobachteten Vererbungen (vgl. Tab. 11).

P-Gen.:	gelb,weiß,gespalten × ?,?,?				
F_2-Gen.:	gekoppelte Vererbung	Faktorenaustausch zwischen:			
	gelb,weiß,gesp. oder ?,?,?	gelb,weiß	weiß,gesp.	gelb,gesp.	
$H(\dots)$	1160	15	43	60	1278

Tabelle 11: Koppelungsdaten zum Nachweis der linearen Anordnung von Erbfaktoren (vgl. Morgan, 1921, 93f & eigene Berechnung).

Auf Grundlage der gewonnenen Daten (vgl. ebd.) sind die Austauschzahlen, d.h. die Verhältnisse von rekombinanten zu elterlichen Phänotypen, zwischen jeweils zwei der drei untersuchten Merkmale (Augenfarbe (A), Flügelfarbe (B) und Flügelart (C)) berechenbar:[15]

$$p_{AB} = \tfrac{15}{1278} \approx 0,012 \quad p_{BC} = \tfrac{43}{1278} \approx 0,035 \quad p_{AC} = \tfrac{60}{1278} \approx 0,047.$$

Die Beziehung dieser Austauschzahlen untereinander veranschaulicht Morgan (vgl. 1921, 94) mittels Abbildung 3.

Dieses Diagramm repräsentiert den additiven Zusammenhang zwischen den Austauschzahlen für die drei untersuchten Merkmale. Es lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$p_{AB} + p_{BC} = p_{AC} \quad \Rightarrow \quad 1,2\% + 3,5\% = 4,7\%.$$

15. Entgegen der im vorangegangenen Untersuchungsteil eingeführten Notation W für das Merkmal Augenfarbe und Y für das Merkmal Flügelfarbe, beschreiben von hier ab an A, B und C die untersuchten Merkmale. Hierdurch soll die Analogie zur linearen Geometrie hervorgehoben werden.

$$\overbrace{\underbrace{\text{gelb}\quad\text{we}}_{1,2\%}\underbrace{\text{iß}\qquad\text{gespalten}}_{3,5\%}}^{4,7\%}$$

Abbildung 3: Lineare Anordnung der Merkmale Augenfarbe, Flügelfarbe und Flügelart (eigene Bearbeitung nach Morgan, 1921, 94).

Im Zuge weiterführender Studien gelang es nach Morgan (vgl. ebd., 94ff, 97) die additive Beziehung für weitere gekoppelte Merkmale zu bestätigen.[16] Die gesammelten Befunde deutet Morgan unter Verwendung des geometrischen Fachterminus „lineare Anordnung“ (ebd., 94):

> „Den einfachsten Weg für das Verständnis dieser Verhältnisse bietet die Annahme einer linearen Anordnung der Gene. [...] Punkte, die in einer geraden Linie angeordnet sind, stehen zueinander in dem hier gefundenen Verhältnis. Ich kenne keine andere geometrische Figur, die allen diesen Resultaten gerecht wird – vielleicht gibt es gar keine.“
>
> (Morgan, 1921, 94)

Sind die Erbfaktoren, in dem von Morgan (vgl. ebd.) dargelegten Stile, linear angeordnet, dann „folgt, daß Abstände zwischen ihnen vorhanden sein müssen, für die die Austauschwerte Indices bilden“ (ebd., 98). Innerhalb dieser Interpretation (vgl. ebd.) ist eine Austauschzahl wie $p_{AB} = 1,2\%$ nicht als absoluter Abstand aufzufassen. Es liegt vielmehr die Deutung der Austauschzahl als relativer Abstand, oder anders formuliert, als ein Maß für den Abstand zwischen zwei Erbfaktoren nahe. Eine geringe Austauschzahl impliziert dieser Auslegung nachgehend einen geringen realen Abstand der Erbfaktoren zweier Merkmale. Ist der Abstand groß, so ergibt sich eine hohe Austauschzahl. (vgl. ebd.)
Die beschriebene arithmetische Eigenschaft der Austauschzahlen, die Morgan (vgl. ebd., 94) unter dem Fachterminus „lineare Anordnung“ zusammenfasst, greift Hilbert (vgl. 1923/2009, 419ff) im Jahre 1923 in der Hamburger Vorlesung „Grundsätzliche Fragen der modernen Physik“ ebenfalls am Beispiel der Axiomatisierung der Genetik der Drosophila auf. In diesem Punkt ergänzt die Hamburger Vorlesung Hilberts Festvortrag in Königsberg (vgl. auch den Abschnitt Quellen).

> „Diese Austauschzahlen haben nun, wie man findet, die höchst merkwürdige arithmetische Eigenschaft, dass die Summe 2er gleich der 3^{ten}

16. Werden Merkmale mit großen Austauschzahlen untersucht, so ist nach Morgan (vgl. weiterführend 1921, 94ff) das Phänomen des mehrfachen Faktorenaustausches zu berücksichtigen.

ist in folgender Weise

$$p_{[AB]} + p_{[BC]} = p_{[AC]}.\text{“}$$

(Hilbert, 1923/2009, 422)

Aus diesem additiven Zusammenhang folgert Hilbert (ebd.), wie auch Morgan, dass „das Merkmal [B] eine bevorzugte Stellung gegenüber den beiden Merkmalen [A] und [C]“ einnimmt. Die Lage des Merkmals [B] wird durch den geometrischen Terminus „zwischen“ beschrieben (vgl. ebd.). Diese geometrische Beziehung ist durch die angeführten geometrischen Axiome definiert und verleiht damit Aussagen wie „Das Merkmal B liegt zwischen den Merkmalen A und C“ oder Betrachtungen von vier Merkmalen ein theoretisches Fundament.
Nach Morgan (vgl. 1921, 98) impliziert die lineare Anordnung der Erbfaktoren, dass zwischen diesen Abstände vorhanden sein müssen. Ausgehend von dem additiven Zusammenhang $p_{AB} + p_{BC} = p_{AC}$ zwischen gekoppelten Merkmalen folgert Hilbert:

> „Aber nicht nur diese bloss topologischen Axiome über ‚zwischen‘, sondern auch die linearen Kongruenzaxiome sind eben wegen jener arithmetischen Bezeichnung erfüllt: die Austauschzahl p hat den Charakter von Entfernungen auf einer Linie.“

(Hilbert, 1923/2009, 422)

Sind die vier Merkmale A, B, C und D in aufsteigender Reihenfolge ($A < B < C < D$) angeordnet, so illustriert Abbildung 4, die sich in ähnlicher Darstellung bei Hilbert (vgl. 1923/2009, 422) findet, die additive Zerlegung der Austauschzahlen. Diese Relation wird insbesondere durch das dritte Kongruenzaxiom, das die Addition von Strecken erklärt, theoretisch fundiert.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & & \mathrm{B} & & \mathrm{C} & & \mathrm{D} \\ & p_{AB} & + & p_{BC} & + & p_{CD} & \\ & & p_{AC} & + & p_{BD} & & \\ & & & p_{AD} & & & \end{array}$$

Abbildung 4: Additive Zerlegung von Austauschzahlen zu vier Merkmalen (eigene Bearbeitung nach Hilbert, 1923/2009, 422).

In Hamburg schließt Hilbert wie folgt:

> „[E]s ist damit für die Erbeigenschaften eines Lebewesens eine eindimensionale Geometrie u. zwar die der gewöhnlichen linearen Metrik nachgewiesen worden.“
>
> (Hilbert, 1923/2009, 422)

Schluss

Unter Hinzunahme von Hilberts (vgl. 1923/2009) Erläuterungen aus der Hamburger Vorlesung lassen sich damit einige Leerstellen im Vortrag „Naturerkennen und Logik“ schließen, sodass Hilberts (vgl. 1930, 959f) Ansatz der Anwendung der axiomatischen Methode auf die Genetik der Drosophila rekonstruiert werden kann. Dieser lässt sich zusammenfassend wie folgt beschreiben: Im Jahre 1930 greift Hilbert im Königsberger Festvortrag einen Ausschnitt der empirischen Vererbungswissenschaft der Drosophila – der sich in dem additiven Zusammenhang $p_{AB} + p_{BC} = p_{AC}$ manifestiert – auf und verwendet die linearen geometrischen Axiome über die Anordnung und die Kongruenz, um ein axiomatisches Fundament zu konstruieren. Diese Teilmenge der euklidischen Geometrie ermöglicht Aussagen – einschließlich deren Beweis – über Anordnung und Abstand von Erbfaktoren. Anstatt des Grundbegriffes „Punkt“ können die Termini „Erbfaktor“ oder „Gen“ substituiert werden. Unter Hinzunahme der Chromosomentheorie könnte hier anstatt „Gerade“ der biologische Fachterminus „Chromosom“ gesetzt werden. Es sei jedoch daran erinnert, dass die Befunde zur Koppelung und zum Faktorenaustausch nach Morgan (1921, 93) unabhängig von der Chromosomentheorie sind. Anzumerken ist zusätzlich, dass auch Morgan (vgl. 1921, 94, 98) durch die Verwendung der geometrischen Fachtermini „lineare Anordnung“ und „Abstand“ eine derartige Axiomatisierung nahelegt.
Schlussendlich fasst Hilbert seine Begeisterung für die vorgetragene nicht naheliegende Anwendung der axiomatischen Methode auf die moderne Vererbungslehre in die Worte:

> „[S]o kommen als Anwendung der linearen Kongruenzaxiome, d. h. der elementaren geometrischen Sätze über das Abtragen von Strecken, die Gesetze der Vererbung heraus; so einfach und genau – und zugleich so wunderbar, wie wohl keine noch so kühne Phantasie sie sich ersonnen hat.“
>
> (Hilbert, 1930, 960)

Literaturverzeichnis

Centrone, S. (2010). The Imaginary in Mathematics. In: Dies. Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl (149-213). Dordrecht: Springer.

Corry, L. (2004). David Hilbert and the axiomatization of physics (1898-1918). Dordrecht: Kluwer.

Courant, R. (1928). Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens. Die Naturwissenschaften, 6, 89-94.

Ewald, W. (2013). Introduction. In: Ewald, W. & Sieg, W. (Hrsg.) (2013), David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933, (656-667). Berlin: Springer.

Fitting & Rassow (1931). Allgemeiner Bericht über die 91. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 28-29.

Freudenthal, H. (1957). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Nieuw Archief Wiskunde, 3 (5), 105-142.

Gabriel, G. et al. (Hrsg.) (1980). Gottlob Freges Briefwechsel. Hamburg: Meiner.

Goldschmidt, R. (1928). Einführung in die Vererbungswissenschaft (5. Aufl.). Leipzig: Engelmann.

Hilbert, D. (1899/1980). Brief an Frege (29.12.1899). Zitiert nach: Gabriel, G. et al. (Hrsg.) (1980), 11-13.

——— (1899/2004). Grundlagen der Geometrie (Festschrift). Zitiert nach: Hallett, M. & Majer, U. (Hrsg.) (2004), David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902, (436-525). Berlin: Springer.

——— (1917). Axiomatisches Denken. Mathematische Annalen, 78 (1), 405-415.

——— (1922). Neubegründung der Mathematik. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1 (1), 157-177.

——— (1922/23 /1988). Wissen und mathematisches Denken (Vorlesung ausgearbeitet von W. Ackermann). Göttingen: Math. Inst. d. Univ. Göttingen.

——— (1923/2009). Grundsätzliche Fragen der modernen Physik (Vorlesung). Zitiert nach: Majer, U. & Sauer, T. (Hrsg.) (2009), David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics 1915-1927, (396-432). Berlin: Springer.

——— (1924/25 /2013).Über das Unendliche (Vorlesung aus dem WiSe 1924/25).

Zitiert nach: Ewald, W. & Sieg, W. (Hrsg.) (2013), (668-760).

——— (1930). Naturerkennen und Logik. Die Naturwissenschaften, 18 (47-49), 959-963.

Johannsen, W. (1909): Elemente der exakten Erblichkeitslehre. Jena: Fischer.

Just, G. (1927). Die Vererbung. Breslau: Hirt.

Mayr, E. (1984/2002). Die Entwicklung der biologischen Gedankenwelt. Berlin: Springer.

Mendel, G. (1866). Versuche über Pflanzen-Hybriden. Verhandlungen des Naturforschenden Vereins zu Brünn, 4, 3-47.

Morgan, T. H. (1921). Die stoffliche Grundlage der Vererbung. Berlin: Gebrüder Borntraeger.

Reid, C. (1970). Hilbert. New York: Springer.

Müller-Wille, S. & Rheinberger, H.-J. (2009): Das Gen im Zeitalter der Postgenomik. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Räz, T. & Sauer, T. (2014). Ein Zyklenmodell der Anwendung von Mathematik. In: Krömer, R. & Nickel, G. (Hrsg.), Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik: SieB Band 4 (67-95). Siegen: Universi.

——— (2015). Outline of a dynamical inferential conception of the application of mathematics. Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 49, 57-72.

Stöltzner, M. (2002). How Metaphysical is "Deepening the Foundations"? – Hahn and Frank on Hilbert's Axiomatic Method. In: Heidelberger, M. & Stadler, F. (Hrsg.), Vienna Circle Institute Yearbook [2001] Vol. 9 (245-262). Dordrecht: Springer.

Tapp, C. (2013). An den Grenzen des Endlichen. Berlin: Springer.

Toepell, M. (1986). Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie". Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Wimsatt, W. C. (2012). The analytic geometry of genetics. Archive for History of Exact Sciences, 66 (4), 359-396.

Zahlenteuflisches Sprechen und die Sprache der Mathematik

Elisabeth Pernkopf

– Erstens, sagte er, gibt es gar keinen Zahlenteufel.

– So? Warum redest du dann mit mir, wenn es mich überhaupt nicht gibt?

– Und zweitens hasse ich alles, was mit Mathematik zu tun hat.

– Warum denn das?

Die vielfach ausgezeichnete und übersetzte Erzählung *Der Zahlenteufel* von Hans Magnus Enzensberger gilt als Werk, „das nachweislich in der Lage ist, Grundgedanken der Mathematik für Kinder zugänglich zu machen" (Brüning 2007, 35). Sein Untertitel „Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben" charakterisiert es für einen altersunabhängigen Kreis von Adressatinnen und Adressaten. Ausdrückliche Angst vor Mathematik haben meist Schülerinnen und Schüler, und Enzensberger erfand die Geschichte vom Zahlenteufel zunächst für seine Tochter, die beim Erscheinen des Buchs 1997 zehn Jahre alt war. Es ist „[g]estaltet und mit Bildern versehen von Rotraut Susanne Berner"[1], einer renommierten Künstlerin in der Kinder- und Jugendliteratur. Als sie 2006 mit dem Sonderpreis zum Deutschen Jugendliteraturpreis ausgezeichnet wurde, wurden in der Begründung explizit auch ihr „gestaltgewordener Zahlengeist" und seine „genauen, dabei magisch-bildnerischen Aufklärungen" genannt (Deutscher Jugendliteraturpreis 2006).

Die Figur des Zahlenteufels führt den Jungen Robert in dessen Träumen in zwölf Nächten in Welten der Mathematik ein, und er tut das in einer Sprache, die weder der schulischen noch der fachsprachlichen gleicht. Der Literat Enzensberger führt

1. So heißt es am Titelblatt. Im Folgenden beziehe ich mich auf die zuletzt erschienene, 17. Auflage von Enzensbergers *Der Zahlenteufel*, die in neuer deutscher Rechtschreibung vorliegt, und zitiere daraus mit Sigle Z und Seitenzahl.

in seiner Geschichte lebensweltliches Erzählen weiter und endet nicht in mathematischen Terminologien. Er erzählt Mathematik anders und doch keine andere Mathematik. Hellhörig für „die Poesie der Wissenschaft“[2], wie die der Mathematik, wird die Reise durch die zwölf Nächte zu einem mehrfach poetischen Abenteuer.

Im Folgenden gehe ich dem mit vier Fragen nach. Erstens: Wie spricht der Zahlenteufel? Zweitens: Wie entwickelt sich das fortgesetzte Gespräch zwischen Robert und dem Zahlenteufel? Drittens: Was ist der Erzählung buchstäblich eingezeichnet? Und viertens, resümierend: Wie ist die Erzählung gestaltet? Man könnte sie wissenschaftsphilosophisch auch so formulieren: Wie spricht einer von seinem Fach? Wie kommunizieren Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler (und solche, die es werden wollen) miteinander? Wie sind symbolische Aufschreibungen und graphische Darstellungsformen damit verbunden? Also: Wie stellt sich ein Fach, hier die Mathematik, aufmerksamen Menschen, verkörpert in der Leserin und dem Leser, vor und dar; was wird von ihrer Sprache und dem Sprechen von Mathematikerinnen und Mathematikern vernehmbar? An Enzensbergers und Berners Erzählung lassen sich – wie ich meinen und behaupten möchte – exemplarische Aspekte des Verhältnisses von Sprache und Wissenschaften erheben.

1 Es spricht: der Zahlenteufel

Zunächst: Der Zahlenteufel spricht nicht mit sich selbst, sondern er kommt zu Robert, der auf die Selbstvorstellung „Ich bin der Zahlenteufel!“ mit Abwehr reagiert, dass es zum einen keinen Zahlenteufel gebe und er zum anderen alles „hasse“, was mit Mathematik zu tun hat (Z 11). Der Zahlenteufel fragt nach, lässt sich von der Schule erzählen und grinst schließlich: „Ich will ja nichts gegen deinen Lehrer sagen, aber mit Mathematik hat das wirklich nichts zu tun.“ (Z 12) Der Zahlenteufel stellt sich damit als einer vor, der weiß, was Mathematik ist – etwas anderes, als Robert bisher kennt. Und er möchte sich „bloß ein bisschen“ mit Robert „unterhalten“ (Z 14).

> – Wenn man sich über Mathematik so einfach unterhalten kann wie über Filme oder Fahrräder, wozu braucht es dann einen Teufel?
>
> – Das ist es ja gerade, mein Lieber, erwiderte der Alte. Das Teuflische an den Zahlen ist, dass sie so einfach sind. [. . .] Du brauchst, um damit anzufangen, nur eins: die Eins. Mit der kannst du fast alles machen. (Z 15)

2. Vgl. das so benannte Postskriptum in Enzensberger 2002, 261–276.

Fast unversehens hat der Zahlenteufel begonnen, Robert zu zeigen, dass Mathematik etwas „ganz anderes“ sein kann, als er aus der Schule kennt, und dass es auch ganz anders gehen kann mit „Hausaufgaben“, mit mathematischen Übungen, indem er „ganz einfach“ anfängt und einfach anfängt, damit – mit der Eins – etwas zu machen. 1+1 eröffnet das schlichte Zählen zu den Zahlen hin, „teuflisch einfach“. Und das Weiterzählen geht weiter „bis ins Unendliche. Es gibt nämlich unendlich viele Zahlen.“ (Z 16) Schon ist der Zahlenteufel in seiner Unterhaltung mit Robert bei einem so abstrakten Begriff wie dem Unendlichen und bei einer allgemeinen mathematischen Aussage angelangt.[3] Mit der Vorstellung, „wie viele Kaugummis bis heute auf der ganzen Welt gekaut worden sind“ (Z 16), verbindet der Zahlenteufel das Zählen mit einer lebensweltlichen Erfahrung, wobei Kaugummis Robert so vertraut sind, wie es Schafe den Hirten antiker Weideplätze waren, die Zählsteine in der Tasche hatten oder Kerben in Zählstäbe ritzten. In der fünften Nacht der Erzählung wird Robert mit Kokosnüssen hantieren. Der Zahlenteufel führt ihm damit die Dreieckszahlen vor Augen und sagt dann: „Also, die Kokosnüsse können wir vergessen. Auf die Zahlen kommt es an. Das sind Zahlen von ganz besonderer Güte. Man nennt sie [...]“ (Z 96). So ist ein kulturgeschichtlich langer Prozess kurz erzählt, vom Zählen, dem Benennen von Anzahlen hin zu Zahlzeichen und zum Zahlbegriff.

Eine Konsequenz dieser Abstraktionsprozesse sind Zahlensysteme. Zahlen lassen sich mehr oder weniger praktikabel ausdrücken. Der Zahlenteufel führt Robert vor, wie die Ziffern die Schreibweisen von Zahlen mit lauter Einsen vereinfachen und was die indisch-arabische Schreibweise im Vergleich zur römischen ermöglicht. Doch warum ist 10 zehn und nicht 1+0?

> – Willst du es nicht wissen? fragte der Zahlenteufel und lehnte sich genüsslich auf seinem Pilz zurück.
>
> Ein langes Schweigen folgte, bis Robert es nicht mehr aushielt.
>
> – Sag schon endlich!, forderte er.
>
> – Ganz einfach. Das kommt vom Hopsen.
>
> – Vom Hopsen?, sagte Robert verächtlich. Was ist denn das für ein Ausdruck? Seit wann hopsen Zahlen?

3. In seiner Rede „Zugbrücke außer Betrieb“, die Enzensberger 1998 anlässlich des Internationalen Weltkongresses der Mathematik in Berlin hielt, sagte er: „Es scheint eine fixe Idee der Pädagogik zu sein, daß Kinder nicht in der Lage sind, abstrakt zu denken. [...] Eher ist das Gegenteil richtig. Der Begriff des unendlich Großen und des unendlich Kleinen beispielsweise ist jedem Neun- oder Zehnjährigen intuitiv unmittelbar zugänglich.“ – Wieder abgedruckt in Enzensberger 2002, 11–25, hier: 21f.

> – Es heißt hopsen, weil *ich* es hopsen nenne. Vergiss nicht, wer hier das Sagen hat. Ich bin nicht umsonst der Zahlenteufel, merk dir das. (Z 38)

Der Zahlenteufel erklärt Robert, was „hopsen“ bedeutet und bewirkt. Dass diese mathematische Operation vom Zahlenteufel „hopsen“ genannt wird, liegt hier in der Autorität des Zahlenteufels begründet: „Es heißt hopsen, weil *ich* es hopsen nenne.“ Hier hat der Zahlenteufel das Sagen. In Fachwelten haben Fachleute das Sagen und in der Mathematik wird je bestimmt, wovon bei einem Fachbegriff die Rede ist. Wie ein Fachbegriff lautet, ist auch der Erfindungsgabe überlassen, und ein mathematischer Begriff kann sich in mathematisch unerfahrenen Ohren sehr gewöhnlich anhören, sehr überraschend oder beides zugleich.[4] Mathematik besteht wie kaum eine andere Wissenschaft darauf, ihre Begriffe exakt zu definieren.

Laut dem Zahlenteufel „hopsen“ die Zahlen also. Die Umkehrung dieser mathematischen Operation heißt bei ihm „einen Rettich ziehen“, was einen Anklang an gemeines Wurzelziehen hat. Zahlen können „hundsgewöhnlich“ sein, „prima“, „zerquetscht“, „eingebildet“ oder gar „unvernünftig“. Dass es sich um Eigenschaften von Zahlen in Zahlenmengen handelt, wird mit solchen Bezeichnungen vielleicht deutlicher, als es die Adjektive „natürlich“, „prim“, „gebrochen/rational“, „imaginär“ oder „irrational“ nahelegen, selbst wenn es sich bei „eingebildeten“ oder „unvernünftigen“ Zahlen schlicht um Übersetzungen aus dem Lateinischen handelt.

Die „eingebildeten“ Zahlen galten mathematikgeschichtlich auch lange als solche, bevor sie dank Gauß als komplexe Zahlen anerkannt wurden. „Eingebildet“ nannte sie auch Leonhard Euler, der mit ihnen meisterhaft rechnete, sie aber noch nicht als Zahlen akzeptieren konnte: „[S]o ist klar, daß die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müssen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich imaginäre Zahlen, oder eingebildete Zahlen genennt werden, weil sie bloss allein in der Einbildung statt finden.“ (Zit. nach Remmert 1992, 48)

4. In seiner „Warnung!“ am Ende des Buches schreibt Enzensberger, dass sich Robert und der Zahlenteufel manchmal „ziemlich sonderbar“ ausdrücken, wenn sie sich unterhalten: „Aber glaubt nur nicht, dass alle Leute die Traumwörter, die die beiden in den Mund nehmen, verstehen! Euer Mathematiklehrer zum Beispiel oder eure Eltern. [...] Bei den Erwachsenen hört sich das nämlich ganz anders an: Statt *hopsen* sagen sie *quadrieren* oder *potenzieren* [...]“ (Z 254). Am Ende des *Zahlenteufels* steht deshalb auch eine „Such- und Findeliste“ für die Übersetzung von „Traumwörtern“ in „offizielle Begriffe“ und umgekehrt (Z 255). Für mathematische Begriffe, die aufhorchen lassen (können), ließen sich Beispiele über Beispiele nennen, Enzensberger hat einige davon in seinem Gedicht „Die Mathematiker“ in Form gebracht (Enzensberger 2002, 26f.).

Mit den Benennungen des (in der literarischen Einbildung stattfindenden) Zahlenteufels nehmen Zahlen Eigenschaften an, die sie lebensweltlich vertraut erscheinen lassen. Zahlen als bekannte bis befreundete Charaktere kommen in der neunten Nacht der Erzählung mit dem Zahlenteufel auf Krankenbesuch zu Robert. „[W]ie Radrennfahrer oder Marathonläufer" mit Nummern auf ihren Trikots stehen sieben Zahlenfolgen „lachend und schwatzend herum", bis die Anweisungen des Zahlenteufels sie „in Reih und Glied" bringen (Z 172f.). „Es gibt genau gleich viele von jeder Sorte", behauptet der Zahlenteufel für die gewöhnlichen und die ungeraden Zahlen. „Das kann nicht sein, rief Robert. *Alle* Zahlen können nicht genau so viele sein wie die *Hälfte*. Das ist doch Unsinn!" (Z 175) Dem Einwand Roberts begegnet der Zahlenteufel, indem er die Zahlen zum Händeschütteln auffordert. „Siehst du?", fragt er mit dieser eineindeutigen Zuordnung, jede Zahl der einen Folge hat eine von der anderen an der Hand. „Also: Es gibt unendlich viele gewöhnliche Zahlen, und es gibt genauso viele ungerade. Unendlich viele eben. Robert überlegte eine Weile." (Z 175f.) Dann stellt er eine weiterführende Frage, die deutlich macht, dass er verstanden hat.

In der sechsten Nacht lernt Robert Zahlen kennen, die in der Erzählung des Zahlenteufels nach demjenigen benannt sind, der „auf die Idee" zu diesen Zahlen kam: „Einer, den ich besonders mag, ist Bonatschi. Der erklärt mir manchmal, was er alles herausgefunden hat. Ein Italiener. Leider ist er schon lange tot, aber das spielt bei einem Zahlenteufel keine Rolle. Sympathischer Kerl, der alte Bonatschi. Übrigens war er einer der Ersten, die die Null kapiert haben." (Z 108) Die „Bonatschi-Zahlen" mit ihrem Bildungsgesetz, die jeweils beiden vorhergehenden Zahlen zusammenzuzählen, beginnend mit zwei Einsen, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... sind eine in Indien bereits vor unserer Zeitrechnung bekannte Zahlenfolge, die heute konventionell als Fibonacci-Folge bezeichnet wird nach Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt. In seinem *Liber abbaci* führte er das Rechnen mit indisch-arabischen Zahlen in den bis dahin vorwiegend mit dem römischen Zahlensystem operierenden Kulturraum ein. Darin widmet er sich auch der später nach ihm benannten Folge, ein Problem, das – so kunstvoll diese Zahlen sind, wenn der Zahlenteufel Robert eine „Bonatschi-Oper" (Z 109) singen kann – mit vielen natürlichen Prozessen in Zusammenhang steht. Der Zahlenteufel führt Robert wundersame Eigenschaften dieser Zahlen vor[5] und dass die Natur nicht ohne sie auszukommen scheint. Er zeigt Robert, wie sich die Vermehrung von Hasenpaaren auf einem Kartoffelacker – wie die der Kaninchen von Pisa – mit den Bonatschi-Zahlen beschreiben lässt. Rotraut Susanne Berner hat für die Nacht

5. Es war eine Erkenntnis Johannes Keplers in *Harmonices mundi* 1619, dass sich der Quotient aufeinander folgender Fibonaccizahlen dem Goldenen Schnitt nähert. Enzensbergers Zahlenteufel demonstriert das in der zehnten Nacht. (Vgl. Z 195) Zu Leonardo von Pisa vgl. Wußing 2008, 313–317.

am Kartoffelacker sehr viele Hasen gezeichnet. Und Robert muss zugeben, „dass sich die Hasen ganz so aufführen, als hätten sie die Bonatschi-Zahlen auswendig gelernt“ (Z 120).

Die Frage, warum Mathematik manchmal so frappierend genau mit lebensweltlichen Erfahrungen zusammenzupassen scheint, muss hier hintan gestellt werden. Mit Bonatschi und den nach ihm benannten Zahlen demonstriert der Zahlenteufel Robert nicht nur ein reizvolles altes mathematisches Problem, sondern auch, wie sich in mathematischer Terminologie zumindest Spuren von Mathematikgeschichte finden lassen über die Namen anderer „Zahlenteufel“, die als solche namengebend wurden. Als der Zahlenteufel Robert in der zwölften Nacht durch das Zahlenparadies führt, stellt er ihm einige davon vor, etwa einen freundlichen Herrn mit großen Augen und einer Perücke, der „Eule“ heißt. Dessen Polyederformel hatten Robert und der Zahlenteufel da bereits erkundet. (Felix) Klein wird zunächst gar nicht erst vorgestellt: „In dem Zimmer hockte ein Mann, der so winzig war, dass Robert ihn erst nach längerem Suchen entdeckte.“ (Z 239) In dessen Zimmer gibt es merkwürdige Gegenstände, wie Brezeln aus Glas, die Robert an seinen brezelessenden Mathematiklehrer in der Schule erinnern. In einem anderen Zimmer des Zahlenparadieses sind Wände und Möbel mit einem feinen Staub bedeckt:

> – Das ist kein gewöhnlicher Staub, sagte Teplotaxl. Der hat mehr Körnchen, als man zählen kann. Und das Tollste ist: Wenn du so viel davon nimmst, wie auf einer Nadelspitze Platz hat, ist in diesem bisschen Staub der ganze Staub enthalten, der in diesem Zimmer liegt. Das ist übrigens der Professor Cantor, der diesen Staub erfunden hat. Cantor ist lateinisch und heißt *Sänger*.
>
> Wirklich hörte man, wie der Bewohner, ein blasser Herr mit Spitzbart und stechenden Augen, vor sich hin sang:
>
> – Unendlich mal unendlich ist unendlich! Und dabei tanzte er nervös im Kreis herum. Überunendlich mal unendlich ist überunendlich. (Z 240f.)
>
> Weder hat der Zahlenteufel den Namen dieses Mathematikers in sein eigenes Sprechen übersetzt noch den Cantor-Staub, der in mathematischer Fachsprache tatsächlich eine wohldefinierte Teilmenge reeller Zahlen beschreibt, überabzählbar und mit Lebesgue-Maß Null, sodass sich die Nadelspitzen-Geschichte, die gern als angeblich scholastische Spitzfindigkeit bemüht wird, meisterhaft mit Cantor-Staub erzählen lässt.

Welchen Rang der Zahlenteufel Teplotaxl in seiner mathematischen Welt auch immer hat, er scheint mir jedenfalls ein ausgezeichneter Erzähler zu sein, der die Sprachregeln wie die Namen und Geschichte/n seines Faches gut kennt.

2 Es spricht: Robert mit dem Zahlenteufel

„Wer bist denn du?“ (Z 11) Mit dieser Frage eröffnet Robert das Gespräch, als ihm der Zahlenteufel erscheint, und es setzt sich über zwölf Nächte hinweg fort, in deren letzter er schließlich den Namen des Zahlenteufels, „seines“ Zahlenteufels, erfährt: Teplotaxl. Ihr Kennenlernen kommt anfangs etwas mühevoll in die Gänge: Robert will sich nicht „reinlegen“ lassen vom Zahlenteufel und der schreit ihn an: „So redet man nicht mit einem Teufel.“ (Z 14) Er wird bedrohlich groß vor Wut oder Anstrengung, Geduld scheint er wenig zu haben. Aber er grinst auch, brummt oder klopft Robert mit „Sehr gut!“ (Z 23) auf die Schulter. Und das alles schon in der ersten Nacht, bevor er aus Wut zerplatzt und Robert beim Aufwachen lachen muss, „wenn er daran dachte, wie er den Zahlenteufel aufs Kreuz gelegt hatte“ (Z 26). Erreicht hatte er das mit Nachfragen und der schlichten Behauptung „[i]ch glaube nicht, dass das klappt“ (Z 24), was der Zahlenteufel nach seiner Überprüfung tatsächlich zugeben muss. Damit ist sein „Vergiss nicht, wer hier das Sagen hat“ (Z 38) von vornherein in Frage gestellt, der „Erfahrung eines unüberwindlichen Machtgefälles“ wird „die Erfahrung einer eigenen Verstandesmächtigkeit“ entgegengesetzt (Nickel 2015, 105).

„Ehrlich gesagt, es wäre mir lieber, wenn du nicht bei jeder Kleinigkeit einen Wutanfall bekämst“, sagt Robert in der zweiten Nacht zum Zahlenteufel, worauf dieser entgegnet: „Tut mir leid [...] Aber dafür kann ich nichts. Ein Zahlenteufel ist schließlich kein Weihnachtsmann.“ (Z 43) Von da an erwartet Robert den Zahlenteufel trotz seiner Wutanfälle und nimmt sich vor, „zu beweisen, dass er auch nicht auf den Kopf gefallen war“ (Z 49). Er bemerkt, dass die Wutanfälle dann auftreten, wenn es „um einen interessanten Punkt, um eine Frage, die nicht so leicht zu beantworten war“ (Z 73), geht. Er lernt damit nicht nur Welten der Mathematik kennen, sondern auch einen Zahlenteufel, der auch flüstern kann oder sich die Hände reibt: „Das war ein sicheres Zeichen, dass er wieder einmal einen ganz besonderen Trick auf Lager hatte.“ (Z 56) Er versteht die emotionalen Äußerungen und Gesten des Zahlenteufels zu deuten als Zeichen mathematischer Leidenschaft. Umgekehrt drückt der Zahlenteufel Robert auch Anerkennung aus, von „Du bist gar nicht so dumm“ (Z 63) über „Fabelhaft, Robert. Ich bin stolz auf dich“ (Z 74) bis „Du bist ein erstklassiger Zauberlehrling, mein Lieber, das muss man dir lassen“ (Z 103). In der sechsten Nacht sind die beiden „beinahe alte Freunde“ (Z

108), der Zahlenteufel wird Robert mehr und mehr zum „Freund und Meister“ (Z 248), von dem Robert sich am Ende schweren Herzens verabschieden wird: „Er hatte gar nicht gewusst, wie sehr ihm sein Zahlenteufel ans Herz gewachsen war.“ (Z 248f.)[6]

Das Gespräch zwischen Robert und dem Zahlenteufel hat also eine persönliche Ebene, auf der sie sich kennen und schätzen lernen, und die inhaltliche Gesprächsebene ist davon nicht unbeeinflusst.[7] Im Gespräch reden, fragen, überlegen, schreiben, zeichnen, zeigen und spielen sich die beiden mit Aufgaben an unterschiedlichen Orten mit ihren unterschiedlichen Atmosphären immer weiter in mathematische Welten hinein, die sich aus den Fragen eröffnen. Auch Vergessen und Wiederholen ist Teil des Abenteuers. Es geht nicht ohne Aufregungen und Konflikte ab und mit viel Neugier, Erkenntnisfreuden und Vergnügen. Robert beginnt das Traum-Gespräch mit einer Frage, und er setzt es durch all die Nächte mit vielen Fragen fort: „Bist du sicher?“, „Woher weißt du das?“, „Warum ist das so?“ (Z 62f.)

> [...] *Warum?* [...] Warum machen es die Hasen so, als ob sie wüssten, was eine Bonatschi-Zahl ist? Warum hören die unvernünftigen Zahlen nie auf? Und warum stimmt das, was du sagst, *immer*?
>
> – Ah, sagte der Zahlenteufel, so ist das. Du willst nicht nur herumspielen mit den Zahlen? Du willst wissen, was dahintersteckt? Die Spielregeln? Den Sinn des Ganzen? Mit einem Wort, du stellst dieselben Fragen wie ein richtiger Mathematiker.
>
> – Mathematiker hin oder her. Im Grunde hast du mir nur etwas *gezeigt*, aber *bewiesen* hast du es nicht.
>
> – Stimmt, sagte der alte Meister. Du musst entschuldigen, aber die Sache ist die: Etwas zeigen ist leicht und macht Spaß. Etwas vermuten ist auch nicht schlecht. Ausprobieren, ob die Vermutung stimmt, ist noch besser. Das haben wir ja oft genug getan. Nur leider ist das alles nicht gut genug. Auf den Beweis kommt es an, sogar du willst ja jetzt schon alles Mögliche bewiesen haben. [...] Kurzum, du bist unzufrieden. Das ist gut. Meinst du vielleicht, ein Zahlenteufel wie ich wäre

6. Die „ungewöhnliche Beziehung zwischen Robert und dem Zahlenteufel“ hält die Fachdidaktikerin Gabriela Paule aus der Perspektive des Deutschunterrichts für einen „interessanten Aspekt“ der Erzählung, während sie ihr sonst wenig mehr „als eine narrative ‚Verpackung‘ der mathematischen Lektionen“ zugesteht und die graphische Gestaltung bloß als „Illustrationen“ wahrnimmt (Paule 2002).

7. Enzensberger sagte in einem Gespräch auf die Frage, ob er gern zur Schule gegangen wäre: „Nein. Die Schule war furchtbar und die Universität eine traurige Veranstaltung. Lernen kann man nur von Personen. Institutionen stören dabei nur.“ (Enzensberger 2007, 85)

> jemals zufrieden mit dem, was er herausgefunden hat? Nie und nimmer! Deswegen brüten wir immerzu über neuen Beweisen. Ein ewiges Grübeln und Bohren und Tüfteln ist das. Doch wenn uns dann endlich ein Licht aufgeht – und das kann lange dauern, in der Mathematik sind hundert Jahre schnell vorbei –, na, dann freuen wir uns natürlich wie die Schneekönige. Dann sind wir glücklich. (Z 216f.)

In der elften Nacht kommt es zu diesem Gespräch, das man als eine kleine Methodologie der Mathematik verstehen könnte. Mit dem Kennenlernen, Entdecken und Erkunden, mit dem Einüben mathematischer Praxis fragt Robert immer weiter – und kann nun selbst nicht mehr aufhören. Wie lässt sich vom Vermuten und Ausprobieren zum Beweisen kommen? Über das Fragen in der Mathematik gibt es die Fragen darüber hinaus, die methodologischen, mathematikgeschichtlichen, metaphysischen, wie sie in den letzten beiden Nächten der Erzählung von Robert und dem Zahlenteufel angeschnitten werden. Auch diese Fragen braucht es für das Verstehen von Mathematik. Was Beweisen bedeuten kann, hat ihm der Zahlenteufel auch schon ganz praktisch gezeigt, etwa mit der Divergenz der harmonischen Reihe (vgl. Z 184–187).

Der Zahlenteufel veranschaulicht Robert mit einem Vergleich, was es bedeuten kann, etwas zu beweisen: einen reißenden Fluss zu überqueren, indem man von Steinbrocken zu Steinbrocken springt, die sicher im Fluss liegen, bei jedem Sprung „höllisch auf[zu]passen" (Z 221), auch darauf, dass die Steine nah genug beieinander liegen. Bei allen Sprüngen ist das ein Step-by-step-Vorgehen. Es erfordert mitunter auch Umwege. Einen Weg zu suchen ist Handlungs- wie Beweisstrategie zugleich. Mit seinem Vergleich verdeutlicht der Zahlenteufel auch, dass Beweisen in der Mathematik nicht bloße Logik ist. „In realistischer Situation sind [. . .] für eine kluge Argumentation vor allem Sachkenntnis, Urteilskraft, Mutterwitz und allenfalls auch rhetorische Kunst gefragt; formale Logik hilft bestenfalls, die allerdümmsten Fehler zu vermeiden." (Nickel 2015, 106) Und was vielleicht ganz einfach aussieht, kann sich als Problem erweisen, das weder als lösbar noch als unlösbar bewiesen werden kann, wie etwa das Problem des Handlungsreisenden, vom Zahlenteufel „Amerikareise" genannt.

Was es für das Beweisen wie das Überqueren eines Flusses braucht, sind auch „Selbstvertrauen auf die eigene Kraft, kritischer Blick, Energie in der Überwindung von Schwierigkeiten, die zunächst unübersteigbar scheinen, beharrlich auf das Ziel gerichteter Wille". Das sagt allerdings nicht der Zahlenteufel Enzensbergers, sondern der „Zahlenteufel" David Hilbert. (Hilbert 1988, 4)

Es kommt nicht von ungefähr, dass Robert das Beweisen in der elften Nacht zum Thema macht. Der „blutige Anfänger" musste sich vom Zahlenteufel sagen lassen, dass „[i]n der Mathematik [...] nicht geraten [wird], verstanden? In der Mathematik geht es exakt zu!“ (Z 25) Inzwischen weiß er mehr in und über Mathematik. Nicht, dass Bertrand Russell nicht gewusst hätte, dass $1+1 = 2$, es zu beweisen war der Anspruch seiner symbolischen Logik, seiner Begründung der Mathematik in den *Principia Mathematica*. Der Zahlenteufel zeigt Robert in der elften Nacht der Erzählung einen Zettel, wie es in der Notation von „Lord Rüssel aus England“ ausgesehen habe zu beweisen, dass $1+1 = 2$ (Z 225).

Die Geschichte von Roberts Initiation geht zu Ende, als er „in den untersten Rang der Zahlen-Lehrlinge“ (Z 248) aufgenommen wird.[8] Robert beginnt einer größeren Gemeinschaft zuzugehören. Er hat sich auf deren Terminologien, Aufgaben und auch Geschichten eingelassen und ihre Sprech-, Darstellungs- und Verfahrensweisen eingeübt in den nahezu unermüdlichen nächtlichen Gesprächen und Erkundungen mit dem Zahlenteufel.

3 Es schreiben und zeichnen: der Zahlenteufel und Robert

Bücher für Kinder und für Mathematiker haben oft etwas gemeinsam: Bilder. Nicht allein der wortsprachliche Text trägt die jeweilige „Geschichte“, sondern auch Bilder, Zeichnungen, Diagramme, Graphen, Skizzen, Tabellen, Schemata. Schon mathematische Zeichen und Symbole und die entsprechende Notation erweitern die vertraute Buchstabenschrift. So unterschiedlich die beiden Literaturen in der Regel sind, so sind deren graphische Elemente selten bloß illustrativ, sondern tragen konstitutiv zur Fortsetzung der Geschichte und/oder der Argumentation bei. Diese Art von Schrift und Schreiben bleibt unaussprechbar, sie kann nicht „vorgelesen“ werden, aber sie ermöglicht das Sprechen darüber. Mathematisches Schreiben lässt sich als „Hybridbildung“ verstehen, in der sich „diskursive und ikonische Aspekte verbinden“ (Krämer 2012, 81).

> Sinnfällig wird an der mathematischen Schrift, dass diese Schriften nicht nur der Kommunikation, vielmehr erstrangig der Kognition dienen – das schriftliche Rechnen ist dafür paradigmatisch. Schriften kom-

8. Für die Literaturwissenschaftlerin Ester Saletta rückt Enzensbergers *Zahlenteufel* „die lustige und zauberhafte Essenz der Mathematik, die man immer tabuisiert hat, in ein ganz neues Licht“, man könnte ihn deshalb auch als „therapeutisches bzw. psychoanalytisches Instrument verstehen“: Robert hat seine Angst vor der Mathematik „dank der Schlaftherapie des Zahlenteufels“ überwunden. Die „märchenhafte und träumerische Literarisierung der Mathematik“ in Enzensbergers *Zahlenteufel* offenbare „die Stärke der Literatur in der Enthüllung der unbekannten menschlichen Eigenschaften“ (Saletta 2014, 363f.).

> men als Instrumente zum Einsatz, mit denen im Zusammenspiel von Auge, Hand und Geist schöpferische Akte ausprobiert und realisiert werden können, seien sie nun künstlerischer oder wissenschaftlicher Natur. Schriften sind immer auch operativ; sie sind „Denkzeuge". (Krämer 2012, 80f.)

Rotraut Susanne Berner leiht dem Zahlenteufel und Robert Auge, Hand und Geist für das „Denkzeug" Schrift, um aufzuschreiben und hinzuzeichnen: Punkte, Linien, Flächen, Ziffern, Zahlen, Rechenzeichen, intradiegetisch selten auf Papier, sondern an den Himmel, in den Sand, auf das Wasser, was eben da ist. In der achten Nacht ist es sogar eine Schultafel, deren Fläche beschrieben wird. Das Sprechen darüber ist auch ein Sprechen über Schrift-Sprache, die in der Mathematik oft sehr formal gefasst ist.[9] Das Sprechen darüber ist zeitweilig, während die Schrift-Zeichen und Zeichnungen bleibend sichtbar sind. Gegenüber dem Hören kann das Sehen gleich-zeitig nebeneinander Stehendes wahrnehmen, und diese „dem *Sehen* [...] zukommende *simultane Präsenz* ist von erkenntnistheoretischem Gewicht" (Krämer 2009, 98).

In der dritten Nacht schreibt der Zahlenteufel mit seinem Spazierstock an die Wand der Höhle, in der Roberts Bett im Traum steht. In dieser Nacht geht es um die Primzahlen. Nachdem er ihm die Zahlen bis 50 aufgeschrieben hat, übergibt der Zahlenteufel seinen Stock an Robert mit der Aufforderung herauszufinden, welche Zahlen „nicht prima" sind. Der fängt an zu löschen: die Zweierreihe ab 4, die Dreierreihe ab 6, „und so weiter und so fort, der [Trick] ist ein ganz alter Hut" (Z 61), sagt ihm der Zahlenteufel. Gemeinhin wird er als „Sieb des Eratosthenes" bezeichnet, benannt nach einem Mathematiker aus dem 3. vorchristlichen Jahrhundert. Linien zwischen den Zahlen lassen das Sieb der Anordnung sichtbar werden, mit dem aus den Zahlen „ausgesiebt" wird. Hier wird augenfällig etwas getrennt und ist der Strich „als die Basishandlung operativer Bildlichkeit" (Krämer 2009, 100) besonders deutlich. „Gut gemacht", wird der Zahlenteufel zu Robert sagen, und es ist klar, dass das für große Zahlen „ewig dauern" würde. Die Schwierigkeit herauszufinden, ob Zahlen prim/a sind oder nicht, macht sich heute die Kryptographie zunutze, und der Zahlenteufel „wedelte vergnügt mit seinem Stock": „[W]enn's um die prima Zahlen geht, gehen wir immer noch am Stock. Das ist eben das Teuflische an ihnen, und das Teuflische macht Spaß. Findest du nicht?" (Z 61f.)

Das Sieb ist der Erzählung viermal, in vier Bearbeitungsstadien eingezeichnet. In der vierten Darstellung dieses Siebs ist noch eine Zahl zu streichen, die Aufforde-

9. Vgl. Mehrtens 1990, 433. Enzensbergers Parallele, die er zu den Notationssystemen der Mathematik zieht, ist die der Musik, vgl. Enzensberger 2002, 15. Auch Krämer verweist darauf, vgl. Krämer 2009, 104.

rung des Zahlenteufels an Robert wird in direkter Anrede an den Leser und die Leserin weitergegeben: „Nimm dir einen dicken Filzschreiber und mach weiter, bis nur noch prima Zahlen übrig sind. Unter uns gesagt, es sind genau fünfzehn, keine mehr und keine weniger.“ (Z 60)

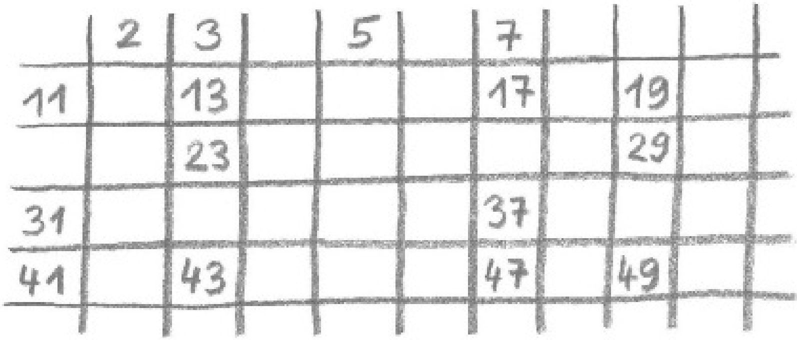


Abbildung 1: Ein Stadium des Siebs des Eratosthenes (Z 59).

Die auktoriale Erzählstimme wendet sich in eine Anrede aus der Erzählung heraus und lädt ein, selber in das Entdecken und Erforschen einzutreten mit einem Stift in der Hand, ohne den man in der Mathematik selten weit kommt. Das Aufschreiben und -zeichnen dient sowohl der Anschauung wie dem Weiterdenken, es eröffnet ein Experimentierfeld, auf dem handgreiflich-konstruktiv neue Konfigurationen erprobt werden können. Daraus könnte und kann neues Wissen hervorgehen. „Die graphischen Operationen auf der inskribierten Fläche realisieren [...] kognitive Bewegung.“ (Krämer 2014, 14) Sichtbares und Unsichtbares korrespondieren, der Stift ist dabei buchstäblich Handwerkszeug. Im Griechischen bedeutete das *graphein* ursprünglich das Einritzen und damit weiter sowohl Zeichnen als auch Schreiben.

Die Erzählung der dritten Nacht führt zum einen Bearbeitungsstadien aus dem Aufschreib- und Auslöschprozess von Zahlen in „Siebanordnung“ vor Augen und will zum Mitmachen einladen.[10] Zum anderen stellt die Erzählung den Erkenntnisprozess in der Höhle auch bildlich vor. Sie mit dem Höhlengleichnis aus Platons *Politeia* in Verbindung zu setzen, wäre plakativ, selbst wenn sich die Schatten der Protagonisten an der Höhlenwand abzeichnen.

10. „Der Autor legt den Keim für entdeckendes und forschendes Lernen, indem er die Lesenden (und Lauschenden!) an der Hand nimmt und sie Stück für Stück das Entstehen dieses berühmten Siebs miterleben lässt“, halten Fachdidaktikerinnen fest. (Moser-Pacher/Thoma 2010, 17) Ein Fazit des Erfahrungsberichts von Andrea Moser-Pacher und Elisabeth Thoma über literarisches und mathematisches Lernen mit Enzensbergers *Zahlenteufel* lautet: „Erzählen hilft den Schülerinnen und Schülern, ihre eigene Sprache zu finden.“ (Moser-Pacher/Thoma 2010, 20)

Abbildung 2: Eine Höhle als Erkenntnisort in der dritten Nacht (Z 52).

Der Zahlenteufel hat begonnen, die Zahlen an die Höhlenwand zu schreiben, der Schreib-Spazierstock erweist sich zudem als Zeigestab. Die Eins fehlt, denn sie ist „keine Zahl wie die anderen“ und deshalb auch „*weder* prima *noch* nicht-prima“ (Z 58). Die Höhlenwand, an die der Zahlenteufel schreibt, wird im Bild als eine bereits beschriebene bzw. angezeichnete erzählt, auf ihr ist schon eine Tierdarstellung zu sehen, die an steinzeitliche Höhlenzeichnungen erinnert. Damit ruft die bildliche Erzählung auch ins Gedächtnis, dass Menschen seit Urzeiten Dinge darstellen, auf Höhlenwänden und Trägermaterialien unterschiedlichster Art. Aufschreiben und Aufzeichnen macht etwas mehr oder weniger lang haltbar und bleibend, im Fall steinzeitlicher Höhlenmalereien schon sehr lang, und dadurch ist das fortgesetzte Gespräch darüber möglich. In den Worten von Sybille Krämer: „Eine Intersubjektivität von Denken und Wissen ist ohne die materiale Exteriorität graphischer Inskriptionen [...] undenkbar.“ (Krämer 2014, 16)[11]

11. Sie verweist an dieser Stelle auch darauf, dass insbesondere Bruno Latour herausgearbeitet hat, wie *Immutable mobiles* (Tabellen, Karten, Graphen, Bücher, ..., die im Gegensatz zu

Wie Arithmetik und Geometrie sich aufeinander beziehen lassen, veranschaulicht der Zahlenteufel etwa am Beispiel der „verrückten Zahl“, die sich so schlicht als $\sqrt{2}$ schreiben lässt und so endlos als 1,4142… (im *Zahlenteufel* sind es immerhin 27 Nachkommastellen, so breit die Buchseite ist, Z 78). Zugleich lässt sie sich zeichnen als Länge der Diagonale des Einheitsquadrats. Daran schließt der Zahlenteufel auch gleich die Frage nach einem doppelt so großen Quadrat an, die auch bei Platon in *Menon* dialogisch erschlossen wird.[12] Im Gespräch kann die Lösung er-zeichnet werden.

Als der Zahlenteufel für das Zusammenzählen von Folgen eine Reihe mit Zahlen hinzuschreiben beginnt, empört sich Robert: „Das sind ja Brüche […] Pfui Teufel!“ (Z 182) Flugs lässt der Zahlenteufel die Bruchzahlen verschwinden und einen Strich sichtbar werden, dessen eine Hälfte rot ist, die andere schwarz. Dann wird die schwarze Hälfte halbiert und neu gefärbt und „[d]ann mache ich einfach so weiter. Ich zähle immer die Hälfte dazu“, sagt Robert, nachdem er „eine Weile“ lang geschaut hat. (Z 183)

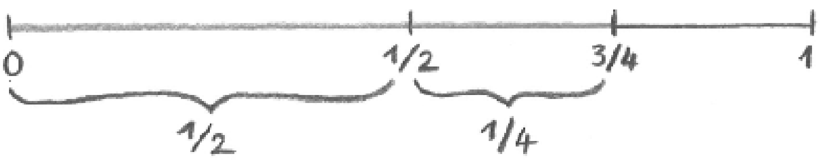


Abbildung 3: Eine Reihe im Entstehen (Z 183).

Robert schaut und er sieht. Zum Verstehen eines Bildes brauche man einen Stuhl, wird als Diktum von Paul Klee überliefert. Was der Künstler über Bilder der Kunst sagt, lässt sich auf fachspezifisches Sehen-Lernen übertragen: Zum Verstehen eines „Bildes“ wie diesem, einer Zeichnung, die zudem in einem Stadium der Entstehung ist und einen Summenbildungsprozess darstellen wird, braucht es Zeit. Sie spricht nicht für sich und will interpretiert werden. Was Robert dazu sagt, wird weiter geschrieben, das Verstehen und die graphische Realisierung gehen miteinander

Höhlenwänden beweglich sind) Wissenschaften überhaupt erst ermöglichten.

12. Bei Sybille Krämer fungiert das Beispiel für „Erkenntnis an und mit Figuren“ mit der von ihr als solcher bezeichneten diagrammatischen Methode: Im Operieren mit der Figur kommt der Sklave auf die Lösung (vgl. Krämer 2012, 112–114). Dabei „sieht“ er in der Figur auch (gut platonisch) das Konzept des Quadrats, das nicht von der gezeichneten Größe oder der völligen Genauigkeit der Linien und Winkel abhängt. Gregor Nickel hebt hervor, wie entscheidend der Übergang von der Arithmetik zur Geometrie im Dialog ist (vgl. Nickel 2007, 268–271, 278f.). *Diagrammatic reasoning* findet sich dem Begriff wie der Sache nach auch bei Charles S. Peirce bzw. – der Sache nach – bei weiteren Philosophen von Platon bis Wittgenstein, die deutliche Affinitäten zur Mathematik hatten. Vgl. dazu Krämer 2009; auch Giaquinto 2008.

einher, auch diese Aufschrift (auf der Zimmerdecke) ist „Denkzeug“. Der Strich ist beschriftet, was die Lesbarkeit erhöht, was von den Verhältnissen her aber nicht unbedingt nötig wäre. Wie lang 1 ist, ist egal – ein „Quing“ oder „Quang“ eben (vgl. Z 81). Eine immerhin unendliche Summenbildung wird damit sichtbar gemacht und vorstellbar. So lässt sich graphisch nachdenken über eine geometrische Reihe.

Im Phänomen operativer Bildlichkeit „verschwistert“ sich „Bild- und Sprachcharakter“, Ikonisches und Diskursives (Krämer 2009, 95). Sehen, Sagen, Schreiben und Zeigen verschränken sich. Robert spricht davon, was er sieht, darauf lässt sich zeigen und es wird weitergeschrieben und weitergezeichnet. Im Horizont einer Kulturgeschichte des Sichtbarmachens wird deutlich, dass Schreiben wie Zeichnen unabdingbar sind für das Erschließen, das Erweitern und Begründen von Wissen. Solche Aufzeichnungen aus der Hand Berners liegen uns auf den Flächen, die in Enzensbergers Erzählung beschrieben werden, wie auf Buchseiten vor.

4 Erzählinstanzen. Eine Zwischensumme

Wie in und über Wissenschaften erzählt wird, trägt zum (Selbst-)Verständnis dieser Wissenschaften bei (vgl. Pernkopf 2013). Mit dem *Zahlenteufel* haben wir keine fachwissenschaftliche Erzählung vorliegen, sondern zunächst schlicht Literatur. Sie ist nicht als Vermittlungsmedium zwischen Fachwelt und gesellschaftlicher Öffentlichkeit angelegt, nicht als Einführung in die wissenschaftliche Disziplin der Mathematik und nicht als Instrument in Fachkreisen. Dafür gibt es so genannte populärwissenschaftliche Literatur, Lehr- und Fachbücher sowie Forschungsliteratur. Und doch macht der *Zahlenteufel* etwas von alldem les- und vorstellbar: Er erzählt über Mathematik, er führt in Mathematik ein und er deutet zumindest auf Fragen hin, die in der Mathematik als offene verhandelt werden. Er vermittelt eine Ahnung von Begriffsbildungsprozessen und Definitionen, von behauptenden Sätzen und Beweisstrategien, er lässt die Geschichtlichkeit und die „metaphysischen Mucken“ (Enzensberger 2009, 47) von Mathematik nicht außer Acht und nicht zuletzt macht er Stimmungen erlebbar, die sich mit Mathematik bzw. mit und unter Mathematikerinnen und Mathematikern einstellen können. Die Erzählung voller Anspielungen und Wortwitz ist für den Kontext literarischer wie (vielleicht zunächst verhaltener) mathematischer Neugier geschrieben und gezeichnet.

Robert fragt und wundert sich, Robert hört zu, denkt nach, lacht und redet weiter mit dem Zahlenteufel – und es gefällt ihm, wenn dieser erzählt, auch von den ungelösten Fragen, die nicht als Erfolgsgeschichte erzählt werden können. In der Wissenschaftsforschung wird zwischen Tag- und Nachtwissenschaft unterschieden (vgl. Jacob 2000, 164), zwischen den in der Selbstpräsentation gern vorgestellten, „taghellen“ glänzenden Erfolgsgeschichten und den eher verschwiegenen, weniger glanzvollen Momenten, die zu Forschungsgeschichten ebenso dazu gehören. Der Zahlenteufel erzählt Robert bei aller Faszination für das, was in der Mathematik alles aufgegangen ist und aufgeht, einen *state of the art*, der das Ungelöste nicht verbirgt und Schwierigkeiten nicht verschweigt. Selbst von vergeblichen Versuchen redet er: „Weißt du, ich kann mich ja nicht beklagen, aber manchmal, nachts, wenn ich mit meinem Problem nicht weiterkomme, das ist zum Verrücktwerden! Man ist nur einen Schritt von der Lösung entfernt, und dann steht man plötzlich vor einer Mauer – das ist die Hölle!“ (Z 243f.)

Ein vom Zahlenteufel genanntes Problem, „Nimm irgendeine gerade Zahl, ganz egal welche, sie muss nur größer als zwei sein, und ich werde dir zeigen, dass sie die Summe aus zwei prima Zahlen ist“ (Z 62), ist die so genannte Goldbach’sche Vermutung, die Christian Goldbach 1742 in einem Brief an Leonhard Euler formulierte.

> – Und das klappt immer?, wunderte sich Robert. Wieso denn? Warum ist das so?
>
> – Ja, sagte der Alte, er legte die Stirn in Falten und sah den Rauchkringeln nach, die er in die Luft blies, – das wüsste ich selber gern. Fast alle Zahlenteufel, die ich kenne, haben versucht, es herauszukriegen. Die Rechnung geht ausnahmslos immer auf, aber keiner weiß, warum. Niemand konnte beweisen, dass es so ist.
>
> Das ist ja ein starkes Stück!, dachte Robert und musste lachen. (Z 63)

In der folgenden Anrede an die Leserinnen und Leser wird ein „letzter Trick“ verraten, dass man auch jede ungerade Zahl größer als 5 aus drei Primzahlen zusammensetzen kann. „Du wirst sehen, es geht IMMER, auch wenn ich dir nicht sagen kann, *warum*.“ (Z 64)[13]

Der Zahlenteufel selbst ist also die eine, figurale, Erzählinstanz. Darüber hinaus ist *Der Zahlenteufel* wortsprachlich eine weitgehend auktorial erzählte Geschichte, die es dem Erzähler erlaubt, aus seiner Perspektive distanziert und quasi allwissend zu agieren, was den zwölf Nächten und ihren Träumen auch einen Anstrich von Objektivität verleiht. Der Erzähler kann damit auch die unausgesprochenen Gedanken der Figuren mitteilen, was er allerdings nur für Robert tut. Was der Zahlenteufel denkt, scheint er zugleich auch zu sagen. In der auktorialen Erzählsituation ist sehr vieles in Form von Dialogen in direkter Rede weitererzählt, meist

13. Diese so genannte Schwache Goldbach’sche Vermutung wurde 2013 vom peruanischen Mathematiker Harald A. Helfgott bewiesen. Vgl. Alexander von Humboldt-Stiftung 2015.

zwischen Robert und dem Zahlenteufel, diese fast szenische Erzählweise steigert die Unmittelbarkeit und trägt dem Fortgang auch ein dramatisches Moment ein.

An einigen Stellen wendet sich die Erzählstimme direkt an die Leserin und den Leser und spricht sie und ihn direkt an mit Fragen und Handlungsanweisungen. Insgesamt sind es sieben solcher von Rotraut Susanne Berner mit rotem Rand versehener Anreden. *Der Zahlenteufel* ist kein „Kopfkissenbuch“ für unter dem Kopfkissen, sondern kann auch eine Anstiftung sein, selber einen Stift zu nehmen (Z 60), zu probieren (Z 64), weiter zu spielen und Linien zu ziehen (Z 103), genauer anzuschauen und zu zählen (Z 121), mit dem Finger zu fahren (Z 135), anzumalen und vielleicht den Taschenrechner zu benutzen (Z 145) und zu zeichnen, zu schneiden und zu kleben (Z 208f.). Der Untertitel der englischen Übersetzung von *Der Zahlenteufel* lautet „A Mathematical Adventure“, und ein Abenteuer, in das man eintritt, wenn man als Leserin mit-macht, fügt dem Abenteuer im Kopf noch eine Handlungs-Dimension hinzu.

Die Erzählstimme erzählt mit den Bildern und die Bilder erzählen mitunter etwas weiter, was der Text nicht sagt, jede Nacht beginnend damit, in welcher Lage Robert in seinem Bett liegt. Allein diese wiederkehrenden und doch ungleichen Bilder laden zum genauen Hinschauen ein und damit zu einer Haltung, die in Alltag, Literatur und Kunst ebenso weiterführend ist wie in Philosophie und Wissenschaften. Nicht nur in Kinderbüchern gehen Sprechen und Sehen miteinander einher, auch Sprechen-Lernen und Sehen-Lernen: Etwas zu sehen und es sagen zu können, fordert heraus. Etwas zu sehen, etwas *als* etwas zu sehen und etwas *in* etwas zu sehen können als drei „Grundfälle“ des Sehens unterschieden werden, wobei ersterer auch beim „erkennenden Sehen von Objekten im Spiele“ ist, letzterer „Charakteristikum des Bildersehens“ ist: In einem geometrischen Diagramm kann etwa nicht einfach ein Kreis, sondern *der* Kreis als mathematische Entität gesehen werden. Damit wird etwas Begriffliches gesehen (vgl. Krämer 2012, 102).[14] Damit kann selbst in der Mathematik gelten, was Ludwik Fleck für beobachtende Wissenschaften beschrieb: dass es „das unklare anfängliche Schauen“ und „das entwickelte unmittelbare Gestaltsehen“ gibt und es um denkstilgemäßes Sehenlernen geht (Fleck 1980, 121). Den Übergang ermöglicht das, was er „Erfahrenheit“ nennt, die praktisch erworben werden muss. „Was wir denken und wie wir sehen“, hängt von einer Gemeinschaft mit ihrem Denkstil ab, der jemand zugehört (Fleck 1983, 82). Nicht jede/r sieht in einer selten perfekten Kreiszeichnung *den* Kreis. Will man einer bestimmten Denkgemeinschaft angehören, gehört das Einüben ihres denkstilgemäßen Sehens dazu.

14. Für die Unterscheidung der drei Aspekte verweist Krämer auf Martin Seel.

Für die Produktion von Wissen, auch von mathematischem, sind sowohl die Sachdimension wie die Sozialdimension notwendig, die nicht ineinander übergeführt werden können (vgl. Koschorke 2010, 94). Was als Begegnung Roberts mit dem Zahlenteufel beginnt, ist nicht allein eine Erkundung mathematischer Welten, sondern auch ein Kennenlernen mathematischer Sozietäten und Kulturen: Der Zahlenteufel sagt ihm, dass er nicht der einzige ist, und mit der Einladung zum „Abendessen in der Zahlenhölle / im Zahlenhimmel" (Z 235) lernt Robert einige von dessen Kollegen nicht nur vom Hörensagen, sondern auch von Angesicht zu Angesicht kennen. Wissenschaft ist eine gemeinschaftliche Tätigkeit von Menschen. Mit ihnen wird auch die geschichtliche Genese von Wissen deutlich. Jede Wissenschaft hat auch ihre Wissenschaftsgeschichte/n. Erzählungen bringen Kulturen hervor (Nünning 2013) und „[w]o immer sozial Bedeutsames verhandelt wird, ist das Erzählen im Spiel" (Koschorke 2010, 92). Das für mathematische Sozietäten Bedeutsame wird auch im Erzählen verhandelt, die merkwürdigen unbewiesenen Eigenschaften von Primzahlen zählen jedenfalls dazu, und Robert „gefiel" es, „dass der Zahlenteufel solche Sachen erzählte" (Z 63). Erzählgemeinschaften unterscheiden sich „gerade im Hinblick auf ihr narratives Reservoir"[15], das gilt schon im lebensweltlichen Alltag: um einer Gemeinschaft zuzugehören, kennt man ihre Geschichten. „Narrative Konventionen" begründen dann auch wissenschaftliche Zugehörigkeiten (Harré 1990). Unbestritten gehören Theorien und Praktiken, explizites und implizites Wissen, spezifische Formen von Herangehensweisen und Problembearbeitungen zu einer wissenschaftlichen Gemeinschaft, auch fachsprachliche Rezeptions- und Ausdrucksfähigkeit in ihren verschiedenen Formen. Erzählungen sind in Wissenschaften hingegen oft ein wenig beachteter Teil davon, gerade in der Mathematik, gilt sie doch als die am meisten formalisierte und präzisierte Sprachwelt in den Wissenschaften. Mathematikerinnen und Mathematiker sprechen allerdings nicht in der mathematischen Schriftsprache miteinander, über die sie sprechen und die sie zu lesen verstehen. In der „Sprache Mathematik" können sie zudem nicht sagen, wie sie selbst sich verstehen – dazu sind Erzählungen unabdingbar (vgl. Mehrtens 1990, 482).

Benennungen mathematischer Objekte und Theoreme mit Namen von Mathematikerinnen und Mathematikern können auch als verknappte Erzählung gehört werden. Auch mathematisches Wissen ist gewordenes Wissen mit historischer Dimension, wobei selten eine/r allein an der jeweiligen Sache arbeitete. Im *Zahlenteufel* sind es die Bonatschi-Zahlen, deren Bezeichnung auf einen der zu diesen Zahlen fragenden und forschenden „Zahlenteufel" hinweist. Die Folge seiner Zahlen stellt

15. Müller-Funk 2008, 14: „Kulturen sind immer auch als Erzählgemeinschaften anzusehen, die sich gerade im Hinblick auf ihr narratives Reservoir unterscheiden. Das gilt für die Mythen traditioneller Gemeinschaften ebenso wie für die modernen großen Erzählungen."

sich bei Robert mit anderen Zahlenfolgen zum Krankenbesuch ein, was ein Fortrücken der Tür erfordert an das „kaum" zu erkennende „Ende eines schnurgeraden Korridors" (Z 173). Eine „Folge" ist ein so alltagssprachlich klingendes Wort wie eine wohlbestimmte mathematische Struktur. Man kann sie auch als Metapher verstehen, und zwar als eine jener „Metaphern, die nicht Dinge meinen, sondern Praxen. Sie evozieren keine sinnlichen Erfahrungen oder einfach Handlungen, sondern sie übertragen Ideen, Erfahrungen des Sprachgebrauchs, die Beziehungen, Prozesse und Ordnungen bezeichnen." (Mehrtens 1990, 502f.)

Metaphern sind Übertragungsmittel *par excellence*, die „Austausch und Verkehr von *Gedanken*, eine Transaktion zwischen Kontexten" (Richards 1983, 35) ermöglichen. Metaphern stiften Zusammenhänge und Querverbindungen und lassen neu sehen und erkennen. Von den sieben bei Robert auftretenden Zahlenfolgen hat eine einzige diejenige Bezeichnung, die sie auch in der gewöhnlichen Mathematik hat: neben „normalen" (natürlichen), „prima" (Prim-), „Bonatschi-" (Fibonacci-), „dreieckigen" (Dreiecks-) und „hopsenden" (Quadrat-) Zahlen und den Zahlen mit dem „Wumm!" (Fakultät/Faktorielle) stehen auch die „ungeraden". So selbstverständlich uns das klingt, so selbstverständlich muss es nicht sein: Wie können Zahlen „ungerade" sein, im Englischen „odd"? Immerhin gibt es diese Bezeichnungen von „gerade" und „ungerade" spätestens seit Euklids *Elementen*, in denen die so benannten Zahlen definiert sind durch deren (Nicht-)Teilbarkeit in zwei gleiche Teile: „6. Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt; 7. Und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet." (Euklid 1980, 141)

Gerade, *artios*, bedeutet im Altgriechischen „ebenmäßig, passend, angemessen", ungerade, *perissos*, „unpassend", aber auch „übertreffend, übergroß, außergewöhnlich, hervorragend". Legt man natürliche Zahlen mit Zählsteinen in zwei Reihen und „halbiert" die Zahlen dann, wird die Bezeichnung anschaulich (Lefèvre 1981, 138f.). Im Griechischen sind die Eigenschaften sprachlich nicht komplementär aufeinander bezogen wie im Deutschen.[16] Die Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade war den Griechen früh bekannt, eine poetische Spur davon findet sich in einem Fragment des Komödiendichters Epicharmos (ca. 480 v. u. Z. in Syrakus): „Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinethalben auch einer geraden, einen Stein

16. Bei den Pythagoreern galten sie allerdings als ein Paar von zehn Prinzipien, Ungerades-Gerades steht als zweites Paar nach Grenze-Unbegrenztes (als erstem) und vor männlich-weiblich (als fünftem). So berichtet Aristoteles in seiner *Metaphysik* A 5 986a. Damit ist eine Wertung verbunden. Die Einheit – in der Antike keine Zahl – ist „sowohl gerade als ungerade" (Aristoteles 1978, 33). Zu dieser „strange view" vgl. Heath 1921, 71. Zu Aristoteles' Darstellung der Pythagoreer vgl. Van der Waerden 1979, 75f., 331–338. Dass die Einheit gerade und ungerade sei, ist für ihn eine „völlig unsinnige Behauptung" (Van der Waerden 1979, 335). Zur Frage des Geschlechts natürlicher Zahlen vgl. Harlizius-Glück 2010.

zulegen oder auch von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bliebe noch dieselbe?“ (Diels/Kranz 1960, 196) Enzensberger befindet sich mit Mathematik in seiner Dichtung also in einer sehr langen Tradition.

Das Sprechen ist auch in den Wissenschaften von den Anfängen an von Metaphern durchsetzt. Das war vielfach erkenntnisproduktiv und wurde zugleich immer wieder auch bedauert. Gauß etwa verortete das ontologische Problem um die komplexen Zahlen begriffsstrategisch: „Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können.“ (Zit. nach Remmert 1992, 50) „Wenig schickliche Benennungen“ haben demnach eine „geheimnisvolle Dunkelheit“ verursacht, die Gauß zu lange dauerte. Aus „unmöglichen“ Zahlen wurden mit Gauß dann doch als Zahlen anerkannte, und im *Zahlenteufel* treten Eule und Professor Grauß Seite an Seite auf (Z 241).

Das Bewusstsein für die Metaphorizität etablierter Ausdrücke – wie in der Bezeichnung von Zahlen – ist vielfach verloren gegangen, insbesondere bei so genannten toten oder schlafenden, den lexikalisierten Metaphern, Katachresen, die als wohldefinierte Begriffe gelten. Das bedeutet allerdings nicht, dass sie nicht reflektiert werden könnte, denn jede Definition ist auch ein Experiment (Bachelard 1988, 48). In Terminologisierung implizit gewordene „Hintergrundmetaphorik“ (Blumenberg 1998, 69) kann jederzeit neu befragt werden.

In der Fülle metapherntheoretischer Literatur kommt man zumindest darin überein, dass sich Metaphern nicht abschließend definieren lassen, weil das in der Dynamik metaphorischer Prozesse grundgelegt ist. Und man ist sich inzwischen auch darin einig, dass Metaphern nicht nur in der Literatur, sondern auch im alltäglichen Sprechen und in den Wissenschaften unabweislich sind. Die klassische Bestimmung der Metapher, sie sei „die Übertragung eines fremden Worts“ (Aristoteles 1950, 421), lässt Metaphern schon bei Aristoteles nicht allein als rhetorisches Mittel, sondern „als ein grundsätzliches Prinzip sprachlicher Kreativität und erkenntnispraktischer Rationalität“ (Debatin 1995, 17) verstehen. Metaphern bewegen sich zwischen dem Faktischen und dem Möglichen, dem Bekannten und dem Unbekannten. Deshalb sind sie auch in den Wissenschaften ein so taugliches Instrumentarium (vgl. Pernkopf 2015).

Es hängt vom Kontext ab, ob und wie ein Ausdruck als Metapher fungiert und welches implizite Wissen damit aktiviert wird. Aufgrund dieser Kontextualität lassen sich Metaphern kaum in Wörterbücher schreiben. Enzensberger lässt seiner „Such-und Findeliste“ (Z 255–262) mit Angaben zu den verschiedenen Übertragungen die ganze Erzählung vom Zahlenteufel vorangehen, die diesen ungewöhnlichen Index verständlich macht. Man kann das als Explizierung einer Metaphernbestimmung verstehen, die Metaphern als Pointen von Erzählungen begreift.[17]

Mit Metaphern werden Zusammenhänge erfasst, erkundet oder neu geschaffen. Mit der Erkenntnisfunktion der Metapher gerät man in ein Wortfeld, das oft selbst mit Metaphern des Sehsinns beschrieben wird, beginnend mit dem Licht, das einem aufgeht. Metaphern werden auch deshalb oft als sprachliche Bilder verstanden, man identifiziert metaphorische Sprache als Bildersprache. Am hinteren Buchumschlag des Zahlenteufels wird u. a. mit einer Besprechung aus *Die Welt* für das Buch geworben: „Enzensberger spielt so virtuos mit den Metaphern, dass in einem fort die Bilder entstehen, die man nicht so leicht aus dem Kopf bekommt.“ (Silke Schnetter) Doch just *Der Zahlenteufel* macht deutlich, dass damit sehr Unterschiedliches gemeint sein kann. „Metaphern sind nicht per se ‚bildhaft‘. Überhaupt muß nicht im Sinne von Wahrnehmung etwas ‚Sinnliches‘, sondern es kann auch radikal Abstraktes übertragen werden.“ (Gehring 2006, 812) Die mathematische Operation „Fakultät“/„Faktorielle“ nennt der Zahlenteufel schlicht „Wumm!“, womit zum einen das schon für kleine natürliche Zahlen überwältigende Ergebnis in einen Ausruf gefasst wird und zum anderen das Rufzeichen, das die Operation mathematisch kennzeichnet, enthalten ist. Das damit angeblich evozierte „Bild“ im Kopf ist vermutlich eher ein Laut mit Nachhall. Was das Wumm! anrichtet, kann dem durchaus entsprechen.

Enzensberger hat mit dem Zahlenteufel gegen die „Angst vor der Abstraktion“ geschrieben und dafür, Kinder nicht zu unterschätzen, „für ein zehnjähriges Kind ist der Begriff des Unendlichen kein Problem“ (zit. nach Weber 1997, 17). Robert selbst (er)findet „bis ins Aschgraue“ für das „immer weiter so“, den Fortgang zum potentiell Unendlichen. Enzensberger hat die Poesie in den Wissenschaften in der Mathematik aufgesucht und ist davon überzeugt, dass „jede wissenschaftliche Erzählung – und es gibt keinen Fortgang der Forschung, der ohne sprachliche Überlieferung auskäme – auf der metaphorischen Rede [beruht]“ (Enzensberger 2002, 271). Er bewundert die Fähigkeit von Mathematikerinnen und Mathematikern, „ihre Konzepte, Entdeckungen und Hypothesen zu verbalisieren. Ihre Metaphern-Produktion zeugt von beneidenswertem poetischen Talent.“ (Enzensberger 2002, 271) Wie sehr auch Mathematik Arbeit an Sprache ist, narrativ, metaphorisch, figurativ, graphisch, lässt sich in seinem *Zahlenteufel* lesen. Mit Klarheit und Phan-

17. „Um metaphorisch reden zu können, muß erzählt werden. [. . .] Metaphern sind durch Erzählung vorbereitete Pointen der Erzählung.“ – So eine Definition theologischer Provenienz, nämlich von Eberhard Jüngel (Jüngel 1974, 113). Sie trifft sich mit aktuellen Beschreibungen von Metaphern als Mini-Narrativen in den Kulturwissenschaften bei Mieke Bal und Ansgar Nünning.

tasie, Witz und Ernsthaftigkeit haben Enzensberger und Berner eine Geschichte erzählt, die zu Mathematik und mehr anstiften kann.

Literaturverzeichnis

Alexander von Humboldt-Stiftung. 2015. Preisträger Harald Andrés Helfgott. Online in: http://www.humboldt-professur.de/de/preistraeger/preistraeger-2015/helfgott-harald-andres [abgerufen am 8.12.2015].

Aristoteles. 1978. *Metaphysik. In der Übersetzung von Hermann Bonitz. Griechisch-deutsch. Band 1.* Meiner.

——— . 1950. *Vom Himmel. Von der Seele. Von der Dichtkunst. Eingeleitet und neu übertragen von Olof Gignon.* Artemis.

Bachelard, Gaston. 1988. *Der neue wissenschaftliche Geist.* Suhrkamp.

Blumenberg, Hans. 1998. *Paradigmen zu einer Metaphorologie.* Suhrkamp.

Brüning, Jochen. 2007. Die Fläche des Poeten. In *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 15*, 33–36.

Debatin, Bernhard. 1995. *Die Rationalität der Metapher. Eine sprachphilosophische und kommunikationstheoretische Untersuchung.* De Gruyter.

Deutscher Jugendliteraturpreis. 2006. Sonderpreis für das Gesamtwerk der Illustratorin Rotraut Susanne Berner. Online in: http://www.jugendliteratur.org/archiv/2006/innen_start3.htm [abgerufen am 21.7.2015].

Diels, Hermann / Kranz, Walther (Hg.). 1960. *Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und Deutsch. Band 1.* Weidmannsche Verlagsbuchhandlung.

Enzensberger, Hans Magnus. 2002. *Die Elixiere der Wissenschaft. Seitenblicke in Poesie und Prosa.* Suhrkamp.

——— . 2007. *Zu große Fragen. Interviews und Gespräche. 2005–1970.* Suhrkamp.

——— . 2009. *Fortuna und Kalkül. Zwei mathematische Belustigungen.* Suhrkamp.

——— . 2014. *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben. Gestaltet und mit Bildern versehen von Rotraut Susanne Berner.* Deutscher Taschenbuch Verlag.

Euklid. 1980. *Die Elemente*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Fleck, Ludwik. 1980. *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache. Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*. Suhrkamp.

——— . 1983. *Erfahrung und Tatsache. Gesammelte Aufsätze*. Suhrkamp.

Gehring, Petra. 2006. Vom Begriff zur Metapher: Elemente einer Methode der historischen Metaphernforschung. In Abel, Günter (Hg.). *Kreativität. XX. Deutscher Kongress für Philosophie*, 800–815. Meiner.

Giaquinto, Marcus. 2008. Visualizing in Mathematics. In Mancosu, Paolo (Hg.). *The Philosophy of Mathematical Practice*, 22–42. Oxford University Press.

Harlizius-Glück, Ellen. 2010. Zahlverwandtschaften. Versuch über die Reproduktion des Geschlechts der natürlichen Zahl. In Bock von Wülfingen, Bettina / Fietsch, Ute (Hg.). *Epistemologie und Differenz. Zur Reproduktion des Wissens in den Wissenschaften*, 27–45. Transcript.

Harré, Rom. 1990. Some Narrative Conventions of Scientific Discourse. In Nash, Christopher (Hg.). *Narrative in Culture. The Uses of Storytelling in the Sciences, Philosophy, and Literature*, 81–101. Routledge.

Heath, Thomas. 1921. *A history of Greek mathematics. I. From Thales to Euclid.* Clarendon Press.

Hilbert, David. 1988. *Wissen und Mathematisches Denken. Vorlesung 1922/23. Ausgearbeitet von Wilhelm Ackermann. Überarbeiteter Nachdruck*. Mathematisches Institut Göttingen.

Jacob, Francois. 1998. *Die Maus, die Fliege und der Mensch. Über die moderne Genforschung.* Berlin Verlag.

Jüngel, Eberhard. 1974. Metaphorische Wahrheit. Erwägungen zur theologischen Relevanz der Metapher als Beitrag zur Hermeneutik einer narrativen Theologie. In Ricoeur, Paul / Jüngel, Eberhard. *Metapher*, 71 –122. Kaiser.

Koschorke, Albrecht. 2010. Wissen und Erzählen. In *Nach Feierabend. Zürcher Jahrbuch für Wissensgeschichte 6*, 89–102.

Krämer, Sybille. 2009. Operative Bildlichkeit. Von der „Grammatologie“ zu einer „Diagrammatologie“? Reflexionen über erkennendes „Sehen“. In Hessler, Martina / Mersch, Dieter (Hg.). *Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft*, 94–122. Transcript.

——— . 2012. Punkt, Strich, Fläche. In Krämer, Sybille. U.a. (Hg.). *Schriftbildlichkeit*, 79–100. Akademie-Verlag.

——— . 2014. Zur Grammatik der Diagrammatik. Eine Annäherung an die Grundlagen des Diagrammgebrauches. In *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik 44/176*, 11–13.

Lefèvre, Wolfgang. 1981. Rechensteine und Sprache. In Damerow, Peter / Lefèvre, Wolfgang (Hg.).*Rechenstein, Experiment, Sprache*, 115–169. Klett-Cotta.

Mehrtens, Herbert. 1990. *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Suhrkamp.

Müller-Funk, Wolfgang. 2008. *Die Kultur und ihre Narrative. Eine Einführung.* Springer.

Moser-Pacher, Andrea / Thoma, Elisabeth. 2010. Mathematik erzählen. Ein Erfahrungsbericht über literarisches und mathematisches Lernen mit dem „Zahlenteufel“ von Hans Magnus Enzensberger. In*tribüne 2*, 15–20.

Nickel, Gregor. 2015. Mathematik und Bildung – Randnotizen zu einem klassischen Thema. In *Coincidentia. Beiheft 5*, 97–119.

——— . 2006. Zwingende Beweise. Zur subversiven Despotie der Mathematik. In Dietrich, Julia / Müller-Koch, Ute (Hg.). *Ethik und Ästhetik der Gewalt*, 261–281. Mentis.

Nünning, Ansgar. 2013. Wie Erzählungen Kulturen erzeugen: Prämissen, Konzepte und Perspektiven für eine kulturwissenschaftliche Narratologie. In Strohmaier, Alexandra (Hg.). *Kultur – Wissen – Narration. Perspektiven transdisziplinärer Erzählforschung für die Kulturwissenschaften*, 15–53. Transcript.

Paule, Gabriela. 2002. Der *Zahlenteufel* von Hans Magnus Enzensberger im Deutsch- und Mathematikunterricht der Orientierungsstufe. In Abraham, Ulf / Launer, Christoph (Hg.). *Weltwissen erlesen. Literarisches Lernen im fächerverbindenden Unterricht*, 106–114. Schneider.

Pernkopf, Elisabeth. 2015. Angemessen. Zur Präzision einer Metapher. In Bachhiesl, Christan. U.a. (Hg.). *Die Vermessung der Seele. Geltung und Genese der Quantifizierung von Qualia*, 339–348. LIT.

——— . 2013. „Die Natur ist eine Fabel“. Narrative und Naturwissenschaften. In Strohmaier, Alexandra (Hg.). *Kultur – Wissen – Narration. Perspektiven transdisziplinärer Erzählforschung für die Kulturwissenschaften*, 323–341. Transcript.

Remmert, Reinhold. 1992. Komplexe Zahlen. In Ebbinghaus, Dieter. U.a. *Zahlen*, 43–78. Springer.

Richards, Ivor A. 1983. Die Metapher. In Haverkamp, Anselm (Hg.). *Theorie der Metapher*, 31–52. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Saletta, Ester. 2014. Literatur und Mathematik. Überwindung eines Tabus in Hans Magnus Enzensbergers Roman *Der Zahlenteufel*. In Hackl, Wolfgang. U.a. (Hg.). *Sprache – Literatur – Erkenntnis*, 355-364. Praesens.

Van der Waerden, Bartel Leendert. 1979. *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Artemis.

Weber, Antje. 1997. Als die Zahlen hopsen lernten. Enzensberger hat ein Kinderbuch über Mathematik geschrieben. In *Süddeutsche Zeitung vom 20.3.1997*, 17.

Wußing, Hans. 2008. *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. Band 1.* Springer.

'Largely unknown' - Wie Gottlob Frege zu posthumem Weltruhm gelangte*

Matthias Wille†

Zusammenfassung: In der vorliegenden Studie erzählen wir die Geschichte, wie der Jenenser Mathematiker Gottlob Frege (1848-1925) vom unverstandenen intellektuellen Einzelgänger zu einer Überfigur der Logik- und Philosophiegeschichte avancierte. Die Pfade dieser Geschichte sind verschlungen, die raumzeitlichen Koordinaten der sie konstituierenden Episoden weit verstreut: Jena zu Freges Lebzeiten, Cambridge in den ersten beiden Dekaden des 20. Jahrhunderts, Münster nach 1930, Princeton und Harvard in den letzten anderthalb Jahrzehnten bis zur Mitte des Jahrhunderts, Oxford um 1950. Frege weltberühmt zu machen, war fraglos eine Gemeinschaftsleistung vieler. Die Reichhaltigkeit der episodischen Bausteine lässt die Suche nach wissenschaftshistorischen Singularitäten oder exponierten Protagonisten naiv erscheinen und doch gibt es sie. Eine dieser besonderen Begebenheiten fiel auf Dienstag, den 30. März 1937 und sie stand weder mit Russell noch Carnap oder Wittgenstein in Verbindung.

∗. Eine deutlich erweiterte Fassung dieses Aufsatzes erscheint im Frühjahr 2016 als Monographie unter dem Titel 'Largely unknown'. Gottlob Frege und der posthume Ruhm im mentis Verlag, Münster.

†. Ich danke Herrn Prof. Dr. Christian Thiel (Erlangen) von Herzen für die Vielzahl der von ihm eingebrachten wertvollen Hinweise und überaus hilfreichen Anregungen, die den Text an entscheidenden Stellen verbessert haben. Seine darüber hinaus erfolgten Korrekturlesungen haben das Manuskript entscheidend in Richtung der Druckbefähigung befördert. Großen Dank schulde ich Herrn Dr. Eric White, dem Kurator der Rare Books Abteilung der Princeton University Library, der sich auf eine detektivische Spurensuche eingelassen hat, um bibliothekarische Detailinformationen in Erfahrung zu bringen.

Frege wird im Normalfall
überhaupt nicht genannt.[1]

1 Das Problem

Gottlob Frege kannten zu Lebzeiten nur wenige. Für die meisten derselben war er ein intellektueller Einzelgänger, ein akademischer Außenseiter mit sonderbaren Interessen. „His work was practically unknown in Germany; neither mathematicians nor philosophers paid any attention to it".[2] Als Frege starb, gab es keinen einzigen Nachruf auf ihn.[3] „Gleich nach seinem Tod war er vergessen".[4]

Inzwischen wird mit seinem Wirken ein philosophiehistorischer Epochenwechsel ersten Ranges verbunden, der mit jenem Descartes' vergleichbar ist.[5] Während René Descartes die über zweitausendjährige ontologische Phase der Philosophie hinter sich lässt und ihre große erkenntnistheoretische Epoche einläutet, überwindet Frege das fast 2300jährige Paradigma der aristotelischen Logik, indem er das Zeitalter der modernen formalen Logik begründet. Seine *Begriffsschrift*, die von Zeitgenossen noch als „cumbrous and inconvenient"[6] beurteilt wurde, ist inzwischen „perhaps the most important single work ever written in logic",[7] sie ist „the real beginning of mathematical logic"[8] und seine gesamte Logikforschung repräsentiert das „most important chapter in the history of modern logic".[9] Vollkommen zu Recht wird er in einem Atemzug mit Aristoteles genannt,[10] er ist „the greatest logician since Aristotle"[11] und seine „*Begriffsschrift* kann nur mit *einem* Werk in der ganzen Geschichte der Logik verglichen werden, mit den *Ersten Analytiken* des Aristoteles".[12] Darüber hinaus leistete er Bahnbrechendes für das philosophische Selbstverständnis der Gegenwart, im argumentativen Detail ebenso wie in der Neubestimmung des Philosophiebegriffes selbst. Sein Name ist unauflöslich verbunden mit der Ermöglichung und dem Vollzug des *linguistic turn* sowie der Begründung der modernen Semantik als einem unverzichtbaren Werkzeug wissenschaftlichen

1. Scholz (1936b), 2.
2. Carnap (1963), 4.
3. Vgl. Kreiser (2001), 254.
4. Kreiser (2001), 254.
5. Dummett (1973), 669.
6. Venn (1880).
7. van Heijenoort (ed.), 1.
8. Quine (1985), 144.
9. Church (1945), 101.
10. Scholz (1935a), 22.
11. King/Shapiro (1995), 498.
12. Bocheński (1956), 313. So auch Lorenzen (1960), 156.

Philosophierens. Er gehört zu den wahrhaft großen Gestalten der Philosophiegeschichte.

Es stellt sich sogleich die naheliegende Frage, wie es dazu kam. Immerhin ist es nicht selbsterklärend, dass eine Person, die während ihres Lebens kaum bekannt und eher eine akademische Randerscheinung war, posthum nicht nur nicht gänzlich in Vergessenheit gerät, sondern – ganz im Gegenteil – innerhalb von wenigen Jahren den Weg in die Geschichtsbücher findet. Folgerichtig stellte Avrum Stroll diesbezüglich bereits vor einem halben Jahrhundert fest, „it is difficult to find an exactly comparable case anywhere in the history of philosophy“.[13] In philosophiehistorischen Dimensionen handelt es sich hierbei also nicht um einen langwierigen Prozess der Aneignung, bei dem ungleich spätere Generationen in mühsamer Sichtung von Quellen aus grauer Vorzeit dem Verdacht nachgehen, dass es hier eventuell etwas zu entdecken gibt. In wissenschaftsgeschichtlichen Maßstäben wurde Frege geradezu „über Nacht“ berühmt.

Die Frage, wie er zu posthumem Weltruhm gelangte, wurde in der Fregeforschung bisher selten gestellt und noch nicht zufriedenstellend beantwortet.[14] Literarisch ging einzig Stroll vor exakt einem halben Jahrhundert diesem Erkenntnisproblem im Rahmen einer kleinen Studie nach (s.u.), während Christian Thiel am 2. April 1998 im Rahmen der Wismarer Frege-Ehrung, einer Vortragsreihe aus Anlass des 150. Geburtstages, mit der Frage eröffnete, „weshalb diese Wirkung so lange auf sich warten ließ“.[15] Bedauerlicherweise blieb sein Vortrag „Gottlob Freges späte Wirkung“ unveröffentlicht und wurde durch den Referenten auch erst wieder im Rahmen der gemeinsamen Diskussionen um die vorliegende Studie in Erinnerung gerufen. Die hier dokumentierten Untersuchungen und entfalteten Narrationen erfolgten jedenfalls in Unkenntnis des Thielschen Vortrags, der schließlich auch nur behutsam in Erwägung zieht, dass die einsetzende Frege-Renaissance in den Vereinigten Staaten nach dem Zweiten Weltkrieg eventuell angeregt wurde durch Rudolf Carnap.[16]

In Bezug auf die bei Stroll, Thiel und hier verfolgte erkenntnisleitende Frage bedarf es vorab des Hinweises, dass es sich bei den kanonischen (und zum Teil auch bei Stroll zu findenden) Erzählungen, denen gemäß Frege über Rudolf Carnap und/oder Bertrand Russell und/oder Ludwig Wittgenstein (wieder)entdeckt wurde, um retrospektive Rationalisierungen des historischen Verlaufes handelt. Für keinen der genannten Fälle lässt sich rezeptionsgeschichtlich zeigen, dass sie Frege

13. Stroll (1966), 72.
14. Explizite Erwähnung findet das Problem zudem bei Wille ((2013), 21). Ebendort (21f., 143ff.) werden auch erste Hinweise zur Klärung gegeben.
15. Thiel (1998), 1.
16. Vgl. Thiel (1998), 12.

berühmt gemacht haben.[17] Das mag für den Augenblick irritieren, weil es einem inhärenten Selbstverständnis widerspricht, das üblicherweise bereits curricular inhaliert und nicht mehr weiter hinterfragt wird. Die entscheidenden Weichen wurden dennoch durch andere gestellt, während über die Jahrzehnte hinweg vornehmlich fehlerhafte Geschichten kolportiert wurden. Bekanntlich gerinnt dann zur Wahrheit, was nur häufig genug unwidersprochen vorgetragen wird.

Avrum Strolls „On the First Flowering of Frege's Reputation" mag hieran nicht ganz unbeteiligt gewesen sein. Die Fregeforschung verwies zumindest gerne auf Inhalte des Aufsatzes, während dieselben durch dieselbe kaum hinterfragt wurden. Hoch anzurechnen ist Stroll, dass er die Fregerezeption bis einschließlich 1966 selbst zum Gegenstand der Forschung gemacht hat und mithin ein Reflexionspotenzial zur Anwendung brachte, das eine kritische Geschichtsschreibung, eine Historiographie der Fregeforschung, allererst ermöglicht. Das vorrangige Interesse gilt also nicht direkt Frege, sondern denjenigen, deren unmittelbares Interesse Frege gilt und wie dieses entstand:

> In view, then, of the lack of interest accorded Frege's contributions during his lifetime, how are we to account for the contemporary flowering of his reputation?[18]

Spätestens 1966 wird diese zentrale reflexionslogische Frage der Fregeforschung also explizit gestellt und der Versuch einer Beantwortung sogleich unternommen. Allerdings ist Strolls Untersuchung[19] in vielerlei Hinsicht mangelhaft und nur ein Teil dieser Defizite ist dem Stand der Fregeforschung Mitte der 1960er Jahre geschuldet. Es trifft uneingeschränkt zu,[20] dass zum Zeitpunkt von Strolls Nachforschungen weder Freges Briefwechsel veröffentlicht vorlag noch seine nachgelassenen Schriften zugänglich waren noch eine respektable Biographie in Reichweite schien[21] – durchweg wertvolle Hilfsmittel in der Beantwortung der obigen Frage, deren Verfügbarkeit keine heutige historiographische Spurensuche missen möchte. Auch lag zum Zeitpunkt seiner Studie noch keine umfassende Frege-Bibliographie vor, weshalb es bedauerlicherweise nicht überrascht, dass die von Stroll eruierte Anzahl von Arbeiten im Zeitraum zwischen 1879 und 1966[22] lediglich ca. $^{1}/_{3}$ der tatsächlich veröffentlichten Texte zu Frege erfasst. Einzelne, für die erkenntnisleitende Frage einschlägige Arbeiten bleiben damit ebenso unberücksichtigt, wie

17. Ausführlich hierzu 3.1-3.3.
18. Stroll (1966), 74.
19. Vgl. Stroll (1966), 74-77.
20. Vgl. Stroll (1966), 74.
21. Was allerdings nicht entschuldigt, dass Stroll Frege sogleich eingangs seines Textes (1966, 72) im Alter von 85 Jahren sterben lässt – zumal er kurz darauf (74) mit Jahreszahlen und biographischen Details aufwartet, die den Fehler selbst textimmanent offensichtlich werden lassen.
22. Vgl. Stroll (1966), 75.

der gesamte empirische Befund verfälscht ist. Gerade weil sich die metaphorische Rede von einer „Blütezeit“ bzw. vom „Aufblühen“ nicht nur auf die Qualität der Schriften, sondern auch auf deren schiere Menge sowie deren Verteilung bezieht, ist es eminent bedeutsam, dass möglichst in Kenntnis des gesamten Publikationsaufkommens im fraglichen Zeitraum gearbeitet wird. Andernfalls nimmt man nicht nur fahrlässig in Kauf, dass der Hebel des „Blüte“-Kriteriums an der falschen Stelle ansetzt (so geschehen), sondern dass zudem verwendeten Quellen falsche Rollen zugewiesen werden. Stroll widerfährt dies etwa im Fall von Herbert Feigls Übersetzung von „Über Sinn und Bedeutung“, die er fälschlicherweise als die erste vollständige Übersetzung eines Fregetextes überhaupt kennzeichnet.[23] Urteile dieser Form verbieten sich, wenn die zur Anwendung gebrachten Recherchemittel die Nähe zum Vollständigkeitsanspruch nicht gewährleisten können.

Gleichwohl wäre es auch ohne diese hilfreichen Werkzeuge allein auf der Grundlage der publizierten Dokumente der Zeit möglich gewesen, die richtige Antwort zu erschließen. Das größte Versäumnis Strolls besteht schlicht in einer mangelhaften Sichtung des empirischen Befundes. Selbst die Periodika, die er für seine Untersuchung herangezogen hatte, enthielten weitaus mehr ertragreiches Material, als das von ihm verwendete. Allein am gründlichen Blick eines geduldig Suchenden fehlte es bei der Konsultation dieser möglichen Quellen. In Ermangelung einer verfügbaren Frege-Bibliographie, durch die tatsächlich ein beachtlicher Grad an Transparenz ermöglicht worden wäre, hätte man sich etwa einen verbesserten Überblick mittels der periodisch aktualisierten Indizes des *Journal of Symbolic Logic* (*JSL*) verschaffen können. Da Stroll eine auffällige Anzahl an zentralen Arbeiten unberücksichtigt lässt, deren vollständige bibliographische Angaben im *JSL* hinterlegt sind und auf deren Orte der *JSL*-Index korrekt verweist, scheint es naheliegend, dass er von diesem Instrument keinen oder keinen hinreichenden Gebrauch gemacht hat. Es überrascht daher nicht, wenn er nach Erwähnung einzelner weniger Arbeiten zu Frege aus den 1930er Jahren für die Zeit bis Mitte der 1940er schlicht feststellt: „The immediate literature which followed these pieces does not wholly account for the revival of interest in Frege after 1940. [...] But even this flurry of interest [ein paar angeführte Arbeiten nach 1940, MW] hardly accounts for the subsequent flowering of Frege's reputation“.[24] Selbst für den Fall, dass diese Diagnose zutreffend gewesen wäre, so bliebe gleichwohl zu zeigen, weshalb Strolls Schlussfolgerung die gesuchte Antwort liefert: „Although the main credit for the revival of interest in Frege must, as I see it, largely go to Carnap“.[25]„It was thus, for many writers, but one step from the work of Carnap to the work of Frege“.[26]

23. Vgl. Stroll (1966), 77. Siehe 2.1.
24. Stroll (1966), 76.
25. Stroll (1966), 77.
26. Stroll (1966), 77.

Tatsächlich war der Weg von Carnaps Schriften aus den späten 1940er Jahren hin zur Lektüre Freges ein überschaubar kurzer, auf dem man sich – um im Bilde zu bleiben – auch nicht verlaufen konnte. Doch damit wurde keineswegs die fragliche Blütezeit in der Fregerezeption initiiert, weil diese bereits voll in Blüte stand. Damit hatte Stroll den Hebel des „Urheber"-Kriteriums um mehr als ein Jahrzehnt zu spät angesetzt und eine Profiteur der Entwicklungen zu ihrem Begründer erklärt.

Im Verlauf unserer Untersuchungen wird sich zeigen, warum Carnap nicht das fragliche Verdienst zukommt und weshalb bereits die von Stroll mit beeindruckender Sicherheit formulierte Diagnose für den Zeitraum zwischen ca. 1930 und Mitte der 1940er Jahre gleichermaßen beeindruckend fehlgeht. Letztlich scheitert seine Untersuchung sowohl im Ergebnis wie auch im Verfahren daran, dass er exakt für jene Jahre, in dem für die moderne Fregerezeption ausnahmslos alle entscheidenden Weichen gestellt wurden, blind blieb. Um die Auswahl und die Dichte der hierfür ausgewerteten Quellen zu rechtfertigen und um dem Leser eine bessere Orientierung zu ermöglichen, in welchem Zeitfenster wir nachfolgend vornehmlich operieren, unterteilen wir die Fregerezeption in drei Phasen.

1. Phase: zu Freges Lebzeiten und bis Ende der 1920er Jahre

> Die historisch erste Phase der Fregerezeption von 1879 bis ca. 1930 ist wesentlich gekennzeichnet durch das Problem der Verortung. Freges Beiträge werden kaum angemessen klassifiziert und auffällig häufig missverstanden, im technischen Detail ebenso wie in der programmatischen Perspektive. Quantitativ ist die Literaturdecke zu Frege dünn. Zu seinen Lebzeiten gibt es kaum mehr als 30 Veröffentlichungen,[27] die sich in unterschiedlicher Ausführlichkeit mit Frege befassen. Zwischen den Beiträgen gibt es so gut wie überhaupt keine systematischen Zusammenhänge, wechselseitige Bezüge sind eher selten. Die große Ausnahme in dieser Phase bilden Bertrand Russell und Philip Jourdain.[28] Eine Fregeforschung, die durch eine wissenschaftliche Gemeinschaft getragen wird, findet noch nicht statt.

2. Phase: Anfang der 1930er Jahre bis Mitte des 20. Jahrhunderts

> Die sich daran anschließende Phase ist geprägt durch eine langsam einsetzende „Goldgräberstimmung", erst bei einzelnen Gelehrten, in den 1940er Jahren schließlich bei einer ganzen Gruppe von Wissenschaftlern. Erste Dissertationen zu Frege werden angefertigt und es gibt einzelne Logiker, die sich die

27. Vgl. Mayer (1976), 170ff.
28. Siehe 3.3 und 3.4.

Aufarbeitung und Vermittlung von Freges Werk ausdrücklich zum Ziel gesetzt haben. Die Publikationsdichte nimmt zu. Gegenüber der ersten Phase der Fregerezeption verfünffacht sich das Publikationsaufkommen.[29] Die veröffentlichten Beiträge nehmen zunehmend mehr aufeinander Bezug und es setzt eine umfassende Rezensionstätigkeit zu den Forschungsbeiträgen ein. Die Fregeforschung hat begonnen.

3. Phase: seit Mitte des 20. Jahrhunderts

Diese Phase der Fregerezeption, in der wir uns auch heute noch befinden, ist wesentlich gekennzeichnet durch eine etablierte und weltweit betriebene Fregeforschung auf internationalem Spitzenniveau. Im Unterschied zur vorangegangenen Phase bedarf es keiner Rechtfertigung mehr, warum umfangreiche Forschungsressourcen auf die Untersuchung von Freges Werk oder die Verwirklichung von ihm inspirierter Projekte verwendet werden. Seine philosophiehistorische Bedeutsamkeit ist inzwischen unstrittig. Freges Leistungen werden über den Kreis der Logiker und mathematischen Grundlagenforscher hinaus bekannt gemacht. Frege wird zu einer gesamtphilosophischen Figur. Allein bis 1975 nimmt das Publikationsaufkommen gegenüber der vorangegangenen Phase noch einmal um mehr als das Sechsfache zu,[30] Tendenz stark steigend.[31] Die Fregeforschung wird nunmehr fast vollständig institutionell organisiert.

Fregeforschung in einem sozio-akademisch gehaltvollen Sinn gibt es also seit der zweiten Phase der Fregerezeption. Da es sich bei dieser Phase exakt um jenes Zeitfenster handelt, in dem unser Erklärungsproblem anzusiedeln ist, wird der Großteil der hier zu verwendenden Quellen aus dem Zeitraum von ca. 1930 bis Mitte des 20. Jahrhunderts stammen. Indem wir uns nachfolgend der Frage zuwenden, wie Gottlob Frege zu posthumem Weltruhm gelangte, leisten wir nicht nur einen Beitrag zur Frühgeschichte der Fregeforschung, sondern wir erzählen zudem eine kleine Milieugeschichte über die moderne formale Logik. Dass hierbei in einer ungewöhnlich hohen Dichte und einer üppigen Diversifizierung Qualitätsurteile über Frege Verwendung finden, sollte nicht überraschen. Sie repräsentieren das zeitgenössische Beurteilungskolorit, das in seiner Dokumentation unverzichtbar ist, wenn es um die Manifestation derart wertender Ausdrücke wie „Ruhm“ oder evaluativer Spurensuchen wie die der „Berühmtwerdung“ geht.

29. Vgl. Mayer (1976), 172ff.
30. Vgl. Mayer (1976), 176ff.
31. Die erhebliche Zunahme des Publikationsaufkommens steht nicht zuletzt im Zusammenhang mit den akademischen Entwicklungen nach Ende des Zweiten Weltkrieges. Bereits wenige Jahre nach diesem machten ungleich viel mehr junge Männer ihre Universitätsabschlüsse als noch während des Krieges. Entsprechend nahmen auch die Forschungsaktivitäten in nahezu allen Bereichen der Logik zu.

2 „einsam und verkannt“, aber „der größte Logiker unserer Zeit“

Sinn und Bedeutung des Namens „Gottlob Frege“ zählen zum philosophischen Gemeingut – heute. Dabei gibt es eine Weise des Gegebenseins, die pointierter als jede andere das Besondere von Person, Werk und Rezeption zum Ausdruck bringt:

> Largely unknown to, or misunderstood by, his contemporaries, he is now regarded by many as "beyond question the greatest logician of the Nineteenth Century" (quotation from Tarski).[32]

Diese Kennzeichnung aus dem Jahr 1942 entstammt dem (wahrscheinlich) ersten internationalen Lexikoneintrag zu Frege und es ist bezeichnend, dass es sich bei dieser Charakterisierung um jene enzyklopädische Information handelt, die der Autor den grundlegenden Lebensdaten unmittelbar nachfolgen lässt. Nach Auffassung von Alonzo Church charakterisiert diese Kennzeichnung Gottlob Frege also auf ganz besondere Weise.

2.1 „ein fast nur geduldetes [...] Anhängsel“

Es ist unbestritten und empirisch mannigfach belegt, dass der promovierte und habilitierte Mathematiker Gottlob Frege Zeit seines akademischen Lebens gegen viele Widrigkeiten ankämpfen musste.[33] Ohne Schulanbindung, ohne intellektuelle Gefolgschaft und mit geringem institutionellem Rückhalt begründet er wissenschaftliche Standards, die kaum jemand versteht und die noch weniger interessieren. „In Jena war er ein fast nur geduldetes, kaum von irgend jemandem ernstgenommenes Anhängsel“.[34] Seine Schriften konnte er nur mit Mühe verlegen, zum Teil unter großen finanziellen Entbehrungen, oder sie wurden gar nicht erst gedruckt.[35] Hat-

32. Church (1942d), 112. Obwohl keine Quelle angeführt wird, ist es naheliegend, dass sich Church auf Tarskis *Einführung in die Mathematische Logik* bezieht. Zumindest lautet es ebendort ((1937), 14): „*G. Frege* [...], der ohne Zweifel der größte Logiker des 19. Jahrhunderts gewesen ist“.

33. Umfassend nachzulesen bei Kreiser (2001).

34. Scholem (1977), 110.

35. So wurde etwa der Text „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift“ 1881 von nicht weniger als drei Zeitschriften abgelehnt: den *Mathematischen Annalen*, der *Zeitschrift für Mathematik und Physik* und der *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*. Ein Jahr später scheitert Frege bei der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, der er (wahrscheinlich) die weitaus kürzere Vergleichsstudie „Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift“ angeboten hatte. Das Thema berücksichtigend hatte sich damit der Markt der für Frege in Frage kommenden respektablen Journale fast erschöpft.

ten es seine Werke dann schließlich doch in die Buchhandlungen geschafft, so war ihnen eine „kühle Aufnahme“[36] gewiss. „In dem Jahrb. über die Fortschritte der Math. sucht man meine Grundlagen der Arithm. vergebens. Forscher auf demselben Gebiete [...] scheinen meine Arbeiten nicht zu kennen“.[37] Auch dem ersten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* bescheinigt er 1893, dass „die Aussichten meines Buches freilich gering“[38] sind. Er sollte zu Lebzeiten Recht behalten.

Frege hatte in jahrzehntelanger mühevoller Tätigkeit Logik und Arithmetik auf völlig neue Grundlagen gestellt. Dabei blieb er einsam und verkannt; die führenden Mathematiker seiner Zeit, gegen deren Grundlegung der Mathematik er sich mit schonungsloser Kritik wandte, schwiegen ihn tot; seine Bücher wurden nicht einmal rezensiert.[39]

Dass er gleichwohl 1912 in den „Nachträgen und Ergänzungen“ zu Rudolf Eislers *Philosophen-Lexikon* unter knapper Anführung weniger biographischer Daten und einzelner Werke Erwähnung findet[40] oder 1927 als Vertreter der Logistik in Richard Falckenbergs *Geschichte der neueren Philosophie* geführt wird, sollte nicht zu hoch bewertet werden.[41] In beiden Fällen wird lediglich ein Datum erfasst, bei Falckenberg mit enzyklopädischem Ehrgeiz und bei Eisler mit dem Anspruch der Vollständigkeit eines philosophischen Melderegisters. Aus Berücksichtigungen dieser Form folgt überhaupt nichts Evaluatives, haben sie doch denselben Status wie der gut dreizeilige Eintrag Nummer 124 in Ernst Piltz' *Dozenten-Album der Universität Jena* aus dem Jahr 1908.[42] Frege fand eine wertungsfreie Erwähnung, weil es ihn als Lehrenden und Autor schlicht gab, nicht deshalb, weil ihm eine bestimmte Leistung zugeschrieben worden wäre.

Ein Kuriosum aus der Zeit von Falckenbergs neuerer Philosophiegeschichte bedarf dann aber doch noch der Erwähnung, denn im selben Jahr erschien Heinrich Behmanns *Mathematik und Logik*. Als Taschenbüchlein informierte es in ebenso knapper Weise über die logischen Grundlagen der Mathematik, wesentlich inspiriert durch die weithin verbreitete *Principia*-Rezeption, doch den Außentitel zierte ei-

36. Frege (*GGA I*, XI).
37. Frege (*GGA I*, XI).
38. Frege (*GGA I*, XII).
39. Carnap (1934), 98. Das von Carnap gezeichnete Bild konnte durch die historische Frege-forschung der vergangenen 30 Jahre, unter anderem jener zum „Jenaer Mikrokosmos“, relativiert werden. Auch konnte für die frühe Rezeption der *Begriffsschrift* gezeigt werden, dass die Besprechungen keineswegs einen durchweg negativen Charakter besessen haben (siehe Vilkko (1998)). Gleichwohl ist Carnaps Beurteilung der gesamtbiographischen Situation Freges repräsentativ für diejenigen, die in der Mitte der 1930er Jahre für den Namen überhaupt noch eine Verwendung fanden.
40. Eisler (1912), 873.
41. Falckenberg (1927^9), 665.
42. Vgl. Piltz (1908), 19.

ne Federzeichnung des heute bekannten Altersbildnisses von Frege. Zwar erwähnt Behmann Freges *Grundlagen* im Rahmen ergänzender Literaturhinweise knapp als „sehr anregendes Schriftchen“,[43] doch ansonsten hat Freges Werk in Behmanns Heftchen keine Spuren hinterlassen. Von wem die durchaus gelungene Federzeichnung stammt und weshalb gerade ein Bildnis von Frege den Außentitel schmückt, ist bis heute unbekannt. Ob es der fehlende bzw. nicht offensichtliche Zusammenhang zwischen Zeichnung und Werk war oder die Verzichtbarkeit der Publikation selbst, für die Wahrnehmung Freges hatte diese kuriose Paarung jedenfalls keine Folgen, sie blieb auf einem historischen Tiefststand. Standardbezugnahmen sowie Alibi-Verweise generierten zu keinem Zeitpunkt eine intellektuelle Neugier auf Autor und Werk.

Dabei war das Interesse an seinen Publikationen im selben Maße ausgeprägt wie die Nachfrage nach seinen Forschungsveranstaltungen. Seine Vorlesungen zur Begriffsschrift an der Universität Jena blieben ein spärlich genutztes Angebot, wobei der oben zitierte Rudolf Carnap neben Gershom Scholem, der ebenfalls von Freges Veranstaltungen begeistert war,[44] eine rühmliche Ausnahme bildet. Auch die finanzielle Absicherung konnte zu keinem Zeitpunkt seiner Karriere dauerhaft gewährleistet werden, in den Genuss einer ordentlichen Professur kam er (allerdings zum Teil aus eigenem Entschluss[45]) nie. Als Frege 1925 verstirbt, nimmt die akademische Welt davon keine Notiz. „I think that I should have taken notice if there had been any speeches made or articles published that year in his honour. But I can recollect nothing of the kind“.[46] Eingedenk des Umstandes, dass Frege nach 1902 sein wissenschaftliches Hauptwerk als gescheitert beurteilt hat, unterstreicht dieses intellektuelle Scheitern die bereits bestehende akademische Ignoranz. „Frege’s story is doubly tragic“,[47] doch für diese doppelt tragische Geschichte findet sich nicht einmal ein Publikum, womit die Tragik eine dritte Dimension hinzubekommt. „When Gottlob Frege died [...], his passing was unmarked by the scholary world. In this respect, his death was characteristic of his life“.[48] Alle Zeichen deuten darauf hin, dass Frege in Vergessenheit geraten wird, denn es fehlt nicht viel, dass man sich einer kaum bekannten Person nach ihrem Tod überhaupt nicht mehr erinnert. Doch dazu sollte es nicht kommen.

Ende der 1940er Jahre erscheinen unabhängig voneinander zwei Übersetzungen von „Über Sinn und Bedeutung“ an prominenten Orten. 1948 publiziert Max Black

43. Behmann (1927), 5.
44. Scholem (1977), 110.
45. Siehe Kreiser (2001), 373f., 379.
46. Kneale (1956a), 26.
47. McCrea (1951), 178.
48. Stroll (1966), 72.

seine Übersetzung „Sense and Reference“[49] und ein Jahr später Herbert Feigl seine Fassung „On Sense and Nominatum“.[50] Mit den Übersetzungsbestrebungen für dieses „celebrated“[51] „famous paper“[52] und ihren nachfolgenden Publikationen befördern Black, Feigl und Wilfrid Sellars (der Co-Editor von Feigl) die „growing Frege renaissance we have been witnessing during the past few years“.[53] Unterstrichen wird dieses nunmehr einsetzende massive Interesse durch die Aufsatzfolge „Frege Against the Formalists“,[54] die Max Black für *The Philosophical Review* 1950 inszeniert. Um bemerkenswerte Analysen aus den immer noch extrem schwer zugänglichen *Grundgesetzen* einer weiteren philosophischen Öffentlichkeit bekannt zu machen, übersetzt Black den gut 50 Paragraphen umfassenden Abschnitt „Die Theorien des Irrationalen von E. Heine und J. Thomae“[55] und organisiert das Resultat in eine in den ersten drei Heften erscheinende dreiteilige Aufsatzfolge, womit Frege ein Vierteljahrhundert nach seinem Tod zum produktivsten Autor des 59. Bandes der *Philosophical Review* wird.

Zu diesem Zeitpunkt ist die Diskussion um die angemessene Übersetzung zentraler Termini Freges bereits in vollem Gange,[56] die wesentlich durch führende Philosophen und Logiker Nordamerikas bestimmt wird. Doch vor allem durch zwei Editionen, für welche die Fachwelt umgehend voll des Lobes ist und deren Erscheinen (fast) durchweg mit Begeisterung aufgenommen wird,[57] erfährt die Fregeforschung eine eminent bedeutsame Aufwertung und kann spätestens ab Anfang der 1950er Jahre sowohl in ihrem Umfang als auch im Hinblick auf ihre wissenschaftliche Reputation als internationale Forschung auf höchstem Niveau beurteilt werden. Die unmittelbaren Reaktionen auf die seit Ende der 1940er Jahre eingesetzten massiven Übersetzungstätigkeit waren derart beeindruckend, dass der durch sie entscheidend beförderte Fregetrend nicht retrospektiv, sondern wesentlich zeitlich zu den Ereignissen festgestellt werden konnte. „The current revival in the study of Frege seems to have been occasioned by a series of translations of that author's writings into English“.[58] Darüber hinaus wurde im Besonderen der fruchtbare Einfluss der beiden Editionen auf die bemerkenswerte Entwicklung der bereits eingesetzten

49. Frege (1948).
50. Frege (1949).
51. Henderson (1954), 183.
52. Black (1948), 207.
53. E. N. (1951).
54. Frege (1950b)-(1950d).
55. Frege (*GGA II*, §§ 86-137).
56. Church (1942a); (1948a); Carnap (1942), 233; (1947), 118; Black (1948), 208; (1949), 185.
57. Black (1951); Church (1953), 92; Dummett (1954), 102; E. N. (1951); Geach (1951), 544; Goodstein (1953), 143; Kneale (1950), 395; Linsky (1953), 343; Marshall (1954), 121; Maziarz (1952), 91; McCrea (1951), 180; Ryle (1952); Steele (1951), 261f.; Thomas (1950); Thomas (1952); Thompson (1952); Veatch (1954), 104. Etwas zurückhaltender im Lob ist Henderson (1954).
58. Grünbaum (1951), 286.

Fregeforschung von einzelnen Rezensenten bereits Anfang der 1950er Jahre korrekt vorausgesehen. „It is to be expected that the present volume will contribute substantially to the Frege revival now in progress“.[59]

2.2 „it bears the stamp of a philosophical classic“

Zu verdanken haben wir dies unter anderem John Langshaw Austin, der 1950 mit *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* eine vollständige zweisprachige Ausgabe von Freges *Grundlagen* vorlegt, deren drucktechnische Aufbereitung das bibliophile Herz höher schlagen lässt und deren Übersetzung (trotz der umgehend festgestellten und noch heute vollkommen zu Recht eingeforderten Verbesserungsmöglichkeiten[60]) nach wie vor als beste aller verfügbaren englischen Fassungen der *Grundlagen* angesehen werden kann.

Zeitgleich zur englischen „Original“ausgabe wurde in den Vereinigten Staaten eine (von der Titelei abgesehen) identische Lizenzausgabe durch die Philosophical Library Publishers herausgegeben, welche die *Foundations of Arithmetic* vor allem im Oktober und November 1950 im Rahmen einer beeindruckend umfassend angelegten Werbekampagne bewarben mit dem Hinweis „Used as Text in Leading Colleges and Universities“[61] – erstaunlich dafür, dass die *Foundations*-Ausgabe gerade erst auf dem Markt platziert wurde. Die Marktetingabteilung der Philosophical Library Publishers schaltete in mindestens drei großen Fachzeitschriften Anzeigen, deren primäre Zielgruppen Mathematiker und Mathematiklehrer sowie Philosophen waren. Worauf sich hierbei der zitierte Slogan bezogen haben mag, bleibt deutungsvariant. Ob es neben singulären Verwendern in Princeton oder Harvard der Zeit tatsächlich eine – im erwähnenswerten Maße – weiter verbreitete akademische Nutzung gab oder ob es sich bei dieser Werbeanzeige schlicht um einen kleinen Marketingtrick gehandelt hat, der das Besondere durch grammatische Unbestimmtheit zum Allgemeinen werden lässt, überlassen wir in der Beantwortung der Phantasie des Einzelnen.

Das Bemerkenswerte und vor allem Unstrittige am Werbetext ist indes die Botschaft, dass das beworbene Produkt sowohl im Philosophie- wie auch im Mathematikstudium führender Colleges und Universitäten und damit in den hohen Institutionen der Bildung Verwendung findet. Die Marketingstrategen der Philosophical Library bewerben Frege mit einem – wie auch immer verifizierten – akademischen Gütesiegel und empfehlen es (wie in den vorliegenden Fällen) den Leserschaften

59. Linsky (1953), 343.
60. Schirn (2010), passim.
61. Anzeige (1950a), (1950b).

des *American Mathematical Monthly*, des *Mathematics Teacher* sowie des *Journal of Philosophy*. Beworben wird zwar das Produkt, doch findet hierbei ein Name Verwendung, der außerhalb der Expertenkreise noch keinerlei Bekanntheit genießt. Im Fall der Werbeanzeigen für die mathematischen Zeitschriften scheint dies unproblematisch zu sein, denn sie verlieren kein weiteres Wort über Frege. Hier zählt einzig die Klarheit des Werkes, mag der Autor noch so unbekannt sein. Anders im Fall der philosophischen Klientel, die zuweilen eher zur Lektüre bewogen werden kann, wenn der fragliche Autor über einen respektablen Leumund verfügt. Hier leistete der Verlag ergänzend den Service einer historiographischen Orientierung: „The little known writer whom Russell is glad to acknowledge as inspiration".[62] Der in den Vereinigten Staaten überaus geschätzte britische Philosoph, der just zum Zeitpunkt der Veröffentlichung dieser Anzeige auch noch mit dem Literaturnobelpreis geehrt wurde, ist für Frege wahrlich die beste Werbung. Die Philosophical Library Publishers agierten jedenfalls überaus erfahren im Umgang mit der Aufgabe, Austins Übersetzung auf dem US-amerikanischen Büchermarkt einen guten Verkaufsstart zu verschaffen. Doch kommen wir zurück auf die englischen Wurzeln der *Foundations*-Ausgabe.

Zusammen mit dem Oxforder Verlag Basil Blackwell verstand es Austin, die richtigen Worte zu finden, um die Übersetzung eines Werkes eines für die weitere Öffentlichkeit immer noch unbekannten Autors zu bewerben. Es ging um die sprachkritische Wende zu Beginn des 20. Jahrhunderts und um Bertrand Russell, der in England wie kein Zweiter diese Revolution in der Philosophie personifizierte. Für viele Briten bildete Russell den Koordinatenursprung, von dem aus man sich die philosophische Weltkarte in fast jede beliebige Richtung hin erschließen konnte. Im Falle Freges führte dies in der Zeit zurück an einen räumlich entfernt liegenden Punkt. „Yet already, before he wrote, a certain obscure German professor, who lived and died without much honour in his own country, had been writing for twenty years and more".[63] Diese Kennzeichnung ziert dieselbe Seite des Schutzumschlages wie Autor- und Titelangabe und dürfte damit bei nicht wenigen Personen, denen der Band eher zufällig in die Hände fiel, umgehend Neugier zum weiteren Stöbern ausgelöst haben. Bereits beim ersten Umblättern muss man als philosophisch Interessierter mit dem Gedanken an einen Kauf gespielt haben, denn im vorderen Klappentext wird sogleich festgestellt, dass es sich bei den *Grundlagen* um die beste Einführung in das Denken des Autors handelt.

> Moreover, it bears the stamp of a philosophical classic. The style is pithy, trenchant, and clear. In 130 pages he tears the heart out of the views of his predecessors and contemporaries, besides exposing and

62. Anzeige (1950b).
63. Frege (1950a), Umschlagtext.

> expounding the nerve of his own entire philosophy. And all this in a way that the non-mathematician can certainly, if he wishes, understand.[64]

So mancher Nichtmathematiker dürfte sich beim Lesen dieser Zeilen tatsächlich angesprochen gefühlt haben. Was den seinerzeit bereits berühmten Sprechakttheoretiker Austin, dessen systematische wie historische Schwerpunkte erst einmal keine Affinität zu Frege nahelegen, dazu veranlasste, eine derart aufwendige, zeitraubende und in ihrem Resultat exzellente Arbeit in Angriff zu nehmen, darüber herrscht keine letzte Klarheit. Michael Dummett, der zur fraglichen Zeit nicht nur Student in Oxford war, sondern dessen Faszination für Frege nach eigener Auskunft[65] durch Austins Übersetzung allererst geweckt wurde, erinnert sich mehr als ein Vierteljahrhundert später, dass „Austin's translation of that book [...] was occasioned by its inclusion, I believe at Austin's suggestion, as one of the texts to be studied for an excellent optional paper in the Oxford Philosophy, Politics and Economics Honours School".[66] Eine ähnlich lautende Erklärung trägt er noch einmal zehn Jahre später vor: „Es kam so, daß Austin damals einen neuen Studienplan einführte, und da konnte man einen Kurs mit dem grotesken Namen »Grundlagen der modernen Erkenntnistheorie« belegen, der beim *Theaitetos* anfing und bei Freges *Grundlagen* aufhörte. Zu diesem Zweck hat Austin die *Grundlagen* übersetzt".[67]

Bezeugt ist, dass Austin seine Übersetzung Anfang der 1950er Jahre für mindestens ein Trimester zur Lektüregrundlage seiner handverlesenen Samstagmorgen-Treffen machte[68] und unstrittig ist auch, dass die Universität Oxford bereits in den 1940er Jahren den neuen Studiengang „Politics, Philosophy and Economics" eingeführt hat, der sich schnell einer wachsenden Beliebtheit erfreute und für den das entsprechende Veranstaltungsangebot nachgebessert werden musste. Keineswegs selbsterklärend ist es jedoch, dass ein Hochschullehrer, der für einen neuen Kurs im Rahmen eines noch vergleichsweise jungen Studiengangs zuständig ist, sogleich ein ganzes Werk druckreif übersetzt, das weder die ureigenste Forschung noch die philosophische Tradition der hiesigen Universität berührt, nur damit die britischen Studierenden über einen vollständigen Reader in ihrer Muttersprache verfügen, dessen curricularer Schlussteil auch noch bei einem der führenden englischen Verlage für Philosophie erscheint. Es klingt zu schön, um wahr zu sein – zumal Dummett seine Erinnerungen über etwas weit Zurückliegendes bemühen muss, auch wenn es für ihn ein Schlüsselerlebnis in seinem akademischen Leben gewesen sein mag. Es wäre nicht das erste Mal gewesen, dass ein Gelehrter manch autobiographischen Zug nachträglich verklärt. Fraglos waren die frühen 1950er Jahre für

64. Frege (1950a), Innenklappentext.
65. Dummett (1978), xxiii.
66. Dummett (1978), xxiv.
67. Dummett (1988), 166.
68. Warnock (1973), 36.

Dummetts intellektuelle Entwicklung überaus prägend, die ihn rasch derart umfassend für Frege vereinnahmten, so dass er etwa am 12. September 1952, drei Wochen nachdem Gilbert Ryle seine ausführliche Besprechung des *Translations*-Bandes[69] vorgelegt hatte, am selben Ort in einem öffentlichen Brief grundlegende Fehler des Rezensenten im Umgang mit Freges Semantik beanstandete.[70] Der junge Fellow repräsentiert eine neue Generation von Frege-Forschern, es ist die Generation, für die Frege von Anfang an kein Unbekannter mehr ist.

Tatsächlich kann Dummetts Selbstauskunft in ihren grundlegenden Zügen allerdings bestätigt werden. William Kneale, der langjährige Kollege Austins in Oxford, der diesem auch für kurze Zeit als White's Professor of Moral Philosophy nachfolgen sollte, gibt bereits im Jahr des Erscheinens von Austins Übersetzung Auskunft über den veranlassenden Grund: „Like the recent reprint of Boole's *Mathematical Analysis of Logic*, this edition was originally planned to meet the needs of Oxford undergraduates who are studying the Origins of Modern Epistemology".[71] Damit ist klar: John Austin übersetzt die *Grundlagen*, weil die Oxforder Studienordnung von P.P.E. für den Kurs „Ursprünge der modernen Erkenntnistheorie" dies erforderlich erscheinen lässt und schafft damit für die internationale Fregeforschung einen Standard, obwohl Frege in der Oxforder Philosophie bis dato überhaupt keine erwähnenswerte Rolle gespielt hat. Selbst Peter Strawson, der später eine beeindruckende metaphysische Ausdeutung der Begriff-Gegenstand-Unterscheidung leisten sowie zu einem großen Bewunderer Freges werden sollte und der in den 1940er Jahren in Oxford P.P.E. studierte, bekennt ehrlich, er war zu dieser Zeit „completely ignorant of the work of that great figure".[72] In den philosophischen Kursen des P.P.E.-Studiums finden Freges Publikationen bis Ende der 1940er Jahre offensichtlich keinerlei Berücksichtigung.

Es bleibt also klärungsbedürftig, weshalb der fragliche Kurs überhaupt Frege als Topos umfassen sollte. Eventuell – aber das ist für den Moment nicht mehr als eine indiziengestützte Hypothese – ist das erwachende Interesse an Frege auf die Präsenz und das Wirken William Kneales zurückzuführen, der zusammen mit seiner Frau Martha in Oxford bereits seit 1947 an ihrer beider Opus magnum, *The Development of Logic*, gearbeitet hat und dessen ungebrochener Enthusiasmus für Freges Errungenschaften jedermann in seinem akademischen Umfeld bekannt gewesen sein dürfte. Manifest wird dies durch die endgültige Architektonik ihrer großen, gut zweieinhalbtausend Jahre umfassenden Logikgeschichte, was auch einzelnen Rezensenten nicht entgeht: „However, the place of honour in the revival of logical

69. Siehe 2.3.
70. Dummett (1952).
71. Kneale (1950), 395.
72. Strawson (1998), 7.

studies in modern times is rightly accorded to Gottlob Frege. It is significant that Frege's name appears in the titles of four consecutive chapters".[73] Frege ist neben Aristoteles der einzige, dem ein eigenes Kapitel dediziert ist und im Unterschied zu Aristoteles werden auf den nachfolgenden fast 200 Seiten durchweg Entwicklungen „after Frege" dargestellt. „Frege's work [...] contains all the essentials of modern logic, and it is not unfair either to his predecessors or to his successors to say that 1879 is the most important date in the history of the subject".[74] Vielleicht war es tatsächlich William Kneales beeindruckende Autorität auf dem Gebiet der Geschichte der Logik, die auch andere zur ernsthaften Beschäftigung mit Freges Werk inspiriert hat. Für seine Kollegen war es jedenfalls unschwer zu erkennen, dass er den Leistungen des Jenenser Mathematikers einen epochalen Charakter beimaß. „His works are still worth reading for their own sake; and unless our Universities and libraries are all destroyed by war, his achievement in setting out the first complete system of formal logic should be remembered by a few people for a few thousand years".[75]

Neben der Unmittelbarkeit seiner historiographischen Bildung gibt es jedoch noch ein weiteres Indiz dafür, dass Kneale an der Aufnahme Freges in den Oxforder Kanon der Philosophie nicht ganz unbeteiligt gewesen ist. Als einziger der sieben Rezensenten der Austin-Edition stellt er explizit die Frage: „Why should students of philosophy read Frege now?".[76] Was dies erwähnenswert macht ist der Umstand, dass $^2/_3$ seiner *Mind*-Besprechung der Beantwortung dieser Frage gewidmet ist, d.h. William Kneale diskutiert Austins Übersetzungsleistung sowie den Inhalt der *Grundlagen* vor dem Hintergrund von Bildungsempfehlungen für das Philosophiestudium. In einer mehrgliedrigen Argumentation legt er dar, dass Frege in jeder epistemischen Hinsicht für Studierende ein Vorbild repräsentieren sollte. Nicht nur, dass die durch ihn inaugurierte logizistische Grundlagenforschung zu einem hoch interessanten Topos in der Philosophie geworden ist, sie hat auch zu einer großartigen systematischen Entwicklung der Logik beigetragen. Wenn wir Freges *Grundlagen* studieren, dann machen wir uns mit einem jener Texte vertraut, die diese Entwicklungen ermöglicht haben. Neben diesem problemgeschichtlichen Bewusstsein lohnt die Lektüre aber auch aus argumentationstheoretischen Gesichtspunkten, denn inhaltlich sind seine Beiträge zudem von bleibendem Interesse, weil die Kritik an seinen Gegnern stets mit Brillanz und Entschiedenheit geführt wird. Und schließlich ist „Frege's style of exposition [...] a model for all who think and write about abstract topics. Whether he was right or wrong, he was never lacking in subtlety, and he always said what he meant with clarity and for-

73. Lejewski (1965), 83.
74. Kneale/Kneale (1962), 511.
75. Kneale (1956a), 40.
76. Kneale (1950), 396.

ce".[77] Das Erfordernis einer curricularen Berücksichtigung Freges ist damit nicht mehr von der Hand zu weisen.

Dass mit Freges *Grundlagen* jedoch jener Kurs beschlossen wird, der nach der Auskunft von Dummett mit Platon beginnt, wird im Ansatz verständlich, wenn man auf Kneales Zwischenbemerkung achtet, dass die logizistische Grundlagenforschung unabhängig von ihrem Gelingen auf ihre Weise ebenso bedeutsam ist wie Platons Ideenlehre.[78] Geht man nach dieser Bemerkung, so erfolgte die Textauswahl für den P.P.E.-Kurs »Origins of Modern Epistemology« nach dem Kriterium höchster philosophiehistorischer Bedeutsamkeit. Platon und Frege gehören in denselben Kurs, wenn der problemgeschichtliche Streifzug durch die Wurzeln unserer zeitgenössischen Erkenntnistheorie besonders bedeutsame Texte aus allen Epochen und Zeiten zu berücksichtigen hat. Dass Platon in der Mitte des 20. Jahrhunderts diesen Rang immer noch innehat, dazu bedurfte es gerade in Oxford überhaupt keiner Überredungskunst. Dass allerdings auch Frege dazu gehört, mit dem diese curriculare Reihe der großen philosophischen Autoren auch noch beschließt, dazu hatte man in Oxford William Kneale. Sollten diese Überlegungen zutreffen, so verbleibt nichts Mysteriöses an der Textkomposition.

Ein Fragezeichen hat davon unabhängig Bestand. Warum gerade John Austin die anspruchsvolle Rolle des Übersetzers eingenommen hat, ist nach wie vor der Klärung bedürftig. Nicht zustimmungsfähig scheint jedenfalls Strolls Erklärung, der gemäß Austin über Wittgensteins *Tractatus* sein besonderes Interesse an den *Grundlagen* entwickelt hat. Das durch Frege inspirierte Verständnis einer wohlgeformten idealen Sprache im *Tractatus* „continued to survive as a whipping boy among the philosophers sharing Wittgenstein's newer views. In studying the implications of this notion, they were led back, through the *Tractatus*, to some of its sources in Frege. It is this tendency which explains the emphasis put upon Frege's work by ordinary language philosophers, such as J. L. Austin".[79] Einmal ganz davon abgesehen, dass aus einzelnen sprachphilosophischen Gemeinsamkeiten zwischen dem späten Wittgenstein und Austin noch keine intellektuelle Gemeinschaft oder gar Gefolgschaft wird (zumal fraglich ist, wie umfangreich tatsächlich die Prägung Austins durch Wittgenstein war), bietet Stroll nicht mehr als eine retrospektive Erklärung an, die darüber hinaus auch noch äußerst tentativ ist. In Kenntnis der wissenschaftsbiographischen Rahmendaten scheint es sogar fragwürdig, ob die *Tractatus*-Lektüre in der intellektuellen Entwicklung Austins überhaupt eine nennenswerte Rolle gespielt hat, die dann auch noch im besonderen Ausmaß ein Interesse an Frege induziert haben soll. Wir kennen Austin zwar

77. Kneale (1950), 397.
78. Kneale (1950), 396.
79. Stroll (1966), 77.

vor allem durch seine Beiträge als Sprachphilosoph, aber es empfiehlt sich nicht, einen Philosophen wie ihn, der seit den Anfängen seiner akademischen Ausbildung stets Wert auf eine klassische philosophische Bildung gelegt hat und vor allem ein großes Interesse an philosophischen Werken früherer Epochen pflegte, auf die eindimensionale Standardnarration in der Entwicklungsabfolge der jüngeren Sprachphilosophieverständnisse einkürzen zu wollen. Hier wird schlicht unter Verwendung nachträglich verfügbarer philosophiehistorischer Klassifizierungen (und damit Simplifizierungen) ein Bild gezeichnet, dessen empirische Adäquatheit fraglich scheint. Eine informative Einleitung durch den Herausgeber Austin hätte dem Band aus dem Blickwinkel unserer heutigen Interessen durchaus gut gestanden. Gelungen ist er freilich trotzdem.

Doch nicht nur Austins Übersetzung wurde mit beeindruckender Fürsorge durch den Oxforder Verlag Basil Blackwell publiziert. Auch die zweite der oben angesprochenen wegweisenden Editionen erschien ebendort zwei Jahre später, aufgrund derer nicht zuletzt die „Students of mathematical logic owe a great debt to the publisher for his courageous venture“.[80] Dass sich der Verlag auf dieses „Wagnis“ eingelassen hat, lässt sich sicherlich auch mit den durchweg begeisterten Reaktionen auf den *Foundations*-Band erklären. So gab es bereits im Zuge der anerkennenden Rezensionen zur *Grundlagen*-Übersetzung Stimmen, die sogleich nach der Möglichkeit weiterer Übersetzungen gefragt haben. William Kneale wagte in seiner Besprechung der Austin-Edition zwar nicht von weiteren Übersetzungen zu träumen, wohl aber ließ er leise die Hoffnung anklingen, „we may at least look forward to a volume of selections which will include some of the articles he contributed to obscure periodicals“.[81] Keine zwei Jahre später sollte sie bereits erfüllt werden – und das auch noch in englischer Übersetzung.

2.3 „few have been induced to consult his own works“

1952 erscheinen schließlich die *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, mit denen einer englischsprachigen Leserschaft die besonders bedeutsamen logischen Essays von Frege zugänglich gemacht werden sollen, die seit langem in verschiedenen deutschsprachigen, zum großen Teil inzwischen nicht mehr existenten Zeitschriften vergraben sind.[82] Verlag und Herausgeber, die mit nicht weniger als zehn ausgezeichneten Rezensionen und einer immerhin guten belohnt werden sollten, bewarben die Anthologie mit dem großen Gegensatz, welcher der Biographie von Freges Werk inhärent ist:

80. Goodstein (1953), 143.
81. Kneale (1950), 397.
82. Geach/Black (ed.), v.

> Nobody since Aristotle has contributed more than Frege to the technique and philosophy of logic. Up to now, however, Frege's influence has been largely indirect, [...] few have been induced to consult his own works.[83]

Mit Ausnahme einzelner Passagen aus dem ersten Band der *Grundgesetze*, die man von Jourdain und Stachelroth übernahm,[84] wurden alle anderen Texte, im Besonderen die zu diesem Zeitpunkt bereits wertgeschätzten drei Aufsätze aus den Jahren 1891/92 übersetzt von Peter Geach und Max Black. Ihre gut definierten Auswahlkriterien ermöglichten eine relativ zur Austin-Edition überzeugende Komplementarität, so dass nunmehr in summa bei Basil Blackwell eine veritable Werkauswahl von Frege in Übersetzung verfügbar war, für die man auch in England selbstbewusst Werbeanzeigen schalten konnte.[85] Der Geach/Black-Band „had a perfectly clear rationale in 1952".[86] Allein durch die Auswahl der publizierten Texte und Textauszüge, mit der nunmehr „the physiognomy of a great ancestor"[87] sichtbar gemacht werden konnte, wurde ohne jeden Zweifel dargelegt, dass es sich um einen Autor von höchster Aktualität handelt. „It is a measure of Frege's importance as a logician (and a justification of the present volume) that none of the matter contained in these selections is of purely historical interest".[88] Dabei war es für die beiden Herausgeber anfangs gar nicht so einfach, zur Bestimmung der Anthologie alle erforderlichen Originaltexte verfügbar zu bekommen. Es ist bezeichnend und mag vielleicht gerade deshalb als ein kleiner symbolischer Wendepunkt in der Fregeforschung angesehen werden, dass Geach und Black, die einen Querschnitt aus Freges Schriften für eine internationale Leserschaft sowohl sprachlich als auch verlegerisch zugänglich machen wollten, selbst noch mit den handfesten Problemen aus der ersten und zweiten Phase der Fregerezeption zu kämpfen hatten. Entsprechend dankbar stellen sie im „Vorwort" heraus: „Professor Ryle and Lord Russell have been most helpful by lending works of Frege that were otherwise almost unobtainable".[89]

Im Unterschied zu Austin ist es in ihrem Fall nicht sonderlich schwer zu erklären, weshalb sie das Projekt für einen derart beeindruckenden Band verfolgt haben. Black, der bereits vier Jahre zuvor die erste englische Übersetzung von „Über Sinn und Bedeutung" angefertigt hatte (s.o.), entdeckte schon früh während seines Studiums an der Universität Cambridge in den späten 1920er Jahren seine

83. Geach/Black (ed.), Umschlagtext.
84. Siehe 3.4.
85. Vgl. Anzeige (1951a), (1951b), (1952).
86. Parsons (1981), 871. So auch Dummett (1980).
87. Thomas (1952).
88. Henderson (1954), 184.
89. Geach/Black (ed.), v.

Leidenschaft für die Philosophie der Mathematik. Während dieser Zeit hat vor allem Russell einen prägenden Einfluss auf ihn, der noch deutlich erkennbar ist in der 1933 veröffentlichten Studie *The Nature of Mathematics*, deren eines Hauptanliegen in einer kritischen Darstellung des Projektes der *Principia Mathematica* besteht. Bereits zu diesem frühen Zeitpunkt ist er in Kenntnis über die ausgezeichnete Rolle, die Frege als Wegbereiter und Vorläufer für die *Principia* gespielt hat.[90] Wie bereits andere vor ihm kommt auch Black zu der Einschätzung, dass Freges Begriffsschrift-Kalkül einen „clumsy symbolism"[91] besitzt, der verhindert hat, dass ihm die Anerkennung zu Teil wurde, die er verdient gehabt hätte. In diesem Punkt sind sich alle einig, die maßgeblich an der Verwirklichung von Freges „Weltkarriere" beteiligt waren. Blacks früher, um 1930 einsetzender biographischer Kontakt mit Frege scheint sich jedoch vornehmlich auf die Auseinandersetzung mit den logischen und logizistischen Schriften im engeren Sinne beschränkt zu haben, denn die publizistische Auseinandersetzung mit dem „Urtext der modernen Semantik"[92] setzt erst eineinhalb Jahrzehnte später ein. Nachdem Alonzo Church in der Aufarbeitung einer bedeutungstheoretischen Debatte der Zeit, an der Black maßgeblich beteiligt war, und unter Verwendung der zentralen Einsichten aus „Über Sinn und Bedeutung" einen leistungsstarken Auflösungsvorschlag für das diskutierte Problem präsentiert hatte, wendeten sich die Protagonisten dem Studium dieses Textes zu.[93] Es ist also gut möglich, dass Blacks umfassenderes Interesse an Frege, wie es sich schließlich in der gelungenen Textkomposition der *Translations*-Edition zu erkennen gibt, nicht zuletzt durch Church inspiriert wurde.

Während Black über Russell Bekanntschaft mit Frege machte, entdeckte ihn Geach mehr als ein Jahrzehnt später über den *Tractatus*. Dessen erste Lektüre fand wohl bereits vor 1941 statt,[94] doch es waren vor allem die späten 1940er Jahre, in denen Geach mit dem eingehenden Studium der „great works of Frege"[95] begann. Bereits vor Austins Übersetzung der *Grundlagen* widmete er sich diesem Text, wobei seine eingehende Lektüre begleitet wurde durch das Anfertigen einer eigenen Übersetzung, mit der er Tag für Tag sein Verständnis für das Werk trainierte. „All the time my enthusiasm for Frege grew".[96] Obgleich er (nach eigener Auskunft[97]) zu dieser Zeit das Deutsche noch nicht sonderlich gut beherrschte, scheint sich dies bis zum Erscheinen der Austin-Edition gründlich verändert zu haben, denn bereits im Juli

90. Black (1933), 8.
91. Black (1933), 18.
92. Bartlett (1961), 14.
93. Da diese Episode in den Kontext von Churchs Rezensionstätigkeit fällt, kommen wir hierauf in 5.3.2 zu sprechen.
94. Geach (1991), 14.
95. Geach (1991), 16.
96. Geach (1991), 16.
97. Geach (1991), 16.

1950 umfasst die *Mind*-Rezension von William Kneale eine von Geach angefertigte Corrigenda-Liste der Übersetzung,[98] die eine ähnlich souveräne Beherrschung der deutschen Sprache voraussetzt wie sein im Oktober 1951 erschienener Aufsatz „Frege's *Grundlagen*".[99] Die Resultate lassen ohne Zweifel darauf schließen, dass Geachs Studium der *Grundlagen* Ende der 1940er Jahre überaus intensiv und fruchtbar gewesen sein muss. Schließlich machte ihn dieses darüber hinaus hungrig auf die anderen Werke Freges, die er sich zum Teil aus der Universitätsbibliothek in Cambridge entlieh, zum Teil aber auch von Russell und Gilbert Ryle borgte.[100] Dieses sich über die *Grundlagen* hinaus entwickelnde Interesse manifestiert sich in den frühen Jahren besonders in Geachs Faszination für einen Topos, der um Freges dritten Grundsatz „der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten"[101] anzusiedeln ist. Ausgehend von der Analyse der einschlägigen *Grundlagen*-Paragraphen wird Geach auf das eingehende Studium von „Ueber Begriff und Gegenstand" und die dort vollzogene kategoriale Betrachtung des Logischeinfachen geführt, die er wahrscheinlich noch zusammen mit dem ebenfalls vom Text faszinierten Wittgenstein umfassend besprochen hat.[102] Die Spuren sind unübersehbar, denn 1950 legt Geach mit „Subject and Predicate" eine eigene sprachphilosophische Untersuchung der Unterscheidung vor, die zwar bei Weitem nicht den fundamentalen Charakter von Freges Ausdeutung erreicht, die sich aber terminologisch von dieser merklich beeinflusst zeigt. „The writers that I have found most useful are Aquinas and Frege".[103] Im Jahr darauf führt die bereits durch Geachs Forschung vollzogene englischsprachige Auseinandersetzung mit „Ueber Begriff und Gegenstand" folgerichtig zur ersten vollständigen Übersetzung des Textes,[104] die von niemand anderem als von Max Black korrigiert wurde. Bereits vor seinem Wechsel an die Universität Birmingham 1951 und damit während seiner Untersuchungen zur Subjekt-Prädikat-Unterscheidung begann nicht nur die nach außen hin sichtbare Zusammenarbeit mit Black, sondern auch die Arbeit an ihrem gemeinsamen Band. Die hierbei treibende Motivation war exakt dieselbe, die wenige Jahre zuvor Max Black dazu bewogen hatte, „Sense and Reference" anzufertigen:

> The logical and mathematical writings of Gottlob Frege are gradually emerging from undeserved neglect. After a lapse of half a century, it is becoming generally recognized that his views on topics of fundamental importance in the foundations of mathematics and the philosophy of

98. Kneale (1950), 395f.
99. Geach (1951), passim.
100. Geach (1991), 16.
101. Frege (*GLA*), X.
102. Siehe 3.1.
103. Geach (1950), 461.
104. Frege (1951).

> symbolism deserve very serious attention. And many feel that where Frege's judgment differs from the more generally received doctrine he is more likely to be right than his opponents. This process of revaluation would be hastened if Frege's writings were more generally accessible.
>
> It has therefore seemed worthwhile to translate his famous paper on "Sinn und Bedeutung".[105]

Diese Passage ist charakteristisch für den nunmehr einsetzenden Übersetzungsbetrieb. Hatte man sich bis dato fast vornehmlich damit beholfen, Bezüge auf Frege frei zu paraphrasieren oder Zitateerfordernisse durch eigene partielle Übersetzungen zu bewerkstelligen, so ist Ende der 1940er Jahre klar, dass im Falle Freges die Sprachbarriere ein für allemal zu Gunsten des Englischen zu überwinden ist. Blacks Motiv, das in seinem Anliegen auf die Zukunft hin ausgerichtet ist, enthält allerdings auch den wertvollen, auf die Vergangenheit gerichteten Hinweis, der mit den Worten beginnt „it is becoming generally recognized". Es lohnt daher, seine Argumentation noch einmal in Standardform zu fassen:

1. Freges Schriften wurden für gut ein halbes Jahrhundert so gut wie überhaupt nicht rezipiert.
2. *Es ist inzwischen allgemein anerkannt*, dass seine Resultate für die Logik und Grundlagen der Mathematik von fundamentaler Bedeutsamkeit sind, weshalb sie eine professionelle Berücksichtigung finden müssen.
3. Selbst dort, wo wir heute von Frege abweichen, bedürfen wir zum Zweck der seriösen Neubewertung seiner Einsichten seiner Schriften und diese müssen weithin zugänglich sein.
4. Folglich ist es dringend geboten, Freges Schriften in internationaler Sprache in hinreichend großen Auflagen verfügbar zu machen.

Blacks Rechtfertigung seiner Übersetzungstätigkeit lässt also unzweifelhaft erkennen, dass 1948 Freges wegweisende Rolle zumindest in den benannten Bereichen bereits weithin anerkannt war, wenngleich durch die „Introductory Note" nicht mit letzter Sicherheit klar wird, auf welche Jahrzehnte genau sich die Bemerkung „after a lapse of half a century" bezieht. Ein späteres Datum als die Jahrhundertwende kommt als Beginn des benannten Zeitraums und in Kenntnis der Zeit der Niederschrift der zitierten Gedanken freilich nicht in Frage. Doch selbst die späten 1890er Jahre wären als Anfang nicht nur willkürlich gewählt, sondern es bliebe klärungsbedürftig, wie dann innerhalb kürzester Zeit allgemeine Einigkeit über Frege hätte

105. Black (1948), 207.

hergestellt werden können. Sofern wir den Beginn des fraglichen halben Jahrhunderts mit dem Anfang von Freges Publikationstätigkeit zur Logik identifizieren dürfen (1879), dann endet die Phase des Rezeptionsversäumnisses nicht nur um 1930, sondern dies korrespondiert auch exzellent mit jenen Einsichten, die zu der von uns vorgeschlagenen Dreiteilung der rezeptionsgeschichtlichen Phasen geführt haben.[106] Da in Folge der Veröffentlichung der *Begriffsschrift* und trotz der um 1880 erfolgten Buchbesprechungen nicht wirklich von einer regen Rezeptionstätigkeit gesprochen werden kann, an deren Status sich auch nichts grundlegend durch die Veröffentlichung der *Grundlagen* 1884 verändert hatte, darf 1948 und damit retrospektiv durchaus plakativ von einem Rezeptionsversäumnis gesprochen werden. Black scheint sich also mit dem Beginn dieses halben Jahrhundert auf das symbolträchtige Jahr 1879 zu beziehen.

Wir interessieren uns nachfolgend also für die Zeit vor 1948 und nach (ca.) 1930, womit wir das Zeitfenster, innerhalb dessen Freges Weltruhm begründet wurde auf gut zwei Jahrzehnte eingeschränkt haben. Wir blenden damit die Zeit ab Mitte des 20. Jahrhunderts aus unseren nachfolgenden Betrachtungen weitgehend aus, denn mit Erscheinen der beiden wegweisenden Editionen ist klar, dass „Frege von allen Denkern der mathematischen Logik zweifellos der bedeutendste“[107] ist, „the name of Frege has become one of the most honoured in the history of mathematics“.[108] Für die Fachgelehrten wird dies mit jedem weiteren Detail, das in dieser Zeit über sein Werk bekannt wird, immer unstrittiger. „Frege occupies a significant place in the recent development of logic“.[109] Im Denken dieses „extraordinarily subtle mind“[110] vollzog sich der Übergang zwischen zwei Epochen der Mathematik, in seinen Arbeiten stießen die mathematischen Probleme des 19. Jahrhunderts auf jene des nachfolgenden Centenniums.[111] Seinen *Grundlagen der Arithmetik*, nunmehr international rezipiert, kommt ein „epochal character“[112] zu, „capable of standing comparison with Euclid's *Elements*“[113] und die beiden Bände der *Grundgesetze der Arithmetik* werden inzwischen „widely recognized as one of the few classical works of decisive importance in the development of mathematical logic“.[114] Unbestreitbar ist Frege der „größte Logiker unserer Zeit“,[115] in ihm „is to be found a philosophical intelligence of the very highest order“.[116]

106. Siehe den ersten Abschnitt.
107. Bocheński (1956), 314.
108. McCrea (1951), 178.
109. Maziarz (1952), 92.
110. Bell (1940), 258.
111. So u.a. Bell (1940), 258.
112. Thomas (1950).
113. Goodstein (1953), 141.
114. Black (1950), 77.
115. Łukasiewicz (1935), 125.
116. Linsky (1953), 343.

Spätestens Mitte des 20. Jahrhunderts ist Frege also weltberühmt, viele seiner Resultate und scharfsinnigen Argumentationen genießen die höchste Wertschätzung. Seine außergewöhnliche Rolle in der Begründung der modernen formalen Logik, der mathematischen Grundlagenforschung, der Entwicklung der modernen Semantik sowie der Wegbereitung der sprachkritischen Wende ist unbestritten und gehört zu den großen Leistungen der abendländischen Wissenschaftsgeschichte. Sein Wirken wird zum Vorbild, seine Haltung legendär. Bertrand Russell, seit 1950 Literaturnobelpreisträger und selbst eine philosophische Ikone des Jahrhunderts, gesteht eine Dekade später im Alter von 90 Jahren: „As I think about acts of integrity and grace, I realize that there is nothing in my knowledge to compare with Frege's dedication to truth".[117]

3 „our chief debt is to Frege"

Dass Max Black über Bertrand Russell und Peter Geach über Ludwig Wittgenstein die Werke Freges kennengelernt haben, deren begeistertes Studium beide zur wegweisenden *Translations*-Edition führte, steht nicht im Widerspruch zur Behauptung, dass weder Russell noch Wittgenstein rezeptionsgeschichtlich Freges Weltruhm begründet hat. Der akademische Einfluss der beiden auf Black bzw. Geach beförderte zwar mittelbar die Möglichkeit einer standardsetzenden Ausgabe, welche die Fregeforschung auf ein neues Niveau führen sollte und die sich als Werkzeug unverzichtbar machte. Zum Zeitpunkt der Arbeit an der *Translations*-Edition war Freges Stern aber bereits international aufgegangen.

Wenn wir uns in diesem Abschnitt der Frage zuwenden, warum Frege weder über das Wirken von Russell noch jenes von Wittgenstein oder Carnap internationale Bekanntheit erlangte, obwohl alle drei von Frege wesentlich geprägt zu den einflussreichsten Philosophen des 20. Jahrhunderts zählen, dann müssen wir uns vergegenwärtigen, dass dies unter einer historischen Epoché zu erfolgen hat. Wir dürfen bei den Schriften dieser Drei nicht aus heutiger Perspektive die Frage beantworten wollen, welche Frege-induzierten Unterscheidungen, Definitionen, Argumentationen oder Beweisheuristiken in ihnen aufgewiesen werden können bzw. welche Textpassagen sich als *loci classici* für die Fregeforschung erwiesen haben. Dies benutzt bereits ein umfassendes Wissen zu Frege, dessen selbstverständliche Verfügbarkeit wir jenem Zustand verdanken, dessen Herbeiführung allererst zu klären ist. Unsere historische Epoché führt uns somit auf die Frage, welcher dieser drei Autoren mit welchem Text bzw. welchen Texten einen derart großen Einfluss ausübte, dass eine Vielzahl von Personen auf die Befassung mit Frege

117. Russell (1962), 127.

geführt wurde. Unstrittig ist, dass alle drei das Werk Freges ausgezeichnet kannten und von diesem eminent profitierten. Die Frage ist, was haben sie davon vor seinem Bekanntwerden und eindeutig auf Frege bezogen publizistisch zu erkennen gegeben?

3.1 „How I envy Frege!"

Am einfachsten ist die Sachlage bei Wittgenstein, der nicht nur in seinen eigenen Schriften sparsam mit Verweisen auf die Leistungen Dritter umgegangen ist, sondern bei dem für den fraglichen Zeitraum auch einzig sein Frühwerk *Tractatus logico-philosophicus* in Frage kommt. Ausnahmslos alle anderen philosophischen Schriften, in denen Fregesche Gedanken aufgegriffen oder Fregesche Stilelemente gepflegt werden, erschienen erst nach Wittgensteins Tod und damit ebenfalls nach dem für uns interessanten Zeitfenster. Zwar hält er an der exponierten Stelle des „Vorwortes" zum *Tractatus* unmissverständlich fest, dass er neben den Arbeiten Russells den „großartigen Werken Freges" einen beachtlichen Teil der Anregung für seine eigenen Gedanken schulde.[118] Gleichwohl ist dieses Lob, mit dem tatsächlich eine tief empfundene Wertschätzung durch den Autor zum Ausdruck gebracht wird, aber derart allgemein gehalten, dass es für einen potentiell Frege-affinen Leser nur bedingt informativ ist. Auch lässt die Architektur des *Tractatus* weder eine eingehende Behandlung Fregescher Topoi noch das Anführung präziser Quellenangaben zu, letzteres sehr zum Unbehagen der beiden Gutachter im Promotionsverfahren. Lediglich an wenigen Stellen bezieht sich Wittgenstein unbestimmt auf Frege und Russell. Gesteht man zu, dass im vorliegenden Fall das „Vorwort" nicht einmal zum systematisch interessanten Textkorpus zählt, dann enthält der *Tractatus* überhaupt keine Passagen, mit denen Freges Werk explizit beworben werden würde, weder im Rahmen einer zustimmenden Rekonstruktion noch einer kritischen Analyse noch eines problemgeschichtlichen Bezuges.

Das spiegelt sich auch im Schrifttum des Logischen Empirismus wider, der immerhin für sich beansprucht, nicht nur die *Tractatus*-Einsichten methodologisch massiv verwendet zu haben, sondern sich auch ansonsten philosophiehistorisch beeindruckend informiert gibt. Da es um 1930 wahrscheinlich keinen anderen Ort in der akademischen Welt gegeben hat, an dem ein derart hochkarätig besetzter Kreis an Philosophen auf intensivste Weise jeden Nebensatz des *Tractatus* bis auf seine grammatische Struktur hin ausgeleuchtet hat, würde es nicht überraschen, wenn Frege und damit eine der beiden maßgeblich einflussnehmenden Gestalten im Hintergrund der Textgenesis durch diese exegetische Analyse gleich mit erschlossen

118. Wittgenstein (1919), 9.

werden würde. Es mag also durchaus sein, dass Wittgenstein Frege zwar nicht unmittelbar durch die erforderliche Explizitheit im *Tractatus* berühmt gemacht hat, eventuell aber mittelbar über die verborgenen Frege-induzierten Impulse in seiner philosophischen Frühschrift, die durch die Philosophie des Logischen Empirismus in die akademische Welt hinausgetragen wurden.

Mannigfaltig trifft man in diversen Veröffentlichungen auf die wertschätzende Erwähnung von Freges Namen, die in ihrer deutlichsten Form „Der Wiener Kreis verdankt seine stärksten Anregungen Mach, Poincaré, Einstein, Frege, Russell und Wittgenstein“[119] lautet, doch handelt es sich dabei stets um das strategische Bemühen, die Philosophie des Wiener Kreises problemgeschichtlich korrekt zu verorten. Schließlich handelt es sich Anfang der 1930er Jahre um eine noch junge Strömung, die mit fast überzogenem Ehrgeiz die kategoriale Abgrenzung sucht, vor allem relativ zu den etablierten großen Strömungen in Deutschland. Man sieht sich in der Tradition der formalen, nicht der transzendentalen Logik; man betreibt logische Analyse der Sprache und keinesfalls ontologische Metaphysik; man vertritt einen weltzugewandten Empirismus und keinen weltabgewandten Rationalismus usw. Die Bezugnahme auf Frege ist damit genauso geboten wie jene auf Russell, Peano, Locke, Hume, Mach, Avenarius und viele andere und vor allem einen: Wittgenstein. Entsprechend häufig bilden die namentlichen Bezugnahmen auf Frege den Bestandteil einer ganzen Batterie von philosophischen Namen. Der einzelne Wissenschaftler geht hierbei häufig unter, wenn im Staccato des zuweilen inflationär anmutenden „Namedroppings“ Name auf Name folgt. Ohne hier ins bibliographische Detail gehen zu müssen, sei schlicht auf eine der Programmschriften verwiesen,[120] in denen gleich mehrere Duzend Wissenschaftler als Vor- und Wegbereiter des Logischen Empirismus aufgeführt werden. In dieser Masse geht Frege ebenso unter wie die meisten anderen angeführten Namen. Selbst im Fall der thematischen Befassung mit dem Logizismus bzw. der modernen formalen Logik, bei der sich für die logischen Empiristen zwanglos die Möglichkeit einer angemessenen Wertschätzung einstellen würde, wird Frege doch nur als Vor- und Wegbereiter für die eigentliche Bezugsgröße, Russell, verstanden.[121] Vorgestellt werden die *Principia*, nicht die *Grundgesetze*, der erwähnenswerte Logizismus ist der von Whitehead-Russell und symbolisch geht die verwendete Notation auf Peano zurück. Freges Werk wird nicht nur nicht beworben, es wird auch hier fast vollständig ausgeblendet. Dass Frege überhaupt Erwähnung findet, verdankt sich dem Umstand, dass eine Unterlassung andernfalls an Geschichtsfälschung gegrenzt hätte. Um diese Zwischenbetrachtung zu resümieren: Der Logische Empirismus hat

119. Neurath (1930/31), 312.
120. Carnap/Hahn/Neurath (1929), passim.
121. Etwa Carnap (1930), (1930/31), (1931), (1939); Gödel (1931).

weder aus eigenem Antrieb Frege bekannt gemacht noch wurde er in der Verwendung von Freges Werk entscheidend beeinflusst von Wittgenstein, weil die *Tractatus*-Lektüre dies gar nicht befördert hat.

Unbestritten ist heute Wittgensteins Bewunderung, die er für Frege empfand. Im Unterschied zu seinem Verhältnis zu Russell verehrte er ihn zeitlebens und suchte stets nach einer Möglichkeit für ein Wiedersehen. Allein vor dem ersten Weltkrieg besuchte er ihn mindestens drei Mal in Jena und wahrscheinlich ein weiteres Mal während Freges Urlaubszeit in dessen Mecklenburgischer Heimat, zumindest sind Frege die gemeinsamen „Spaziergänge in Jena und Brunshaupten [...] noch immer in schöner Erinnerung".[122] Ein Wiedersehen während Wittgensteins Fronturlaub im Sommer 1917 in Wien kam indes nicht zustande, weil Frege schweren Herzens aus gesundheitlichen Gründen absagen musste. „Sehr schwer wird es mir, Ihrer liebenswürdigen Einladung nicht zu folgen, aber noch schwerer, ihr zu folgen".[123]

Als der 22jährige Wittgenstein im Herbst 1911 nach Cambridge reist, um kurzentschlossen und ohne jede Vorbereitung bei Russell, im Besonderen die Grundlagen der Mathematik zu studieren, lag sein erstes Treffen mit Frege wahrscheinlich bereits hinter ihm. Trotz einiger anders lautender Darstellungen ist es durchaus plausibel, dass er während seiner Tätigkeiten als Ingenieur in Manchester auf Frege aufmerksam gemacht wird. Er widmet sich mit Begeisterung dem eingehenden Studium seines Werkes und fasst den Mut, den Autor zu kontaktieren: „I wrote to Frege, putting forward some objections to his theories, and waited anxiously for a reply. To my great pleasure, Frege wrote and asked me to come and see him".[124] Was folgt, ist eine außergewöhnliche Begebenheit der Philosophiegeschichte, durch die eine entscheidende Weiche im Leben eines noch unentschlossenen jungen Mannes in Richtung einer epochalen philosophischen Laufbahn gestellt wird und die unscheinbarer kaum sein könnte:

> I was shown into Frege's study. Frege was a small, neat man with a pointed beard, who bounced around the room as he talked. He absolutely wiped the floor with me and I felt very depressed; but at the end he said "You must come again", so I cheered up.[125]

Gut möglich, dass ihm Frege während eben dieses Treffens den gut gemeinten Ratschlag gibt, nach Cambridge zu gehen, weil man zu dieser Zeit nirgendwo besser die mathematische Logik erlernen könne als bei Russell und Whitehead. Dass er dem jungen Wittgenstein nicht Jena als Studienort empfiehlt, liegt auf

122. Frege an Wittgenstein in einem Brief vom 12. September 1918. In Frege (1989), 18.
123. Frege an Wittgenstein in einem Brief vom 30. Juni 1917. In Frege (1989), 14.
124. Wittgenstein zit. n. Anscombe/Geach (1961), 129.
125. Wittgenstein zit. n. Anscombe/Geach (1961), 130.

der Hand. Im Unterschied zur englischen Universität gibt es vor Ort überhaupt keine Lobby für die moderne formale Logik, weder bei den Philosophen noch bei den Mathematikern. Dies würde erklären, weshalb Wittgenstein im Herbst 1911 nicht nach Manchester zurückkehrt, sondern ohne Umwege den Kontakt zu Russell sucht.

Obwohl Wittgenstein das philosophische Handwerk in den folgenden Jahren in Cambridge, vor allem unter der Anleitung von Russell und Moore erlernte, so ist der prägende Einfluss aus dem fernen Jena allgegenwärtig. Die Schriften Freges begleiten Wittgenstein stets und die Auseinandersetzung mit diesen ist zeitweise derart intensiv, dass er größere zusammenhängende Passagen aus einzelnen Werken auswendig zu rezitieren weiß. An Frege fasziniert Wittgenstein nicht nur der Gehalt des Geschriebenen, sondern auch die Gestalt desselben. Freges Art zu schreiben, seine durchdringende Haltung, auch das Kategoriale expressiv prägnant zu fassen, wird für ihn zum nachahmenswerten Vorbild. „Der Stil meiner Sätze ist außerordentlich stark von Frege beeinflußt. Und wenn ich wollte, so könnte ich wohl diesen Einfluß feststellen, wo ihn auf den ersten Blick Keiner sähe“.[126] Frege ist und bleibt für Wittgenstein ein Vorbild im Philosophieren.

Die intellektuelle Einflussnahme, Freges große Hilfe in der Klärung seiner eigenen Gedanken, die prägenden persönlichen Treffen sowie die substantiellen Ratschläge für seinen Lebensweg führten bei Wittgenstein dazu, dass er zum Zeitpunkt der Fertigstellung des *Tractatus* eine „grosse Dankesschuld“[127] verspürte. Darüber hinaus verbleiben beide während des Ersten Weltkrieges in einem herzlichen, vertraut freundschaftlichen Briefkontakt, wobei sich Frege mit fast väterlicher Fürsorge stets besorgt zeigt um Wittgensteins Wohlergehen. Intellektuell, aber eben auch menschlich ist Frege für ihn in der zweiten Dekade des 20. Jahrhunderts und damit nicht zuletzt in der schweren Zeit des Krieges eine eminent bedeutsame Bezugsperson. Etwas Vergleichbares gilt jedoch auch in die andere Richtung. Zu keinem anderen Wissenschaftler pflegt Frege eine auch nur annähernd so vertraute und herzliche Korrespondenz wie mit dem jungen Wittgenstein und dieser gehört zu den wenigen Ausnahmen, die sich nicht nur aufrichtig für Freges philosophisches Schaffen interessieren, sondern mit diesem auch unermüdlich um philosophische Probleme ringen. Für Frege ist Wittgenstein ein streitbarer Philosoph auf Augenhöhe, der seine Argumente präzise durchdringt und zu verstehen mag. Bei aller Verschiedenheit ihrer Biographien und den daraus resultierenden Gründen für ihre intellektuellen Einzelgänge so wissen sie doch um die unvergleichbare Bereicherung ihres eigenen Lebens durch den jeweils anderen.

126. Wittgenstein (1967), § 712.
127. Frege (1989), 16.

Die daraus resultierende tiefe Dankbarkeit drückt Wittgenstein 1918 aus mit der Übersendung eines Geldgeschenks an den wenig begüterten Frege, die diesen zu der Antwort bewegt: „Jeder von uns, meine ich, hat vom Andern empfangen im geistigen Verkehr. Wenn ich mehr, als ich ahne, Sie in ihren Bestrebungen gefördert habe, so freut mich das sehr; weiss ich doch, dass diese Bestrebungen in ihrem hohen Fluge die Welt der niedern Selbstsucht tief unter sich lassen. Was Sie in unseren Verkehr gewonnen haben, das wird, hoffe ich, die Menschheit auf dem Wege, der ihr gewiesen ist, ein Stückchen vorwärts bringen. Wenn dabei die Worte, die ich mit Ihnen gewechselt habe, in ihren Wirkungen weiter leben werden, so ist das für mich ein tröstlicher Augenblick. Möge es Ihnen, lieber Freund, vergönnt sein, noch etwas von diesen Wirkungen zu erleben".[128] Frege schreibt diese Zeilen bereits aus seiner Mecklenburger Heimat und bringt mit ihnen auf ergreifend aufrichtige Weise zum Ausdruck, dass seinem verehrten Freund eine andere Wissenschaftsbiographie vergönnt sein möge. Jena und die durch die Öffentlichkeit unerkannten fruchtbaren Jahrzehnte seines akademischen Schaffens liegen endgültig hinter ihm. Ohne wirkungsgeschichtlichen Einfluss und ohne jede Notiz durch die akademische Welt hat sich Frege in seine Heimat zurückgezogen. Einzig Wittgenstein fühlt sich ihm enger verbunden als jemals zuvor und gewährleistet mit seiner für Freges Verhältnisse überaus großzügigen finanziellen Zuwendung dessen Subsistenz im Alter. Wahrhaftiger kann eine Freundschaft kaum Ausdruck finden, denn zum Zeitpunkt, an dem sein kometenhafter Aufstieg zum bekanntesten Philosophen Europas seinen Anfang nimmt, vergisst er den unbekannten Lehrer nicht. Für Frege muss die Authentizität dieser großen Geste überwältigend gewesen sein, denn sie war neben dem bedeutsamen Ausdruck ihrer Freundschaft auch eine demonstrative akademische Anerkennung durch Wittgenstein, was in Anbetracht der zurückliegenden 12jährigen Phase des Schweigens und der damit einhergehenden Unproduktivität Balsam für die philosophische Seele war.

Fast zwei Jahrzehnte nach dieser Begebenheit wendet sich Heinrich Scholz mit der Bitte an Wittgenstein, seine Korrespondenz auf Schriftstücke von Frege hin zu prüfen, die gegebenenfalls dem inzwischen in Münster angesiedelten Nachlass Freges hinzugefügt werden können.[129] Doch für Wittgenstein besitzen die wenigen Karten und Briefe, die er noch von Frege hat, einen großen Erinnerungswert, so dass er sie unter keinen Umständen aus seinen Händen gibt und die aufgrund ihres persönlichen Charakters auch in keine öffentliche Sammlung gehören.[130] Knapp 15 Jahre später, während eines seiner letzten Treffen mit Peter Geach und möglicherweise im Zusammenhang stehend mit dessen Erstübersetzung „On Concept

128. Frege an Wittgenstein in einem Brief vom 9. April 1918. In Frege (1989), 16.
129. Wir kommen hierauf im vierten Abschnitt zurück.
130. Wittgenstein (1936).

and Object“,[131] nimmt Wittgenstein „Ueber Begriff und Gegenstand“ in die Hand, liest eine Zeit lang darin, um kurz darauf begeistert auszurufen „How I envy Frege! I wish I could have written like that“![132] Und noch kurz vor seinem eigenen Tod 1951 notiert er: „Freges Schreibart ist manchmal *groß*“.[133]

Doch nichts davon beeinflusste die Fregerezeption um 1930, weil es in weiten Teilen der Öffentlichkeit verborgen blieb oder noch gar nicht geschehen war. Dass sich Wittgenstein entscheidend von Frege inspirieren ließ – was wir inzwischen vor allem dank der Wittgensteinforschung überaus detailliert nachvollziehen können –, sollte also nicht gleichgesetzt werden mit der historisch unzutreffenden Behauptung, dass Frege vermittels der Philosophie des *Tractatus* oder gar der späteren Arbeiten bekannt gemacht worden wäre. Fraglos ist es schmeichelhaft, wenn Gilbert Ryle als einer der Ersten unumwunden einräumt, dass der größte Beitrag zur Philosophie, den Frege abseits der formalen Logik geleistet hat, „will probably turn out to be the impact that he made upon Wittgenstein“.[134] Doch der Einfluss des einen auf den anderen wurde erst namhaft, als auch Wittgenstein verstorben war und Frege auf anderem Wege bereits Bekanntheit erlangt hatte. Sollte es sich bei dem Verhältnis der beiden also tatsächlich um eine außergewöhnliche intellektuelle Vater-Sohn-Beziehung der Philosophiegeschichte gehandelt haben, so war es jedenfalls nicht diese biographische Schnittstelle, über die der Ruhm des Schülers jenen des Lehrers evozierte.

Davon unberührt bleibt freilich der Stoff für die Legendenbildung, dass hier das aufkommende philosophische Genie des 20. Jahrhunderts den verkannten Genius nicht nur als einen Ebenbürtigen anerkennt, sondern in ihm eine philosophische Gestalt epischer Größe erkennt. Gerade jener Philosoph, dessen Biographie durchzogen ist von Spannungen und Unverständnis im sozialen Miteinander, dem häufig die Befähigung zur Empathie abgesprochen wurde, besitzt das hoch sensible intellektuelle Feingefühl, um dem als akademischen Sonderling stigmatisierten Außenseiter eine gänzlich andere Rolle in der Philosophiegeschichte zuzuweisen. „Wittgenstein bewies ungewöhnlichen und glücklichen Scharfblick, als er in Frege eine Gestalt erkannte, von der man im gleichen Ton zu reden hatte wie von Kant etwa“.[135]

131. Frege (1951).
132. Zit. n. Geach (1988), xiv.
133. Wittgenstein (1977), 573.
134. Ryle (1952).
135. McGuinness (1988), 141.

3.2 „From Frege I learned carefulness and clarity"

Im Unterschied zu Wittgenstein und allen anderen hier namhaft auftretenden Philosophen oder Mathematikern war Rudolf Carnap der einzige Logiker, der je, wenngleich anfangs „out of curiosity",[136] bei Frege vor Ort studiert hat. Neben Wittgenstein verdanken wir ihm eine weitere der wenigen überlieferten Personenbeschreibungen, die uns einen kleinen Eindruck von Freges Erscheinung vermittelt. So erinnert sich der 72jährige Carnap: „Frege looked old beyond his years. He was of small stature, rather shy, extremely introverted. He seldom looked at the audience. Ordinarily we saw only his back, while he drew the strange diagrams of his symbolism on the blackboard and explained them".[137] Im Herbst 1910 besucht der 19jährige Rudolf dessen Vorlesung *Begriffsschrift*, im Sommersemester 1913 *Begriffsschrift II* und im Sommersemester 1914 schließlich *Logik in der Mathematik*. Kaum zu glauben, dass das provinzielle Jena, dessen große philosophischen Tage weit in der Vergangenheit zurückliegen, am Anfang der zweiten Dekade des Centenniums zum Teil zeitgleich zum intellektuellen Zielpunkt sowohl für Carnap wie auch für Wittgenstein wurde, weil Frege ebendort war. Eine außergewöhnliche Konstellation, die zum Zeitpunkt ihres Eintretens durch niemanden hätte erkannt werden können – nicht einmal durch die Beteiligten selbst.

Es waren jedenfalls diese Veranstaltungen, die auf den jungen Studenten Carnap den stärksten Eindruck ausübten und ihm über die Enttäuschungen der klassischen Logikvorlesungen bei den Philosophen und deren Logikbüchern hinweghalfen, obgleich ein Gespräch oder eine mündliche Auseinandersetzung mit Frege in oder nach den Kursen nie stattfand.[138] Für die Zeit nach dem ersten Weltkrieg (nicht: nach dem ersten Weltkrieg) bekennt er, dass er nunmehr „the value of Frege's work not only for the foundations of mathematics, but for philosophy in general"[139] erkannt hat. „I was influenced by Frege first through his lectures and later, perhaps even to a greater extent, through his works [...]. From Frege I learned carefulness and clarity in the analysis of concepts and linguistic expressions".[140] Für Carnap war es Frege, der in den Bereichen der Logik und Semantik den größten Einfluss auf ihn ausübte.[141] Doch auch diese Beurteilung stammt aus dem Jahr 1963 und findet sich in keiner seiner Veröffentlichungen der 1920er oder 1930er Jahre. Selbst im Fall der Notation folgt Carnap – wie alle anderen – dem Peano-basierten Russell-Standard, was ihm freilich nicht vorgeworfen werden darf – handelt es sich

136. Carnap (1963), 5.
137. Carnap (1963), 5.
138. Carnap (1963), 4.
139. Carnap (1963), 6.
140. Carnap (1963), 12.
141. Carnap (1963), 13.

doch eben um die Anerkennung eines Standards. Gleichwohl beförderte es nicht die Befassung mit Frege, als er sich um 1919 dazu entschied, seine eigenen Arbeiten zur Logik und später auch jene zur Semantik am Vorbild der *Principia* auszurichten,[142] auf deren Lektüre ihn Frege allererst gebracht hatte.[143] Im gesamten Zeitraum der 1920er und 1930er Jahre gibt es von Carnap eigentlich nur eine exponierte Wertschätzung Freges, die wir partiell bereits in 2.1 zitiert hatten. Es handelt sich um eine Passage aus seinem geschichtlichen Abriss der Verwendung der Klassenzeichen aus *Logische Syntax der Sprache*:

> Unter großen persönlichen Opfern brachte er den ersten Band seines Hauptwerkes [Grundgesetze] 1893 zur Veröffentlichung; der zweite folgte nach langer Pause im Jahre 1903. Endlich kam ein Echo, nicht von den deutschen Mathematikern (von Philosophen ganz zu schweigen), sondern aus dem Ausland: Russell maß Freges Gedanken die größte Wichtigkeit bei.[144]

Carnap berichtet nachfolgend von der Mitteilung der Inkonsistenz sowie von den früh zwischen Frege und Russell diskutierten Möglichkeiten einer Behebung, die für den Betroffenen allesamt nicht zufriedenstellend sind. Auch findet Erwähnung, dass einige der Fregeschen Einsichten später unabhängig von ihm durch Russell begründet wurden. Diese knappe historische Darlegung, die darüber hinaus nicht einmal zum substantiellen Bestand der *Logischen Syntax* zählt, hinterlässt beim Leser Mitte der 1930er Jahre den folgenden Eindruck: »Ein gewisser „Frege“ hat zeitlich vor Russell eine Klassentheorie entwickelt. Doch diese wurde von Russell, der unabhängig von Frege bereits einen eigenen, weitaus leistungsstärkeren Ansatz entwickelt hatte, als irreparabel widerspruchsvoll nachgewiesen«. Wenn man als interessierter Leser an dieser Stelle also weiterlesen möchte, dann werden die meisten wohl erst einmal zu Russells Werken greifen. Hat man diese schließlich erst einmal zur Hand genommen, ergibt sich auf absehbare Zeit keine Möglichkeit für anderslautende Lektüren. Sofern Carnaps historiographische Ausführungen also überhaupt die Lektüre von Werken empfehlen, dann derjenigen von Russell.

Größeres Lob und mehr Anerkennung erfährt Frege in Carnaps Schrifttum bis Ende der 1930er Jahre nicht. Selbst im Fall seiner einflussreichen Schrift *Introduction to Semantics* aus dem Jahr 1942 findet Frege so gut wie überhaupt keine Erwähnung und dies, obwohl die dort zentral eingeführte und für Carnap systematisch so zentrale Extension-Intension-Unterscheidung wesentlich von Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung zehrt, wenn sie nicht sogar mit dieser

142. Carnap (1963), 11.
143. Carnap (1963), 11.
144. Carnap (1934), 98.

identisch ist. In diesem Kontext der Schrift wird Freges Vorreiterrolle mit keiner einzigen Silbe erwähnt. So brauchte es auch nicht lange, bis in der Person von Alonzo Church Carnaps Unterlassung beanstandet wurde.[145] Auf Churchs nachdrückliches Wirken hin[146] räumt Carnap uneingeschränkt die Bedeutsamkeit von Freges Unterscheidung ein[147] und auch in seinem autobiographischen Rückblick gut eineinhalb Jahrzehnte später wird er schlicht feststellen, dass er die fragliche Unterscheidung bei Frege erlernt hat.[148] Noch 1947 berücksichtigt er Freges semantische Grundlagen umfassend im Rahmen einer vergleichenden Analyse mit seinem eigenen Ansatz in *Meaning and Necessity*[149] – jener Schrift, die zu einem der einflussreichsten Werke der Bedeutungstheorie werden sollte. Unzweifelhaft haben viele Philosophen über diesen modernen Klassiker erstmals Frege als Philosophen von Weltgeltung zur Kenntnis genommen. Allerdings geschah auch dies zu einer Zeit, als sein international herausragender Ruf bereits gefestigt war.

Dass Carnap gleichwohl eine kanonische Erwähnung findet, wenn es um das rezeptionsgeschichtliche Erwachen von Freges Gedanken geht, hat neben seiner exponierten Rolle als ordentlicher Student Freges an der Salana vor allem damit zu tun, dass er in dem hier aufgespannten Wirkungsgeflecht zu allen anderen in der Relation des Beeinflussten steht. Es gilt: Frege beeinflusst Russell. Frege beeinflusst Wittgenstein. Russell beeinflusst Wittgenstein. Aber: „For me personally, Wittgenstein was perhaps the philosopher who, besides Russell and Frege, had the greatest influence on my thinking“.[150] Noch deutlicher kann die Sachlage gar nicht ausfallen, denn solange eine wirkungsgeschichtliche Einflussnahme transitiv verstanden werden darf, so hat Carnap das Gedankengut von Frege unabhängig voneinander über die drei wichtigsten Quellen seiner intellektuellen Entwicklung bezogen: Russell, Wittgenstein und Frege selbst.

3.3 „ich möchte Ihr Werk sehr ausführlich besprechen“

Im Unterschied zu Carnap und Wittgenstein wurde in Bertrand Russells publizistischer Tätigkeit mit Regelmäßigkeit auf Frege Bezug genommen – und das von Anfang an. Es darf sogar festgestellt werden, dass er bei den passenden Gelegenheiten keinen Zweifel daran gelassen hat, dass er Frege sowohl in der Art des Philosophierens als auch in diversen technischen Detailfragen vieles verdankt. Russells Beziehung zu Frege ist hinlänglich bekannt und wurde vielfach thematisiert.

145. Church (1943a), 301.
146. Wir kommen hierauf in 5.3.2 zu sprechen.
147. Carnap (1947), 118f.
148. Carnap (1963), 12.
149. Carnap (1947), §§ 28-30.
150. Carnap (1963), 25.

Dabei stellt die Frage, wann und bei welcher Gelegenheit er auf Frege aufmerksam geworden ist, ein Erkenntnisinteresse dar, dem bereits Anfang der 1960er Jahre (und damit noch zu Russells Lebzeiten) im Rahmen einer kleinen Studie explizit nachgegangen wurde.[151] Der Autor verfügte mithin über die Möglichkeit, mit Russell den wichtigsten Zeitzeugen in dieser Frage persönlich zu konsultieren.

Zusammen mit Alfred North Whitehead besuchte Russell im August 1900 den *Internationalen Kongress für Philosophie* in Paris, „where I was impressed by Peano".[152] Die Begegnung mit dem italienischen Mathematiker und der daraus resultierende Einfluss auf Russells weiteren Werdegang führten dazu, dass dieser das Jahr 1900 zum „most important year in my intellectual life"[153] erklärte. Inspiriert von dessen revolutionär neuartigen formalen Untersuchungswerkzeugen – „Peano and his pupils had a precision which was not possessed by others"[154] – widmet er sich umgehend und mit Begeisterung der Lektüre seiner Schriften und erfährt auf diesem Weg vom Wirken eines Mathematikers im fernen kleinen Jena. „I know, quite definitely, that it was through Peano that I first became aware of Frege's existence".[155] Doch der Schritt vom Wissen um sein Dasein hin zum Wissen um seine Bedeutsamkeit sollte einige Zeit in Anspruch nehmen. Über die Lektüre von Peanos Schriften ließ sich das nicht erschließen, denn dieser verkannte, dass es Frege, anders als ihm selbst, nicht um eine Axiomatisierung der Arithmetik ging. Zwar benötigten beide eine moderne logische Syntax und hatten demnach beide ein großes Interesse an der Neuentwicklung formaler Werkzeuge, doch geschah dies zu verschiedenen Zielen. Bei Peano, der seit ca. 1894 mit Frege auch einen persönlichen Kontakt pflegte, standen Notation und Symbolik klar im Dienste einer mathematischen Axiomatik, während bei Frege der logische Kalkül klar auf die Offenlegung der Mängel in der faktischen mathematischen Beweispraxis ausgerichtet war, um in einem zweiten Schritt unter Verwendung der bereinigten formal-logischen Grundlagen darzulegen, wie sich die grundlegenden arithmetischen Sätze aus einer vollständig kalkülisierten Logik im strengsten Sinne ableiten lassen. Peano erkannte nicht, dass es Frege um eine Logisierung der Arithmetik mittels einer axiomatisierten Logik ging. Unabhängig von der Verschiedenheit ihrer Ziele war es Peano auch keineswegs klar, dass Frege die leibnizsche Idee einer kalkülisierten Vernunft bereits mehr als zehn Jahre vor ihm selbst weitaus rigoroser interpretiert und wesentlich konsequenter umgesetzt hatte. Vielleicht war dies ein Grund, warum Kurt Gödel gut vier Jahrzehnte später in seinem viel beachteten Beitrag „Russell's Mathematical Logic" im Schilpp-Band zu Russell sogleich in

151. Nidditch (1963).
152. Russell (1948), 137.
153. Russell (1944a), 12.
154. Russell (1944a), 12.
155. Russell zit. n. Nidditch (1963), 109.

der Eröffnung unmissverständlich herausstellt, dass Frege in Bezug auf die formal-axiomatische Verwirklichung eines anspruchsvollen Kalkülbegriffs nicht nur deutlich früher als Peano, sondern sogleich auch erschöpfend geantwortet hatte:

> Frege has doubtless the priority, since his first publication about the subject, which already contains all the essentials, appeared ten years before Peano's.[156]

Doch wir greifen vor. Ensprechend durch Peano inspiriert, entwickelte Russell umgehend ein eigenes mathematisches Grundlagenprogramm, bei dem sich erst bei Drucklegung herausstellen sollte, dass es diverse Gemeinsamkeiten mit Freges Projekt teilt. Nach außen hin sichtbar war Peanos Einfluss vor allem durch die Notation, die Russell dankbar aufgriff und über das erste Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts hinweg weiter verfeinerte. Diese Entscheidung, obgleich in erster Instanz eine Konvention betreffend, prägte nicht nur maßgeblich das Erscheinungsbild der Logik für Jahrzehnte, sondern begünstigte auch nicht gerade die Aufnahme von Freges Gedanken. Für Russell, obwohl schließlich überzeugt von Freges Gründen für die Begriffsschriftnotation, waren es vor allem rein pragmatische Erwägungen, die ihn an der Verwendung der Peano-basierten Notation festhalten ließen. „His [Freges, MW] symbolism, though unfortunately so cumbrous as to be very difficult to employ in practice, is based upon an analysis of logical notions much more profound than Peano's, and is philosophically very superior to its more convenient rival".[157] Spätere Generationen erinnerten sich nur noch selten dieser differenzierten Beurteilung. Sie sahen vielmehr in der Sprache der *Principia* eine fast vollendete Notation und in den gesamten *Principia* ein Projekt, „which will probably remain the highest classic of symbolic logic",[158] so dass diese – letztlich auf Peano zurückgehende – Darstellungsform zum Standard wurde. Selbst Carnap, der die begriffsschriftliche Notation aus erster Hand kannte, entschied sich um 1919, die Darstellung seines eigenen logisch-semantischen Werkzeugs am Vorbild der *Principia* auszurichten.[159] Diese Entscheidung wurde allen anderen, die in einem besonderen Maße mit Frege sympathisierten, sogar noch abgenommen, weil sie die moderne Logik über das Erscheinungsbild der *Principia* allererst kennenlernten. Sowohl Wittgenstein als auch Heinrich Scholz[160] als auch Alonzo Church[161] betrieben formale Untersuchungen (zumindest zeitweise) in der Whitehead-Russell-Fassung der Peano-basierten Symbolik.

156. Gödel (1944), 125.
157. Russell (1903), 501.
158. Langer (1937a), 288.
159. Carnap (1963), 11.
160. Siehe hierzu den vierten Abschnitt.
161. Siehe hierzu 5.3.

Obwohl Russell wahrscheinlich bereits kurz nach Oktober 1895 von seinem ehemaligen Tutor James Ward ein Exemplar der *Begriffsschrift* erhielt,[162] so blieben ihm Autor und Werk noch auf Jahre fremd. Seit dem Spätsommer 1900 bestand erneut die theoretische Möglichkeit, auf Freges Schriften geführt zu werden, doch selbst 1901 waren sie ihm immer noch unbekannt. Zumindest wird dem Wiederabdruck seines aus diesem Jahr stammenden Artikels „Recent Work in the Philosophy of Mathematics" eine Fußnote hinzugefügt, die den dort verfochtenen Anspruch kommentiert, dass Peano zum Beginn des neuen Jahrhunderts der große Meister in der Kunst des formalen Schlussfolgerns ist. „I ought to have added Frege, but his writings were unknown to me when this article was written".[163] So kommt er schließlich erst im Sommer 1902 zum eingehenden Studium des ersten Bandes der *Grundgesetze*.[164] Umgehend wird ihm klar, dass er aufgrund der Vielzahl der gemeinsam geteilten erkenntnisleitenden Interessen Freges Werk umfassend studieren muss, weil andernfalls die *Principles* bedeutsame Forschungsbeiträge unberücksichtigt lassen würden.

> Ich bin im Begriff ein Buch über die Prinzipien der Mathematik zu vollenden, und ich möchte darin Ihr Werk sehr ausführlich besprechen.[165]

Es dürfte das erste Mal überhaupt und das einzige Mal zu Freges Lebzeiten gewesen sein, dass ein kongenialer Logiker das wissenschaftliche Erfordernis sieht, Freges Werk umfassend zu berücksichtigen. Der hiermit einsetzende Briefwechsel dokumentiert dies auf eindrucksvolle Weise. Die intellektuelle und persönliche Beziehung zwischen Frege und Russell sollte für beide eine ganz besondere werden. Noch im Juni 1902 beschafft sich Russell – zum Teil mit Freges Hilfe – dessen Schriften und beginnt mit der Arbeit am „Appendix A. The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege", der neben Jourdains Kapitel über Frege im Rahmen seiner Überblicksstudie zur mathematischen Logik[166] zum Besten gehört, was die frühe Fregerezeption hervorgebracht hat.

Innerhalb kürzester Zeit studiert er Freges Bücher sowie die von ihm übersandten Sonderdrucke wichtiger Aufsätze. Obwohl im Besonderen die Publikation der *Begriffsschrift* inzwischen mehr als zwei Jahrzehnte zurückliegt und Russell erst jetzt langsam erahnt, was für ein großartiges Werk dies ist, so glaubt er sich doch in der Rolle desjenigen, der dieses intellektuelle Eiland entdeckt hat: „In spite of the great value of this work, I was, I believe, the first person who ever read it–more

162. Vgl. Russell (1967), 68.
163. Russell (1917), 62.
164. Russell (1902), 211.
165. Russell (1902), 211.
166. Jourdain (1912a). Auf Jourdains Rolle kommen wir in 3.4 zu sprechen.

than twenty years after its publication".[167] Ob er tatsächlich der Erste ist, der das Werk vom Vorwort bis zum letzten Paragraphen durchgängig studiert hat, wissen wir nicht. Auf die Rezensenten der *Begriffsschrift* 1879/80 muss dies freilich nicht zutreffen, zumal so mancher sogar freimütig einräumt, dass es für mehr als eine flüchtige Lektüre nicht gereicht hat. „I have not made myself sufficiently familiar with Dr. Frege's system".[168] Sicher ist aber, dass er der Erste ist, der in umfassender Kenntnis der systematischen Bedeutsamkeit der *Begriffsschrift* ihr einen ausgezeichneten Platz in der Geschichte der Logik zuweist. Dasselbe gilt mit Sicherheit auch für den ersten Band der *Grundgesetze*. Deshalb ist es vollkommen angemessen, wenn er retrospektiv in *A History of Western Philosophy* festhält: „in spite of the epoch-making nature of his discoveries, he remained wholly without recognition until I drew attention to him in 1903".[169] Selbst in Kenntnis der Tatsache, dass Russell über Peano auf Frege aufmerksam wurde, verbleibt überhaupt nichts Klärungsbedürftiges an dieser Selbstauskunft, denn Russell behauptet schlicht, dass jener Frege, der epochale Entdeckungen gemacht hat, überhaupt nicht wahrgenommen wurde, bis er 1903 seine Aufmerksamkeit auf ihn gerichtet hat. Tatsächlich ist der Frege, den Peano oder andere namhafte Gelehrte vor Russell rezensierten oder referierten, in der Öffentlichkeit keinesfalls ein epochaler Denker mit bahnbrechenden Resultaten, weil ihn keiner als solchen erkannte. „[The] failure to appreciate the significance of the work of Frege was common to all of his great contemporaries".[170] Ein wahrhaft angemessenes Urteil musste erst noch gefällt werden und es ist aller Wahrscheinlichkeit nach Russell, der es erstmals im Zusammenhang der Fertigstellung der *Principles* formuliert.

Obgleich Russell bereits im Vorwort zu den *Principles* feststellt, dass Frege das hier verfolgte Projekt in weiten Teilen vorausgenommen hat,[171] so dass er ihm zu großem Dank verpflichtet gewesen wäre, wenn er nur früher auf seine Schriften aufmerksam geworden wäre,[172] und obwohl der nunmehr neu verfasste Anhang sogleich mit der Feststellung beginnt, dass Freges Werk „appears to be far less known than it deserves",[173] so haben die *Principles* – sieht man von den besonderen Umständen ihres Einflusses auf Jourdain ab – doch keine nachhaltige Fregerezeption induziert. Aus einer fehlenden Wertschätzung, die Russell seitdem Zeit seines Lebens aufrichtig bekundet hat, resultierte dies freilich nicht. Vielmehr stand dies unter anderem damit im Zusammenhang, dass diesem Werk selbst eine mit den *Principia* vergleichbare Rezeption vergönnt blieb, obgleich diese ursprünglich als

167. Russell (1919), 25.
168. Venn (1880).
169. Russell (1945), 830.
170. Church (1944), 65.
171. Russell (1903), xvi.
172. Russell (1903), xviii.
173. Russell (1903), 501.

zweiter Band der *Principles* geplant waren.[174] Zum einen fällt es als grundlagentheoretischer Erstling in die intellektuelle Orientierungsphase von Russells Schaffen, in der er noch sichtlich unentschlossen ist, mit welcher logisch-philosophischen Antwort man überzeugend den Antinomien entgegentreten soll. Der im „Appendix B" der *Principles* enthaltene Entwurf einer Typentheorie wird ebendort lediglich als eine mögliche Lösung der Widerspruchsproblematik erwogen und ihre Ausführung erfolgt erst einmal nur „tentatively".[175] 1903 ist die Option einer Typengrammatik lediglich eine unter mehreren und sie erfährt in den *Principles* nicht mehr als eine programmatische Skizze. Es ist ein erster Entwurf, dem es noch an einer theoretisch souveränen Entfaltung mangelt. Damit ist das mathematische Grundlagenprogramm des frühen Russell nicht nur richtungsoffen, sondern auch noch einiges entfernt ist von der reifen und systematisch vollendeten Typentheorie der *Principia*. Zum anderen erschienen die *Principles* zu einer Zeit, zu der noch keineswegs von einer prosperierenden internationalen Logikforschung gesprochen werden kann. Die Situation sollte sich erst nach dem Ersten Weltkrieg günstiger darstellen. Doch zu diesem Zeitpunkt verfügte die Gelehrtenwelt bereits über die dreibändigen *Principia Mathematica*, die inzwischen nicht nur zum Lehrbuchstandard der Logik avancierte, sondern auch den kanonischen Referenzpunkt für die Forschung bildete. Damit konnten die *Principles* zu keinem Zeitpunkt jene Rolle einnehmen, die später derart omnipräsent von den *Principia* besetzt wurde.

Sofern man also an Russells eminent einflussreiche Rolle in der jüngeren Logikgeschichte denkt, so bezieht man sich vor allem auf den Koautor der *Principia* und damit auf den Russell nach Erfindung der verzweigten Typengrammatik 1908. Die *Principles* gehören werkgeschichtlich indes in seine frühe intellektuelle Biographie, womit im Besonderen sein später einsetzender großer Einfluss nicht rückdatiert werden darf auf den 30jährigen Russell, der sich noch unsicher zeigt in Bezug auf die zu verfechtende Logik. Dass indes durch die *Principia* keine nennenswerte Fregerezeption initiiert wurde, hatte unter anderem damit zu tun, dass man sich zu einer Zeit der intellektuellen Aufbruchsstimmung, einer Zeit, in der es schier unerschöpflich viel zu untersuchen gab, nicht unnötig mit historischen Vor- und Früharbeiten aufhalten wollte, zumal mit dem Namen „Frege" häufig genug die Beurteilung eines gescheiterten Pioniers einherging. Den Stand der Technik repräsentierten um 1920 – wenngleich partiell ungerechtfertigt – die drei Bände der *Principia* und das sich gerade weitende Feld der mathematischen Logik versprach jedem reiche Ernte, der mit diesem modernen Werkzeug ausgerüstet in die Forschung ging. Die beeindruckende Entwicklung der Logik und Beweistheorie in den 1920er und 1930er Jahren mit der unglaublichen Vielzahl brillanter Resultate und

174. Vgl. Whitehead/Russell (1910), v.
175. Russell (1903), 523.

Problemschärfungen bestätigte im Rückblick diese intellektuelle Erwartungshaltung nach dem Ersten Weltkrieg. Für die historische Aufarbeitung der Geschichte der eigenen Disziplin während dieser Entwicklungsphase der Logik hatten die meisten weder Zeit noch Muße. Selbstverständlich blieb auch im Fall der *Principia* die Würdigung Freges nicht aus. Im Unterschied zur Genesis der *Principles* entstand das Monumentalprojekt der *Principia* in vollständiger Kenntnis von Freges Werken, die Whitehead und Russell über die Jahre verinnerlicht hatten. Vollkommen zu Recht konnten sie im „Vorwort“ zum ersten Band bekunden: „In all questions of logical analysis, our chief debt is to Frege“.[176]

Fraglos handelt es sich hierbei um eine aufrichtige, tief empfundene Wertschätzung, die kaum einem Leser der *Principia* entgangen sein dürfte. Ebenso unstrittig dürfte es allerdings sein, dass die Großzügigkeit dieser Anerkennung nicht erkennen lässt, worauf sie im Einzelnen abzielt. Zu global ist die Würdigung, als dass der noch Frege-unbedarfte Leser erkennen könnte, an welcher Stelle der eigene Lektürehebel anzusetzen hätte. Man muss bereits mit einem durch Frege geschärften Blick an die *Principia* herantreten, um zu erkennen, bei welchen Weichenstellungen Frege eine systematisch bedeutsame Hilfe gewesen ist oder entscheidende Vorarbeit geleistet hat. Geht man auf diese Weise vor, so braucht man Frege durch die *Principia* freilich nicht mehr zu entdecken – man kennt ihn ja bereits. Hier wiederholt sich, was Russell als Zitationshaltung bereits seit Jahren pflegt. Einflüsse werden umfassend eingeräumt und Urheberschaften in Teilen gerne abgetreten, allerdings verzichtet er dafür auf detaillierter geführte Nachweise, weil der Leser die fraglichen Passagen selbst identifizieren kann, sobald er sich auch mit Freges Werk vertraut gemacht hat:

> But although the symbolism is in the main Peano's, the ideas are more those of Frege. Frege's work, probably owing to the inconvenience of his symbols, has received far less recognition than it deserves. I shall not refer to him in detail in what follows, but whoever will consult his work will see how much I owe to him.[177]

Da die anerkennenden Worte von Whitehead und Russell dennoch nicht überlesen wurden und zudem auch nach 1920 ein flüchtiger Blick in den „Appendix A“ der *Principles* möglich blieb, bürgerte es sich zumindest ein, vom Logizismus in der „Frege-Whitehead-Russell-Tradition“ zu sprechen oder von den großen Wegbereitern der modernen Logik, „Peano, Frege, Russell“, oder den Vorarbeiten von „Peano und Frege“ usw. Man gebrauchte den Namen, häufig in Kombination mit

176. Whitehead/Russell (1910), viii.
177. Russell (1906), 160.

einem oder mehreren der anderen, gebetsmühlenartig, ohne im Einzelnen darzulegen oder auch nur darlegen zu können, was seine Erwähnung rechtfertigt. Der Name wurde verwendet, weil ihn andere verwendeten. Eine substantielle Fregerezeption setzte diese Erwähnungspraxis freilich nicht in Gang, weil für diese eine ernsthafte Beschäftigung mit dem Werk erforderlich gewesen wäre.

Für die weitere Entwicklung der Logik war dies gleichwohl von Nachteil, weil die *Principia* nicht in jeder Hinsicht auch gerechtfertigt den Stand der Forschung repräsentierten. Hätte der Student der *Principia* auch zur *Begriffsschrift* bzw. zu den *Grundgesetzen* gegriffen, so wäre ihm aufgefallen, dass Frege einen mustergültigen Begriff des Kalküls bereitstellt, der in seinem Begriffsschrift-Kalkül auch eine konsequente Umsetzung erfährt. Freges Kalkülisierung, die in ihrer logischen Syntax zudem mit einem sprachphilosophisch souverän eingeführten Funktionsbegriff operiert, der eine Mehrdeutigkeit in der Funktionsdarstellung der *Principia* zu vermeiden weiß,[178] ist weitaus rigoroser als jene von Whitehead-Russell. Wesentlich dasselbe gilt im Hinblick auf die Implementierung eines anspruchsvollen Beweisbegriffs, denn Frege erfüllt die selbst gesetzten Ansprüche hinsichtlich Transparenz, Lückenlosigkeit und Bündigkeit einer Schlusskette umfassend. Die Offensichtlichkeit dieses Sachverhalts veranlasste Joseph Maria Bocheński noch Jahrzehnte später zu dem unmissverständlichen Urteil: „In bezug auf diese Strenge steht nämlich alles, was von 1879 bis 1921 in der mathematischen Logik veröffentlicht wurde, unter dem durch Frege erreichten Niveau – und auch seither, bis heute, sind logische Werke, die es erreichen, selten“.[179]

Infolge einer ausbleibenden Rezeption war es leider nur den Wenigsten überhaupt bekannt, dass Freges Kalkül tatsächlich dem Ideal der größten logischen Genauigkeit beeindruckend nahe gekommen war. Neben William Kneale, der konzise einräumt „In rigour and elegance his system is superior at many points to *Principia Mathematica*“,[180] war es unter anderem Kurt Gödel, der bereits sechs Jahre vor Kneale auf denselben Punkt zu sprechen kommt und klar zu Gunsten Freges urteilt. Der für seine eigene Lektüreorientierung nicht auf die Rezeptionsgewohnheiten der Mehrheit angewiesene Gödel konnte sich bereits früh neben der Auseinandersetzung mit den *Principia* auch auf sein eigenes unabhängiges Studium von Freges Schriften stützen. Entsprechend autonom war er in seinem Urteil:

> It is to be regretted that this first comprehensive and thorough going presentation of a mathematical logic [*Principia Mathematica*, MW] and the derivation of Mathematics from it is so greatly lacking in formal

178. So schon Rosinger (1930).
179. Bocheński (1956), 314. Mit der Jahreszahl „1921“ bezieht sich Bocheński auf Łukasiewicz' Einhaltung der Fregeschen Standards im Rahmen seiner Formalisierung der dreiwertigen Logik.
180. Kneale (1950), 396.

> precision in the foundations (contained in *1-*21 of *Principia*), that it presents in this respect a considerable step backwards as compared with Frege.[181]

Diese Beurteilung war möglich, weil Gödel zum einen die fraglichen Vergleichswerke kannte und des Weiteren die dort begründeten Ansprüche hinsichtlich Klarheit, Exaktheit sowie formaler Strenge an die *Principia* anzulegen vermochte. Diese unmissverständliche Beurteilung hatte jedoch keinen nennenswerten Einfluss auf die Fregerezeption, die zum Zeitpunkt der Veröffentlichung der Russell-Festschrift bereits eine bemerkenswerte Eigendynamik entwickelt hatte. Die zitierten Einschätzungen von Gödel und Kneale waren indes Mangelware im ersten Vierteljahrhundert nach der Erstveröffentlichung der *Principia I.* Der für sie unvorteilhafte Vergleich mit dem Begriffsschrift-Kalkül war in eben diesen zweieinhalb Jahrzehnten vollkommen unproblematisch, weil er in Ermangelung einer erforderlichen Textkenntnis der Vergleichswerke schlicht nicht stattfand. Die *Principia* bildeten in eben diesem Vierteljahrhundert den unangefochtenen kanonischen Standard der mathematischen Logik, weil Frege unbekannt war; und weil die *Principia* den unbestrittenen kanonischen Standard bildeten, gab es wiederum kaum Bedarf, in der Geschichte nach Systemverbesserungen Ausschau zu halten. Die Unkenntnis führte also unwissentlich zu einer partiell nicht gerechtfertigten Maßstabsbildung, deren uneingeschränkte Anerkennung wiederum den Verbleib in der Unkenntnis begünstigte. Je souveräner die *Principia* verstanden wurden, umso schlechter standen die Chancen, dass Frege Berücksichtigung fand.

Hinzu kommt, dass Russell in der Narration seiner intellektuellen Entwicklung an manchen Stellen (und sicherlich auch zutreffend) darauf aufmerksam macht, dass er bei aller Wertschätzung gegenüber Frege vieles von dem, was er bei ihm entdecken konnte, sich bereits selbst erarbeitet hatte und dass er manches davon erst verstand, nachdem er dieselben Gehalte auf unabhängigem Weg begründet hatte. So lautet es bereits in der „Vorrede“ zu den *Principles*: „I arrived independently at many results which he had already established“.[182] Und im Rückblick auf exakt diese Zeit der ersten Jahre des 20. Jahrhunderts berichtet der inzwischen 85jährige Russell: „in the case of Frege I possessed the book [*Begriffsschrift*, MW] for years before I could make out what it meant. Indeed, I did not understand it until I had myself independently discovered most of what it contained“.[183] Freges Leistungen werden durch diese Selbstauskünfte freilich nicht herabgewürdigt, allerdings führt das Hören oder Lesen derartiger Worte auch nicht gerade zu dem Entschluss, sich

181. Gödel (1944), 126.
182. Russell (1903), xviii.
183. Russell (1967), 68.

in der Lektüre von Russell ab- und Frege zuzuwenden. Schließlich bedurfte es offenkundig nicht des Verstehens von Freges Texten, damit Russell eine Vielzahl seiner beeindruckenden Leistungen begründen konnte. Es ist bezeichnend, dass eine der ersten Einsichten, die über Freges Rolle in der Logikgeschichte manifest gemacht wurden, gerade die des fehlenden Einflusses gewesen ist. „Wie bekannt, wurden diese Reichtümer indessen nicht verwertet, ehe sie nach und nach auch von anderen entdeckt waren, und Freges Arbeiten haben daher nicht den Einfluß auf die Entwicklung der modernen Logik gehabt, den sie wegen ihres hohen Wertes in eminentem Grad verdient hätten".[184] Vor allem die *Begriffsschrift* dürfte damit eines der bedeutsamsten Werke der Logikgeschichte sein, das zugleich so gut wie überhaupt keinen rezeptionsgeschichtlichen Einfluss hatte. Während mit ihr in der rationalen Genesis eine Zeitenwende einhergeht, spielte sie in der empirische Genese so gut wie überhaupt keine Rolle – eine gleichermaßen rekonstruktive wie narrative Herausforderung für jede logico-historische Problemgeschichtsschreibung.

Russell hat jedenfalls auch in der Zeit nach der Publikation der *Principia*-Bände nicht davon abgelassen, bei der Angemessenheit des Kontextes auf Freges Verdienste aufmerksam zu machen. Die fachpublizistischen Gelegenheiten hierzu ergaben sich noch für ein gutes Jahrzehnt, bis er um 1925 die Forschungen zur mathematischen Logik endgültig einstellte.[185] So lässt er zu einer Zeit, in der Frege selbst massive Zweifel plagen, ob er mit seinen Analysen in den *Grundlagen* nicht einem philosophischen Scheinproblem nachgejagt sei, keinen Widerspruch zu, dass Frege exakt in diesem Werk Großartiges gelungen ist: „The question "What is a number?" is one which has been often asked, but has only been correctly answered in our own time. The answer was given by Frege in 1884, in his *Grundlagen der Arithmetik*. Although this book is quite short, not difficult, and of the very highest importance".[186] Auch im Rahmen einer knapp zehn Jahre später entstandenen kleinen Studie über die philosophischen Strömungen Europas der Zeit wird auf die „admirable works of Frege"[187] hingewiesen, wobei vor allem herausgestellt wird, dass es Frege war, der Kant darin widerlegte, die arithmetischen Urteile würden synthetisch a priori gelten: „Frege showed that arithmetic follows from logic".[188] Frege wird damit nicht mehr nur in der Logikgeschichte verortet, sondern er erfährt eine Kontextualisierung im weit umfangreicheren Rahmen der Philosophiegeschichte des Abendlandes. Leider führt Russell nicht weiter aus, wie es Frege gelungen ist, diese für Kants Transzendentalphilosophie eminent bedeutsa-

184. Jørgensen (1935), 135f.
185. Vgl. Russell (1944b), 741.
186. Russell (1919), 11.
187. Russell (1928), 69.
188. Russell (1928), 72.

me Klassifizierung begründet zurückzuweisen.

Die literarische Präsenz Freges setzt sich fort in Russells autobiographischen Gedanken. Als dieser dazu aufgefordert wird, für den für ihn vorgesehenen, fünften Band der *Library of Living Philosophers* eine Skizze seiner intellektuellen Entwicklung zu verfassen, findet Frege nicht nur durch die inzwischen weithin bekannte Episode aus dem Jahr 1902 Berücksichtigung. Vielmehr ist „My Mental Development" ein Plädoyer für das logisch-analytische Philosophieren und Russell sieht sich selbst in der Rolle eines glücklichen Profiteurs, der im erheblichen Maße das Potenzial dieses neuen Philosophieverständnisses nutzen konnte. Sein intellektueller Werdegang ist für Russell Ausdruck dieser beeindruckenden Entfaltungsmöglichkeiten der Vernunft- und Verstandestätigkeit, die wir dem visionären, aber verkannten Frege verdanken. Als Russell diese Passage aus dem beschließenden Absatz seiner autobiographischen Skizze verfasste, wusste er wohl, dass sie von vielen zur Kenntnis genommen werden würde:

> Those philosophers who have adopted the methods derived from logical analysis can argue with each other, not in the old aimless way, but coöperatively, so that both sides can concur as to the outcome. All this is new during my lifetime; the pioneer was Frege, but he remained solitary until his old age.[189]

Diese literarischen Belege wurden ergänzt durch Gelegenheiten der Mündlichkeit bei besonderen Anlässen. Eine der ersten ergriff nicht Russell, sondern er verschaffte sie Frege, denn wer könnte Freges Werk besser präsentieren als der Urheber selbst? Als 1912 der fünfte *International Congress of Mathematicians* (*ICM*) und damit die führende Mathematikerschaft der Welt vor den Augen der Öffentlichkeit in Cambridge tagte, wurde Frege von Russell dazu aufgefordert, mit einem Vortrag an dem Kongress teilzunehmen. Allein ein solches Angebot für einen *ICM*-Vortrag, die nur alle vier Jahre vergeben wurden, war eine Auszeichnung für den Eingeladenen und konnte eigentlich nur mit einer Zusage beantwortet werden. Zudem zu einer Zeit, in der die schnellste und umfassendste Form des wissenschaftlichen Gedankenaustausches noch die Diskussion während einer Tagung war, wäre es für Frege eine gleichermaßen einfache wie prestigeträchtige Angelegenheit gewesen, die mathematische Gemeinschaft vom Dasein und Charakter seiner wissenschaftlichen Forschung wissen zu lassen. Mit diesem einen Vortrag hätte ein weitaus größeres Interesse an seinen Werken gestiftet werden können, als in den drei zurückliegenden Dekaden zusammen. Doch Frege, dessen Vortragstätigkeit sich während seiner gesamten akademischen Laufbahn fast vollständig auf Veranstaltungen im Jenenser

189. Russell (1944a), 20.

Raum beschränkte und der zudem über all die Jahrzehnte seine Heimatuniversität eigentlich nur für Besuche in der Mecklenburgischen Heimat verließ, sah sich außerstande, die Einladung anzunehmen:

> Ich weiss die Ehre ganz zu schätzen, die Sie mir durch die Aufforderung erwiesen haben, am Mathematiker-Kongresse teilzunehmen und dort einen Vortrag zu halten, und doch kann ich mich nicht entschliessen, ihr Folge zu leisten. Ich sehe ein, dass ich gewichtige Gründe habe, nach Cambridge zu gehen, und doch fühle ich etwas wie ein unüberwindliches Hindernis.[190]

Sich zu dieser am 9. Juni 1912 verfassten Absage durchzuringen, lag Frege „schwer auf der Seele",[191] doch ungleich schwerer wäre es für ihn gewesen, stattdessen nach Cambridge zu reisen und die gelehrte Gemeinschaft von seiner Forschung wissen zu lassen. Für Russell war damit klar, dass Freges Errungenschaften nicht durch ihn selbst in die Welt hinausgetragen werden würden.

Die Gelegenheiten der Mündlichkeit nutzte Russell nunmehr selbst und eine frühe exklusive Möglichkeit der Adressierung sollte sich bereits zwei Jahre später ergeben, während seiner ersten Vortragsreise in die Vereinigten Staaten. Im April und Mai 1914 hielt er die Lowell Lectures in Boston. Im Rahmen dieser Vorlesungsreihe stellte er anhand von Beispielen den Charakter, die Möglichkeiten sowie die Grenzen der logisch-analytischen Methode in der Philosophie vor. Russell wählte also nicht nur ein hoch aktuelles Thema, sondern eines, das aufgrund seiner Neuartigkeit selbst in der philosophischen Forschung noch nicht jedermann bekannt war und welches darüber hinaus in seiner publizierten Fassung einen eminent prägenden Einfluss auf die weitere philosophische Entwicklung des jungen Rudolf Carnap nehmen sollte, der nach Russells literarischer Demonstration der logisch-analytischen Methode begeistert feststellte: „I felt as if this appeal had been directed to me personally. To work in this spirit would be my task from now on!".[192] Um den Einfluss seiner Schreibfeder wissend, war es für Russell ein wichtiges Anliegen, die vorzustellende neue Methode auch historisch angemessen zu verorten und darauf hinzuweisen, in welchem Kontext sie erstmals eine mustergültige Anwendung erfuhr: „the first complete example is to be found in the writings of Frege".[193] Wenn man bedenkt, dass Frege zu diesem Zeitpunkt nicht einmal in der deutschen Universitätslandschaft einen Namen besaß, so dürfte es sich bei dieser Stellungnahme um einen beeindruckend frühen Export seiner Leistungen nach Nordamerika gehandelt haben. Kaum vorstellbar, wie sonderbar es anmuten muss,

190. Frege (1976), 252.
191. Frege (1976), 252.
192. Carnap (1963), 13.
193. Russell (1914), v.

dass der bereits berühmte Russell jemanden zum Vorbild im logisch-analytischen Philosophieren erklärt, von dessen provinzieller Wirkungsstätte man noch nicht einmal gehört hatte, geschweige denn von ihm selbst. Irritieren lässt sich Russell dennoch nicht, gilt es doch, die Wahrheit zu sagen: „a man whose great genius has not received the recognition it deserves–I mean Gottlob Frege of Jena".[194] Der Name dieser kleinen Thüringer Universitätsstadt sollte noch häufig fallen, bevor es zur Selbstverständlichkeit wurde, wo Frege gewirkt hat.

Dass trotz der Unmissverständlichkeit eines derartigen Urteils keine Rezeptionswelle losbrach, kann nur damit im Zusammenhang stehen, dass außer Russell zu dieser Zeit in den Vereinigten Staaten kaum auch nur jemand den Namen kannte. Nachweislich besaß nicht einmal die Princeton University Library, die seit jeher für den Umfang sowie die Pflege ihres Bestandes bekannt ist und die seit ehedem über eine vorzügliche mathematische Abteilung verfügt, alle Monographien Freges. Ob die beiden Bände der *Grundgesetze* 1914 zum Bibliotheksbestand zählten, kann im Augenblick nicht geklärt werden. Unstrittig ist aber, dass zum Zeitpunkt von Russells Lowell Lectures weder ein Exemplar der *Begriffsschrift* noch eines der *Grundlagen* in Princeton verfügbar war.[195] Die Situation an der Universität von Boston dürfte kaum besser gewesen sein. Fraglich ist zudem, ob dieses gegebenenfalls bestehende bibliothekarische Angebot überhaupt auf Interesse gestoßen wäre. Russell war mit seiner Einschätzung der Zeit um gut zwei Jahrzehnte voraus,[196] denn erst im Verlaufe der 1930er Jahre sollte durch die einsetzende Professionalisierung der Logik in Nordamerika sowie die sie begleitende Emigration europäischer Logiker der Name wieder häufiger auftreten.

Möglicherweise der Einzige, der publizistisch aus Russells wertschätzenden Worten der Lowell Lectures Kapital zu schlagen wusste, war sein ehemaliger Student Philip Jourdain. Gut möglich, dass Jourdain zu dieser Zeit auch der Einzige war, der die Gunst der Gelegenheit überhaupt zu erkennen vermochte. Zumindest bezieht er sich dankbar auf den exponierten Anlass der Bostoner Vorträge, um die jüngst für *The Monist* fertiggestellte und aus übersetzten Abschnitten der *Grundgesetze I* bestehenden Aufsatzfolge „The Fundamental Laws of Arithmetic"[197] zu bewerben. Im Rahmen der „Introductory Note" bezieht er sich exakt auf die zitierte Passage, um unter Verweis auf den englischen Lord die Bedeutsamkeit des verhandelten Autors zu unterstreichen.[198] Russells wertschätzendes Urteil über Frege erfährt damit zumindest eine singuläre zeitgenössische Rezeption.

194. Russell (1914), 199.
195. Siehe hierzu unsere näheren Ausführungen in 5.3.1.
196. Ebenso diesseits des Atlantiks wurde man erst Mitte der 1930er Jahre auf die Würdigung Freges im Kontext der Lowell Lectures aufmerksam. Vgl. Ayer (1936), 55.
197. Frege (1915), (1916), (1917).
198. Jourdain (1915), 484.

Es sollte nicht überraschen, dass gut eineinhalb Jahrzehnte, nachdem er die Lowell Lectures gehalten hatte, Russell ein weiteres Mal vor Ort in Massachusetts war, dieses Mal in Harvard, um wiederum bei der Gelegenheit eines akademischen Vortrags auf Frege und seine Leistungen aufmerksam zu machen. So erinnert sich Willard Van Orman Quine: „Russell had introduced him [Frege, MW] to us long ago, but we remained unaware of how much had been done first by Frege".[199] Wahrscheinlich bezieht sich Quine mit dieser autobiographischen Notiz auf Russells fünfte Vortragsreise, die ihn 1931 eben auch nach Harvard führte.[200] Alfred North Whitehead, der bereits seit Mitte der 1920er Jahre erst zeitweise und dann dauerhaft in die USA übergesiedelt war, hatte Russell an seine Universität eingeladen. Whitehead, der zudem Quines Doktorvater war, stellte ihn bei dieser Gelegenheit Russell persönlich vor.[201] Es ist bezeichnend, dass Quine zu dieser Zeit, obwohl formal bestens durch Whitehead ausgebildet und fraglos einer der talentiertesten Logiker seiner Generation, noch nie etwas von Frege gehört oder gelesen hatte. Die autobiographische Notiz macht deutlich, dass Quine während der Zeit der Arbeit an seiner Dissertation „The Logic of Sequences: A Generalization of Principia Mathematica" noch nicht einmal den Namen verorten konnte, „we remained unaware of how much had been done first by Frege". Für Quine sollte das nun folgende Jahrzehnt eine Zeit werden, in der er sich unter anderem auch mit den Errungenschaften Freges langsam vertraut machte. Die Begegnung mit Russell sowie der Gehalt des von ihm Referierten muss auf den jungen Quine einen nachhaltigen Eindruck gemacht haben. Schließlich war Russell für ihn neben Whitehead die entscheidende intellektuelle Bezugsgröße, die eminent inspirierend auf seine Forschung wirkte. Nicht zuletzt stellt Quines erste monographisch verlegte Forschungsschrift *A System of Logistic*[202] nichts Geringeres dar als ein zeitgenössisches, verbessertes Logiksystem relativ zum großen system- und typbildenden Standard der *Principia*.

Dass eventuell mit Ausnahme dieser zuletzt genannten Episode alle anderen erwähnten Bemühungen Russells in jenes Zeitfenster fallen, das wir als erste Phase der Fregerezeption gekennzeichnet haben, darf in Anbetracht seines Werdeganges nicht überraschen. Russells philosophische Interessen waren allumfassend und wurden ergänzt durch ein massives sozio-politisches, gesamtgesellschaftliches sowie pädagogisches Engagement. Die Logik und mathematische Grundlagenforschung

199. Quine (1985), 144.
200. Ein früheres Aufeinandertreffen der beiden scheint in Anbetracht von Quines akademischem Werdegang unwahrscheinlich und die nach 1931 nächste Möglichkeit für einen Vortrag in Harvard ergab sich erst 1940, als Russell die William James Lectures bestritt. Darauf kann sich Quine jedoch nicht beziehen, da 1940 bereits seine *Mathematical Logic* gedruckt vorliegt, die reich mit historischen Bezügen auf Frege ist.
201. Vgl. Quine (1985), 84.
202. Quine (1934).

zählten vor allem in den ersten beiden Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts zu seinen vorrangigen Schwerpunkten und nachdem er dort Bahnbrechendes geleistet hatte, mussten sie in der Zeit danach, spätestens ab 1925 zugunsten anderer Interessen in die zweite Reihe treten. Allein anhand der Chronologie lässt sich ablesen, dass Russell trotz seiner vorbildlichen Berücksichtigung von Freges Leistungen dessen internationale Bekanntheit nicht begründet hat. Sein Durchbruch bahnt sich an zu einer Zeit, als Russells maßgebliches Werben um Frege bereits ein Vierteljahrhundert zurückliegt und es neben den *Principia* inzwischen eine Vielzahl von guten Lehrbüchern und exzellenten Kompendien gibt, die wesentlichen Einfluss auf die Ausrichtung des Logikstudiums nehmen. Es ist eine neue Generation an jungen Logikern, die diese Zeit durch ihre vielfältigen akademischen Aktivitäten prägt und die Frege nach Russell schließlich entdecken sowie zum Durchbruch verhelfen sollte. In seinem Bemühen war der englische Lord schlicht zu früh, die Zeit war noch nicht reif für den historiographisch sensibilisierten Umgang mit Frege.

Es ist jedoch mindestens eine Begebenheit aus der zweiten Phase der Fregerezeption dokumentiert, bei der Russell publikumswirksam und sicherlich auch nicht ohne Folgen für die Aufnahme von Freges Schriften auftrat. Das fragliche Ereignis ist derart anmutig, dass mit seiner Darstellung die Betrachtung Russells beschlossen werden soll. In der Woche vom 16. bis 21. September 1935 fand in Paris, an der Sorbonne, der *Erste Internationale Kongress für wissenschaftliche Philosophie* statt, an dem über 170 Personen aus mehr als 20 Ländern teilnahmen[203] und auf dem fast 100 Vorträge gehalten wurden.[204] Einer dieser Vorträge setzte sich mit dem Nachlass von Frege auseinander, seinem Verbleib, seinem Umfang, seinem Charakter. Der Referent war Heinrich Scholz, der bei dieser Gelegenheit auch über seine Arbeitsgruppe berichtete, die sich seit einigen Jahren um die Aufarbeitung von Freges Werk im westfälischen Münster bemühte.[205]

Hier trat etwas Unerwartetes ein. Unmittelbar, nachdem der Unterzeichnete [Heinrich Scholz, MW] über diesen Nachlass berichtet hatte, meldete sich Bertrand Russell zum Wort, der während des ganzen Kongresses anwesend war. Er trat hervor, um in Anknüpfung an die Ausführungen des Unterzeichneten in einem schönen schlichten Deutsch zu erklären, dass er nie einen grösseren und tieferen Denker in seinem Leben kennen gelernt habe als unseren deutschen Meister Gottlob Frege. Der Eindruck war gross und allgemein. Es war für uns Deutsche ein erhebender Augenblick. Ein Augenblick, wie er sich nur auf einem solchen Kongress ereignen kann. Und ein Augenblick, den wir nicht vergessen werden.[206]

203. Vgl. Neurath/et al. (1935), 377.
204. Vgl. Neurath/et al. (1935), 410ff.
205. Wir kommen auf Heinrich Scholz im vierten Abschnitt ausführlich zu sprechen.
206. Scholz (1935d), 119.

Es muss für den Fregeforscher Scholz ein magischer Moment gewesen sein, dass jener Gelehrte, dessen Werk ihn fast anderthalb Jahrzehnte zuvor zur mathematischen Logik geführt hatte, das Wort erhebt, um die Bedeutsamkeit des in Münster verfolgten Projektes zu unterstreichen. Obwohl Russell „durch seine Lebensarbeit die Tätigkeit des Kongresses so sehr gefördert hat, daß nicht mit Unrecht von einem Kongreß der *Principia Mathematica* gesprochen wurde“,[207] so hinterlässt er doch vor allem mit diesem, leider nicht im Einzelnen überlieferten Diskussionsbeitrag einen atmosphärisch prägenden Eindruck. Dass dieser „groß und allgemein“ war, wird durch eine unabhängige Quelle bestätigt. Wahrscheinlich auf diese Begebenheit bezieht sich die Kongressleitung, wenn sie an vorgelagerter Stelle des Abschlussberichtes festhält: „Bertrand Russell hielt seinen warm empfundenen Nachruf auf Frege in deutscher Sprache“.[208] Dass die Kongressleitung hier von einem „Nachruf“ spricht, zeigt an, wie ergriffen die Anwesenden von den sich erhebenden Gedanken Russells gewesen sein müssen. Nicht nur mit der Autorität der eigenen philosophischen Gelehrsamkeit mag er bei dieser Begebenheit beeindruckt haben, sondern auch mit exklusiven autobiographischen Noten, mit denen seine aufrichtigen Ausführungen über Frege durchdrungen gewesen sein müssen. Der große Logiker und Philosoph aus Cambridge berichtet voller Ehrfurcht von einem Wissenschaftler, den die meisten Anwesenden bestenfalls dem Namen nach kennen. Bekundungen dieser Form wirken nach, denn Hinweise und Ratschläge einer verehrten Person, zu der die meisten aufblicken, geraten nicht in Vergessenheit, sondern werden beherzigt. Auf Russell indes haben im Besonderen die beiden Referate von Scholz[209] über Freges Nachlass sowie „Die klassische deutsche Philosophie und die neue Logik“ Eindruck gemacht, von denen letzterer nach Ansicht der Whitehead-Schülerin Susanne K. Langer „some excellent reflections on the significance of logistic in general, and Frege's work in particular“[210] enthält. Beide haben denselben philosophischen Heroen zum Gegenstand, was zu dieser Zeit eine absolute Ausnahme ist. Entsprechend hebt Russell in seinen publizierten Kongressbeobachtungen hervor, wie sehr er davon eingenommen war, mit welcher

207. Neurath/et al. (1935), 386.

208. Neurath/et al. (1935), 379. Da Russell in Paris lt. Kongressakten lediglich mit dem Referat „The congress of scientific philosophy“ geführt wird (Neurath/et al. (1935), 412), das auch in der Form einer kurzen Kongressbeobachtung publiziert wurde (Russell (1936)), scheint es sich bei dem „Nachruf“ um einen Diskussionsbeitrag zu handeln. Unterstützt wird diese Vermutung durch den Umstand, dass in den in acht Einzelheften bei Hermann & Cie (Paris) verlegten *Actes* einzig die Referate abgedruckt wurden, nicht aber die Diskussionen (vgl. Neurath/et al. (1935), 379). Auch sonst findet sich in den *Actes* kein Hinweis auf einen durch Russell gehaltenen Nachruf – was in Anbetracht der Funktion eines Nachrufs und der seit Freges Tod vergangenen zehn Jahre auch höchst sonderbar wäre. Die Kongressleitung bezieht sich also offensichtlich mit der Wortwahl auf Russells mündliche Ausführungen im Anschluss an das Scholz-Referat über Freges Nachlass.

209. Scholz (1936b), Scholz/Bachmann (1936).

210. Langer (1937b), 57.

Ehrerbietung der Kongress Frege (und Peano) gegenübergetreten ist.[211]

Diese Pariser Begebenheit, die heutzutage nur noch den wenigsten bekannt sein dürfte, inspirierte jedenfalls die Anwesenden. Durch eine glückliche Fügung trafen just jene beiden Gelehrten aus Europa aufeinander, die aus unterschiedlichen biographischen Motiven ein großes persönliches Interesse damit verbanden, Frege dem weiteren Vergessen zu entreißen. So manchen Kongressteilnehmer mag dies zur Lektüre Freges bewogen haben, doch von Nachhaltigkeit war dies leider wiederum nicht geprägt – fehlen doch schlicht die literarischen Zeugnisse in den Jahren danach in Europa. Doch für literarische Zeugnisse blieb in den Jahren nach dem Kongress in Europa allgemein kaum Raum.

3.4 „ich hoffe, dass Sie dadurch meinen Schriften manchen Leser gewinnen werden“

Russells vielfältige Würdigungen waren authentisch, doch besaßen sie einen sekundären Charakter. Die Wertschätzung erfolgte stets parasitär relativ zu seinen eigentlichen Erkenntnisinteressen, der Darstellung seiner Philosophie, der Begründung seiner Thesen, der Vermittlung von seinem Logizismus. Erst kam Russell und dann kam Frege.

Bei aller sonstigen Tristesse brachte die erste Phase der Fregerezeption gleichwohl einen Bewunderer hervor, der die eigene Autorenschaft konsequent hinter die Darstellung Freges zurücktreten ließ. Philip Edward Bertrand Jourdain ist neben Russell die zweite große Ausnahme in der frühen Rezeption. Ihm verdanken wir nicht nur die erste englische Übersetzung Freges überhaupt,[212] sondern als Mathematiker mit beachtlichen wissenschaftshistorischen Befähigungen verband er mit dem Jenenser Logiker ein genuines geschichtliches Interesse. Im Mittelpunkt seiner historiographischen Studien stand nicht zuletzt ein Aufklärungsanliegen, die Korrektur eines fehlerhaft gewachsenen Eindrucks, dem gemäß es in der Frühphase der modernen formalen Logik vor 1900 neben den bedeutsamen Werken Peanos nicht sonderlich viel Substantielles zu berücksichtigen gibt. „Frege's work, which began in 1879, is of a far more subtle character than Peano's [...], and consequently far more suited to the investigation of the principles of mathematics–for which purpose, indeed, his ideography was invented“.[213] Es sollte nicht überraschen, dass

211. Russell (1936), 10.
212. Frege (1915), (1916), (1917).
213. Jourdain (1910), 99f.

Jourdain im Verlauf seiner publizistischen Tätigkeit durch perspektivische Variation immer wieder auf diesen Punkt zu sprechen kommt,[214] damit das historische Urteil endlich auch durch Dritte relativiert wird oder doch zumindest Frege nicht gänzlich in Vergessenheit gerät. „The name of Frege ought to be mentioned with Peano's in this connection".[215]

Von den wenigen Sympathisanten der frühen Jahre verfolgte er mit Abstand am professionellsten das Anliegen, Frege bekannt zu machen. Jourdain behandelte ihn stets als einen bedeutsamen Protagonisten der jüngeren Mathematikgeschichte, dessen Werk entsprechend zu berücksichtigen ist, wenn diese Geschichte angemessen geschrieben werden soll. Jourdain pflegte hierbei nicht den rhetorischen Stil der großkalibrigen Superlative, sondern die, fast ein wenig spröde wirkende historiographische Sachlichkeit. Institutionell gestaltete sich das Projekt vielversprechend, denn als der für England zuständige Herausgeber der internationalen Zeitschrift *The Monist* hatte Jourdain ab 1912 beste Distributionswege für die erforderlichen Aufklärungsschriften. Sein Tod mit nicht einmal 40 Jahren und eventuell Freges Unbehagen, nachdrücklicher beworben zu werden, verhinderten allein, dass Jourdain einen größeren Erfolg hatte. Ungesehen der ausbleibenden Anerkennung dürfen wir uns gleichwohl zu der Einschätzung hinreißen lassen, dass mit Jourdain für einen kurzen Augenblick eine geschichtswissenschaftlich fundierte Proto-Fregeforschung einsetzt, deren methodische Souveränität schließlich erst ein gutes Vierteljahrhundert später wieder erreicht werden sollte.

Ebenso wie Russell trat er mit Frege 1902 in Kontakt. Doch im Unterschied zu seinem Lehrer, bei dem er in Cambridge ab dem Winter 1901/02 Vorlesungen über mathematische Logik hörte und die ihn umgehend für die Materie begeisterten, benötigte er nicht mehrere Jahre der Bewusstwerdung, um sich in seinen Anliegen direkt an Frege zu wenden. Offensichtlich war es nicht Russell, der ihn auf Frege aufmerksam machte. Vielmehr war es die – eventuell durch Russell inspirierte – Lektüre von Dedekind, die Jourdain auf die *Grundlagen* führte.[216] Als Dedekind seine um 1900 bereits klassisch gewordene Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* erstmals publizierte (1888), waren ihm Freges *Grundlagen* noch nicht bekannt. Dedekind selbst bedauert dies, denn im „Vorwort zur zweiten Auflage" 1893 kommt er sogleich auf dieses Versäumnis zu sprechen, um ergänzend zu betonen, dass bei aller Verschiedenheit Frege in manchen Punkten „auf demselben Boden mit mir steht".[217] Da Dedekind auch ansonsten sehr genau abwägt, welche Literaturverweise erforderlich sind, erfährt diese nachgetragene bibliographische

214. Z.B. Jourdain (1911b), 564f.: „Peano's work, though in some ways not nearly so fundamental and subtle as Frege's, has become far better known than the German's".
215. Jourdain (1912b), 150.
216. Vgl. Jourdain an Frege in einem Brief vom 7. September 1902. In Frege (1976), 110.
217. Dedekind (1888), XVII.

Angabe eine besondere Aufwertung und bei Jourdain fällt sie auf einen Boden, der fruchtbarer kaum sein könnte.

Das Besondere seiner Fregerezeption gibt sich nunmehr zu erkennen. Jourdain pflegt eine unbedingte Haltung. Wissenschaftliche Schriften werden nicht unverbindlich überflogen, sondern mit größtmöglicher Aufmerksamkeit durchdrungen. Nachdem er auf das Werk aufmerksam wurde, wird dieses um- und eingehend studiert und es werden sogleich Hypothesen darüber aufgestellt, in welchem problemgeschichtlichen Verhältnis es etwa zur *Begriffsschrift* steht. Statt zu zögern oder sich mit Vermutungen zufrieden zu geben, greift Jourdain zur Feder und fordert Klarheit ein, was es im Besonderen mit der *Begriffsschrift* auf sich hat: „Will you kindly tell me whether this surmise is correct or not? Also, I should like to have the titles of any other of your works which bear on the subject in question".[218]

Jourdains historischer Blick ist unbeirrbar, seine Untersuchungsmethode vergleichbar der eines hartnäckigen Ermittlers. Die gestellten Fragen sind zu beantworten und alles, was als Material zudem für den Fall einschlägig sein könnte, ist ebenfalls zu nennen. Im Sommer 1902 wird Frege fixiert und ab dann nicht mehr aus dem Auge gelassen. Die Belohnung folgt prompt. Freges erstes Antwortschreiben vom 23. September enthält einige der ganz wenigen autobiographischen Notizen über das *Begriffsschrift*-Projekt, die uns unter anderem darüber in Kenntnis setzen, dass es in der Genesis des Werkes gehaltvolle Überlegungen gab, „die keine Spur im Gedruckten hinterlassen haben".[219] Freilich ist dies eine geheimnisvolle Bemerkung, die gerne hätte informativer ausfallen können. Doch ohne Jourdains Insistieren würden wir nicht einmal über diese verfügen. Dank seiner Initiative gibt es dieses wertvolle Dokument Freges überhaupt.

Bis zum Ende der Dekade wird Jourdains Interesse an Frege beachtlich zunehmen, seine Perspektive auf dessen Werk umfassender werden. Während Freges Schriften in seinen wissenschaftlichen Beiträgen ab 1908 eine angemessene Berücksichtigung erfahren,[220] scheinen Freges Errungenschaften in den gemeinsamen Gesprächen mit Russell bereits ab Herbst 1902 einen prominenten und kontinuierlichen Gegenstand zu bilden: „I have been convinced (chiefly by Mr. B. Russell) that it is your ideas which are, perhaps, of the greatest importance in the present state of discussion of the principles of mathematics".[221] Zum Zeitpunkt dieser brieflichen Mitteilung ist in Jourdain bereits der Plan gereift, Frege im Rahmen seiner großen Studie „The development of the theories of mathematical logic and the

218. Jourdain an Frege in einem Brief vom 7. September 1902. In Frege (1976), 110.
219. Frege an Jourdain in einem Brief vom 23. September 1902. In Frege (1976), 111.
220. Vgl. Jourdain (1908).
221. Jourdain an Frege in einem Brief vom 28. Januar 1909. In Frege (1976), 113.

principles of mathematics" ausführlich zu behandeln. Bis dahin hatte er sich vorrangig um die Aufbereitung von Russells mathematischem Grundlagenprogramm gesorgt, dessen publizistische Darstellung ihm gleichermaßen am Herzen lag. Dennoch drängte es ihn, nach Abschluss der Russell-Studien umgehend die Arbeit am Frege aufzunehmen. „It only remains at present to refer to the work of Frege. He did his magnificent work on the principles of logic and mathematics alone and almost too independently, and his subtle distinctions and acute analysis have had great influence on modern work. But at first Russell had hardly heard of him, and re-discovered for himself many of his distinctions and views. In his *Principles*, Russell devoted many pages to a careful critical estimate of Frege's work. I hope to give an account of Frege's work later".[222]

Seine eigene Studie sollte in mehrerlei Hinsicht Russells konzise Darstellung aus den *Principles* übertreffen, nicht zuletzt deshalb, weil sie im Unterschied zum „Appendix A" nicht unter dem massiven Zeitdruck einer bereits eingeläuteten Drucklegung entstehen musste. Auch setzt sich Jourdain sukzessiv mit dem gesamten Schrifttum Freges auseinander, welches er exzellent zu organisieren weiß, bevor die Studie ihre endgültige Form erhält. Hier zeigt sich die Versiertheit des Wissenschaftshistorikers, denn Jourdain zielte auf die vollständige Verfügbarkeit sämtlicher einschlägiger Quellen ab, in deren Kenntnis die Untersuchung zu verfassen war. So fordert er noch Mitte Februar 1909 Frege wiederholt dazu auf: „Please send me copies of any others you may publish".[223] An der publizierten Fassung der Untersuchung gibt sich dieses Kriterium auf eindrucksvolle Weise zu erkennen. Jourdain operiert nicht mit globalen Literaturverweisen, sondern arrangiert kunstvoll ein filigran gesponnenes bibliographisches Netz, das in allen wünschenswerten Details auf all jene Stellen in Freges Werk (bis vornehmlich Anfang der 1890er Jahre) Bezug nimmt, die thematisch für die jeweilige Stelle des Haupttextes einschlägig sind. Es wird ordentlich zitiert, die Quellenangaben sind mustergültig und die Quellenverweise zeugen von einer souveränen Vertrautheit mit den zugrunde liegenden Schriften. Schließlich übersendet er das fertige Manuskript nach Jena mit der Bitte, Frege möge es in aller Ruhe und auf das Gründlichste prüfen.[224] Dieser ist von Jourdains professionellem Interesse an seinem Werk, dem sorgsamen Umgang mit seinem Gedankengut und von dem unermüdlichen Engagement um seine Verbreitung unglaublich gerührt. In Frege keimt die Hoffnung, dass vielleicht dank Jourdains Unterstützung endlich eine größere Leserschaft erreicht werden könnte.

> Ich bin Ihnen sehr dankbar für die ausführliche Darstellung, die Sie

222. Jourdain (1912b), 158.
223. Jourdain an Frege in einem Brief vom 15. Februar 1909. In Frege (1976), 113.
224. Vgl. Jourdain an Frege in zwei Briefen vom 16. und 23. April 1910. In Frege (1976), 114.

> meinen logischen und mathematischen Lehren widmen, und ich hoffe, dass Sie dadurch meinen Schriften manchen Leser gewinnen werden.[225]

Jourdain schreitet nicht zur Publikation, bis die autorisierte Prüfung abgeschlossen ist und Frege antwortet neben dem Ausdruck seiner tiefen Dankbarkeit mit umfassenden Korrekturhinweisen und Kommentaren,[226] die allesamt in der finalen Fassung Berücksichtigung finden. Damit vermeidet Jourdain im Besonderen inadäquate oder gar fehlerhafte Darstellungen und entgeht somit einem Verdacht, dem sich Russell als „betroffener" Logizist stets ausgesetzt sieht: aus einer befangenen Perspektive heraus zu schreiben. All dies zusammen macht Jourdains Kapitel „Gottlob Frege" zu einer wissenschaftshistorisch ausgezeichneten Darstellung, die einen publizistischen Höhepunkt in der ersten Phase der Fregerezeption repräsentiert. Der Text erscheint 1912 im 43. Band des *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, einer der besten Adressen der Zeit. Noch während der Entstehung der Studie lässt er Frege wissen: „I mean to write a fuller account of the *Grundgesetze*, which I have not dealt with as fully as I should".[227] Jourdain sieht ein, dass eine angemessene Aufbereitung der *Grundgesetze* im Rahmen der Studie nicht möglich ist, wenn der Text in einem zumutbaren Aufsatzformat erscheinen soll.

So beschließt seine Studie hoffnungsvoll, wenngleich abrupt mit den Worten: „The analysis of Frege's *Grundgesetze* will be continued later"[228] – ein gewagtes Versprechen, für das die Wissenschaftsgeschichte eine Vielzahl von unrühmlichen Beispielen bereit hält. Auch in diesem Fall sollte es nicht mehr zu einer Fortsetzung kommen. Ob dies mit dem Voranschreiten seiner Erkrankung im Zusammenhang steht, kann nur vermutet werden. Dem Versprechen, sich an späterer Stelle ganz den *Grundgesetzen* zu widmen, sollte Jourdain gleichwohl, wenn auch auf eine andere Weise als der in Aussicht gestellten, nachkommen. Fraglos repräsentierte sein Frege-Aufsatz von 1912 ein ausgezeichnetes Instrument zur Bewerbung Freges, wenngleich die wirkungsgeschichtlichen Folgen dieser Publikation überschaubar blieben. Eine Fortsetzung wäre ein weiteres probates Mittel gewesen, doch gleichermaßen zweckmäßig war ein anderer Weg, den Jourdain zusammen mit Johann Stachelroth von 1915 bis 1917 beschritt.

Statt das Projekt der *Grundgesetze* mit einem Sekundärtext vorzustellen, konnte man im Falle Freges auch problemlos den Autor selbst zu Wort kommen lassen. Vor

225. Frege an Jourdain in einem undatierten, aber nach dem 23. April (und nicht nach Oktober) 1910 verfassten Brief. In Frege (1976), 114f.
226. Frege an Jourdain in einem undatierten, aber nach dem 23. April (und nicht nach Oktober) 1910 verfassten Brief. In Frege (1976), 116ff.
227. Jourdain an Frege in einem Brief vom 23. April 1910. In Frege (1976), 114.
228. Jourdain (1912a), 301.

allem verfügte der erste Band mit „Vorwort“, „Einleitung“ und den ersten (mindestens 33) Paragraphen über eine exzellent verständliche Darstellung der Problemgeschichte, der Programmziele sowie der technischen Grundlagen des Projektes. Sie mussten nur einer englischsprachigen Leserschaft zugänglich gemacht werden und nachdem sich Jourdain von Frege die Erlaubnis zur Übersetzung sowie zu deren Veröffentlichung eingeholt hatte,[229] vollzogen Stachelroth und Jourdain exakt dies. Mit ihrer Übersetzung der Eröffnungsteile des ersten Bandes der *Grundgesetze* bis einschließlich des Paragraphen Sieben machten sie ein selbst im deutschsprachigen Raum nur noch schwer zugängliches Werk partiell international zugänglich. Sie arrangierten den übersetzten Textbestand in einer dreiteiligen Aufsatzfolge, die dank Jourdains Herausgebertätigkeit problemlos in *The Monist* erscheinen konnte.[230] Das erklärte Ziel dieser 1915 gänzlich neuartigen Form der Auseinandersetzung mit dem weithin unbekannten Autor war unmissverständlich.

> It is to be hoped that the present translation, for which Professor Frege has most kindly given me his permission, will help to make Frege's magnificent work better known. Frege's work is the first of that of the modern logicians.[231]

Doch ebenso wie die exzellente Überblicksstudie drei Jahre zuvor vermochte auch die Aufsatzfolge nicht, Frege den Durchbruch zu verschaffen. Der Hauptgrund dürfte auch hier darin bestanden haben, dass vor allem die nordamerikanische Leserschaft noch weit davon entfernt war, über das erforderliche Problemverständnis zu verfügen. Freges methodisches Feingefühl für logico-semantische Erkenntnisfragen war jenseits des Atlantiks noch nicht ausgeprägt, seine Probleme hatten nur die Allerwenigsten. Man vergegenwärtige sich, dass in der zweiten Dekade des 20. Jahrhunderts selbst in Europa die Logikdiskussion die Fregeschen Standards noch nicht wertzuschätzen oder gar zu praktizieren vermochte und diese Diskussionskultur war seinerzeit der amerikanischen weit voraus. Jourdains Übersetzungsprojekt, vorbildlich organisiert und professionell umgesetzt, erzielte nicht den gewünschten Erfolg, weil der erforderliche Boden erst eineinhalb Jahrzehnte später die entsprechende Fruchtbarkeit aufweisen sollte.[232] Die Situation in Europa war zwar gegenüber jener in den Vereinigten Staaten eine grundverschiedene, allerdings änderte dies nur wenig am gleichermaßen bescheiden ausgeprägten Rezeptionsbedürfnis. Sofern hier irgend etwas nachwirkte, dann waren das immer noch die kolportierten Missverständnisse aus den Besprechungen früherer Jahrzehnte, gegen die Jourdain

229. Vgl. Jourdain an Frege in einem Brief vom 15. Januar 1914 sowie Frege an Jourdain in einem undatierten Brief sowie in einem Brief vom 28. Januar 1914. In Frege (1976), 125f. u. 129.
230. Vgl. Frege (1915), (1916), (1917).
231. Jourdain (1915), 484.
232. Siehe 5.1 u. 5.2.

nur mit mäßigem Erfolg ankam. „And the very important ends for which Frege's ideography was designed were more or less overlooked by Venn, Schröder, and Peano".[233] Treffend formuliert und immer noch zutreffend in der Sache, denn es waren die resultierenden fehlerhaften Einschätzungen aus diesem Übersehen, die noch immer für eine robuste Nichtbeachtung sorgten.

Vergeblich war die investierte Arbeit dennoch nicht und dank der ausgezeichneten Qualität von Stachelroths und Jourdains Übersetzung verwendeten Max Black und Peter Geach Abschnitte aus diese Textpassagen für ihren 1952er *Translations*-Band.[234] Das war beachtlich, lagen doch zwischen diesen beiden wegweisenden Publikationen nicht nur mehr als dreieinhalb Jahrzehnte, sondern vor allem auch eine Wende in den mehrheitsfähigen Wahrnehmungsmodalitäten, es vollzog sich die Transformation von einer randständigen Fregerezeption hin zu einer hoch spezialisierten und im Fokus der Aufmerksamkeit stehenden Frregeforschung. Es darf als späte Würdigung seiner Arbeit verstanden werden, dass Jourdains *Fundamental-Laws*-Aufsatzfolge nicht nur die nachfolgenden Frege-Übersetzer inspirierte und ihnen eine wichtige Orientierung in einem noch wenig bearbeiteten Feld lieferte, sondern dass sie Anfang der 1950er Jahre immer noch die inzwischen weit gereiften Qualitätsanforderungen der Fregeforschung erfüllte. Black und Geach haben mit der *Translations*-Edition nicht nur einen bedeutsamen Beitrag zur internationalen Fregeforschung geleistet, sondern auch Jourdain ein kleines, bleibendes Denkmal gesetzt.

Es wurde bereits festgestellt, dass seine wissenschaftshistorischen Studien zu Frege in mehrerlei Hinsicht professioneller ausfielen als jene Russells. Neben diesen qualitativen Unterschieden gab es jedoch noch einen kategorialen, der leider nicht zum Tragen kam. Im Unterschied zu seinem einstigen Lehrer interessierte sich Jourdain in wissenschaftlicher Absicht nicht nur für Freges Werk, sondern er interessierte sich auch für Freges Biographie, für Freges Leben, für die Person Gottlob Frege. Dies ließen bereits seine allerersten an Frege brieflich gerichteten Fragen erkennen und dieses Erkenntnisinteresse verfolgte Jourdain auch mindestens über das nachfolgende Jahrzehnt hinweg. Langfristig sollte nicht nur im Rahmen von zwei umfangreichen Frege-Studien das Werk professionell vorgestellt werden (von denen uns, wie erwähnt, nur die erste überliefert ist), sondern dies sollte begleitet werden durch die umfassende Aufbereitung von Freges Leben, im Besonderen seines wissenschaftlichen Werdegangs, wobei Jourdain wahrscheinlich vor allem an so etwas dachte wie die Erzählung eines Gelehrtenlebens im Stile einer problemgeschichtlichen Bewusstwerdung. Es dürfte unstrittig sein, dass Jourdain im Verfolgen eines

233. Jourdain (1915), 483.
234. Vgl. Geach/Black (ed.), 137ff.

solchen Projektes nicht zuletzt seine eigene Neugier befriedigen wollte. Er war fasziniert von Frege und wollte Einblicke erhalten in dieses vermeintlich gewöhnliche Leben, das derart Außergewöhnliches hervorzubringen vermochte. Jourdain wollte dem Genie am Schreibtisch, im Hörsaal oder beim Spazierengehen über die Schulter schauen, er wollte retrospektiv teilhaben an der Genesis von *Begriffsschrift* & Co.

In seiner herzlich direkten Art wandte er sich in diesem – aus heutiger Sicht – gleichermaßen spektakulären Projekt abermals an Frege. Jourdain verschwendete keine wertvolle Zeit und schlug nicht den mühsamen und in seinem Ertrag ungewissen Weg über die wenigen Mitstreiter oder persönlichen Freunde ein, um etwas über die fragliche historische Figur in Erfahrung zu bringen. Der entscheidende Brief war direkt für Frege bestimmt und Jourdain kam wie immer sogleich zum Punkt:

> I am most anxious that a full and adequate biography of you should be published. Might I suggest that, in your spare time, you should draw up an autobiography which should give some account of the development of your thoughts on logic and arithmetic. I am most vividly anxious to have more information about this, the more so as I think that practically the whole of the development of the ideas must have gone on without any external influence. Would it be possible for you to write the biography, let me translate it, and have it published in America by the firm managed by Dr. Carus? I feel sure that he would be glad to do so, and it would be very pleasant to me to know that I had a small part to do in paying honour to you.[235]

Wäre dieses Anliegen umgesetzt worden, dann besäße die Wissenschaftsgeschichte ein weiteres unbezahlbares Dokument. Für die Fregeforschung wäre eine Autobiographie die entscheidende Quelle schlechthin. So manche Frage, über die seitdem heftig spekuliert wurde, wäre dann wahrscheinlich nie gestellt worden, weil Frege uns bereits die Antwort präsentiert hätte. Andere, bis auf den heutigen Tag kaum begreifbare und narrativ nicht fassbare Konstellationen, wie die ohne jedes Vorbild stattfindende Schöpfung der modernen Aussagen- und Prädikatenlogik, wären in ihrer einzigartigen Genesis möglicherweise im Ansatz intelligibel, wenn uns Frege einen Selbstbericht über die fraglichen Jahre hinterlassen hätte, ein persönliches Ereignisprotokoll über eine der Sternstunden der Wissenschaftsgeschichte. So muss es bereits Jourdain gesehen haben, denn seine bereits bestehende Neugier wurde erheblich verstärkt durch den untrüglichen Verdacht, dass „practically the whole of the development of the ideas must have gone on without any external influence“.

235. Jourdain an Frege in einem Brief vom 29. März 1913. In Frege (1976), 125.

In dieser Deutlichkeit vermochte das nicht einmal Russell auszudrücken. Es handelt sich hierbei um eine beachtliche Feststellung, welche nicht nur die Einsicht um den außergewöhnlichen Charakter von Freges Leistungen zu präsupponieren hat, sondern dieses Wissen zudem auf der historisch informierten Folie der grundlagentheoretischen Landkarte der Zeit verbindlich zu interpretieren weiß. Jourdain ist 1913 in seinem Wissen um Frege fast allen anderen um Jahrzehnte voraus.

Weshalb das Projekt nicht zum Abschluss kam bzw. gar nicht erst weiter verfolgt wurde, wissen wir nicht. Streng genommen wissen wir nur, dass eine Autobiographie Freges oder eine auf autobiographischen Notizen basierende Biographie weder Mitte der zweiten Dekade noch später veröffentlicht wurde. Unwahrscheinlich ist allerdings, dass das Projekt an Jourdain oder Carus scheiterte. Um 1913/15 war Jourdain noch überaus tatkräftig und hätte ein Manuskript Freges mit besonderem Enthusiasmus übersetzt sowie redaktionell endbearbeitet. Auch scheint fraglich, ob Carus seine Zustimmung verweigert hat. Jourdain hätte in diesem Fall einen anderen Publikationsort aufgetan.

Naheliegend ist indes der traurige Gedanke, dass sich Frege nicht in der Lage sah, Jourdains Bitte nachzukommen. Die Anfrage fällt in die Jahre des Schweigens. 1913 befindet sich Frege inmitten der Zeit seiner publizistischen Untätigkeit. Kraft gibt ihm seine zweite Familie und womöglich gilt all seine Aufmerksamkeit dem kleinen Alfred. Hinzu kommt, dass er darüber grübeln mag, was für eine Biographie er erzählen soll. Den philosophischen Heroen des späten 20. Jahrhunderts, der sich gegen alle Widrigkeiten mit fast übermenschlichen Kräften behauptet und kaum fassbar Bahnbrechendes leistet, gibt es um 1913 noch nicht und Frege hätte sich mitnichten persönlich derart stilisiert. Doch eine Geschichte des Scheiterns, ein Leben im Misserfolg mag man nicht schreiben, weil es niemand lesen möchte. „Die Geschichte des erfolglosen Gelehrten" mag Stoff für einen guten Roman bergen, doch als Autobiographie wäre sie ein Abgesang auf das eigene Leben. Das sollte sich kein Autor abverlangen. Bleibt also nur die Transzendierung der eigenen Subjektivität, um auf der nüchternen Ebene der Sachargumente rational und en détail zu rekonstruieren, wie das Werk zu dem wurde, das es 1913 ist und umfasst. Doch für eine derartig große intellektuelle Aufgabe, die noch einmal den großen Bogen über die Inhalte der diversen „Vorworte" und „Einleitungen" hinweg spannt, um auch bis dato Unausgesprochenes narrativ einzuweben, hat Frege möglicherweise nicht mehr die Kraft. Bei dem Umfang und der gewaltigen Substanz seiner Forschung wäre eine problemgeschichtlich erzählte Wissenschaftsbiographie aus der Vollzugsperspektive zum umfangreichsten Werk seines Schaffens geworden. Zum Zeitpunkt der Anfrage liegt die Publikation seines letztes Buches bereits ein Jahrzehnt zurück und ein weiteres wird Frege auch nicht mehr schreiben. Es ist daher nicht abwegig anzunehmen, dass Jourdains Bitte Frege schlicht überfordert hat.

Zur erhofften Autobiographie kam es nicht, aber es ist beeindruckend, dass Jourdain in einer intellektuellen Sphäre, in der Frege so gut wie keine Rolle spielt, als Erster und wohl auch als Einziger auf den brillanten Gedanken geführt wurde, Frege über sein eigenes Leben und die Genesis seiner Werke noch berichten zu lassen. Für alle anderen geradezu unerkennbar erkannte er präzise den außergewöhnlichen Charakter dieses Gelehrtenlebens, dessen bewunderungswürdige Alleinstellungsmerkmale erst nach weiteren Jahrzehnten späteren Generationen stückweise ins Bewusstsein kam. Zu einer Zeit, in der Frege bestenfalls durch wissenschaftliche Melderegister erfasst wurde, er selbst aber als wissenschaftlicher Gegenstand untauglich schien, war es Jourdain, der offensiv eine große und auf Englisch verfasste Selbstbiographie einforderte. Für Frege wurde Philip Jourdain zum Visionär. Doch seine Visionen, so treffend sie aus heutiger Sicht auch gewesen sind, konnte er nicht verwirklichen. Er verstarb mehr als fünf Jahre vor dem von ihm verehrten Frege.

3.5 „eine der allergrößten und wissenschaftlich wertvollsten Leistungen“

Mehr als 30 Jahre lang bewarb Russell Freges Leistungen und dennoch vermochte er es nicht, ihm zum Durchbruch zu verhelfen. Wesentlich dasselbe gilt noch von einem anderen Gelehrten, der vollkommen unprätentiös und mit unerschöpflicher Ausdauer Frege „liebevolle Ausführungen“ widmete, die seine „Verdienste um die Logik in das rechte Licht rücken“,[236] doch von dem man nicht einmal sagen kann, „daß er in seiner Schule ein sehr geschätztes Mitglied war“.[237] Unsere Betrachtungen in diesem Teil der Untersuchung blieben unvollständig, würden wir Paul Ferdinand Linke übergehen, einen wenig einflussreichen Jenenser Philosophen, der Frege ebendort noch kennen- und schätzen lernte.[238]

Dass Linke neben Wittgenstein, Carnap und Russell als potentiell einflussnehmende Größe überhaupt erwogen werden sollte, verdankt sich einem anderen kaum bekannten Hallenser Privatdozenten, Gerhard Stammler. Dieser hatte bereits 1928 in einer umfangreichen Studie über die Grundlagen und den Aufbau der Logik in acht, vergleichsweise ausführlichen Paragraphen Kernbestandteile von Freges Logik und Semantik diskutiert. Das war für sich genommen und zu dieser Zeit eine respektable Leistung. Doch vornehmlich von Interesse ist jene Beobachtung, mit der die Betrachtung Freges einsetzt: „Daß dieser Mathematiker Frege einer der

236. Dempe (1957), 271.
237. Scholem (1977), 111.
238. Vgl. zudem Dathe (2000).

philosophischsten Köpfe war, diese Erkenntnis hat sich erst langsam in den letzten Jahren Bahn gebrochen und dringt jetzt allmählich in die Literatur ein".[239] Auf welche Begebenheiten und Personen sich Stammler bezieht, wenn er davon spricht, dass sich diese Erkenntnis „langsam in den letzten Jahren Bahn gebrochen" hat, darüber verrät er uns nichts. Publizistisch hatte sich in den Jahren vor 1928 überhaupt nichts Bahn gebrochen. Sieht man einmal von der ein Jahr zuvor veröffentlichten Untersuchung *Begriff und Beziehung* von Wilhelm Burkamp ab, die eine kritische Darstellung einzelner Elemente aus Freges Logizismus beinhaltet[240] und die sogar Frege dediziert ist, so gibt es seit gut eineinhalb Jahrzehnten so gut wie überhaupt keine Publikation zu Frege zu dokumentieren. Mehr noch. Geht man nach den Veröffentlichungen, die Frege auch nur im Ansatz berücksichtigen, so erreicht die Fregerezeption im zweiten und dritten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts ihren Tiefststand. Stammler bezieht sich also auf eine Zeit, in der die Diskussion von Frege auf niedrigstem Niveau stagniert.

Erhellend ist indes die von ihm platzierte bibliographische Angabe, die dem Hinweis nachfolgt, dass diese Erkenntnis „jetzt allmählich in die Literatur ein[dringt]". Verwiesen wird auf den Text „Über den gegenwärtigen Stand der Logik und Erkenntnistheorie in Deutschland" von Paul Linke, der ohne Angabe einer Jahreszahl oder einer Bandnummer in einer Zeitschrift mit der Abkürzung „Am. Philos. Journ." erschienen ist oder erscheinen soll. Die bibliographischen Angaben sind in mehrerlei Hinsicht irreführend. Es überrascht nicht, dass Stammler unter Verwendung dieser Informationen keine genaueren Angaben zur Publikation machen konnte, erschien ein fraglicher Text weder unter diesem deutschen Titel noch in einer Zeitschrift, die dem Kürzel „Am. Philos. Journ." auch nur näherungsweise entsprechen könnte. Zutreffen dürfte indes, dass Linke Stammler frühzeitig ein Manuskript mit diesem Titel zur Verfügung stellte, das bereits 1926 unter dem Titel „The Present Status of Logic and Epistemology in Germany" in *The Monist* erschien, bei dem es sich tatsächlich um ein „American Philosophical Journal" handelt, was aber eben kein bestimmter Zeitschriftenname, sondern eine allgemeine Bezeichnung ist. In seiner durch Edward Leroy Schaub, den Herausgeber des *Monist*, angefertigten Übersetzung[241] erschien der Text zwei Jahre später schließlich noch ein weiteres Mal unter dem Titel „Logic and Epistemology" in Schaubs umfassender Überblicksstudie *Philosophy Today.* Tatsächlich erschien damit für eine internationale Leserschaft ein an zwei Publikationsorten zugleich verfügbarer Artikel, der Auskunft erteilt über den gegenwärtigen Stand der Logik und Erkenntnistheorie in Deutschland, der nicht aus einer schulphilosophisch vorein-

239. Stammler (1928), 172.
240. Burkamp (1927), 201ff.
241. Vgl. Linke (1926), 222.

genommenen Perspektive verfasst wurde. Da der Phänomenologe Linke zu diesem Zeitpunkt bereits seit einem guten Jahrzehnt von Freges Schriften beeindruckt und beeinflusst war, ist es keineswegs überraschend, wenn er ihm einen gebührenden Platz in seiner Überblicksstudie verschafft.

> Nevertheless, the great reformation in logic [. . .] was a continuation of ideas first expressed by the Jena mathematician, Gottlob Frege. This prominent investigator has been acclaimed by Bertrand Russell to be the first thinker who correctly understood the nature of numbers. And thus Frege played an important role in the philosophy of mathematics as well as in that of mathematical logic, among whose founders he must be counted. His philosophic mind developed the epistemological consequences of the fundamental thought of mathematical logic, namely, the identical nature of mathematical and logical laws. Thus he arrived at nothing less than the fundamental epistemological problem of logic.[242]

Die zitierte Passage sowie Linkes diesbezügliche Explikationen im weiteren Textverlauf korrespondieren mit Stammlers thematischem Bezug, womit es als sicher gelten dürfte, dass dieser sich in seinem Fußnotenverweis exakt auf dieselben Stellen – nur eben des deutschsprachigen Originals – bezieht. Damit liegt aber folgende Konstellation vor: Linkes wertschätzende Berücksichtigung von Frege erscheint in kurzem Abstand an zwei exponierten Orten für eine englischsprachige Leserschaft zu einer Zeit, die wir retrospektiv als eine Wende in der Fregerezeption kennzeichnen dürfen.[243] Während die 1920er Jahre den Tiefpunkt in der publizistischen Befassung mit Frege markieren, wendet sich das Blatt langsam mit dem Beginn der 1930er Jahre. Da zudem Gerhard Stammler eine zwar falsche, aber immerhin für wahr gehaltene Beobachtung über die merkliche Zunahme der Fregerezeption vorträgt, die er mit dem Verweis auf Linke unterstreicht, liegt für den Augenblick die Vermutung nicht fern, dass die Auseinandersetzung tatsächlich mit dem fraglichen und wiederholt veröffentlichten Text Linkes in Zusammenhang steht. Es wäre nicht das erste Mal in der Philosophiegeschichte gewesen, dass die fehlerhafte Einschätzung einer Situation handlungswirksamen Einfluss erfährt.

Wie sich im nächsten Abschnitt herausstellen wird, trifft auch dies nicht zu, weil die Zunahme der publizistischen Aktivitäten im besagten Zeitraum auf das Wirken einer anderen Gruppe von Personen zurückzuführen ist, die nicht mit Linke oder seinen Schriften im Zusammenhang stand. Dass Linke auch mit späteren Beiträgen zu Frege kaum Einfluss auf das Lektüreverhalten der Kollegen nehmen konnte,

242. Linke (1926), 226; (1928), 363f.

243. Vgl. hierzu unsere Charakterisierungen der ersten beiden Phasen der Fregerezeption im ersten Abschnitt.

darf allerdings nicht nur mit seiner akademisch isolierten Rolle im kleinen Jena wegerklärt werden. Aufgrund seiner intellektuellen Biographie hatte er ein doppeltes Interesse an Frege, diesem „großen Jenenser Mathematiker und Logiker“.[244]

Da ist zum einen die Wertschätzung der Beiträge für die mathematische Grundlagenforschung, die Linke immer wieder durch unmissverständliche Urteile der Form ausdrückt: „Die Logistik halten wir in der Form, die ihr Frege und Russell gegeben haben, für eine der allergrößten und wissenschaftlich wertvollsten Leistungen des menschlichen Geistes überhaupt“.[245] Doch mit diesen Einschätzungen kann er sich in den 1930er Jahren kein Gehör verschaffen, weil er als Logiker keinen Ruf genießt, und seine entsprechenden Untersuchungen nach dem Zweiten Weltkrieg, die gleichermaßen eindeutig von den „hervorragendsten Leistungen [und] ruhmreichsten Taten“[246] sprechen, beziehen sich mit fast nur noch lokaler Wirksamkeit auf einen inzwischen berühmten Frege. Lesenswert bleiben sie dennoch, legt Linke doch unter anderem überzeugend dar,[247] dass Frege „als zeitlich erster das Wesen der Implikation wirklich erkannt“[248] hat – eine „genial durchdachte“[249] theoretische Fundierung des formalen Folgerungsbegriffs. Auch vermag er klar darzulegen, dass er es war, der bei allen nachfolgenden Variationen des Logischen dem Kern der Disziplin die identitätsstiftende Definition geschenkt hat, denn „dieser Satz Freges dürfte heute kaum von jemandem ernstlich bestritten werden“.[250]

Geradezu den Charakter einer symbolischen Verneigung besitzt Linkes Auftritt während des *Ersten Deutschen Kongresses für Philosophie* nach Kriegsende Anfang September 1947 in Garmisch-Partenkirchen. In Anwesenheit der deutschsprachigen Philosophenschaft, für die Frege mehrheitlich immer noch ein Unbekannter ist, ergreift er zum Beginn des zweiten Kongresstages die Gelegenheit, um auf die beeindruckend sorgfältige und gründliche Analyse des Wahrheitsbegriffs aufmerksam zu machen, die wir dem „großen Reformator der Logik überhaupt“[251] verdanken. Diesem Anliegen bleibt Linke verpflichtet, denn auch auf dem *Dritten Deutschen Kongress für Philosophie* in Bremen 1950, auf dem erstmals ein Symposion zur Logistik abgehalten wurde,[252] scheint er der einzige der anwesenden Philosophen zu sein, der die Errungenschaften angemessen einzuordnen weiß. Er ist zudem (lt. Kongressprotokoll) der einzige Diskutant, der dezidiert auf die besondere Rolle Freges eingeht und der beeindruckend prägnant konzediert: „Das

244. Linke (1952a), 383.
245. Linke (1936), 33.
246. Linke (1953a), 108.
247. Vgl. vor allem Linke (1953a).
248. Linke (1947), 267.
249. Burkamp (1938), 177f.
250. Linke (1952b), 53.
251. Linke (1949), 379.
252. Wir gehen hierauf noch einmal zum Beschluss des vierten Abschnitts ein.

philosophisch Wichtige ist aber gar nicht die Begriffsschrift selbst, sondern die gewaltige Gedankenarbeit, die nötig war, sie zu entwickeln".[253] Das formale Resultat ist ohne seine philosophische Herkunft nicht nur unverständlich, sondern unbrauchbar. Der geniale Logiker Frege wurde mithin möglich, weil es den brillanten Philosophen Frege bereits gab. Das „Vorwort" der *Begriffsschrift* kündet von dieser Genesis, auch wenn es sich publizistisch umfassend freilich in einer anderen Reihenfolge niederschlagen sollte.

Zum anderen ist Linke begeistert von der Vielzahl an Gemeinsamkeiten bzw. Konvergenzen, die sich zwischen Freges Philosophie und Errungenschaften der Brentano-Schule aufzeigen lassen. Der von ihm rekonstruierte Aufweis von Übereinstimmungen und argumentativen Überlappungen lässt ihn von einer „philosophischen Reformation"[254] im deutschsprachigen Raum sprechen, die mit Bolzano einsetzt, sich über Brentano fortsetzt und mit Frege zum Abschluss kommt. Gleichsam als „analytischer Phänomenologe" entwirft Linke „Gottlob Frege als Philosoph", um eine weithin unbekannte Seite zu beleuchten. Der gleichnamige Aufsatz erschien im ersten Heft des ersten Bandes der von Linke mitbegründeten *Zeitschrift für philosophische Forschung*, die es sich explizit zum Ziel gesetzt hatte, ein Publikationsorgan zu sein, „das im Gegensatz zur bisherigen Tradition nicht einer bestimmten Auffassungsweise, Forschungsmethode und Problematik dient, sondern allen Problemgebieten, Arten und Strömungen des philosophischen Denkens, bzw. der philosophischen Forschung unparteiisch zur Verfügung steht".[255] Linkes *ZphF*-Aufsatz, der letztlich zum sichtbarsten Beitrag seiner Fregeforschung werden sollte und der tatsächlich auch eine international wahrgenommene Besprechung erfuhr,[256] hatte damit zumindest einen passenden, weil liberalen Publikationsort gefunden, denn in seiner thematischen Ausrichtung war er dem philosophischen Bewusstsein der frühen Nachkriegsjahre sicherlich um einiges voraus.

Bezeichnend für Paul Linke ist jedoch, dass seine bedeutsamsten Beiträge zu Frege, die allesamt Alleinstellungsmerkmale mit sich führen, keinerlei Einfluss auf die zeitgenössische Fregerezeption hatten. Da treffen wir unter anderem auf sein seit den 1920er Jahren unermüdlich vollzogenes Aufklärungsanliegen, dass nicht Husserl, sondern Frege der eigentliche Überwinder des Psychologismus ist.[257] Zum Teil mit spitzer Feder, aber in der Sache vollkommen korrekt, weist er kontinuierlich darauf hin, dass „Husserl Freges Ablehnung des Psychologismus übernommen [hat], doch leider nicht seine stichhaltigsten Argumente",[258] was in Kenntnis des Umstandes,

253. Linke zit. n. Schmidt (1952), 185.
254. Linke (1946), 77.
255. Schischkoff (1949), 3.
256. Scholz (1948).
257. Etwa Linke (1928), 365ff.; (1946), 96; (1947), 267ff.; (1952a), 385ff.; (1961), 54.
258. Linke (1947), 267f.

dass Husserl auch nicht auf Frege verweist, dem Vorwurf eines schlechten Plagiats gleichkommt.

Eine besondere Erwähnung verdient darüber hinaus eine der bis heute kürzesten Veröffentlichungen zu Frege, die publizistisch nicht einmal von Linke verantwortet werden musste, die es ohne sein Zutun aber wahrscheinlich nicht gegeben hätte. 1934 erscheint im Alfred Kröner Verlag in Leipzig die neunte, neubearbeitete und erweiterte Auflage des *Philosophischen Wörterbuchs* von Heinrich Schmidt. Ein Bestandteil dieser Erweiterung ist der, mit einem Umfang von einer halben Spalte und nur knapp 100 Worten, wahrscheinlich erste Lexikoneintrag zu Frege überhaupt. Er wird sogleich „bedeutend als Logiker"[259] geführt, an den in Teilen B. Russell anknüpft. Wahrscheinlich auf Hinwirken seines Jenenser Kollegen und engen Freundes Linke kam es zur Aufnahme des Stichwortes „Frege, Gottlob".[260] Zumindest im „Vorwort" erwähnt Schmidt, dass er im Besonderen Linke für vielfache Hinweise und Ratschläge dankbar ist.

Allerdings ist es geradezu ausgeschlossen, dass Linke darüber hinaus auch als Ghostwriter des Artikels fungierte – er trägt in keinster Weise seine Handschrift. Nach Faktenlage dürfte Schmidt auch diesen Eintrag selbst verfasst haben, wenngleich er als Laie in Sachen Frege ein zuverlässiges Referenzwerk zur Orientierung benötigte. Doch in den Arbeiten Paul Linkes, in denen auf Frege stets kontextbezogen eingegangen wurde, war keine geeignete konzise Gesamtschau zu finden. Fündig wurde der Autor des Artikels in Wilhelm Burkamps *Logik*, die als literarische Maske eine üppige Quelle der Inspiration darstellte.[261] Burkamps *Logik* war zum Zeitpunkt der Überarbeitung der achten Auflage des *Philosophischen Wörterbuchs* erst jüngst in der Reihe *Die Philosophischen Hauptgebiete in Grundrissen* erschienen und versprach damit einen gleichermaßen handlichen wie aktuellen Überblick über diese philosophische Teildisziplin. Der Reihenanspruch betraf nicht nur die Darstellung der Logik im Allgemeinen, sondern auch den Logiker Frege im Besonderen, für den der Paragraph 55 eine kursorische Kennzeichnung ausgewählter Resultate bereit hält. Dass dieser in Buchabsatzform verfasste Frege-Paragraph sogleich als Lexikoneintrag verstanden werden konnte, stellte nunmehr der Verfasser des Artikels unter Beweis, der sich für diesen fast wortwörtlich bei Burkamp bediente.[262] Die abschließende Literaturangabe „Vgl. W. Burkamp, Logik, 1932" fällt

259. Schmidt (1934^9).
260. Vgl. Dathe (2000), 235.
261. Herrn Prof. Thiel verdanke ich den aufmerksamen Hinweis, Schmidts Wortlaut noch einmal exakt mit jenem von Burkamp abzugleichen.
262. Bei Schmidt (1934^9) lautet es: „mit scharfer Abhebung des Logischen von allem Psychologischen und allen empirischen Gegenständen führt er die scharfsinnigen Unterscheidungen Bolzanos in die Formalistik der Logik ein. Er faßt das Wesen des Begriffs als eine Funktion mit einer oder mehreren Variablen. Die Begriffe der Funktion, des Arguments, der Konstanten und der Variablen werden bei F. grundlegend für das Verständnis sinngemäßer Struktur des Begriffs und des

daher für den Urheber des Eintrags noch äußerst schmeichelhaft aus. Besonders offensichtlich ist die unkritische Übernahme in der missglückten Wendung Burkamps „Den Funktionen (Begriffen) stellt Frege die „Gegenstände", die für diese Funktionen wahre oder falsche Werte sind, gegenüber",[263] die vom Autor des Artikels ohne jede Veränderung adaptiert wird. Die vermeintlich unproblematische Paraphrasierung der Wendung „der Wahrheitswert des Wahren/Falschen" bzw. „der Wert ‚wahr' oder ‚falsch'" durch „wahre oder falsche Werte" sollte einem Kenner der Terminologie Freges erst recht nicht im knapp bemessenen Umfang eines Lexikonartikels widerfahren, weil sie schlicht sinnentstellend ist. Ungesehen der benannten Mängel in der Ausführung gebührt neben Linke gerade auch Schmidt das große Verdienst, dass sie Frege einer enzyklopädischen Berücksichtigung für Wert befanden zu einer Zeit, in der er vornehmlich unverstanden war und nicht als literaturfähig erachtet wurde.

Die bereits benannten beachtlichen Leistungen wurden jedoch noch übertroffen durch die aufrichtige Geste einer wissenschaftlichen Mahnung im universitären Kontext, die für Linke im akademischen Alltag unangenehme Konsequenzen hätte haben können. Mitte November 1951 fand an der Friedrich-Schiller-Universität Jena eine Konferenz statt, auf der das Verhältnis der formalen Logik der „bürgerlichen" Philosophie zur dialektischen Logik des Dialektischen Materialismus geklärt werden sollte.[264] Obwohl als wissenschaftliche Tagung geführt, wurden durch sie doch vor allem politisch affine Interessen verfolgt, denn im Kern ging es um das Zementieren von marxistisch-leninistischen Deutungshoheiten, um die Gewährleistung von Ausschließlichkeitsansprüchen in Fragen der Weltanschauung. Vor allem wollte man das Ein- und Zugeständnis, dass aus den einzelspracheninvarianten Untersuchungsgegenständen der formalen Logik kein fundamentalwissenschaftlicher Begründungsanspruch erwächst. Aus der logischen Analyse der formalen Baustei-

Satzes. Den Funktionen (Begriffen) stellt F. die „Gegenstände", die für diese Funktionen wahre oder falsche Werte sind, gegenüber. Die Satzlogik stellt F. wegen ihrer logisch-strukturellen Einfachheit der Begriffslogik voran. B. Russell (s. d.) knüpft z. T. an F. an".

Bei Burkamp (1932, 30f.) lautet es: „Gottlob *Frege* (1848-1925) hätte mit seiner scharfen Abhebung des Logischen von allem Psychologischen und allen empirischen Gegenständen schon im Abschnitt 3 c erwähnt werden müssen. Seine präzise Abhebung des Begriffs (Funktion), des Satzes (Frege: „Gedanke") und der Wahrheit und Falschheit des Satzes (Frege: „Wahrheitswerte") führt die scharfsinnigen Unterscheidungen Bolzanos in die Formalistik der Logik ein. Das Wesen des Begriffs als einer Funktion mit einer oder mehreren Variablen (Nr. 79) ist von Frege zuerst vollkommen erfaßt (10, 12). [...] Die Begriffe der Funktion, des Arguments, der Konstanten und der Variablen werden jetzt grundlegend für das Verständnis sinngemäßer Struktur des Begriffs und des Satzes (Nr. 79 ff.). Den Funktionen (Begriffen) stellt Frege die „Gegenstände", die für diese Funktionen wahre oder falsche Werte sind, gegenüber (Nr. 84). [...] Die Satzlogik wird zuerst von Frege infolge ihrer logisch-strukturellen Einfachheit der Begriffslogik vorangestellt".

263. Burkamp (1932, 30f.).

264. Zur Logikdiskussion in der DDR der 1950er Jahre vgl. die ausgezeichnete Studie von Gethmann (1984).

ne einer Sprache folgt in Bezug auf die Geltungskraft der Resultate nichts, was auch nur im Ansatz einen Konflikt mit der dialektischen Logik darstellen könnte. Mit all dem konnten die mathematischen Logiker freilich leben, ging es ihnen doch zu keinem Zeitpunkt um die Instrumentalisierung der Logik zu ideologischen Zwecken.

Doch das bemerkenswert Symbolträchtige geschah gleich zu Beginn der Jenenser Konferenz. Während sich vor allem die nachfolgenden Hauptredner (ob nun aus Überzeugung oder aus Konformitätszwängen sei dahingestellt) ideologisch ereiferten und von der bahnbrechenden Wirkung Stalins,[265] dem Betrug durch die „philosophischen Vertreter des Monopolkapitalismus“[266] oder dem leuchtenden Vorbild der Sowjetwissenschaft[267] sprachen, war es Paul Linke, der im Rahmen seiner „Begrüßung“ gänzlich anders verfuhr. Seine Eröffnung wurde zu einer politischen Stellungnahme, da sie kein einziges politisches Bekenntnis enthielt, keine einzige ideologische Phrase bemühte und auch ansonsten vollkommen frei war von sonstigen wissenschaftsfremden Belangen. Selbstverständlich erinnerte Linke bereits mit seinen ersten Worten an die außergewöhnliche philosophische Tradition Jenas. Kurze Erwähnung fanden freilich die großen Namen des Idealismus sowie Karl Marx, der an der Salana, wenngleich in absentia, promoviert wurde.

> Das sind bekannte Dinge. Aber weit weniger bekannt als sie ist etwas anderes, daß nämlich auch in bezug auf die Wissenschaft, in deren Interesse wir hier versammelt sind, auf eine Tradition in Jena zurückgeblickt werden kann, auf eine weniger lange Tradition, aber doch auf eine außerordentlich wichtige – wichtig bis auf den heutigen Tag, ja heute vielleicht wichtiger als je zuvor, denn im letzten Viertel des vorigen und im ersten Viertel dieses Jahrhunderts wirkte hier in Jena *Gottlob Frege*.[268]

Die offensichtlichen Verknüpfungsmöglichkeiten zwischen der Jenenser Tradition und dem Dialektischen Materialismus, die sich mühelos verwenden ließen, ignoriert Linke, weil ihm an Sachargumenten gelegen ist: Für die Realisierung der Erkenntnisanliegen der Konferenz bedürfen wir eines umfassenden Wissens dessen, was unter Logik zu verstehen ist, und keiner in der jüngeren Geschichte der Disziplin hat sich um eine Klärung dieser Frage mehr verdient gemacht als der in Jena wirkende Frege. Der Tagungsort Jena besitzt damit nicht nur für die Geschichte des Dialektischen Materialismus eine besondere Bedeutsamkeit, sondern auch für die Geschichte der formalen Logik, denn – und das wissen im Unterschied zur Historie

265. Klaus (1953), 7.
266. Klaus (1953), 25.
267. Hoffmann (1953), 84.
268. Linke (1953b), 5.

der Staatsphilosophie bei weitem nicht alle der Anwesenden – sofern die moderne formale Logik überhaupt über Geburtsdaten verfügt, so sind es diese: Jena, den 18. Dezember 1878 – der Tag, an dem Frege die *Begriffsschrift* fertigstellte.

Im Anschluss an die oben zitierte Passage führt Linke aus, dass Frege zur Klärung der Frage, was Logik sei, nicht den einfachen Weg über die Konsultation eines Lehrbuchwissens einschlagen konnte, weil die Lehrbücher der Zeit in vielerlei Hinsicht unzureichend waren. Im Besonderen verfügten sie über keinerlei normatives Verständnis bei der Bestimmung des logischen Gegenstandes. Das epistemisch redliche Vorgehen Freges führte ihn über eine schonungslose Analyse der zeitgenössischen Auffassungen hin zu einem bereinigten Verständnis der Gesetze des Wahrseins. All dies ist durchdrungen in Linkes prägnanter Darstellung durch den Unterton des unpolitischen und rein auf Wahrheit gerichteten Forschens. Indem Linke Frege zum Vorbild in der unbedingten Wahrheitssuche erklärt, weil er sich stets an seinen eigenen hohen Maßstäben ohne jeden Euphemismus hat messen lassen,[269] verfährt er in der Sache vollkommen angemessen, weil die thematische Ausrichtung an diesem historischen Ort gar keinen anderen Personenbezug zulässt.

Als Sprechakt fügt sich diese „Begrüßung“ aber nicht länger ihrer erwarteten Funktion einer nichtssagenden Notwendigkeit, sondern sie versteht sich als wissenschaftliche Mahnung, als akademischen Ratschlag mit propositionalem Nachdruck. Paul Linke, der neben ungleich jüngeren Personen wie Georg Klaus nicht nur wie ein Gelehrter aus einer längst vergangenen Zeit wirkte, sondern der in Anbetracht der nunmehr vorherrschenden Politisierung des akademischen Selbstverständnisses vollkommen unzeitgemäß erschien, mahnte mit der – kaum noch ernst genommenen – Weisheit des Alters, dass sich die Tagung von rationalen Gründen und vernünftigen Argumenten leiten lassen soll:

> Ich kann mir daher nichts besseres für den Verlauf unserer Tagung wünschen, als wenn sie unter der Obhut Fregescher Gedanken steht, wenn die Genialität Freges berücksichtigt wird, wenn seine Auffassung der Logik ihren Leitstern bildet. Das wünsche ich der Tagung von Herzen.[270]

Leitstern der Tagung sollte also weder ein Motto von Marx noch eines der sowjetischen Logiker sein, sondern die Auffassung eines Jenenser Hausgewächses, das zudem noch zur bürgerlichen Philosophie der Kaiserzeit zu zählen ist. Linkes Verzicht auf Ideologie zugunsten der Wissenschaft machte seine Begrüßung gerade deshalb zu einer politischen Stellungnahme. Sein Mut hat sich nicht bezahlt gemacht, aber er wurde – soweit wir wissen – für diesen auch nicht bestraft.

269. So etwa Frege (*GGA I*, XXVI) und (*GGA II*, 253).
270. Linke (1953b), 6.

Dass die Jenaer Logik-Konferenz, deren Resultate für die weitere Ausrichtung und Entwicklung des Faches in der DDR einen großen Einfluss hatten, mit einem unprätentiösen Plädoyer für Fregesche Einsichten begann, welches Frege selbst kaum hätte besser halten können, daran konnte sich schon kurz nach der Tagung kaum noch jemand erinnern. Die Logik in der DDR bauten andere auf, Linke hatte daran keinen Anteil mehr. Akademisch isoliert konnte er sein Engagement um Freges Werk auch in den späten Jahren seines Wirkens nicht institutionalisieren. 1954 gelang es ihm immerhin noch, seinen Assistenten Günter Mortan mit dessen Schrift *Gottlob Freges philosophische Bedeutung* zur Promotion zu führen. Doch dies blieb ein Einzelfall und er ein Einzelkämpfer. Vor allem in diesem Punkt unterschied sich Paul Linke von einem anderen Gelehrten seiner Generation, der seit den frühen 1930er Jahren gut 400 Kilometer von Jena entfernt die Fregeforschung auf einem institutionell ganz neuen Niveau betrieb.

4 „It is a pity that in England their work is so little known"

Die ältesten Spuren der institutionellen Fregeforschung finden sich in Münster. Spätestens 1921 erfährt der Ordinarius für Philosophie Heinrich Scholz von der Existenz jenes Mannes, den er eine Dekade später als das „größte Genie der neuen Logik im 19. Jahrhundert"[271] bezeichnen wird. „Durch einen Glücksfall"[272] stößt er in der Universitätsbibliothek von Kiel auf die *Principia Mathematica*,[273] deren eingehendes Studium nicht nur „für den weiteren Verlauf meines persönlichen Lebensganges von einer entscheidenden Bedeutung"[274] gewesen ist, sondern das ihn im Besonderen auch auf das Werk von Frege führt. Nach einem erneuten ordentlichen Studium der Mathematik und theoretischen Physik an der Universität Kiel sowie einem intensiven, der Logik dedizierten Privatstudium liest er bereits ab 1924 über Themen der modernen formalen Logik ebendort.[275] Dieses Engagement in der Lehre, mit dem er an einer deutschen Universität eine Vorreiterrolle einnimmt,[276] wird nochmals intensiviert und professionalisiert, nachdem er an die Universität Münster wechselt und dort ab Herbst 1928 systematisch Vorlesungen über diesen Gegenstand hält. „Oft waren es an die hundert Studenten, die sich bereits morgens

271. Scholz (1931), 57.
272. Scholz zit. n. Molendijk (1991), 43.
273. Vgl. Hermes (1958), 34.
274. Scholz zit. n. Molendijk (1991), 43.
275. Vgl. Scholz (1936b), 4.
276. Vgl. Hermes (1986), 43.

um acht Uhr in seine zwei- bis vierstündigen Kollegs drängten".[277] Bis zu seiner Emeritierung ebendort wird er an die 40 Vorlesungen zur mathematischen Logik und ihren angrenzenden Gebieten gehalten haben.[278]

Die Profilierung in der Lehre wird begleitet von jener in der Forschung, wobei die Vorlesungen von Scholz häufig den Charakter von Forschungsvorlesungen besitzen. Mit Unterstützung von Friedrich Bachmann gründet Scholz 1930 die Logistische Arbeitsgemeinschaft, jenen intellektuellen Nukleus, der schließlich zur Münsteraner Schule und zu ihrer institutionellen Manifestation, dem *Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*[279] werden sollte. Zum identitätsstiftenden Selbstverständnis dieser Gruppe gehört von Anfang an die Forschung zu Frege, die seit den frühen 1930er Jahren „ein wesentliches Stück der logistischen Forschungen des Philosophischen Seminars B"[280] ausmacht und die Scholz bei passender Gelegenheit auch in die universitäre Öffentlichkeit trägt. So wurde auf seine Anregung hin von der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster für das Studienjahr 1932/33 die Preisaufgabe gestellt: „Der gegenwärtige Stand des Verhältnisses von Logik und Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung des Frege-Russellschen Aufbaus der Arithmetik".[281]

Bachmann, der zu eben dieser Zeit zusammen mit Scholz dessen Vorlesungen „Die logischen Grundlagen der Arithmetik im Anschluss an Frege und Dedekind" sowie „Logistik" ausarbeitet,[282] entwickelt unter Verwendung der dort bereitgestellten Werkzeuge Ableitbarkeitsbeweise für verschiedene Interpretationen der Arithmetik und arbeitet diese zu einer Preisschrift aus. Im Frühjahr 1933 wird ihm der Preis zuerkannt, woraufhin seine Arbeit auf Vorschlag von Scholz von der Fakultät auch als Dissertation angenommen wird. Friedrich Bachmann wird mit seinen *Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik mit besonderer Beziehung auf Dedekind, Frege und Russell* noch im selben Jahr promoviert.[283] Mit Bachmanns Doktorarbeit liegt erstmals eine umfassendere Analyse von Freges Begründung der

277. Hermes (1986), 43.
278. Vgl. Kambartel (1969^2), 468ff.
279. Die beeindruckende und aus heutiger Sicht fast märchenhafte Entwicklung vom philosophischen Ordinariat hin zum *Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung* kann bei Schmidt am Busch/Wehmeier (2005) detailliert nachvollzogen werden.
280. Scholz/Bachmann (1936), 24.
281. Vgl. Bachmann (1934), „Einleitung".
282. Vgl. Kambartel (1969^2), 468.
283. Bachmann ist jedoch nicht der Erste, der mit einer Arbeit zu Frege promoviert wurde. Bereits ein Jahr zuvor promovierte Wilma Papst an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin mit der lesenswerten Studie *Gottlob Frege als Philosoph*, die es sich zum Ziel gesetzt hat, eine zusammenhängende systematische Darstellung von Freges Werk unter besonderer Betonung der philosophischen Seite (u.a. Kritik an Psychologismus, Empirismus und Formalismus) zu geben. Auch ihre Arbeit steht im Dienst, Frege bekannt zu machen (Papst (1932), 7): „Das philosophische Werk von Gottlob Frege ist nicht nach Gebühr bekannt und, wo es bekannt ist, längst nicht anerkannt. [...] Es soll die Aufgabe dieser Schrift sein, das Versäumte nachzuholen".

Arithmetik vor, die nicht zuletzt durch die Ersetzung von Freges Beweisführung durch eine besser zugängliche Notation besticht.[284] Beindruckend ist darüber hinaus das in Anschlag gebrachte Reflexionspotential, denn Bachmann ist nicht darauf aus, die Begründung der Logizismus-These um jeden Preis technisch zu erzwingen. Die gesamte Arbeit lässt das Rechtfertigungsanliegen erkennen, dass im Fall eines investierten formalen Systems, aus dem eine Interpretation der Arithmetik abgeleitet werden soll, zu zeigen ist, dass es sich um eine Logik handelt. Neue Axiome dürfen nicht einfach hinzugenommen werden. „Die Antwort auf die Frage, ob die Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik beweisbar ist, hängt wesentlich davon ab, welche Logik man zugrunde legt".[285]

Die Veröffentlichung der Dissertation 1934, über die der Doktorvater an publiker Stelle bekundet, dass sie „das weitaus Beste enthält, was bis jetzt über Frege geschrieben ist",[286] repräsentiert den ersten nach außen hin sichtbaren Forschungsbeitrag der noch jungen Münsteraner Gruppe zu Frege[287] und stellt den ersten Beitrag zum eigenen Publikationsorgan, den *Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, dar. In der Nachfolge häufen sich nicht nur die Publikationen zu Frege, sondern es entwickelt sich geradewegs ein gemeinsam verfolgtes Forschungsprogramm, in dessen Mittelpunkt die technische sowie philosophische Neufassung der logizistischen Werkzeuge (Kalkülbegriff, formale Axiomatik, Definitionstheorie, logische Syntax u.a.) steht. Der Münsteraner Logizismus besticht durch die Rekonstruktion Fregescher Resultate mit zeitgenössischen Mitteln. Indem Friedrich Bachmann, Albrecht Becker, Gisbert Hasenjaeger, Hans Hermes, Adolf Kratzer, Heinrich Scholz, Karl Schröter, Hermann Schweitzer und andere eine durch Frege inspirierte logistische Forschung mit den neuesten technischen Mitteln betreiben,[288] wird aus der Logistischen Arbeitsgemeinschaft die Münsteraner Schule. Bis in seine späte Schaffensphase hinein wird Scholz am Erfordernis einer umfassenden Berücksichtigung Freges festhalten. Auch als er zusammen mit Hermes für die neue Auflage der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* den nun erstmals vorgesehenen Artikel „Mathematische Logik" verfasst,[289] der in 15 Einzelkapiteln nicht nur eine exzellente systematische Einführung in das Thema in deutscher Sprache bietet, sondern auch souverän den Stand der Forschung der vorgestellten Bereiche dokumentiert, findet Frege an jeder gebotenen Stelle eine angemessene Berücksichtigung.

284. Bachmann (1934), 53ff.
285. Bachmann (1934), „Einleitung".
286. Scholz (1935c), 170.
287. Vgl. Scholz/Bachmann (1936), 24.
288. Vgl. exemplarisch Bachmann (1934); Hermes/Scholz (1936); Scholz (1933), (1935a), (1935b), (1935c), (1936a), (1936b), (1941), (1942); Scholz/Bachmann (1936); Scholz/Schweitzer (1935); Schröter (1943) sowie darüber Hermes (1986).
289. Hermes/Scholz (1952).

Die akademische Schöpferkraft von Scholz sollte bereits früh gipfeln in der für 1935 in Aussicht gestellten monographischen Studie *Gottlob Frege. Ein Beitrag zur Geschichte des deutschen Geistes*,[290] die er zusammen mit Friedrich Bachmann verfassen und als Heft 2 der von ihm begründeten und herausgegebenen *Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften* im Felix Meiner Verlag Leipzig veröffentlichen wollte. Es ist unbekannt, weshalb dieses vielversprechende und zweifellos realisierbare Projekt, über dessen anstehende Fertigstellung Scholz noch einige Monate zuvor mit Selbstverständlichkeit berichtet hatte,[291] zu keinem erfolgreichen Abschluss kam. In die Rolle der zentralen Veröffentlichung, in der sich die Scholzschen Bestrebungen um eine angemessene Wertschätzung Freges bündeln, gelangte schließlich der Aufsatz „Gottlob Frege" aus dem Jahr 1941, in dem unter Aufbietung bewerbender Superlative eine literarische Gesamtschau vollzogen wurde, die nach den diversen – vor allem in der zweiten Hälfte der 30er Jahre vollzogenen Detailstudien – eine Essenzbetrachtung vornimmt, die keinen Zweifel daran lassen soll, dass wir es hier mit einem der „größten abendländischen Denker überhaupt" zu tun haben, dessen „schöpferische Kraft [...] von der seltensten Mächtigkeit ist".[292]

Doch das Anliegen von Scholz reicht weit über die Vermittlung Fregescher Resultate in der Lehre und der konzisen Aufarbeitung seines Werkes in wissenschaftlichen Publikationen hinaus. Im gleichen Maße, wie ihm klar wurde, welch epochalen Charakter nicht wenige seiner Errungenschaften besitzen, wurde für ihn immer wieder deutlich, dass Frege fast vergessen ist. „Es ist befremdend, wie wenige wissen, wer Gottlob Frege gewesen ist. Man kennt ihn nicht. Man weiß nichts von ihm".[293] Die gelehrte Welt hat es schlicht unterlassen, ihn vor dem Vergessen zu bewahren. Scholz kann sich diese Unterlassung durch Unkenntnis und Unverständnis nur darüber erklären, dass die meisten Zeitgenossen mit den bahnbrechenden Neuerungen schlicht überfordert waren bzw. gewesen wären. Frege ist „mit seinen grossartigen Leistungen [...] offenbar noch zu früh gekommen".[294] Hieraus erwächst ein bildungspolitischer Auftrag, ein Aufklärungsanliegen mit Herz, denn Heinrich Scholz „möchte zu denen gehören dürfen, die dafür verantwortlich sind, daß eine solche Unterlassung in Zukunft nicht mehr möglich ist".[295]

In diesen Dienst stellt er sein rhetorisches Geschick, das Scholz »mit Pünktlichkeit« zu gebrauchen wusste. Hatte er soeben noch technische Details der logischen Syntax dargelegt oder formale Beweise vollzogen, so konnte er an passender Stelle

290. Vgl. Scholz (1935a), 47; auch noch in Aussicht gestellt in Scholz/Bachmann (1936), 24.
291. Scholz (1935a), 47.
292. Scholz (1941), 268.
293. Scholz (1941), 268.
294. Scholz (1933), 60.
295. Scholz (1935c), 169.

sogleich wieder auf die Ebene der großen Bilder wechseln, um von Freges „bewunderungswürdiger Schöpfung dieser Logik“[296] zu sprechen, die „historisch als Anfang eines neuen Zeitalters in der Geschichte der formalen Logik“[297] zu bewerten ist. Seine Axiomatisierung und Kalkülisierung der Aussagen- sowie Prädikatenlogik gehören „zu den feinsten und tiefstliegenden Schöpfungen dieses wahrhaft großen, bahnbrechenden und noch immer so wenig erkannten deutschen Logikers“.[298] Damit erweist sich „das Jahr 1879 [als] ein Epochenjahr erster Ordnung“,[299] als „ein Epochenjahr in der Geschichte der abendländischen Logik; denn es ist das Jahr des Erscheinens von Freges »Begriffsschrift«. Folglich das Geburtsjahr der modernen exakten Aussagenlogik, die hier sogleich in einer fast rätselhaften Vollendung aus dem Nichts hervortritt“.[300] Für die gut 2300jährige Geschichte der Logik gilt somit, dass „es seit 1879 eine strenge Wissenschaft der Logik als solcher“ gibt.[301] Mit der zuletzt zitierten Bemerkung im Besonderen und seinen diversen 1879-Variationen im Allgemeinen wurde Scholz zum Stilvorbild für Quine, der seine auch heutzutage noch weithin verwendete Logikeinführung *Methods of Logic* mit der schlichten und inzwischen berühmten Bemerkung beginnen lässt: „Logic is an old subject, and since 1879 it has been a great one“.[302]

Wenn Scholz „unserem grossen deutschen Meister“[303] Frege attestiert, dass dieser die logizistische Grundlegung der Mathematik „mit einem im höchsten Grade bewunderungswürdigen Scharfsinn“[304] vollzieht oder dass das Jahr 1884 ebenfalls als Epochenjahr zu bewerten ist, weil es mit dem Erscheinen der *Grundlagen* „das Geburtsjahr der modernen exakten, die Ausdrucksmittel und Beweise der Arithmetik an Genauigkeit noch weit übertreffenden Interpretation der arithmetischen Grundbegriffe“[305] markiert, so besitzen diese Formen der Anerkennung denselben unmissverständlichen Grad an wertschätzender Verbindlichkeit wie alle anderen wohlplatzierten Lobesbekundungen. Gut ein Jahrzehnt nach Freges Tod war es mehr als jemals zuvor dringend geboten, mit einer massiven Werbekampagne gegen das drohende Vergessen anzukämpfen. Weder der *Große Brockhaus* noch *Meyers Lexikon* führen einen Eintrag über ihn Mitte der 1930er Jahre. Einzig das bei Kröner verlegte *Philosophische Wörterbuch* berücksichtigt Frege ab 1934 mit einem kleinen Eintrag.[306] Ein richtiger Schritt, der dennoch zu zaghaft ausfällt, denn

296. Scholz (1936a), 255.
297. Scholz (1936a), 255f.
298. Scholz (1936a), 270.
299. Scholz (1936b), 1.
300. Scholz (1935c), 163.
301. Scholz (1936a), 280.
302. Quine (1950), vii.
303. Scholz (1935d), 116.
304. Scholz (1935b), 170.
305. Scholz (1935c), 163.
306. Siehe 3.5.

„dieser Frege ist ein Logiker von der Grössenordnung eines Aristoteles und Leibniz gewesen, also bahnbrechend im strengsten Sinne des Wortes“.[307] Er ist sich der gebrauchten Superlative wohl bewusst, denn durch sie wird jener Nachdruck gestiftet, den Scholz mit der Wahl seiner Worte verbunden sehen möchte. „Es scheint mir, daß dies gesagt werden darf, ja gesagt werden *muß* auch dann, wenn man alles zusammennimmt, was von hochverdienten Forschern vor und neben ihm geleistet worden ist“.[308] Es ist Heinrich Scholz, der die richtigen Worte an den richtigen Orten gegen das Vergessen richtet.

Damit diese massive Werbekampagne ihr Ziel überhaupt erreichen kann, muss das Beworbene auch verfügbar sein. Schließlich lässt sich der Mangel an Bekanntheit kaum beheben, wenn Freges Werk, dessen ehemals „erheblicher Restbestand wegen des gänzlichen Mangels an Nachfrage eines Tages eingestampft worden ist“,[309] an vielen Orten unverfügbar bleibt. Dies betrifft weniger die publizierten Aufsätze, obgleich auch diese teilweise in inzwischen schwer zugänglichen Periodika schlummern, sondern vornehmlich die monographisch verlegten Schriften. Es ist wiederum Scholz, der deren Verfügbarkeit in der deutschen Universitätslandschaft recherchiert. Im Fall der *Grundlagen der Arithmetik* (aber repräsentativ für alle Monographien), die „seit Jahren vergriffen und auch antiquarisch nur noch sehr schwer zu erlangen gewesen“[310] sind, kommt er zu dem ernüchternden Ergebnis, dass dieses „Meisterwerk von Frege“[311] um 1933 in lediglich „fünf öffentlichen deutschen Bibliotheken, die wissenschaftlichen Zwecken dienen, vorhanden“[312] gewesen ist. Und auch für die *Begriffsschrift* gilt, dass sie „heute praktisch fast unzugänglich“ ist.[313] Nicht viel besser dürfte es den beiden Bänden der *Grundgesetze* ergangen sein und für den 1891 bei Hermann Pohle in Jena separat verlegten Aufsatz *Function und Begriff* gilt, dass der Text seinerzeit weder in einer Zeitschrift noch in einem Sammelband wiederabgedruckt verfügbar war. Auch scheint fraglich, ob die Schrift als Separatdruck überhaupt noch über den Buchhandel oder direkt beim Verlag bezogen werden konnte, hatte sich doch bereits ein Vierteljahrhundert zuvor Philip Jourdain hilfesuchend an Frege gewandt unter Verweis darauf, dass „your separate works ‘Function u. Begriff’, and ‘Ueber die Zahlen des Herrn Schubert’ seem out of print“.[314]

1934 erfolgt schließlich der unveränderte Neudruck der *Grundlagen der Arithmetik*,

307. Scholz (1935a), 22.
308. Scholz (1940), 383.
309. Scholz (1935c), 169.
310. Scholz (1935c), 169.
311. Scholz (1935c), 169.
312. Scholz (1935c), 170.
313. Scholz (1936a), 255f.
314. Jourdain an Frege in einem Brief vom 28. Januar 1909. In Frege (1976), 113.

der nicht nur die erste posthume Publikation darstellt, sondern darüber hinaus eine weitere Neuerung aufweist: Es ist das erste Werk Freges, welches überhaupt eine Neuauflage erfährt. Dieser Schritt ist eminent bedeutsam und setzt ein Zeichen (das zu dieser Zeit allerdings nur wenige zu deuten vermögen), denn während üblicherweise eine neue Auflage das betriebswirtschaftliche Erfordernis voraussetzt, dass die vorangegangene restlos verkauft ist und gleichwohl weiterhin eine hinreichend große Nachfrage besteht, ist im Falle der *Grundlagen* zu bezweifeln, dass „die erste Auflage durch Ausverkauf erschöpft worden ist".[315] Der Breslauer Verlag M. & H. Marcus legt also ein Werk neu auf, das sich im vergangenen halben Jahrhundert bereits als verlegerischer Misserfolg erwiesen hat. Mithin muss es andere als die unternehmerischen Gründe für den Neudruck geben. Dies nimmt Scholz zum Anlass, um öffentlich zu appellieren: „An alle deutschen Bibliotheken, die wissenschaftlichen Zwecken dienen, richte ich hier den ernsten Appell, daß sie wenigstens jetzt die Gelegenheit wahrnehmen, dieses Werk eines der größten deutschen Denker, ja eines der größten Denker des Abendlandes überhaupt anzuschaffen"![316]

Wer die treibende Kraft hinter dieser – offensichtlichen – Jubiläumsausgabe zum 50. Jahrestag der Publikation der *Grundlagen* ist, konnte noch nicht abschließend geklärt werden. Erstaunlicherweise liefert die zweite Auflage keinerlei Hinweise darauf, auf wessen Bemühungen hin sich der Breslauer Verlag zu einer erneuten Veröffentlichung entschieden hat. Als mögliche Urheber des Projektes kommen in der deutschsprachigen Universitätslandschaft der Zeit eigentlich nur zwei Personen in Frage, von denen Paul Linke aufgrund seiner akademisch isolierten Stellung sowie dem Profil seiner Fregeforschung eigentlich schon wieder ausscheidet. Bliebe nur noch Heinrich Scholz, dessen zeitlich nachfolgende offensive und expressiv eindringliche Werbekampagne exzellent ins Bild passen würde. Dass er eine fulminante Rezension aus der Perspektive eines unbeteiligten Dritten verfasste, kann freilich auch bedeuten, dass er tatsächlich der unbeteiligte Rezensent war, der er vorgab zu sein. Sollte er aber tatsächlich der Wissenschaftler gewesen sein, der rechtzeitig vor dem halben Jahrhundert seit dem Erscheinen der *Grundlagen* hartnäckig nach einem Verlag gesucht hat, der dieses Werk endlich wieder zugänglich macht, dann wäre die von ihm verfasste Rezension gleichermaßen verständlich. In diesem Fall würde die anonymisierte Herausgeberschaft für Scholz die Möglichkeit stiften, eine besonders glaubhafte Rezension zu verfassen. Für Dritte unerkannt urteilt Scholz über Scholz, womit zugleich die Funktion einer beeindruckenden Werbeschrift erfüllt wäre, die nicht pro domo argumentiert. Dass er sich am Ende der Besprechung verstimmt zeigt über die editorische Hast, die den Neudruck begleitet hat, „denn er ist gänzlich unbetreut zur Welt gekommen, obschon er eine sachkundige Einlei-

315. Scholz (1935c), 169.
316. Scholz (1935c), 169f.

tung und eine Folge von sachkundigen logistischen Anmerkungen im allerhöchsten Grade verdient hätte",[317] könnte im Fall seiner Initiative auf den Umstand zurückzuführen sein, dass Scholz in die Endredaktion nicht hinreichend eingebunden war. Jeder Herausgeber wäre zu Recht mehr als verstimmt, wenn ihn der Verlag vor Drucklegung in den verbleibenden editorischen Fragen übergeht und für die Publikation unvorteilhafte Entscheidungen trifft. Doch das stärkste, wenngleich immer noch nur bedingt aussagekräftige Motiv, das für Scholz als treibende Kraft im Hintergrund spricht, ist jeglicher fehlender Bezug auf die Frage des Initiators. Scholz kommt in der gesamten Rezension, die nicht weniger als die verlegerische Misere Freges ausleuchtet, mit keiner Silbe darauf zu sprechen, durch wen der Neudruck angeregt wurde – eine naheliegende, sogar zwingende Frage für jeden, der mit eben dieser zweiten Auflage nichts zu tun hat. Es dürfte nahezu ausgeschlossen sein, dass der Frege-Verehrer Scholz nicht wissen möchte, der nachdrücklichen Einflussnahme welcher Person wir diese erste Neuauflage überhaupt verdanken. Vielleicht ist es also entlarvend, dass Scholz gerade diesen Punkt nicht anspricht. Mit Christian Thiel können wir uns auf der Grundlage dieser (zugestandenermaßen wenig zwingenden) Indizien aber immerhin zu der Formulierung hinreißen lassen, dass es sich hierbei um die „von Heinrich Scholz angeregte?"[318] zweite Auflage handelt. Auch wenn Klarheit in dieser Frage künftig wünschenswert ist, so ist doch in jedem Falle unbestritten, dass Scholz die Publikation der zweiten Auflage der *Grundlagen* über alle Maßen begrüßt, sie in den höchsten Tönen lobt und sich ihr Erscheinen mustergültig in eine umfassendere Werbekampagne zur Bekanntmachung Freges einfügt.

Auch lässt Scholz keine Gelegenheit ungenutzt, um auf die überschaubar wenigen Forschungsarbeiten zu Frege aufmerksam zu machen, die von der gelehrten Öffentlichkeit weitgehend ebenso wenig zur Kenntnis genommen werden wie Freges Werke selbst. Als Jan Łukasiewicz mit der ihm eigenen Brillanz und fast im Vorübergehen Freges drittes Axiom der Aussagenlogik aus den beiden ersten ableitet und damit den Nachweis führt, dass das ursprüngliche System nicht unabhängig ist, behebt er in der bestmöglichen Manier eines historisch versierten Logikers einen „Schönheitsfehler",[319] die Scholz zu der mahnenden Bemerkung veranlasst: „So ernsthaft hat man sich in der Welt schon vor Jahren um unsern Frege bemüht!"[320] Tatsächlich gehört Łukasiewicz zu den wenigen international renommierten Logikern, die sich bereits Anfang der 1930er Jahre umfassend mit Freges Rolle in der Logikgeschichte befasst haben und die im Besonderen auf eine substantielle Rezeption seiner Schriften verweisen können. Es besitzt daher eine be-

317. Scholz (1935c), 170.
318. Thiel (1986), LXI.
319. Łukasiewicz (1935), 126.
320. Scholz (1936a), 261.

sondere Aussagekraft, wenn der historiographisch geübte Łukasiewicz im Horizont seiner logikgeschichtlichen Bildung zu der Einschätzung gelangt: „Und da begegnen wir auf einmal einem in der Geschichte der Logik einzigartigen Phänomen: Ganz unvermittelt, ohne daß es möglich wäre, eine historische Erklärung anzugeben, entspringt die moderne Aussagenlogik in einer beinahe höchsten Vollkommenheit dem genialen Kopfe Gottlob Freges, dieses größten Logikers unserer Zeiten“.[321] Freges Leistungen werden damit nicht nur im höchsten Maße wertgeschätzt, sondern zudem als kaum fassbar beurteilt, weil narrativ nicht einzufangen ist, wie es ohne entsprechenden problemgeschichtlichen Vorlauf sowie einem fehlenden Wissen über Freges Weg in der zweiten Hälfte der 1870er Jahre zu einer derartigen Einzelleistung kommen konnte.[322]

Abgerundet und für den Augenblick gekrönt wurden diese vielfältigen Bestrebungen um Freges Werk 1935 durch den Umzug des gesamten nicht-brieflichen wissenschaftlichen Nachlasses in die Universitätsbibliothek Münster, nachdem es Scholz durch umfangreiche Nachforschungen gelungen war, Freges Adoptivsohn ausfindig zu machen, der einer wissenschaftlichen Befassung mit dem Nachlass seines Vaters in Münster zugestimmt hatte.[323] Unter Begleitung von Bachmann und Becker referiert Scholz Mitte September 1935 über diesen großen Erfolg auf dem *Ersten Internationalen Kongress für Einheit der Wissenschaft* in Paris. Die von der Kongressleitung sogleich als „Gruppe von Münster“[324] begrüßten Teilnehmer, die kurz darauf unter der entsprechenden Bezeichnung „Münster Group“ auch international bekannt werden,[325] stellen den Stand ihrer Forschungen zu Frege vor und geben im Besonderen Auskunft über den Inhalt seiner nachgelassenen Dokumente. Scholz, der in Ergänzung hierzu noch mit dem weiteren Vortrag „Dokumente zur Geschichte der Logistik und die Ermöglichung ihrer Publikation“[326] darum warb, „Neudrucke seltener Schriften zur Geschichte der Logistik zu veranlassen und Originalmaterial zu sammeln“,[327] stieß mit der historiographischen und problemgeschichtlichen Ausrichtung seiner Referate zur Logistik im Allgemeinen und zu Frege im Einzelnen auf beachtliche Zustimmung: „Die Referate von Scholz und Bachmann über Frege, dessen Nachlaß die Gruppe von Münster bearbeitet, erreg-

321. Łukasiewicz (1935), 124f.
322. Trotz der ertragreichen Untersuchungen zu Freges intellektueller Entwicklung in den 1870er Jahren (Dathe (1993); ders. (1995); Kreiser (2001), 52ff.; Schlote/Dathe (1994); Sluga (1984); Thiel (1995)) sowie der rekonstruierten rationalen Genesen hin zur *Begriffsschrift* (Kreiser (2001), 135ff.; Thiel (2007)), so ist über die Entstehungsgeschichte des Werks doch nach wie vor so gut wie nichts bekannt. Das von Łukasiewicz festgestellte Problem der fehlenden Nachvollziehbarkeit hat immer noch Bestand.
323. Vgl. Scholz/Bachmann (1936), 24f.
324. Vgl. Scholz (1935d), 119.
325. Vgl. Langer (1937b), 57.
326. Vgl. Neurath/et al. (1935), 412.
327. Neurath/et al. (1935), 405.

ten großes Interesse, nicht nur die sachlichen Mitteilungen, sondern auch Einzelheiten über den Menschen".[328] Diese Aufmerksamkeit wurde auch der publizierten Fassung des Nachlass-Berichtes entgegengebracht, deren Gegenstand sogleich als „of great importance"[329] beurteilt wurde.

Die bei dieser Gelegenheit erfolgte persönliche Begegnung zwischen Scholz und Russell, die durch die gemeinsame Begeisterung für Frege einen ganz besonderen Charakter besaß,[330] nutzte der Erstgenannte, um für das Nachlassprojekt weitere Originaldokumente einzuwerben. Am 18. November 1935 übersandte Russell alle verfügbaren Briefdokumente von Frege an Scholz nach Münster mit der Bitte, diese (für das Nachlassprojekt) zu behalten.[331] Mittels finanzieller Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft) wurde für das Frühjahr 1937 die Veröffentlichung von zwei größeren Bänden in Aussicht gestellt, die neben einem Neudruck von Freges „Kleinen Schriften" die wichtigsten Stücke aus dem Nachlass umfassen sollten.[332] Doch ebenso wie im Fall der Frege-Studie von Scholz und Bachmann blieb es bei der Ankündigung. Zu einer Veröffentlichung kam es erst Jahrzehnte später und dann auch nur für jenen Teil des Nachlasses, der in Abschrift durch die Bombardierung Münsters im Zweiten Weltkrieg nicht zerstört wurde,[333] möglicherweise exakt jener Bestand, der ehemals zur Veröffentlichung in der zweibändigen Ausgabe vorgesehen war.

Alle diese Bestrebungen in der universitären Lehre, der Forschung sowie der Wissenschaftsadministration zusammen führten nicht nur zur ersten akademischen Institutionalisierung der formalen Logik und mathematischen Grundlagenforschung in Deutschland, sondern auch zu einer Bewahrung von Freges Erbe. Fast ein wenig zu bescheiden, aber in der Sache vollkommen richtig, weist Hans Hermes anlässlich der Gedächtnisfeier der Fakultät am 20. Dezember 1957 darauf hin, dass es „nicht zuletzt Scholz' Verdienst [ist], daß man auf Frege aufmerksam geworden ist".[334] Unstrittig ist, dass Heinrich Scholz durch seine außergewöhnliche akademische Biographie, die ihn von der Theologie über die Philosophie hin zur mathematischen Logik führte, der Begründer der institutionellen Frege-Forschung ist. Keiner vor ihm hat in dem oben dokumentierten Umfang zu Frege geforscht und gelehrt, keiner vor ihm hat es sich derart explizit zum Ziel gesetzt, Frege vor dem voranschreitenden Vergessen zu bewahren und keiner vor ihm hat dieses Ziel mit einem

328. Neurath/et al. (1935), 383.
329. Weinberg (1939).
330. Vgl. hierzu die in 3.3 zitierte Passage von Scholz ((1935d), 119).
331. Vgl. Russell (1935).
332. Vgl. Scholz (1936a), 256; Scholz/Bachmann (1936), 30.
333. Zur Geschichte des Nachlasses siehe Veraart (1976) sowie Wehmeier/Schmidt am Busch (2000).
334. Hermes (1958), 43.

solch beeindruckenden institutionellen Geschick verfolgt. Die frühe Geschichte des *Instituts für Mathematische Logik und Grundlagenforschung* an der Universität Münster ist zugleich die frühe Geschichte der institutionalisierten Frege-Forschung, nicht nur in Deutschland, sondern überhaupt.

Allerdings war es nicht dieses Wirken der Münsteraner Schule, das trotz seiner Vielfalt und Konstanz Freges posthumen Weltruhm begründete. Bestenfalls mittelbar sollte die Gruppe um Heinrich Scholz über den transatlantischen Umweg einen begünstigenden Einfluss auf die weltweite Rezeption haben. Im Europa der Zeit vor und während des Zweiten Weltkrieges sollten ihre Bestrebungen keine Nachahmer finden, weder in Deutschland noch bei den Logikern in England. Der Grund für letzteres ist gleichermaßen simpel wie bedauerlich. Alfred Jules Ayer, der mit den zeitgenössischen Rezeptionsgewohnheiten diesseits wie jenseits des Kanals bestens vertraut ist, benennt ihn abschließend einer Besprechung: „It is a pity that in England their work is so little known“.[335]

Erst nach dem Zweiten Weltkrieg konnte das *Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung* langsam eine Ausstrahlungskraft entfalten, mit der die Logik in der deutschen Universitätslandschaft eine weitere Verbreitung fand, in der akademischen Philosophie allerdings nur mühsam. Bereits kurze Zeit nach Kriegsende wurden Kontakte nach München geknüpft, um das dort neu gegründete „Büro für logistische Forschung“ zu unterstützen, das aus einem privaten Kreis von Freunden der Logistik um Wilhelm Britzelmayr entstanden war[336] und in dem in der nachfolgenden Dekade viele namhafte Frege-Gelehrte der dritten Generation das Handwerk erlernen sollten. Das seit dem Wintersemester 1946/47 bestehende Büro, das umgehend auch Kontakte in die Vereinigten Staaten herstellte und von dort vor allem mit Literatur, vornehmlich Logiklehrbüchern,[337] versorgt wurde,[338] veranstaltete ab April 1947 das regelmäßig stattfindende „Logistische Colloquium“, die akademische Plattform der Münchener Arbeitsgemeinschaft.[339] Wie beschwerlich der Weg für die Münsteraner (und Münchener) Logistiker zu dieser Zeit allerdings war, zeigt exemplarisch der *Dritte Deutsche Kongress für Philosophie*, der Anfang Oktober 1950 in Bremen abgehalten wurde.

Im neuen Formgewand der Symposien wurde sogleich – und dies ist der Erwähnung wert – ein Diskussionsforum zu den „Philosophischen Grundfragen der Logistik“ durchgeführt, dessen Ziel darin bestehen sollte, „zu einem Ausgleich der Spannungen zu gelangen, die zwischen den gegenwärtig sehr verschiedenartigen Gruppen

335. Ayer (1937), 247.
336. Vgl. ZphF (1947).
337. Britzelmayr (1949), 604.
338. Vgl. ZphF (1947).
339. Britzelmayr (1948), 606.

in der Logik bestehen".[340] Die dort stattfindende Begegnung zwischen Mathematikern und Philosophen wurde durch die Kongressbeobachter zwar als „ungewöhnlich spannend und fruchtbar"[341] beurteilt, die gesamte Diskussion als „lively and stimulating",[342] allerdings stellte sich mit zunehmendem Verlauf der Diskussionen immer deutlicher heraus, „daß die Logistik unter Mitnahme allen logischen Inventars das Haus der Philosophie verlassen hat".[343] Tatsächlich wurde das gestellte Ziel nicht erreicht, was nicht zuletzt am ungerechtfertigten Vorbehalt einzelner Philosophen lag, durch die mathematische Logik würden die genuinen philosophischen Fragen auf die Mathematik reduziert werden. Mit Paul Lorenzen war nicht nur ein Mathematiker anwesend, der gerade die Irreduzibilität und kategoriale Eigenständigkeit philosophischer Grundlagenfragen herausstellte.[344] Darüber hinaus wies der führende mathematische Grundlagenforscher Paul Bernays die bestehende Sorge als unbegründet zurück, denn sie resultiert schlicht aus einem fehlenden problemgeschichtlichen Verständnis. „Solche Besorgnisse kommen jedoch nicht auf, wenn man sich an die Klassiker der Logistik (z.B. Peirce und Frege) hält, deren Arbeiten durchaus philosophisch durchdacht sind".[345] Es ist bezeichnend, dass es der Mathematiker ist, der den Philosophen über die jüngere Geschichte seiner eigenen Disziplin unterweisen muss. Ein Großteil der anwesenden Philosophen gab damit im Rahmen der Diskussion über die Grundfragen der modernen Logik zu erkennen, dass sie um 1950 in keinster Weise mit dem Werk von Gottlob Frege vertraut und auch noch nicht bereit waren, sein Wirken als ein philosophisch relevantes einzustufen. Rühmliche Ausnahme war – wieder einmal – Paul Linke,[346] während Scholz und Britzelmayr (zumindest lt. Tagungsprotokoll) gar nicht anwesend waren.

Die Bremer Begebenheit vom 3. Oktober zeigt deutlich, dass die Frege-inspirierte logistische Forschung in Münster und München zu dieser Zeit noch keineswegs den gemeinhin geteilten Standard in der deutschen Philosophie repräsentierte, die im Großen und Ganzen immer noch unzureichend bekannt war mit der modernen formalen Logik. Frege war in Bremen noch nicht in der Philosophie angekommen und die Arbeiten der Gruppe um Heinrich Scholz fanden zu dieser Zeit auch noch keinen nennenswerten Anklang bei den deutschen Fachkollegen, sieht man von randständigen Erwähnungen in der publizistischen Peripherie ab.[347] Es passt daher harmonisch ins Bild, wenn Gerhard Kropp in einer Besprechung des jüngst erschienen und überaus umfangreichen *Handwörterbuchs der Philosophie nach Personen*

340. Schmidt (1952), 179.
341. Pape (1951), 433.
342. van Heijenoort (1956), 206.
343. Pape (1951), 433.
344. Vgl. Schmidt (1952), 191f.
345. Bernays zit. n. Schmidt (1952), 181.
346. Siehe 3.5.
347. So etwa bei Bense (ed.), 226; Schischkoff (1944), 31.

nüchtern konstatieren muss: „Gottlob Frege hätte noch Erwähnung verdient“.[348]

Eine intellektuell unglaublich beeindruckende Leserschaft fanden die Schriften der Münsteraner Schule indes an einzelnen Universitäten in den Vereinigten Staaten. Vor allem die von Princeton ausgehenden akademischen Impulse führten seit den frühen 1930er Jahren zu einer kontinuierlich wachsenden Gemeinschaft von Logikern, Beweistheoretikern und mathematischen Grundlagenforschern, die sich bereits zu eben dieser Zeit aus einer Vielzahl von brillanten Wissenschaftlern zusammensetzte. Mit Erscheinen des Publikationsorgans der *Association for Symbolic Logic* (*ASL*) wurden die Münsteraner auf die Logiker jenseits des Atlantiks aufmerksam und traten mit diesen in Kontakt. „Seit dem Erscheinen des ‘Journal of Symbolic Logic’ im Jahre 1936 stehen wir auch in engem Gedankenaustausch mit der Schule von Princeton und der grossen Zahl der transatlantischen Mathematiker, die im Bereich der mathematischen Logik und Grundlagenforschung arbeiten“.[349] Scholz erkannte sofort das sich hier ergebende Potenzial. Er trat sogleich als einer der ersten deutschsprachigen Logiker in die *ASL* ein und war seit 1937 ordentliches Mitglied.[350] Vor allem seine logisch-philosophischen Abhandlungen stießen umgehend auf das Interesse der amerikanischen Kollegen und wurden durchweg über einen langen Zeitraum im Publikationsorgan der *ASL* besprochen, ebenso wie alle weiteren einschlägigen Schriften der Münsteraner Gruppe. Gewährleistet wurde dies durch den bis Mitte des 20. Jahrhunderts erhobenen Anspruch, dass ausnahmslos alle einschlägigen Publikationen zur Logik im *Review*-Teil des *Journal of Symbolic Logic* vorzustellen oder doch zumindest unter Anführung ihrer bibliographischen Daten zu erwähnen sind. Die erste dieser diversen Rezensionen zu Scholz erschien bereits im dritten Heft des ersten Bandes – und damit noch im Gründungsjahr 1936 – und wurde von niemand Geringerem verfasst als Willard Van Orman Quine, der Scholz im Besonderen für dessen klare und sorgfältige Darstellung des prädikatenlogischen Kalküls lobte.[351] Die Münsteraner Arbeiten zur Logistik fanden damit zwar nicht in Deutschland, wohl aber in den Vereinigten Staaten eine umfassende publizistische Berücksichtigung, womit ihre Ausrichtung sogleich einem größeren Publikum bekannt gemacht wurde.

> The historical importance of the work [of Frege, MW] cannot be overestimated and has been the subject of much investigation by H. Scholz.[352]

Durch diese kontinuierliche Rezeption erfuhren die amerikanischen Logiker vor allem von Scholz’ Engagement um Freges Werk. Doch dies setzte zu einer Zeit ein,

348. Kropp (1951), 156.
349. Scholz zit. n. Molendijk (1991), 52.
350. Vgl. ASL (1937), 181.
351. Quine (1936).
352. Kattsoff (1948), 30f.

als einer der einflussreichsten Logiker durch sein international weithin beachtetes institutionelles Wirken sowie durch die Genialität seines wissenschaftlichen Verstandes bereits damit begonnen hatte, Frege den ihm gebührenden Ort in der Wissenschaftsgeschichte zu verschaffen. Sein Name ist unauflöslich mit der noch heute maßgebenden Logikinstitution verbunden, sein persönliches Handeln darf als individuelle Manifestation institutionalisierter Strukturen verstanden werden: Alonzo Church.

5 „To readers of this Journal the works of Frege need no recommendation"

Mit dem logischen Erwachen Amerikas wurde auch Freges Weltruhm begründet. Anfang der 1930er Jahre wurde an der US-amerikanischen Ostküste der akademische Umgang mit der formalen Logik professionalisiert. Harvard und Princeton wurden in kürzester Zeit zu den Zentren der internationalen Logikforschung. Und inmitten dieses intellektuellen Sogs beförderten einige der einflussreichsten Logiker die Auseinandersetzung mit Freges Errungenschaften. Ein nochmaliges Vergessen seiner Leistungen wurde durch die mannigfache Institutionalisierung der Logik unmöglich gemacht.

5.1 „America's logical awakening"

Wenige Jahre nach Freges Tod entstand an einzelnen amerikanischen Universitäten der Ostküste eine ‚logicophile' Atmosphäre, die schnell (leider auch bedingt durch die sich unheilvoll anbahnende Zeit des Nationalsozialismus) die europäischen Zentren Wien, Warschau und Göttingen überragen sollte. „Recent years have witnessed a considerable growth of interest in symbolic logic in the United States".[353] Während es Freges Gedanken kaum aus der Jenenser Provinz herausgeschafft hatten, verhinderte ab 1933 die politisch gewollte Demontage der deutschsprachigen Universitätslandschaft zudem die weitere Entwicklung der Logik in weiten Teilen Europas. Galt für die Zeit um 1930 noch Quines Ausspruch „Really the action was in Europe",[354] so änderte sich dies dramatisch und geradezu über Nacht. Als Rudolf Carnap 1936 schließlich in die Vereinigten Staaten emigrierte, erfuhr er in aller Deutlichkeit dieses akademische Gefälle zwischen seiner alten und seiner

353. Lamprecht (1932), ix.
354. Quine (1985), 83.

neuen Heimat, das ihn jedoch vor allem über die hinzugewonnenen Möglichkeiten glücklich stimmte: „I was [...] very gratified to see that in the United States there was a considerable interest, especially among the younger philosophers, in the scientific method of philosophy, based on modern logic, and that this interest was growing from year to year".[355] [...] „Modern logic, almost unknown among philosophers in Germany, was here regarded by many as an important field of philosophy and was taught at some of the leading universities".[356]

Innerhalb kürzester Zeit formte sich eine Generation von Logikern, die in der Geschichte der Disziplin keine vergleichbare Besetzung finden sollte und die sich neben ihrer bahnbrechenden Forschung sogleich um die vielfältigen Formen der Institutionalisierung sorgte. An der Universität Harvard etwa, an der neben Alfred North Whitehead die bereits namhaften Logiker Clarence Irving Lewis und Henry Maurice Sheffer sowie der grundlagentheoretisch interessierte Mathematiker Edward Vermilye Huntington unterrichteten, kam man zu der nüchternen Einsicht, dass ein moderner Logikunterricht auf höchstem Niveau die Verfügbarkeit eines entsprechenden Lehrbuchs voraussetzt, dessen es aber mangelte: „there has been no authoritative treatment of the field of symbolic logic in the light of developments of the last fifteen years"[357] Die *Principia* repräsentierten zwar nach wie vor das Referenzwerk in der Forschung, doch für die Studenten der Philosophie bedurfte es einer didaktisch souveränen Aufbereitung des neuesten Standes der Forschung. Kurzerhand entschloss sich Lewis zusammen mit Cooper Harold Langford ein gänzlich neues Logiklehrbuch zu verfassen, das dieses Desiderat behebt. *Symbolic Logic* „meets a longfelt and important need"[358] und wurde damit zum inspirierenden Vorbild für alle großen Lehrbücher, die in den kommenden drei Dekaden (auch in kritischer Abgrenzung) nachfolgen sollten. Bis zur Mitte der 1940er Jahre hatte sich der akademische Lehrbuchmarkt für den Bereich der Logik in seinem Umfang und seiner Qualität bereits derart weit entwickelt, dass er das Niveau des philosophischen Studiums in anderen Sparten weit übertraf. Selbst eine zeitgenössische Studie über die akademische Philosophie an den US-amerikanischen Universitäten kam nicht umhin, dieses Phänomen zu würdigen. „Die Abhandlungen über formale oder symbolische Logik haben einen besonderen Erfolg zu verzeichnen".[359]

Allerdings ist es bezeichnend, dass gerade jener vielversprechende Doktorand, der zu eben dieser Zeit in Harvard zum Systementwurf der *Principia* forschte und der zu einem der einflussreichsten Logiker und Philosophen des 20. Jahrhunderts werden sollte, das neue Zentrum der Logikforschung nun gerade nicht in Harvard

355. Carnap (1963), 34.
356. Carnap (1963), 39f.
357. Lamprecht (1932), ix.
358. Lamprecht (1932), ix.
359. Farber (1946), 401.

mit seinen großen Namen, sondern im 260 Meilen entfernten Princeton entstehen sah:

> America's logical awakening was still to come, beginning with Alonzo Church's graduate course in the Princeton mathematics department in the fall of 1931.[360]

Church, der über seinen Doktorvater Oswald Veblen zur mathematischen Grundlagenforschung, vor allem zur Beweistheorie Hilberts, fand[361] und der seit seinem Forschungsaufenthalt in Göttingen Ende der 1920er Jahre in engem Kontakt mit Paul Bernays stand, definierte die Ansprüche der mathematischen Logik für amerikanische Verhältnisse radikal neu. Im Unterschied zu den Logikern der „alten Schule" in Harvard und andernorts orientierte er sich an den beweistheoretischen Standards der Hilbert-Schule, die immer noch in ihrer beeindruckenden Entfaltung begriffen waren. Obwohl er die *Grundzüge der theoretischen Logik* von Hilbert und Ackermann seinen Studenten aufgrund der Sprachbarriere nicht (zu früh) zumuten wollte, so war dies doch für ihn um 1931 das einzige in Frage kommende Lehrbuch für den Unterricht.[362] Letztlich verzichtete er darauf und arbeitete von Beginn an mit eigenen Manuskripten, denen schnell eine legendäre Qualität nachgesagt wurde.

Dass Amerikas logisches Erwachen gerade mit einem *Graduate Course for Mathematical Logic* begonnen hat, scheint nicht übertrieben, wenn es sich bei dem Seminarleiter um Church gehandelt hat. Obwohl er seinerzeit noch am Beginn seiner schließlich 61 Jahre umfassenden Lehrtätigkeit stand, so galt für seine akademischen Veranstaltungen von Anfang an, dass sie unglaublich gründlich vorbereitet waren[363] und in jeder Hinsicht präzise und klar durchgeführt wurden: „even if you are not interested in pursuing the subjects he teaches, you will tell your grandchildren, 'I was a student of Alonzo Church'".[364] Hinzu kam jedoch noch eine weitere außerordentliche Bedingung, die diesen Graduiertenkurs für Doktoranden zur Keimzelle der modernen amerikanischen Logik machte mit dem Potenzial zur weltweiten Ausstrahlung:

> I got there, Church was offering this course, so I took it. Steve had been there a year before that, so he hadn't had any course contact with Church. Church offered this course in the fall of '31-'32. I fell head-over-heels in love with logic.[365]

360. Quine (1985), 83.
361. Church (1984).
362. Church (1984).
363. Vgl. Kleene (1984), Rosser (1984).
364. David Kaplan zit. n. Manzano (1997), 214.
365. Rosser (1984).

Es wirkt geradezu prästabiliert harmonisch, dass just in jenem Wintersemester, in dem Church erstmals einen Graduiertenkurs zur mathematischen Logik anbietet, zwei hochbegabte Studenten mit substantiellen Vorkenntnissen zu Russell und Whitehead auf den Plan treten, die exakt über diese Form der Doktorandenausbildung zu kongenialen Logikern werden sollten. Da verkommt es fast zur unbedeutenden Randnotiz, dass „nobody in philosophy was interested in that sort of thing at the time“.[366]

Die oben zitierte autobiographische Notiz stammt von niemand Geringerem als von John Barkley Rosser, der im Herbst 1931 zusammen mit Stephen „Steve“ Cole Kleene diese allererste Gelegenheit beim Schopfe packt. Nach Auskunft Kleenes[367] saßen in dem fraglichen Kurs sechs oder acht Personen, doch es reichten einzig diese beiden Doktoranden, um zusammen mit Church die Logikforschung in Amerika entscheidend zu prägen: Church-Rosser-Theorem, -Widerspruchsfreiheit, -Rekursivität, -Definierbarkeit, allgemeine Rekursivität, daraus resultierend Church's These u.v.m. Es scheint kein Thema der Logikforschung der 1930er Jahre zu geben, zu dem die Princetoner Gruppe nicht substantielle bis bahnbrechende Beiträge geliefert hat. Dank Lehre und Forschung sowie einer ausgezeichneten Infrastruktur, zu der im Besonderen eine exzellent ausgestattete mathematische Bibliothek zählte, wurde Princeton im Verlaufe der 1930er Jahre zu einem Gravitationszentrum der weltweiten Logikforschung. Churchs langjähriger Kollege, der Spieltheoretiker Albert Tucker, der all dies aus nächster Nähe miterlebte, erinnert sich: „I have never seen another mathematician so completely devoted to his subject and his students. He was in correspondence with many, many people, mainly as a result of the *Journal of Symbolic Logic.* As far as I could tell, he was a nerve center of mathematical logic“.[368] Church wirkte an einer Institution und durch die Besonderheiten seines Wirkens wurde er selbst zu einer solchen. Neben ihm und seinen beiden brillanten Schülern Kleene und Rosser sowie Alan Turing, der Ende der 1930er bei Church promovierte, zog es in diesem Jahrzehnt auch John von Neumann, Kurt Gödel, Hermann Weyl sowie temporär Haskell B. Curry, Alfred Tarski und Paul Bernays nach Princeton. Nachdem Quine während eben dieser Zeit vom talentierten Nachwuchswissenschaftler zum brillanten Logiker avanciert war, schloss auch Harvard in der zeitgenössischen Logikforschung auf, wenngleich wesentlich vertreten in der Person von Quine. Aus eben dieser Zeit ist der auf Rosser zurückgehende Witz überliefert, dass Vierfünftel der amerikanischen Logik in Princeton angesiedelt ist: Church, Kleene, Rosser und Curry, während das Fünfte Fünftel Quine in Harvard bildet. Ein Lob für Princeton und Quine gleicherma-

366. Church (1984).
367. Kleene (1984).
368. Tucker (1984).

ßen. „The United States had become a world center for cutting-edge research in mathematical logic".[369]

Carnap zog es zeitweise nach Harvard, weil Quine ebendort war und auch Russell kehrte aus Anlass der William James Lectures gerne zurück. So ergab es sich zwanglos, dass etwa im akademischen Jahr 1940/41 eine beachtliche Anzahl von internationalen Spitzenlogikern in Harvard zusammentraf, die sogleich die Gunst des Augenblicks nutzten: „We formed a group for the discussion of logical problems; Russell, Tarski, Quine and I were its most active members".[370] Zu dieser Zeit hatte sich die Logikforschung an der Ostküste bereits etabliert. Sie war breit aufgestellt und sehr gut vernetzt, sie verfügte über eine exzellente Nachwuchsförderung und – was vor allem wichtig war – über institutionalisierte Strukturen. Die Verfügbarkeit dieser zur Selbstverständlichkeit gewordenen Strukturen reichte allerdings gerade einmal ein halbes Jahrzehnt zurück und wurde in ihrer Bereitstellung begleitet durch ein Epiphänomen: die Entdeckung von Gottlob Frege. Das Medium, durch welches diese Entdeckung initiiert, befördert und schließlich konserviert werden sollte, war die erste internationale und bis auf den heutigen Tag führende Zeitschrift für die symbolische Logik: *The Journal of Symbolic Logic.*

5.2 „A Home for Logic"

Anfang des Jahres 1934 fassten führende US-amerikanische Logiker den Entschluss, endlich eine Fachzeitschrift für die Themen der formalen Logik zu gründen, damit im Besonderen ihre Veröffentlichungsanliegen an anderer Stelle nicht länger randständig oder gar fehlplatziert wirken.[371] Der inzwischen erreichte Reifegrad der wissenschaftlichen Disziplin legte eine deutlich verbesserte institutionelle Organisation dringend nahe. Zeitgleich dazu wies Paul Weiss in einem Brief an die Herausgeber von *Philosophy of Science* mit dem Titel „A Home for Logic" nicht nur darauf hin, dass die Beiträge zur Logik bisher an weit verstreuten Orten, in thematisch verschiedensten Zeitschriften erscheinen müssen, sondern er formulierte zudem die Empfehlung, dass die *Philosophy of Science Association* unter ihrem Dach eine Gesellschaft für Logik etablieren möge.[372] Dieser Brief von Weiss blieb zwar folgenlos, allerdings trafen sich kurz darauf am 26. April im Harvard Faculty Club mehrere Gelehrte und Freunde der Logik zu einem Gründungstreffen[373] für

369. Davis (1995), 273.
370. Carnap (1963), 35.
371. Ducasse/Curry (1962), 255f.
372. Vgl. Ducasse/Curry (1963).
373. Ducasse/Curry (1962), 255.

die von allen betroffenen Seiten mit Nachdruck gewünschte Fachzeitschrift. Aufgrund fehlender Kenntnis war die Princetoner Gruppe nicht vertreten, was sich jedoch für alle nachfolgenden administrativen Schritte umgehend änderte, nachdem man Church, der bis dahin kaum Kontakte nach Harvard pflegte,[374] informiert hatte.[375]

Während des Gründungstreffens konnte ausgehend von der Diskussion von Fragen über die Finanzierbarkeit, die drucktechnischen Erfordernisse oder auch die Distribution bereits Einigkeit über den Titel der Zeitschrift erreicht werden sowie der Konsens: „It might be advisable at a later time to establish a symbolic logic association whose official organ would be the Journal of Symbolic Logic".[376] In der Umsetzung dieser Gründungsanliegen, in die dann auch Church, Kleene und Rosser umfassend eingebunden waren, sollte es dann doch zu einer anderen Reihenfolge kommen. So wurde erst einmal die *Association for Symbolic Logic* (*ASL*) 1935[377] gegründet, um die mannigfache Forschung in den Bereichen der formalen Logik sowie deren publizistische Verbreitung institutionell zu organisieren, zu diversifizieren und bestmöglich zu fördern. „It is intended to provide a meeting ground for mathematicians and philosophers interested in this field, to encourage cooperation and mutual criticism among various groups, and to promote a wider general knowledge and appreciation of current research and recent advances in the field".[378] Die offiziellen Verlautbarungen der Statuten, die diese überaus ehrbaren Absichten fixierten, sollte sich tatsächlich verwirklichen lassen. Für die wenigen und zum Teil weit voneinander entfernt tätigen Logiker, die an ihren Heimatuniversitäten weder uneingeschränkt zur Philosophie noch zur Mathematik zählten, wurde die *ASL* zum eigentlichen Zuhause:

> the ASL got us together, so we could talk to each other and publish in the same journal.[379]

Ihr erstes offizielles Treffen hielt die *ASL* am 1. September 1936 an der Universität Harvard ab. Nachdem vor gut 300 Hörern die Sitzung beschlossen wurde, nahmen im Harvard Faculty Club 55 geladene Personen am festlichen Mittagessen teil, das umrahmt wurde von einem Festvortrag von Alfred North Whitehead. Bei dieser Gelegenheit und vor einem distinguierten Auditorium sprach er über die Entwicklung der modernen formalen Logik, wie sie sich unter anderem aus der Perspektive eines der Autoren der *Principia* zugetragen hat.[380] Da er dieses erste Treffen der

374. Church (1984).
375. Ducasse/Curry (1962), 256f.
376. C. A. Baylis zit. n. Ducasse/Curry (1962), 256.
377. Vgl. Ducasse/Curry (1962), 257.
378. ASL (1938).
379. Kleene (1984).
380. Vgl. Weiss (1936).

ASL als eine „historic occasion of considerable importance“[381] beurteilte, nutzte er die besondere Gelegenheit, um in seinem Vortrag die Anwesenden daran zu erinnern, zu welch großem Dank wir den wegbereitenden Logikern früherer Jahre und Jahrzehnte verpflichtet sind. Frege gehörte zu den Genannten.

In der *ASL* organisierten sich also die Logiker und im *JSL* fanden sie nunmehr ihre Stimme. Das *Journal of Symbolic Logic*, das schnell und vollkommen zu Recht in den vorzüglichen Ruf der „Unentbehrlichkeit“[382] gelangte, erschien erstmals am 9. Mai 1936. Es war von Anfang an das offizielle Organ der *ASL*[383] und damit zugleich das in Quartalsabständen erscheinende internationale Sprachrohr, der auf Englisch, Deutsch und Französisch publizierenden Logiker und mathematischen Grundlagenforscher. „The journal, under Church's untiring and judicious direction, raised the subject to new heights of prominence and activity“.[384] Auch für Außenstehende war innerhalb kürzester Zeit erkennbar, dass es neben den angestammten philosophischen und mathematischen Disziplinen nunmehr einen vielversprechenden Schnittbereich in der Forschung gibt, der sich eines großen Zuspruchs erfreut. „The creation in 1936 of the Journal of Symbolic Logic is symptomatic of the activity of an increasing group of American specialists“.[385]

Mit dem *JSL* sollten die weltweit tätigen Logiker endlich eine allein ihnen gehörende Plattform erhalten, um gemeinsam die vielfältige Forschung in der Logik zu gestalten und ihre Ergebnisse mit allen anderen zu teilen. „It is an essential part of the aim of the Journal to bring together more closely the philosophers and the mathematicians working in this field, to provide for mutual criticism among its various schools, and to disseminate knowledge of the subject more widely“.[386] Vor allem mit dem zuletzt erklärten Ziel ging ein historiographisches Aufklärungsanliegen einher, denn die Geschichte der eigenen Disziplin galt noch nicht als besonders gut dokumentiert und erst recht nicht als problemgeschichtlich rekonstruiert. Vor allem aber galt, dass die meisten Logiker über die Geschichte der eigenen Disziplin nur unzureichend unterrichtet waren. Das *JSL* sollte hier einen entscheidenden Beitrag zur Aufklärung leisten, wenngleich es zumindest ein erwähnenswertes Werk gab, durch das ein wertvoller Beitrag bereits geleistet war.

Mit Jørgen Jørgensens dreibändiger Abhandlung über die Entstehung und Diversifizierung der formalen Logik erschien 1931 überhaupt das erste Mal eine historische Untersuchung, die zum Zeitpunkt ihrer Anfertigung (1924/25) als gleichermaßen

381. Zit. n. Weiss (1936).
382. So auch Hermes/Scholz ((1952), 3f.) an exponierter Stelle.
383. JSL (1936a).
384. Quine (1985), 124.
385. Birkhoff (1938), 282.
386. JSL (1936a).

professionell verfasst wie umfassend recherchiert angesehen werden konnte. Vollkommen zu Recht wurde sogleich festgestellt, dass es sich um ein (nicht nur dem Umfang nach) „großes Werk“ handelt, das seinen Zweck „auf eine hervorragende Weise“ erfüllt.[387] Jørgensen, der 1937/38 auch dem Vorstand der *ASL* angehörte, beteiligte sich 1924 an der Preisaufgabe der Königlich Dänischen Akademie der Wissenschaften, die Hauptformen der modernen formalen Logik seit ihren Anfängen zu untersuchen, ihre historische Entwicklung darzustellen sowie ihre Bezüge zur Mathematik und Philosophie darzulegen.[388] Allein schon diese Aufgabenstellung lässt auf eine steigende Wertschätzung der Logik schließen. Jørgensen, der wahrscheinlich bereits 1923 an einem ähnlich gelagerten Projekt gearbeitet hatte,[389] gewann nicht nur die Goldmedaille[390] und damit den Wettbewerb, sondern er überzeugte auch durch eine umfassende Berücksichtigung des logizistischen Grundlagenprogramms, das in seiner Darstellung nun gerade nicht auf die *Principia Mathematica* beschränkt blieb (obgleich ihm ganz fraglos eine gründliche Analyse der verzweigten Typentheorie gelang). In der „Einleitung zur zweiten Auflage“ seiner *Principles* hebt selbst Russell hervor, dass es sich bei Jørgensens umfassender Analyse des Logizismus um eine exzellente Diskussion des Gegenstandes handelt.[391]

Gerade im ersten Band, welcher der historischen Entwicklung gewidmet ist, finden Freges Beiträge eine umfassende und vor allem historisch adäquate Berücksichtigung.[392] Jørgensen ist einer der wenigen, die Frege unter Verwendung der begriffsschriftlichen Notation sicher darzustellen wissen und die mit Nachdruck betonen, dass der Wert des von Frege Erreichten keinesfalls an der Inkonsistenz seines formalen Systems bemessen werden darf. „Im Gegenteil. Er hat durch seine ungemein scharfsinnigen Untersuchungen so viel Klarheit in der ganzen Frage und einen so hohen Standard für logische Untersuchungen geschaffen, daß er immer als eine der Hauptgestalten in der Geschichte der Logik stehen bleiben wird“.[393] Auch wenn Jørgensen, der in den 1930er Jahren zu einem bekannten Vertreter des Logischen Empirismus in Nordeuropa werden sollte, auch an anderer Stelle stets Freges Leistungen betonte,[394] so vermochten es seine Schriften doch nicht, die entscheidenden Impulse zu setzen.

387. Kaila (1931), 468.
388. Jørgensen (1931*I*), IX.
389. Vgl. Christensen (1976), 242.
390. Vgl. Jørgensen (1931*I*), VI.
391. Russell (1937), vii.
392. Jørgensen (1931*I*), 145ff.
393. Jørgensen (1932/33), 82.
394. Etwa Jørgensen (1935), 135.

5.3 „the authority of the great Frege may be adduced“

Der Erfinder des Lambdakalküls, der Turings Maschine ihren Namen gab[395] und dessen theoretische Durchdringung der Sphäre des Berechenbaren die Forschung zur Rekursion so eminent inspirierte, war zugleich jener Gelehrte, der den Charakter des *Journal of Symbolic Logic* auf Jahrzehnte maßgeblich prägte, der die Grundlagen für eine problemgeschichtliche Durchdringung der formalen Logik legte und der die laufende Forschung durch seine omnipräsente Rezensionstätigkeit inspirierte.

„49. GOTTLOB FREGE (F. L. G. Frege)“

Der 30. März 1937 markiert einen historischen Wendepunkt in der Fregerezeption. Die zufallsgeprägten Lektüregelegenheiten früherer Zeiten werden nunmehr stückweise ersetzt durch die sicheren Bahnen der Dokumentation des Werkes und seiner systematischen Erschließung. An diesem Tag erscheint das vierte Heft des ersten Bandes des *JSL* und trägt damit eine ganz bestimmte Information in die gelehrte Welt hinaus, hinter die der wissenschaftliche Erkenntnisfortschritt nicht mehr zurückfallen kann. Zu viele Logiker nahmen in den Wochen, Monaten und Jahren nach diesem Tag von einer Einsicht Notiz, welche den Blick auf Gottlob Frege und sein Werk irreversibel verändern sollte.

Mit dem *JSL* 1(4) wurde eine Ausgabe dem kulturellen Gedächtnis der großen US-amerikanischen Bibliotheken übergeben, die auf der Seite 135 vollkommen unprätentiös und lediglich durch die Anwendung der vorab definierten bibliographischen Kriterien Frege zu einem der bedeutsamsten Logiker der Neuzeit deklariert. Zu erklären, wie es dazu kam, macht es erforderlich, auf Churchs frühe Prägung des *JSL* einzugehen. Auf seine Initiative hin fand von Anfang an die historiographische Dimension in der publizistischen Ausrichtung der Zeitschrift ihre Berücksichtigung, auf sein Engagement hin wurden von Beginn an die Grundlagen für spätere problemgeschichtliche Betrachtungen gelegt, denn er hatte „a great historical interest and a great bibliographical interest. He was very much interested in the broad field of the literature“.[396] Alonzo Church war nicht nur einer der besten Logiker seiner Zeit, sondern er war ein wahrhaft Gelehrter unter den Logikern, der in seiner historiographischen Professionalität und seiner bibliographischen Präzision an einen Philip Jourdain erinnerte.

395. Church (1937), 43.
396. Kleene (1984).

Neben den weiter oben bereits dargelegten Zielen sollte durch das Publikationsorgan der *ASL* zudem ein beeindruckend ehrgeiziges Vollständigkeitskriterium sichergestellt werden: Jede Publikation, die jemals zu einem Thema der symbolischen Logik verfasst wurde oder noch verfasst werden würde, sollte durch das *JSL* erfasst und bibliographisch dokumentiert werden. Hierfür wurden von Seiten der Herausgeber zwei Orte im Publikationsmedium vorgesehen, ein periodischer sowie ein singulärer. Der periodische Ort war der Bereich der *Reviews*-Abteilung, der den zeitgenössischen und zukünftigen Veröffentlichungen gewidmet war und der mit jedem Heft die Aktualität der Publikationen zur symbolischen Logik nachzuhalten hatte. Der singuläre Ort indes war all jenen Arbeiten gewidmet, die bis zum 31. Dezember 1935 erschienen waren:

> There is presented herewith what is intended to be a complete bibliography of symbolic logic for the period 1666-1935 inclusive.[397]

Mit Gewissheit darf festgestellt werden, dass hier mit „Vollständigkeit" jener nicht mehr steigerungsfähige Anspruch umfassender Berücksichtigung bezeichnet wird, der häufig genug bestenfalls als regulative Idee Verwendung findet. Wenn Church indes Vollständigkeit beansprucht, dann beansprucht er diese unbedingt und ohne Abstriche. Die als vollständig beanspruchte Liste erschien im besagten vierten Heft und führte auf knapp 100 Druckseiten 547 Autoren mit insgesamt einer vierstelligen Anzahl von Veröffentlichungen zur symbolischen Logik seit 1666, dem Publikationsjahr von Leibniz' *Dissertatio de arte combinatoria*. Da es kaum überraschen dürfte, dass diese erste Liste trotz der ihr vorausgegangenen umfassenden Recherchen noch nicht das Kriterium der Vollständigkeit erfüllte, wurden über die nachfolgenden zwei Jahre alle weiteren Ergänzungsvorschläge systematisch zusammengetragen und im Rahmen einer auch Korrekturen umfassenden Erweiterungsbibliographie veröffentlicht.[398] Die *Bibliography of Symbolic Logic* führte nunmehr um die 600 Autoren mit weit mehr als 2.500 Veröffentlichungen über einen Zeitraum von etwas mehr als zweieinhalb Jahrhunderten.

Alonzo Church, der Schöpfer der *Bibliography* und bibliophile Spurensucher, hatte mit der Systematik sowie dem Umfang dieser Liste ein Werkzeug geschaffen, das bis auf den heutigen Tag zu einem unverzichtbaren Instrument in der logikhistorischen und problemgeschichtlichen Forschung werden sollte. Die Binnenstruktur, die Organisation der *Bibliography* mit der Vielzahl der durch sie zu berücksichtigenden Daten beeindruckt hierbei ebenso wie die charakteristischen Stellungnahmen, die sich zu einzelnen gelisteten Werken als paradigmatische Inhaltsangabe abgedruckt

397. Church (1936), 121.
398. Church (1938). Alle späteren Nachträge wurden im fortwährenden Verlauf der Reviews dokumentiert.

finden. Es scheint kaum möglich, aber Church muss tatsächlich im Vollzug der Erstellung der Bibliographie den Großteil der Werke in den eigenen Händen gehalten und wiederum einen Großteil dieser zur Evaluation derselben auch eingehend studiert haben. „So far as possible the original work (or a reprint of it) has been consulted in each case before its inclusion in the bibliography. In a number of cases where it has proved to be very difficult to obtain a copy of the original work, titles have been included on the basis of what was believed to be good authority as to existence and content, checking, however, one source of information against another in order to avoid the reproduction of typographical and other errors“.[399]

Wie sich sogleich noch herausstellen wird, galt im Besonderen für die Schriften Freges der erste und nicht der zweite Passus. Zum Zeitpunkt der Anfertigung der *Bibliography* war Church mit Freges Arbeiten bestens vertraut, was zumindest den vollständigen Zugang zu denselben voraussetzt. Es kann für den Augenblick leider nicht verbindlich geklärt werden, ob Church über eigene Exemplare verfügte oder ob er zumindest in Teilen auf Bibliotheksexemplare in Princeton zurückgreifen konnte. Nach dem Stand der Dinge sprechen gegen beide Optionen einige Erwägungen. Da es im Falle eigener Buchexemplare erst recht unwahrscheinlich ist, dass sich Church diese in der ersten Hälfte der 1930er Jahre in den Vereinigten Staaten antiquarisch beschaffte, käme hierfür allenfalls seine Forschungsaufenthalt in Deutschland, vor allem in Göttingen Ende der 1920er Jahre infrage. Allerdings waren zu dieser Zeit auch hierzulande sämtliche Schriften Freges so gut wie überhaupt nicht erhältlich, weder regulär noch antiquarisch,[400] weil ehemals durch Verkauf stets wenige Exemplare in Umlauf kamen und der verbliebene Restbestand wahrscheinlich im Fall von allen Monographien irgendwann eingestampft wurde. Da selbst nur die allerwenigsten öffentlich zugänglichen Bibliotheken der Zeit Exemplare von Freges Schriften zu ihrem Bestand zählten, dürfte es bereits als Glückfall gelten, wenn die Universitätsbibliothek von Göttingen zu diesem kleinen Kreis gezählt hat. Erschwerend kommt hinzu, dass Church vor 1930 wahrscheinlich noch überhaupt kein nennenswertes Interesse an Frege hatte, was es im Besonderen erklärungsbedürftig machen würde, weshalb er Schriften eines für ihn nicht interessanten oder gar noch unbekannten Autors, die kaum zu erstehen waren, beschafft haben sollte. Diese Bedenken nähren selbstverständlich die Vermutung, dass er dann erfolgreich und umfassend auf die Bestände der Princeton University Library zugreifen konnte, von der er selbst immerhin sagt: „That was very good from the beginning. I think a lot of effort and probably a lot of money was put into getting a good mathematical library“.[401]

399. Church (1936), 121.
400. Vgl. Scholz (1935c), 169f.
401. Church (1984).

Bedauerlicherweise kann für keine der Monographien Freges mit Sicherheit dokumentiert werden, dass sie zum Zeitpunkt der Anfertigung der *Bibliography* vor Ort verfügbar waren.[402] Für den Fall der *Grundgesetze* kann im Augenblick überhaupt keine Aussage getroffen werden, da beide Bände als vermisst gelten. Für die *Grundlagen* kann indes eine Verfügbarkeit zum Zeitpunkt der Anfertigung der *Bibliography* ausgeschlossen werden, denn der Band wurde am 6. März 1956 und damit mehr als zwei Jahrzehnte nach dem fraglichen Zeitraum angeschafft. Einzig das vor Ort befindliche Exemplar der *Begriffsschrift* könnte von Church zum Zweck der *Bibliography* konsultiert worden sein. Zumindest widersprechen hier die bekannten Angaben nicht einander. Das fragliche Exemplar trägt die Signatur „A. Marquand“ und könnte damit dem Princetoner Kunsthistoriker Allan Marquand gehört haben, der zugleich auch Kurator des Kunstmuseums der Universität von Princeton war und Gründer der Bibliothek für Kunst und Archäologie. Unterstützt wird diese Vermutung durch die biographische Einsicht, dass Allan Marquand nach seinem Studium in Princeton erst einmal an die John Hopkins Universität nach Baltimore wechselte, um in Philosophie unter der Anleitung von Charles Sanders Peirce seine Promotion anzufertigen. Es handelte sich hierbei zwar um eine logikhistorische Untersuchung, gleichwohl dokumentiert dies die Schwerpunktbildung zur Logik, die Marquand auch erst einmal aufrecht erhielt, als er 1881 nach Princeton zurückkehrte, um dort neben Latein auch Logik zu unterrichten. Seine wissenschaftliche Karriere hatte Marquand also als Philosoph und Logiker begonnen, womit sein genuines Interesse an zeitgenössischen Fachpublikationen erklärt wäre.

Klärungsbedürftig, aber hier nicht weiter zu verfolgen, bleibt die Frage, weshalb Marquand an der *Begriffsschrift* ein derart gesteigertes Interesse hatte, dass er sich – wahrscheinlich – mühsam ein Exemplar aus dem fernen Europa beschaffte. Es dürfte seinerzeit jedenfalls eines der ganz wenigen Exemplare in ganz Amerika gewesen sein. Da Marquand 1924 verstarb, könnte der Band aus seinem Nachlass in den Bestand der Firestone Library übergegangen sein – für Churchs *Bibliography*-Projekt rechtzeitig genug. Doch selbst wenn er mit Marquands Exemplar der *Begriffsschrift* hätte arbeiten können, so bliebe immer noch unklar, wie es um die Herkunft der anderen Schriften bestellt war. Dieses Rätsel stellt sich jedoch nicht nur für die Schriften Freges, sondern auch für eine Vielzahl anderer der von Church konsultierten Werke, denn in Anbetracht des voluminösen Umfangs der *Bibliography* konnte die Princeton University Library schwerlich zu diesem Zeitpunkt alle bibliographischen Wünsche Churchs erfüllen. Ihm blieb also nicht nur die Aufgabe,

402. Die nachfolgenden Informationen verdanke ich Dr. Eric White, dem Kurator der Rare Books Abteilung der Princeton University Library, die er mir in einer Mail vom 21. Oktober 2015 mitgeteilt hat.

alle relevanten Publikationsdaten seit 1666 zusammenzutragen, sondern im Großteil der Fälle auch noch die Publikationen selbst zu sichten, um die Daten sowie den Inhalt bestmöglich zu verifizieren.

Hierbei handelte es sich fraglos um eine „tremendous task",[403] deren Machbarkeit viele Kollegen einzig ihm zutrauten, denn „Church reads everything and forgets nothing".[404] Durch Ausrichtung und Anspruch der *Bibliography* war damit sichergestellt, dass auch die Werke Freges mit erfasst werden würden, ebenso wie die eines jeden anderen unbekannten oder unbedeutenden Logikers seit Leibniz' Zeiten. Die *Bibliography* unterschied weder nach dem Grad der Bekanntheit der Autoren noch nach dem Grad der Bedeutsamkeit ihrer Werke, wenn es um die Frage der Berücksichtigung ging. Das einzige und allesentscheidende Kriterium war das der inhaltlichen Relevanz, dessen operative Anwendungsbedingungen von Church vorab klar definiert wurden.[405] Damit sollte die *Bibliography* zum Gedächtnis der symbolischen Logik für die ersten 270 Jahre ihres Bestehens werden. Ausnahmslos jedes einschlägige Werk, dessen man in der ersten Hälfte der 1930er Jahre irgendwie habhaft werden konnte oder dessen Existenz erweisbar war, wurde erfasst und damit vor dem Vergessen geschützt. Und tatsächlich finden sich bereits in der ersten Liste 23 Arbeiten Freges,[406] die Church für die Geschichte der symbolischen Logik als einschlägig einstuft. In den zwei Jahre später veröffentlichten „Additions" findet sich immerhin noch ein einzelner bibliographischer Nachtrag.[407] Durch die *Bibliography* nicht erfasst ist unter anderem der 1918 erschienene Aufsatz „Der Gedanke", der jedoch nicht übersehen, sondern klassifiziert wurde „as being (perhaps by a criterion more severe than was adopted elsewhere) not within the field covered".[408] Allein diese 24 gelisteten Titel, von denen immerhin für sieben (und damit für überdurchschnittlich viele) eine charakteristische Passage zitiert wurde, rechtfertigen freilich nicht den Anfang von Freges Durchbruch, sondern gewährleisten bestenfalls einen Ort der Erinnerung – ebenso wie für die Vielzahl der unbedeutenden Logiker, deren noch heute einzig in der *Bibliography* gedacht wird.

Es war ein weiteres Kriterium in Churchs Architektonik, das den Unterschied ausmachen sollte. Der Anspruch des Urhebers beschränkte sich nicht auf die Erfassung, Überprüfung und vollständige Darstellung der verifizierten bibliographischen Angaben, was für sich genommen bereits eine gewaltige Dienstleistung für die Forschergemeinschaft gewesen wäre. Selbstverständlich sollte die *Bibliography*

403. Helmer (1940).
404. Zit. n. Manzano (1997), 213.
405. Church (1936), 121f.
406. Church (1936), 135f.
407. Church (1938), 180.
408. Church (1953), 93.

deskriptiv korrekt und vollständig sein. Doch sie sollte darüber hinaus auch normativ ausstrahlen, denn Church verstand ihre Funktion nicht nur als die einer rein darstellenden Datenbank, die alle einschlägigen Veröffentlichungen erfasst. Da mit dem Anspruch der Vollständigkeit im Besonderen jene Schriften erfasst worden sein mussten, die für die Entwicklung der symbolischen Logik von großer oder sogar bahnbrechender Bedeutsamkeit gewesen sind, sah Church in der Organisation der Bibliographie ein weiteres Orientierungsmerkmal vor, das exakt hinsichtlich dieses Kriteriums diskriminierte:

> Publications which are thought to be of especial interest or importance from the point of view of symbolic logic have been indicated by marking with an asterisk * on the left-hand margin of the page. Among these a small number which mark the first appearance of a new idea of fundamental importance have received a double asterisk. It is intended that the criterion for even a single asterisk should be a severe one and many papers of not inconsiderable value are unmarked.[409]

Wer die *Bibliography* durchstreift, stellt fest, wie streng Church mit der Vergabe eines einzelnen Sternchens war. Es gibt eine Vielzahl von exzellenten Arbeiten, die bereits seinerzeit als klassisch galten und die dennoch nicht die Churchschen Anforderungen erfüllten und insofern ohne Sternchen ausgingen. Damit eine Arbeit „of especial interest or importance“ für die symbolische Logik war, musste in ihr und durch sie tatsächlich außergewöhnlich Substantielles geleistet worden sein. Churchs Vergabekriterium für ein Sternchen ist mithin und unbestreitbar „a severe one“.

Nach Auffassung desjenigen, der für die Bibliographie verantwortlich zeichnete, waren die mit einem Sternchen indizierten Arbeiten für die Entwicklung der modernen formalen Logik von großer Bedeutsamkeit und es ist unstrittig, dass Church sie allesamt kannte, hätte er doch andernfalls Abstand genommen von der wertenden Hervorhebung einer Schrift. Waren die mit einem Sternchen gekennzeichneten Arbeiten bereits rar gesät, so ist das Vorkommnis von Arbeiten, die durch „**“ indiziert werden, geradezu verschwindend gering. Bei diesen handelt es sich um die bahnbrechenden Arbeiten der symbolischen Logik, jene Schriften, in denen erstmals ein neuer Gedanke von fundamentaler Bedeutsamkeit zum Ausdruck gebracht wird. Bei den mit Doppelsternchen gekennzeichneten Werken handelt es sich mithin um paradigmenbegründende, richtungsstiftende Arbeiten, die auf lange Zeit Charakter und Form der Forschung entscheidend beeinflusst haben oder es immer noch tun. Für den besagten Zeitraum von gut 270 Jahren erkennt Church insgesamt elf Werken diesen Status zu, wobei sie allesamt in einen gut achteinhalb Jahrzehnte

409. Church (1936), 122.

umspannenden Zeitraum fallen, beginnend 1847 mit Booles Gründungsschrift für die Algebra der Logik und endend mit Gödels Unentscheidbarkeitsresultaten 1931. Insgesamt widerfährt acht Logikern die besondere Ehre, zur distinguierten Klasse dieser Autoren gerechnet zu werden. Boole, de Morgan, Hilbert, Russell, Brouwer und Gödel haben nach Einschätzung von Church jeweils eine für die Entwicklung der modernen formalen Logik bahnbrechende Arbeit verfasst. Ihre mit Doppelsternchen gekennzeichneten Arbeiten gehören fraglos zu den ganz großen Werken der Logikgeschichte. Da das Relevanzkriterium für Logik-Affinität die Einschlägigkeit von Arbeiten zur Zermeloschen Mengentheorie explizit vorsieht,[410] überrascht es nicht, dass Zermelo sogar mit zwei Arbeiten vertreten ist.[411]

Diese Berücksichtigung ist keinesfalls willkürlich, zeugen doch bereits die Gründungsschriften zur axiomatischen Mengentheorie von einer hohen Präsenz an grundlagentheoretischem Problembewusstsein und der umfassenden Verwendung eines großen Arsenals an logischen Werkzeugen. In der nachfolgenden Grundlagendiskussion, vor allem im Kreis um Hilbert, führten die aus den Arbeiten von Zermelo begründeten Systemstandards zu einer weit verzweigten logischen Forschung und zu einer massiven Beförderung des beweistheoretischen Programms. Zermelos Mengentheorie inspirierte sowohl die Entwicklungsmöglichkeiten der Logik als auch das ferne Ziel der beweistheoretischen Forschung und Church war geradezu prädestiniert dafür, dies zu wissen. Schließlich hatte er seine 1926 angefertigte Dissertation „Alternatives to Zermelo's Assumption“[412] exakt auf eines dieser beweistheoretisch-affinen Themen hin ausgerichtet. Indem er das Auswahlaxiom, von dem Hilbert nur wenige Jahre zuvor noch behauptete, dass der ihm „zugrunde liegende Gedanke ein allgemein logisches Prinzip ist“,[413] als bloße Annahme behandelte, konnte er unter Formulierung von Sätzen, die dem Auswahlaxiom widersprechen, deren Folgen untersuchen. Church variierte also die mengentheoretischen Ausgangsbedingungen des Axiomensystems und analysierte jeweils den charakteristischen Theorembestand der alternativen Mengentheorien auf aussagekräftige Resultate hin. Church behandelt Zermelos Mengentheorie als eine formales Systems, dessen deduktive Besonderheiten unter Variation einer bestimmten axiomatischen Anfangsbedingung zu untersuchen sind, eben Alternativen zu Zermelos Annahme. Diese Forschung gehört fraglos in ein verwandtes Feld der symbolischen Logik, wenngleich Churchs Dissertation noch in einem informellen Stil abgefasst ist. Die Berücksichtigung von Zermelos Arbeiten ist damit aber gleichermaßen gerechtfertigt wie die Erfassung der Schriften der anderen genannten Wissenschaftler.

410. Church (1936), 121.
411. Church (1936), 155f.
412. Church (1927).
413. Hilbert (1923), 152.

Diese sieben mathematischen Grundlagenforscher waren zum Zeitpunkt der Erstellung der *Bibliography* bereits berühmte Logiker, zum Teil mit Weltruhm über die Grenzen der Wissenschaftlergemeinschaft hinaus. Boole und de Morgan waren großen Namen aus einer vergangenen großen Epoche der Disziplin und Hilbert, Russell, Brouwer, Zermelo sowie der noch junge Gödel waren lebende Legenden. Weithin unbekannt, selbst unter Fachkollegen war indes die Nummer Acht der Doppelstern-Liste. Doch dieser Autor unterschied sich nicht nur seiner fehlenden Bekanntheit wegen von den anderen, sondern er war zudem der einzige, dessen monographische Hauptwerke allesamt von Church mit dem Prädikat der größten Bedeutsamkeit für die Entwicklung der modernen formalen Logik versehen wurden. Allein drei seiner Schriften wurde ein bahnbrechender Einfluss auf die symbolische Logik zuerkannt und auf keiner Seite der *Bibliography* finden sich auch nur annähernd so viele Sternchenindizierungen wie auf der Seite 135, die nicht einmal Schriften verschiedener Autoren zuerkannt wurden, sondern durchweg nur den Werken eines einzigen Autors: Gottlob Frege.

Die Ausgabe des vierten Heftes des ersten Bandes des *JSL* war nicht im engeren Sinne zum Lesen gedacht, denn es umfasste einzig die *Bibliography* sowie die sie begleitenden Ordnungsapparate. Gleichwohl regte dieses Heft zum Stöbern an und Churchs evaluative Indizierung durch Sternchen und Doppelsternchen am linken Rand konnte niemand übersehen. Gut möglich, dass nicht wenige Interessierte (und auch Betroffene) bei einem ersten Durchstreifen einzig nach Doppelsternchenindizierungen Ausschau gehalten haben. In jedem Fall konnte jene Seite nicht übersehen werden, die mehr als jede andere bedeutsame Schriften der Geschichte der formalen Logik aufführte: 3x „**“ und 3x „*“. Der Häufungspunkt dieser Indizierungen trug die Bezeichnung „49. GOTTLOB FREGE (F. L. G. Frege)“ und für viele Betrachter dürfte sich ein handfestes Orientierungsproblem eingestellt haben, denn sofern zu dem Zeitpunkt überhaupt schon Narrationen über die Geschichte des Faches tradiert wurden, so enthielten sie bis dato Namen, denen fraglos auch in Churchs *Bibliography* eine entsprechende Wertschätzung entgegengebracht wurde, deren Stellung nunmehr aber zu relativieren war in Anbetracht jener von Freges Werk.

Dass die Sternchen- und Doppelsternchen-Evaluationen von Alonzo Church auf der Seite 135 der *Bibliography of Symbolic Logic* zum Wendepunkt in der Fregerezeption werden konnten, verdankt sich nunmehr auch dem distinguierten Charakter des Publikationsortes selbst. Wir hatten bereits dargelegt, dass das *JSL* aufgrund seiner Rolle als Medium der *ASL* und als Sprachrohr der internationalen Logikergemeinschaft von Beginn an eine unbestrittene Stellung innehatte, die von Church mitbegründet, aber auch genutzt wurde. Im *JSL* publizierten von Beginn an nicht nur die besten Logiker, sondern als umfassendes Informationsorgan über vergangene und gegenwärtige Entwicklungen der Disziplin sollte es auch von allen Logikern rezipiert und seine Inhalte für die Forschung genutzt werden. Der Wert der *Bibliography* wurde umgehend und allgemein anerkannt: „All those whose research is partly or wholly concerned with the field of symbolic logic owe a great debt of gratitude to the chief editor of the Journal of Symbolic Logic".[414] Das *JSL* war seit seiner Gründung eine akademische Institution und eine wissenschaftliche Autorität, es war die lang ersehnte Plattform für den intellektuellen Austausch, der weit über die Ländergrenzen hinausreichen sollte. Die *Bibliography* hier zu publizieren war damit der beste Garant dafür, dass möglichst viele Logiker und mathematische Grundlagenforscher von ihr Notiz erhielten und mit ihr arbeiteten.

Indem Church unter Verwendung seiner persönlichen und ungeschriebenen, aber keinesfalls idiosynkratischen Logikgeschichte Gottlob Frege zu einem der bedeutsamsten Logiker seit Leibniz' Zeiten erklärt, weil dieser die evaluativen Kriterien weitaus umfangreicher erfüllt als jeder andere Logiker seitdem, kürt mit dem *Journal of Symbolic Logic* die maßgebliche Instanz der internationalen Gemeinschaft der Logiker einen fast vergessenen Außenseiter zu einem ganz Großen der Logikgeschichte. Hinter die mit der Publikation des vierten Heftes geschaffenen Tatsachen konnte die historiographische Wahrnehmung nicht mehr zurückfallen. Der Wendepunkt in der Fregerezeption war damit erreicht, doch es sollte noch einiger Anstrengungen bedürfen, damit sich das in der Bibliographie Kodifizierte auch im wissenschaftlichen Alltagsbewusstsein festsetzen sollte. Die Mission von Church war noch nicht vorbei.

„this unparalleled service to logic"

Während durch die *Bibliography* der Blick zurückgerichtet wurde, um ausnahmslos alle einschlägigen Arbeiten der Vergangenheit zu erfassen, sollte mit dem Beginn der Herausgabe des *JSL* für die laufende Forschungs- und Publikationstätigkeit eine neue Zeit anbrechen. Das Versäumnis früherer Generationen, die erbrachten Forschungsbeiträge nicht umfassend zu dokumentieren und das Wissen um ihre Existenz wachzuhalten, sollte nunmehr begleitend zur genuinen Forschung gewährleistet werden. Hierfür gab es die *Reviews*-Abteilung, die in Umfang und Anspruch dem Bereich der neu veröffentlichten Forschungsartikel in nichts nachstand. Durch die Reviews sollten ausnahmslos alle einschlägigen Publikationen rezensiert oder doch zumindest bibliographisch erfasst und damit lückenlos dokumentiert werden. Dieses Ziel verfolgte das *JSL* explizit und von Beginn an:

414. Helmer (1940).

It is intended that this section of the JOURNAL shall serve as a complete bibliography of current literature in the field of symbolic logic, from January 1, 1936. To this end an effort will be made to include in it, at least by title, all publications in this field, both books and articles in journals, and as far as possible these will be accompanied by signed reviews.[415]

Für über vier Jahrzehnte, für 44 Bände und damit für mehr als 160 Ausgaben sollte Alonzo Church der hauptverantwortliche Herausgeber für die *Reviews*-Abteilung sein. Unter seiner Federführung erfüllte der Rezensionsteil von Anfang an die höchsten wissenschaftlichen Ansprüche und brachte eine Vielzahl von Artikel- und Buchbesprechungen hervor, die durch die Begründung neuer Einsichten selbst zu maßgeblichen Forschungspublikationen werden sollten.

Die *JSL*-Reviews sollten nicht nur umfassend über die Vielfalt der Forschungsstränge informieren, sie sollten vielmehr ein dynamisches Abbild derselben sein. Mit der explizit erwünschten Verweispraxis auf frühere Rezensionen wurde in diesem Teil der Zeitschrift fast in Echtzeit der wissenschaftliche Diskurs gepflegt – ohne jede Polemik, worauf Church auf das Strengste achtete. Er forderte von seinen Rezensenten die Wahrung besonders anspruchsvoller Kriterien ein, sowohl inhaltlich wie auch im sozialen Miteinander, was von ihm in jedem einzelnen Fall, in der Regel unter Konsultation der zu besprechenden Arbeit, überprüft wurde. Seine Herausgebertätigkeit der *Reviews*-Abteilung ist legendär und gut untersucht.[416] Er selbst verfasste in seiner bis 1976 reichenden Rezensionstätigkeit mehr als 500 *JSL*-Besprechungen,[417] wobei er zur Gewährleistung des Vollständigkeitsanspruchs bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts so manches Mal auch schlicht einsprang: „The intention at the time was to review everything that appeared in the field. A bibliography which was meant to be complete of earlier things was published, and the reviews up until about 1950 were quite complete. The field kept growing and the reviewing got to be too big a job".[418] Die exponentielle Zunahme an Forschungsarbeiten ab den 1950er Jahren ließ den Anspruch der vollständigen Dokumentation aller Publikationen illusorisch werden, wenngleich die *Reviews*-Abteilung des *JSL* unvermindert mit einer beeindruckend hohen Anzahl an exzellenten Rezensionen operierte. Church war nicht nur der geistige Vater der „Reviews Section", er war zugleich auch der jahrzehntelange Hüter ihrer Standards und ihr produktivster Kontribuent, womit „this unparalleled service to logic"[419] zum fast unerreichbaren Vorbild für alle Nachfolgenden werden sollte.

415. JSL (1936b).
416. Enderton (1998).
417. Vgl. MacFarlane (2006ff.).
418. Church (1984)
419. JSL (1980).

Das Instrument der *Reviews*-Abteilung wurde von Church ab 1939 auch zur Lancierung von Freges Errungenschaften genutzt. Markierte der singuläre Ort der *Bibliography* den Wendepunkt in der Fregerezeption, so repräsentiert der periodische Ort der *JSL*-Rezensionen den Katalysator für die veränderten Lektüregewohnheiten. Innerhalb eines guten Jahrzehntes befeuerte Church bei jeder sich bietenden Gelegenheit die Auseinandersetzung mit dem Schrifttum Freges,[420] so dass Max Black zum Beginn des Jahres 1951 aus Anlass der Besprechung der Austin-Edition mit der selbstbewussten Gewissheit einer unstrittigen Selbstverständlichkeit feststellen konnte:

> To readers of this JOURNAL the works of Frege need no recommendation.[421]

Die Leserschaft des *JSL* bedurfte zu diesem Zeitpunkt tatsächlich nicht mehr der Empfehlung Freges, denn dieser Autor einer früheren Generation wurde wie kein Zweiter seit Begründung der Zeitschrift durch den Herausgeber selbst lanciert. Die Leserschaft des Jahres 1951 umfasste neben den logikinteressierten Studierenden und logicophilen Wissenschaftlern jener Universitäten, die das *JSL* bereits abonniert hatten, freilich die Mitglieder der *ASL*, die zum Stichtag des 17. November 1950 auf die stattliche Anzahl von 261 Logikern, mathematischen Grundlagenforschern und Philosophen angewachsen war,[422] unter denen freilich die weltweit führenden Vertreter der symbolischen Logik zu finden waren. In der Mitte des 20. Jahrhunderts sollte Gottlob Frege dank der memorierenden Funktion des *JSL* im Kollektivgedächtnis der Logikergemeinde fest verankert sein.

Church ließ von Beginn an keine Möglichkeit aus, um die anfangs noch wenigen neuen Arbeiten zu Frege auf dem Standard setzenden Niveau seiner eigenen Frege-Expertise zu besprechen und er ließ keine Vorlage ungenutzt, um diejenigen Autoren auf Frege hinzuweisen, die ihn für ihre eigenen Arbeiten bereits hätten kennen oder ausführlicher berücksichtigen sollen. Selbst die Werke renommierter Kollegen blieben von diesem Aufklärungsanliegen nicht ausgenommen, wie etwa die Besprechung einer Arbeit Jean Dieudonnés zeigt, der dafür kritisiert wird, dass vollkommen disproportional zum Thema „Frege receives but the briefest passing mention“.[423]

Die von ihm vorgetragenen Anregungen, Korrekturen und zum Teil auch mahnenden Hinweise betrafen unter anderem die Relativierung historischer und die Kor-

420. Siehe Church (1939b), (1939d), (1940a), (1940b), (1940c), (1941), (1942a), (1942k), (1943b), (1943c), (1944), (1945), (1946a), (1946b), (1948a), (1948b), (1949a), (1949b), (1950).
421. Black (1951).
422. Vgl. ASL (1950).
423. Church (1939d).

rektur systematischer Urteile,[424] rezeptionsgeschichtliche Nachträge und terminologische Hinweise,[425] durch Frege inspirierte Argumentationen sowie die schlichte Erwähnung seines Namens, wenn er tatsächlich einmal Berücksichtigung fand.[426] Mit besonderer Häufigkeit und Emphase wurde von ihm in diesen Rezensionen aus den 1940er Jahren auf Freges Einsichten aus „Über Sinn und Bedeutung" hingewiesen, was wiederum Max Black und Herbert Feigl sicherlich nicht darin hinderte, Ende des Jahrzehnts ihre beiden Übersetzungen des Aufsatzes anzufertigen.[427] Diese, fast eine Dekade umfassende Rezensionstätigkeit im Dienste des Jenenser Mathematikers verfolgte im Ganzen also den bei der Gemeinschaft der Logiker zu vollziehenden bewusstseinserweiternden Schritt, dass „the authority of the great Frege may be adduced".[428]

Eine Episode mit besonderem Charakter in Churchs *JSL*-Rezensionstätigkeit während der 1940er Jahre repräsentiert hierbei Harold Smarts ambitionierter Überblicksartikel „Frege's Logic" aus dem Jahr 1945, der in der Rezension umgehend als „marred by neglect or misunderstanding in major points"[429] beurteilt wird. Smarts zusammenfassende Evaluation von Freges Bedeutsamkeit wird von Church gar mit dem Prädikat „wholly inadequate"[430] versehen. Die vergleichsweise umfassende Besprechung diskutiert im Besonderen sechs Punkte, denen gemäß Fregesche Topoi oberflächlich darstellt, unangemessen verkürzt oder gar fehlerhaft dargestellt werden. Der Artikel ist selbst für zeitgenössische Verhältnisse von keiner nennenswerten Qualität, doch das Besondere dieser Konstellation besteht in Smarts beeindruckend scharfsinniger Diagnose und Churchs Anerkennung für diese keineswegs verbreitete Einsicht. Zur Legitimation seines Anliegens beginnt Smart mit der präzisen Beobachtung „it is a surprising fact that no systematic survey of his [Frege's, MW] work as a whole has yet been undertaken".[431] Tatsächlich erfüllte trotz der inzwischen vollzogenen Fregeforschung noch keine jüngere Publikation die Kriterien für einen systematischen Überblicksartikel, weshalb Smart für seinen Text den Anspruch formulierte: „The following article represents an attempt partly to fill this gap in the recent history of logic".[432] Dass dieses Anliegen nur bedingt umgesetzt wird, ändert nichts am Wert der formulierten Absicht und dem ehrenwerten Charakter, das diagnostizierte Defizit selbst zu beheben. Church ist

424. Z.B. Church (1940b), 162; (1941), 162; (1943b), 45; (1944), 64f., (1945), 101ff.; (1949b), 136; (1950).
425. Z.B. Church (1939b), 30; (1939d); (1941), 162; (1943b), 46; (1943c); (1948a), 152f.; (1949b), 137.
426. Z.B. Church (1940c), 163; (1942k), 100; (1946b), 132f.; (1949a).
427. Siehe 2.1.
428. Church (1939b), 30.
429. Church (1945), 101.
430. Church (1945), 101.
431. Smart (1945), 489.
432. Smart (1945), 489.

entsprechend voll der Anerkennung für das Projekt und empfiehlt es zumindest dem Laien in Sachen Frege zur Lektüre: „the paper is timely in its subject, and might have been a valuable guide to philosophers who lack acquaintance with this most important chapter in the history of modern logic“.[433]

Eine Rezensionsbegebenheit ganz anderen Charakters ereignete sich gut ein Jahr später, als Church souverän in eine laufende Debatte eingriff, um sie mit Verweis auf Frege technisch auf ein weitaus höheres Niveau zu heben. Er besprach mit Prägnanz eine jüngst stattgefundene Diskussion zwischen Morton G. White und Max Black um das sogenannte „paradox of analysis“, in deren Rahmen vier Publikationen einander im Gesprächsverlauf abwechselten und deren Gehalt Church auf einer knappen halben Seite darzustellen vermochte.[434] In seiner durch Black und White diskutierten Fassung ging das aufzulösende Rätsel auf Cooper Harold Langford zurück, der es in Auseinandersetzung mit George Edward Moores Philosophie 1942 entwarf. Das Rätsel firmiert unter der Bezeichnung „paradox of analysis“, weil sich im Kontext der Begriffsanalyse der folgende paradoxiebehaftete Sachverhalt einstellt.

Betrachten wir die Definition – die begriffliche Identität –, dass ein Bruder ein männliches Geschwister ist. Die Angemessenheit der Definition vorausgesetzt, repräsentieren beide Seiten denselben Begriff, womit sie unter Wahrung der Bedeutungsgleichheit in jedem Kontext durcheinander ersetzt werden können. Damit unterscheiden sich Identitätsurteile dieses Typs aber scheinbar nicht mehr von analytisch trivialen Identitätsaussagen der Form „$a=a$“. Fast sieht es so aus, als würden Begriffsanalysen der Form „ein Bruder ist ein männliches Geschwister“ ebenso trivial und wenig informativ sein wie logische Wahrheiten, doch offenkundig sind sie es nicht. Für Church verblieb selbstverständlich nur eine Möglichkeit, nach Darstellung des bisherigen Diskussionsverlaufs in der Debatte Stellung zu nehmen:

> The paradox of analysis has an obvious analogy with Frege's puzzle (49*8*), as to how an equation, say '$a = b$', can ever be informative–because, it seems, if the equation is true then 'b' is replaceable by 'a', and hence '$a = b$' is the same in meaning as '$a = a$'. In the reviewer's opinion this is not merely an analogy, but the paradox of analysis is a special case of Frege's puzzle and is to be solved in the same way, on Frege's theory of meaning, by the distinction of sense and denotation ("Sinn und Bedeutung").[435]

433. Church (1945), 101.
434. Church (1946b), 132f.
435. Church (1946b), 133.

Die Diskussion befand sich also exakt an jenem Punkt, an dem Frege mehr als ein halbes Jahrhundert zuvor seinen (1946 immer noch wenig beachteten) Aufsatz mit der Einsicht beginnen lässt: „Die Gleichheit fordert das Nachdenken heraus durch Fragen, die sich daran knüpfen und nicht ganz leicht zu beantworten sind“.[436] Was nachfolgt, ist hinlänglich bekannt. Frege hat exakt dasselbe Problem spätestens seit 1879, doch erst Anfang der 1890er Jahre verfügt er über die erforderlichen Werkzeuge, um die semantischen Unterschiede zwischen wahren Urteilen der Form „$a{=}b$“ und solchen des Typs „$a{=}a$“ souverän fassen zu können.

Der Logiker Church lässt es sich nunmehr nicht nehmen, die Kontribuenten in der Debatte zudem darauf hinzuweisen, dass „a correct expression of the analysis must employ names of these concepts“.[437] Schließlich finden in Definitionen Prädikate und keine Namen für Begriffe Verwendung. Damit die Beispiele für die Begriffsanalyse also die erforderliche logische Form eines Identitätsurteils besitzen, müssen die in den Definitionen verwendeten Prädikate in ihre nominativen Vorkommnisse transformiert werden, womit Church ein weiteres Mal an Frege anschließt, dieses Mal mit „Ueber Begriff und Gegenstand“.[438] Die Definition „ein Bruder ist ein männliches Geschwister“, das in seiner angestammten Form erst einmal durch „$x\varepsilon$B s $x\varepsilon$MxεG“ oder dergleichen wiedergegeben werden kann, würde mit Frege zu dem Identitätsurteil „der-Begriff-Bruder = der-Begriff-männliches-Geschwister“ transformiert werden und erhält unter Verwendung der Churchschen -Konversion, die als Formalisierung von Freges termbildenden Operator ‚der-Begriff-‘ verstanden werden kann, schließlich die Form „$x(\mathrm{B}x) = x(\mathrm{M}x\mathrm{G}x)$“. Für die beiden Verwendung findenden Begriffsnamen gilt nunmehr, dass sie unter Wahrung der Wahrheitswertgleichheit in Behauptungssätzen durch einander ersetzt werden können, weil sie dieselbe Bedeutung besitzen, während sich der jeweils dabei ausgedrückte Gedanke jedoch ändert, weil sie sinnverschieden sind. Begriffsanalysen der Form „$x(\mathrm{B}x) = x(\Gamma x)$“ bringen also zum Ausdruck, dass wir über die durch die Namen „$x(\mathrm{B}x)$“ und „$x(\Gamma x)$“ ausgedrückten verschiedenen Arten des Gegebenseins zu ein und demselben Begriff gelangen, wenn wir die jeweiligen kennzeichnenden semantischen Hinweise entsprechend zur Anwendung bringen. Aus diesem Grund sind wahre nicht triviale Urteile des Typs „$x(\mathrm{B}x) = x(\Gamma x)$“ informativ.[439] Durch zwei kleine Absätze im Rahmen der Rezension ändert Church den gesamten Status der Debatte. Nicht nur liefert er mit Frege den mit Abstand besten Lösungsvorschlag für das Problem, sondern er macht mit dem Vollzug seiner Frege-inspirierten Argumentation implizit darauf aufmerksam, dass das Problem in der diskutierten Form möglicherweise gegenstandslos wäre, wenn es um die philosophiehistorische

436. Frege (1892a), 25.
437. Church (1946b), 133.
438. Wir kommen hierauf noch einmal in 5.3.3 zurück.
439. Vgl. Church (1946b), 133.

Bildung der Beteiligten besser bestellt gewesen wäre.

Die Black&White-Debatte, in der Frege überhaupt keine Rolle spielte, hätte es in der dokumentierten Form sicherlich nicht gegeben, wenn Freges Aufsatz bereits ein halbes Jahrzehnt früher hinlänglich bekannt gewesen wäre. Bei aller Kontrafaktizität lässt sich dies an den publizistischen Reaktionen der beiden Protagonisten erschließen, die sich merklich von ihren früheren Beiträgen unterscheiden. Black, der „Über Sinn und Bedeutung" bis dato offenkundig nicht eingehender zur Kenntnis genommen hatte, muss derart von Freges Argumentationen fasziniert gewesen sein, dass er die erste vollständige Übersetzung des Textes anging, um die außergewöhnlichen Einsichten auch anderen zugänglich zu machen. Zumindest erscheint „Sense and Reference" keine zwei Jahre nach Churchs Rezension und ein gutes Jahr, nachdem Carnap dank Churchs Insistieren (s.u.) eine umfassende theoretische Befassung mit der Unterscheidung in *Meaning and Necessity* vorgelegt hat.

White wurde offensichtlich gleichermaßen durch Churchs Darstellung der auf Frege zurückgehenden Lösung inspiriert. Zum einen betitelt er seinen nachfolgenden Beitrag sogleich mit „On the Church-Frege Solution of the Paradox of Analysis",[440] womit er einen neuen Namen für einen gleichermaßen neuen wie beeindruckend leistungsstarken Lösungsvorschlag für das Paradox prägte. Zum anderen lässt er sich zu einer eingehenden Lektüre Freges hinreißen. Immerhin stellt White den durch Church empfohlenen Lösungsvorschlag Freges nicht nur mit Sympathie und Zustimmung dar, sondern er greift zudem die Fregesche Unterscheidung zwischen gerader und ungerader Rede auf, um sich an einem eigenen Frege-induzierten Lösungsvorschlag zu versuchen. Beide, Black wie White, finden nach Churchs Rezension auf ihre je eigene Weise zu einer besonders prägnanten Auseinandersetzung mit Freges „Über Sinn und Bedeutung", die vor 1946 in ihrem Schrifttum nicht erkennbar war. Nicht ganz unbegründet nährt dies die Vermutung, dass Churchs Rezension der Black&White-Debatte sowohl für Max Black als auch für Morton G. White Hinweise barg, die beiden bis dato unbekannt waren und die beide in ihrer eigenen intellektuellen Tätigkeit ungemein befruchtete. Church konnte zwar nicht das Kunststück vollbringen, dass „Über Sinn und Bedeutung" bereits um 1940 hinreichend bekannt war, doch nicht zuletzt durch diese Rezension leistete er 1946 einen entscheidenden Beitrag dafür, dass der Aufsatz keine weiteren fünf Jahre ein wenig bekannter Text blieb.

Da all dies noch zu einer Zeit stattfand, in welcher der Anspruch der Vollständigkeit mit Ehrgeiz verfolgt wurde, kam somit automatisch auf jede neue Publikation zu Frege eine eigenständige Besprechung, die auf den fregeschen oder pseudofregeschen Charakter der Arbeit hinwies, womit durch die Rezensionstätigkeit des

440. White (1948).

JSL die Anzahl an Veröffentlichungen zu Frege stets verdoppelt wurde. Doch auch für die Zeit nach Preisgabe des Vollständigkeitsanspruchs stellte Church sicher, dass Publikationen zu Freges Werk im *JSL* besprochen wurden, wenngleich uns diese hier aufgrund der betroffenen späten Zeit nicht zu interessieren brauchen.

Die wirkungsgeschichtlich einflussreichste Rezension von Church zu Frege erschien jedoch nicht in seinem Hausorgan, sondern in *The Philosophical Review.* 1942 publizierte einer der einflussreichsten Logiker und Philosophen Nordamerikas seine neue Einführung in die Semantik.[441] Eine für dessen gesamtes Projekt grundlegende bedeutungstheoretische Unterscheidung ist die zwischen der Extension und Intension sprachlicher Ausdrücke. Die von Carnap in seiner *Introduction to Semantics* begründete Theorie der Bedeutung und des Verstehens von Sprache ist wegweisend und sollte den Standard bis zur Publikation seines Klassikers *Meaning and Necessity* fünf Jahre später darstellen. Es war Church, der im Rahmen einer Besprechung in Aufsatzform und -länge energisch darauf aufmerksam gemacht hat, dass „Frege makes this same distinction"[442] und dass seine darauf aufbauende zeitlos gute – geradezu mäeutische – Argumentation, der gemäß ein Behauptungssatz einen Gedanken ausdrückt und einen Wahrheitswert bedeutet, in Carnaps *Introduction* lediglich eine „reproduction in more exact form"[443] erfährt.

Das gewichtige Wort dieses Rezensenten, das ihm zudem noch vor Veröffentlichung der Besprechung zur Kenntnis gegeben wurde,[444] konnte Carnap nicht überhören und so erfahren Freges grundlegende Beiträge zur Semantik in *Meaning and Necessity* eine angemessene Berücksichtigung, im Besonderen folgt der gründlichen Darstellung der Sinn-Bedeutung-Unterscheidung eine komparative Analyse mit der Intension-Extension-Unterscheidung nach, die beschlossen wird von einer Bewertung des Vergleichs.[445] Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung dieser eminent einflussreichen Studie war es noch keineswegs ein philosophisches Gemeingut, dass Carnap im Unterschied zu allen anderen Logikern in einer exponierten biographischen Verbindung zu Frege stand, mit der eigentlich ein frühes Wissen um Freges Semantik hätte einhergehen müssen. Für den Kontext von *Meaning and Necessity* war es daher zumindest geboten, auf die besondere Rolle Churchs hinzuweisen, von der offensichtlich nun auch Carnap profitierte. Seiner Dokumentationspflicht kam er jedenfalls uneingeschränkt nach:

> Frege's paper seems to have been neglected for about half a century, until Alonzo Church began, several years ago, to point out repeatedly

441. Wir haben diese Episode bereits in 3.2 kurz angesprochen.
442. Church (1943a), 301.
443. Church (1943a), 301.
444. Carnap an Quine in einem Brief vom April 1943. In Quine/Carnap (1990), 314.
445. Carnap (1947), §§ 28-30.

> the importance of Frege's conception, defending its basic idea while beginning to develop further the details of its application.[446]

Carnaps Stellungnahme benutzt zwei Einsichten, die es in der Mitte der 1940er Jahre zwar noch nicht in das historiographische Schrifttum geschafft hatten, die aber zu dieser Zeit unter den Experten bereits unstrittig waren: Frege wurde über viele Jahrzehnte vollkommen ungerechtfertigt vernachlässigt und das stetige Hinweisen auf die besondere Bedeutsamkeit seines Werkes hat vor nicht allzu langer Zeit erst eingesetzt. Die Urheberfrage wurde indes kaum gestellt und Carnap gehört nicht nur zu den Wenigen, die die Frage nach der Vorreiterrolle explizit aufgreifen, sondern vor allem zu jenen, die sie dank eines Wissens durch Bekanntschaft auch korrekt zu beantworten wissen.

Das ist nicht ganz überraschend, wenn man sich die Entstehungsgeschichte von *Meaning and Necessity* vergegenwärtigt. Angeregt durch Quines „Notes on existence and necessity" (s.u.) sowie Churchs umfangreiche Besprechung der *Introduction to Semantics* war eine Replik Carnaps naheliegend und wurde von ihm sofort in Angriff genommen. „I am preparing a paper as a contribution to this discussion".[447] Dieses Projekt, wesentlich inspiriert durch Quines und Churchs Beiträge, hatte sich bereits vier Monate später zu einem gut 250 Seiten umfassenden Manuskript ausgewachsen,[448] an dem Carnap bis zum November 1946 immer wieder Überarbeitungen vornahm. Aus dem geplanten Diskussionsaufsatz war ein Buch geworden, mit dem nicht nur auf die Reaktionen zur *Introduction to Semantics* geantwortet werden sollte, sondern das selbst die fünf Jahre reifere Antwort des Autors auf seine eigene *Introduction* darstellte. *Meaning and Necessity* war das Resultat eines fruchtbar aus den Bahnen geratenen Diskussionsbeitrags, das in seiner ersten vollständigen Fassung sowohl von Quine als auch von Church gelesen und in einer umfassenden Korrespondenz mit beiden besprochen wurde,[449] die nicht nur für Carnap erkenntnisreich war, sondern von der auch Church profitierte.[450] Es bedarf kaum der Erwähnung, dass Church bei diesen Gelegenheiten genau darauf geachtet haben dürfte, dass Freges Beiträge zur Semantik eine angemessene Berücksichtigung erfuhren.

Es grenzt damit schon fast an eine unseriöse fiktionale Verklärung, wenn gut 20 Jahre später Avrum Stroll zur Beantwortung der Urheberfrage und unter expliziter Bezugnahme auf *Meaning and Necessity* die Einflussnahme ohne jedes weitere empirische Indiz schlicht umkehrt: „If I were hazard a guess as to the person most

446. Carnap (1947), 118f.
447. Carnap an Quine in einem Brief vom April 1943. In Quine/Carnap (1990), 314.
448. Vgl. Carnap an Quine in einem Brief vom 28. August 1943. In Quine/Carnap (1990), 345.
449. Vgl. Carnap (1947), vi.
450. Vgl. Church (1956), 6.

responsible for the revival of interest in Frege, I should name Rudolf Carnap. [...] His informal contacts with scholars at Princeton and Harvard (Church and Quine, in particular) provided part of the impetus for a new look at Frege by American scholars".[451] Dass hierbei eine Prägung Churchs durch Carnap schlicht behauptet und nicht begründet wird, verdankt sich demselben Argumentationsstil, der in Unkenntnis oder schlichter Ignoranz des empirischen Befundes behauptet, dass Carnaps Schrifttum seit jeher „shows a continuing emphasis upon Frege's basic conceptions".[452] Wirkungsgeschichtlich sollte diese grob fehlerhafte Beurteilung von Carnaps Leistung, mit der ja selbst ein historiographisches Versäumnis korrigiert werden sollte, nicht folgenlos bleiben. Doch Ende der 1940er Jahre war erst einmal in aller Klarheit daran erinnert worden, dass nicht zuletzt auch Carnap wesentlich von Frege beeinflusst war. In seinen Schriften sollte dies von nun an nicht mehr in Vergessenheit geraten.

Dass Frege, obwohl über die Grenzen der kleinen Logikergemeinde hinaus noch nicht sonderlich bekannt, inzwischen zu einem wissenschaftlichen Prestigeobjekt geworden war, ersieht man gleichwohl an der selten gestellten Urheberfrage. Seinerzeit dürfte sie kaum jemanden interessiert haben, weil es vornehmlich von Interesse war, dass Frege langsam in die Diskussion kam, aber nicht, wer hierbei gegebenenfalls den ersten entscheidenden Schritt getan hat. Da sich die logische Gemeinschaft für Freges Methoden, seine Argumente und Resultate interessierte, mit deren Verfügbarkeit die Forschung befördert werden konnte, stand – vollkommen zu Recht – der Kontext der Geltung im Vordergrund, während sich mit der Frage der Genesis kaum jemand beschäftigte. Dennoch gab es neben Church noch einen weiteren Logiker, der sich in besonderer Weise für den Entstehungszusammenhang und seine eigene Rolle in demselben interessierte:

> My celebration of Frege in *Mathematical Logic* and in the classroom must have helped to bring people to see Frege as the father of modern logic.[453]

Willard Van Orman Quine verfasste diese Zeilen 45 Jahre nach der Zeit, über die er schrieb. Offenkundig war es ihm eine Herzensangelegenheit darauf hinzuweisen, dass er an der Verwirklichung von Freges internationalem Durchbruch beteiligt war. Vollkommen unstrittig ist die Rolle Freges, die ihm Quine im Rahmen seiner logikhistorischen Notizen zuerkennt. Kein anderer Logiker erhält derart häufig für derart viele systematisch wesentliche Weichenstellungen die Priorität zuerkannt

451. Stroll (1966), 76.
452. Stroll (1966), 76.
453. Quine (1985), 144.

wie Frege. Dabei gelingt es Quine souverän, für die drei großen Monographien jeweils bahnbrechende Resultate herauszustellen. So weist er etwa darauf hin, dass Frege mit der *Begriffsschrift* der Erste überhaupt war „to devise a general notation of quantification, using auxiliary variables in the modern fashion. So important was this step that we might indeed look upon Frege, rather than Boole, as the founder of modern logic“.[454] Für die *Grundlagen* wird indes konzise auf den Vollzug des logizistischen Programms verwiesen, denn er hat als Erster gezeigt, „that the notions of arithmetic could be defined in purely logical terms“.[455] Schließlich im Fall der *Grundgesetze* kommt Quine im Verlaufe der *Mathematical Logic* immer wieder auf Neuerungen zu sprechen. So ist Frege etwa im Fall einer filigranen syntaktischen Detailfrage der Erste, der eine souveräne Regelung vorsieht, denn er erkannte „the importance of scrupulous use of quotation marks for avoidance of confusion between use and mention of expressions“.[456] Auch war er der Erste, der eine explizite, d.h. formale Behandlung von Kennzeichnungen vorgeschlagen hat.[457] Diese Aufzählung ließe sich fortsetzen, aber bereits anhand der angeführten Passagen dürfte deutlich geworden sein, dass Quine 1940 nicht nur mit den Gehalten von Freges Büchern bestens vertraut war, sondern dass er diese an exponierten Stellen seines eigenen Werkes mustergültig wertschätzte.

Tatsächlich setzte Quines verbindliche Auseinandersetzung mit (großen Teilen von) Freges Werk im Rahmen der Fertigstellung seiner *Mathematical Logic* ein, deren technisches Manuskript vor der Drucklegung noch um logikhistorische Passagen ergänzt werden sollte. So zumindest erinnert sich Quine in seiner Autobiographie dieser besonderen Episode. „The need to acknowledge sources, in *Mathematical Logic*, issued in historical paragraphs throughout the text. My search for sources led me to examine Frege, whose slim *Begriffsschrift* of 1879 I soon recognized as the real beginning of mathematical logic. There was no discoverable copy of it in America; I recovered its content rather from an old review by P. E. B. Jourdain“.[458] Wann genau Quine zu der Einsicht gelangte, dass Frege „the real beginning of mathematical logic“ ist, lässt sich anhand der publizierten Dokumente nicht genau bestimmen. Da die technischen Inhalte des Textes im Wesentlichen denen seines Kurses „Mathematics 19“ entsprechen,[459] scheint ein Hauptteil des Manuskriptes parallel zu seiner Lehrtätigkeit in Harvard nach dem Sommersemester 1937 entstanden zu sein. Sein *Graduate Course* in eben diesem Semester folgt jedenfalls noch nach eigener Auskunft den „New Foundations for mathematical logic“.[460] Do-

454. Quine (1940a), 71.
455. Quine (1940a), 126.
456. Quine (1940a), 26.
457. Vgl. Quine (1940a), 149.
458. Quine (1985), 144.
459. Vgl. Quine (1940a), v.
460. Quine (1985), 127.

kumentiert ist zudem, dass die Arbeit am Manuskript beschleunigt werden konnte durch ein Freisemester 1938/39[461] und auch im April 1939 arbeitet Quine nach eigener Auskunft noch am Manuskript. Da die endgültige Fassung schließlich im September 1940 erscheint,[462] dürfte das Erschließen und Einpflegen der historischen Notizen unter Berücksichtigung der Entstehungsphase der technischen Teile des Manuskriptes in der Zeit um 1940 stattgefunden haben, jedoch nicht vor Ende der 1930er Jahre.

Welche besondere Rolle Quine sich damit selbst zuerkennt, bleibt interpretationsbedürftig. Von einer gänzlich selbständigen Entdeckung kann keine Rede sein. Zum einen hatten wir bereits die autobiographische Note angesprochen, dass Russell – wahrscheinlich 1931 – Quine erstmals auf Frege aufmerksam macht,[463] während ein erneuter Kontakt mit Gedanken des Jenenser Mathematikers spätestens im Sommer 1936 stattfindet. Quine rezensiert zu dieser Zeit für das *JSL*[464] Scholz' Aufsatz „Die klassische und die moderne Logik“, einen jener Texte aus der Münsteraner Forschung, in denen die vorgetragene Wertschätzung für die mannigfachen Fregeschen Errungenschaften schlicht nicht zu überlesen sind. Zum Zeitpunkt der Drucklegung von Quines Besprechung ist Churchs *Bibliography*, die umgehend im nachfolgenden Heft publiziert werden wird, bereits fertig. Es ist mehr als unwahrscheinlich, dass ihm in seiner Funktion als „Consulting Editor“ des *JSL* die Gehalte der *Bibliography* auch nur im Ansatz entgehen. Spätestens Ende März 1937 erfährt Quine also im vollen Umfang von Freges überragender Bedeutsamkeit. Seine Bewertung von Freges Monographien wird von Church nicht nur um drei Jahre vorweggenommen, sondern auch für jene Schriften, die in Quines Forschung in dieser Phase offensichtlich keine vordergründige Rolle gespielt haben – wie „Über Sinn und Bedeutung“ –, werden in der *Bibliography* eindeutig klassifiziert.

Es überrascht daher keinesfalls, wenn Church in seiner *JSL*-Besprechung von „Notes on existence and necessity“ herausstellt, dass „Quine is fully anticipated by Frege“,[465] weil dieser – möglicherweise inspiriert durch eine sekundärtextliche Aufbereitung Russells – eine Vielzahl von Unterscheidungen und Beispielen aufgreift, die zum Verwechseln ähnlich so bei Frege zu finden sind. Die Indizien legen damit eine bestimmte Vermutung nahe und Church führt diese ganz nüchtern an: „Quine's failure to refer to Frege's paper indicates that he is unacquainted with it“.[466] Doch wäre diese Peinlichkeit der unkenntlichen Aneignung semantischer Grundunterscheidungen Freges nicht bereits unangenehm genug, so wird in der Rezension

461. Vgl. Quine (1940a), ix.
462. Vgl. Quine (1985), 144.
463. Siehe 3.3.
464. Quine (1936).
465. Church (1943b), 45.
466. Church (1943b), 45.

ergänzend festgestellt, dass selbst im Falle der Unbekanntheit mit dem Originaltext ein Wissen um seine Gehalte unausweichlich hätte sein müssen, nachdem im *JSL* bereits diverse Gelegenheiten dazu genutzt wurden, um auf eben diesen Topos hinzuweisen. „The reviewer has emphasized before the importance of Frege's distinction between sense and denotation".[467] Da es sich bei einer dieser Gelegenheiten um Churchs Besprechung von Quines *Mathematical Logic* handelt, in deren Verlauf Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung beworben wird,[468] dürfte es geradewegs ausgeschlossen sein, dass Quine zum Zeitpunkt der Abfassung seiner „Notes on existence and necessity" von Freges Semantik keine Kenntnis hatte. Lässt man nunmehr noch dezent anklingen, dass Quine zum Zeitpunkt der Abfassung des Textes bereits auf eine eingehende Rezeption von Churchs Frege zurückblicken konnte,[469] so ist die Konstellation nicht weiter deutungsvariant. Trotz der harten, in der Sache aber korrekten und damit angemessenen Kritik wird Church diesen Aufsatz Quines später zu den besonders wichtigen Beiträgen zur Logik von Sinn und Bedeutung zählen.[470]

In jenem autobiographischen Abschnitt, in dem sich Quine das bereits zitierte Verdienst um die Bekanntmachung Freges zuschreibt, findet man nunmehr auch eine Church betreffende Notiz: „I think Church first learned from my book that his functional abstraction was in Frege".[471] Tatsächlich findet sich in *Mathematical Logic* eine logikhistorische Passage, in der Quine den Ursprung des per Abstraktion vollzogenen Übergangs hin zur Wertverlaufsgleichheit – des Schrittes von einer Äquivalenzrelation hin zu einer Identitätsaussage mittels termbildender Operatoren – bei Frege auszeichnet und dass die zeitgenössische Fassung (um 1940) jene von Church ist.[472] Aufgrund des bereits Dargelegten und des noch Folgenden lassen wir es dahingestellt sein, ob Quine zumindest in diesem Punkt die Priorität zuerkannt werden kann.

„Church's comprehensive program of developing the Fregean approach"

Wann genau Alonzo Church die Werke Freges entdeckte, kann auf der Grundlage der publizierten Dokumente nicht beantwortet werden. Der vielversprechende Blick richtet sich daher auf die Firestone Library der Princeton University Library, in welcher der umfangreiche Nachlass Alonzo Churchs darauf wartet, auch in dieser Frage konsultiert zu werden. Als sicher dürfte gelten, dass seine Kenntnis

467. Church (1943b), 46.
468. Vgl. Church (1940c), 163.
469. Wir gehen hierauf in 5.3.3 ein.
470. Vgl. Church (1952), 172.
471. Quine (1985), 144.
472. Vgl. Quine (1940a), 229.

frühestens mit der Interessenverschiebung hin zur Logik Ende der 1920er Jahre, wahrscheinlich sogar erst mit Beginn seines akademischen Unterrichts in mathematischer Logik ab 1931 einsetzt, also wahrscheinlich wesentlich zur selben Zeit, in der auch Quine erstmals von Frege Notiz nimmt. Mitte der 1930er Jahre ist er indes mit Freges Werk bereits bestens vertraut, wie sich unzweifelhaft an der Darstellung Freges in der *Bibliography* ablesen lässt. Genauere Angaben werden auch von den Church-Biographen nicht offeriert, womit sie sich zumindest kohärent in die hier vollzogene Narration nahtlos einfügen: „His views on foundations did not crystallize too early, as he was not even aware of the work of Gottlob Frege until after his initial work at Princeton in the early 1930s".[473]

Neben der *Bibliography* und der *Reviews*-Abteilung des *JSL* nutzte Church noch eine dritte Ebene zur Bekanntmachung Freges. Während auf den zuvor genannten beiden Feldern die Arbeiten Freges sowie jene Dritter im Vordergrund standen, wurde die weitere Dimension für Churchs Fregestudien durch seine eigene genuine Forschung konstituiert, allem voran geprägt durch die von ihm begründete Logik von Sinn und Bedeutung. Mit der *Bibliography* als Wendepunkt und den *Reviews*-Aktivitäten als Katalysator in der Fregerezeption repräsentiert dieser wissenschaftliche Schwerpunkt Churchs eine substantielle Prägung der aufziehenden weltweiten Fregeforschung. Nimmt man diese drei akademischen Instrumente zusammen, so dürfte unstrittig erkennbar sein, dass dieses, über gut eineinhalb Jahrzehnte vollzogene Projekt Frege zum Durchbruch verholfen hat. Für die vorliegende Studie bleibt daher nur die Einlösung der noch ausstehenden Dokumentationspflicht. Mit der Mannigfaltigkeit seiner eigenen Forschung und der daraus resultierenden publizistischen Tätigkeit greift Church die aus den beiden *Bibliography*-Gedanken (bis und nach 1936) erwachsende Frege-Bekanntheit auf und zementiert diese durch seine Forschung und seinen Namen. Dafür wendet er sich nicht nur an den engsten Kreis der professionellen Logiker, sondern immer auch wieder an die größere Hörer- und Leserschaft der philosophisch Interessierten.

Allein für Dagobert Runes' populäres *Dictionary of Philosophy* etwa, das aus mancherlei inhaltlichen sowie editorischen Gründen nicht zu den großen philosophischen Wörterbüchern zählt und gegen dessen Veröffentlichung in der vorliegenden Form 13 der beteiligten Logiker und Philosophen – darunter Church – öffentlich protestierten,[474] steuerte er mehr als 150 Einzelbeiträge bei,[475] allesamt erstklassige Artikel zur Logik und verwandter Themen. Mit einer schier unbändigen Kraft und Produktivität verfasst er unter Berücksichtigung der maßgeblichen Forschungsarbeiten gemeinverständliche, aber in der Sache präzise Artikel, die selbst

473. Drucker (2005), 490.
474. Vgl. Baylis et al. (1942).
475. Vgl. Nagel (1942), 90.

von Carnap in der Diskussion mit Quine um die Präzisierung der semantischen Terminologie als äußerst hilfreich bewertet wurden.[476] Stilistisch vorbildlich gelingt es ihm, selbst technisch komplexe Themen auf knappem Raum konzise vorzustellen. Unter diesen exzellenten Artikeln sticht jedoch jener zu „Logic, formal" sogar noch heraus, denn mit seinen $22^1/_2$ Spalten ist er nicht nur der mit Abstand längste des gesamten Wörterbuchs, sondern Church gelingt auf diesem Raum sogar noch eine enzyklopädische Darstellung der grundlegenden systematischen Errungenschaften der modernen formalen Logik.

Zu ausnahmslos allen Schlagworten, die eine Erwähnung Freges gestatten, lässt es sich Church nicht nehmen, auf die entsprechenden Leistungen Freges auch ausdrücklich hinzuweisen.[477] Abgerundet wird dieses massive bildungspädagogische Engagement für dieses Wörterbuch durch den Eintrag „Frege, (Friedrich Ludwig) Gottlob",[478] aus dem wir auszugsweise zu Beginn des zweiten Abschnitts zitiert hatten. Es steht vollkommen außer Frage, dass ein Eintrag zu diesem „Stichwort" auf das persönliche Hinwirken von Church Berücksichtigung fand. Der Princetoner Logiker verschafft sich selbst die Gelegenheit und er nutzt sie – wie so häufig in eben diesem Jahrzehnt. Es darf bei der Gelegenheit dieses zweiten dokumentierten Enzyklopädieartikels Erwähnung finden, dass zwei der drei dort platzierten Literaturhinweise auf Schriften der Münsteraner Schule verweisen, womit wiederholt ein Beleg erbracht ist, dass die Arbeiten von und aus dem Kreis um Scholz immerhin in den Vereinigten Staaten die ihnen gebührende Wertschätzung erfahren. Runes' *Dictionary of Philosophy*, das sich dezidiert an interessierte Lehrer, Studenten und philosophische Laien wendet, ist dank Alonzo Church das erste populärwissenschaftliche Publikationsprojekt, in dem Frege mit Selbstverständlichkeit Berücksichtigung findet.

Ungleich mehr Einfluss hatten selbstverständlich seine Fachpublikationen sowie seine besonders exponierten Vortragsgelegenheiten. Eine der ersten mit großer internationaler Beteiligung ergab sich am 8. September 1939 an der Harvard Universität, wo die Fünfte Zusammenkunft der *ASL* im Rahmen des *Fünften Internationalen Kongresses für Einheit der Wissenschaften* mit über 200 Gelehrten aus neun Nationen[479] stattfand. In diesem Rahmen erörterte er nicht nur „Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types", wie sie sich aus dessen 1890er *Algebra der Logik* rekonstruieren lässt, sondern er wies im Besonderen die Auffassung zurück, dass Freges Rede von ‚Stufen' im ersten Band der *Grundgesetze* eine weitere Vorwegnahme der Typentheorie gewesen wäre, „I believe this claim to be

476. Vgl. Carnap an Quine in einem Brief vom April 1943. In Quine/Carnap (1990), 318.
477. Church (1942b), (1942c), (1942e), (1942f), (1942g), (1942h), (1942i), (1942j).
478. Church (1942d).
479. Vgl. Stadler (1997), 429.

based on a misunderstanding".[480] Stattdessen greift er Freges harsche Kritik an Schröder aus dem Jahr 1895 auf, um einzelne Einsichten derselben „also against the contemporary form of the theory of types"[481] zu richten. In Anbetracht der abschließenden Überlegungen aus dem vorhergehenden Abschnitt mag es von Interesse sein zu erwähnen, dass Willard Quine nicht nur das von Church vor Ort ausgehändigte Vortragsmanuskript für das *JSL* rezensierte,[482] sondern dass er lt. Tagungsabstract auch zum Auditorium zählte.[483] Quine rezipiert Churchs Frege also zu einer Zeit, in der er selbst noch am Manuskript seiner *Mathematical Logic* arbeitete. Spätestens mit dieser Episode begann für Quine eine mehrjährige unmittelbare Auseinandersetzung mit Churchs Arbeiten zu Frege, die bereits im Folgejahr zu einer Besprechung von „A Formulation of the Simple Theory of Types" führte.

Mit dem darin entworfenen System versucht Church die beiden, bis dahin lediglich koexistierenden Syntaxverständnisse in ihren jeweiligen Vorzügen zumindest partiell zusammenzuführen. Während er selbst mit dem λ-Kalkül Freges Logikverständnis einer typenfreien Sprache bereits in den 1930er Jahren ein neues, leistungsstarkes Gesicht gegeben hatte und ihn damit auf Augenhöhe zu Russell brachte, unterbreitet er nunmehr „a formulation of the simple theory of types which incorporates certain features of the calculus of λ-conversion".[484] Fast scheint es nur eine Frage der Zeit gewesen zu sein, bis der erste Entwurf für einen typisierten λ-Kalkül vorgetragen wurde, der zwar keine vollständige Einbettung des λ-Kalküls in eine Typengrammatik, wohl aber eine partielle gestattet. Die offensichtlichen Vorzüge einer Typengrammatik zumindest in Teilen verknüpfen zu können mit Möglichkeiten der λ-Konversion waren schlicht zu reizvoll.

Die Erfindung der letzteren wurde nicht zuletzt inspiriert durch eine für manch anderen enigmatische Passage aus „Ueber Begriff und Gegenstand", in der Frege operationalisiert, wie ein prädikativ zu gebrauchender Begriff in sein nominatives Vorkommnis überführt werden kann, damit wir ihn zum logischen Subjekt eines Urteils machen können. Der prädikative Begriff ist nämlich kein Gegenstand, sondern er muss „erst in einen Gegenstand verwandelt werden, oder, genauer gesprochen, er muss durch einen Gegenstand vertreten werden, den wir mittels der vorgesetzten Worte ‚der Begriff' bezeichnen".[485] Während für nicht wenige Leser späterer Generationen Freges fundamentale Begriff-Gegenstand-Unterscheidung in eine unheilvolle metaphysische Strömung gerät, entwarf Church bereits in den 1930er

480. Church (1939a), 409.
481. Church (1939c).
482. Quine (1940b).
483. Goodman (1939).
484. Church (1940a), 56.
485. Frege (1892b), 197.

Jahren ein formales System, in dem Freges metaphorische Rede von einem Sättigungsoperator syntaktisch einwandfrei kalkülisiert wird. Mit der λ-Konversion legt er ein logisches Verfahren vor, das Freges Anliegen souverän und ohne jede Prosa umzusetzen weiß. Das von Church 1940 vorgeschlagene System eröffnet jedenfalls durch diese partielle Zusammenführung von Russell und Frege neue Ausdrucksmöglichkeiten, so dass auch Quine zu dem klaren Urteil gelangt: „Church adapts the theory of types for the first time to the Fregean approach“.[486]

Während die Inhalte von „Über Sinn und Bedeutung“ im Rahmen seiner Rezensionstätigkeit seit 1940 eine herausgehobene Stellung genießen,[487] wendet sich Church spätestens 1941 auch in der nach außen hin sichtbaren Forschung der semantischen Grundunterscheidung Freges zu und arbeitet in der nun folgenden Dekade am ehrgeizigen Projekt einer Logik von Sinn und Bedeutung. Für ihn ist es unstrittig, dass die Sinn-Bedeutung-Unterscheidung für Semantik und Logik ein eminent wichtiges Werkzeug ist,[488] mit dem nicht nur neue Felder fruchtbar erschlossen, sondern mit dem nicht zuletzt auch bestehende Probleme gegebenenfalls erhellt oder sogar geklärt werden können. „Frege's distinction between sense and denotation provides an immediate solution in all of the cases“.[489] Diese durch Frege inspirierte Theorie einer intensionalen Logik erfährt schließlich in Churchs *Introduction to Mathematical Logic*, das für mehr als nur eine Generation von Logikern zum maßgeblichen Lehrbuch werden sollte, ihre systematische Reife und geht früh unter der Bezeichnung „Frege-Church Theorie der Bedeutung“ bzw. „Frege-Church-Theorie von Sinn und Bedeutung“ in die Forschungsliteratur ein.

Zu den Anfängen dieses Projektes zählt sein Vortrag „On sense and denotation“, der am 31. Dezember 1941 im Rahmen der Siebenten Zusammenkunft der *ASL* an der Lehigh Universität in Bethlehem (Pennsylvania) gehalten wurde. Nicht nur zielt der Titel bereits darauf ab, „to translate Frege's *Über Sinn und Bedeutung*“,[490] sondern auch der veröffentlichte Abstract lässt erkennen, dass Church im Rahmen seines Referats mehrere Übersetzungsvorschläge und terminologische Normierungen vorträgt, die idealiter zum englischsprachigen Standard der Fregeforschung werden sollen. Auch wenn andere Übersetzer wie Austin, Black, Carnap, Feigl oder Geach ihm in seinen Normierungsvorschlägen nur bedingt folgen sollten, so setzt mit dieser Initiative zur Sprachregelung schließlich eine fruchtbare Übersetzungstätigkeit Fregescher Begriffe und Unterscheidungen ein, die bis auf den heutigen Tag in Ermangelung eines gemeinhin akzeptierten Kanons anhält. Im Rahmen

486. Quine (1940c), 114.
487. Vgl. Church (1940b), (1940c).
488. Exemplarisch: Church (1942b).
489. Church (1949b), 136.
490. Church (1942a).

seines Vortrags rekonstruiert Church Russells Kritik an Freges bedeutungstheoretischer Behandlung von Namen und stellt nachfolgend entsprechend Russells eigene Kennzeichnungstheorie vor, in deren Mittelpunkt das Eliminationsverfahren von Kennzeichnungsausdrücken über die Reformulierung mittels numerisch quantifizierter Eindeutigkeit steht. Russell behandelt Aussagen mit nicht-referierenden Kennzeichnungen entsprechend als falsche Aussagen, weil eines der sie konstituierenden Konjugate eine unerfüllte Existenzbehauptung repräsentiert. Doch Church kommt zu dem Ergebnis: „This seems to be tenable but is less elegant than Frege's solution of the same problem“.[491] Lt. Tagungsabstract[492] war Quine auch bei diesem Vortrag zugegen.

Unter Verwendung und Weiterentwicklung der Einsichten aus seinem 1941er Vortrag „On sense and denotation“ hält Church schließlich am 23. Februar 1946 im Rahmen der Achten Zusammenkunft der *ASL* an der Columbia Universität in New York einen einstündigen Hauptvortrag mit dem Titel „A formulation of the logic of sense and denotation“, in dem „The distinction of *Sinn und Bedeutung* [...] is incorporated into a logistic system“.[493] Das hierbei vorgestellte formale System zusammen mit den kurze Zeit später nochmals vollzogenen Ergänzungen[494] unterscheidet sich lediglich in einzelnen technischen Details von der schließlich 1951 erschienenen umfassenden Systemdarstellung in „A Formulation of the Logic of Sense and Denotation“, über die Rulon Wells urteilt, dass sie „an important contribution to Church's comprehensive program of developing the Fregean approach“[495] darstellt. Tatsächlich handelt es sich bei Churchs 1951er System einer Logik von Sinn und Bedeutung bereits um ein umfassend ausgearbeitetes logico-semantisches Programm, das auch andere Logiker zu inspirieren weiß. Im Besonderen legt er mit dieser Studie in der gebührenden Ausführlichkeit und in aller Explizitheit dar, wie die von Frege in (wenngleich sprachlich vorbildlich klarer) Prosaform dargelegten Untersuchungen über die semantischen Grundunterscheidungen mit den Ansprüchen einer formalen Sprache, die Frege an anderer Stelle mustergültig begründet hat, zusammengeführt werden können. „Nevertheless, it seems that Frege would agree that intensional logic also must ultimately receive treatment by the logistic method. And it is the purpose of this paper to make a tentative beginning toward such a treatment, along the lines of Frege's doctrine“.[496]

Zwischen dem Vortrag an der Columbia Universität und der leicht modifizierten Systemfassung in der Sheffer-Festschrift ergab sich im Besonderen noch auf der

491. Church (1942a).
492. McKinsey (1942).
493. Church (1946a).
494. Church (1946a): „Added April 29, 1946“.
495. Wells (1952), 134.
496. Church (1951a), 3.

nationalen Konferenz des *Institute for the Unity of Science* in Boston im April 1950 die Gelegenheit, um über erkenntnistheoretische Präsuppositionen einer Fregeschen Theorie der Bedeutung zu referieren. Schließlich ist nach Frege die Bedeutung eines sprachlichen Ausdrucks (ein Eigenname, ein Prädikat, ein ganzer Satz) ein Gegenstand, was im Falle von Behauptungssätzen besagt, dass das Wahre und das Falsche ebenfalls als Gegenstände aufzufassen sind. Deren ontologischer Status ist damit ebenso klärungsbedürftig wie die Seinsweise von alltäglichen Objekten. Zusammen mit Willard Quine und Max Black bestritt Church den Vortragsteil zur Rolle abstrakter Gegenstände in der Wissenschaft. Während sich im Besonderen Quine für eine möglichst sparsame Ontologie aussprach und gegen Frege gerichtet empfahl, den Begriff des singulären Terms nicht unnötig auf die Klasse von Wahrheitswerten auszuweiten,[497] verfocht Church die grundlegende Ausrichtung von Freges Semantik.

Zwar gäbe es im Augenblick diverse semantische Theorien, die allesamt versuchen, die an sie gerichteten Forderungen bestmöglich zu erfüllen, doch „the theory of Frege seems to recommend itself above others for its relative simplicity, naturalness, and explanatory power–or, as I would advocate, Frege's theory as modified by elimination of his somewhat problematical notion of a function (and in particular of a *Begriff*) as *ungesättigt*, and by some other changes which bring it closer to present logistic practice without loss of such essentials as the distinction of sense and denotation“.[498] Church plädiert somit für eine zeitgenössische Fassung von Freges Theorie von Sinn und Bedeutung, weil er nach wie vor von der Leistungsstärke des Fregeschen Ansatzes überzeugt ist. Mit vergleichweise wenigen, aber durchweg überzeugenden terminologischen Unterscheidungen gelingt dem Fregeschen Ansatz die bedeutungstheoretische Erschließung und semantische Analyse eines beachtlich großen Feldes sprachlicher Phänomene. Da unter Berücksichtigung aller Anforderungen, die an eine moderne Semantik zu stellen sind, der Zugang Freges nach Auffassung von Church immer noch am Besten im Vergleich mit den potentiellen Alternativen (Quine inbegriffen) abschneidet, bedarf es einzig der Verbesserung einzelner Details, damit die Theorie von Sinn und Bedeutung auch in der Mitte des 20. Jahrhunderts technisch auf dem neuesten Stand ist. Churchs Vortrag „The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis“ unterbreitet derartige Verbesserungsvorschläge für einen modernen Frege.

Die durch die *Proceedings*-Beiträge von Quine, Black und Church repräsentierte Diskussion, obgleich in ihrem Vollzug spätestens seit Quines „Notes on existence and necessity“ 1943 im Gange, erfährt nun eine weitere Aufmerksamkeit. Um 1950

497. Quine (1951).
498. Church (1951b), 101.

hat es sich langsam etabliert, dass semantische Probleme auch unter Rückgriff auf Freges Errungenschaften analysiert werden können:

> It is of special interest to the reviewer to observe the discovery on the part of younger logicians of the long neglected pioneer work of G. Frege. Problems of meaning are now being discussed from the standpoint of *Sinn und Bedeutung*, of meaning and denotation.[499]

Zu diesem Zeitpunkt repräsentiert die Logik von Sinn und Bedeutung, die formale Analyse bedeutungstheoretischer Regeln, aufgrund der von Church initiierten und von anderen Logikern aufgegriffenen Forschung eine eigenständige Subdisziplin der formalen Logik. Es ist entsprechend wiederum Alonzo Church, der es sich nicht nehmen lässt, aus Anlass der Dokumentation einer „Brief Bibliography of Formal Logic“, die jeweils besonders bedeutsame Publikationen zu insgesamt 33 Forschungsfeldern aufführt, auch den Teilbereich „Sense and Denotation, and Related Distinctions of Modes of Meaning“[500] zu erfassen. Der erste Eintrag zu dieser Subdisziplin der formalen Logik lautet: „Gottlob Frege, *Über Sinn und Bedeutung*“.

Als die „Brief Bibliography“ erschien, war eine der einflussreichsten Schriften Churchs bereits ein gutes Jahr in Manuskriptform verfügbar und trug ihren Teil zur Beförderung der Fregerezeption bei. Obwohl die *Introduction to Mathematical Logic* das Erscheinungsjahr 1956 führt, so war das ab 1947 verfasste Werk in seinen wesentlichen Teilen bereits 1951 fertiggestellt und wurde in Manuskriptform über die Fine Hall Library der Universität Princeton der akademischen Öffentlichkeit zugänglich gemacht.[501] Diese lokale Begebenheit war aber alles andere als von lokaler Bedeutsamkeit, denn der führende Logiker der Universität machte an einem der weltweit führenden Zentren für formale Logik ein von vielen, vor allem außerhalb Princetons lange ersehntes Lehrbuch für das wissenschaftliche Studium und die Forschung endlich zugänglich.

Bestandteil dieses nun verfügbaren Manuskriptes war auch die substantielle, fast 70 Seiten umfassende „Introduction“, die zwischen Anfang Februar und Ende Juni 1948 angefertigt wurde[502] und die in aller wünschenswerten Gründlich- und Ausführlichkeit die semantischen sowie weiteren logico-philosophischen Grundlagen von Churchs Logikverständnis darlegt. Der von ihm auch bei dieser Gelegenheit generierte und beachtlich informative Fußnotenapparat umfasste in Teilen auch historische Notizen zu jenen problemgeschichtlichen Entwicklungen der

499. Lenzen (1952), 87.
500. Church (1952), 172.
501. Vgl. Church (1956), v.
502. Vgl. Church (1956), v.

1940er Jahre, die seine eigenen theoretischen Ansätze maßgeblich beeinflusst hatten. Es bedarf sicherlich kaum der Erwähnung, dass Freges Einsichten über den gesamten Umfang der „Introduction“ hinweg eine besondere Würdigung erfahren, die sich schließlich im weiteren Verlauf des Werkes vor allem in den beiden beeindruckend souverän abgefassten „Historical notes“ zur Geschichte der Aussagen- und Prädikatenlogik[503] fortsetzt. Mit seinem Lehrbuch der mathematischen Logik, welches unter den Logikern umgehend zu einem begehrten Gegenstand der Lektüre wurde, legte Church 1951 einen curricularen Kanon vor, der nicht zuletzt in der dort explizit verfochtenen Theorie der Bedeutung von Namen keinen Zweifel daran lässt, durch wen sie entscheidend geprägt wurde: „due in its essentials to Gottlob Frege“.[504]

In den anderthalb Dekaden seit der Publikation der *Bibliography of Symbolic Logic*, in denen Church nicht nur der für die *Reviews*-Abteilung des *Journal of Symbolic Logic* zuständige Herausgeber war, sondern hauptverantwortlich für das gesamte *JSL*, nutzte er jede sich bietende Gelegenheit und jede publizistische Form der Mündlich- und Schriftlichkeit, um im Interesse des logischen Fortschritts, aber auch zum Ziel der problemgeschichtlichen Bildung auf Freges Verdienste aufmerksam zu machen. Bestens vertraut mit seinem gesamten Werk ging er mit diesem nicht nur historiographisch versiert um, sondern interpretierte dieses im Geiste eines brillanten Logikers. Churchs Frege setzt Maßstäbe und inspiriert die Gemeinschaft der Logiker und Logicophilen. Als Church die „Brief Bibliography of Formal Logic“ 1952 veröffentlicht, legt der britische Verlag Basil Blackwell neben John Austins bereits verfügbarer Übersetzung der *Grundlagen* nun auch den *Translations*-Band von Peter Geach und Max Black vor, mit deren akademischen Erfolgen die zweite Phase der Fregerezeption endgültig beschlossen und die dritte eingeläutet wird. Die weithin bekannte Erfolgsgeschichte nimmt ihren Verlauf.

***

Zum Beginn des Jahres 1925 bietet Gottlob Frege den Herausgebern der neu begründeten Reihe *Wissenschaftliche Grundfragen* das Manuskript „Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften“ zur Veröffentlichung an. Richard Hönigswald, einer der beiden Herausgeber, akzeptiert. In seinem Antwortschreiben ist Frege voller Dankbarkeit dafür, „dass etwas aus meiner Feder in Ihren wissenschaftlichen Grundfragen erscheint“.[505] Es sollte eine

503. Vgl. Church (1956), § 29, § 49.
504. Church (1956), 4.
505. Frege an Hönigswald in einem Brief vom 26. April 1925. In Frege (1976), 85. Zur Publikation zu Lebzeiten kam es nicht mehr. Freges Gesundheitszustand ließ es nicht zu, dass die in Aussicht gestellten Erweiterungen Eingang in das Manuskript fanden. Ein Vierteljahr nach dem zitierten Antwortschreiben verstarb Frege.

der letzten akademischen Erfahrungen in seinem Leben sein und es war eine voller Wertschätzung und Anerkennung. Aus dem Glück dieser Publikationszusage wurde für Fregesche Schriften eine Selbstverständlichkeit, doch nicht mehr für den Autor, sondern für jene, die ihm nachfolgen sollten. Wir Glücklichen!

Literaturverzeichnis

Anscombe, G.E.M./Geach, P.T. (1961): *Three Philosophers. Aristotle – Aquinas – Frege*, Basil Blackwell, Oxford.

Anzeige (1950a): „Philosophical Library Publications“ (Werbeanzeige I), in *The American Mathematical Monthly* 57(9), [ohne Seitenangabe]. Zudem erschienen in *The Mathematics Teacher* 43(7), [ohne Seitenangabe].

——— (1950b): „Philosophical Library Publications“ (Werbeanzeige II), in *The Journal of Philosophy* 47(22), [ohne Seitenangabe].

——— (1951a): „Basil Blackwell“ (Werbeanzeige I), in *The Times Literary Supplement* 13. April, Nr. 2567, 226.

——— (1951b): „Basil Blackwell“ (Werbeanzeige II), in *The Times Literary Supplement* 12. Oktober, Nr. 2593, 640.

——— (1952): „Basil Blackwell“ (Werbeanzeige III), in *The Times Literary Supplement* 11. April, Nr. 2619, 256.

ASL(1937): „List of Officers and Members of the Association for Symbolic Logic“, in *The Journal of Symbolic Logic* (nf. *JSL*) 2(4), 178-182.

——— (1938): „Association for Symbolic Logic“, in *JSL* 3(4), [ohne Seitenangabe, nach 212].

——— (1950): „List of Officers and Members of the Association for Symbolic Logic“, in *JSL* 15(4), 286-291.

Ayer, Alfred Jules (1936): „The Analytic Movement in Contemporary British Philosophy“, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Sorbonne Paris 1935. VIII: Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique*, Hermann & Cie, Paris, 53-59.

——— (1937): „Rez v. Scholz/Schweitzer (1935)“, in *Mind* 46(182), 244-247.

Bachmann, Friedrich (1934): *Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik mit besonderer Beziehung auf Dedekind, Frege und Russell*, Felix Meiner, Leipzig.

Bartlett, James M. (1961): *Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege*, Diss., LMU München, Druck: M. Weiß.

Baumgarten, Arthur u.a. (ed.): *Protokoll der philosophischen Konferenz über Fragen der Logik am 17. und 18. November 1951 in Jena* (= *1. Beiheft zur Deutschen Zeitschrift für Philosophie*), Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953.

Baylis, Charles A. et al. (1942): „To the Editor of "Mind"", in *Mind* 51(203), 296.

Behmann, Heinrich (1927): *Mathematik und Logik* (= Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Band 71), B. G. Teubner, Leipzig/Berlin.

Bell, Eric Temple (1940): *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, New York/London.

Bense, Max (ed.): *Briefe grosser Naturforscher und Mathematiker*, Stauffen-Verlag, Köln 1943.

Birkhoff, G. D. (1938): „Fifty Years of American Mathematics", in ders. et al., *Semicentennial Addresses of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, New York, 270-315.

Black, Max (1933): *The Nature of Mathematics. A Critical Survey*, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., London.

——— (1948): „A Translation of Frege's *Ueber Sinn und Bedeutung.* Introductory Note", in *The Philosophical Review* 57(3), 207-208.

——— (1949): „Rez. v. Feigl/Sellars (ed.)", in *JSL* 14(3), 184-185.

——— (1950): „ Introductory Note to Frege (1950b)-(1950d)", in *The Philosophical Review* 59(1), 77-78.

——— (1951): „Rez. v. Frege (1950a)", in *JSL* 16(1), 67.

Britzelmayr, Wilhelm (1948): „Tätigkeitsbericht des „Büro für logistische Forschung"", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 2(4), 606-607.

——— (1949): „Rez. v. Langer (1937a) u.a.", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 3(4), 604-607.

Bocheński, Joseph Maria (1956): *Formale Logik*, Verlag Karl Alber, Freiburg/München.

Burkamp, Wilhelm (1927): *Begriff und Beziehung. Studien zur Grundlegung der*

Logik, Felix Meiner, Leipzig.

——— (1932): *Logik*, Verlag von E. S. Mittler & Sohn, Berlin.

——— (1938): *Wirklichkeit und Sinn. Band 2: Das subjektive Recht des Sinns über die Wirklichkeit*, Junker und Dünnhaupt Verlag, Berlin.

Carnap, Rudolf (1930): „Die Mathematik als Zweig der Logik", in *Blätter für Deutsche Philosophie* 4(3/4), 298-310.

——— (1930/31): „Die alte und die neue Logik", in *Erkenntnis* 1, 12-26.

——— (1931): „Die logizistische Grundlegung der Mathematik", in *Erkenntnis* 2, 91-105.

——— (1934): *Logische Syntax der Sprache*, Springer-Verlag, Wien/New York 1968².

——— (1939): *Foundations of Logic and Mathematics*, The University of Chicago Press, Chicago/London.

——— (1942): *Introduction to Semantics*, Harvard UP, Cambridge (Mass.).

——— (1947): *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*, The University of Chicago Press, Chicago (Illinois).

——— (1963): „The Development of my Thinking", in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, La Salle/London, Open Court/Cambridge UP, 3-43.

Carnap, Rudolf/Hahn, Hans/Neurath, Otto (1929): „Wissenschaftliche Weltauffassung – Der Wiener Kreis" (1929), wiederabgedruckt in H. Schleichert (ed.), *Logischer Empirismus. Der Wiener Kreis*, Wilhelm Fink Verlag, München 1975, 201-222.

Christensen, Niels Egmont (1976): „Jørgen Jørgensen as a Philosopher of Logic", in *Danish Yearbook of Philosophy* 13, 242-248.

Church, Alonzo (1927): „Alternatives to Zermelo's Assumption", in *Transactions of the American Mathematical Society* 29(1), 178-208.

——— (1936): „A Bibliography of Symbolic Logic", in *JSL* 1(4), 121-218.

——— (1937): „Rez. v. A. M. Turing *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*", in *JSL* 2(1), 42-43.

——— (1938): „Additions and Corrections to *A Bibliography of Symbolic Logic*", in *JSL* 3(4), 178-192.

——— (1939a): „Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types“, in *Erkenntnis* 10, 1976, 407-411.

——— (1939b): „Rez. v. Carnap *Notes for symbolic logic*“, in *JSL* 4(1), 29-30.

——— (1939c): „Schröder's anticipation of the simple theory of types“ (Abstract Vortrag vom 8. September 1939 und von (1939a)), in *JSL* 4(4), 176.

——— (1939d): „Rez. v. L. Dieudonné *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*“, in *JSL* 4(4), 163.

——— (1940a): „A Formulation of the Simple Theory of Types“, in *JSL* 5(2), 56-68.

——— (1940b): „Rez. v. Melden *Thought and its objects*“, in *JSL* 5(4), 162-163.

——— (1940c): „Rez. v. Quine (1940a)“, in *JSL* 5(4), 163-164.

——— (1941): „Rez. v. Keyser *Charles Sanders Peirce as a pioneer*“, in *JSL* 6(4), 161-162.

——— (1942a): „On sense and denotation“ (Abstract), in *JSL* 7(1), 47.

——— (1942b): „Abstraction“, in Runes (ed.), 3.

——— (1942c): „Descriptions“, in Runes (ed.), 77.

——— (1942d): „Frege, (Friedrich Ludwig) Gottlob“, in Runes (ed.), 112f.

——— (1942e): „Logic, formal“, in Runes (ed.), 170-181.

——— (1942f): „Logic, symbolic“, in Runes (ed.), 181.

——— (1942g): „Logistic“, in Runes (ed.), 182.

——— (1942h): „Paradoxes, logical“, in Runes (ed.), 224-225.

——— (1942i): „Propositional function“, in Runes (ed.), 257.

——— (1942j): „Recursion, definition by“, in Runes (ed.), 265-266.

——— (1942k): „Rez. v. Quine *Whitehead and the rise of modern logic*“, in *JSL* 7(2), 100-101.

——— (1943a): „Carnap's Introduction to Semantics“, in *The Philosophical Review* 52(3), 298-304.

——— (1943b): „Rez. v. Quine *Notes on existence and necessity*“, in *JSL* 8(2), 45-47.

——— (1943c): „Rez. v. Bergmann *Notes on identity*“, in *JSL* 8(3), 86.

——— (1944): „Rez. v. Farber *The Foundation of Phenomenology*", in *JSL* 9(3), 63-65.

——— (1945): „Rez. v. Smart (1945)", in *JSL* 10(3), 101-103.

——— (1946a): „A formulation of the logic of sense and denotation" (Abstract Vortrag vom 23. Februar 1946), in *JSL* 11(1), 31.

——— (1946b): „Rez. v. White *A note on the "paradox of analysis"* u.a.", in *JSL* 11(4), 132-133.

——— (1948a): „Rez. v. Black (1948)", in *JSL* 13(3), 152-153.

——— (1948b): „Rez. v. G. Frege *Aritmetica e logica*", in *JSL* 13(3), 153.

——— (1949a): „Rez. v. M. Boll *Les étapes des mathématiques*", in *JSL* 14(2), 126.

——— (1949b): „Rez. v. S. Halldén *Certain problems connected with the definitions of identity and of definite descriptions given in Principia mathematica*", in *JSL* 14(2), 136-137.

——— (1950): „Rez. v. L. J. Cohen *Are philosophical theses relative to language?*", in *JSL* 15(1), 63.

——— (1951a): „A Formulation of the Logic of Sense and Denotation", in P. Henle-Horace et al. (ed.), *Structure, Method and Meaning. Essays in Honor of Henry M. Sheffer*, The Liberal Arts Press, New York, 3-24.

——— (1951b): „The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis", in *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 80(1), 100-112.

——— (1952): „Brief Bibliography of Formal Logic", in *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 80(2), 155-172.

——— (1953): „Rez. v. Geach/Black (ed.)", in *JSL* 18(1), 92-93.

——— (1956): *Introduction to Mathematical Logic. Volume I*, Princeton UP, Princeton (New Jersey).

——— (1984): „Alonzo Church is interviewed by William Aspray on 17 May 1984 at the University of California at Los Angeles", *The Princeton Mathematics Community in the 1930s. An Oral-History Project*, http://www.princeton.edu/mudd/finding_aids/mathoral/ pmc05.htm.

Dathe, Uwe (1993): „Theoretische Quellen des frühen Frege", in W. Stelzner (ed.), *Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/1991*, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 39-44.

——— (1995): „Gottlob Frege und Rudolf Eucken – Gesprächspartner in der Herausbildungsphase der modernen Logik“, in *History and Philosophy of Logic* 16(2), 245-255.

——— (2000): „Der „Geist“ Freges in Jena – Paul Ferdinand Linke. Ein Beitrag zur Jenaer Universitätsgeschichte“, in Gabriel/ders. (ed.), *Gottlob Frege. Werke und Wirkung. Mit den unveröffentlichten Vorschlägen für ein Wahlgesetz von Gottlob Frege*, mentis, Paderborn, 227-244.

Davis, Martin (1995): „American Logic in the 1920s“, in *The Bulletin of Symbolic Logic* 1(3), 273-278.

Dedekind, Richard (1888): *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1911^3.

Dempe, Hellmuth (1957): „Paul Ferdinand Linke. Ein Leben für Philosophieren im sokratischen Geiste“, in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 11(2), 262-275.

Drucker, Thomas (2005): „Church, Alonzo (1903-95)“, in J. R. Shook (ed.), *The Dictionary of Modern American Philosophers. Volume 1: A-C*, Thoemmes, Bristol, 487-491.

Ducasse, C. J./Curry, Haskell B. (1962): „Early History of the Association for Symbolic Logic“, in *JSL* 27(3), 255-258.

——— (1963): „Addendum to Early History of the Association for Symbolic Logic“, in *JSL* 28(4), 279.

Dummett, Michael (1952): „Gottlob Frege“, in *The Times Literary Supplement* 12. September, Nr. 2641, 597.

——— (1954): „Rez. v. Geach/Black (ed.)“, in *Mind* 63(249), 102-105.

——— (1973): *Frege. Philosophy of Language*, Duckworth, London 1981^2.

——— (1978): *Truth and Other Enigmas*, Harvard UP, Cambridge (Mass.).

——— (1980): „Frege and Analytical Philosophy“, in *London Review of Books* 2(18), 13-15.

——— (1988): *Ursprünge der analytischen Philosophie*, Suhrkamp, Frankfurt a.M.

Eisler, Rudolf (1912): *Philosophen-Lexikon. Leben, Werke und Lehren der Denker*, verlegt bei Ernst Siegfried Mittler und Sohn, Berlin.

E. N.(1951): „Rez. v. Frege (1950a)“, in *The Journal of Philosophy* 48(10), 342.

Enderton, H. B. (1998): „Alonzo Church and The Reviews“, in *The Bulletin of Symbolic Logic* 4(2), 172-180.

Falckenberg, Richard (1927^9): *Geschichte der neueren Philosophie von Nikolaus von Kues bis zur Gegenwart im Grundriss dargestellt* (9. Aufl. verb. u. erg. v. E. v. Aster-Giessen), Walter de Gruyter, Berlin/Leipzig.

Farber, Marvin (1946): „Aspekte der Philosophie in USA von 1940 bis 1946“, dt. Übers. in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 2(2/3) 1948, 396-402.

Feigl, Herbert/Sellars, Wilfrid (ed.): *Readings in Philosophical Analysis*, Appleton-Century-Crofts, New York 1949.

Fraenkel, Adolf (1928^3): *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin.

Frege, Gottlob (*GLA*): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner, Breslau 1884; zit. n. 2. Aufl.: Verlag von M. & H. Marcus, Breslau 1934 (unv. Neudr. v. 1884).

——— (1892a): „Über Sinn und Bedeutung“, in *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* NF 100, 25-50.

——— (1892b) „Ueber Begriff und Gegenstand“, in *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16, 192-205

——— (*GGA I/II*): *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Hermann Pohle, Jena 1893 (Bd. I) u. ebd. 1903 (Bd. II); 2. Aufl.: WBG, Darmstadt 1962 (2 Bde., unv. Nachdr. v. 1893/1903); zit. n. Olms, Hildesheim u.a. 1998 (2 Bde. in 1 Bd., m. Erg. z. unv. Nachdr. v. 1893/1903 v. Ch. Thiel).

——— (1915): „The Fundamental Laws of Arithmetic“ (übers. v. Ph. E. B. Jourdain u. J. Stachelroth), in *The Monist* 25(4), 484-494.

——— (1916): „The Fundamental Laws of Arithmetic: Psychological Logic“ (übers. v. Ph. E. B. Jourdain u. J. Stachelroth), in *The Monist* 26(2), 182-199.

——— (1917): „Class, Function, Concept, Relation“ (übers. v. Ph. E. B. Jourdain u. J. Stachelroth), in *The Monist* 27(1), 114-127.

——— (1948): „Sense and Reference“ (übers. v. M. Black), in *The Philosophical Review* 57(3), 209-230; unter dem Titel „On Sense and Reference“ in Geach/Black (ed.), 56-78.

——— (1949): „On Sense and Nominatum“ (übers. v. H. Feigl), in Feigl/Sellars (ed.), 85-102.

——— (1950a): *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (übers. v. J. L. Austin), Basil Blackwell, Oxford.

——— (1950b): „Frege Against the Formalists. I: A translation of part of *Grundgesetze der Arithmetik* (Volume II, Sections 86-103)“ (übers. v. M. Black), in *The Philosophical Review* 59(1), 79-93.

——— (1950c): „Frege Against the Formalists. II: A translation of part of *Grundgesetze der Arithmetik* (Volume II, Sections 104-123)“ (übers. v. M. Black), in *The Philosophical Review* 59(2), 202-220.

——— (1950d): „Frege Against the Formalists. III: A translation of part of *Grundgesetze der Arithmetik* (Volume II, Sections 124-137)“ (übers. v. M. Black), in *The Philosophical Review* 59(3), 332-345.

——— (1951): „On Concept and Object“ (übers. v. P. T. Geach, korr. v. M. Black), in *Mind* 60(238), 168-180.

——— (1976): *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel. Zweiter Band: Wissenschaftlicher Briefwechsel* (bearb., eingel., m. Amn. vers. v. G. Gabriel et al., ed.), Meiner, Hamburg.

——— (1989): „Briefe an Ludwig Wittgenstein“ (ed. v. A. Janik, red. u. Komm. v. Ch. P. Berger), in *Grazer Philosophische Studien* 33/34, 5-33.

Geach, Peter Thomas (1950): „Subject and Predicate“, in *Mind* 59(236), 461-482.

——— (1951): „Frege's *Grundlagen*“, in *The Philosophical Review* 60(4), 535-544.

——— (1988): „Editor's Preface“, in *Wittgenstein's Lectures on Philosophical Psychology 1946-47*, The University of Chicago Press, Chicago, xi-xv.

——— (1991): „A Philosophical Autobiography“, in H. A. Lewis (ed.), *Peter Geach: Philosophical Encounters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1-25.

Geach, Peter/Black, Max (ed.): *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Basil Blackwell, Oxford 1952.

Gethmann, Carl Friedrich (1984): „Formale Logik und Dialektik. Die Logik-Diskussion in der DDR 1951 bis 1958“, in C. Burrichter (ed.), *Ein kurzer Frühling der Philosophie. DDR-Philosophie in der ‚Aufbauphase‘*, Ferdinand Schöningh, Paderborn u.a., 75-155.

Gödel, Kurt (1931): „Diskussion zur Grundlegung der Mathematik am Sonntag, dem 7. Sept. 1930“, in *Erkenntnis* 2, 135-151.

——— (1944): „Russell's Mathematical Logic", in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University, Evanston/Chicago, 123-153.

Goodman, Nelson (1939): „Fifth Meeting of The Association for Symbolic Logic", in *JSL* 4(4), 176.

Goodstein, R. L. (1953): „Rez. v. Geach/Black (ed.)", in *The Mathematical Gazette* 37(320), 141-143.

Grünbaum, Adolf (1951): „Some Recent Writings in the Philosophy of Mathematics", in The Review of Metaphysics 5(2), 281-292.

Helmer, Olaf (1940): „Rez. v. Church (1936) u. (1938)", in *The Journal of Unified Science (Erkenntnis)* 8(5/6), 372.

Henderson, G. P. (1954): „Rez. v. Geach/Black (ed.)", in *The Philosophical Quarterly* 4(15), 183-184.

Hermes, Hans (1958): „Heinrich Scholz. Die Persönlichkeit und sein Werk als Logiker", in *Heinrich Scholz. Drei Vorträge gehalten bei der Gedächtnisfeier der Math.-Naturw. Fakultät der Universität Münster am 20. Dezember 1957*, Verlag Aschendorff, Münster Westf., 25-45.

——— (1986): „Logistik in Münster um die Mitte der Dreissiger Jahre", in J. Diller (ed.), *Logik und Grundlagenforschung. Festkolloquium zum 100. Geburtstag von HEINRICH SCHOLZ*, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster, 41-52.

Hermes, Hans/Scholz, Heinrich (1936): *Ein neuer Vollständigkeitsbeweis für das reduzierte Fregesche Axiomensystem des Aussagenkalküls*, Reprographischer Nachdruck der Ausgabe Leipzig 1937 in H. Scholz (ed.), *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge. Heft 1-8*, Verlag Dr. H. A. Gerstenberg, Hildesheim 1970, Heft 1.

——— (1952): *Mathematische Logik* (= *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band I 1, Heft 1, Teil I*), B. G. Teubner, Leipzig.

Hilbert, David (1923): „Die logischen Grundlagen der Mathematik", in *Mathematische Annalen* 88(1/2), 151-165.

Hoffmann, Ernst (1953): „Über den Gegenstand der formalen Logik", in Baumgarten u.a. (ed.), 73-84.

Jørgensen, Jørgen (1931): *A Treatise of Formal Logic. Its Evolution and Main*

Branches, with its Relations to Mathematics and Philosophy, Volumes I-III, Levin & Munksgaard/Humphrey Milford, Copenhagen/London.

——— (1932/33): „Über die Ziele und Probleme der Logistik“, in *Erkenntnis* 3, 73-100.

——— (1935): „Einige Hauptpunkte der Entwicklung der formalen Logik seit Boole“, in *Erkenntnis* 5, 131-142.

Jourdain, Philip E. B. (1908): „The Introduction of Irrational Numbers“, in *The Mathematical Gazette* 4(69), 201-209.

——— (1910): „Transfinite Numbers and the Principles of Mathematics. Part I“, in *The Monist* 20(1), 93-118.

——— (1911a): „The Philosophy of Mr. B*rtr*nd R*ss*ll. With Appendixes of Leading Passages from Certain Other Works“, in *The Monist* 21(4), 481-508.

——— (1911b): „Some Modern Advances in Logic“, in *The Monist* 21(4), 564-566.

——— (1912a): [Kapitel „Gottlob Frege“ aus] „The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics“, wiederabgedruckt in Frege (1976), 275-301.

——— (1912b): „Mr. Bertrand Russell’s First Work on the Principles of Mathematics“, in *The Monist* 22(1), 149-158.

——— (1915): „The Fundamental Laws of Arithmetic. Introductory Note“, in *The Monist* 25(4), 481-484.

JSL (1936a): „A Statement of Policy“, in *JSL* 1(1), 1.

——— (1936b): „Reviews“, in *JSL* 1(1), 42.

——— (1980): „Retirement of Alonzo Church as Editor“, in *JSL* 45(1), 191.

Kaila, Eino (1931): „Rez. v. Jørgensen (1931)“, in *Erkenntnis* 2, 467-468.

Kambartel, Friedrich (1969^2): „Bibliographie Heinrich Scholz“, in Scholz (1969^2), 453-470.

Kattsoff, Louis O. (1948): *A Philosophy of Mathematics*, The Iowa State College Press, Ames (Iowa).

King, Peter/Shapiro, Stewart (1995): „logic, history of“, in T. Honderich (ed.), *The Oxford Companion to Philosophy*, Oxford UP, Oxford/New York, 496-500.

Klaus, Georg (1953): „Der dialektische Materialismus und die mathematische Logik", in Baumgarten u.a. (ed.), 7-25.

Kleene, Stephen Cole (1984): „Interview with J. Barkley Rosser and Stephen C. Kleene in Madison, Wisconsin on 26 April 1984. The interviewer is William Aspray", *The Princeton Mathematics Community in the 1930s. An Oral-History Project*, http://www.princeton.edu/mudd/finding_aids/mathoral/pmc23.htm.

Kneale, William (1950): „Rez. v. Frege (1950a)", in *Mind* 59(235), 395-397.

——— (1956a): „Gottlob Frege and Mathematical Logic", in A. J. Ayer et al., *The Revolution in Philosophy*, MacMillan, London u.a. 1967, 26-40.

——— (1956b): „The Province of Logic", in H. D. Lewis (ed.), *Contemporary British Philosophy. Personal Statements. Third Series*, George Allen & Unwin/The MacMillan Company, London/New York, 235-261.

Kneale, William/Kneale, Martha (1962): *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford 1984.

Kreiser, Lothar (2001): *Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit*, Felix Meiner Verlag, Hamburg.

Kropp, Gerhard (1951): „Rez. v. *Philosophen-Lexikon*", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 6(1), 156-158.

Lamprecht, Sterling P. (1932): „Editor's Introduction", in Lewis/Langford (1932), ix-x.

Langer, Susanne K. (1937a): *An Introduction to Symbolic Logic*, George Allen & Unwin, London.

——— (1937b): „Rez. v. Scholz/Bachmann (1936) u. Scholz (1936b)", in *JSL* 2(1), 56-57.

Lejewski, Czeslaw (1965): „Rez. v. Kneale/Kneale (1962)", in *Philosophy* 40(151), 79-83.

Lenzen, V. F. (1952): „Rez. v. P. Frank et al. *Contributions to the analysis and synthesis of knowledge*", in *Isis* 43(1), 87-88.

Lewis, Clarence Irving/Langford, Cooper Harold (1932): *Symbolic Logic*, The Century Co., New York/London.

Linke, Paul F. (1926): „The Present Status of Logic and Epistemology in Germany", in *The Monist* 36, 222-255.

——— (1928): „Logic and Epistemology", weitgehend ununterscheidbare Fassung von Linke (1926) in E. L. Schaub (ed.), *Philosophy Today. Essays on Recent Developments in the Field of Philosophy*, Open Court, Chicago/London, 359-392.

——— (1936): *Verstehen, Erkennen und Geist. Zur Philosophie der psychologisch-geisteswissenschaftlichen Betrachtungsweise*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

——— (1946): „Gottlob Frege als Philosoph", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 1(1), 75-99.

——— (1947): „Die Wiedergeburt der Logik aus dem Geiste der Mathematik", in *Hamburger Akademische Rundschau* 2. Jahrgang (1947/48), 6. Heft, 263-269.

——— (1949): „Die mehrwertigen Logiken und das Wahrheitsproblem", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 3(3), 378-398.

——— (1952a): „Was ist Logik?", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 6(3), 372-398.

——— (1952b): „Eigentliche und uneigentliche Logik", wiederabgedruckt in *Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe* 2. Jahrgang (1952/53), 53-62.

——— (1953a): „Die Implikation als echte Wenn-so-Beziehung. Bemerkungen zu den Fundamental-Paradoxien der Logik", in *Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Gesellschafts- und Sprachwissenschaftliche Reihe* 3. Jahrgang (1953/54), Heft 1, 107-108.

——— (1953b): „Begrüßung", in Baumgarten u.a. (ed.), 5-6.

——— (1961): *Niedergangserscheinungen in der Philosophie der Gegenwart. Wege zu Ihrer Überwindung*, Ernst Reinhardt Verlag, München/Basel.

Linsky, Leonard (1953): „Rez. v. Geach/Black (ed.)", in *Philosophy of Science* 20(4), 342-343.

Lorenzen, Paul (1960): *Die Entstehung der exakten Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Łukasiewicz, Jan (1935): „Zur Geschichte der Aussagenlogik", in *Erkenntnis* 5, 111-131.

MacFarlane, John (2006ff.): „Alonzo Church's JSL Reviews", abrufbar unter (letzter Zugriff 13.10.2015): http://johnmacfarlane.net/church.html.

Manzano, María (1997): „Alonzo Church: His Life, His Work and Some of His Miracles“, in *History and Philosophy of Logic* 18, 211-232.

Marshall, William (1954): „Rez. v. Geach/Black (ed.)“, in *The Philosophical Review* 63(1), 120-122.

Mayer, Wolfgang (1976): „Bibliographie“, in M. Schirn (ed.), *Studien zu Frege III: Logik und Semantik*, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt, 157-197.

Maziarz, Edward A. (1952): „Rez. v. Frege (1950a)“, in *The New Scholasticism* 26(1), 91-92.

McCrea, W.H. (1951): „Rez. v. Frege (1950a)“, in *Philosophy* 26(97), 178-180.

McGuinness, Brian (1988): *Wittgensteins frühe Jahre*, Suhrkamp, Frankfurt a.M.

McKinsey, J. C. C. (1942): „Seventh Meeting of The Association for Symbolic Logic“, in *JSL* 7(1), 47.

Molendijk, Arie L. (1991): *Aus dem Dunklen ins Helle. Wissenschaft und Theologie im Denken von Heinrich Scholz. Mit unveröffentlichten Thesenreihen von Heinrich Scholz und Karl Barth*, Rodopi, Amsterdam/Atlanta.

Nagel, Ernest (1942): „Rez. v. Runes (ed.)“, in *JSL* 7(2), 90-91.

Neurath, Otto (1930/31): „Historische Anmerkungen“, in *Erkenntnis* 1, 311-314.

Neurath, Otto/et al. (1935): „Erster Internationaler Kongress für Einheit der Wissenschaft in Paris 1935 (Congrès International de Philosophie Scientifique)“, in *Erkenntnis* 5, 377-430.

Nidditch, Peter (1963): „Peano and the Recognition of Frege“, in *Mind* 72(285), 103-110.

Pape, Ingetrud (1951): „Philosophen-Kongreß in Bremen. Eine zusammenfassende Darstellung seiner Thematik“, in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 5(3), 421-434.

Papst, Wilma (1932): *Gottlob Frege als Philosoph*, Robert Klett & Co., Berlin.

Parsons, Charles (1981): „Rez. v. Geach/Black (ed.). Third edition“, in *JSL* 46(4), 870-871.

Piltz, Ernst (1908): *Dozenten-Album der Universität Jena. 1858 bis 1908. Verzeichnis der Professoren und Privatdozenten der Großherzoglich Herzoglich Sächsischen Gesamtuniversität Jena in der ersten Hälfte des vierten Jahrhunderts ihres Bestehens. Unter Benutzung amtlicher Quellen bearbeitet, chrono-*

logisch, nach Fakultäten und alphabetisch geordnet, mit biographischen Angaben, Neuenhahn, Jena.

Popper, Karl R. (1974): *Ausgangspunkte. Meine intellektuelle Entwicklung*, Hoffmann und Campe, Hamburg 1995[3].

Quine, Willard Van Orman (1934): *A System of Logistic. With a Foreword by A. N. Whitehead*, Harvard UP, Cambridge (Mass.).

——— (1936): „Rez. v. Scholz (1936a)“, in *JSL* 1(3), 113.

——— (1940a): *Mathematical Logic*, W.W. Norton, New York.

——— (1940b): „Rez. v. Church (1939a)“, in *JSL* 5(2), 71.

——— (1940c): „Rez. v. Church (1940a)“, in *JSL* 5(3), 114-115.

——— (1950): *Methods of Logic*, Henry Holt & Company, New York.

——— (1951): „Semantics and Abstract Objects“, in *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 80(1), 90-96.

——— (1985): *The Time of My Life. An Autobiography*, The MIT Press, Cambridge (Mass.)/London.

Quine, Willard Van Orman/Carnap, Rudolf (1990): *Dear Carnap, Dear Van. The Quine-Carnap Correspondence and Related Work* (ed. v. R. Creath), University of California Press, Berkeley u.a.

Rosinger, Kurt E. (1930): „Concerning the Symbols x and $x\hat{}$“, in *Annals of Mathematics* 31(2), 181-184.

Rosser, John Barkley (1984): „Interview with J. Barkley Rosser and Stephen C. Kleene in Madison, Wisconsin on 26 April 1984. The interviewer is William Aspray“, *The Princeton Mathematics Community in the 1930s. An Oral-History Project*, http://www.princeton.edu/mudd/finding_aids/mathoral/pmc23.htm.

Runes, Dagobert D. (ed.): *The Dictionary of Philosophy*, Philosophical Library, New York 1942.

Russell, Bertrand (1902): „Russell an Frege 16.6.1902“, in Frege (1976), 211-212.

——— (1903): *The Principles of Mathematics*, Allen & Unwin, London 1937[2].

——— (1905): „On Denoting“, zit. n. ders., *Essays in Analysis,* Allen & Unwin, London 1973, 103-119.

——— (1906): „The Theory of Implication“, in *American Journal of Mathematics*

28(2), 159-202.

——— (1914): *Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*, Open Court, Chicago/London.

——— (1917): „Mathematics and the Metaphysicians", in ders., *Mysticism and Logic and Other Eassys*, Barnes & Noble Books, Totowa 1981, 59-74.

——— (1918): „Descriptions and Incomplete Symbols", in ders., *The Philosophy of Logical Atomism*, Open Court, Chicago 1985, 109-123.

——— (1919): *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen & Unwin, London.

——— (1928): „Philosophy in the Twentieth Century", in ders., *Sceptical Essays*, George Allen & Unwin, London, 54-79.

——— (1935): „Bertrand Russell an Heinrich Scholz, Brief vom 18.11.1935", in Veraart (1976), 105.

——— (1936): „The Congress of scientific philosophy", in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Sorbonne Paris 1935. I: Philosophie Scientifique et Empirisme Logique*, Hermann & Cie, Paris, 10-11.

——— (1937): „Introduction to the Second Edition", in Russell (1903), v-xiv.

——— (1944a): „My Mental Development", in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University, Evanston/Chicago, 1-20.

——— (1944b): „Reply to Criticisms", in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University, Evanston/Chicago, 679-741.

——— (1945): *A History of Western Philosophy And Its Connection with Political and Social Circumstances from the Earliest Times to the Present Day*, Simon and Schuster, New York.

——— (1948): „Whitehead and Principia Mathematica", in *Mind* 57(226), 137-138.

——— (1956): *Portraits from Memory and Other Essays*, Allen & Unwin, London.

——— (1962): „Brief an Jean van Heijenoort vom 23.11.1962", in van Heijenoort (ed.), 127.

——— (1967): *The Autobiography of Bertrand Russell. Volume I: 1872-1914*, George Allen and Unwin, London 1971[4].

Ryle, Gilbert (1952): „The Philosophical Writings of Gottlob Frege" (= Rez. v. Geach/Black (ed.)), in *The Times Literary Supplement* 22. August, Nr. 2638, 553.

Schirn, Matthias (2010): „On Translating Frege's *Die Grundlagen der Arithmetik*", in *History and Philosophy of Logic* 31(1), 47-72.

Schischkoff, Georgi (1944): *Gegenwärtige philosophische Probleme der Mathematik*, Dr. Georg Lüttke Verlag, Berlin.

——— (1949): „Nach drei Jahren „Zeitschrift für philosophische Forschung"", in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 4(1), 3-5.

Schlote, Karl-Heinz/Dathe, Uwe (1994): „Die Anfänge von Gottlob Freges wissenschaftlicher Laufbahn", in *Historia Mathematica* 21, 185-195.

Schmidt, Arnold (1952): „Viertes Symposion. Philosophische Grundfragen der Logistik" (Protokoll), in H. Plessner (ed.), *Symphilosophein. Bericht über den Dritten Deutschen Kongreß für Philosophie Bremen 1950*, Leo Lehnen Verlag, München, 179-203.

Schmidt, Heinrich (1934^9): „Frege, Gottlob", in ders., *Philosophisches Wörterbuch*, Kröner, Leipzig, 190.

Schmidt am Busch, Hans-Christoph/Wehmeier, Kai F. (2005): „»Es ist die einzige Spur, die ich hinterlasse«. Dokumente zur Entstehungsgeschichte des Instituts für Mathematische Logik und Grundlagenforschung", in dies. (ed.), *Heinrich Scholz. Logiker, Philosoph, Theologe*, mentis, Paderborn, 93-101.

Scholem, Gershom (1977): *Von Berlin nach Jerusalem. Jugenderinnerungen (Erweiterte Ausgabe)*, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1997.

Scholz, Heinrich (1931): *Geschichte der Logik*, Junker und Dünnhaupt Verlag, Berlin.

——— (1933): „Was ist unter einer logistischen Konstituierung der Mathematik zu verstehen?", in *Semester-Berichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren* 2. Semester (1932/33), 59-85.

——— (1935a): „Was ist ein Kalkül und was hat Frege für eine pünktliche Beantwortung dieser Frage geleistet?", in *Semester-Berichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren* 7. Semester (Sommer 1935), 16-47.

——— (1935b): „Die neue logistische Logik und Wissenschaftslehre", in *Forschun-*

gen und Fortschritte. Nachrichtenblatt der Deutschen Wissenschaft und Technik 11(13), 169-171.

——— (1935c): „Rez. v. Frege (1934)“, in *Deutsche Literaturzeitung* LVI(4), Sp. 163-170.

——— (1935d): „Der Pariser Kongress für wissenschaftliche Philosophie“, in *Semester-Berichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren* 7. Semester (Sommer 1935), 114-119.

——— (1936a): „Die klassische und die moderne Logik“, in *Blätter für deutsche Philosophie* 10, 254-281.

——— (1936b): „Die klassische deutsche Philosophie und die neue Logik“, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Sorbonne Paris 1935. VIII: Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique*, Hermann & Cie, Paris, 1-8.

——— (1940): „Was ist Philosophie? Der erste und der letzte Schritt auf dem Weg zu ihrer Selbstbestimmung“, wiederabgedruckt in ders. (1969^2), 341-387.

——— (1941): „Gottlob Frege“, wiederabgedruckt in ders. (1969^2), 268-278.

——— (1942): „Zur Erhellung des Verstehens“, in H. Wenke (ed.), *Geistige Gestalten und Probleme. Eduard Spranger zum 60. Geburtstag*, Verlag von Quelle & Meyer, Leipzig, 291-310.

——— (1948): „Rez. v. Linke (1946)“, in *JSL* 13(3), 154.

——— (1969^2): *Mathesis Universalis. Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft* (hrsg. v. H. Hermes, F. Kambartel, J. Ritter), WBG, Darmstadt.

Scholz, Heinrich/Bachmann, Friedrich (1936): „Der wissenschaftliche Nachlass von Gottlob Frege“, in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Sorbonne Paris 1935. VIII: Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique*, Hermann & Cie, Paris, 24-30.

Scholz, Heinrich/Schweitzer, Hermann (1935): *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheitsverwandtschaften*, Felix Meiner, Leipzig.

Schröter, Karl (1943): *Axiomatisierung der Fregeschen Aussagenkalküle*, Reprographischer Nachdruck der Ausgabe Leipzig 1943 in H. Scholz (ed.), *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge. Heft 1-8*, Verlag Dr. H. A. Gerstenberg, Hildesheim 1970, Heft 8.

Sluga, Hans (1984): „Frege: the early years“, in R. Rorty et al. (ed.), *Philosophy in History. Essays on the historiography of philosophy*, Cambridge UP, Cambridge u.a. 1990, 329-356.

Smart, H. R. (1945): „Frege's Logic“, in *The Philosophical Review* 54(5), 489-505.

Stadler, Friedrich (1997): *Studien zum Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext*, Suhrkamp, Frankfurt a.M.

Stammler, Gerhard (1928): *Begriff Urteil Schluss. Untersuchungen über Grundlagen und Aufbau der Logik*, Max Niemeyer Verlag, Halle/Saale.

Steele, Domhnall A. (1951): „Rez. v. Frege (1950a)“, in *Scripta Mathematica* 17, 260-262.

Strawson, Peter F. (1998): „Intellectual Autobiography“, in L. E. Hahn (ed.), *The Philosophy of P. F. Strawson*, Open Court, Chicago/Lasalle, 3-21.

Stroll, Avrum (1966): „On the First Flowering of Frege's Reputation“, in *Journal of the History of Philosophy* 4(1), 72-81.

Tarski, Alfred (1937): *Einführung in die Mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Wien.

Thiel, Christian (1986): „Einleitung des Herausgebers“, in G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Centenarausg. m. erg. Texten krit. ed. v. Ch. Thiel), Felix Meiner Verlag, Hamburg, XXI-LXIII.

——— (1995): „Nicht aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht“: Die Begriffsschrift 1879 und 1893“, in I. Max/W. Stelzner (ed.), *Logik und Mathematik. Frege- Kolloquium Jena 1993*, de Gruyter, Berlin/New York, 20-37.

——— (1998): „Gottlob Freges späte Wirkung“, 18 S., unveröff. Ms.

——— (2007): „Begriffsbildungen der mathematischen Analysis als Anlaß zur Entwicklung der Quantorenlogik“, in F. Minazzi (ed.), *Filosofia, scienza e bioetica nel dibattito contemporaneo. Studi internazionali in onore di Evandro Agazzi*, Presidenza del Consiglio dei Ministri, Dipartimento per l'informazione e l'editoria; Instituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Roma, 927-933.

Thomas, Ivo (1952): „Short notice of Geach/Black (ed.)“, in *Dominican Studies. An Annual Review* 5, 256.

Thomas, Ivor (1950): „Mathematical Concepts“ (= Rez. v. Frege (1950a)), in *The Times Literary Supplement* 14. April, Nr. 2515, 230 [lt. *TLS* nicht Ivo Thomas, sondern „Thomas, Ivor, later Ivor Bulmer-Thomas“].

Thompson, Manley (1952): „Rez. v. Geach/Black (ed.)“, in *Ethics* 63(1), 73.

Tucker, Albert (1984): „Areas of Mathematical Research at Princeton in the 1930s“ (= „Interview of Albert Tucker in his office at Princeton University on 11 July 1984. The interviewer is William Aspray“), *The Princeton Mathematics Community in the 1930s. An Oral-History Project*, http://www.princeton.edu/mudd/finding_aids/mathoral/ pmc33.htm.

van Heijenoort, Jean (1956): „Rez. v. Freytag-Loeringhoff et al. *Philosophische Grundfragen der Logistik*“, in *JSL* 21(2), 204-206.

——— (ed.): From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard UP, Cambridge (Mass.), 1967.

Veatch, Henry (1954): „Rez. v. Geach/Black (ed.)“, in *Thomist; a Speculative Quarterly Review* 17, 104-111.

Venn, John (1880): „Rez. v. G. Frege *Begriffsschrift*“, in *Mind* 5(18), 297.

Veraart, Albert (1976): „Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges“, in M. Schirn (ed.), *Studien zu Frege I: Logik und Philosophie der Mathematik*, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt, 49-106.

Vilkko, Risto (1998): „The Reception of Frege's Begriffsschrift“, in *Historia Mathematica* 25, 412-422.

Warnock, Geoffrey J. (1973): „Saturday Mornings“, in I. Berlin et al., *Essays on J. L. Austin*, Clarendon Press, Oxford, 31-45.

Wehmeier, Kai F./Schmidt am Busch, Hans-Christoph (2000): „Auf der Suche nach Freges Nachlaß“, in G. Gabriel/U. Dathe (ed.), *Gottlob Frege. Werk und Wirkung. Mit den unveröffentlichten Vorschlägen für ein Wahlgesetz von Gottlob Frege*, mentis, Paderborn, 267-281.

Weinberg, Julius Rudolph (1939): „Rez. v. *Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique*“, in *The Philosophical Review* 48(2), 234.

Weiss, Paul (1936): „The first meeting of the Association for Symbolic Logic“, in *JSL* 1(3), 120.

Wells, Rulon (1952): „Rez. v. Church (1951a)“, in *JSL* 17(2), 133-134.

White, Morton G. (1948): „On the Church-Frege Solution of the Paradox of Analysis“, in *Philosophy and Phenomenological Research* 9(2), 305-308.

Whitehead, Alfred North/Russell, Bertrand (1910): *Principia Mathematica. Volume I*, Cambridge UP, Cambridge 1968.

Wille, Matthias (2013): *Frege. Einführung und Texte*, Wilhelm Fink, Paderborn.

Wittgenstein, Ludwig (1919): *Tractatus logico-philosophicus*, zit. n. ders., *Werkausgabe Band 1*, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1984.

——— (1936): „Ludwig Wittgenstein an Heinrich Scholz, Brief vom 9.4.1936“, in Veraart (1976), 106.

——— (1967): *Zettel*, zit. n. ders., *Werkausgabe Band 8*, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1984.

——— (1977): *Vermischte Bemerkungen*, zit. n. ders., *Werkausgabe Band 8*, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1984.

ZphF (1947): „In Verbindung mit der Schule für Logistik...“, in *Zeitschrift für philosophische Forschung* 1(4), 607.

Adressen der Autoren

Thomas Bedürftig
Universität Hannover
Institut für Didaktik der Mathematik und Physik
Welfengarten 1
D-30167 Hannover
beduerftig@idmp.uni-hannover.de

Matthias Wille
Institut für Philosophie
Fakultät für Geisteswissenschaften
Universität Duisburg-Essen
Universitätsstraße 12
D-45117 Essen
matthias.wille@uni-due.de

Alessa Binder
Gewerbliche Schule Schwäbisch Hall
Max-Eyth-Straße 9
D-74523 Schwäbisch Hall
alessa.binder@gbs-sha.de

Martin Janßen
AG Jahnke
Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen
Thea-Leymann-Str. 9
D-45127 Essen
martin.janssen@uni-due.de

Elisabeth Pernkopf
Karl-Franzens-Universität Graz
Universitätsplatz 3
AT-8010 Graz
elisabeth.pernkopf@edu.uni-graz.at

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., Preis: 22,– Euro

Susanne Spies:
Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., Preis: 22,– Euro

Henrike Allmendinger:
Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., Preis: 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz und Tilman Sauer & Gregor Nickel

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)